

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA ENSİKLOPEDİYASI

C. E. ALLAHVERDİYEV,

H. M. ƏHMƏDOVA,



AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI TERMINOLOGİYA
KOMİSSİYASının 5 may 2008-ci il № T/4 qərarı ilə nəşr olunur.

10322

Rəyçilər:

akademik *T. A. ƏLİYEV*;
akademik *A. C. HACİYEV*

Tərtib etdi:

H. M. ƏHMƏDOVA

Ensiklopediyanın hazırlanmasında iştirak etdilər:

Məsul baş redaktor: *G. A. NƏBİYƏVA*

Redaktor: *Ü. E. HƏSƏNOVA*

Kompyuter dizayneri və bədii redaktor: *H. Ə. CƏFƏROVA*

Texniki redaktor: *Ə. Q. RƏHİMOV*

Korrektor: *G. F. ƏHMƏDOVA, Ü. E. HƏSƏNOVA*

Kompyuter yığımı: *H. Ə. CƏFƏROVA, G. F. ƏHMƏDOVA, Ü. E. HƏSƏNOVA*

ISBN 978 – 9952 – 453 – 47 – 8

1602090000
655(07) – 2010

© «ELM», 2010

ÖN SÖZ

Hörmətli oxucu!

Sizə təqdim olunan «Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası» ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika və onun əhatə etdiyi sahələr üzrə Azərbaycan leksikasında yazılmış ilk Ensiklopediyadır. Əvvəlcə müəlliflərin «Azərbaycanca – türkçə – rusca – ingiliscə» dördillik lüğəti əsasında izahlı lüğətin tərtibi nəzərdə tutulmuşdu. Sonradan müəlliflər bunu ensiklopediya kimi tərtib etməyi və hazırlamağı məqsəda uyğun hesab etmişlər.

Ensiklopediyanın nəşrini respublikamızda əlamətdar hadisə kimi qiymətləndirmək olar.

Son illər cəmiyyətin sürətlə gedən inkişafı yeni biliklərə qısa zamanda yiyələnməni tələb edir. Elm və texnikanın inkişafı, elmin yeni sahələrinin və istiqamətlərinin yaranması, elmin müxtəlif sahələrinin bir-birinə qovuşması, yeni müasir terminlərin və anlayışların yaranmasına səbəb olmuşdu. Ona görə də, bu sahələri əhatə edən, müasir elm və texnikanın tələblərinə cavab verən müxtəlif ensiklopedik lüğətlərin və ensiklopediyaların nəşri zamanın tələbatına çevrilmişdi. Amma, bu gün Azərbaycan dilində mövcud olan ensiklopedik lüğətlər və ensiklopediyalar sürətlə inkişaf edən elm və texnikanın tələblərinə cavab vermir. Bu səbəbdən yeni ensiklopedik lüğətlərin və ümumiyyətlə, ensiklopediyaların nəşrinə böyük ehtiyac yaranır.

Təqdim olunan «Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediya»-sında:

- ardıcıl analiz, dispersion analiz, regression analiz, korrelyasion analiz;
- ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatikası;
- ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika termin və anlayışları (bunlar üç – azərbaycan, rus və ingilis dillərində verilmişdir);
- ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın tarixi;
- ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə bağlı metodlar;
- informatika nəzəriyyəsi;
- integral həndəsə;
- kombinatorika;
- kriptografiya;
- meteorologiya;
- ölçü nəzəriyyəsi;
- proqnoz;
- riyazi sığorta nəzəriyyəsi;
- stoxastik həndəsə;
- stoxastik maliyyə riyaziyyatı;

– təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi
ensiklopedik məqalələr şəklində şərh olunmuşdur.

Ensiklopediyada verilmiş hər bir sahə üzrə məqalələr geniş və dərin elmi xarakter daşıyır, bu sahənin əsas anlayışlarını əhatə edir, onlar haqqında kifayət qədər məlumat verərək, eyni zamanda bu sahənin müasir vəziyyətindən xəbər verir. Ensiklopedik biliklər bir nəşrdə toplandığı üçün, oxuculara rahat və qısa zamanda ətraflı məlumat verərək, cəmiyyətin müxtəlif təbəqələrinə – tələbələrə, aspirantlara, müəllimlərə, müxtəlif sahələrdə çalışan alim və mütəxəssislərə, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın termin və anlayışlarından istifadə edən və ümumiyyətlə, bu və bu sahə ilə bağlı olan elmin müxtəlif istiqamətlərində çalışan və maraqlanan insanların tələblərinə xidmət edə biləcəkdir.

Azərbaycanda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın inkişafı XX əsrin 60-cı illərinə təsadüf etsə də, bu sahənin müxtəlif metod və yanaşmaları bir çox sahələrdə, tibbdə, biologiyada, geologiyada, hüquq və digər sahələrdə geniş istifadə olunur.

Oxucuların nəzərinə təqdim olunan "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası"nda toplanan termin və anlayışların əsasını müəlliflərin 2002-ci ildə Bakıda "Gənclik" nəşriyyatında çap olunmuş "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika" terminoloji lüğəti təşkil edir. Sözsüz ki, burada yeni yaranan terminlər də öz əksini tapmışdır. Ensiklopediyanın əsasını ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika və bunlarla bağlı digər sahələri əhatə edən, bu sahələrdə geniş istifadə olunan termin və anlayışları izah və şərh edən məqalələr dərc olunmuşdur. Toplanan məqalələr geniş oxucu kütləsi üçün nəzərdə tutulduğundan mümkün qədər sadə şəkildə, eyni zamanda müasir elmin tələblərinə cavab verərək hazırlanmışdı.

Ensiklopediyanın hazırlanmasında akademik İ. M. Vinqradovun rəhbərliyi ilə nəşr olunmuş "Математическая энциклопедия", akademik Yu. V. Proxorovun rəhbərliyi altında nəşr olunmuş "Математический энциклопедический словарь" və "Теория вероятностей и математическая статистика. Энциклопедия", K. A. Borovkovun "Russian – English Dictionary on Probability, Statistics and Combinatorics" və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ilə bağlı ədəbiyyatdan geniş istifadə olunmuşdur.

Azərbaycan dilində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın inkişafı XX əsrin sonuna təsadüf etsə də, bu gün bu sahə və onunla sıx əlaqəli digər sahələr (informatika, kibernetika, bioinformatika, riyazi iqtisadiyyat və d.) sürətlə inkişaf edir. Digər tərəfdən müasir elmin müxtəlif istiqamətləri, məsələn, informatika, kibernetika, kommunikasiya texnologiyalarının inkişafı ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif sahələrinin inkişafı ilə bağlıdır. Ona görə də, Azərbaycan dilində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində ensiklopediyanın nəşri müxtəlif elm sahələrinin tələblərinə cavab verərək, onların və eyni zamanda ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına təkan olacaqdır.

Ensiklopediyada təqdim olunan 5200 termin və anlayışlara aid məqalələr əlifba prinsipi ilə verilmişdir. Hər terminin adı azərbaycan, ingilis və rus dillərində verilir. Belə yanaşma ədəbiyyatda rus ya ingilis dilində rast gələn terminlərin azərbaycan dilində geniş izahının əldə edilməsinə kömək edəcək. Məqalələrin adı qəbul olunmuş qaydada yazılır. Adı iki sözdən ibarət olan bəzi məqalələrdə əsas söz öndə yazılır (məsələn, **Aşma-enməsi, təsadüfi proseslərin və meydanların; Hasili, ölçülərin; Planlaşdırılması, süzgəcləyici eksperimentlərin** və s.).

Ensiklopediyanın sonunda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxabatı verilmişdir. Müntəxabata P. Laplasın "Ehtimal nəzəriyyəsinə fəlsəfi baxış", V. Yu. Bunyakovskinin "Ehtimal nəzəriyyəsinin əsasları", akademik S. N. Bernşteynin "Ehtimal nəzəriyyəsinin müasir vəziyyəti" və akademik A. N. Kolmoqorovun "Математика, ее содержание, методы и значение" kitabının 2-ci cildindən "Ehtimal nəzəriyyəsi" fəslə daxil edilmişdir. Müntəxabatın sonunda Ehtimal nəzəriyyəsinin klassikləri olan A. N. Kolmoqorov və digər alimlər tərəfindən hazırlanmış, Böyük Sovet Ensiklopediyasının ikinci nəşrində dərc olunmuş məqalələr verilmişdir.

Ensiklopediyanın sonunda termin və anlayışların qarşısında səhifələri verilməklə göstərici verilmişdir.

Ensiklopediyadan istifadə etmək qaydaları:

məqalə—terminlər əlifba prinsipi ilə düzülmüşdür.

məqalə—terminlər əsasən tək halda verilir.

Bəzi məqalələrin adı bir neçə variantda, məs., **stoxastik / ehtimali nüvə; tezliklərin üst-üstə düşməsi / tezliklərin dəyişdirilməsi / elayzing; donmalar / feydinq** və s. verilir.

Məqalənin adı **BÖYÜK QALIN** çap hərflərilə, ingilis, rus variantları isə **KİÇİK QALIN** çap hərflərilə yığılmışdır.

Bu məqalələrdə müasir ehtimal nəzəriyyəsinin onunla bağlı sahələrinin mümkün qədər tam şərhə verilmişdir.

Məqalələrin bir tipi qısa məlumat – təriflər şəklində verilmişdir.

Əcnəbi müəlliflərin adları mətnə həmin ölkənin müvafiq əlifbası ilə yazılmışdır.

Ensiklopediyadan termin və ya anlayışları tapmaq üçün müraciət—məqalənin adı mötərizədə «bax,» sözündən sonra kursivlə yığılmışdır.

Əgər məqalənin adına hər hansı bir alimin adı daxildirsə, o ad birinci olaraq yazılır. Məqalələr əksər hallarda tək halda verilir. Məqalə içərisində digər məqalələrə müraciət olunduğu halda həmin məqalə kursivlə verilir. Anlayışın məntiqi tərifində məqalənin adındakı terminə istinad edilməklə göstərilir.

Qeyd: Yuxarıda adları çəkilən ədəbiyyatda verilməmiş termin və anlayışlar, bu ensiklopediyada, yuxarıda sol tərəfdə ulduzla qeyd olunmuşdur.

Məqalələrin əksəriyyətinin sonunda ədəbiyyat siyahısı verilmişdir ki, bu da ensiklopediyadan istifadənin daha da dərinlən mənimsənilməsi üçün faydalıdır.

Ensiklopediyanın redaktə və korrektə olunmasında, xüsusilə, G. A. Nəbiyevanın, bütün düsturların korrektə olunmasında Ü. E. Həsənovanın, termin və anlayışların düzülüşü və termin və anlayışların göstəricisinin tərtibatında G. F. Əhmədovanın, şəkillərin tərtibatında H. Ə. Cəfərovanın və illüstrasiyaların hazırlanmasında A. B. Rəhimovun böyük xidmətləri olmuşdur.

Müəlliflər Ensiklopediyaya öz rəylərini bildirdiklərinə görə akademik T. A. Əliyev və akademik A. C. Hacıyevə və bu ensiklopediyanın hazırlanması prosesində böyük qayğı göstərmiş AMEA-nın Kibernetika İnstitutunun direktoru T. A. Əliyevə öz dərin minnətdarlıqlarını bildirirlər..

Ensiklopediyaya daxil olunmuş yeni termin və anlayışlar, demək olar ki, Azərbaycan dilində ilk dəfə işlədilir. Bununla əlaqədar olaraq, müəlliflər təklif və iradlarını aşağıdakı ünvana göndərən oxuculara öz minnətdarlıqlarını bildirirlər:

Az1141, Azərbaycan Respublikası, Bakı şəhəri, F. Ağayev küç. 9.

Tel. (99412) – 4390151; 4393943; Fax: (99412) – 4392826,

E-mail: cyber@cyber.ab.az.

ABEL İNTEGRAL TƏNLİYİ « Абеля интегральное уравнение; Abel integral equation » –

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{x-s}}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

inteqral tənliyidir, burada $f(x)$ – verilmiş funksiya, $\varphi(s)$ – axtarılan funksiya. $f(x)$ kəsilməz, differensiallanan funksiya olduqda ($f(x)$ üzərinə qoyulan şərtlər olduqca zəif götürülə bilər) A. i. t.-nin yeganə həlli vardır. Bu halda, əgər $f(0) = 0$ olarsa, tənliyin həlli

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{f'(z) dz}{\sqrt{s-z}} \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Bu tənlik üçün $f(0) = 0$ şərtini götürmədikdə, A. i. t.-nin həlli aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z) dz}{\sqrt{s-z}} \right].$$

Aşağıdakı ehtimal məsələsi A. i. t.-nin həllinə gətirilir. $X = (X_1, X_2)$ – ikiölçülü təsadüfi vektor, $p_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ isə bu

vektorun yalnız $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ kəmiyyətindən asılı olan paylanması sıklıq funksiyası (yeni X vektorunun paylanması dairevi simmetriyaya malikdir) olsun; X_1 komponentinin paylanmasının sıklıq funksiyası $p_{x_1}(x_1)$ -in verildiyi fərz olunur. X təsadüfi vektorunun paylanmasını təyin etmək tələb olunur (bunun prinsipcə mümkünlüyü *Kramer – Vold teoremindən* alınır. *Sferik simmetrik paylanmaya* da bax). $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ – X vektorunun uzunluğu, $p_R(r)$ – uyğun ehtimal paylanmasının sıklıq funksiyası olsun; onda

$$p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = (2\pi r)^{-1} p_R(r).$$

$|X_1|$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması iki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət hasilinin paylanması ilə üst-üstə düşür; bu kəmiyyətlərdən birincisinin paylanması R -in paylanması ilə eynidir, ikincisinin paylanması isə vahid uzunluqlu $e = (e_1, e_2)$ ikiölçülü vektorunun absis oxuna proyeksiyası e_1 -in uzunluğunun paylanması ilə eynidir; e vektorunun bütün istiqamətləri eyni ehtimalı fərz olunur (bax, [2], fəsil I, §10). Tam ehtimal düsturuna əsasən $x_1 > 0$ olduqda

$$p_{|x_1|}(x_1) = \int_0^1 \frac{1}{z} p_R\left(\frac{x_1}{z}\right) p_{|e_1|}(z) dz = \int_0^1 \frac{1}{2} p_R\left(\frac{x_1}{z}\right) \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

$$\frac{1}{x_1^2} = x, \quad xz^2 = s, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} p_{|x_1|}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = f(x),$$

$$\frac{1}{\pi s} p_R\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \varphi(x)$$

götürdükdə, $f(x)$ və $\varphi(s)$ -in (1) münasibətilə əlaqəli olduğu aydın görünür. φ isə f ilə uyğun olaraq (2) düsturu ilə ifadə olunur.

Yuxarıda qoyulmuş məsələ, A. i. t.-nin həllinə yalnız *dim. – ölçüsü 2* olan halda deyil, hətta ixtiyari cüt *dim. – ölçülü* hala da gətirilir.

A. i. t. tarixən ilk inteqral tənlik olmuşdur. Bu inteqral tənlik N. Abel tərəfindən (bax, [1]) 1823-də aşağıdakı maraqlı mexaniki məsələ ilə (Abel məsələsi) bağlı alınmışdır. Maddi nöqtə sükunət vəziyyətindən çıxaraq (u, x) koordinat sisteminə şaquli müstəvidə yerləşən hamar əyri üzrə hərəkət edir. Bu nöqtənin x hündürlüyündən başlayaraq özünün aşağı – $(0, 0)$ vəziyyətinə çatması üçün zəruri olan t müddəti verilmiş $t(x)$ funksiyasıdır.

Əyrinin formasını təyin etmək tələb olunur. Bu məsələ üçün A. i. t. (1), $f(x) = \sqrt{2g} t(x)$ olur, g – ağırlıq qüvvəsinin

təcili. $\varphi(s) = \frac{1}{\sin \omega}$, ω isə ordinatı s -ə bərabər nöqtədə

əyrinə toxunanlar və absis oxu istiqamətləri arasındakı bucaqdır. Əyrinin tənliyi

$$u = \int_0^x \sqrt{\varphi^2(s) - 1} ds$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Buraya $f(x) = \text{const}$ halı da daxildir; bu hala Abel məsələsində $t(x) = \text{const}$ halı uyğun olur ki, bu zaman axtarılan əyri tsikloidir [X. Huygens (Ch. Huygens, 1673)].

Əd.: [1] A b e l N. H., Oeuvres complètes, t. 1, Christiania, 1839, p. 27–30; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] П р и в а л о в И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М. – Л., 1937; [4] К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1, 3 изд., М., 1951.

ABEL QRUPU « абелева группа; Abelian group », kommutativ qrup – kommutativ (yerdəyişmə) xassəli əməl təyin olunmuş qrupdur. Ehtimal paylanmalarının daşıyıcıları kimi belə A. q.-larından ədəd oxu və ya n – ölçülü Evklid fəzası (ədədlərin və ya vektorların adi toplama əməli ilə) ehtimal nəzəriyyəsinin klassik obyektidir. Digər A. q.-larında təsadüfi kəmiyyətlərə baxılması zəruriliyi təbii olaraq yaranır (bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* cəbri strukturlarda. *Ehtimal ölçüsü* qrupda). Ehtimal nəzəriyyəsinin A. q.-larında bəzi xüsusiyyətləri aşağıdakı ən sadə misalda şərh olunmuşdur.

Misal 1 (tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin mod 2 üzrə toplanması). 0 və 1 elementlərindən ibarət, toplama qaydası

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$$

münasibətlərlə təyin olunmuş A. q. G verilir. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq. $P\{\xi_n=0\}=q_n$, $P\{\xi_n=1\}=p_n=1-q_n$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

olsun, burada toplama qeyd olunmuş qrup əməli mənasında anlaşılır (yəni $S_n = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri cəminin adi mənada 2-yə bölünməsindən alınan qalığa bərabərdir). Onda:

a) əgər hər hansı bir n_0 qiymətində ξ_{n_0} kəmiyyəti G -də «müntəzəm» qanunla paylanmışdırsa, yəni $p_{n_0} = q_{n_0} = 1/2$ olarsa, onda $n > n_0$ olan bütün n qiymətləri üçün S_n «müntəzəm» qanunla paylanır;
b) əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(p_n, q_n) = \infty$$

olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda S_n limitdə «müntəzəm» qanunla paylanır.

c) əgər a) şərti ödənilmirsə, onda b) şərti S_n cəmlərinin paylanmalarının «müntəzəm» paylanmaya yığılması üçün yalnız kafi deyil, eyni zamanda zəruri şərtidir; bu halda limit – «müntəzəm» paylanması G qrupunda yeganə cırlaşmayan invariant paylanmadır.

A. q.-da oxşar tipli limit teoremlərinin öyrənilməsində adi, xarakteristik funksiyalar metodunun analoqu istifadə olunur (bax, *Fürvə çevirməsi* qrupda ehtimal paylanmalarının).

Əd.: [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] С а з о н о в В. В., Т у т у б а л и н В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 3–35; [3] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [4] D v o r e t z k y A., W o l f o w i t z J., «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 501–07; [5] Probability measures on metric spaces, L. – N. Y., 1967.

ABEL TEOREMLƏRİ « Абеля теоремы; Abel theorems » A b e l tipli teoremlər, – hər hansı bir funksiyanın Laplas çevirməsinin bu funksiyanın özünün asimptotikası üzrə asimptotikasının tərifi üçün iddialar toplusudur.

8 ABEL

Misal 1.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad s > 0$$

bərabərliyinə əsasən fərz etmək olar ki, $x \rightarrow \infty$ olduqda $f(x)$ ələ funksiya olarsa ki,

$$f(x) \sim x^{\alpha-1}$$

münasibəti ödənilsin, onda $s \downarrow 0$ olduqda

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}$$

münasibəti doğrudur. Əgər $f(x)$ ixtiyari sonlu intervalda mütləq inteqrallandırsa, onda bu hökm doğrudur və o, Abel tipli teoremlərə ən sadə misaldır.

Misal 2. Fərz olunur ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ədədi sırası yığılır və bu sıranın cəmi A -ya bərabərdir. $|z| < 1$ şərtini ödəyən z -lər üçün

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

funksiyası $z \uparrow 1$ olduqda

$$f(z) \rightarrow A$$

asimptotik münasibətini ödəyir (qüvvət sıraları üçün Abel teoreminin xüsusi halı).

Misal 1-ə analoji hal aşağıdakı kimidir. $0 < z < 1$ olduqda $z = e^{-s}$ və

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

olsun. Onda

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x) = s \int_0^{\infty} e^{-sx} G(x) dx.$$

$x \rightarrow \infty$ olduqda $G(x) \rightarrow A$ olduğundan, $s \rightarrow 0$ olduqda

$$f(z) \sim s \int_0^{\infty} e^{-sx} A dx = A$$

münasibətinin doğru olduğu təbiiidir.

Abel tipli teoremlər ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərinin isbatında, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və s. tətbiq olunur. Bu teoremlər onlara tərs *Tauber teoremləri* ilə olduqca tamamlanır.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ABEL TIPLİ TEOREMLƏR « абелева тип теоремы; Abel theorems » – bax, *Abel teoremləri*.

ABSTRAKT ERQODİK TEOREM « абстрактная эргодическая теорема; abstract ergodic theorem » – bax, *Erqodik teoremlər*.

ABSTRAKT HƏLLEDİCİ QAYDA « абстрактное решающее правило; abstract decision rule » – bax, *Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi*.

AÇIQ XİDMƏT SİSTEMİ « разомкнутая система обслуживания; open queueing system » – bax, *Xidmət sistemi*.

AÇIQ TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « открытое случайное множество; open random set » – açıq çoxluqların $\mathcal{G}$ topoloji fəzasında *təsadüfi elementdir*. $\mathcal{G}$ fəzasında $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

topologiyası aşağıdakı kimi təyin olunur: S – separabel Hausdorf lokal kompakt topoloji fəza, $\mathcal{G}$ – bu fəzanın açıq altçoxluqları çoxluğu; $G \in \mathcal{G}$, K , – S -də mümkün olan bütün kompaktlar olsun.

$$\mathcal{G}^G = \{M: M \in \mathcal{G}, M \cap G = \emptyset\},$$

$$\mathcal{G}_K = \{M: M \in \mathcal{G}, M \cap K = \emptyset\},$$

siniflərini özündə saxlayan (ən kiçik) minimal topologiya $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, – $\mathcal{G}$ fəzasında təyin olunmuş topologiyadır. Bax, *Təsadüfi çoxluq*.

AÇIM₍₁₎ seçimin « размах (широта) выборки; sample range », seçimin dəyişmə aralığı – $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ variasion sırasının kənar elementlərinin fərqi – $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ kəmiyyətinə deyilir. X_i , $1 \leq i \leq n$ asılı olmayan, ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, W_n -in paylanma funksiyası

$$P\{W_n < x\} = n \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+t) - F(t))^{n-1} dF(t), \quad x \geq 0$$

düsturu ilə ifadə olunur. Seçimin A. çox vaxt miqyas parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Bəzi hallarda (senzurlanmış seçimlər, robust qiymətləndirmə) A. əvəzinə **kvazi-azım** (rus. квазиразмах) adlanan $W_{r,s} = X_{(s)} - X_{(r)}$,

$1 \leq r < s \leq n$ kəmiyyətlərdən istifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlər normal qanunla paylandığı halda seçimin A. və kvazi-azımlar seçimi ortadan asılı olmur.

Əd.: [1] Дейвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

ADAMAR MATRİSİ « Адамара матрица; Hadamard matrix » eksperimentin planlaşdırılmasında – elementləri +1 və -1 olan $N > 1$ tərtib ele H_N kvadrat matrisidir ki, bu matris üçün

$$H_N^T H_N = N E_N$$

şərti ödənilir, burada E_N – vahidi matrisdir. A. m.-lər belə matrislərin determinantının ekstremal xassələrini tədqiq edən J. Adamarın adı ilə adlandırılmışdır (bax, [1]). Qeyd etmək lazımdır ki, $N = 2$ halı C. Silvestr tərəfindən araşdırılmışdır (bax, [2]).

A. m.-nin birinci sətir və birinci sütun elementləri yalnız +1 olarsa, onda bu matris **normal**laşdırılmış matris adlanır. A. m.-nin varlığının zəruri şərti: $N \equiv 0 \pmod{4}$ və ya $N = 2$

olmasıdır. Bu şərtin kafi olub-olmaması, hələ ki, müəyyən olunmamışdır. Eksperimentin planlaşdırılmasında, A. m.-nin qurulması məsələsi iki tip modelin naməlum parametrlərindən p -nin ($p \leq N$) qiymətləndirilməsində alınır. I model birinci tərtib polinom şəklində olur, II model isə I modeldən özündə sərbəst həddin olmaması ilə fərqlənir. Matrisin planı kimi, I model üçün normallanmış A. m.-nin $N - 1$ sayda sondakı sütunlarından

ixtiyari $p - 1$ saydasından və II model üçün A. m.-nin ixtiyari p sayda sütunundan istifadə edildikdə, ortoqonal planlaşdırılma adlandırılan planlaşdırılma alınır (yeni diaqonal informasiyon matrisi olan planlaşdırılma). A. m.-ndən natamam planların və digər planlama sxemlərinin qurulmasında istifadə olunur.

Əd.: [1] H a d a m a r d J., «Bull. sci. math.», sér. 2, 1893, t. 17, p. 240–46; [2] S y l v e s t e r J. J., «Phil. Mag.» 1867, v. 34, p. 461–72; [3] Новые идеи в планирование эксперимента, М., 1969; [4] H e d a y a t A., W a l l i s W. D., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, p. 1184–238.

ADAPTASIYA ALQORİTMİ « адаптации алгоритм; adaptation algorithm » – optimal metodlardan qarışıq surətdə istifadə edərək, çatışmayan və ya naməlum informasiyanı bərpa etmək, müşahidələrin təkmilləşdirilməsinə əsaslanmaqla statistik qiymətlərin təyin olunma qaydasıdır. A. a. alqoritm parametrlərinin optimal qiymətləri müşahidələrin naməlum paylanmasının xarakteristikalarından (funksionallardan) asılı olduğu halda tətbiq olunur. Bu xarakteristikaların statistik qiymətləri əsasında alqoritm parametrləri seçilir.

A. a.-ləri asimptotik mənada effektiv (olduqca optimal) olur.

Əd.: [1] Ф о м и н В. Н., Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация, М., 1984; [2] B i c k e l P. J., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 3, p. 647–71.

ADAPTƏ OLUNMUŞ (UZLAŞDIRILMIŞ) TƏSADÜFİ PROSES « адаптированный случайный процесс; adapted random process » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*.

F – ADAPTİV FUNKSIYA « F – адаптированная функция; F – adapted function » – bax, *Qeyri – antisipativ funksiya*.

ADAPTİV İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı « адаптивный управляемый случайный процесс с дискретным временем; adaptive controlled random process in discrete time » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

ADAPTİV PROSEDUR « адаптивная процедура; adaptive procedure » – bax, *Stoxastik approximasiya*.

ADAPTİV STATİSTİK QİYMƏT « адаптивная оценка; adaptive estimator » – sonluölçülü və ya sonsuzölçülü əngəlləyici parametrlili müşahidələr sxeminə naməlum parametrlərin təyin edilməsi üçün *statistik qiymətdir*; bu statistik qiymət əngəlləyici parametrlin məlum qiymətində bu və ya digər ehtimali mənada ən yaxşı statistik qiymətin malik olduğu xassələr kimi asimptotik olaraq eyni xassələrə malikdir. A. s. q. anlayışının digər interpretasiyaları da istifadə edilir.

Əd.: [1] B i c k e l P. J., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 3, p. 647–71.

ADDIM₍₁₎ paylanmanın « шаг распределения; spain of a distribution » – bax, *Şəbəkəvari paylanma*.

ADDİM VURUĞU « шаговый множитель; step factor » – bax, *Robbins – Monro proseduru* stoxastik approksimasiyanın.

ADDİMİ, ARİFMETİK PAYLANMANIN « шаг арифметического распределения; step of arithmetic distribution » – bax, *Arifmetik paylanma, Şəbəkəvari paylanma*.

ADDİTİV FUNKSİONAL integral tipli « аддитивный функционал интегрального типа; additive functional of integrale type » –

$$\alpha_t^s = \int_t^s f(u, \zeta(u)) du, \quad 0 \leq t < s$$

tesadüfi kəmiyyətlər ailəsidir, burada $\zeta(\cdot)$ – asılı olmayan artımlı tesadüfi proses, $f: [0, +\infty) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ele Borel funksiyasıdır ki, bu funksiya üçün bərabərliyin sağ tərəfindəki integral təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Скороход А. В., Слободенюк Н. П., Предельные теоремы случайных блужданий, К., 1970.

ADDİTİV FUNKSİONAL(t) Markov prosesinin « аддитивный функционал от марковского процесса; additive functional of a Markov process » – bax, *Markov prosesi; additiv funksional*.

ADDİTİV FUNKSİONAL(t) Viner prosesinin « аддитивный функционал от винеровского процесса; additive functional of the Wiener process » – arqumentlərinin toplusu üzrə kəsilməz, additivlik xassəsini ($\alpha_t^s = \alpha_t^u + \alpha_u^s$, $t < u < s$) və Viner prosesi $w(t)$, $t \geq 0$ ilə uzlaşma xassəsini ($\alpha_t^s = w(u)$, $u \in [t, s]$).

$t < s$ prosesinin qiymətləri ilə doğrulmuş $\mathcal{M}_t^s$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən tesadüfi kəmiyyətdir) ödəyən tesadüfi kəmiyyətlərin α_t^s , $0 \leq t < s$ ailəsidir.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Скороход А. В., Слободенюк Н. П., Предельные теоремы для случайных блужданий, К., 1970.

ADDİTİV FUNKSİYA « аддитивная функция; additive function » – bax, *Arifmetik modeləşdirilmə*(s) tesadüfi proseslərin, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi*.

ADDİTİV FUNKSİYASI ÇOXLUQLARIN « аддитивная функция множеств; additive set function » – hər hansı çoxluqlar sinfində təyin olunmuş və additivlik xassəsinə malik (iki toplanan üçün) funksiyadır.

$\mathcal{X}$ – hər hansı çoxluqlar sinfi, G – qrup əməli + simvolu ilə işarə edilmiş kommutativ qrup olsun (yeni G additiv yazıda götürülür). $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{X}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \in \mathcal{X}$ şərtlərilə verilən ixtiyari A və B çoxluqları üçün

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

10 ADDİTİV

bərabərliyi hökmən ödənilərsə, $\mu: \mathcal{X} \rightarrow G$ münasibətini ödəyən μ funksiyasına additiv funksiya deyilir.

Əgər $\emptyset \in \mathcal{X}$ olarsa, onda $\emptyset$, – G qrupunun sıfır elementidir və $\mu(\emptyset) = 0$.

Praktikada G qrupu kimi ədəd oxu $\mathbb{R}^1$, kompleks ədədlər meydanı $\mathbb{C}$, n – ölçülü Evklid fəzası $\mathbb{R}^n$, müxtəlif topoloji qruplar, sonsuzölçülü vektor fəzaları və s. fəzalara tez-tez təsadüf olunur. Digər tərəfdən, olduqca çox hallarda $\mathcal{X}$ sinfinin additiv sinfi olduğu əvvəlcədən fərz olunur, yəni ixtiyari $A \in \mathcal{X}$ və $B \in \mathcal{X}$ çoxluqları üçün $A \cup B \in \mathcal{X}$ münasibəti ödənilir (yeni $\mathcal{X}$ sinfi $\cup$ əməlinə görə yuxarı yarışəbəkədir).

Additiv siniflər üçün ixtiyari ζ a. f. eyni zamanda çoxluqların sonlu – additiv funksiyasıdır. Başqa sözlə, $\mathcal{X}$ – ixtiyari additiv sinfi, μ , – $\mathcal{X}$ sinfində təyin olunmuş ixtiyari additiv funksiyadırsa, onda

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m)$$

bərabərliyi $\mathcal{X}$ -nin sonlu sayda bütün dizyunkt $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ ailəsi üçün ödənilir.

Əgər $\mathcal{X}$ sinfi $\cup$ və $\cap$ əməllərinə görə şəbəkədirsə, onda $\mu: \mathcal{X} \rightarrow G$ funksiyasının additivlik şərti

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada A, B , – $\mathcal{X}$ sinfinin ixtiyari elementləridir.

Riyazi analizdə, Evklid həndəsəsində, ehtimal nəzəriyyəsində və ölçü nəzəriyyəsində müxtəlif cəbrlərdə və halqalarda təyin olunmuş və bəzi əlavə xassələrə malik olan ədədi additiv funksiyalar xüsusi rol oynayır.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с. англ., М., 1953.

ADDİTİV KÜY « аддитивный шум; additive noise » – bax, *Kanal additiv küylü*.

ADDİTİV MƏSƏLƏLƏR(i) ədədlər nəzəriyyəsinin « аддитивные задачи теории чисел; additive problems of number theory » – tam ədədlərin verilmiş şəkildəki toplananlara (toplananların sayı çoxalan) ayrılışı haqqında məsələlərdir. Belə məsələnin ən sadə qoyuluşu aşağıdakı kimidir. $f(x)$ – natural arqumentin tamqiymətli funksiyası, p – qeyd olunmuş və ya artan natural ədəd olsun. Natural N ədədinin

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

tipli ifadələrinin sayı $I(N, n)$ üçün asimptotik düstur tapmaq tələb olunur, burada $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq p-1$ və n sonsuzluğa kimi artan parametrdir.

Bu məsələ ehtimal nəzəriyyəsi terminologiyasında aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – ümumi paylanma qanunları eyni

$$P\{\xi_1 = f(k)\} = 1/p, \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

olan tesadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $a = M \xi_1$, $D \xi_1 = \sigma^2 > 0$ olsun. $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ tesadüfi kəmiyyətinə baxılır.

$$P\{\eta_n = N\} = \int_0^1 e^{-2\pi izN} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi izf(x)} \right)^n dz. \quad (*)$$

Aytdır ki,

$$P\{\eta_n = N\} = p^{-n} I(N, n).$$

(*) integralının baş hissəsini ayırmaq, yeni $I(N, n)$ üçün asimptotik düsturu tapmaq üç halda mümkündür:

1) n qeyd olunmuşdur, p artandır; 2) n artandır, p qeyd olunmuşdur; 3) n və $p = p(n)$ eyni zamanda artan natural edərlərdir.

Birinci hal edədlər nəzəriyyəsi üçün seçiyyevdir və asimptotik düstur analitik edədlər nəzəriyyəsinin metodları ilə tapılır. İkinci halda lokal limit teoreminə əsasən $I(N, n)$ üçün asimptotik ifadə almaq olur. Üçüncü halda $I(N, n)$ üçün asimptotik düsturun tapılması hər bir seriyası asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət seriyalar ardıcılığı üçün lokal limit teoremi ilə eyni güclüdür. Burada mürəkkəblilik, qalıq həddin ilkin paylanmalara nəzərən müntəzəm statistik qiymətinin alınmasıdır, bu isə

$$S(f, z) = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi izf(x)}$$

trigonometrik cəminin z -in bütün dəyişmə oblastında $p \rightarrow \infty$ olduqda qiymətləndirilməsini tələb edir, $S(f, z)$ -in qiymətləri haqqında ümumi teoremlər olmadığından ele məsələlər sinifləri seçilir ki, bu məsələlərdə limitlərdə müntəzəm lokal teoremlər müəyyən olunsun. $f(x)$ qüvvət üstlü funksiya və ya çoxhədli olduğu hallar daha yaxşı öyrənilmişdir.

Toplananları sayı artan A. m.-ə ilk dəfə Q. Kastelnuovo (G. Castelnuovo, 1933) baxmışdır, o, $f(x) = x$ halında ehtimali mülahizələri tətbiq edərək, $I(N, n)$ üçün asimptotikanın baş həddini almışdır. Belə məsələlərin sisteməli tədqiqinə A. Q. Postnikovun (1956, bax, [1]) işləri ilə başlanılmışdır. O, $f(x) = x$ və $f(x) = x^2$ hallarında $I(N, n)$ üçün qalıq həddin müntəzəm qiyməti ilə asimptotik düsturları ciddi isbat etmişdir. A. m.-in çoxsaylı müxtəlif ümumiləşmələri vardır: dəyişənlər bütün sadə ədədlər çoxluğundan və ya bütün natural ədədlər çoxluğundan olduqda, çoxölçülül hallara da baxılmışdır (bax, [3]).

Toplananları sayı artan ədədlər nəzəriyyəsinin A. m. riyazi statistikada tətbiq olunur, məs., rəng statistikalarının asimptotik xassələrinin araşdırılmasında bunlara olduqca çox təsadüf olunur [4].

Əd.: [1] Постников А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971; [2] Сираждинов С. Х., Азларов Т. А., Зупаров Т. М., Аддитивные задачи с р-адическим числом слагаемых, Таш., 1975; [3] Искраилов М. И., «Записки науч. Семина. ЛОМН. Исследования по теории чисел», 1983, т. 121, с. 62–82; [4] Корольюк В. С., Боровских Ю. В., Асимптотический анализ распределений статистик., М., 1984.

ADDİTİV MODEL «аддитивная модель; additive model» blok plan. – bax, *Blok plan*.

σ – ADDİTİV ÖLÇÜ «σ – аддитивная мера; σ – additive measure» – bax, *Tamamile additiv çoxluqlar funksiyası*.

*** ADDİTİV TƏSADÜFİ PROSES** «аддитивный случайный процесс; additive random (stochastic) process» – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımları*.

AFFİN ŞEYR «аффинный шейп; affine shape» – bax, *Təsadüfi şeyr*.

AĞAC(ı) imtinalar «дерево отказов; fault tree» – bax, *İmtinalar ağacı*.

AĞAC təsadüfi «дерево случайное; random tree» – bax, *Təsadüfi ağac*.

AĞACVARI XƏTTİ KOD «древовидный линейный код; linear tree code» – bax, *Konvolusion kod*.

AĞACVARI KOD «древовидный код; tree code» – hər hansı bir əlifbada sözlərin sonlu və ya hesabi çoxluğu ki, onu seçilmiş tərəsi (kök) olan ağac ilə təsvir etmək olar. Ağacın hər bir tili seçilmiş əlifbadan verilmiş uzunluqlu (əksər hallarda bütün tillər üçün eyni) sonlu sayda simvollar ardıcılığı ilə eyniləşdirilir. Ağac üzrə kökdən başlayan ixtiyari yol hər hansı kod sözünə uyğundur; ixtiyari kod sözünə ağac üzrə hər hansı yol uyğun olur. Kodlama nəzəriyyəsində fərz olunur ki, bir düyündən çıxan bütün tillər müxtəlifdir. Sonlu uzunluqlu A. k.-a misal *prekfix xassəli kodlardır*, bu kodlarda kod sözü digər kod sözünün prefiksi (yeni başlanğıcı) olmur. Sonsuz uzunluqlu A. k.-a misal *konvolusion kodlardır*.

Əd.: [1] Блехут Р., Теория и практика кодов, контролирующих ошибки, пер. с англ., М., 1986.

AXIN «поток; flow» – ölçülü $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzasının aşağıdakı şərti ödəyən $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ avtomorfizmlər ailəsidir: ixtiyari

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ qiymətlərində $T^{t_1+t_2}x = T^{t_1}T^{t_2}x$ bərabərliyi bütün $x \in X$ üçün μ – sanki yəqin doğrudur. T^t -nin t -dən asılılıq xarakterinin dəqiqləşdirilməsi ilə *kəsilməz axın* və *ölçülən axın* anlayışları alınır.

AXIN, Bernulli axını «поток Бернулли; Bernoulli flow» – bax, *Bernulli yerindəyişməsi*.

AXIN kəsilməz «поток непрерывный; continuous flow» – bax, *Kəsilməz axın*.

AXIN ölçülən «поток измеримый; measurable flow» – bax, *Ölçülən axın*.

K – AXIN «K – поток; K – flow» – bax, *K – sistem*.

*** AXIN PARAMETRİ** «потока параметр; parameter of flow» – bax, *Təsadüfi axın*.

AXINI, σ – CƏBRLƏRİN «поток σ – алгебр; filtration / family of σ – algebras» – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının aşağıdakı bəzi şərtləri ödəyən σ – cəbrlər ailəsidir. T – nizamlanmış çoxluq olsun; fərz olunur ki, hər bir $t \in T$ qiymətində $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbri $\mathcal{A}_t$ təyin olunmuşdur. $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ σ – cəbrlər axını hər $t \in T$ üçün $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$ və $s, t \in T, s \leq t$ qiymətlərində $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$ münasibətlərini ödəyərsə, $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ σ – cəbrlər axını adlanır. $(M, \mathcal{B})$ fəza fəzasında hər bir $X(t)$ təsadüfi prosesi ilə bütün mümkün ola bilən $\Gamma \in \mathcal{B}, s \in T, s \leq t$ üçün

$\{\omega: X(s, \omega) \in \Gamma\}$ şəklində çoxluqları özündə saxlayan Ω -nın altçoxluqlarının minimal σ – cəbri $\mathfrak{M}_T$ -lərin təbii σ – cəbri lər axını $(\mathfrak{M}_t)_{t \in T}$ təyin olunur. Əgər $T = \mathbb{R}_+$ olarsa, onda $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbri lər axını üzərinə qoyulan adi şərtlər aşağıdakılardır: a) axının sağdan kəsilməzliyi, yeni bütün $t \geq 0$ üçün $\mathcal{A}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{A}_s$; b) $\mathcal{A}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən

tam sinifdir və $\mathcal{A}_0$ σ – cəbri $\mathcal{A}$ -nin sıfır ölçülü bütün çoxluqlarını özündə saxlayır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

AXININ İNTENSİVLİYİ « потока интенсивность; intensity of flow » – bax, *Təsadüfi axın*.

AXIRINCI GƏLƏNƏ İLK XİDMƏT (AGİX) « последним пришел – первым обслужен (ПоППО); last income first outcome (LIFO) » – kütləvi xidmət nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışdır. Kütləvi istehsal olunan əşyalar ele qaydada yığılır ki, son istehsal olunan əşya özündən əvvəl istehsal olunan əşya üzərinə qoyulur, yeni sonuncu qəbul olunan tələbə ilk əvvəl xidmət olunur. Xidmət olunan əşyanın xidmət olunma müddəti ərzində xidmət üçün digərləri daxil olunur və daxil olduqca üst-üstə yığılır. Bu qayda növbə xidmətinə – « axırncı gələnə ilk xidmət » qaydası adlanır.

Fərz olunur ki, birkanallı sistemə λ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmış daxil olan tələb növbədə n -ci tələbdir. Tələbin xidmət olunma müddəti riyazi gözleməsi $1/\mu$ -ə bərabər olan ixtiyari bir $B(t)$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətdir. Bu tələbin xidmət olunma müddətinin paylanması « AGİX » qaydalı sistem üçün məşğulluq müddətinin paylanmasıdır; növbədə olan tələblərin sayı əvvəlcə n -ə bərabər idisə, o, yenə də n -ə bərabər olur.

Əd.: [1] С а т т Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., М., 1965.

AKAIKE İNFORMASİYON KRİTERİSİ « Аканке информационный критерий; Akaike information criterion, AIC », AİK. – bax, *Prediktorların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi*.

AKAIKE KRİTERİSİ « Аканке критерий; Akaike criterion » proqnozun son qərar xətasının – bax, *Parametrik model; tərtibin seçilməsi*.

AKSİYOMATİK KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ « аксиоматическая квантовая теория поля; axiomatic quantum field theory » – kvant meydan nəzəriyyəsinin bölməsidir, burada «kvant meydan» obyektini abstrakt təsvir edən ümumi postulatlar formalaşdırılır və bunlardan çoxlu nəticələr çıxarılır.

Ən çox istifadə olunan aksiomlar sistemi L. Qordinq və A. Uaytmana məxsusdur (bax, [2]). Məs., ən sadə – M^d Minkovski fəzasında skalyar neytral bozon meydanı halında, bu meydan hər hansı Hilbert fəzası H -da təsir edən və Şvarts fəzasından olan nişanlanmış hamar, sürətlə azalan $f \in S(M^d)$ funksiyalarının simmetrik operatorlarının $\{\varphi(f), f \in S(M^d), d \geq 2\}$ ailəsi ilə verilir; bu halda $f \rightarrow \varphi(f)$ uyğunluğu f -ə görə xəttidir,

$\varphi(f_1)$ və $\varphi(f_2)$ operatorları isə f_1 və f_2 daşıyıcıları bir-birinə nəzərən fəzavi doğruya oxşarlığa malik olarlarsa, kommutasiya olunurlar. Daha sonra fərz olunur ki, a) H fəzasında Puankare qrupunun (M^d -nin hərəkətlər qrupunun) hər hansı ele unitar $g \rightarrow U_g$ təsviri verilir ki, bütün g və $f \in S(M^d)$ üçün

$$U_g \varphi(f) U_g^{-1} = \varphi(\tau_g f),$$

$$(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in M^d;$$

b) M^d -nin translyasiyalarına uyğun olan U_g altqrupunun $\{P_\mu, \mu = q, \dots, d\}$ doğuran operatorlarının birgə spektri M^d -də işıq konusunun yuxarı zolağında yerləşir; c) vuruq dəqiqliyi ilə yəqinə $\Omega \in H$ vektoru vardır və bu vektor $g \rightarrow U_g$ təsvirinə nəzərən invariant və $\{\varphi(f), f \in S(M^d)\}$ ailəsinə nəzərən tsiklik vektordur. Bu aksiomlar sisteminin müxtəlif modifikasiyaları və $\psi_n(f_1, \dots, f_n) = (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n), \Omega, \Omega)_H$ – Uaytman funksiyaları terminlərində bunların digər şəkildə ifadə formaları vardır (bax, [1]). Bu aksiomatikanın ən dərin nəticələri Uaytman funksiyalarının analitik xassələrinin öyrənilməsi ilə və səpələnmənin formal nəzəriyyəsinin qurulması ilə bağlıdır.

Əd.: [1] Й о с т Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] W i g h t m a n A., G a r d i n g L., «Ark. Phys.», 1964, v. 28, p. 129–84; [3] Б о г о л ю б о в Н. Н., [и др.], Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

AKTİV DƏYİŞƏN « активная переменная; active variable » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

AKTİV EKSPERİMENT « активный эксперимент; active experiment » – *reqression eksperimentlərin planlaşdırılması* prinsiplərinə uyğun olaraq təşkil olunmuş ölçmələr toplusudur.

ALDOUS – REBOLLEDO ŞƏRTİ « Алдоуса – Реболледо условие; Aldous – Rebollo condition » – bax, *Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları*.

ALEKSANDROV FƏZASI « Александрова пространство; Alexandrov space » – bax, σ – ölçülən funksiya.

ALEKSANDROV TEOREMİ « Александрова теорема; Alexandrow theorem » – çoxluqlar siniflərində ölçülərin qiymətlərinin yığılması terminlərində *ölçülərin* zəif yığılma şərtidir. $\mathcal{M}$, – $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ normal topoloji fəzasında verilmiş ölçülər fəzası və $P \in \mathcal{M}$ olsun. Əgər $G_1 \subseteq B \subseteq \mathcal{X} \setminus G_2$ və $P(G_1) = P(\mathcal{X} \setminus G_2)$ şərtlərini ödəyən $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ açıq çoxluqları vardırsa, $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinin B çoxluğunun $\mathbf{P}$ – sıfır sərhədi vardır.

$\mathcal{M}$ -dən olan ölçülər şəbəkəsi (P_θ) -nin $P \in \mathcal{M}$ ölçüsünə zəif yığılması üçün:

1) $\mathbf{P}$ – sərhədinə malik, Borel $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinin ixtiyari B çoxluğu üçün

$$\lim_{\theta} P_\theta(B) = P(B)$$

bərabərliyinin;

12 AKSİYOMATİK

2) ixtiyari $G \in \mathfrak{G}$ açıq çoxluğu üçün

$$\liminf_{\emptyset} P_{\emptyset}(G) \geq P(G) \quad \text{və} \quad \lim_{\emptyset} P_{\emptyset}(\mathcal{G}) = P(\mathcal{G})$$

münasibətlərinin;

3) ixtiyari qapalı F çoxluğu üçün

$$\limsup_{\emptyset} P_{\emptyset}(F) \leq P(F) \quad \text{və} \quad \lim_{\emptyset} P_{\emptyset}(\mathcal{F}) = P(\mathcal{F})$$

münasibətlərinin ödənilməsi kimi şərtlərdən birinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Yuxanda şərh olunanların hamısı σ -topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Bax, *Ölçü*.

Teorem A. D. Aleksandrov tərəfindən [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48; 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ALFA – EKSSİESSİV FUNKSİYA «альфа – экссивная функция; alpha – excessive function» – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALFA – FAKTOR ANALİZ «альфа – факторный анализ; alpha – faktor analysis» – bax, *Faktor analiz; sxemlər*.

ALFA – NÜVƏSİ, POTENSİALLARIN «альфа – ядро потенциалов; potential alpha – kernel» – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALFA – POTENSİAL «альфа – потенциал; alpha – potential» – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALQORİTMİK ENTROPİYA «алгоритмическая энтропия; Kolmogorov complexity entropy» – sonlu obyektlərin entropiyası sonlu obyektlərin mürekkəbliyik ölçüsü. – verilmiş obyektin təsvir edilməsi üçün zəruri olan, A. N. Kolmoqorovun daxil etdiyi *informasiya miqdarı* ölçüsüdür.

İkilik sözlər (sıfır və vahidlərin sonlu ardıcılıqları) çoxluğunun özünə müəyyən alqoritmle hesablanan natamam inikasına (ümumiyyətlə isə, hər yerdə təyin olunmayan) təsvir qaydası deyilir. Təsvir qaydası G -yə nəzərən x sözü n ün mürekkəbliyi $-K_G(x)$, p sözlərindən ehtimal qısa uzunluqlu sözə deyilir ki, bu sözlər üçün $G(p) = x$ olsun. Ehtimal təsvir qaydası F vardır ki, ixtiyari təsvir qaydası G üçün bu qaydaya görə

$$K_F(x) \leq K_G(x) + O(1)$$

berəbersizliyi ödənilir (bax, [1]). Optimal təsvir qaydasına nəzərən sözün mürekkəbliyi (məhdud toplanan deqiqliyilə təyin olunan) alqoritmik entropiya adlanır və o, $K(x)$ ilə işarə olunur.

A. e. hesablanmayan funksiyadır, ehtimal qayda yoxdur ki, A. e.-sı verilmiş sözdən A. e.-sı böyük olan sözü effektiv seçmək mümkün olsun. Sözün A. e.-sı onun uzunluğunu aşmır ($+O(1)$); verilmiş uzunluqlu sözlərin əksəriyyəti üçün bu berəbersizlik bərabərliyə yaxın olur (bele sözlər təbii olaraq «tesadüfi» sözlər sayılır). Hesablanılan inikası A. e.-ni konstantdan çox artırmır (bax, [2]).

Qeyd olunan sadə Kolmoqorov A. e.-dan fərqli, digər A. e. növləri də vardır (bax, [2] – [4]); məs., y məlum olduqda x -in

təsviri üçün zəruri informasiya miqdarını ölçən şərti A. e. – $K(x|y)$;

$I(y|x) = K(x) - K(x|y)$ fərqi y -də x haqqında informasiya miqdarı adlanan A. e., I funksiyası demək olar ki, simmetrik funksiyadır:

$$I(x|y) - I(y|x) = O(\log(I(x) + I(y))),$$

burada $I(z)$ – z sözünün uzunluğudur. A. e.-nin daha bir variantı – monoton A. e. $KM(x)$ -in təyin edilməsi ikilik sözlərdə olan «başlanğıc olmaq» münasibətini nəzərə alır ([3] – [5]). Belə entropiya təsadüfiliy anlayışının təyin edilməsində də istifadə oluna bilər: sıfır və vahidlərdən ibarət ardıcılığın n uzunluqlu başlanğıc parçasının monoton A. e.-sı, yalnız və yalnız $n + O(1)$ -ə bərabər olduğu halda, $[0, 1]$ parçasından olan təsadüfi ədəd (bax, *Təsadüfi və psevdotesadüfi ədədlər*) ikilik say sisteminə sıfır və vahidlərdən ibarət ardıcılıq şəklində ifadə olunur (bax, [3], [5]). $M(x)$ aprior ehtimal olarsa, x sözünün prefiks entropiyası $-\log_2 M(x)$ kimi təyin olunur.

Tərifə görə aprior ehtimal multiplikativ konstant deqiqliyi ilə maksimal M funksiyasıdır. Bu funksiya – ikilik sözlər çoxluğunu mənfi olmayan heqiqi ədədlər çoxluğuna inikas etdirən və

$$(1) \sum M(x) < +\infty;$$

$$(2) r \text{ rəşional ədədi } M(x)\text{-dən kiçik olduğu halda } \{r, x\}$$

ötlər çoxluğu müəyyən bir alqoritmle sayıla bilər; kimi xassələrə malik bir funksiyadır. Prefiks entropiyası sadə Kolmoqorov A. e.-indən sözün uzunluğunun loqarifminin sözdən asılı olmayan konstanta hasilindən çox fərqlənir (bax, [3]).

A. e. anlayışı ilə K. Şennonun (C. Shannon) entropiya üçün verdiyi tərif, aşağıdakı iki müddə ilə təyin olunur.

1) x – ikilik say sisteminə yazılmış söz, p və q , x sözündəki sıfır və vahidlərin uyğun tezlikləri, $H = -(p \log_2 p + q \log_2 q)$, -0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, p və q ehtimalları ilə alan təsadüfi kəmiyyətin Şennon entropiyası olsun. Onda $I(x) \rightarrow \infty$ olduqda, $K(x)/I(x) \leq H + O(1)$ doğrudur. Bu berəbersizlikdən aydındır ki, A. e., eyni zamanda tezlik qanunauyğunluqlarını (digərləri ilə birlikdə) da nəzərə alır. Əgər x tezlik xüsusiyyəti olmayan qanunauyğunluqlara malikdirsə, berəbersizliyin sol tərəfi sağ tərəfdən olduqca kiçik ola bilər; lakin aşağıdakı müddədən aydın olur ki, «tesadüfi» x -lər üçün belə olmur.

2) 0 və 1 -in uyğun olaraq p və q ehtimalları ilə (Bernulli ölçüsü ilə) düzəldiyü α ardıcılıqlarının n uzunluqlu başlanğıc parçasının A. e.-sının K -yə nisbətinin $n \rightarrow \infty$ olduqda limiti, $-(p \log_2 p + q \log_2 q)$ -yə bərabərdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, в. 1, с. 3–11; (см. Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 213–23); [2] Звонкин А. К., Левин Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 6, с. 85–127; [3] Вьюгин В. В., «Семиотика и информатика», М., 1981, в. 16, с. 14–43; [4] Шеннон А. X., «Докл. АН СССР», 1984, т. 276, № 3, с. 563–66; [5] Левин Л. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 3, с. 548–50; [6] Hartmanis J., «Bull. European Ass. Theor. Comp. Sci.», 1984, № 24 (Oct.) p. 73–78 [7] Витань П. Л., «Успехи матем. наук», 1988, т. 43, в. 6, с. 129–66.

ALLE PARADOKSU « Алле парадокс; Allais paradox » – ehtimal paylanmaların fəzasında affin indikatorla təsvir oluna bilinməyən üstünlük münasibətinə misaldır. Burada ədəd oxunda ehtimal paylanmalarının $\{F\}$ fəzasında üstünlük münasibəti $\succ$ üçün $\{F\}$ -də təyin olunan və

$$F \succ G \Leftrightarrow U(F) > U(G), \quad (1)$$

ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ üçün

$$U(\alpha F + (1-\alpha)G) = \alpha U(F) + (1-\alpha)U(G) \quad (2)$$

xassələrinə malik olan U funksionalının olmadığı göstərilir (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*).

M. Alle [1]-də $\{0 \text{ doll.}, 5 \text{ mln. doll.}, 25 \text{ mln. doll.}\}$ çoxluğunda toplanmış, gözənilən təsadüfi gəlirin paylanmaları – $F_1, F_2,$

F_3, F_4 ehtimallarını araşdırmışdır. Ehtimalların qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

	0 doll.	5 mln. doll.	25 mln. doll.
F_1	0	1	0
F_2	0,01	0,89	0,1
F_3	0,9	0	0,1
F_4	0,89	0,11	0

«Standart individum» birinci variantı ikincidən üstün hesab edəcəkdir, çünki 5 mln. dolları əvvəlcədən almaq yaxşıdır, nəinki kiçik ehtimalla da olsa heç nə almamaq riskinə getmək, digər tərəfdən də 5 mln.-u almaq ələ 25 mln.-u almaq qədər «ağlabatmazdır». Belə ki, sonuncu halda (yəni heç nə almamaq riskinə getmək halı) sıfır gəlirə öz vəziyyətini olduqca yaxşılaşdırmaq imkanını yüz faiz itkidən yaranan güclü narazılıq da əlavə olunacaqdır.

Üçüncü variant dördüncüdən üstün hesab olunur, belə ki, heç nə qazanmamaq ehtimalları «kiçik deyildirlər və bir-birindən az fərqlənirlər» və odur ki, uduşun çox olduğu variantı seçmək yaxşıdır, çünki hər iki variantda şanslar eynidir. Beləliklə, əgər $\succ$ münasibətləri qeyd olunan təsvirləri əks etdirirsə, onda $F_1 \succ F_2$ və $F_3 \succ F_4$ münasibətləri ödənilir. Əgər (1) – (2)-ni ödəyən U funksionalı varırsa, onda

$$(F_1 + F_3)/1/2 \succ (F_2 + F_4)/1/2,$$

olur, lakin əslində

$$(F_1 + F_3)/1/2 = (F_2 + F_4)/1/2.$$

Baxılan üstünlük münasibəti kvadratik üstünlük indikatoru və ya müqayisəedici faydalılıq terminləri ilə təsvir oluna bilər (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*). Sonuncu halda müqayisəedici faydalılıq funksiyası superadditiv funksiyadır (bax, [2]).

Əd.: [1] Allais M., «Econometrika», 1953, v. 21, p. 503–46; [2] Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновский Е. Б., Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах, Л., 1980.

* **ALT PİLLƏ ANI** « нижний лестничный момент; lower ladder time » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

14 ALTERNATİV

* **ALT PİLLƏ BOYU** « нижняя лестничная высота; lower ladder height » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

* **ALT PİLLƏ İNDEKSİ** « нижний лестничный индекс; lower ladder index » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

* **ALT PİLLƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİ** « нижние лестничные случайные величины; lower ladder random variables » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

ALTERNATİV « альтернатива; alternative », alternativ hipotez, – statistik hipotezların yoxlanılması məsələsində *ilkin (sıfır) hipotezə qarşı qoyulan*, iki statistik hipotezdən biridir. Adətən, ilkin hipotez paylanma qanunu haqqında irəli sürülən, yoxlanılacaq müəyyən, əsas bir hipotezdir. A. isə bu hipotezdən fərqlənən mümkün hipotezlər sinfidir. Bəzən A., – alternativ hipotez olan müəyyən bir A. sinfini təmsil edən sinfə aid olan ayrıca bir paylanma kimi də anlaşıılır.

ALTERNATİV HİPOTEZ « альтернативная гипотеза; alternative hypothesis » – bax, *Alternativ*.

ALTERNATİV METEOROLOJİ PROQNOZ « альтернативный метеорологический прогноз; forecast of meteorological binary variables of events / alternating meteorological forecast » – havanın ələ proqnozudur ki, bu proqnozda havanın baxılan iki bir-birinə əks vəziyyətlərindən yalnız birinin baş verib-verməyəcəyi göstərilir (məs., «yağmurlu» və ya «yağmursuz» və s.). A. m. p. hava şəraitinin fəvqəladə vəziyyətlərinin proqnozlaşdırılmasında xüsusilə böyük praktiki əhəmiyyətə malikdir. Havanın sonlu sayda fəzalarından birinin ixtiyari proqnozunu A. m. p.-a gətirmək mümkündür (həftə ixtiyari kəmiyyət proqnozunu da, bu şərtlə ki, *Y prediktantının* qiymətlərinin mümkün oblastı sonlu sayda oblastlara bölünmüş və bu oblastlar çərçivələrində *Y*-in qiymətləri fərqlənməyən olsunlar), odur ki, A. m. p. ixtiyari hava proqnozunun, praktiki olaraq, əsası hesab oluna bilər. A. m. p. halı üçün proqnozların keyfiyyət statistik qiymətləri (bax, *Proqnozu, havanın; keyfiyyətin statistik qiyməti*) və meteoroloji informasiyanın optimal istifadə olunması metodları daha ətraflı surətdə öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Омшанский М. А., «Тр. Главн. геофиз. observ.», 1937, в. 14, с. 49–57; [2] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [3] Жуковский Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981.

* **ALTERNLƏNƏN BƏRPA PROSESİ** « альтернирующий процесс восстановления; alternating renewal process » – *bərpa nəzəriyyəsində bərpa proseslərindən* biridir. Elementlərin fasiləsiz işləmə müddətləri $\{X_1, X_2, \dots\}$ və $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ olan iki tip elementlər ardıcılığı verilir. Bunların uyğun paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $f_1(x)$ və $f_2(x)$ olsun. Fərz olunur ki, fasiləsiz işləmə müddətləri statistik asılı olmayan kəmiyyətlərdir. I tip yeni elementdən başlayan prosesin hər bir sıradan çıxan elementi əks tip elementlə əvəz olunursa, belə proses alternlənən bərpa prosesi (şəkil 1) adlanır.

— x ———— o ———— x ———— v —

« ——— » I tip element istifadə olunur; x – II tip sıradan çıxma;

« - - - - - » II tip element istifadə olunur; o – II tip sıradan çıxma.

M i s a l 1. Müəyyən bir aparat fasilələrlə işləyir. Dayanan aparatın yenidən işə salınması üçün keçən müddət *bərpa müddəti* adlandırılır. Bu halda, işləmə müddətləri və bərpa

müddətlərinin alternənən ardıcılığı yaranır. Əgər bu ardıcılıqların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olduğu və bunların hər birinin uyğun paylanması sıklıq funksiyaları ilə xarakterizə olunduğunu qəbul etmək olarsa, baxılan proses A. b. p.-dir.

M i s a l 2. ρ intensivlikli Puasson prosesi yaradan hissəciklər axını və bu proseslə əlaqədar aşağıdakı qayda ilə işləyən sayğac müşahidə olunur. Sayğac $t = 0$ anından başlayaraq X_1' müddəti ərzində işləmir; X_1' -in paylanması sıklıq funksiyası $f_1(x)$ -dir. Bu müddət ərzində sayğac işləmir və bu müddət ərzində daxil olan ixtiyari hissəcik qeyd olunmur. X_1' anında sayğac işləməyə başlayır və əlavə X_1'' müddəti ərzində daxil olan hissəcik qeyd olunur. Hissəciklərin daxil olma anları Puasson prosesi emələ gətirdiyindən X_1'' təsadüfi kəmiyyəti X_1' -dən asılı olmayaraq paylanması sıklıq funksiyası $\rho e^{-\rho x}$ -ə bərabər üstlü qanunla paylanır. Fərz olunur ki, X_2' və X_1'' asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X_2' -in paylanması sıklıq funksiyası $f_2(x)$ -dir. $(i-1)$ və i -ci qeyd olunmuş hissəciklərin arasındakı müddət $X_i' + X_i''$ -ə bərabərdir. Əgər hissəciyin sayğacda qeyd olunmasına «imtina» (sıradan çıxma) kimi baxılırsa, sadə bərpə prosesi alınır; belə ki, bu halda fasiləsiz işləmə müddətinin paylanması sıklıq funksiyası $f_1(x)$ -in $\rho e^{-\rho x}$ ilə kompozisiyasına bərabər olur. Əgər sayğac açıq olduqda müşahidələr yenidən başlayarsa, onda ümumi bərpə prosesi alınır ki, bu halda ilk fasiləsiz işləmə müddətinin paylanması sıklıq funksiyası $\rho e^{-\rho x}$ -ə bərabərdir. Sadə bərpə prosesi halında hissəcik qeyd olunan anda bərpaolunma baş verir. Fasiləsiz işləmə müddəti (bərpəolunmalar arasındakı müddət) sayğacın işləmədiyi müddət ilə hissəciyin hələ daxil olmadığı, lakin onun üstlü qanunla paylanan müddət ərzində işləməyə başladığı zaman intervalının cəminə bərabərdir. Bu iki kəmiyyət asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan, bu sistemə A. b. p. kimi baxmaq olar.

Alternənən proses ideyasına ümumi hal üçün də baxılır. Məs., tsiklik qaydada ard-ardınca yerləşən k tip elementdən ibarət sisteme baxmaq olar. Digər ümumiləşmiş halda, k tip elementlər və $\|p_{ij}\|$ matrisi götürülür; p_{ij} - i -ci tip elementin j tipli elementlə əvəz olunmasının keçid ehtimalıdır. Belə proses *semitmarkov prosesi* adlanır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ALTPROSES « подпроцесс; subprocess » – təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində Markov prosesi ilə bağlı anlayışdır. $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ fəza fəzasında eyni elementar hadisələr fəzası Ω ilə iki $(\zeta(t), \xi, \mathcal{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ və $(\tilde{\zeta}(t), \tilde{\xi}, \tilde{\mathcal{F}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{sx})$ Markov proseslərinin verildiyi fərz olunur. Fərz olunur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

- ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\tilde{\xi}(\omega) < \xi(\omega)$;
- $0 \leq t < \tilde{\xi}(\omega)$ olduqda, $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)$;
- $\mathcal{F}_t^s = \mathcal{F}_t^s[\tilde{\Omega}_t]$, burada $\tilde{\Omega}_t = \{\omega: \tilde{\xi}(\omega) > t\}$, $\mathcal{F}_t^s[\tilde{\Omega}_t]$, – $\mathcal{F}_t^s$ σ -cəbrinin $\tilde{\Omega}_t$ çoxluğunda izidir, yəni $A \in \mathcal{F}_t^s$ olduqda $A \cap \tilde{\Omega}_t$ şəklində bütün hadisələrin çoxluğudur.

Bu halda $(\tilde{\zeta}(t), \tilde{\xi}, \tilde{\mathcal{F}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{sx})$ prosesi $(\zeta(t), \xi, \mathcal{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ prosesinin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alınmışdır, deyilir.

Bu proseslərin yaşama müddətləri uyğun olaraq, τ və $\tilde{\tau}$ olsun. Əgər ixtiyari (s, x) üçün $\mathbf{P}_{sx}\{\tilde{\tau} \leq \tau\} = 1$ və $t < \tilde{\tau}$ olduqda $\zeta(t) = \tilde{\zeta}(t)$ olarsa, onda $\tilde{\zeta}(t)$ prosesi $\zeta(t)$ prosesinin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alınır, deyilir.

Əgər $(\tilde{\zeta}(t), \tilde{\xi}, \tilde{\mathcal{F}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{sx})$ Markov prosesi $(\zeta(t), \xi, \mathcal{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ Markov prosesindən bu prosesə ekvivalent hər hansı prosesdən ekvivalent prosesin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alınabilirsə, onda $(\tilde{\zeta}(t), \tilde{\xi}, \tilde{\mathcal{F}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{sx})$ prosesinə $(\zeta(t), \xi, \mathcal{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ prosesinin altprosesi deyilir.

Əgər $\mathbf{P}(s, x, t, \Gamma)$ $(\zeta(t), \xi, \mathcal{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ Markov prosesinin keçid ehtimalıdırsa, $\tilde{\mathbf{P}}(s, x, t, \Gamma)$ isə bu prosesin hər hansı altprosесinin ehtimalıdırsa, onda aydındır ki,

$$\tilde{\mathbf{P}}(s, x, t, \Gamma) \leq \mathbf{P}(s, x, t, \Gamma).$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985; [3] Дын Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959.

ALTSİNFİ, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin «подкласс состояний цепи Маркова; subclass of a Markov chain» – bax. Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

ALTŞƏBƏKƏ « подсеть; subnet » – bax. Şəbəkə(s) ölcüləri.

AMPLİTUD MODULYASIYA « амплитудная модуляция; amplitude modulation » – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesinin dəyişdirilərək,

$$Z(t) = c(1 + m\zeta^0(t))\zeta(t), \quad -\infty < t < \infty$$

şəklinə çevrilməsidir, burada $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, $\mathbf{D}\zeta(t) = 1$, c – sürətlənmə əmsalı, $\zeta^0(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\mathbf{M}\zeta^0(t) = 0$, $\mathbf{D}\zeta^0(t) = 1$ olan modelleyici stasionar təsadüfi proses, m , $0 < m < 1$ münasibətini ödəyən, təsir dərəcəsini xarakterizə edən kəmiyyətdir, m modulyasiya dərinliyi adlanır.

Əgər $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ kovariasion funksiyaları uyğun olaraq, $B_\zeta(\tau)$ və $B_{\zeta^0}(\tau)$ olan asılı olmayan stasionar proseslərdirsə, onda $Z(t)$ stasionar prosesdir və onun kovariasion funksiyası

$$B_Z(\tau) = c^2 B_\zeta(\tau)(-1 + m^2 B_{\zeta^0}(\tau))$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ proseslərinin spektral funksiyaları mütləq kəsilməz olarsa, onda spektral sıxlıqlar $f_\zeta(\lambda)$, $f_{\zeta^0}(\lambda)$ və $f_Z(\lambda)$ aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir:

$$f_Z(\lambda) = c^2(f_\zeta(\lambda) + m^2 f_{\zeta^0}(\lambda) * f_\zeta(\lambda)),$$

burada * – kompozisiya işarəsidir. $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ uyğun olaraq λ_1 və λ_2 tezliklərində toplanmış darzolaqlı spektrlərə malik olarsa, $0 < \lambda_2 \ll \lambda_1$ şərti ödənilsə, $f_z(\lambda)$ sıxlığı ± 1 tezliklərində zirvelərə malikdir, bu zirvələr daşıyıcı zirvələr adlanır, $\pm(\lambda_1 - \lambda_2)$ tezliklərində isə $f_z(\lambda)$, yan və ya peyk zirvələr adlanan zirvelərə malikdir. $f_z(\lambda)$ -nın bu nöqtələrdə və həm də $\lambda = \lambda_2$ üçün qiymətləri aşağıdakı təqribi ifadələrlə təyin olunur:

$$f_z(\lambda_1) \approx c^2 [f_{\zeta}(\lambda_1) + m^2 (f_{\zeta^0}(0) f_{\zeta}(\lambda_1) + f_{\zeta^0}(\lambda_2) f_{\zeta}(\lambda_1 + \lambda_2))],$$

$$f_z(\lambda_1 - \lambda_2) \approx c^2 [f_{\zeta}(\lambda_1 - \lambda_2) + m^2 f_{\zeta^0}(\lambda_2) f_{\zeta}(\lambda_1)],$$

$$f_z(\lambda_2) \approx c^2 [f_{\zeta}(\lambda_2) + m^2 (f_{\zeta^0}(\lambda_2) f_{\zeta}(0) + f_{\zeta^0}(\lambda_1 - \lambda_2) f_{\zeta}(\lambda_1))].$$

$|Z(t)|$ funksiyası $Z(t)$ prosesinin qurşayıcısıdır. $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ darzolaqlı proseslər olduğu halda təbii fiziki interpretasiyası olunurlar, buna görə də, məs., radiotexnikada geniş tətbiq olunurlar.

Əd.: [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Выборочные траектории и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, 2 изд., М., 1968; [3] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [4] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

AMPLİTUD – MODULYASIYALANMIŞ HARMONİK RƏQS « амплитудно – модулированное гармоническое колебание; **amplitud – modulated harmonic oscillation** » –

$$X(t) = X_0(t) \cos(\lambda_0 t + \theta)$$

şəkində rəqsdir, burada λ_0 – qeyd olunmuş dairəvi tezlik, $X_0(t)$ amplitudlu stasionar təsadüfi proses, θ fazası ya təsadüfi kəmiyyət və ya qeyd olunmuş ədəddir. Əgər θ fazası $[0, 2\pi]$ intervalında müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, $X_0(t)$ prosesinin [spektral sıxlığı $f_0(\lambda)$ ilə təyin edən] güc paylanması $|\lambda| \ll \lambda_0$ tezliklər oblastında toplanmışdırsa, onda A. – m. h. r. $X(t)$ stasionar təsadüfi prosesdir və bu prosesin spektral sıxlığı $\lambda = \lambda_0$ və $\lambda = -\lambda_0$ nöqtələrində şiş zirvəyə malikdir. Əgər θ fazası qeyd olunmuşdursa, onda $X(t)$ – periodik korrelyar təsadüfi prosesdir və bu prosesin ikiölçülü spektral ölçüsü $F(d\lambda, d\lambda')$, $\lambda = \lambda'$, $\lambda = \lambda' + 2\lambda_0$ və $\lambda = \lambda' - 2\lambda_0$ parçalarında toplanmışdır.

16 AMPLİTUD

AMPLİTUD – MODULYASIYALANMIŞ İMPULSAL PROSES « амплитудно – модулированный импульсный процесс; **amplitud – modulated impulse process** » –

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \Gamma(t - t_n) \quad (*)$$

şəkində *impulsal təsadüfi prosesdir*, burada $\Gamma(t)$ – impulsun formasını təyin edən, verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır, t_n , $n = 0, \pm 1, \dots$ zaman oxunun nöqtələri çoxluğudur, bu çoxluq təsadüfi, yaxud determinik ola bilər, X_n , $n = 0, \pm 1, \dots$ – amplitudlar ardıcılığı, stasionar təsadüfi ardıcılıqdır.

$\{t_n\}$ – Puasson nöqtələr sistemi (vahid zaman ərzində nöqtələrin orta sayı λ -ya bərabər olan), $\{X_n\}$ isə $MX_n = m$, $MX_n^2 = a^2$ momentləri ilə verilən, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olarsa, $\zeta(t)$ – stasionar təsadüfi prosesdir və onun orta qiyməti və korrelyasiya funksiyası uyğun olaraq,

$$M \zeta(t) = \lambda m \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du$$

və

$$M \zeta(t + \tau) \zeta(t) =$$

$$= \lambda a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u + \tau) \Gamma(u) du + \lambda^2 m^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du \right]^2$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Əgər $t_n = nT_0$ (T_0 – qeyd olunmuş perioddur) və ya $t_n = nT_0 + \varepsilon_n$ ($\{\varepsilon_n\}$, $\{X_n\}$ -dən asılı olmayan stasionar təsadüfi ardıcılıqdır) olarsa, onda $\zeta(t)$ periodu T_0 olan periodik korrelyar təsadüfi prosesdir.

Əd.: [1] Коновалов Г. В., Тарасенко Е. М., Импульсные случайные процессы в электросвязи, М., 1973; [2] Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976; [3] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической Радиотехники, 2 изд., кн. 1, М., 1974; [4] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1–2, М., 1961–62; [5] Френкс Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974.

AMPLİTUD – MODULYASIYALANMIŞ TƏSADÜFİ PROSES « амплитудно – модулированный случайный процесс; **amplitud – modulated random process** » –

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) \Gamma(t)$$

şəkində *təsadüfi prosesdir*, burada $\zeta_0(t)$ – stasionar təsadüfi proses, $\Gamma(t)$ isə verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır. A. – m. t. p.-in xüsusi hali – *amplitud – modulyasiyalanmış harmonik rəqsdir*. Əgər $\Gamma(t)$ periodik funksiya olarsa, onda A. – m. t. p. $\zeta(t)$, periodik korrelyar təsadüfi prosesdir; əgər

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dK(\omega)$$

olarsa, onda $\zeta(t)$ evolyusion spektral ayrılışı olan proseslər sinfindendir, burada $|dK(\omega)|$, $\omega = 0$ olduqda mütləq maksimuma malikdir.

AMPLİTUD TEZLİKLİ XARAKTERİSTİKA « амплитудно-частотная характеристика; amplitude frequency response » – bax. *Ötürücü funksiya*.

ANALİTİK XARAKTERİSTİK FUNKSİYA « аналитическая характеристическая функция; analytic characteristic function » – həqiqi X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması P -nin $z = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafına analitik davam oluna bilən *xarakteristik funksiyasıdır*. $z = t + is$, $|z| < r$ dairəsində analitik olan f xarakteristik funksiyası $|\operatorname{Im} z| < z$ zolağında da analitiktir və bu zolaqda

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} P(dx)$$

düsturu ilə ifadə oluna bilər.

Xarakteristik f funksiyası, yalnız və yalnız, hər hansı $r > 0$ üçün

$$P\{|X| > A\} = O(e^{-rA}), \quad A \rightarrow \infty$$

olduğu halda A. x. f.-dir. Əgər

$$a = \sup\{t > 0: M e^{tX} < \infty\},$$

$$b = \sup\{t > 0: M e^{-tX} < \infty\}$$

olarsa, onda $-ia$, ib , $-f$ funksiyasının xüsusi nöqtələridir və $\{z: -a < \operatorname{Im} z < b\}$, $-f$ funksiyası üçün maksimal analitiklik zolağıdır. A. x. f.-lər böyük yayınmalar ehtimalları haqqında teoremlərdə, paylanmanın komponentlərə ayrılıqlarının dayanıqlılığı məsələlərində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979.

ANALOQLAR METODU « аналогов метод; analogous method » meteorologiyada – hava proqnozu metodudur: ötmüş illərin meteoroloji müşahidələrinin məlumatları arxivindən cari zamana maksimum oxşar situasiya seçilir, sonra müşahidə olunan hava dəyişiklikləri proqnozlanır. Atmosfer vəziyyətləri çoxölçülü fəza fəzasında nöqtə kimi götürülərək, bu nöqtələr isə zaman ötdükcə hər hansı trayektoriyalarla yerlərini dəyişdiyindən, atmosfer üçün A. m.-unda fərz olunur ki, trayektoriyanın «başlanğıc nöqtələri» yaxın olduğu halda bu nöqtələr müəyyən müddət ərzində bir-birinə yaxın qalır. Atmosfer dinamika qanunlarına tabe olduğundan, A. m.-nın tətbiqi faktiki olaraq onu ifadə edir ki, atmosferin evolyusiyasının real yerinə yetirilməsini təsvir edən dinamika tənliklərinin dəqiq həlli başlanğıc vəziyyətləri üst-üstə düşməyən, lakin oxşar verilənlər üçün istifadə olunur (üst-üstə düşməzlilik, həmişə, atmosfer xarakteristikaları üzərində müşahidələrin qaçılmaz natamamlığı və hava şəraitinin eynilə təkrar olunmamazlığı ilə yaranır). Yaxın başlanğıc vəziyyətlərdən sonrakı atmosfer vəziyyətlərinin bir-birindən fərqlənməsi sürətinin analizi meteoroloji proseslərin öncədən söylənilməsinə qiymətləndirməyə imkan yaradır.

A. m. ilə proqnoz üçün həlledici qayda qurmağa görə çoxölçülü *prediktorlar* (proqnoz üçün istifadə olunan atmosfer xarakteristikalarının) fəzası X -in nöqtə kimi verilən ilkin meteoroloji vəziyyətlərinin fərqi (və ya oxşarlığını) ölçməyi bacarmaq

lazımdır. $X^{(1)}$ və $X^{(2)}$ vəziyyətlərinin fərqlənmə ölçüsü – $D(X^{(1)}, X^{(2)})$ -nin aşağıdakı şərtləri ödəməsi təbiiidir:

$$\begin{aligned} D(X^{(1)}, X^{(2)}) &= D(X^{(2)}, X^{(1)}), \\ D(X^{(1)}, X^{(2)}) &\leq D(X^{(1)}, X^{(3)}) + D(X^{(3)}, X^{(2)}), \\ D(X^{(1)}, X^{(2)}) &\geq 0, \quad D(X^{(1)}, X^{(1)}) = 0. \end{aligned}$$

Fərqlənmə ölçüsü kimi ümumiləşmiş Evklid məsafəsi:

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) = \left[\sum_{i=1}^n \omega_i^2 (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2 \right]^{1/2}$$

geniş surətdə istifadə olunur. Ümumiləşmiş Hemming məsafəsi:

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|,$$

de istifadə olunur, burada $x_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$ – $X^{(j)}$ nöqtəsinin koordinatları, ω_i müəyyən çəkildir və bu çəkirlər analogiya haqqında mülahizə aparmaq üçün i -ci prediktorun fərz olunan mühümlüyünü xarakterizə edir. Digər oxşarlıq ölçülərinə də baxılır, məs., belə ölçü hava proqnozu keyfiyyətinin bu və ya digər statistik qiyməti ola bilər (bax. *Proqnozu, havanın; keyfiyyət statistik qiyməti*).

Əgər müşahidələr arxivi X_j prediktorlarının və Y_j *prediktantların* (j – arxivdə müşahidə nömrəsidir) qiymətləri ilə verilmişdirsə, onda A. m.-na əsaslanan proqnoz alqoritm (həlledici qayda) $\hat{Y}(X_0) = Y_{j_0}$ şəklində olur, burada X_0 – proqnoz anında prediktorun qiyməti, $\hat{Y}$ – prediktantın öncə söyləniləcək qiyməti, j_0 isə arxivdə olan yaxşı analoqa uyğun müşahidə nömrəsidir, yəni

$$D(X_0, X_{j_0}) = \min_j D(X_0, X_j).$$

A. m. meteorologiyada uzunmüddətli proqnozlaşdırma üçün əsas metodlardan biridir (bax. [3]). Yaxşı analoqlar qrupu istifadə olunduqda bu metod daha məqbul nəticələr üçün məqsədəuyğun sayılır.

Belə qrup üzrə atmosferin bir sıra müxtəlif xarakteristikalarını proqnozlaşdırmaq mümkündür və hətta *havanın ehtimali proqnozunu* tərtib etmək mümkündür.

Əd.: [1] Груза Г. В., Ранькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983; [2] Груза Г. В., Рейтенбах Р. Г., Статистика и анализ гидрометеорологических данных, Л., 1982; [3] Долгосрочные метеорологические прогнозы, Л., 1985.

ANDERSON BƏRABƏRSİZLİYİ « Андерсона неравенство; Anderson's inequality » – vektor fəzalarında qabarıq, sifra nəzərə alınmayan simmetrik çoxluqların və onların uyğun istiqamətlər üzrə yerindəyişmələrinin ölçülərinin qiymətləri arasında bərabərsizlikdir. μ – topoloji vektor fəzası F -də Borel ölçüsü olsun, ixtiyari qabarıq və sifra nəzərə alınmayan simmetrik $C \subset F$ Borel çoxluğu və ixtiyari $t \in [0, 1]$, $y \in F$ üçün $\mu(C + ty) \geq \mu(C + y)$, o cümlədən, $\mu(C) \geq \mu(C + y)$ münasibəti ödənilərsə, onda μ ölçüsü üçün Anderson bərabərsizliyi ödənilir, deyilir.

$\mathbb{R}^n$ -də ehtimal ölçüsü üçün A. b. o halda ödənilir ki, məs., bu ölçü Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü olsun, onun sıxlığı f isə aşağıdakı şərtləri ödəsin: 1) $f(x) = f(-x)$,

$x \in \mathbb{R}^n$; 2) ixtiyari $\theta > 0$ üçün $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq \theta\}$ çoxluğu qəbərli çoxluq olsun. Bu fakt T. Anderson tərəfindən uzlaşma statistik kriterilərinin asimptotik nəzəriyyəsinin bəzi problemlərinin öyrənilməsi ilə bağlı müəyyən olunmuşdur və bir sıra ehtimal bərabərsizliklərinin əsası olmuşdur.

A. b. mərkəzlənmiş Gauss ölçüləri üçün, separabel Banax fəzalarında və daha ümumi topoloji vektor fəzalarında digər ehtimal ölçülərinin geniş sinfi üçün doğrudur.

Əd.: [1] Anderson T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, № 2, p. 170–76; [2] Borell K., «Ark. mat.», 1974, v. 12, № 2, p. 239–52; [3] Булдыгин В. В., Харазисвили А. Б., Неравенство Брунна – Минковского и его приложения, К., 1985.

ANDERSON – YENSEN TEOREMİ « Андерсона – Йенсена теорема; Anderson – Jensen theorem » – bax, Hasil(i) ehtimal fəzalarının.

ANDRE İNIKAS PRİNSİPİ « Андре принцип отражения; Andre’s reflection principle » – bax, *inikas prinsipi*.

AN(i) dayanmanın « момент остановки; stopping time » – bax, *Dayanma anı*.

ANİ SPEKTRAL SIXLIQ « мгновенная спектральная плотность; instantaneous spectral density » – bax, *Spektral nəzəriyyə(lər)i* qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

ANİ VƏZİYYƏT « мгновенное состояние; instantaneous state » – bircins Markov prosesinin ehtimal x vəziyyətidir ki, bu vəziyyətdən çıxış ehtimalının sıxlıq funksiyası sonsuzluğa bərabərdir:

$$\lim_{t \downarrow 0} p(t, x, x) = 1,$$

$$q_x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p(t, x, x)}{t} = +\infty,$$

burada $p(t, x, x)$ – prosesin t müddəti ərzində x vəziyyətinə x -ə keçid ehtimalıdır. A. v.-in varlığı 1951-də A. N. Kolmogorov və ondan asılı olmayaraq P. Lévy (P. Lévy) tərəfindən aşkar edilmişdir, bu isə vəziyyətlər çoxluğu sonlu Markov prosesləri nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafına təkan vermişdir. «A. v.» termini P. Lévyə məxsusdur. Prosesin trayektoriyalarının A. v.-də olma anları çoxluğu ya sanki yəqin boş çoxluqdur və ya müsbət Lebeq ölçülü (hətta özündə metrik sıx) çoxluqdur, lakin hər yerdə sıx deyildir. A. v. *dayanıqlı vəziyyətə* qarşı vəziyyət kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

ANOSOV DİNAMİK SİSTEMİ « Аносова динамическая система; Anosov dynamical system » – $t \in (-\infty; \infty)$ və ya $t \in \{0; \pm 1; \pm 2, \dots\}$ olduqda kompakt

hamar Riman çoxobrazlı $\mathcal{D}$ -də təyin olunmuş $S^t: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ diffeomorfizmlərinin ehtimal bir parametrik qrupudur ki, bu qrup üçün $\mathcal{D}$ üzərində kəsilməz $v(x)$ vektorlar meydanında $(S_*^t v)(x) = dS^t v(S^{-t}x)$ düsturu ilə təsir göstərən S_*^t xətti operatorunun spektri vahid radiuslu çevrə ilə kəsişmir. Hamar invariant ölçü

olduğu halda A. d. s. güclü stoxastik xassələrə malik olur (bax, [1], [2]), t diskret olduğu halda – K – sistemdir. $\mathcal{D}$ -də verilən $f(x)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir. A. d. s. güclü stoxastik xassələrli dinamik sistemlərə bir misaldır (bax, *Erqodik nəzəriyyə*).

Əd.: [1] Аносов Д. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90, с. 1–210; [2] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 1, с. 15–68.

ANSARİ – BREDLİ KRİTERİSİ « Ансари – Бредли критерий; Ansari – Bradley test » – iki skalyar seçimin miqyaslarında müxtəlifliyin olmasına baxmayaraq onların bircinsliyini yoxlamaq üçün *ranq kriterisidir*. Daha dəqiq, skalyar, asılı olmayan seçimlərlə təsvir olunan iki ümumi çoxluğun bircinsliyi hipotezinə qarşı alternativ hipotez – bu seçimlərin medianlarının bərabər olması şərtlə onların səpələnmə ölçülərinin müxtəlifliyini yoxlamaq üçün kriteridir. Ranqların təyin edilmə sistemi: bütün müşahidələnlər birləşdirilir; 1 ranq iki müşahidələnenə – müşahidələnenlərdən ən böyük və ən kiçiyinə; 2 ranq – yerdə qalan müşahidələnenlərdən ən böyük və ən kiçiyinə və i. a. verilir. A. – B. k.-nin statistikasını seçimlərdən birinin ranqlarının cəmidir. Əgər seçimlərin hər ikisi eyni bir kəsilməz ümumi çoxluqdan seçilmişlərsə, A. – B. k.-nin statistikasını sərbəst paylanmaya malik olur; onun paylanması yalnız seçimlərin həcmindən asılı olur. Bu məsələnin həlli üçün *Sicel – Tyuki kriterisi* də tətbiq olunur. Sıfır (başlanğıc) hipotezində Sicel – Tyuki kriterisi statistikasını Uilkinson ranq cəmləri kriterisi statistikasını kimi paylanmışdır və buna görə də, onun paylanma və faiz nöqtələri cədvəllərindən istifadə etmək olar.

Medianları ola bilər ki, üst-üstə düşməyən iki ümumi çoxluğun miqyas ölçülərinin bərabərliyini seçimlər üzrə yoxlamaq üçün L. Mozes, paylanmadan asılı olmayan (sıfır hipotezi halında) ranq kriterisinə oxşar kriteri təklif etmişdir (bax, [2], [3]). Bu kriteridə süni randomizasiya – ilkin seçimlərin altqruplara təsadüfi bölgüsü istifadə olunur.

Əd.: [1] Ansari A. R., Bradley R. A., «Ann. Math. Statist.», 1960, v. 31, № 4, p. 1174–89; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Moses L. E., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 3, p. 973–83.

ANTİFERROMAQNİT MODEL « антиферромагнитная модель; antiferromagnetic model » – statistik mexanikanın həqiqi qiymətləri şəbəkəvari modelinin xüsusi halıdır. Bu model onunla səciyyəvidir ki, A. m.-in hər hansı periodik əsas vəziyyəti ehtimal $\{x_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ konfigurasiyalarında toplanmışdır ki, bütün $t \in \mathbb{Z}^d$ üçün $x_{t+e} = -x_t$ bərabərliyi ödənilir, burada $e \in \mathbb{Z}^d$ – ixtiyari vahidi vektordur. A. m. üçün Gibbs paylanmalarının strukturu potensialı U aşağıdakı şəkildə verilən antiferromaqnit *İzinq modeli* ilə illüstrasiya olunur:

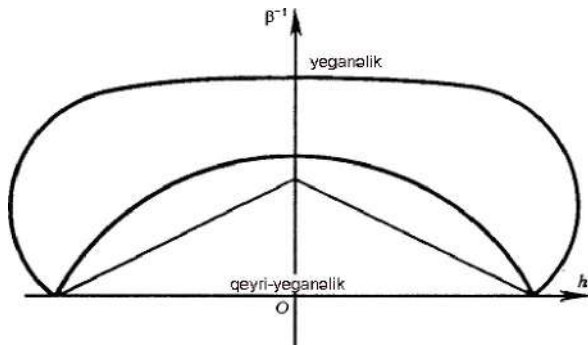
$$U_A(x_A) = \begin{cases} -h x_t, & A = \{t\}, \\ x_s x_t, & A = \{s, t\}, |s - t| = 1, \\ 0, & \text{digər } A\text{-lar üçün,} \end{cases}$$

burada $x_t = \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{R}$. İzinq modelinin əsas vəziyyətləri $|h| < 2d$ olduqda, iki x^1, x^2 konfigurasiyalarında toplanmışdır:

$$x_t^1 = (-1)^{t_1 + \dots + t_d}, \quad x_t^2 = -x_t^1.$$

$h = 0$ olduqda İzinq A. m. İzinq ferromaagnetikinə izomorfudur. İzomorfizm dəyişənlərin $x_t \rightarrow (-1)^{t_1 + \dots + t_d} x_t$ əvəzləməsi ilə

alınır. $h \neq 0$ olduqda modellər izomorf deyildir və $d \geq 2$ olduqda (şəkil) müxtəlif faza diaqramlarına malik olurlar.



Məlumdur ki (bax, [1]), Gibbs paylanması böyük β və kiçik h -ların üçbucaq oblastında yeganə deyildir, kiçik β və böyük h -lar oblastında isə yeganədir. Fərz olunur ki, yeganəlik və qeyri – yeganəlik oblastlarının ümumi sərhədi olan əyri mövcuddur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Функ. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, в. 4, с. 44–57.

ANTİSİMMETRİK FOK FƏZASI «антисимметрическое пространство Фока; antisymmetric Fock space» – bax, Fok fəzası.

ANTİSİMMETRİK SEÇMƏ METODU «антисимметричной выборки метод; antisymmetric variate method» – bax, Antitetik dəyişənlər metodu.

ANTİTETİK DƏYİŞƏNLƏR METODU «антитетических переменных метод; antithetic variables method», antisimmetrik seçmə metodu – f funksiyasının vahidi hiperkub üzrə s – qat inteqralının Monte – Karlo metodu ilə qiymətləndirilməsində

$$[f(\xi_1, \dots, \xi_s) + f(1 - \xi_1, \dots, 1 - \xi_s)]/2$$

ifadəsinin istifadə olunmasından ibarətdir, burada ξ_i , – $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi və ya psevdotəsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Hammersley J., Morton K., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, p. 449–75.

APARI ƏMSALI «сноса коэффициент; drift coefficients» – bax, Kolmoqorov tənlikləri, Aparı əmsalları.

APARI ƏMSALLARI «переноса / сноса коэффициенты; drift coefficients» – diffuzion prosesin doğuran operatorunun ilk törəmələrinin qarşısındakı əmsallardır. A. ə. aparı vektorunu əmələ getirir. Əgər diffuzion (və ya kvazidiffuzion) proses

$$dx(t) = a(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə (bax, Diffuziya əmsalları), onda bu prosesin A. ə. (verilmiş bazisdə) $a(t, x)$ vektorunun koordinatlarıdır (bu bazisdə).

$a(t, x)$ aparı vektorunun fiziki mənası: diffuzion prosesin t -dən $t + \Delta t$ -yə qədər müddət ərzində orta meyli $x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta t \downarrow 0$ olduqda $x(t) = x$ olarsa, $o(\Delta t)$

dəqiqliyi ilə $a(t, x)\Delta t$ şəklində ifadə oluna bilinir (əgər qeyd olunan meylin momenti yoxdursa, onda kəsik meyli götürülməlidir). Başqa sözlə, $a(t, x)$ x nöqtəsində t anında mühtin (hissəciyin hərəkətinin müşahidə olunduğu) hərəkəti sürətinin makroskopik sürətidir.

APARI VEKTORU «сноса вектор; drift vector» – bax, Çoxölçülü Viner prosesi.

APARICI FUNKSİYA «ведущая функция; leading function» – bax, Puasson prosesi, Nöqtəvi proses.

* **APARICI ÖLÇÜSÜ, AXININ** «ведущая мера потока; leading measure of flow» – bax, Təsadüfi axın.

APOSTERİOR EHTİMAL «апостериорная вероятность; posteriori probability», hər hansı təsadüfi hadisənin, aposteriori ehtimal – şərtsiz ehtimalın və ya aprior ehtimalın əksinə olaraq, hər hansı bir hadisənin baş verməsi şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır. «Şərti» və «aposterior» terminləri arasında heç bir prinsipial fərq yoxdur. Təbiiqə hallarda şərtin özü fərziyyəvi xarakter daşıyaraq sınaqlarda bilavasitə müşahidə olunmadıqda, «şərti» termini istifadə olunur.

«Aposterior» termini nəzərə alınacaq şərtin, faktik olaraq, müşahidə olunduğunu qeyd etmək istədikdə istifadə olunur.

A. e. aprior ehtimalla Bayes düsturu ilə əlaqəlidir.

APOSTERİOR ORTA QIYMƏT «апостериорное среднее; a posterior mean» – aposterior paylanmanın riyazi gözləməsidir.

APOSTERİOR PAYLANMA «апостериорное распределение; a posteriori distribution» şərti paylanma, – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin müəyyən bir şərtə nəzərən şərti ehtimal paylanmasıdır və bu şərtsiz paylanma və ya aprior paylanmaya əks mənada anlaşıılır.

Θ – təsadüfi parametr, $p(\theta)$ – aprior paylanmanın sıxlıq funksiyasıdır, $\tilde{\xi}$ – sınaqlarda müşahidə olunan təsadüfi nəticədirsə və $p(x|\theta)$ isə $\{\Theta = \theta\}$ şərtinə nəzərən $\tilde{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır, onda Θ -nın $\tilde{\xi}$ -yə nəzərən A. p.-sının sıxlıq funksiyası Bayes düsturuna əsasən

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta)p(x|\theta)d\theta}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər $K(x)$ paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $p(x|\theta)$ olan paylanmalar ailəsi üçün kafi statistikadırsa, onda A. p. x -in özündən deyil, $K(x)$ -dən asılıdır. x_i -lər asılı olmayan sınaqlarda şərti paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x|\theta_0)$ olan $\tilde{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin aldığı qiymətlər olarsa, onda $p(\theta|x_1, \dots, x_n)$ A. p.-nin $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik yaxınlaşması θ -nın aprior paylanmasından «sanki asılı olmur».

Statistik həllər nəzəriyyəsində A. p.-nin rolu haqqında «Bayes yanaşması statistik məsələlərə» məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946.

APOSTERIOR RISK(i) həlledici funksiyanın « **апостериорный риск** решающей функции; **a posterior risk** of a decision function » – statistik eksperimentdə müşahidə olunan X təsadüfi elementinin (seçimin) x nəticəsinin qeyd olunmuş qiymətində δ həlledici funksiyanın və θ parametrinin birgə paylanması üzrə $L(\theta, \delta(X))$ itki funksiyanın *şerti riyazi gözləməsidir*. $\delta_G(x)$ Bayes həllində A r.-in qiyməti – *şerti Bayes riski* adlanır.

Bax, *Bayes yanaşması* statistik məsələlərə.

* **APPROKSİMƏSİYƏ TEOREMİ** « **аппроксимационная теорема; approximation theorem** » – $\mathcal{A}$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbrə daxil olan ixtiyari A hadisəsinin $\mathcal{A}$ -ya daxil olan hadisələr ardıcılığının limiti kimi ifadə olunması haqqında teoremdir.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{U}_n$ – $\mathcal{F}$ -ə daxil olan hadisələrin hər hansı $\mathcal{A}$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbr olsun. Onda ixtiyari $A \in \mathcal{U}$ hadisəsi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \bar{A} \cup \bar{A}_n A) = 0 \quad (1)$$

xassəsini ödəyən $A_n \in \mathcal{A}$ hadisələr ardıcılığı vardır;

(1) xassəsi ona ekvivalent olan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \setminus A) = 0$$

münasibəti şəklində də ifadə olunur.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_n A) + P(\bar{A}_n A) = \\ &= P(A_n) - P(A_n \bar{A}) + P(\bar{A}_n A) \end{aligned}$$

olduğundan teoremin hökmü onu ifadə edir ki, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ və hər bir $A \in \mathcal{U}$ hadisəsi sıfır ehtimallı çoxluq

deqiliyyə ilə doğuran $\mathcal{A}$ cəbrinə daxil olan hadisələr ardıcılığının limiti kimi ifadə oluna bilər.

$A \in \mathcal{F}$ hadisəsi üçün (1) xassəsini ödəyən təsadüfi hadisələr ardıcılığı olarsa, A -ya *aproximəolunan* hadisə deyilir.

APPROKSİMƏSİYƏSİ, MÜRƏKKƏB PAYLANMALARIN daha sadələrlə « **аппроксимация сложных распределений более простыми; approximation of complex distributions by simpler ones** » – *ehtimal paylanmalarının xassələri məlum olan və ya asanlıqla öyrənilən daha sadə formalı ehtimal paylanması* ilə yaxınlaşmasıdır.

Misal. Paylanmanın *Pirson paylanmaları* ailəsindən olan əyri vasitə ilə *aproximəsiyası*. Pirson əyriləri ailəsinə aid olan ehtimal paylanmasının $y = f(x)$ sıxlıq funksiyası

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = - \frac{x + C_1}{C_0 + C_1 x + C_2 x^2}$$

differensial tənliyinin həllidir, burada C_0, C_1 və C_2 sabitləri σ^2 dispersiyası, asimmetriya əmsalı γ_1 və eksess əmsalı γ_2 ilə

sadə münasibətlərlə əlaqəlidir. Beləliklə, σ^2 , γ_1 və γ_2 -nin verilmiş qiymətləri üzrə paylanmanı Pirson ailəsindən uyğun əyri ilə *aproximəsiya* etmək olar. Nəzəri paylanma məlum olmadığı halda σ^2 , γ_1 və γ_2 kəmiyyətləri əvəzinə onların seçimi qiymətlərini götürərək seçimi paylanmanı hamarlamaq məqsədilə Pirson əyrisindən də istifadə etmək olar.

Daha sadə misallar *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi* və *Normal approximəsiya* məqalələrində verilmişdir.

Əd.: [1] Кендалл М. Д., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., 1966; [2] Elderton W. P., Frequency curves and correlation, Camb., 1953; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

$(\mathcal{H}, \Phi)$ – **APPROKSİMƏDİCİ FUNKSIONAL**

« $(\mathcal{H}, \Phi)$ – **аппроксимирующий функционал;**

$(\mathcal{H}, \Phi)$ – **approximating functional** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

* **APPROKSİMƏOLUNAN HADİSƏ** « **аппроксимруемое событие; approximable event** » – bax, *Approximəsiya teoremi*.

APRİOR EHTİMAL « **априорная вероятность; a priori probability** » hər hansı hadisənin, *a priori* ehtimal, *şertsiz ehtimal* – hər hansı əlavə şərtə nəzərən bu hadisənin *şerti ehtimalına* əks mənada, həmin hadisənin *şertsiz ehtimalıdır*. Şerti ehtimal, bu halda *aposterior ehtimal* adlanır. Bu terminologiya, adətən, *Bayes düsturu* ilə əlaqədar istifadə olunur.

APRİOR İNFORMASİYƏ « **априорная информация; a prior information** » statistik məsələlərdə – təsadüfi hadisə və ya proses haqqında statistik *a priori* məlum olan keyfiyyət və kəmiyyət haqqında məlumatlardır; alınan müşahidə nəticələri üzərində işlədikdən sonra o, özünün nəticələrini çıxarır. Bir qayda olaraq hesab olunur ki, statistik məsələlərdə araşdırılan təsadüfi hadisə və ya prosesin bəxildığı $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının keyfiyyətli təsviri məlumdur, burada

Ω – elementar hadisələr fəzası, $\mathcal{A}$ isə bütün müşahidə olunan təsadüfi hadisələri özündə saxlayan Ω -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdir. Bundan başqa, «müşahidəolunan təsadüfi hadisə və ya prosesin nəticələrinin ehtimal paylanması $P\{\omega\}$, $(\Omega, \mathcal{A})$ -da təyin olunmuş bütün ehtimal paylanmaları çoxluğu $\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ -dan olan $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsindədir», əlavə informasiyasından da istifadə olunur. Bəzən müşahidə olunan P_θ qanununun parametri θ -nin $(\Theta, \mathcal{B})$ -də hər hansı məlum $Q\{d\theta\}$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət olduğunu da fərz etmək olar. Statistik qiymətləndirmədə mürəkkəb məsələlər keyfiyyətə minimal A. i. ilə verilmirsə, bu məsələlər *korrekt* olmur və tutarı *həllə* malik olmur (bax, [3]).

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960 (добавление); [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Ч е н ц о в Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, № 1, с. 15–31.

APRİOR İNFORMASIYADAN İSTİFADƏ « **априорной информации учет; a prior information usage** » *regression analiz* də – *regressiya funksiyasının* naməlum parametrləri haqqında *aprior informasiyanın* bu parametrlərin ən kiçik kvadratlara metodu ilə alınan statistik qiymətlərindən daha dəqiq statistik qiymətlər almaq məqsədilə istifadə olunmasıdır. $(Y, \Phi\theta, \sigma^2 W)$ xətti *regression* eks-

perimentinin sxemi üçün A. i. i.-nin ən çox istifadə olunan üsulları aşağıdakılardır.

$\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrləri üzərinə $A\theta = r$ xətti məhdudiyyətlərinin qoyulduğu fərz olunur, burada A – rəngi q -yə bərabər olan $(q \times p)$ – matrisi, $0 < q < p$. r isə q – vektordur. $R\theta = r$ tenliklər sisteminin ümumi həllini $\hat{\theta} = \theta_0 + B_\beta$ şəklində yazmaq olar; θ_0 – xüsusi həll, B_β – ixtiyari $(p-q)$ – vektor, B isə $p-q$ rəngli $[p \times (p-q)]$ – matrisdir. Onda ilkin xətti regresion eksperimentin sxemi $r = d \cdot \hat{\theta}$ adlanan $(Y - \Phi\theta_0, \Phi B_\beta, \sigma^2 W)$ sxemine ekvivalentdir. θ parametrlərinin statistik qiymətləri $\hat{\theta} = \theta_0 + B_\beta$ düsturu ilə təyin olunur, burada $\hat{\beta}$ – redüslənmiş modelin β parametrlərinin statistik qiymətidir.

Bir çox hallarda θ parametrləri haqqında aprior informasiya $r = R\theta + \varphi$ şəklində olur, burada r – məlum q – vektor, R – məlum $(q \times p)$ – matris, φ – təsadüfi q – vektordur və φ əsas regression eksperimentdəki təsadüfi xətlər vektoru ilə korrelyar deyildir və $M\varphi = 0$, $\text{cov}\varphi = V$ – cəmləşməyən $(q \times q)$ – matrisdir. Bu halda regression eksperiment sxemi qarışıq model adlanır; bu model $(Y_0, \Phi_0\theta, \sigma^2 W_0)$ sxemine ekvivalentdir, burada

$$Y_0 = \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix}, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} \Phi \\ R \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} V \end{bmatrix}.$$

θ parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiyməti isə

$$(\Phi' W^{-1} \Phi + \sigma^2 R' V^{-1} R)^{-1} (\Phi' W^{-1} Y + \sigma^2 R' V^{-1} r) \quad (*)$$

şəklində ifadə olunur.

$P(d\theta)$ aprior paylanmasının məlum parametrlər çoxluğu Θ -dan ($\Theta \subset \mathbb{R}^p$) olduğu fərz olunur. Fərziyyəyə görə

$$r = \int_{\Theta} \theta P(d\theta),$$

$$V = \int_{\Theta} (\theta - r)(\theta - r)' P(d\theta), \quad R = I_p,$$

burada I_p – vahidi $(p \times p)$ – matrisdir. $|V| \neq 0$ olduqda $(*)$ statistik qiyməti *Beyes statistik qiyməti* adlanır; bu statistik qiymət bütün $\tilde{\theta}$ xətti statistik qiymətləri çoxluğu L -də

$$\int_{\Theta} M(\tilde{\theta} - \theta)'(\tilde{\theta} - \theta) P(d\theta)$$

kəmiyyətini minimallaşdırır.

Əgər məlum parametrlər çoxluğu Θ ellipsoid, yəni

$$\Theta = \{ \theta \in \mathbb{R}^p : |(\theta - r)' U^{-1} (\theta - r)| \leq k \}, \quad k > 0$$

olarsa, $R = I_p$, $V = kU$ olduqda $(*)$ statistik qiyməti *minimaks statistik qiymət* adlanır; *minimaks*

statistik qiymət Θ -da

$$\max_{\theta \in \Theta} a' M(\tilde{\theta} - \theta)(\tilde{\theta} - \theta)' a$$

kəmiyyətini bütün $a \in \mathbb{R}^p$ üçün minimallaşdırır. Əgər $r = 0$ olarsa və $R' V^{-1} R$ matrisi vahidi matrisə mütənasib olarsa, onda $(*)$ statistik qiyməti *yalvarı statistik qiymət* adlanır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Жигляевский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

APRIOR PAYLANMA « апriorное распределение; a priori distribution », şərtsiz paylanma, – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanması olub, bu təsadüfi kəmiyyətin müəyyən bir şərtə nəzərən *şerti ehtimalına* əks mənada anlaşılar.

(θ, ξ) – təsadüfi kəmiyyətlər cütü (təsadüfi vektorlar və ya ən ümumi təsadüfi elementlər cütü) olsun. θ – məlum parametr, ξ isə θ parametrini qiymətləndirmək üçün müşahidələrin nəticəsi olan təsadüfi kəmiyyətdir. θ və ξ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması θ -nın paylanma qanunu (bu halda θ -nın A. p.-sı adlanan) və ξ təsadüfi kəmiyyətinin θ -ya nəzərən *şerti ehtimallar* toplusu P_θ -lar ilə təyin olunur. θ təsadüfi kəmiyyətinin ξ təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən *şerti ehtimal paylanması* (bu halda bu paylanma θ -nın *aposterior paylanması* adlanır) *Beyes düsturu* ilə hesablanır. A. p. statistik məsələlərdə, adətən, məlum olmur. A. p.-nin tətbiqi ilə əlaqədar « *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə » məqaləsinə bax.

APRIOR RİSK(i) həlledici funksiyanın « апriorный риск решающей функции; a prior risk of a design function » – parametrin aprior paylanmasına görə *həlledici funksiyanın* risk funksiyanının orta qiymətidir.

ARDICIL ANALİZ « последовательный анализ; sequential analysis » – riyazi statistikanın ələ bölməsidir ki, burada aparılan sınaqlar sayı (müşahidələrin dayandırıldığı an) əvvəlcədən qeyd olunmayaraq, müşahidələr aparıldığı əreədə daxil olan məlumatlardan asılı olaraq seçilir. Ardıcıl metodların intensiv inkişafı və statistik praktikada tətbiqinə A. Valdin (A. Wald) işləri səbəb olmuşdur. O sübut etmişdir ki, aparılan sınaqların orta sayının təyin edilməsi üçün iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsində (asılı olmayan sınaqların nəticələri üzrə) ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisi adlanan kriteri, Neyman – Pirson lemması ilə təyin olunan, ən güclü klassik fərqləndirmə üsulu ilə müqayisədə daha əlverişlidir (bu sonuncu halda seçimin həcmnin qeyd olunduğu, səhv həllər ehtimallarının eyni olması nəzərdə tutulur).

A. a.-in əsas prinsipləri aşağıdakılardan ibarətdir. $\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F_\theta(x) = P_\theta\{\xi_1 \leq x\}$ müəyyən bir Θ çoxluğundan olan məlum θ parametrlərindən asılı paylanma funksiyasıdır. Məsələnin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, müşahidələrin nəticələrinə əsasən məlum θ parametrinin əsl qiyməti haqqında bu və ya digər qərar çıxarılmalıdır.

İxtiyari statistik məsələnin həllinin əsasını θ parametrinin qiymətləri haqqında son (terminal) d qərarlarının fəzası D və

müşahidelerin dayandırılacaq anını (bu anda son qərar qəbul olunur) təyin edən τ qaydası təşkil edir. Müşahidələrin klassik metodlarında τ anı təsadüfi olmur və o, əvvəlcədən qeyd olunur; ardıcıl metodlarda τ «gelecekdən» asılı olmayan (Markov anı, dayanma anı) təsadüfi kəmiyyətdir. Formal olaraq, $\mathcal{A}_n = \sigma(\omega; \xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğruduğu σ – cəbr, $\tau = \tau(\omega)$ isə $0, 1, \dots, +\infty$ qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyət olsun; əgər hər bir $n \geq 0$ üçün $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n$ olarsa, τ təsadüfi kəmiyyətinə Markov anı deyilir ($\mathcal{A}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$). $\mathcal{A}_\tau$ hər bir $n \geq 0$ üçün $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n$ münasibətini ödəyən ölçülən A çoxluqlarının çoxluğu olsun. Əgər $\mathcal{A}_\tau$ təsadüfi olmayan n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya olunarsa, onda $\mathcal{A}_\tau$ təsadüfi τ anına qədər (τ da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya oluna bilər. Son (terminal) qərar $d = d(\omega)$ (və ya qoyulan məsələnin həlli) qiymətlər çoxluğu D fəzası olan $\mathcal{A}_\tau$ – ölçülən funksiyadır. Belə funksiyalar cütü $\delta = (\tau, d)$ (ardıcıl) həlledici qayda adlanır.

Həlledici qaydalar arasında «optimal» həlledici qaydanı təyin etmək üçün risk funksiyası $W(\tau, \theta, d)$ verilir və $M_\theta W(\tau, \theta, d)$ riyazi gözləməsinə baxılır. $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ optimal həlledici qayda anlayışının tərifinə müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Bunlardan biri Bayes yanaşmasıdır; bu yanaşma ona əsaslanır ki, θ parametrinin aprior $\pi = \pi(d\theta)$ paylanması ilə verilən təsadüfi kəmiyyət olduğu fərz olunur. Onda

$$R^\delta(\pi) = \int_{\Theta} M_\theta W(\tau, \theta, d) \pi(d\theta)$$

π – riskinə baxmaq olar və bu halda əgər $R^{\delta^*}(\pi) \leq R^\delta(\pi)$ münasibəti digər (məqbul) qayda üçün ödənilərsə, $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ qaydası optimal Bayes həlli (və ya π – optimal həll) adlanır. Risk funksiyası $W(\tau, \theta, d)$ -nin ən çox yayılmış forması $c\tau + W_1(\theta, d)$ şəklində olan riskdir, burada $c \geq 0$ bir müşahidənin dəyəri, $W_1(\theta, d)$ isə son qərarın (həllin) itki funksiyası kimi interpretasiya olunur.

Bayes məsələlərində optimal son d^* həllinin tapılması, bir qayda olaraq, çətin olmur və bu halda əsas səylər optimal dayanma anı τ^* -nin təyin olunmasına yönəldilir. Bu zaman A. a.-in bir çox məsələləri «dayanmanın optimal qaydaları» sxeminə öz əksini tapır. Bu sxem aşağıda şərh olunur.

$X = (x_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_x)$, $n \geq 0$ $x \in E$, – $(E, \mathcal{B})$ fəza fəzasında Markov zənciri olsun, burada x_n , – n anında zəncirin vəziyyətidir; $\mathcal{A}_n$ σ – cəbri n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr cəbri, $\mathbf{P}_x$ başlanğıc (ilkin) $x \in E$ vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır. Fərz olunur ki, müşahidə n anında saxlanılsa, $g(x_n)$ uduşuna nail olunur. Onda τ anında müşahidənin dayandırılmasından alınan orta uduş $\mathbf{M}_x g(x_\tau)$ -ya bərabərdir, burada x – ilkin vəziyyətdir. $s(x) = \sup \mathbf{M}_x g(x_\tau)$

funksiyası dəyər adlanır, burada $\sup$ bütün sonlu dayanma anları τ üzrə götürülür. $x \in E$ olan bütün x -lər üçün $s(x) \leq \mathbf{M}_x g(x_{\tau_\varepsilon}) + \varepsilon$ münasibətini ödəyən τ_ε anına ε – optimal dayanma anı deyilir; θ optimal anları optimal anlar adlanır. «Dayanmanın optimal qaydaları» nəzəriyyəsinin əsas sualları belədir: $s(x)$ dəyərinin strukturu nə cürdür, onu necə təyin etmək olar, ε – optimal və optimal anlar nə vaxt mövcuddur, onların strukturu necədir? Qoyulan suallara aid tipik nəticələrdən biri aşağıda şərh olunur.

$g(x)$ məhdud funksiya olsun: $|g(x)| \leq c < \infty$. Onda $s(x)$ dəyər funksiyası $g(x)$ funksiyasının ən kiçik eksessiv majorantıdır, yəni $g(x) \leq f(x)$, $Tf(x) \leq f(x)$ xassələrini ödəyən $f(x)$ funksiyalarından ən kiçiyidir, burada $Tf(x) = \mathbf{M}_x g(x_1)$. Bu halda

$$\tau_\varepsilon = \inf \{n \geq 0 : s(x_n) \leq g(x_n) + \varepsilon\}$$

anı ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimal andır. $s(x)$ dəyəri $s(x) = \max \{g(x), Ts(x)\}$ Vald – Bellman tənliyini ödəyir və o, $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n g(x)$ düsturu ilə tapılır, burada

$Qg(x) = \max \{g(x), Tg(x)\}$. E çoxluğu sonlu olduğu halda

$$\tau_0 = \inf \{n \geq 0 : s(x_n) = g(x_n)\}$$

anı optimal andır.

Ümumi halda əgər $\mathbf{P}_x \{\tau_0 < \infty\} = 1$, $x \in E$ olarsa, τ_0 anı optimal andır.

$C = \{x : s(x) > g(x)\}$, $\Gamma = \{x : s(x) = g(x)\}$ olsun. Tərifə əsasən

$$\tau_0 = \inf \{n \geq 0 : x_n \in \Gamma\}.$$

Başqa sözlə, müşahidələr Γ çoxluğuna ilk daxil olma anında dayandırılmalıdır. Bununla bağlı olaraq, C çoxluğu müşahidələrin davam olunma çoxluğu, Γ müşahidələrin dayandırılma çoxluğu adlanır.

Bu nəticələrin illüstrasiyası kimi iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsini qeyd etmək olar. Bu məsələdə A. Vald ardıcıl metodların klassik metodlarla müqayisədə üstünlüyünü göstərmişdir. θ parametrinin π və $1-\pi$ aprior ehtimalları ilə uyğun olaraq 1 və 0 qiymətlərini aldığı fərz olunur. Son həllər (qərarlar) çoxluğu D -nin də iki nöqtədən ibarət olduğu qəbul olunur: $d = 1$ ($H_1 : \theta = 1$ hipotezi qəbul olunur) və $d = 0$ ($H_0 : \theta = 0$ hipotezi qəbul olunur). Əgər $W_1(\theta, d)$ funksiyasını

$$W_1(\theta, d) = \begin{cases} a, & \theta = 1, \quad d = 0, \\ b, & \theta = 0, \quad d = 1, \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan şəkildə seçmək olarsa və $W(\tau, \theta, d) = c\tau + W_1(\theta, d)$ götürülərsə, onda $R^\delta(\pi)$ üçün $R^\delta(\pi) = c \mathbf{M}_\pi \tau + a \alpha_\pi(\delta) + d \beta_\pi(\delta)$ ifadəsi alınır, burada $\alpha_\pi(\delta) = \mathbf{P}_\pi \{d = 0 | \theta = 1\}$, $\beta_\pi(\delta) = \mathbf{P}_\pi \{d = 1 | \theta = 0\}$ – uyğun olaraq, birinci və ikinci növ səhv ehtimallandır, $\mathbf{P}_\pi$ isə π

aprior paylanmasına uyğun müşahidələr fezasında təyin olunmuş ehtimal paylanmasıdır. Əgər $\pi_n = \mathbf{P}\{\theta = 1 | \omega_n\}$ $H_1: \theta = 1$ hipotezinin $\omega_n = \sigma(\omega: \xi_1, \dots, \xi_n)$ σ – cəbrinə nəzərən aposterior ehtimalıdırsa, onda

$$R^\delta(\pi) = \mathbf{M}_\pi[c\tau + g(\pi_\tau)]$$

düsturu doğrudur, burada $g(\pi) = \min(a\pi, b(1-\pi))$. $x_n = (n, \pi_n) \rightarrow$ tətbiq olunan optimal dayanma qaydalarının ümumi nəzəriyyəsinə əsasən, $\rho(\pi) = \inf_{\tau} R^\delta(\pi)$ funksiyası

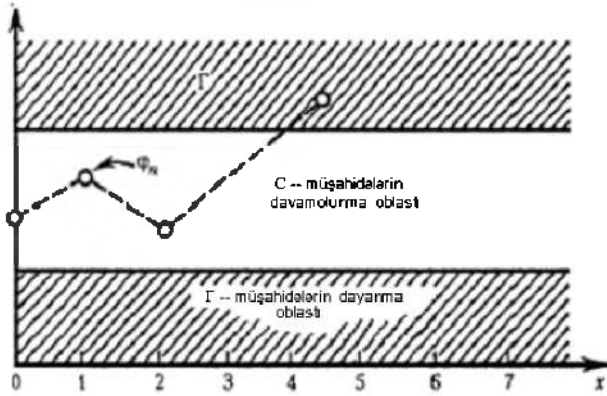
$$\rho(\pi) = \min\{g(\pi), c + T\rho(\pi)\}$$

tənliyini ödəyir. $\rho(\pi)$, $g(\pi)$, $T\rho(\pi)$ yuxarı qabarıq funksiyalar olduğundan, buradan belə nəticə alınır ki, iki ədəd A və B ədədləri var ki, $0 \leq A < B \leq 1$ olduqda, $C = \{\pi: A < \pi < B\}$ – müşahidələrin davam olunma oblası, $\Gamma = [0, 1] \setminus (A, B)$ isə müşahidələrin dayandırılma oblasıdır. Bu zaman $\tau_0 = \inf\{n \geq 0: \pi_n \in \Gamma\}$ dayanma anı optimal dayanma anıdır ($\pi_0 = \pi$).

Əgər $p_0(x)$ və $p_1(x)$ $F_0(x)$ və $F_1(x)$ -in $d\mu = (dF_0 + dF_1)/2$ ölçüsünə nəzərən paylanmalarının sıxlıq funksiyalarıdırsa,

$$\varphi_n = p_1(\xi_1) \dots p_1(\xi_n) / p_0(\xi_1) \dots p_0(\xi_n)$$

isə doğruxaoxşarlıq nisbətidir, onda müşahidələrin davam olunma oblastını (şəkil 1)



Şəkil 1.

$$C = \left\{ \varphi_n: \frac{A}{1-A} \frac{1-\pi}{\pi} < \varphi_n < \frac{B}{1-B} \frac{1-\pi}{\pi} \right\}$$

şəklində yazmaq olar və

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0: \varphi_n \notin C\},$$

Bu halda əgər $\varphi_{\tau_0} \geq \frac{B}{1-B} \frac{1-\pi}{\pi}$ olarsa, onda $d = 1$ qərar, yeni $H_1: \theta = 1$ hipotezi qəbul olunur; əgər $\varphi_{\tau_0} \leq \frac{A}{1-A} \frac{1-\pi}{\pi}$ olarsa, $d = 0$ həlli, yeni $H_0: \theta = 0$ hipotezi qəbul olunur.

Bu optimal həlledici qaydanın strukturu aşağıda şərh olunan şərti ekstremal qoyuluşda hipotezlərin yoxlanılması məsələsi üçün də saxlanılır. Her bir $\delta = (\tau, d)$ həlledici qaydası üçün səhvlər ehtimalları $\alpha(\delta) = \mathbf{P}_1\{d = 0\}$, $\beta(\delta) = \mathbf{P}_0\{d = 1\}$ daxil olunur və $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ədədləri verilir; daha sonra fərz olunur ki, $\Delta(\alpha, \beta)$, $-\alpha(\delta) \leq \alpha$, $\beta(\delta) \leq \beta$ münasibətlərini ödəyən bütün həllər qaydaları çoxluğudur və $\mathbf{M}_0\tau < \infty$, $\mathbf{M}_1\tau < \infty$. Aşağıdakı fundamental nəticə A. Vald tərəfindən alınmışdır. Əgər $\alpha + \beta < 1$ olarsa və

$$\tau = \inf\{n \geq 0: \varphi_n \notin (a, b)\},$$

$$d = \begin{cases} 1, & \varphi_\tau \geq b, \\ 0, & \varphi_\tau \leq a \end{cases}$$

şəklində olan, doğruxaoxşarlıq nisbətinə əsaslanan φ_n və d -lərin funksiyaları $\delta = (\tau, d)$ kriteriləri arasında ədəd $a = a^*$ və $b = b^*$ tapılırsa ki, birinci və ikinci növ səhv ehtimalları dəqiq olaraq α və β -ya bərabər olsun, onda $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ həlledici qaydası $a = a^*$ və $b = b^*$ ilə $\Delta(\alpha, \beta)$ sinfində optimal həlledici qaydadır, lakin bu o mənada anlaşılır ki, ixtiyari $\delta \in \Delta(\alpha, \beta)$ üçün $\mathbf{M}_0\tau^* \leq \mathbf{M}_0\tau$, $\mathbf{M}_1\tau^* \leq \mathbf{M}_1\tau$ münasibətləri ödənilməlidir.

$\delta^* = (\tau^*, d^*)$ ardıcıl həlledici qaydasının klassik qayda ilə müqayisədə üstünlüyünü $H_0: \theta = 0$ və $H_1: \theta = 1$ hipotezlərinin vahid diffuziyalı ξ_t Viner prosesinin lokal orta qiymətinə görə yoxlanılması məsələsində illüstrasiya etmək sadə olur. Birinci və ikinci növ səhvlərin ehtimalları uyğun olaraq α və β verilmiş ehtimallar olduğu halda, bu ehtimalları təmin edən optimal ardıcıl həlledici qayda $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: \lambda(t) \notin (a^*, b^*)\},$$

$$d^* = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tau^*} \geq b^*, \\ 0, & \lambda_{\tau^*} \leq a^*, \end{cases}$$

burada $\lambda_t = \ln \varphi_t$ və doğruxaoxşarlıq nisbəti ($\theta = 1$ -ə uyğun ölçünün $\theta = 0$ -a uyğun ölçüyə görə törəməsinin nisbəti)

$$\varphi_t = e^{\xi_t - t/2},$$

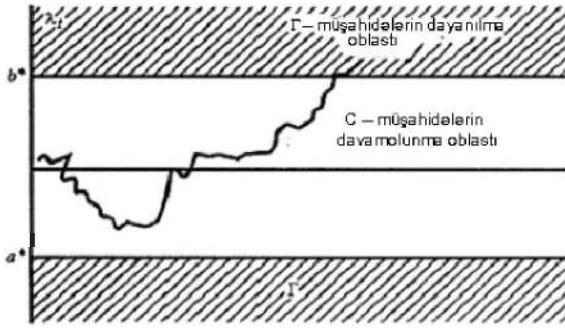
b^* və a^* isə

$$b^* = \ln(1-\alpha)/\beta, \quad a^* = \ln \alpha/(1-\beta)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur (şəkil 2).

$\delta = (\tau, d)$ optimal klassik qaydası Neyman – Pirson lemmasına əsasən aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tilde{\tau} = \tau(\alpha, \beta), \quad \tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{\tau}} \geq h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{\tau}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$



Şəkil 2.

$\delta = (\tau, d)$ optimal klassik qaydası Neyman – Pirson lemmasına əsasən aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tilde{\tau} = t(\alpha, \beta), \quad \tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{\tau}} \geq h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{\tau}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$

burada $t(\alpha, \beta) = (c_{\alpha} + c_{\beta})^2$, $h(\alpha, \beta) = (c_{\beta}^2 - c_{\alpha}^2)/2$, c_{γ} isə

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_{\gamma}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \gamma$$

tenliyinin köküdür. $M_0 \tau^* = 2\omega(\alpha, \beta)$, $M_1 \tau^* = 2\omega(\beta, \alpha)$ olduğundan

$$\frac{M_0 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2 \frac{\omega(\beta, \alpha)}{(c_{\alpha} + c_{\beta})^2}, \quad \frac{M_1 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2 \frac{\omega(\alpha, \beta)}{(c_{\alpha} + c_{\beta})^2}$$

olur, burada

$$\omega(x, y) = (1-x) \ln(1-x)/y + x \ln x/(1-y).$$

Ədədi hesablamalara görə $\alpha, \beta \leq 0,03$ olduqda

$$M_0 \tau^* / t(\alpha, \beta) \leq 17/30, \quad M_1 \tau^* / t(\alpha, \beta) \leq 17/30.$$

Başqa sözlə, birinci və ikinci növ səhvlərin baxılan qiymətlərində fərqləndirmə üçün optimal ardıcıl metodla müqayisədə iki dəfə az müşahidə apanılmasını təmin olunur. Bundan əlavə, əgər $\alpha = \beta$ olarsa, onda

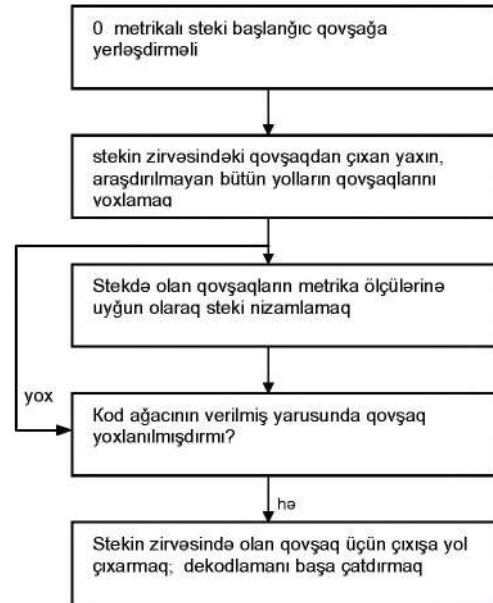
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_0 \tau^* / t(\alpha, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_1 \tau^* / t(\alpha, \alpha) = 1/4$$

olur.

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.

ARDICIL DEKODLA(N)MA « последовательное декодирование; sequential decoding » – qəbul olunmuş məlumat və kod ağacındakı yollar arasında məsafənin (metrikanın) ardıcıl hesablanması əsaslanan, *ağacvari kodların* (o cümlədən, konvolusion kodların) dekodlanma alqoritmlərinin ümumi adıdır; bu şərtlə ki, yolun tədqiq olunan seqmenti (baxılan qovşaq) bir til qədər uzadıla bilər, lakin baxılan qovşaqlardan

hansının uzadılması haqqında qərar isə yalnız onların metrikalarının kəmiyyətlərindən asılı olur. A. d. ideyası və ilk alqoritm 1957-də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Hal-hazırda stek – alqoritmın müxtəlif variantları və Fano alqoritmı (bax, [3]) tətbiq üçün ən perspektivli sayılır. Metrika kimi, adətən, *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* loqarifmindən istifadə olunur.



Şəkil 1.

Stek – alqoritm də stekə qoşulan qovşaqlar baxılan metrikanın ölçüsünə görə nizamlanır, sonra isə maksimal qiymətli metrikaya malik qovşaq seçilir və bu qovşaqlardan çıxan bütün tillər üçün metrikanın artımını hesablanır. Yeni baxılmış metrikaların ölçüləri stekə daxil olunur, yenidən bütün qovşaqlar nizamlanır və s. Dekodlama o halda sona çatır ki, kod ağacının verilmiş yarusundakı qovşağa ilk dəfə baxılsın. Bu halda ilk informasiya altbloku haqqında qərar çıxılır.

Adətən, baxılan yolların maksimal uzunluğu *konvolusion kodun* kod məhdudiyyəti uzunluğu n_D -yə ya bərabər və ya ondan böyük götürülür (Stek alqoritm isə şəkil 1-də verilir).

Fano alqoritmının sxemi şəkil 2-də verilir. Stek – alqoritmədən fərqli olaraq, bu halda qovşaqlara dəfələrlə baxmaq olar, lakin hər bir anda alqoritm yalnız bir yolu analiz edir ki, bu da yaddaşın qənaətililiyinə imkan yaradır.

A. d.-nin əsas xarakteristikaları: kodlamada hesablamaya sayı kəmiyyətinin paylanma funksiyası, *səhv dekodlama ehtimalı* və yaddaş qurğularının qəderindən artıq dolması ehtimalıdır. Stek – alqoritm üçün hesablamaya sayı ξ -nin paylanma funksiyası

$$F(x) = P \{ \xi < x \},$$

$$A_1 x^{-\rho_1} \leq 1 - F(x) \leq A_2 x^{-\rho_2}$$

münasibətlərini ödəyir, burada A_1, A_2, ρ_1, ρ_2 kod və rabitə kanalının parametrlərindən asılıdır. Ötürmə sürətinin kifayət qədər böyük qiymətlərində $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, belə ki, hesablamaya sayı təsadüfi kəmiyyəti ρ parametrlili Pareto paylanmasına təbədir. Səhv dekodlama ehtimalı kod məhdudiyyəti uzunluğunun artması ilə asimptotik olaraq eksponensial azalır.

$M_0 T'_c$ effektivlik göstəricilərinin aşağı sərhədlərini $\gamma \rightarrow 1$ olduqda asimptotik olaraq alır.

$f(\theta)$ üçün uzunluğu verilən a sabitindən böyük olmayan ardıcıl γ – etibarlı interval (N, z_1, z_2) üçlüyü ilə verilir, burada $N, -\infty, n = 1, 2, \dots$ sistemine nəzərən Markov dayanma anı, $P_0\{N < \infty\} = 1, z_1 \leq z_2$ eht. A_N – ölçülən funksiyalardır ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$P_0\{z_2 - z_1 \leq a\} = 1, \quad P_0\{z_1 \leq f(\theta) \leq z_2\} \geq \gamma.$$

İxtiyari belə üçlük üçün dayanma anının riyazi gözləməsi, $\gamma \rightarrow 1$ olduqda,

$$M_0 N \geq \frac{\ln(1-\gamma)^{-1}}{W_0(a)} [1 + o(1)]$$

bərabərsizliyini ödəyir,

$$W_0(a) = \inf_{0 \leq t \leq a} \max \{B_0[f(\theta) + a - t], B_0[f(\theta) - t]\}. \quad (4)$$

(2), (3) sərhədlərinə əsaslanan (N^*, z_1^*, z_2^*) proseduru $f(\theta)$ üçün $\gamma \rightarrow 1$ olduqda, asimptotik olaraq, (4)-də qeyd olunmuş müşahidələr sayının orta qiymətinin aşağı sərhədini almağı təmin edən uzunluğu a -nı aşmayan ardıcıl $(2\gamma - 1)$ – etibarlı intervalı təyin edir, burada

$$N^* = \min \{n: \bar{f}_n^* - \underline{f}_n^* \leq a\}, \\ z_1^* = \underline{f}_{N^*}^*, \quad z_2^* = \bar{f}_{N^*}^*.$$

$p(\theta, x) = \exp[\theta x - b(\theta)]$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ şəklində sıxlıqların eksponensial ailəsinin θ parametri üçün digər bir yanaşması

[6]-də şərh olunmuşdur. Bu yanaşmada $I_n = \bigcap_{r=1}^n \tilde{I}_r$ interval-

lar ardıcılığı θ üçün monoton daralan ardıcıl γ – etibarlı interval əmələ gətirir, burada

$$\tilde{I}_n = \{\theta: \mathcal{M}_n(\theta) \leq (1-\gamma)^{-1}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{M}_n(\theta) = \int \prod_{r=1}^n p(\varphi, x_r) dF(\varphi) / \prod_{r=1}^n p(\theta, x_r)$$

– mənfi olmayan martinqal, F , Θ -da hər hansı ehtimal ölçüsüdür. Açıq $I \subset \Theta$ intervallında $F(I) > 0$ şərtində I_n , $n = 1, 2, \dots$ ardıcılığı – tutarlı ardıcılıqdır (bax, [6]).

$X_1, \dots, X_n, \dots$, – a və σ^2 naməlum parametrləri $N(a, \sigma^2)$ normal paylanması malik, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun.

İkippilləli Steyn proseduru (bax, [1]) bu halda a üçün verilmiş uzunluqlu etibarlı interval qumağa imkan verir. Əgər σ^2 dispersiyası məlum olarsa, a üçün c uzunluqlu γ – etibarlı interval müəyyən edən müşahidələr sayının orta qiymətini təyin edən prosedurlardan ən yaxşısı – determinə olunmuş dayanma anı

$$N = \min \{n: n \geq 4c^{-2} K_y^2 \sigma^2\} \quad (5)$$

bərabərliylə təyin olunan prosedurdur, burada K_y – standart normal qanunun $(1+\gamma)/2$ səkli kvantilidir (bax, [2]). Əgər σ^2 dispersiyası naməlum olarsa, onda

$$N = \min \{n: n \geq \max(n_1, c^{-2} K_n^2 S_n^2)\} + k(\gamma)$$

$$z_1 = \hat{a}_N - (c/2), \quad z_2 = \bar{a}_N + (c/2)$$

tipli prosedurlar a üçün c uzunluqlu ardıcıl γ – etibarlı intervalı təyin edir və bu interval üçün (5)-də qeyd olunan müşahidələr sayının orta qiymətinin aşağı sərhədi $c \rightarrow 0$ olduqda asimptotik olaraq alınır, burada $n_1 \geq 2$, $K_n \rightarrow K_y$, $\hat{a}_n$, S_n^2 – ilk n müşahidələr üzrə seçimi orta və seçimi dispersiyadır, $K(\gamma)$ isə hər hansı sabitdir. $Mx_n^4 < \infty$ olduqda qeyri – parametrik hal üçün analogi nəticə doğrudur (bax, [3] – [5], [7]).

Əd.: [1] Stein C., «Ann. Math. Statist.», 1945, v. 16, p. 243–58; [2] Stein C., Wald A., «Ann. Math. Statist.», 1947, v. 18, p. 427–33; [3] Starr N., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, p. 36–50; [4] Chow Y., Robbins H., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 457–62; [5] Simon G., «Ann. Math. Statist.», 1968, v. 39, p. 1946–52; [6] Lai T., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, p. 265–80; [7] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

ARDICIL KRİTERİSİ, EHTİMALLAR NİSBƏTİNİN

«последовательный критерий отношения вероятностей; sequential probability ratio test» – iki sadə $H_0: p(x) = p_0(x)$ və $H_1: p(x) = p_1(x)$ hipotezlərinin ardıcıl fərqləndirilməsi məsələsində (τ^*, d^*) həlledici qaydasıdır, burada $p(x)$ – mühasidə olunan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən ehtimal paylanmasıdır. E. n. a. k.-nin dayanma anı τ^*

$$L_n = \prod_{k=1}^n p_1(x_k) / p_0(x_k)$$

doğruyaoxşarlıq nisbətinin (A, B) , $0 < A < 1 < B$ intervallında ilk çıxış anı kimi təyin olunur, yəni

$$\tau^* = \inf \{n \geq 1: L_n \notin (A, B)\};$$

$d^* = 0$ son qərar (həlli) (yeni H_0 hipotezinin qəbul edilməsi)

$L_{\tau^*} \leq A$ olduğu halda, $d^* = 1$ qərarı $L_{\tau^*} \geq B$ olduğu halda A. Vald tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur (bax, həm də [2]-yə). O, həmçinin E. n. a. k.-nin birinci və ikinci növ səhv ehtimalları əlaqələndirən $(\alpha$ və β -ni əlaqələndirən) sadə bərabərsizliklərini belə almışdır və bunların həddləri isə uyğun olaraq, A və B götürülmüşdür: $A \leq \beta/(1-\alpha)$, $B \leq (1-\beta)/\alpha$. [3] və [4]-də isbat olunmuşdur ki,

$$q [P_0\{d = 1\} + c_0 M_0 \tau] + (1-q) [P_1\{d = 0\} + c_1 M_1 \tau]$$

şəklində orta Bayes riski üçün E. n. a. k. optimal $(A$ və B -nin uyğun seçilmiş qiymətlərində) Bayes həlledici qaydasıdır, burada P_i və M_i simvollarında i indeksi H_i hipotezinin doğruluğu

fərziyyəsini göstərir, $i = 0, 1, q$, $-H_0$ -ın aprior ehtimalı, c_0 , c_1 – bəzi müsbət konstantlardır. E. n. a. k. şərti ekstremal qoyuluşda da optimal kriteridir, yeni bu kriteri

$$P_0\{d = 1\} \leq P_0\{d^* = 1\},$$

$$P_1\{d = 0\} \leq P_1\{d^* = 0\}$$

şərtləri ödənilən bütün həlledici (τ, d) qaydaları arasında $M_0\tau$ və $M_1\tau$ kəmiyyətinin qiymətlərini minimallaşdırır. E. n. a. k.-nin optimallığı Viner prosesi halı üçün [5]-də (bax, həm də [2]), asılı olmayan artımları ümumi proseslər üçün bir qədər sonra [6]-da isbat olunmuşdur. E. n. a. k.-nin xəta ehtimalları üçün tam asimptotik ayrılışlar (A və B parametrləri üzrə) qalq hədlərinin qiymətləri ilə [7] və [8]-də verilmişdir.

Əd.: [1] В а л д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [3] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, № 3, p. 326–39; [4] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1950, v. 21, № 1, p. 52–99; [5] М и х а л е в и ч В. С., «Вісник Київського університету», 1958, т. 1, № 1, с. 101–04; [6] I r l e A., S c h m i t z N., «Math. Oper. und Statist.», 1984, Bd 15, № 1, S. 91–104; [7] Л о т о в В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 62–72; [7] Л о т о в В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 2, с. 295–304.

ARDICIL QIYMƏTLƏNDİRMƏ «последовательное оценивание; sequential estimation» – statistik modellərin parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi üçün müşahidələr həcmnin təsadüfi götürülməsinə əsaslanan metoddur. $\theta \in \Theta$ parametrdən asılı paylanmaya malik müşahidə olunan ζ_t , təsadüfi prosesinin σ – altcəbrlərinin axını $\{A_t\} \subset \mathcal{A}$, $t \geq 0$ olan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunduğu fərz olunur. τ prosesin $\{A_t\}$ axınına nəzərən Markov anı (dayanma anı), $\tilde{\theta}$ statistik qiyməti A_t – ölçülən funksiya olarsa, $(\tau, \tilde{\theta})$ ardıcıl qiymətləndirmə planı adlanır. Əgər $\tau < \infty$ münasibəti bütün $\theta \in \Theta$ parametrləri üçün sanki yəqin ödənilərsə, $(\tau, \tilde{\theta})$ – q a p a l ı p l a n. $M_0\tilde{\theta} = \theta$ bərabərliyi bütün $\theta \in \Theta$ parametrləri üçün ödənilərsə, $(\tau, \tilde{\theta})$ – m e y l s i z p l a n adlanır; M_0 θ parametrlərinin qeyd olunmuş qiymətində riyazi gözləmə simvoludur. Rao – Kramer bərabərsizliyinin ödənilməsinə təmin edən requlyarlıq şərtlərində eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının θ parametrlərinin qiymətləndirilməsinin ixtiyari qapalı, meylsiz ardıcıl planı $(\tau, \tilde{\theta})$ üçün də

$$M_0(\tilde{\theta} - \theta)^2 \geq (I(\theta) M_0\tau)^{-1} \quad (*)$$

bərabərsizliyi ödənilir (bax, [1]), $I(\theta)$ – Fişer informasiya miqdarıdır (bu bərabərsizlik bezen Rao – Kramer – Volfovits bərabərsizliyi adlanır). Əgər müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan kəmiyyətlərdirsə və onların paylanmalarının sıxlıq funksiyası sonlu sayda kəsilmə nöqtəsi olan $p(x - \theta)$ -ya bərabərdirsə, onda bir sıra əlavə şərtlər daxilində [məs., əgər $p(x)$ funksiyasının bütün sıçrayışları eyni işarəli olmazsa] qiymətləndirmənin ələ ardıcıl planları vardır ki, itki funksiyası üstlü funksiya olduğu halda bu planların effektivliyi seçiminin həcmi qeyd olunmuş planlardan yüksəkdir (bax, [3]); əgər $p(x)$ kəsilməz funksiya olarsa, onda

$M_0(\tau) \leq n$ münasibəti ödənilən planlar sinfində $n \rightarrow \infty$ olduqda optimal ardıcıl planlar asimptotik olaraq müşahidələr həcmi qeyd olunmuş prosedura olan effektivliyə malikdir (itki funksiyası üstlü olduğu halda).

Müşahidə olunan daha ümumi proseslər üçün, xüsusi halda diffuzion tipli proseslər üçün (bax, [2]) (*) bərabərsizliyinin analoqları mövcuddur.

Əd.: [1] W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1946, v. 17, № 4, p. 489–93; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь - м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 700–13.

ARDICIL QIYMƏTLƏNDİRMƏ PLANI «последовательный план оценивания; sequential design of estimation» – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

ARDICIL PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN «последовательное планирование эксперимента; sequential design of experiment» – $(y_1, \dots, y_N) = y_1^N$

ölçmələrinin aparılması üçün ələ metoddur ki, y_n -in hər bir ölçülməsindən sonra bu ölçmənin ya sonuncu olduğu (dayanma anı N , n -ə bərabərdir) qəbul edilir və ya y_{n+1} -i ölçmək üçün

$x_{n+1}(y_n^N) \in X$ şərtləri təyin olunur. Ölçmələr eyni şəraitdə aparılan hallarda E. a. p. *ardıcıl analizə və ya ardıcıl qiymətləndirilməyə* gətirib çıxarır. E. a. p. təsadüfi proseslər statistikasının bölməsi olub, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin müasir aparatına əsaslanır. E. a. p.-nin formal sxemi aşağıda verilmişdir.

E. a. p.-nin əsas obyektı – ayrıca bir ölçməyə uyğun $(Y, \mathcal{Y})$

ölçülən fəzasında qarşılıqlı mütləq kəsilməz P_θ^x ölçülərinin ölçülən ailəsidir. Bu ölçülər ailəsi $\theta \in \Theta$ parametri və $(X, \mathcal{X})$ fəzasından olan x idarəetməsindən asılıdır. $x_n: Y^{n-1} \rightarrow X$, $n > 1$ ölçülən idarəetməsinin $U = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ ardıcılığının $(X, \mathcal{X})$ -də x_1 üçün $q(\cdot)$ paylanmasının və y_1^N ölçməsi üzrə $\mathcal{A}_n$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anı N -in verildiyi fərz olunur. $\xi = (U, N)$ cütünə p l a n deyilir. $B \subset \mathcal{Y}$, $\theta \in \Theta$ olduqda bütün $n = 1, 2, \dots$ qiymətlərində

$$P_\theta^U\{y_n \in B | y_1^{n-1}\} = P_\theta^{x_n}(B) \quad (P_\theta^U \text{ – sanki yəqin}) \quad (1)$$

şərtini ödəyən, $X \times Y^\infty$ -də təyin olunan yeganə P_θ^U ölçüsü qurulur. (1)-dən aydındır ki, y_n kəmiyyətləri x_n verildikdə y_1^{n-1} -dən asılı deyildir. Daha ümumi sxemlərə də baxılır: belə sxemlərdə n -ci ölçmənin təsadüfi xətalara, idarəetmələr randomlanmış olduğu hallarda, əvvəlki xətalara əlaqəli olur və s.

ξ planına uyğun $P_\theta^x(\cdot)$ ölçüsü P_θ^U -nün $Y^N = \{y_1^N\}$ çoxluğunda daralmasıdır. Əgər $\inf_\theta P_\theta(N < \infty) = 1$ olarsa, onda

P_θ^x ölçüləri qarşılıqlı mütləq kəsilməzdir, sıxlıq funksiyası isə

$$\Pi_{\theta, \varphi}^x(\cdot) = dP_\theta^x(\cdot)/dP_\varphi^x(\cdot) = \prod_{i=1}^N \Gamma_{\theta, \varphi}^x(y_i)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\Gamma_{\theta, \varphi}^x(\cdot) = dP_\theta^x(\cdot)/dP_\varphi^x(\cdot)$.

Beləliklə, x_1^N qeyd olunduğu halda y_1^N ölçmələri şərti asılı olmayandırlar.

θ parametri haqqında d həlli (qeran) Y^N -in ölçülən Λ fəzasına inikasıdır; $w(\delta, \theta)$ itki funksiyasının verildiyi fərz olunur. Nəhayət, (U, N, δ) üçlüyü s strategiyasıdır. Onun riski $M_\theta^\xi w(\delta(y_1^N), \theta)$ kəmiyyətidir. Qeyd etmək lazımdır ki, $\ln \Pi_{\theta, \varphi}^\xi, S(f) = \sum_{i=1}^N f^N(y_i)$ additiv statistikasına aid misaldır.

$$\bar{N}_\theta = M_\theta^\xi N < \infty \quad \text{və} \quad \bar{f}_\theta^\xi = \int P_\theta^\xi(dv) f^\xi(v) \quad \text{olsun.}$$

Əgər $D_\theta^\xi S(\bar{f}_\theta^\xi) = 0$ olarsa, onda requlyar additiv statistika üçün aşağıdakı Vald eynilikləri doğrudur:

$$M_\theta^\xi S(f) = \bar{N}_\theta \int \bar{f}_\theta^\xi \pi_\theta^\xi(dx) = \bar{N}_\theta \bar{f}_\theta^\xi,$$

$$D_\theta^\xi S(f) = M_\theta^\xi \sum_{n=1}^N D_\theta^\xi(f^{x_n}(y_n) | y_1^{n-1}),$$

burada $B \subset \mathcal{X}$ üçün ξ planının statistik proyeksiyası $\pi_\theta^\xi(\cdot), \pi_\theta^\xi(B) = \bar{N}_\theta^{-1} \sum_{n=1}^N P_\theta^\xi\{n \leq N, x_n \in B\}$ düsturu ilə təyin olunur.

Hipotezlerin yoxlanılmasının optimal strategiyasının axtarışı, qiymətləndirilməsi və regressiyası üçün uyğun olaraq additiv statistikanın orta qiymətləri – informasiya miqdarları mühüm əhəmiyyətə malikdirlər:

1) Kullbak yayınması $K_{\theta, \varphi}^\xi = M_\theta^\xi \ln \Pi_{\theta, \varphi}^\xi$;

2) $\varphi \rightarrow \theta \in \mathbb{R}^p$ olduqda onun φ -dən asılı olmayan

$$I_\theta = M_\theta^\xi \nabla \ln \Pi_{\theta, \varphi}^\xi (\nabla \ln \Pi_{\theta, \varphi}^\xi)^T = M_\theta^\xi S(\nabla \Gamma_{\theta, \varphi} \nabla \Gamma_{\theta, \varphi}^T)$$

Fisher informasiya matrisi ilə təyin olunan baş hissəsi (burada və aşağıda $\nabla \varphi(\theta), -\varphi(\theta)$ -nin qradientidir);

3) xətti regression eksperimentin informasiya matrisi – $M_\theta^\xi S(f v^{-1} f^T)$.

K, I statistikaları $\delta: Y^N \rightarrow \Lambda$ inikasında artırır; Λ -da $\delta(y_1^N)$ paylanmasının sıxlığı $\Phi_\theta(\cdot)$ mövcuddur və uyğun statistikalar, $K_{\theta, \varphi}^\xi(\Phi_\theta) \leq K_{\theta, \varphi}^\xi, I_\theta(\Phi_\theta) \leq I_\theta$ bərabərsizliklərini ödəyirlər [yeni $I_\theta - I_\theta(\Phi_\theta)$ mənfi olmamaqla təyin olunmuşdur].

Eksperimentin planlaşdırılmasının nəzəri – informasiya metodu aşağıdakı şərtlərlə təyin edilir.

1) $H_i, i = 0, 1$ hipotezlərinin xəta ehtimallarının α_i -dən böyük olmadığı halda $H_i: \theta \in \Theta_i, i = 0, 1, \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ hipotezlərinin diskriminasiyasında:

$$\bar{N}_0 \geq \omega(\alpha_i, \alpha_{1-i}) / \sup_{\pi \in Y} \inf_{\varphi \in \Theta_1} K_{\theta, \varphi}^\xi, \quad \theta \in \Theta_i$$

$$\text{burada } \alpha_0 + \alpha_1 \leq 1, \omega(\alpha_i, \alpha_{1-i}) = \sum \alpha_i \ln [\alpha_i / (1 - \alpha_{1-i})] \leq \min_{\varphi \in \Theta_{1-i}} K_{\theta, \varphi}^\xi(\Phi_\theta),$$

$X^*, - (X, \mathcal{X})$ -də paylanmalar fəzasıdır.

2) $P_\theta^\xi\{\delta = j\} = \Phi_\theta(j)$ ehtimalları ilə verilən $P_1, \dots, P_M$ paylanmalarının M diskriminasiyasında $\Phi_\theta(\cdot)$ ölçüləri ekvivalent, lakin üst-üstə düşməyən olduğu halda, $1 \leq \theta \leq M: \bar{N}_0 \geq \inf_{\pi \in Y} \sup_{\varphi \in \Theta/\theta} R_{\theta, \varphi}^\pi, R_{\theta, \varphi}^\pi = K_{\theta, \varphi}^\pi(\Phi_\theta) / K_{\theta, \varphi}^\pi$ – Höfdinq bərabərsizliklərinin ümumiləşməsini.

3) $\max_{\theta \in \Theta} \bar{N}_\theta \geq \inf_{\pi \in X^*} \sup_{\theta \neq \varphi} R_{\theta, \varphi}^\pi$ bərabərsizliyini.

4) $\Pi_{\theta, \varphi}^\xi$ requlyar sıxlıqları və $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrinin kvadratik inteqrallanan statistik qiyməti δ üçün Rao – Kramer – Volfovits ümumiləşmiş bərabərsizliyini,

$$M_\theta^\xi(\delta - \theta)(\delta - \theta)^T \geq b b^T + (I + \nabla b)(\bar{N}_\theta J_\theta^{\pi_\theta^\xi})^{-1}(I + \nabla b),$$

burada $b = M_\theta^\xi \delta - \theta, I$ – vahidi matris, $\nabla b = (\nabla b_1, \dots, \nabla b_p)$.

5) Regression eksperimentin parametrinin statistik qiymətlərinin təbii sinfinin kvadratik riski üçün şərtləri.

Ümumiləşmiş regression E. a. p., $N \geq n$ olduqda

$$M_\theta^\xi(y_n | y_1^{n-1}) = \eta(x_n, \theta), \quad D_\theta^\xi(y_n | y_1^{n-1}) = v(x_n, \theta), \quad (2)$$

bərabərlikləri ilə verilir. $\eta(x, \theta) = \theta^T f(x), v(x, \theta) \equiv v(x),$

$N = \text{const}$ və $S(m) \equiv \text{const}$ olarsa, Gauss teoreminin ümumiləşməsi doğrudur:

$$\hat{\theta} = S^{-1}(m) S(f^T v y) \quad (3)$$

statistik qiyməti meylsiz xətti statistik qiymətlər arasında kovariasiyalara ən kiçik matrisinə malikdir, burada $m^x = f(x) \times$

$\times v^{-1}(x) f^T(x)$. (2) modelində ξ_n planlarının requlyar ardıcılığı üçün $\bar{N}_\theta^{\xi_n} = \alpha_n \rightarrow \infty$ olarsa, $\pi_\theta^{\xi_n}$ proyeksiyalar ardıcılığı π_0 -ya zəif yığılır. İsbat olunmuşdur ki, θ üçün tutarlı başlanğıc θ^0 yaxınlaşmasına uyğunsuzluqlar üzrə edilən xətti $\tilde{y}_n = y_n - \eta(x_n, \theta^0)$ düzəlişləri arasında ən kiçik lokal asimptotik minimaks kvadratik riskin düzəlişi (3) düsturu ilə ifadə olunur, burada $f_0(x) = \nabla \eta(x, \theta^0), y$ isə $\hat{y}$ ilə evez olunmuşdur. Belə riskin hamar qabarıq funksiyasını minimallaşdırın strategiyalar, regressiya funksiyası $\theta^T f_0(x)$, ölçmələrin kovariasiya matrisi $\text{diag}(v(x_1), \dots, v(x_N))$ olan xətti regression eksperiment üçün Φ – optimal statistik strategiyalardan yaxşı olmur (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

1) – 3) şərtləri strategiyanın kiçik ehtimallı xətaları olduğu hallarda asimptotik olaraq dəqiqdir; $M \rightarrow \infty, q_\theta(\theta) \rightarrow 1$ olduqda şərtlər dəqiqləşdirilmişdir (bax, *Süzgeçləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*); θ -dan asılı «planlar» üçün analogi nəzəriyyə tərs rəhbərli kanala məlumatları ötürmə nəzəriyyəsində inkişaf olunmuşdur (bax, [2]). 4) – 5) şərtləri böyük həcmli seçimlər

və $a_n^{-1}S(B_\theta) \rightarrow \int B_\theta(x) \pi_\theta(dx)$ münasibəti ehtimala görə ödənilən ξ_n ardıcılıqlarının reqlulyar planları üçün dəqiqdir, burada 4)-də $B_\theta = I_\theta$, 5)-də $B_\theta = m_\theta$.

Əgər zəif mənada limit informasiya matrisləri təsadüfi matrislər olarsa, onda riskin sərhədləri informasiya matrisinin paylanması üzrə ortalama ilə alınır. Məs., 4) məsələsinə aşağıdakı əlavə şərt qoyulmaqla baxılır: $\tau_n, - \{ \mathcal{A}_n \}$ axınına nəzərən Markov anları ardıcılığı olsun və ələ $y_1^{T_n} -$ ölçülən L_θ^n matrisi vardır ki,

$$I_\theta^n - L_\theta^n \rightarrow 0, \quad a_{n-1}^{-1} \sum_{n=1}^{\tau_n} I_\theta^n \rightarrow 0 \quad \text{münasibətləri } P_\theta^{\xi_n} \text{ ehtimalına}$$

görmədən. Onda $h \in \mathbb{R}^p$ üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\ln \left[d P_{\theta+h a_n^{-1/2}}^{\xi_n}(\cdot) / d P_\theta^{\xi_n}(\cdot) \right] = h^T \delta_\theta^{\xi_n} - (1/2) h^T I_\theta^{\xi_n} h + \alpha_n, \quad (4)$$

burada $\alpha_n(\theta, h) \rightarrow 0$ münasibəti $P_\theta^{\xi_n}$ ölçüsünə görə ödənilir, $(\delta_\theta^{\xi_n}, I_\theta^{\xi_n})$ isə şərti normal (ξ, I_θ) cütünə, I_θ qeyd olunduqda, zəif yığılır (yəni $\xi \sim N(0, I_\theta^{-1})$). (4)-dən ixtiyari statistik qiymətin riski üçün lokal asimptotik minimaks sərhəd alınır, $P_\theta^{\xi_n}$ -də reqlulyarlıq şərtləri $x \in X$ üzrə müntəzəm olduğu halda isə maksimal doğruxa oxşarlıq statistik qiyməti bu sərhədi bərabərliyə çevirir və o, şərti asimptotik normal olur.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Б у р н а ш е в М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26.

ARDICIL SİMPLİKS METOD « последовательный симплексный метод; sequential simplex method » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ARDICIL STATİSTİK QİYMƏT « последовательная оценка; sequential estimator » – həcmi əvvəlcədən qeyd olunmuş, lakin müşahidələr nəticəsindən asılı olmayaraq təyin edilən seçimin paylanma parametrlərinin statistik qiymətidir. A. Vald [1]-də göstərməmişdir ki, asılı olmayan müşahidələr üzrə düzbucaqlı paylanmanın (*müntəzəm paylanmanın*) yerindəyişmə parametrlərinin A. s. q., normal paylanmanın orta qiymətinin statistik qiymətindən, müşahidələrin orta sayının eyni olmasına baxmayaraq, daha sərfəli olur. Bu nəticə naməlum sıxlıqdan qeyri – reqlulyar asılı parametrlərin statistik qiymətinin təyin olunması halı üçün ümumiləşdirilmişdir. Parametrdən reqlulyar asılı olan eksperimentlər ardıcılığı üçün [2]-də göstərilmişdir ki, A. s. q. asimptotik effektiv statistik qiymətin təyin edilməsi üçün sərfəli olmur. Bəzi hallarda A. s. q. münasib meylsiz statistik qiymətlərin alınmasına imkan verir, baxmayaraq ki, bu hallarda qeyd olunmuş həcmli seçim üçün meylsiz statistik qiymət olmur.

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] И б р а г и м о в Н. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 245–56.

ARDICIL STATİSTİK QİYMƏTLƏR « последующие оценки; sequential estimators » – qiymətləri məmulatların $\mathfrak{P}$ partiyasına nəzarət nəticələri əsasında, *nəzarət planının* parametrlərinin və partiyanın qəbul edilib-edilməməsi haqqında qərarın nəzərə alınması ilə hesablanmış statistiklardır. A. s. q. nəzarət üçün təqdim olunmuş $\mathfrak{P}$ partiyasında qüsurlu məmulatlar sayı D -nin – giriş brakının (rus. входной брак)

qiymətləndirilməsi, həm də istehlakçıya ötürülmüş qüsurlu məmulatlar (rus. принятый брак) sayı D^* -in sayının qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Əgər başqa nəzarət planları istifadə olunarsa, ələ A. s. q. qumaq mümkündür ki, bunlar əsasında statistik qəbul nəzarətinin effektivlik göstəricilərinin hesablanması mümkün olur. Ardıcıl statistik qiymətlərin tətbiqi ideyasını 1950-də A. N. Kolmogorov (bax, [1]) təklif etmişdir.

Misal. N məmulatdan ibarət $\mathfrak{P}$ partiyasına nəzarətdə n həcmli təsadüfi təkrarsız seçimin qəbulatma ədədi c olan birpələli nəzarət planından istifadə olunur. Əgər seçimdəki qüsurlu məmulatların sayı d , $d \leq c$ olarsa, $\mathfrak{P}$ partiyası qəbul olunur, $d > c$ olarsa, $\mathfrak{P}$ partiyası sonradan nəzarət olunmadan qəbul olunmur. D^* ədədi üçün φ^* A. s. q.-ni tapmaq tələb olunur. Əgər $d \leq c$ olarsa, onda $D^* = D - d$, əgər $d > c$ olarsa, onda $D^* = 0$ götürülür. Əgər $\mu = nD/N$ olduqda $h_{N,D}^{\mu,d} \approx \approx p_\mu(d) = \mu^d e^{-\mu} / d!$, – hiperhəndəsi paylanma ehtimalları üçün Puasson yaxınlaşmasından istifadə etmək imkanından istifadə olunarsa, məsələ sadələşir. Puasson yaxınlaşmasının tətbiqi üçün şərtlər ödənilərsə, $\varphi^* = \varphi^*(d)$ ixtiyari $\mu > 0$ üçün

$$\sum_{d=0}^{\infty} \varphi^*(d) p_\mu(d) = \sum_{d=0}^c (N_\mu / n - d) p_\mu(d)$$

meylsizlik şərtindən tapılır.

Axtarılan A. s. q.

$$\varphi^*(d) = \begin{cases} (N/n)d, & d \leq c, \\ Nd/n, & d = c+1 \\ 0, & d > c+1 \end{cases}$$

münasibətlə təyin olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 340–63; [2] Б е л ь е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Л у - м е л ь с к и й Я. П., Статистические оценки результатов контроля качества, М., 1979.

ARDICIL STRUKTUR « последовательная структура; sequential structure » – statistik etibarlılıq nəzəriyyəsinin anlayışıdır. A. s. funksiyası

$$\varphi(x) = \prod_i x_i = \min(x_1, \dots, x_n)$$

münasibətlə təyin olunan, « n -dən n » tipli strukturdur, burada $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi(x)$ – sistemin struktur funksiyasıdır, sistemdəki elementlərin sayı sistemin tərtibi adlanır. Sistemin i -ci elementinin vəziyyəti indikatorla – x_i dəyişəni ilə ifadə olunur:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{əgər } i\text{-ci element işqabiliyyətlidirsə,} \\ 0, & \text{əgər } i\text{-ci element işləmirsə,} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$, n – sistemin elementlərinin sayıdır.

Binar dəyişən φ funksiyası analogi təyin olunur və sistemin vəziyyətini ifadə edir:

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{əgər sistem işqabiliyyətlidir,} \\ 0, & \text{əgər sistem işləmir.} \end{cases}$$

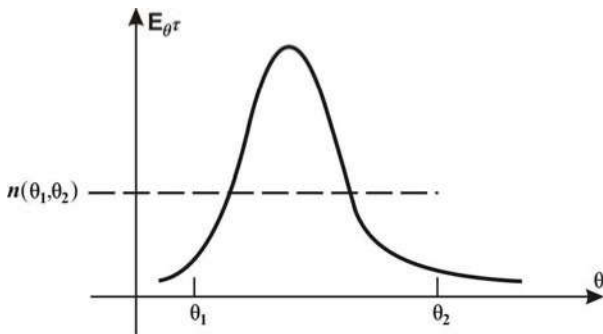
A. s., yalnız və yalnız, bütün elementlərinin işqabiliyyətli olduğu halda işqabiliyyətli sayılır (bax, şəkil).



Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, М., 1984.

ARDICIL YOXLANILMASI, HİPOTEZLƏRİN «последовательная проверка гипотез; sequential hypotheses testing» – təsadüfi sayda müşahidələrdən istifadə olunmaya əsaslanan, *statistik hipotezlərin yoxlanılması* metodudur. τ , – $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ ehtimal fəzasında verilmiş σ – alt-cəbrlərin azalmayan axını $\{A_i\}$ -yə ($A_i \leq \mathcal{A}$) nəzərən Markov anı (dayanma anı), d , – A_τ – ölçülən, $0, \dots, k$ qiymətlərini alan (qəbul edilən hipotezin nömrəsi) funksiya (son qərar funksiyası) olarsa, (τ, d) cütü H_i , $i = 0, \dots, k$ – H. a. y.-sı üçün həlledici qayda (kriteri) adlanır.

Müşahidələr müddətinin təsadüflüyündən istifadə etdikdə, bəzi hallarda, səhv qərarlar ehtimallarının verildiyi halda hipotezlərin yoxlanılması üçün zəruri olan orta müşahidə müddətini olduqca azaltmaq imkanı yaranır. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı (bundan sonra yalnız bu hala baxılır) $\{P_\theta\}$ paylanmaları ailəsinin parametri haqqında iki hipotezin yoxlanılması halında, ixtiyari hipotezi qəbul etdikdə minimal orta müşahidə müddətinə malik olan optimal həlledici qayda – ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisidir (bax, [1] – [3]). $\{P_\theta\}$ paylanmalar ailəsinin naməlum θ parametri haqqında iki – $H_0: \theta \leq \theta_0$ və $H_1: \theta \geq \theta_1$ müəkkəb hipotezlərinin yoxlanılması halında ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisi üçün orta müşahidə müddəti $M_\theta \tau$ -nın θ -dan asılılığının tipik mənzərəsi (kəsilməz əyri) verilmişdir; qırıq xəttə $n(\theta_0, \theta_1)$



qeyd olunmuşdur, $n(\theta_0, \theta_1)$, – $H_0: \theta = \theta_0$ və $H_1: \theta = \theta_1$ hipotezlərinin yoxlanılması üçün Neyman – Pearson testində müşahidələrin həcmidir və bu zaman səhvlər ehtimalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlərin ardıcıl kriteri üçün qoyulan məhdudiyyətlərlə eyni olduğu fərz olunur [(θ_0, θ_1) intervalı «əhəmiyyətsiz» zona hesab olunur].

30 ARDICIL

$\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ olduqda orta müşahidə müddətinin hətta $n(\theta_0, \theta_1)$ kəmiyyətini də olduqca aşağı biləcəyi ilə bağlı belə məsələ qoyulur (bax, [4]): elə (τ, d) həlledici qaydası tapmalı ki, bu qaydada $\sup_\theta M_\theta \tau$ kəmiyyəti infimumunu ala bilsin (Kifer – Veyss məsələsi). Bu məsələnin həlli yalnız o hal üçün məlumdur ki, $\sup_\theta M_\theta \tau$ kəmiyyətinin minimizasiya məsələsini

her hansı qeyd olunmuş $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ üçün $M_\theta \tau$ kəmiyyətinin minimizasiya məsələsinə gətirmək mümkün olsun (modifikasiya olunmuş Kifer – Veyss məsələsi); bu sonuncu məsələnin həlli – ehtimallar nisbətinin ümumiləşmiş ardıcıl kriterisi kimi adlandırılan – optimal dayanma haqqında müəyyən köməkçi həlli ilə təyin olunan qeyri – xətti sərhədli Vald testidir (bax, [5], [6]). Səhv qərarlar ehtimalları kiçik olduğu və paylanmalar ailəsi eksponensial olduğu halda Kifer – Veyss məsələsinin asimptotik həllində (səhv qərarların kiçik ehtimalı olduğu və eksponensial paylanmalar ailəsi halı üçün) ehtimallar nisbətinin ikiqat ardıcıl kriterisi alınır ki, bu kriteri üçün müşahidələrin davam olunma oblası üçbucaq formasında olur (bax, [7], [6]).

$H_1: \theta \neq 0$ hipotezinə qarşı $H_0: \theta = 0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsində elə vəziyyət yaranır ki, əsas H_0 hipotezi yerinə yetirildikdə sonlu zaman ərzində son qərar vermək zərurəti yoxdur, əksinə, H_1 alternativini yerinə yetirildikdə isə müşahidələri olduqca tez başa çatdırmaq lazımdır, onda belə halda gücü vahidə bərabər ardıcıl kriteri qurmaq olar (bax, [8]). Məs., əgər müşahidə olunan X_i təsadüfi kəmiyyətləri $N(\theta, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış olarlarsa, onda dayanma anı kimi

$$\tau = \inf \left\{ n \geq m : \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > [(n+1)(\ln(n+1) + a)]^{1/2} \right\}$$

kəmiyyətini götürmək olar və $\tau < \infty$ olduqda H_1 hipotezini qəbul etmək olar. Burada m və a parametrlərinin uyğun qiymətlərinin seçilməsi hesabına $P_{\theta_1} \{\tau < \infty\} \leq \alpha$ bərabərsizliyinin ödənilməsinə nail olmaq olar. α – verilmiş ədəddir, $0 < \alpha < 1$ ($P_{\theta_1} \{\tau < \infty\}$ şəklində ehtimallar üçün asimptotik düsturlar [8] – [10]-də verilmişdir); bu halda $\theta \neq 0$ olduqda $P_\theta \{\tau < \infty\} = 1$ bərabərliyi ödəniləcəkdir. Ədəbiyyatda dayanma anı müddətinə məhdudiyyətlər qoyulduqda əyri xətti sərhədləri bu həlledici qaydanın modifikasiyasına da baxılmışdır.

Hipotezlərin sayı ikidən çox olduğu hal üçün bir sıra nəticələri, məs., [11], [12]-də tapmaq olar.

Əd.: [1] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 326–39; [2] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [3] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [4] Kiefer J., Wiess L., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 1, p. 57–74; [5] Lorden G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1980, Bd 51, № 3, S. 291–302; [6] Драгалев В. П., Новиков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 679–90; [7] Lorden G., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 1, p. 281–91; [8] Robbins H., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 6, p. 1397–1409; [9] Siegmund D., Sequential analysis B. – N. Y., 1983; [10] Woodroffe M., Nonlinear renewal theory in sequential analysis, Phil., 1982; [11] Lorden G., «Ann. Statist.», 1977, v. 5, № 1, p. 1–21; [12] Голубев Г. К., Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, с. 544–554;

[13] Павлов И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 149–53.

ARİFMETİK MODELƏŞDİRİLMƏ(si) təsadüfi proseslərin «арифметическое моделирование случайных процессов; arithmetic simulation of random processes» – ehtimal paylanmalarının statistik modeləşdirilməsi qaydalarından biridir; trayektoriyaları bəzi arifmetik funksiyaların qiymətləri üzrə təyin olunan, paylanmalar isə funksional fəzada müəyyən ölçüyə yığılan təsadüfi proseslər ardıcılığının qurulmasından ibarətdir.

k, m – natural ədədlər olsun. $f(m)$ funksiyası $f(k+m) = f(k)+f(m)$ şərtini ödəyərsə, **a d d i t i v**, $f(km) = f(k) \cdot f(m)$ şərtini qarşılıqlı sadə k və m üçün ödəyərsə, **m u l t i p l i k a t i v** funksiya adlanır. p – sadə ədəd, $\alpha_p(m) = \max \{ \alpha : p^\alpha | m \}$, $y_n : [0, 1] \rightarrow [1, n]$, -1 nöqtəsində sağdan kəsilməz funksiya, $y_n(0) = 1$, $y_n(1) = n$ olsun. Həqiqi additiv f_n funksiyaları üçün

$$H_n(t, m) = \sum_{p \in y_n(t)} f_n(p^{\alpha_p(m)}) - a_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

olduğu fərz olunur. Onda $H_n(t, m)$ -ə $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n\}$ ehtimal fəzasına nəzərən təsadüfi proses kimi baxmaq olar, burada $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A}_n$ – Ω -nın bütün alt çoxluqlarından təşkil olunmuş cəbr, $P_n(\{m\}) = 1/n$, $a_n(t)$ – müəyyən mərkəzləndirici kəmiyyətdir. $H(t, \cdot)$ prosesinin trayektoriyaları $D[0, 1]$ fəzasındandır. Trayektoriyaları $C[0, 1]$ -dən olan uyğun proseslərə də baxmaq olar. $H_n(t, m)$ proseslərinin bir sinfi üçün Y. P. Kubilyus ([1], bax, [2], [3]) isbat etmişdir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $H(t, \cdot)$ prosesinin trayektoriyasının kəsilməz differensiallanan sərhədlə əyrixətli zolaqda olması ehtimalları P_n -lər $w(t)$ Braun hərəkəti üçün uyğun ehtimallara yığılırlar. Sonralar $H_n(t, m)$ proseslərinin öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin funksional limit teoremlərini tətbiq etməyə başladılar. $H_n(t, m)$ proseslərinin bəzi sinifləri üçün $w(t)$ -yə yığılma (bax, [9], [10]); sonlu dispersiyalı və asılı olmayan artımlı proseslərə yığılma (bax, [11]); dayanıqlı proseslərə yığılma (bax, [6]) isbat olunmuşdur; yığılma üçün zəruri və kafi şərtlər (bax, [5], [6]) və $w(t)$ -yə yığılma sürətinin statistik qiymətləri tapılmışdır (bax, [6]). Semimartinqallar nəzəriyyəsindən istifadə edilərək ümumi nəticələr alınmışdır (bax, [7]).

Multiplikativ g_n funksiyaları ardıcılığı üçün fərz olunur ki,

$$U_n(t, m) = d_n^{-1} \sum_{k \leq th_n} g_n(m+k), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

burada $n \rightarrow \infty$ olduqda $h_n \rightarrow \infty$ olur, d_n – normalayıcı kəmiyyətdir. Onda $U_n(t, m)$, $-\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n\}$ ehtimal fəzasına nəzərən təsadüfi prosesdir. Ədədlər nəzəriyyəsində mühüm olan g_n funksiyalar ardıcılığı üçün Y. P. Kubilyus və Yu. V. Linnik (bax, [4]) momentlər metodu ilə isbat etmişlər ki, $U_n(t, m)$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $w(t)$ -nin sonluölçülü paylanmalarına yığılır. Yu. V. Linnik (1967) belə sual qoymuşdur:

$g_n(m) = \mu(m)$ olarsa, $n \rightarrow \infty$ olduqda $U_n(t, m) \rightarrow w(t)$ münasibəti doğrudurmu? Burada $\mu(m)$ – Myöbius funksiyasıdır.

Bu sual [8]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кубильус Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [2] Кубильус Й. П., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, с. 361–63; [3] Кубильус Й. П., «Lect. Notes Math.», 1976, v. 550, p. 335–50; [4] Кубильус Й. П., Линник Ю. В., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1959, № 6 (13), с. 88–95; [5] Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х., «Докл. АН Тадж. ССР», 1982, т. 25, с. 207–11; [6] Манаставичюс Э., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 3, с. 148–61; [7] Григелионис Б., Миклявичюс Р., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 2, с. 72–81; [8] Ляшенко Н. Н., «Докл. АН СССР», 1986, т. 290, с. 786–88; [9] Philipp W., «Proc. Symp. Pure Math.», 1973, v. 24, p. 233–46; [10] Babu G. J., Probabilistic methods in the theory of arithmetical functions, Calcutta, 1973 (Diss.); [11] Billingsley P., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, p. 749–91.

ARİFMETİK PAYLANMA «арифметическое распределение; arithmetic distribution» – $x = nh$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h > 0$ qiymətlərini alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret paylanmasına deyilir. Bu xassəli h -lardan ən böyüyü A. p.-nin addımı adlanır. A. p. şəbəkəvari paylanmanın xüsusi halıdır (bax, Şəbəkəvari paylanma). Diger tərəfdən hər bir şəbəkəvari paylanma yerindəymiş A. p.-dir. A. p.-nin mühüm xüsusi halı $h=1$ olduğu halda, bu halda A. p. – tam qiymətli paylanmadır. A. p.-nin xarakteristik funksiyası $2\pi/h$ periodlu periodik funksiya. Əksinə, əgər hər hansı paylanmanın xarakteristik funksiyası $\varphi(z)$ hər hansı $z_0 \neq 0$ qiymətində $\varphi(z_0)=1$ olarsa, onda bu paylanma A. p.-dir. Binomial paylanma addımı $h=1$ olan A. p.-dir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ARİFMETİKASI, EHTİMAL PAYLANMALARININ «арифметика вероятностных распределений; arithmetics of probability distributions» – bax, Ehtimal paylanmalarının arifmetikası.

ARİSO – proses «АРИСС – процесс; ARIMA – process» – bax, Автoreгрессив – интегралланан sürüşən orta proses.

ARKSİNUS QANUNU «арксинус закон; arcsine law» – düzxətt üzərində təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarına aid limit teoremidir, arksinus paylanması və ya ümumiləşmiş arksinus paylanmasını ifadə edir. P. Levi 1939-da $\{\xi_t, t \geq 0; \xi_0 = 0\}$ Braun hərəkəti prosesi üçün aşağıdakı faktı qeyd etmişdir. τ_t – Braun hissəciyinin $[0, t]$ müddəti ərzində müsbət yənməyə olduğu müddəti ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun, başqa sözlə, $\tau_t = \{u: \xi_u > 0, 0 \leq u \leq t\}$ çoxluğunun Lebeq ölçüsüdür. Onda τ_t/t təsadüfi kəmiyyəti A. q. ilə paylanır:

$$P \{ \tau_t/t < x \} = F_{1/2}(x) = 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x}, \\ 0 \leq x \leq 1, t > 0.$$

Diskret zamanlı təsadüfi dolaşma üçün arksinus qanunu aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [2]):

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad S_0 = 0;$$

$$v_n = \min \{k: S_k = \max_{0 \leq m \leq n} S_m\},$$

K_n isə $0, 1, \dots, n$ indeksləri arasında $S_k > 0$ olan k indekslərinin sayını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun (bax, *İnikas prinsipi*). Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{K_n/n < x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{v_n/n < x\} = F_\alpha(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\{S_1 < 0\} + \dots + P\{S_n < 0\}}{n} = \alpha$$

münasibətləri eyni zamanda ya ödənilir, ya da ödənilmir, burada $0 < \alpha < 1$ olduqda $F_\alpha(x)$ ümumiləşmiş arksinus paylanmasıdır, $F_1(x) = E(x)$ və $F_0(x) = E(x-1)$; $x \leq 0$ olduqda $E(x) = 0$, $x > 0$ olduqda isə $E(x) = 1$.

Berpa nəzəriyyəsində A. q. aşağıdakı kimi ifadə olunur. η_i kəmiyyəti $S_{\eta_i} < t \leq S_{\eta_{i+1}}$ münasibətilə, $S_i^* = t - S_{\eta_i}$ kimi təyin olunarsa, $0 < \alpha < 1$ olduqda

$$P\{\xi_1 \geq 0\} = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{S_i^*/t < x\} = F_\alpha(x)$$

bərabərlikləri, yalnız və yalnız,

$$P\{\xi_1 > x\} = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0,$$

$L(x)$ isə müsbət x -lər üçün təyin olunmuş, $0 < y < \infty$ olduqda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(xy)/L(x) = 1$$

xassəsinə malik funksiya olduğu halda doğrudur.

Berpa nəzəriyyəsində və təsadüfi dolaşmalar üçün A. q. arasında sıx əlaqə vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Спitzer Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [3] Розин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, № 4, с. 593–613.

ARKSİNUS PAYLANMASI « арксинусы распределение; arcsine distribution » – paylanması sıklık funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

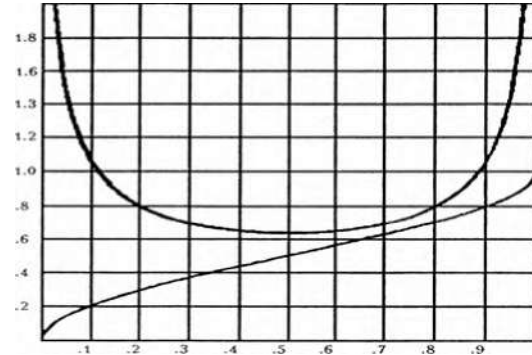
paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x}, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

olan kəsilməz ehtimal paylanmasıdır.

32 ARKSİNUS

A. p.-sı *beta – paylanmanın* xüsusi halıdır və təsadüfi dolaşma proseslərinin tədqiqində alınır. Məs., hissəciyin ədəd oxunda simmetrik təsadüfi dolaşması zamanı müsbət yarımda olduğu zaman parçalarının paylanması A. p.-dir (bax, *Arksinus qanunu*). A. p. – ayrılmayan paylanmadır. A. p. ilə yanaşı ümumiləşmiş arksinus paylanması da



Arksinus paylanmasının sıklık funksiyası və paylanma funksiyasının qrafikləri

istifadə olunur ki, bu paylanmanın sıklık funksiyası $(0, 1)$ -də aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$p(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

burada $\alpha = 1/2$ olduqda ümumiləşmiş A. p.-sı A. p.-sı ilə üst-üstə düşür. Ümumiləşmiş A. p.-nin riyazi gözləməsi $(1-\alpha)$ -ya, dispersiyası $\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}$ -yə bərabərdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ARKTANGENS QANUNU təsadüfi matrislər üçün « арктангенс закон для случайных матриц; arctangent law for random matrices » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi matrislər üçün.

ARONŞAYN – KOLMOQOROV TEOREMİ

« Ароншайна – Колмогорова теорема; Aronszajn – Kolmogorov theorem » müsbət müəyyən funksiyaların strukturu haqqında: Λ – ixtiyari boş olmayan çoxluq olduqda $\Lambda \times \Lambda$ hasilində verilmiş f kompleks funksiyası, yalnız və yalnız, o halda müsbət müəyyən funksiyadır ki, əgər $\{ \text{kompleks} \}$ Hilbert fəzası H və onun elementlərinin ele $\{a_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ailəsi olarsa ki, bütün $s, t \in \Lambda$ üçün $f(s, t) = (a_s, a_t)$ bərabərliyi ödənilsin. Əgər f funksiyası yalnız həqiqi qiymətlər alarsa, onda H həqiqi fəza götürülə bilər.

ARSO – proses « APCC – процесс; ARMA – process » – bax, *Xətti filtr. Qanışıq avtoregressiv – sürüşən orta proses*.

ARTAN TƏSADÜFİ PROSES « возрастающий случайный процесс; increasing random process » – aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$, $\zeta_0 = 0$ təsadüfi prosesidir:

1) ζ prosesinin trayektoriyaları sağdan kəsilməz və azalmayıdır, yəni $s \leq t$ olduqda $\zeta_s \leq \zeta_t$;

2) trayektoriyalar çoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrlər ailəsi $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ ilə uzlaşmış prosesdir;

3) hər bir $t > 0$ qiymətində $\mathbf{P}$ – sanki yəqin $\zeta_t < \infty$ və $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_t = \zeta_\infty \leq \infty$ münasibətlərini ödəyir.

Əgər $\mathbf{M}\zeta_\infty < \infty$ olarsa, A. t. p. inteqrallanan proses, $\mathbf{M}\zeta_{\tau_n} < \infty$ münasibəti bütün $n \geq 1$ qiymətlərində ödənilərsə və $(\tau_n, n \geq 1)$ azalmayan Markov momentlərinin hər hansı ardıcılığı üçün $\lim_n \tau_n = \infty$ münasibəti $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilərsə, lokal inteqrallanan proses adlanır. Hər bir lokal inteqrallanan A. t. p. ζ üçün ζ -nin kompensatoru adlanan ələ yeganə öngörül $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_t, t \geq 0)$ artan təsadüfi prosesi vardır ki, $\zeta - \tilde{\zeta}$ prosesi martinqaldır. Bu halda ixtiyari Markov anı τ üçün $\mathbf{M}\zeta_\tau = \mathbf{M}\tilde{\zeta}_\tau$ və

$$\mathbf{M} \int_0^\infty H(s) d\zeta_s = \mathbf{M} \int_0^\infty H(s) d\tilde{\zeta}_s$$

berəbərliliyi ixtiyari menfi olmayan $H = H(\omega, s)$ öngörül funksiyası üçün doğrudur.

λ parametrlili Puasson prosesi A. t. p.-ə misaldır. Bu prosesin kompensatoru $\tilde{\zeta}_t \equiv \lambda t$ deterministik funksiyasıdır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

ARTIM NÖQTƏSİ « точка роста; increasing point » – bax, Atom.

ASILI HADİSƏLƏR(i) « зависимые события; dependent events » $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının – ixtiyari $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ hadisələri üçün

$$\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

şərti ödənilən hadisələrdir.

Bax, Asılı olmayan hadisələr.

ASILIL OLMAMAZLIQ « независимость; independence » – ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayan, ölçü təyin olunmuş ölçülən fəzaların tədqiq edən ümumi nəzəriyyədə ehtimal nəzəriyyəsini mehz özünəməxsusluğu ilə fərqləndirən ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm anlayışlarından biridir. A. o. – təsadüfi hadisələrin, kəmiyyətlərin, elementlərin, kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin, σ – cəbrlərin, σ – cəbrlər axınlarının və s.-nin asılı olmamazlığı kimi anlayışları ehatə edir. Bu anlayışların təriflərində $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ üçlüyünün qeyd olunmuş ehtimal fəzası Ω , təsadüfi $\mathcal{F}$ σ – cəbrindən ibarət və $\mathcal{F}$ -də təyin olunmuş $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsünün altçoxluğu olduğu nəzərdə tutulur. Ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərində baxılan hadisələrin, sınaqların və təsadüfi kəmiyyətlərin A. o.-ı haqqında fərziyyə onun yarandığı gündən ilkin şərt kimi qoyulurdu.

İki təsadüfi A və B hadisələri üçün A. o. anlayışı aşağıdakı kimi daxil olunur. A və B ixtiyari təsadüfi hadisələr ($A, B \in \mathcal{F}$).

$\mathbf{P}(A)$ və $\mathbf{P}(B)$ – bunların ehtimalları olsun. $\mathbf{P}(B) > 0$ olduqda A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}(A \cap B)$, – A və B hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalıdır. Əgər

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \quad (1)$$

olarsa, A və B asılı olmayan hadisələr adlanır. $\mathbf{P}(B) > 0$ olduqda (1) düsturu

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \quad (2)$$

münasibəti ilə eynigüclüdür.

Tərifdən bilavasitə aydındır ki:

1) $A \in \mathcal{F}$ ixtiyari hadisədirsə, Ω və A asılı olmayan hadisələrdir;

2) Əgər $\mathbf{P}(S) = 0$, $A \in \mathcal{F}$ ixtiyari hadisədirsə, S və A asılı olmayan hadisələrdir;

3) A və B_i , $i = 1, 2$ asılı olmayan hadisələrdirsə və $B_1 \supset B_2$ olarsa, onda A və $B_1 \setminus B_2$ asılı olmayan hadisələrdir;

4) A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, A və $\bar{B}$, $\bar{A}$ və $\bar{B}$ asılı olmayan hadisələrdir.

n sayda ($n > 2$) $A_1, \dots, A_n$ təsadüfi hadisələrinin A. o.-ı tərfi müxtəlif eynigüclü variantlarda verilir. Məs., əgər $2 \leq m \leq n$ şərtini ödəyən ixtiyari m və cüt-cüt müxtəlif ixtiyari $k_1, k_2, \dots, k_m \leq n$ natural ədədləri üçün $A_{k_1}, \dots, A_{k_m}$ hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabər olarsa, yəni

$$\mathbf{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m}) = \mathbf{P}(A_{k_1}) \dots \mathbf{P}(A_{k_m}) \quad (3)$$

berəbərliliyi ödənilərsə, bu hadisələr asılı olmayan hadisələr adlanır (külliyyətə asılı olmamazlıq).

Bəzən $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin A. o.-ı ilə (külliyyətə A. o.-ı) yanaşı cüt-cüt A. o.-a da baxılır, bu halda $i \neq j$,

A_i və A_j , $i = \overline{1, n}$ ixtiyari hadisələrinin asılı olmamazlığı anlaşılır. Külliyyətə asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir, tərsi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik qurulmasından əvvəlki dövrdə A. o. anlayışının məzmunu olduqca aydın deyildi. A. A. Markov yazırdı ki, «asılı olmayan hadisələr haqqında anlayışın məlum nəzəri məsələlərdə tamamilə aydın olduğunu hesab etmək olar; digər məsələlərdə bu anlayış, aydındır ki, ehtimal haqqında əsas anlayışın aydın olmaması ilə bağlı olaraq, tamamilə aydın olmaya bilər» (bax, [1], səh. 24).

Aksiomatik yanaşma çərçivəsində A. o. anlayışı ən təbii surətdə aşağıdakı kimi daxil olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, $\mathcal{A}$, – σ – cəbr, $\mathbf{P}$, – $\mathcal{A}$ -də təyin olunmuş hər hansı ehtimal ölçüsü olsun. Əvvəlcə hadisələr siniflərinin A. o.-ı təyin olunur (burada yalnız $\mathcal{A}$ σ – cəbrlərinin σ – altcəbrləri olan $\mathcal{B}$ siniflərinə baxılır). Əgər ixtiyari $A_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_n$ hadisələri (3) berəbərliliyi mənasında asılı

olmayan hadisələr (küllüyatca asılı olmayan) olarsa, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$ sinifləri asılı olmayan siniflər adlanır. T indekslerin ixtiyari çoxluğu olarsa, eğer ixtiyari tam $n \geq 2$ qiymətində və ixtiyari cüt-cüt müxtəlif $t_1, \dots, t_n \in T$ qiymətlərində $\mathcal{B}_{t_1}, \dots, \mathcal{B}_{t_n}$ asılı olmayan siniflər olarsa, $\mathcal{B}_t$ ($t \in T$) sinifləri asılı olmayan siniflər adlanır. $1 \leq k \leq n$ qiymətləri üçün A_k hadisələrinin A. o.-ı

$$\mathcal{B}_k = \{ \emptyset, A_k, \bar{A}_k, \Omega \}$$

siniflərinin A. o.-ı ilə eynigüclüdür.

Sınaqların asılı olmamazlığı bu sınaqların doğurduğu σ - cəbrlərin A. o.-ıdır (bax, [1]).

X_t , $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün A. o. $\mathcal{B}(X_t)$ σ - alt-cəbrlərinin A. o.-ı kimi təyin olunur, burada $\mathcal{B}(X_t)$ - Borel çoxluqlarının ədəd oxuna X_t inikasına nəzərən probozardır. $A_1, \dots, A_n$ təsadüfi hadisələrinin A. o.-ı bu hadisələrin indikatorları I_{A_k} -lərin A. o. ilə, yəni

$$I_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_k \text{ olarsa,} \\ 0, & \omega \notin A_k \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətlərin A. o. ilə eynigüclüdür.

$X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin A. o.-ı üçün aşağıdakı şərtlər zəruri və kifayətdir.

1) İxtiyari heqiqi $a_1, \dots, a_n$ ədədləri üçün paylanma funksiyası -

$$F_{X_1, \dots, X_n}(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{P}\{\omega: X_1(\omega) < a_1, \dots, X_n(\omega) < a_n\}$$

uyğun paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir.

$$F_{X_1, \dots, X_n}(a_1, \dots, a_n) = F_{X_1}(a_1) \dots F_{X_n}(a_n).$$

2) $p_{X_1}(a_1), \dots, p_{X_n}(a_n)$ sıxlıqlarının varlığı şərtində $\mathbb{R}^n$ -də sanki bütün $(a_1, \dots, a_n)$ qiymətlərinin Lebeq ölçüsü üzrə $p_{X_1, \dots, X_n}(a_1, \dots, a_n)$ sıxlığı uyğun $p_{X_1}(a_1), \dots, p_{X_n}(a_n)$ sıxlıqlarının hasilinə bərabərdir.

3) $f_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{M}e^{iu_1X_1 + \dots + iu_nX_n}$ xarakteristik funksiyası bütün $u_1, u_2, \dots, u_n$ heqiqi ədədləri üçün uyğun xarakteristik funksiyaların hasilinə bərabərdir:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) = f_{X_1}(u_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(u_n),$$

$$f_{X_k}(u_k) = \mathbf{M}e^{iu_k X_k}.$$

Ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm sxemləri bu və ya digər hadisələrin və təsadüfi kəmiyyətlərin A. o.-ı hipotezinə əsaslanır: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları (bax, məs., *Bernulli dolaşması*, *Böyük ədədlər qanunu*, *Limit teoremləri*), asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslər (bax, məs., *Viner prosesi*, *Təsadüfi proses*) və s. Bax, həm də *Sıfır - vahid qanunu*.

Asılı olmamazlıq anlayışına ümumi qeydlər.

1) Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyalarının asılı olmamazlığı. $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş A. o.-ından olduqca aydın

(və A. o. anlayışından intuitiv gözənilən tamamilə müvafiq) nəticələr almaq olar; məs., $X_1, \dots, X_k$ və $X_{k+1}, \dots, X_n$, $1 \leq k < n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin funksiyaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Digər tip funksiyaların A. o.-ı yalnız əlavə xüsusi fərziyyələrlə yerinə yetir və paylanmaların müəyyən siniflərinin xarakterizasiyası vasitəsi ola bilər. Məs., eğer $X_1, \dots, X_n$ - asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış və normal paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad (4)$$

və

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \quad (5)$$

funksiyaları (uyğun olaraq nəzi gözləmənin və X_k -nin dispersiyasının statistik qiymətləri) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Tərs müddə də doğrudur: (3) və (4) funksiyalarının A. o.-ından X_k -lərin paylanmalarının normal paylanma olduğu alınır.

Eğer iki

$$Y_1 = \sum_{j=1}^n a_j X_j \quad \text{və} \quad Y_2 = \sum_{j=1}^n b_j X_j$$

xətti formalının asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və a_j və b_j əmsallarından heç birinin sıfır bərabər olmadığı məlum olarsa, onda X_j normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir (bu tip teoremlərdən minimal şərtlərlə, məs., molekulların sürətlərinin paylanması üçün Maksvell qanununu almaq olar). Qeyd olunan müddəalara *xarakterizasiya teoremləri* adlandırılan teoremlərə misallar kimi baxmaq olar və bu teoremlər Yu. V. Linnik və onun məktəbi tərəfindən daha tam surətdə öyrənilmişdir.

2) Verilmiş ehtimal fəzasında asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin varlığı. Eğer elementar hadisələr fəzası iki elementdən ibarət olarsa və bunların hər birinə $1/2$ ehtimalı qarşı qoyularsa, onda Ω -da konstantdan fərqli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər yoxdur. Eğer ehtimal fəzası kimi Lebeq ölçüsü m ilə verilən $[0, 1]$ parçası götürülərsə, onda $F_1(x), F_2(x), \dots$ paylanma funksiyalarının ixtiyari ardıcılığı üçün $[0, 1]$ -də təyin olunmuş, m ölçüsünə nəzərən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan $e_k X_k(\omega)$ ölçülən funksiyaları tapılar ki,

$$m\{\omega: 0 \leq \omega \leq 1, X_k(\omega) < x\} = F_k(x)$$

olsun.

$[0, 1]$ -də bu növ statistik asılı olmayan funksiyalara ən sadə misal $0 \leq \omega \leq 1$ münasibətilə verilən ω -nın ikilik ayrılışının işarələri və ya bu işarələrlə bağlı

$$r_k(\omega) = \text{sign} \sin(2\pi \cdot 2^{k-1} \omega), \quad k = 1, 2, \dots$$

- Rademaxer funksiyalarıdır. Qeyd etmək lazımdır ki, paylanmaları ilə verilmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin təyin olduğu hər hansı ehtimal fəzasının varlığı sonsuzölçülü fəzalarda ehtimallar haqqında Kolmoqorov teoremindən alınır (bax, [3], fəs. III, §4).

3) Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər digər sxemlər üçün mənbə kimi. $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və $h(x, y)$ – iki dəyişənli (Borel) funksiya olsun.

$X_1 = h(Y_0, Y_1), X_2 = h(X_1, Y_2), \dots, X_n = h(X_{n-1}, Y_n), \dots$ olduğunu fərz etdikdə Markov zənciri əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı alınır. Buna oxşar şəkildə, məs., stoxastik differensial tənliklərin vasitəsilə Viner prosesindən Markov proseslərini almaq olur. Asılı olmayan qiymətlərli Gauss təsadüfi ölçülərindən Furiye çevirməsi vasitəsilə Gauss stasionar təsadüfi proseslərini qurmaq olur.

4) Zəif asılılıq. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün ehtimal nəzəriyyəsinin müəyyən olunmuş asimptotik qanunları, adətən, zəif asılı kəmiyyətlər üçün, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ardıcılığının bir-birindən «uzaqlaşmış» parçaları arasında münasib surətdə ölçülmüş asılılıq «kiçik» olduqda da müəyyən oluna bilər (ən sadə hallarda bunlar m – asılı kəmiyyətlər ardıcılıqları ola bilər, burada X_k və X_l , $|k-l| > m$ olduqda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və ya *erqodik Markov zənciri* əmələ gətirən kəmiyyətlər ardıcılıqlarıdır). Uyğun teoremlərin isbatlarının əsas qaydalarından biri baxılan halın A. o. halına gətirilməsidir.

5) Ədədlər nəzəriyyəsində asılı olma məzaliq. $p \geq 2$ və $q \geq 2$, – iki qarşılıqlı sadə natural ədədlər olsun. N natural ədəddir və 1-dən N -ə qədər natural ədədlərdən ixtiyari biri seçilir (bu ədədlərin hər birinin seçilməsi ehtimalının $1/N$ olduğu fərz olunur). A_p (uyğun olaraq A_q) seçilmiş ədədin p -yə tam bölünən (uyğun olaraq q -yə) olduğu hadisəsi olsun. Onda

$$P(A_p) = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{p} \right], \quad P(A_q) = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{q} \right],$$

$$P(A_p \cap A_q) = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{pq} \right].$$

$N \rightarrow \infty$ olduqda A_p və A_q hadisələri «sanki asılı olmayan» hadisələr olur. Daha dərin fakt ondan ibarətdir ki, $N \rightarrow \infty$ olduqda $\text{ele } S = S_N \rightarrow \infty$ seçmək mümkündür ki, $A_2, A_3, \dots, A_p$ (p_j , $-j$ -ci sadə ədəddir) küllüyyatca «sanki asılı olmayandılar», bu fakt arifmetik funksiyanın qiymətlərinin paylanması tədqiqində əsas götürülür. Ədədlər nəzəriyyəsinin digər əl bölmələri də vardır ki, A. o. ideyası aşkar və ya qeyri – aşkar olaraq iştirak edir.

6) Müşahidə nəticələri üzrə A. o. hipotezinin yoxlanılması haqqında statistik hipotezlərin yoxlanılması məq-nə bax.

Əd.: [1] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика, ее содержание методы и значение, М., 1956; [4] Каци М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [6] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильюс, 1962.

ASILI OLMAMAZLIQ XASSƏSİ, HADİSƏLƏR SİNFİNİN «свойство независимости класса событий»; property independence of class events – bax, Asılı olmamazlıq.

ASILI OLMAMAZLIQ KRİTERİSİ «независимости критерий; test of independence» – hər bir qrupun digərlərindən asılı olmamazlığı haqqında statistik hipotezi yoxlamaq üçün kriteridir. p – ölçülü normal ümumi çoxluqdan n həcmli seçim verildiyi fərz olunur və müşahidə olunan vektorun komponentlərinin hər hansı q sayda qrupa bölüşü verilir; bu qruplar $p_1, \dots, p_q$ sayda elementdən ibarətdir.

Əgər Ξ nəzəri kovariasion matrisi q^2 sayda hissəyə bölünmüşdürsə, yəni

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1q} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{q1} & \sigma_{q2} & \dots & \sigma_{qq} \end{bmatrix}$$

olarsa, onda yoxlanılan hipotez ondan ibarətdir ki, $j \neq k$ olduqda $\sigma_{jk} = 0$ olsun. Doğruoxşarlıq nisbəti statistikasi

$$I_H = |\hat{\sigma}|^{n/2} / \prod_{j=1}^q |\hat{\sigma}_{jj}|^{n/2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\|\hat{\sigma}_{jk}\|$ empirik kovariasion matrisdir və ya

$$I_H^{n/2} = |\hat{\sigma}| / \prod_{j=1}^q |\hat{\sigma}_{jj}|.$$

Əgər irəli sürülmüş hipotez doğrudursa, I statistikasi məxrəcdən asılı deyildirsə, $|\hat{\sigma}_{jj}|$ isə $|\hat{\sigma}_{kk}|$ -dən asılı deyildirsə, onda

$$M(I^r) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma\left(\frac{n-j}{2} + \frac{r_n}{2}\right) \prod_{k=1}^q \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right) \prod_{k=1}^q \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma\left(\frac{n-j}{2} + \frac{r_n}{2}\right)}.$$

Buna görə də, $-2 \ln I$ təqribi olaraq χ^2 paylanması kimi paylanır və bu halda

$$f = \frac{1}{2} \left(p(p+1) - \sum_{i=1}^q p_j(p_j+1) \right).$$

Daha dəqiq approksimasiyadan sonra

$$\rho = 1 - \frac{2 \left(p^3 - \sum_j p_j^3 \right) - 9 \left(p^2 - \sum_j p_j^2 \right)}{6n \left(p^2 - \sum_j p_j^2 \right)}$$

berabərliyi alınır. j -nin bütün qiymətlərində $p_j = 1$ olduğu halda, yeni bütün p komponentlərinin asılı olmamazlığı yoxlanıldığı

halda, $f = p(p-1)/2$ olur. İkinci yaxınlaşmada $\rho = 1 - (2p+11)/6n$ bərabərliyi alınır.

Bu halda statistika $|\hat{\sigma}|$ -nin diaqonal elementlərinin, yeni dispersiyaların hasilinə nisbətinin $n/2$ -ci dərəcədən qüvvətinə bərabərdir, başqa sözlə, korrelyasion determinantın $n/2$ -ci dərəcədən qüvvətinə bərabərdir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

ASILI OLMAYAN (STATİSTİK ASILI OLMAYAN) HADİSƏLƏR «независимые (статистически независимые) события; independent (statistically independent) events» – $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzası verildikdə, $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ təsadüfi hadisələri üçün

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (*)$$

bərabərliyini ödəyən hadisələrə deyilir; bu terminlə yanaşı «P ehtimalına nəzərən asılı olmayan», «P ehtimalına nəzərən statistik asılı olmayan hadisələr» anlayışı da istifadə olunur (bax, [2]).

Əgər $P(A) > 0$ və $P(B|A) = P(B)$ olarsa, təbii ki, A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş vermə ehtimalını dəyişmir və $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ olduğuna görə, bu halda

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$ olur. Eynilə, əgər $P(B) > 0$ və $P(A|B) = P(A)$ olarsa, yenə də $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olduğu alınır.

Teorem 1. Əgər A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, onda A ilə $\bar{B}$, $\bar{A}$ ilə B, $\bar{A}$ ilə $\bar{B}$ asılı olmayan hadisələrdir (bax, [1]).

Teorem 2. Uyuşmayan B_1 və B_2 hadisələrinin hər biri A ilə asılı olmayan hadisələrdirsə, onda A və $B_1 \cup B_2$ A. o. h.-dir (bax, [1]).

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ($A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1, n}$) hadisələrinin ixtiyari cütü A. o. h.-dirsə, A_i hadisələri cüt-cüt A. o. h. adlanır.

Teorem 3. A_i ($i = \overline{1, n}$) hadisələrinin cüt-cüt asılı olmamalıqları üçün

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, n}$$

bərabərlikləri (C_n^2 sayda) ödənilməlidir.

$B_1, B_2, \dots, B_n$ ($B_i \in \mathcal{F}$) hadisələri üçün

$$P\left(\bigcap_{r=1}^k B_{i_r}\right) = \prod_{r=1}^k P(B_{i_r})$$

bərabərlikləri $2 \leq k \leq n$ şərtini ödəyən ixtiyari k-lar və $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ şərtini ödəyən $i_1, i_2, \dots, i_k$ indekslərinin ixtiyari toplusu üçün ödənilərsə, $B_1, B_2, \dots, B_n$ küllüyyatca A. o. h. adlanır. $B_1, B_2, \dots, B_n$ küllüyyatca A. o. h.-dirsə, ixtiyari

$i \neq j, i, j = \overline{1, n}$ qiymətlərində B_i, B_j cüt-cüt A. o. h.-dir. Lakin əksi doğru deyil.

Əd.: [1] Гикман И. И., Схороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR küllüyyatca «независимые события в совокупности; totally independent random events» – bax, *Asılı olmamalıq*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR, P EHTİMALINA NƏZƏRƏN «независимые события относительно вероятности P; independent events relatively to probability P» – bax, *Asılı olmayan hadisələr*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR CƏBRLƏRİ «независимые алгебры событий; independent algebras of events» – bax, *Asılı olmamalıq*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR CƏBRLƏRİ, P EHTİMALINA NƏZƏRƏN «независимые алгебры событий относительно вероятности P; independent algebras of events relatively to probability P» – bax, *Asılı olmayan hadisələr*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR σ – CƏBRLƏRİ «независимые σ – алгебры событий; independent σ – algebras of events» – bax, *Asılı olmamalıq*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR SİNİFLƏRİ «независимые классы событий; independent classes of events» – bax, *Asılı olmamalıq*.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR SİNİFLƏRİ küllüyyatca «независимые классы событий в совокупности; totally independent classes of events» – bax, *Asılı olmamalıq*.

ASILI OLMAYAN SEYRƏKLƏNMƏ(Sİ) nöqtəvi prosesin «независимое прореживание точечного процесса; independent thinning of a point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

ASILI OLMAYAN SINAQLAR «независимые испытания; independent trials» – müxtəlif sınaqlara aid hadisələrin asılı olmayan hadisələr olduqları *sınaqlardır*. Hər bir S_k sınağına ehtimal fəzası $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$ kimi baxmaq olar. A. o. s.-i $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası – $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$ ehtimal fəzalarının düz hasilə ilə təsvir etmək olar. Bu halda ixtiyari $A_i \in \mathcal{A}_i, i = \overline{1, n}$ hadisələri asılı olmayan hadisələr olacaqdır, yəni

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

şərti ödəniləcəkdir.

Hər hansı real təsadüfi obyektləri təsvir edən A. o. s.-in ehtimal modellərinin qurulmasında, adətən, belə bir prinsipdən istifadə olunur: səbəbi anlamda asılı olmayan real hadisələr nəzəri – ehtimali anlamda da asılı deyildir.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982.

**ASILI OLMAYAN SINAQLARIN EFFEKTİV / EKVI-
VALENT SAYI** « независимых испытаний экви-
валентное число; effective number of indepen-
dent trials », asılı olmayan müşahidələrin
ekvivalent sayı — asılı olmayan sınaqların (və
ya müşahidələrin) ehtimal sayıdır ki, asılı sınaqlardan (müşahidələrdən) ibarət verilmiş seçim üçün dəqiqliklə (yəni eyni
kvadratik orta xəta ilə) qeyd olunmuş statistik xarakteristikasını
qiymətləndirməyə imkan verir. A. o. s. e. s.-nin tapılmasının
mühüm xüsusi halı — kəsilməz və ya diskret zamanlı ($0 \leq t \leq T$
və ya $t = 1, 2, \dots, T$) $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesinin bir
realizasiyasının T uzunluqlu parçası üzrə seçmə görə
 $m = M\zeta(t)$ orta qiymətinin təyin olunduğu haldır. Əgər
 m kəmiyyətinin statistik qiyməti kimi alınmış, müşahidələrin
ədədi ortası m_T^* -dən istifadə olunursa, onda t kəsilməz olduqda

$$M(m_T^* - m)^2 = \sigma_{m_T}^2 = (2/T^2) \int_0^T (T - \tau) b(\tau) d\tau$$

və t diskret olduqda

$$M(m_T^* - m)^2 = \sigma_{m_T}^2 = (2/T^2) \sum_{\tau=0}^{T-1} (T - \tau) b(\tau) - b(0)/T$$

xarakteristikalarından istifadə olunur. Burada $b(\tau) =$
 $= M[\zeta(t+\tau) - m][\zeta(t) - m]$, — $\zeta(t)$ prosesinin m e r -
k ə z l ə n m i ş k o r r e l y a s i o n f u n k s i y a s ı d ır
[odur ki, $b(0)$, — $\zeta(t)$ prosesinin dispersiyasıdır]. N say-
da asılı olmayan $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ müşahidələri üzrə $m = M\zeta$ kə-
miyyətinin $m_N^* = N^{-1} \sum_{i=1}^N \zeta_i$ statistik qiymətinin xətasının

kvadratik ortası — σ_{ζ}^2/N -ə bərabər olduğundan (burada
 σ_{ζ}^2 , — ζ -in dispersiyasıdır), A. o. s. e. s., burada
 $N_{ef} = b(0)/\sigma_{m_T}^2$ düsturu ilə ifadə olunur. Məs., t kəsilməz
olduqda (və analogi t diskret olduqda) $\zeta(t)$ prosesinin
korrelyasiya radiusu —

$$T_1 = (1/b(0)) \int_0^\infty b(\tau) d\tau$$

sonlu və sıfırdan fərqli olarsa, onda $T \gg T_1$ olduqda $N_{ef} \approx$
 $\approx T/2T_1$ olur. $m_2 = M\zeta^2(t)$ və ya $\sigma_{\zeta}^2 = M[\zeta(t) -$
 $- M\zeta(t)]^2$ və ya $m_k = M\zeta^k(t)$ təyin edilərkən, A. o. s. e. s.
 T uzunluqlu parça üzrə $\zeta(t)$ stasionar prosesinin bir
realizasiyası üzrə analogi tapılır. $\zeta(t)$ — korrelyasiya funksiyası
 $b(\tau) = C e^{-a|\tau|} \cos \beta \tau$ olan Gauss stasionar prosesi olduqda,
 m , m_2 və σ_{ζ}^2 kəmiyyətlərinin, $\zeta(1), \dots, \zeta(t)$ qiymətləri üzrə,
A. o. s. e. s. qiymətləri üçün T -nin bir sıra qiymətlərindən [1]-də
cədvəl tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Bayley G. V., Hammersley J. M., «J. Roy. Sta-
tist. Soc. Suppl.», 1946, v. 8, № 2, p. 184–97.

ASILI OLMAYAN SPEKTRAL TİPİ, ÖLÇÜLƏRİN
« независимый спектральный тип мер; indepen-
dent spectral types of measures » — bax, Sinqulyarlığı,
ölçülərin.

ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR
« независимые случайные события; independent
random events » — bax, Asılı olmamazlıq.

ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR cüt-
cüt « независимые случайные события попар-
но; pairwise independent random events » — bax,
Asılı olmayan hadisələr.

ASILI OLMAYAN YERİNİDƏYİŞMƏ(Sİ) nöqtəvi
prosesin « независимый сдвиг точечного
процесса; independent shift of a point process »
— bax, Nöqtəvi proses.

ASILI SINAQLAR « зависимые испытания; de-
pendent trials » statistik modelləşdirmədə
— axtanlan kəmiyyətin (kəmiyyətlər ailəsinin) modelləşdirilən
təsadüfi hadisə və ya prosesin bir-birindən asılı realizasiyaları
üzrə orta xarakteristikası kimi hesablanıldığı modellərin (model-
lər ailəsinin) istifadə olunduğu sınaqlardır. Bu hallarda *antitetik*
dəyişənlər metodu və təsadüfi parametrləri digər kvadratik
düsturlar — F funksiyalarının hər hansı fəzasında dəqiq düsturlar
istifadə olunur. İnteqrallanan f funksiyası özünün F -də pro-
yeksiyası ilə yaxın olduğu halda, bu metodların tətbiqi Monte —
Karlo metodundan istifadə olunması üçün zəruri olan
əməliyyatın həcmi azaldır.

$$\varphi(\alpha) = \int f(x; \alpha) \mathbf{P}(dx) \approx N^{-1} [f(\xi_1; \alpha) + \dots + f(\xi_N; \alpha)] \approx \varphi^*(\alpha)$$

asılılığını Monte — Karlo metodu ilə hesabladıqda bütün
 $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$ qiymətlərində $\mathbf{P}(dx)$ qanunu ilə paylanmış eyni
bir ξ_i ardıcılığını istifadə etmək məqsəduyğundur. Onda
 $\varphi^*(\alpha)$ əynisi $\varphi(\alpha)$ -ya yalnız C -də deyil, uyğun $C^{(n)}$ metri-
kasında da yaxın olur. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(dx; \alpha)$ ölçüsü α parametridən
asılı olduğu halda da asılı sınaqlar seriyasının oxşar konstruk-
siyası tətbiq olunur.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте — Карло и смежные
вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Бахвалов Н. С., в сб.: Численные
методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и
квадратурные формулы, М., 1964, с. 5–63; [3] Фролов А. С.,
Ченцов Н. Н., «Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятн. и
матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 425–37.

***ASILILIQ «зависимость; dependence»** — *stoxastik*
və ya *ehtimali asılılıq* — ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiy-
yətlərin «asılılığı» kimi anlaşılan, riyaziyyatda istifadə olu-
nan — kəmiyyətlərin adi funksional «asılılıq» növündən fərqli, daha
ümumi asılılıq növüdür. Əgər ξ və η bir-birilə ehtimali asılı
təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ξ -nin hər hansı bir qeyd
olunmuş qiymətində η -nin hər hansı qiymət alacağını dəqiq təyin
etmək olmur; bu halda η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanu-
nu ξ -nin aldığı qiymətdən asılı təyin olunur. Funksional asılılığa
daha sıx ehtimal asılılığının limit halı kimi baxmaq olar. Əslində
praktikada funksional asılı hesab olunan fiziki kəmiyyətlər olduqca

six ehtimali asılılıqla bağlıdır. Təsədüfi kəmiyyətlər arasındakı xətti asılılığı kəmiyyətə xarakterizə etmək üçün *kovariasiya* və *korrelyasiya əmsali* adlanan ədədi xarakteristikalardan istifadə olunur (bax, *Kovariasiya, Korrelyasiya əmsali*).

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)). \quad (1)$$

$$\rho(\xi; \eta) = \text{cov}(\xi, \eta) / \sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}. \quad (2)$$

Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri xətti funksional asılılıqla bağlıdırsa, yəni $\eta = a\xi + b$ (a və b sabitlərdir, $a \neq 0$) olarsa, onda $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ doğrudur və

$$\rho(\xi; \eta) = \begin{cases} +1, & \text{əgər } a > 0, \\ -1, & \text{əgər } a < 0 \end{cases}$$

(bax, [2], səh. 249).

İki təsadüfi kəmiyyətin kovariasiyasının sıfırdan fərqli olması bu *təsədüfi kəmiyyətlər arasında asılılıq əlamətidir*. İki təsadüfi kəmiyyət arasında xətti ehtimali asılılıq bir təsadüfi kəmiyyətin artması ilə digər təsadüfi kəmiyyətin orta qiymət menada xətti qanunla artmağa (və ya azalmağa) meyilli olması kimi anlaşılmalıdır. $\rho(\xi, \eta) > 0$ olduqda, ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında *müsbət korrelyasiya*, $\rho(\xi, \eta) < 0$ olduqda isə *mənfi korrelyasiya* vardır, deyilir (bax, *Asılı olmamaqlıq*).

Ehtimal nəzəriyyəsində asılılıq anlayışının bir növü də təsadüfi kəmiyyətlər arasında *Markov asılılığı* (1906-da daxil olunmuşdur) kimi adlanan *zəncirvari asılılıq* anlayışdır. Markov asılılığı ilə bir-birilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [1]).

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ehtimal fəzası, $\{\mathcal{F}_n\}$ – bu fəzaya uyğun seçilmiş azalmayan σ – cəbrlər ailəsi olsun, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n$. Hər bir n və m tam qiymətləri və $B_k \in \mathcal{F}_k$ üçün, $\mathcal{F}_n$ verdiyi halda,

$$\begin{aligned} P\{\omega : P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_{n-1} \in B_{n-1}, \xi_{n+1} \in B_{n+1}, \dots, \\ \xi_{n+m} \in B_{n+m} | \mathcal{F}_n\} = P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n | \mathcal{F}_n\} \times \\ \times P\{\xi_{n+1} \in B_{n+1}, \dots, \xi_{n+m} \in B_{n+m} | \mathcal{F}_n\} \end{aligned} \quad (3)$$

bərabərliyi sanki yeqin ödənilərsə, $\mathcal{F}_n$ ardıcılığı P ehtimalına nəzərən *Markov zənciri* əmələ gətirir, deyilir. (3) *Markov xassəsi* adlanır. Bu xassə müxtəlif ekvivalent formalarda ifadə olunur.

Əd.: [1] Л о в н М., Теория вероятностей. пер. с англ., М., 1962; [2] И л я р е в А. П., Вероятность, М., Наука, 1980; [3] В е н т - ц е л ь Е. С., Теория вероятностей, М., 1969.

ASILILIQ RADIUSU « зависимости радиус; interaction radius » – bax, *Markov prosesi qarşılıqlı təsirli*.

ASİMMETRİK KANAL « асимметричный канал; asymmetric channel » – bax, *Genişəyməli kanal*.

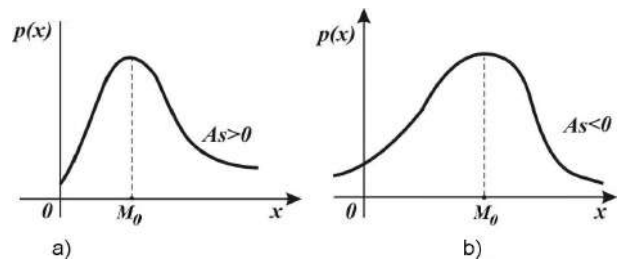
ASİMMETRİYA ƏMSALI « асимметричный коэффициент; coefficient of skewness » – *paylanma asimetriyasının* ən sadə və daha çox istifadə edilən ölçüsü olub,

$$As = \mu_3 / \sigma^3$$

38 ASİMMETRİYA

düsturu ilə təyin olunur, burada μ_3 – təsadüfi kəmiyyətin üçüncü mərkəzi momenti, $\sigma^2 = D\xi$ – paylanmanın dispersiyası, başqa sözlə, ikinci mərkəzi momentdir. Üçüncü tərtib momenti sonlu olan simmetrik paylanmanın A. ə., $As = 0$.

Təsədüfi kəmiyyətin paylanma əyrisinin «uzun hissəsi» onun riyazi gözləməsindən sağdırsa, asimetriya müsbətdir: $As > 0$; əgər «uzun hissə» riyazi gözləmədən soldadırsa, asimetriya mənfidir, yəni $As < 0$. M_0 – moda nöqtəsidir. Asimetriyanın işarəsi modaya nəzərən təyin olunur: əyrinin «uzun hissəsi» modadan sağdırsa, A. ə. müsbət, soldadırsa, A. ə. mənfi götürülür.



Şəkilə A. ə. müsbət və mənfi olan paylanmaların qrafiki verilmişdir.

Parametrləri $n=10$, $p=1/5$ (şəkil a) və $n=10$, $p=4/5$ olan (şəkil b) binomial paylanma üçün

$$As = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}};$$

λ parametrlı eksponensial paylanma üçün

$$As = \left(\frac{2}{\lambda^3}, \frac{1}{\lambda^3} \right) = 2;$$

($k; r; p$) parametrlı mənfi binomial paylanma üçün

$$As = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

düsturları ilə ifadə olunur.

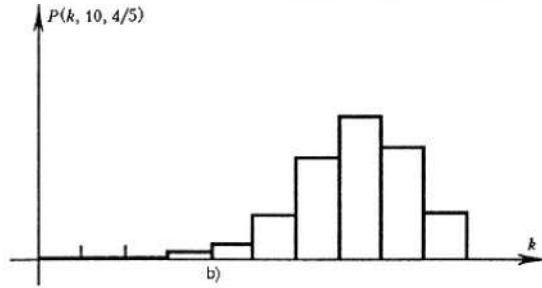
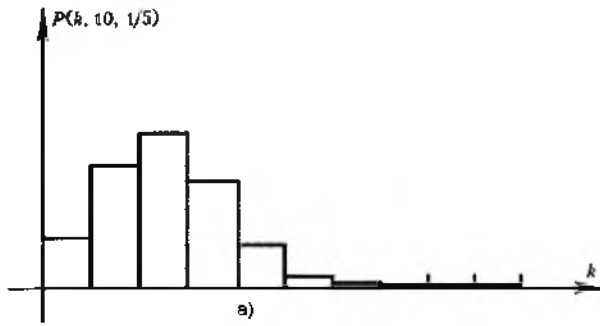
Standart normal paylanmanın A. ə. sıfırdır.

Tədqiq olunan paylanmanın A. ə. çox da böyük deyildirsə, bu halda onun paylanmasının standart normal paylanmaya yaxın olduğunu söyləmək olar.

A. ə. paylanmanın yerləşmə xarakteristikası olub, onun simmetrik paylanmadan fərqliliyini ifadə edir. Simmetrik paylanmanın hər bir sonlu tərtib mərkəzi momenti sıfıra bərabərdir. Hər bir belə moment sıfırdan fərqli olarsa, həmin paylanmanın asimetriyası olduğunu hökm etmək olar. Paylanmasının sıxlıq funksiyası olan unimodal paylanmanın A. ə. müsbət olduqda, onun əyrisinin «uzun hissəsi» modadan sağda, mənfi olduqda modadan soldadır.

$$As = \frac{1}{ns^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

kəmiyyətinə seçimi asimetriya əmsalı deyilir, burada $x_1, \dots, x_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\bar{x}$ və s – seçimi orta və seçimi dispersiyadır.



$n=0$ olduqda Bernulli sınaqlarına uyğun $P(k; n, p)$ binomial paylanmanın qrafikləri: a) $p = 1/5$, – müsbət asimmetriyalı, b) $p = 4/5$ mənfi asimmetriyalı.

ASİMMETRİYASI, PAYLANMANIN « асимметрия распределения; skewness of a distribution » – paylanmanın simmetrik paylanmadan fərqləndirici xarakteristikadır. Simmetrik paylanmanın tek tərtdən hər bir sonlu mərkəzi momenti sıfıra bərabərdir. Sıfırdan fərqli hər bir tek tərtdə mərkəzi momentin varlığına verilən paylanmanın asimmetriya göstəricisi kimi baxmaq olar. Asimmetriyanın ən çox istifadə olunan ölçüsü *asimmetriya əmsəlidir*. Asimmetriyanın digər göstəriciləri də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Asimmetriya əmsali müsbət (mənfi) olarsa, P. a. müsbətdir (mənfidir). Sıxlığa malik unimodal paylanmanın P. a. müsbət (mənfi) olarsa, sıxlıq eynisinin qrafikinə daha «uzun» hissəsi modadan sağdadır (soldadır).

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

*** ASİMPTOTİK ASILI OLMAMAZLIQ « асимптотическая независимость; asymptotic independence »** – ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi asimptotik problem ilə bağlı anlayışdır.

Mərkəzi limit problemində ξ_{nk} təsadüfi

kəmiyyətlərinin $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ cəmlərinin ehtimal qanunları ardıcılığı $\mathcal{P}(\xi_n)$ -nin yığılması araşdırılır. Bu problemi təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olduğu hal üçün araşdırdıqda, daha ümumi mərkəzi asimptotik problemə baxılır: bu problemə $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mathcal{P}(\xi_n)$ qanunlar ardıcılığının asimptotikası uyğun seçilmiş bəzi $\mathcal{P}(\eta_n)$ qanunlar ardıcılığı ilə müqayisədə araşdırılır. Doğrudan da, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri halında mərkəzi limit probleminin öyrənilməsi cəmlərin paylanma qanunlarının uyğun surətdə seçilmiş sonsuz bölünən qanunlarla müqayisəsinə əsaslanırdı.

n' indeksli ixtiyari $\mathcal{P}(\xi_{n'})$ və $\mathcal{P}(\eta_{n'})$ qanunlar ardıcılıqlarının limit (zəif yığılma mənada) qanunları bərabər olarsa,

$\mathcal{P}(\xi_n)$ və $\mathcal{P}(\eta_n)$ ardıcılıqları zəif ekvivalentdir, deyilir, başqa sözlə, əgər $\mathcal{P}(\xi_{n'}) \xrightarrow{z} \mathcal{P}$ olarsa, onda $\mathcal{P}(\eta_{n'}) \xrightarrow{z} \mathcal{P}$ və əksinə; bu halda $\mathcal{P}(\xi_n) \xrightarrow{z} \mathcal{P}(\eta_n)$ yazılır. $\mathcal{P}(\xi_{n'}) \xrightarrow{z} \mathcal{P}$ münasibəti onu ifadə edir ki, $F_{n'} \xrightarrow{L} F$ münasibəti sabit toplananlar dəqiqliyi ilə ödənilir. «Tamamilə ekvivalentlik» anlayışı analogi təyin olunur. Bu halda «zəif» sözü «tamamilə» sözü ilə əvəz olunur və «tamamilə ekvivalentlik», simvolik olaraq, $\mathcal{P}(\xi_n) \sim^{tam} \mathcal{P}(\eta_n)$ kimi yazılır.

$$\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk} \text{ cəminə qarşı ehtal } \eta_n = \xi_n^* = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}^* \text{ cəmi qarşı}$$

qoymaq olar ki, bu cəmin toplananları ξ_{nk}^* -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və ξ_{nk}^* ilə ξ_{nk} kəmiyyətləri də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $\mathcal{P}(\xi_{nk}^*) = \mathcal{P}(\xi_{nk})$ olsun. Yəni belə demək olar ki, əgər toplananlar arasında asılılığı aradan qaldırmaq olarsa, $\mathcal{P}(\xi_n^*)$ qanunu $\mathcal{P}(\xi_n)$ qanunundan

alınır. Əgər $\mathcal{P}(\xi_n) \sim^{tam} \mathcal{P}(\xi_n^*)$ münasibəti ödənilərsə, onda ξ_{nk} kəmiyyəti asimptotik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Bax, [1], fə. VIII, §28.1.28.2.

Əd.: [1] Л о в М., Теория вероятностей, М., 1962.

*** ASİMPTOTİK ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « асимптотически независимые случайные величины; asymptotically independent random variables »** – bax, *Asimptotik asılı olmamazlıq*.

*** ASİMPTOTİK AYRILIŞ « асимптотическое разложение; asymptotic expansion »** – ehtimal nəzəriyyəsində paylanmaların sıxlıq funksiyaları ilə bağlı anlayışdır.

Əgər $F(x)$ – dayanıqlıq göstəricisi (və ya dayanıqlıq parametri, xarakteristiklik göstəricisi) α -ya bərabər olan dayanıqlı paylanmadırsa, onda ehtal $c_1 > 0$ sabiti vardır ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \{1 - F(x) + F(-x)\} = c_1$$

münasibəti doğrudur. Xarakteristiklik göstəricisi α -ya bərabər hər bir dayanıqlı paylanma qanununun bütün p tərtdə ($0 < p < \alpha$) sonlu mütləq momentləri vardır.

$f(x; \alpha, \beta)$ – dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası olsun. Əgər $0 < \alpha < 1$ və $x > 0$ olarsa, onda

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \left[\frac{k\pi}{2} \cdot \alpha \cdot (\beta + 1) \right] \times \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{k!} x^{-k\alpha}. \quad (1)$$

$\alpha > 1$ olduqda (1)-in sağ tərəfindəki sıra dağılır. Əgər $1 < \alpha < 2$, $x > 0$ olarsa, onda

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma((k+1)/\alpha)}{\alpha k!} x^k \times \\ \times \cos \left[\frac{k\pi}{2} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{2-\alpha}{\alpha} \beta \right) \right]. \quad (2)$$

$\alpha < 1$ olduqda (2)-nin sağ tərəfindəki sıra dağılır.

Əgər $\alpha = 1$, $x > 0$ olarsa, onda ixtiyari N üçün

$$f\left(x + \frac{2\beta}{\pi} \ln x, 1, \beta\right) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=0}^N \frac{b_k}{k!} x^{-k} + O(x^{-N-2}),$$

burada

$$b_k = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k \left(i + i\beta - \frac{2\beta}{\pi} \ln t \right)^k dt.$$

Təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması ayrılışı.

$\{\xi_k, k \geq 1\}$ – qarışıqlıq asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun. ξ_k -lər üçün $M\xi_n = a$.

$D\xi_n = \sigma^2$ və $r \leq 3$ tərtib sonlu mütləq momentlərin varlığı və

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |g(z)| < 1$$

Kramer şərtinin ödənilməsi fərz olunur, burada $g(z)$, – $P\{\xi_n < x\} = G(x)$ paylanma funksiyasının uyğun xarakteristik

funksiyasıdır; onda $\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i - na \right)$ normalan-

miş cəminin paylanma funksiyası $F_n(x)$ üçün $x \rightarrow \infty$ görə müntəzəm olaraq

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{m=1}^{r-2} \frac{Q_m(x)}{\sqrt{n}^m} + o(n^{-(r-2)/2})$$

asimptotik ayrılışı doğrudur, burada $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$, –

$(0, 1)$ parametrlı normal paylanma funksiyasıdır və

$$Q_m(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \sum H_{m+2s-1}(x) \times \\ \times \prod_{l=1}^m \frac{1}{k_l!} \left(\frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)! \sigma^{l+2}} \right)^{k_l}.$$

γ_l , – ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin l -ci semiinvariantıdır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. 2, М., 1985; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

40 ASİMPTOTİK

ASİMPTOTİK AYRILIŞ (1) paylanmanın «асимптотическое разложение распределения; asymptotic expansion of a distribution» – $\lambda \in \Lambda$ parametridən asılı $P(\lambda)$ paylanmasının $\lambda \rightarrow \lambda_0$ olduqda

$$G(\lambda) = \sum_{j=0}^k a_j \Psi_j(\lambda) + o(\Psi_k(\lambda))$$

bərabərliyi şəklində ifadəsədir, burada $k \geq 0$, λ_0 , – Λ çoxluğunun limit nöqtəsidir (sonlu və ya sonsuz), a_j , λ -dan asılı deyildir, $\{\Psi_j(\lambda)\}$, – $\lambda \rightarrow \lambda_0$ olduqda hər bir j qiymətində $\Psi_{j+1}(\lambda) = o(\Psi_j(\lambda))$ şərtini ödəyən funksiyaların hər hansı verilmiş ardıcılığıdır. $G(\lambda)$ kimi paylanma funksiyası və ya təsadüfi kəmiyyətin hər hansı parametrdən asılı paylanma sıxlığı funksiyasını götürmək olar.

$F_n(x)$, – n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin normalanmış cəminin paylanma funksiyası, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası olduğu hal üçün ehtimal nəzəriyyəsində ilk dəfə 1887-də P. L. Çebişev tərəfindən $F_n(x) - \Phi(x)$ fərqlinin

$1/\sqrt{n}$ üstlərinə görə ayrılışı verilmişdir. Sonradan paylanmanın A. a. F. Edcuort tərəfindən araşdırılmışdır ([2]). Q. Kramer bu ayrılışları ciddi surətdə əsaslandırmışdır ([3]). Q. Kramerin aldığı nəticələrdən daha güclü və ümumiləşmiş nəticələri K. Esseen almışdır ([4]). Digər nəticələr [5] – [7]-də şərh olunmuşdur. Məs., Esseen teoremi aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər $\{\xi_n\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$, $M|\xi_1|^k < \infty$ şərti $k \geq 3$ olan hər hansı tam k qiyməti üçün ödənilərsə və əgər

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |M e^{it\xi_1}| < 1$$

olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i < x \right\} = \\ = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{k-2} n^{-j/2} Q_j(x) + o(n^{-(k-2)/2})$$

münasibəti $x \in \mathbb{R}^1$ üzrə ödənilir. Burada

$$Q_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} P_{3j-1}(x),$$

$P_{3j-1}(x)$, – $x \rightarrow \infty$ görə $(3j-1)$ dərəcəli çoxhədlidir və onun əmsalları X_1 təsadüfi kəmiyyətinin yalnız $(j+2)$ -ci tərtib momentini aşmayan momentlərdən asılıdır. $Q_j(x)$ funksiyasının Çebişev çoxhədliləri ilə əşkar ifadələri vardır.

Asılı olmayan və asılı təsadüfi kəmiyyətlər (və vektorlar) cəmi üçün mərkəzi limit teoremində, təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının limit dayanıqlı paylanmaya yığılma teoremlərində asimptotik ayrılışla yanaşı, mühüm olan müxtəlif statistikalar sinifləri üçün paylanmaların asimptotik ayrılışları da tədqiq olunmuşdur.

Əd.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [2] Edgeworth F. V., «Trans. Comb. Philos. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [3] Cramer H., «Scand. Aktuarietidskrift», 1928, v. 11, p. 13–74, 141–80; [4] Esséen C.-G., «Acta math.», 1945, t. 77, p. 1–25; [5] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р., Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. с англ., М. 1972; [6] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [7] Hall P., Rates of convergence in the central limit theorem, Boston, 1982.

ASİMPTOTİK AYRILIŞ(1) statistik qiymətin riskinin «асимптотическое разложение риска оценки; asymptotic expansion of the risk of an estimator» – $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin riskinin azalan toplananların (adətən, kiçik qiymətli parametrlin qüvvət üstlərinə görə) cəmi şəklində ifadəsidir. Məs., maksimal doğruxaşarlıq parametrlin statistik qiymətinin orta riskinin A. a. θ parametrlin n həcmli asılı olmayan seçim üzrə ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x, \theta)$ olduqca hamar funksiya olduqda

$$M_{\theta} |\hat{\theta} - \theta|^2 = n^{-1} g_1 + n^{-3/2} g_2 + \dots + n^{-k/2} g_{k-1} + O(n^{-(k+1)/2})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada g_i – müşahidələrin A. a. funksiyalarıdır.

Əd.: [1] Гусев С. И., «Теория вероятностей и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 16–33; [2] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1981, т. 45, № 3, с. 509–39.

ASİMPTOTİK AYRILIŞ(1) statistik qiymətlərin «асимптотическое разложение оценок; asymptotic expansion of estimators», statistik qiymətlərin stoxastik ayrılışı, – $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin θ parametrlin əsl qiymətindən yayınmasının stoxastik azalan (adətən, hər hansı kiçik qiymətli parametrlin qüvvət üstlərinə görə) toplananların cəmi şəklində ifadəsidir. Məs., n həcmli asılı olmayan seçim üzrə olduqca hamar $f(x, \theta)$ ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyasının parametrlini qiymətləndirmə məsələsində maksimal doğruxaşarlıq statistik qiymətlərinin A. a.

$$\hat{\theta} - \theta = n^{-1/2} h_1 + \dots + n^{-k/2} h_k + \xi_n$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada h_i – müşahidələr funksiyasıdır və bu müşahidələr cırlaşmayan paylanmaya malikdir, ξ_n – qalıq təsadüfi kəmiyyətdir və $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfır olduqca tez yaxınlaşır. Statistik qiymətlərin A. a.-ndan, adətən, paylanma funksiyalarının ayrılışı və statistik qiymətlərin riskinin ayrılışı üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Ливник Ю. В., Митрофанов Н. М., «Докл. АН СССР», 1963, т. 149, № 3, с. 518–20; [2] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, № 2, с. 303–11; [3] Бурнашев М. В., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 2, с. 179–206.

ASİMPTOTİK BEYES KRİTERİSİ «асимптотически байесовский критерий; asymptotically Bayes test» – hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində statistik kriterilər ardıcılığıdır, Bayes kriteriləri ardıcılığına asimptotik ekvivalentdir. Müəkkəb hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələlərinin ardıcılığına baxılır: naməlum $\theta \in \Theta$ parametrlindən asılı $P_{n,\theta}$ paylanmasına malik, müşahidə olunan n həcmli X_n

seçimi üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1 , – Θ -nin kəsişməyən boş olmayan altçoxluqlarıdır. Asimptotik yanaşmada n -in artması ilə H_0 və H_1 hipotezləri, ümumiyyətlə, dəyişə bilərlər. Əgər ele $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcılığı varsa ki, bu ardıcılıqda hər bir $\varphi_n(X_n | \pi_n)$ kriterisi X_n seçimi üzrə qurulur və hər hansı bir aprior π_n paylanmasına nəzərən Bayes kriterisidir və $\{\psi_n(X_n)\}$ ele ardıcılıq olarsa ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} |M_{n,\theta} \psi_n(X_n) - M_{n,\theta} \varphi_n(X_n | \pi_n)| = 0 \quad (*)$$

münasibəti ödənilsin, $\{\psi_n(X_n)\}$ kriterilər ardıcılığı asimptotik Bayes kriterisi əmələ gəlir, deyilir.

A. B. k.-nin bu tərifinin müxtəlif modifikasiyalan mövcuddur. Məs., bəzən (*) münasibəti əvəzinə tələb olunur ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_{\pi_n}(\psi_n) - r_{\pi_n}(\varphi_n(\cdot | \pi_n))| = 0$$

münasibəti ödənilsin, burada $r_{\pi_n}(\varphi_n)$, – π_n aprior paylanma olduqda φ_n kriterisinin aprior riskidir. Digər təriflər, məs., [1]-də verilir.

A. B. k.-nin mühüm xassəsi ondan ibarətdir ki, seçimin paylanmalar ailəsi üzərinə olduqca ümumi şərtlərdə və $\{\pi_n\}$ aprior paylanmalarının hamarlığı şərtlərində A. B. k. aprior paylanmaların bu ardıcılığından asılı olmur və bu A. B. k. doğruxaşarlıq nisbəti kriterisinə asimptotik ekvivalentdir (bu da A. B. k.-nə bir misaldır). Bəzən A. B. k.-nin qurulmasını məsələlərin ilkin ardıcılığı ilə təyin olunan, hipotezlərin yoxlanılmasının hər hansı limit məsələsində Bayes kriterisinin qurulmasına gətirmək olur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Lindley D., «Proc. 4-th Berkeley symp. math. statist. probab.», v. 1, Berk., 1961, p. 453–68.

ASİMPTOTİK BİRGƏ EFFEKTİV STATİSTİK QIYMƏTLƏR ARDICILLIĞI «асимптотически совместно эффективная последовательность оценок; asymptotically mutually effective sequence of estimators» – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində bir anlayışdır. $\check{\theta}^{(n)}$, – n həcmli seçim üzrə qurulmuş θ parametrik vektorunun meylsiz statistik qiymətlər ardıcılığı, $I^{(n)}(\theta)$ – uyğun seçimin informasiya miqdarı matrisi, $D^{(n)}(\theta)$, – $\check{\theta}^{(n)}$ statistik qiymətinin dispersion matrisi olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$I^{(n)-1}(\theta) D^{(n)}(\theta) \rightarrow I$$

münasibəti ödənilərsə, $\check{\theta}^{(n)}$ statistik qiymətlər ardıcılığı asimptotik birgə effektiv statistik qiymətlər ardıcılığı adlanır.

Misal. Normal paylanmanın sıxlıq funksiyası üçün

$$f(x, a, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\theta^2}}$$

ifadəsində a və θ parametrləri naməlumdur. Bu parametrlərin qiymətləndirilməsi n sayda eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanmalarının sıxlıq funksiyası $f(x, a, \theta)$ olan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üzrə aparılır.

$$\mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - a) \right)^2 = \mathbf{D} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - a) \right) = n \mathbf{D}(\xi_k - a) = n\theta,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - a) \right] \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 - n\theta \right] &= \\ &= \mathbf{M} \left(\sum_{k,j=1}^n (\xi_k - a)(\xi_j - a)^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 - n\theta \right)^2 &= \mathbf{D} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 - n\theta \right) = \\ &= n \mathbf{D}[(\xi_k - a)^2] = 2n\theta^2, \end{aligned}$$

olduğundan, informasiya matrisinin elementləri üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial a} \right)^2 = \frac{n}{\theta}, \quad \mathbf{M} \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial a} \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \theta} = 0,$$

$$\mathbf{M} \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{n}{2\theta^2}$$

(bax, [1]). Beləliklə,

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\theta^2} \end{pmatrix} \rightarrow 0.$$

a və θ parametrlərinin statistik qiymətləri kimi

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad \bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2$$

meylsiz statistik qiymətləri götürülür. $\bar{s}^2$ və $\bar{\xi}$ arasında korrelyasiya sıfır bərabərdir. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\bar{s}^2 - \theta)(\bar{\xi} - a) &= \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbf{M} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 - n(\bar{\xi} - a)^2 \right] (\bar{\xi} - a) = \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 (\bar{\xi} - a) - n \mathbf{M}(\bar{\xi} - a)^3 \right) = 0, \end{aligned}$$

42 ASİMPTOTİK

çünki $\xi_k - a$ Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin təktərtib momentləri sıfır bərabərdir. Bu halda korrelyasiya matrisi

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\theta^2}{n-1} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

şəklində olur və

$$I(\theta)D(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-2} \end{pmatrix}$$

münasibəti ödənilir. Beləliklə, normal paylanmanın parametrləri a və θ -nın statistik qiymətləri $\bar{\xi}$ və $\bar{s}^2$ A. b. e. s. q.-lərdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

ASİMPTOTİK ÇOXALDILMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN

Markov zəncirinin «асимптотическое укрупнение состояний цепи Маркова; asymptotic merge of states of a Markov chain» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin çoxaldılması.

ASİMPTOTİK DAYANIQLILIQ ehtimala görə «асимптотическая устойчивость по вероятности; asymptotic stability in probability» – bax, Dayanıqlılıq(ğı), təyinedici təsadüfi elementlərli differensial tənliklərin.

ASİMPTOTİK DEFİKT «асимптотический дефект; asymptotic deficiency» – bax, Defəkt(i) kriterinin.

ASİMPTOTİK EFEKTİV STATİSTİK QIYMƏT

«асимптотически эффективная оценка; asymptotically efficient estimator» – böyük həcmli seçimler üçün münasib statistik qiymətlər sinfindən «ən yaxşı» statistik qiyməti seçməyə imkan verən anlayışdır. Tutarlı müntəzəm asimptotik normal statistik qiymətlər sinfində, adətən, Fişer tərifi ilə istifadə olunur, bu tərifə əsasən A. e. s. q. asimptotik dispersiyası ən kiçik olan statistik qiymət hesab olunur. Asimptotik normallıq şərtindən imtina etdikdə çətinliklər yaranır, bunlarla qarşılaşmaq üçün Bahadur asimptotik effektivliyi, Volfovits və Rao asimptotik effektivliyi təriflərindən istifadə olunur. Məlum requlyarlıq şərtlərində maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiyməti bu tərif anlamında A. e. s. q.-dir.

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ASİMPTOTİK EFEKTİVLİK(yi) kriterinin

«асимптотическая эффективность критерия; asymptotic efficiency of a test» – böyük həcmli seçimler hallarında eyni bir statistik hipotezin yoxlanılması üçün tətbiq olunan iki müxtəlif statistik kriterinin kəmiyyətce müqayisəsinə xidmət edən anlayışdır. Kriterlərin effektivliyini təyin etmək zəruriliyi XX əsrin 30 – 40-cı illərində, hesablama nöqtəyi – nəzərinə sadə olan, lakin «qeyri – effektiv» rəqəb üsulları yarandığı zaman meydana gəlmişdir.

A. e.-i təyin etmək üçün müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Fərz olunur ki, müşahidələrin paylanması P_θ həqiqi θ parametri ilə

təyin olunur və bu halda $H_1: \theta \neq \theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \theta = \theta_0$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur. Fərz olunur ki, verilən θ alternativinə qarşı β gücünün alınmasından ötrü, mühümlük ölçüsü α -ya bərabər hər hansı bir kriteri üçün N_1 sayda müşahidə, mühümlük ölçüsü eyni α olan digər kriteri üçün N_2 sayda müşahidə aparılmalıdır. Onda birinci kriterinin ikinci kriteriyə nəzərən nisbi effektivliyini $e_{12} = N_2/N_1$ düsturu ilə təyin etmək olar. Nisbi effektivlik anlayışını ifadə edən e_{12} funksiyasının, adətən, aşkar şəkildə hesablanması mümkün olmadığından, α , β və θ argumentlərinin funksiyası olduğundan kriteriləri müqayisə etmək üçün əhatəli məlumat daşıyıcısı olmasına baxmayaraq, tətbiqi cəhətdən əlverişli deyildir. Bu çətinlikdən yan keçmək üçün limit keçidlərindən istifadə olunur. α və β -ni qeyd etdikdə, $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ kəmiyyəti (əgər limit varsa) Pitmen asimptotik nisbi effektivliyi adlanır; β və θ qeyd olunduqda α -nı sıfıra yaxınlaşdırdıqda, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ (limit varsa) kəmiyyəti Bahadur asimptotik nisbi effektivliyi; α və θ qeyd olunduqda $\beta \rightarrow 1$ olarsa, $\lim_{\beta \rightarrow 1} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ (limit varsa) kəmiyyəti Hoces – Leman asimptotik nisbi effektivliyi adlanır.

Bu təriflərin hər birinin üstün və çatışmayan cəhətləri vardır. Məs., Pitmen asimptotik nisbi effektivliyi Bahadur asimptotik nisbi effektivliyinə nisbətən asan hesablanır, lakin bəzi hallarda iki kriterinin müqayisə edilməsi üçün az effektiv olur.

Məs., müşahidələrin orta qiyməti θ , dispersiyası 1 olan normal qanunla paylandığı fərz olunur; $H_1: \theta > 0$ alternativinə qarşı $H_0: \theta = 0$ hipotezi yoxlanılır. $\bar{X}$ seçimi ortasına və Student kəsri t -yə əsaslanan mühümlük kriterilərinə baxılır. t – kriteridə dispersiyanın qiyməti haqqında informasiya istifadə olunmadığından $\bar{X}$ -ə əsaslanan optimal kriteridən çox ona üstünlük verilir. Lakin Pitmen asimptotik nisbi effektivliyi nöqtəyi – nəzərinə, bu kriterilər ekvivalentdirlər. Digər tərəfdən, $\bar{X}$ -ə nəzərən t – kriterinin Bahadur asimptotik nisbi effektivliyi ixtiyari $\theta > 0$ qiymətində 1-dən ciddi kiçikdir. Daha müəkkəb hallarda Pitmen asimptotik nisbi effektivliyi α və ya β -dan asılı ola bilər və bu halda onun hesablanması çox çətin olduğundan onun limit qiyməti $\beta \rightarrow 1$ və ya $\alpha \rightarrow 0$ olduqda hesablanır. Sonuncu, adətən, $\theta \rightarrow \theta_0$ olduqda, Bahadur asimptotik nisbi effektivliyinin limit qiyməti ilə üst-üstə düşür. Asimptotik nisbi effektivliyin bu və ya digər tərfi e_{12} nisbi effektivliyinə nə dərəcədə dəqiq yaxınlaşma verməsinə əsaslanır.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Bahadur R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 2, p. 303–24; [3] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 324–35; [4] Никитин Я. Ю., Асимптотическая эффективность непараметрических критериев, М., 1995; [5] Lai L., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, № 5, p. 1027–47; [6] Berk R., Brown L., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, № 3, p. 567–81; [7] Kallenberg W., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 2, p. 583–94; [8] Wieand H., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 5, p. 1103–11; [9] Kallenberg W., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 1, p. 170–82; [10] Groenboom P., Oosterhoff J., «Int. Statist. Rev.», 1981, v. 49, № 2, p. 127–41.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QIYMƏTLƏRİN Bahadurа görə «асимптотическая эффективность оценок по Бахадуру; Bahadur asymptotic efficiency of estimators» – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *asimptotik effektivlik* anlayışlarından biri olub, R. Bahadur tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur. Bu anlayışın tərfi mərkəzi parametrin əsl qiyməti ilə üst-üstə düşən, qeyd olunmuş uzunluqlu intervalda statistik qiymətin toplanma dərəcəsinin köməyiylə asimptotik effektivliyin ölçülməsi ideyasına əsaslanır. Bahadur asimptotik effektivliyinin ölçüsünü hesablamaq üçün statistik qiymətin böyük yayınmaları ehtimallarının kobud asimptotikasının təyin olunması zəruridir. Müəyyən rəqulyarlıq şərtlə maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri Bahadur asimptotik effektiv statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] Bahadur R., «Sankhya», 1960, v. 22, № 3–4, p. 229–52; [2] Меттерер Л., Введение в асимптотическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QIYMƏTLƏRİN Raoya görə «асимптотическая эффективность оценок по Рао; Rao asymptotic efficiency of estimators», statistik qiymətlərin Rao A. e. – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *asimptotik effektivliyin* təriflərindən biri olub, 20-ci əsrin 60-cı illərinin əvvəllərində S. R. Rao tərəfindən verilmişdir. Qiymətləndirilən parametr haqqında statistik qiymətdə olan Fişer informasiyası bütün seçimdə olan Fişer informasiyası ilə asimptotik olaraq üst-üstə düşərsə, belə statistik qiymət Rao asimptotik effektiv statistik qiyməti adlanır. Müəyyən rəqulyarlıq şərtləri ödənilməli hallarda maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri və Bayes statistik qiymətləri bu tərif anlamında asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir.

Əd.: [1] Rao C. R., «J. Roy. Statist. Soc.», 1962, v. B 24, № 1, p. 46–72; [2] Rao C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QIYMƏTLƏRİN Volfovitşə görə «асимптотическая эффективность оценок по Вольфовицу; Wolfowitz asymptotic efficiency of estimators» – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində statistik qiymətlər üçün *asimptotik effektivlik* anlayışlarından biri olub, C. Volfovitşə [1] məxsusdur. Volfovitşə görə asimptotik effektivliyi təyin etmək üçün paylanmaları ola bilər ki, normal paylanmadan fərqli ola bilən limit paylanmasına müntəzəm yığılan statistik qiymətlər sinfi seçilir. $\{\theta_n\}$ – birölçülü θ parametri üçün statistik qiymətlər ardıcılığı olarsa və $b > 0$ şərtini ödəyən ixtiyari b -lər üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ \theta_n \in (\theta - bn^{-1/2}, \theta + bn^{-1/2}) \}$$

kəmiyyəti qeyd olunmuş sinifdən olan statistik qiymətlərlə müqayisədə ən böyük qiymət alarsa, $\{\theta_n\}$ – Volfovitşə asimptotik effektiv statistik qiymətlər ardıcılığı adlanır. Geniş rəqulyarlıq şərtləri daxilində maksimal doğruxaoxşarlıq və Bayes statistik qiymətləri verilən tərif anlamında Volfovitşə asimptotik effektiv statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] W o l f o w i t z J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 2, с. 267–81; [2] W e i s s L., W o l f o w i t z J., Maximum probability estimators and related topics, [B. – N. Y.], 1974; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

ASİMPTOTİK ƏHƏMİYYƏTSİZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIĞI « последовательность асимптотически пренебрегаемых случайных величин; sequence of asymptotic neglectability random variables » – $X_{k,n}$ ($k=1, n; n=1, 2, \dots$) təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal ardıcılığına deyilir ki, $X_{k,n}$ kəmiyyətləri k -ya ($k=1, 2, \dots, n$) görə müntəzəm olaraq ehtimala görə sıfıra yığılsın, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $k=1, 2, \dots, n$ qiymətlərində

$$P\{|X_{k,n}| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

bərabərsizlikləri ödənilsin.

Sıfıral seriyalar sxeminə (*Asimptotik əhəmiyyətsiz komponentləri seriyalar sxeminə*) hər bir $X_{k,n}$ ($k=1, n$) kəmiyyəti S_n cəminin komponenti olub, asimptotik əhəmiyyətsizdir (bax, *Seriyalar sxemi, Üçbucaq sxemi*).

ASİMPTOTİK ƏHƏMİYYƏTSİZLİK « асимптотическая пренебрегаемость; asymptotic neglectability » – bax, *Asimptotik əhəmiyyətsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı*.

ASİMPTOTİK ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « асимптотически наиболее мощный критерий; asymptotically most powerful test » verilən sinifdə – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində *statistik kriterilər* ardıcılığıdır və bu kriteri verilmiş sinifdən olan bütün kriterilər ardıcılığından (alternativ hipotezin qeyd olunması şərtlə) ən böyük asimptotik gücə malik olan kriteridir. X_n , – $\theta \in \Theta$ naməlum parametrdən asılı paylanmaya malik n həcmli təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı ilkin $H_0: \theta \in \Theta_0$ hipotezi yoxlanılır. Əgər kriterilər ardıcılıqlarının K sinfindən ixtiyari $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcılığı üçün ($\{\varphi_n\} \in K$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_{n, \theta_1}(\varphi_n - \psi_n) \leq 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\psi_n\} \in K$ kriterilər ardıcılığı K sinfində $\theta_1 \in \Theta_1$ nöqtəsində asimptotik ən güclü kriteri adlanır.

K sinfi kimi asimptotik mühümlük ölçüsü α -ya bərabər olan və

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} M_{n, \theta} \varphi_n \leq \alpha$$

şərtini ödəyən kriterilər ardıcılıqlarının sinfini və ya mühümlük ölçüsü α -ya bərabər *asimptotik meylsiz kriterilər* ardıcılıqları sinfini götürmək olar. Sadə ilkin hipotez irəli sürüldüyü halda A. ə. g. k. həmişə vardır. Kifayətdir ki, n -in hər bir qiymətində

ψ_n kriterisi kimi mühümlük ölçüsü α -ya bərabər olan Neyman – Pirson kriterisi götürülsün. Əgər qurulmuş $\{\psi_n\} \in K$ kriterilər ardıcılığı eyni zamanda bütün $\theta_1 \in \Theta_1$ qiymətlərində A. ə. g. k. olarsa, onda bu kriterilər ardıcılığı *asimptotik müntəzəm ən güclü kriteri* adlanır.

ASİMPTOTİK ƏN GÜCLÜ MEYLSİZ KRİTERİ « асимптотически наиболее мощный несмещенный критерий; asymptotically most powerful unbiased test » – asimptotik meylsiz kriterilər sinfində asimptotik ən güclü kriteridir.

ASİMPTOTİK QIYMƏTLƏNDİRMƏ NƏZƏRİYYƏSİ « асимптотическая теория оценивания; asymptotic estimation theory » – *statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*-nin bölməsidir, bu bölmədə statistik qiymətlərin asimptotik xassələri seçim həcmnin qeyri – məhdud artırılması, küy həddinin azaldılması və s. kimi şərtlər ilə araşdırılır.

1. A. q. n.-nin ən çox inkişaf etdiyi məsələlərdə n həcmli

$$X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n) \quad (1)$$

seçimləri üzrə naməlum ümumi paylanmanın bu və ya digər xarakteristikaları seçim həcmi qeyri – məhdud artırılmaqla qiymətləndirilir. Ümumi nöqtəyi – nəzərdən bu halda A. q. n.-nin nəticələri limit teoremləri ($n \rightarrow \infty$) kimi ifadə olunur. Buna görə də, təbii olaraq, A. q. n. məsələlərinin araşdırılmasında ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremləri (*böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi*), daha mürekkəb hallarda isə təsadüfi proseslər üçün limit teoremləri mühüm rol oynayır.

(1) seçimi üzrə $\mathcal{P}$ ümumi paylanmasının bu və ya digər xarakteristikası $T = T(\mathcal{P})$ -nin statistik qiymətləri məhz (1) müşahidələrinin funksiyaları – $T_n(X_1, \dots, X_n)$ funksiyalarıdır; odur ki, A. q. n., demək olar ki, əsasən $T_n(X_1, \dots, X_n)$ statistikalarını $n \rightarrow \infty$ olduqda araşdırılan limit nəzəriyyəsidir. Təbii ki, bu sahədə əsas istiqamət $T_n - T$ fərqlərinin asimptotikasının araşdırılmasıdır.

M i s a l 1. (1) müşahidələrinə əsasən $\alpha_v = \alpha_v(\mathcal{P}) = M X_1^v$ momentləri qiymətləndirilməlidir. Böyük ədədlər qanununa görə

$$\alpha_v = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^v$$

(daha dəqiq, $P_{\mathcal{P}}\{|\alpha_v(\mathcal{P}) - \alpha_v| > \delta\} \rightarrow 0$), $\sqrt{n}(\alpha_v^2 - \alpha_v^2)^{-1/2}(\alpha_v - \alpha_v)$ normalanmış fərqlərinin paylanmaları isə mərkəzi limit teoreminə əsasən standart normal paylanmaya yığılır.

M i s a l 2. Paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x)$ olan (1) seçimi üzrə p -ci kvantil ζ_p qiymətləndirilir. ζ_p -nin statistik qiyməti kimi z_p seçimi kvantili götürmək olar. Bu halda $\sqrt{n}f(\zeta_p) \times (p(1-p))^{-1/2}(z_p - \zeta_p)$ normalanmış fərqlərinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

M i s a l 3. $F(x) = P\{X_1 < x\}$ – kəsilməz funksiya, $F_n(x)$ isə (1) seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun. Onda $F_n(\cdot)$ funksiyaları $C(-\infty, \infty)$ -da $F(\cdot)$ funksiyasına vahid ehtimalla yığılır. $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ normalanmış fərqlərinin paylanması isə $C(-\infty, \infty)$ -da asılı olmayan artımlı normal

$w(x)$ təsadüfi prosesinin paylanması yığılır və $\mathbf{M} |w(x)|^2 = F(x)(1-F(x))$.

2. A. q. n. məsələsinin ilk qoyuluşunu aşağıdakı ümumi sxemlə ifadə etmək olar. $X^{(n)}$ seçimi əvəzinə abstrakt ε parametridən asılı olan X_ε müşahidələrinin hər hansı çoxluğuna baxılır. X_ε təsadüfi kəmiyyəti $\{\mathcal{X}_\varepsilon, \mathcal{Y}_\varepsilon\}$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır və X_ε -nin ehtimal paylanması $\mathcal{P}_\varepsilon^\theta$, $\{\mathcal{P}_\varepsilon^\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsindədir, Θ isə verilmiş parametrik çoxluqdur.

Naməlum θ parametrini və ya Φ funksiyasının θ nöqtəsindəki $\Phi(\theta)$ qiymətini X_ε müşahidəsinə görə qiymətləndirmək tələb olunur. $T_\varepsilon(X_\varepsilon)$ statistikalan statistik qiymət kimi götürülür. Asimptotik qiymətləndirilmə məsələləri T_ε statistik qiymətlərinin ε -nin dəyişməsi ilə limit yaxınlaşmalarını müəyyən etdikdə qarşıya çıxır. Müəyyənlik üçün bu halda fərz olunur ki, $\varepsilon > 0$ və $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda T_ε statistikasının asimptotik yaxınlaşmasına baxılır, ümumiyyətlə, hesab etmək olar ki, ε elementlərinin $\{\varepsilon\}$ çoxluğunda filtr verilmişdir və limit bu filtrə görə baxılır. Adətən (lakin bu o qədər də önəmli deyildir), A. q. n. məsələlərində $\mathcal{P}_u^\varepsilon$ və $\mathcal{P}_v^\varepsilon$ ölçüləri u və v parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda, limitdə singulyardır.

M i s a l 4. 1 – 3 misallarnın şərtlərlə $X_\varepsilon = X^n$, $\varepsilon = n^{-1}$ götürmək olar.

M i s a l 5. X_ε , k – ölçülü

$$X_\varepsilon = \theta + \varepsilon \xi \quad (2)$$

Qauss vektoru olsun, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ naməlum parametr, ξ isə k – ölçülü standart Gauss vektorudur. Asimptotik məsələlər maneələr (əngəllər) intensivliyi $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda yaranır. Bu məsələnin sonsuzölçülü variantı, təbii olaraq, aşağıdakı kimi qoyulur: $X_\varepsilon = X_\varepsilon(t)$ müşahidəsi

$$dX_\varepsilon(t) = S(t)dt + \varepsilon dw(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

münasibətilə verilən təsadüfi prosesdir, S – naməlum funksional parametrdir, $S \in \Sigma \subset L_2(0, 1)$, w isə Viner prosesidir.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin tətbiqi məsələləri, bir qayda olaraq, qeyri – asimptotik xarakter daşıyır. Belə məsələlər baxımından A. q. n., «dəqiq» həllər olduqca mürəkkəb olduğu hallarda, yaxşı yaxınlaşmalar alınmasına xidmət edir. Lakin A. q. n. eyni zamanda qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin dərk olunmasında da böyük əhəmiyyət kəsb edir. Ehtimal nəzəriyyəsində olduğu kimi statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin bir çox qanunauyğunluqları asimptotik xarakter daşıyır və bu qanunauyğunluqlar tam mənası ilə A. q. n.-nin yalnız limit teoremlərində təzahür olunur.

3. Məlum Φ funksiyasının naməlum θ nöqtəsində (xüsusi halda θ -ni qiymətləndirmək üçün) $\Phi(\theta)$ qiymətini qiymətləndirmək üçün paylanmaları $\{\mathcal{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$ olan X_ε müşahidələrindən istifadə olunduğu fərz olunur. A. q. n.-nin məsələsi $\Phi(\theta)$ üçün elə T_ε statistik qiymətlərinin qurulması qaydalarını göstərməkdir ki, bu statistik qiymətlər $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda, bu və ya digər mənada, $\Phi(\theta)$ ilə qeyri – məhdud sürətdə yaxınlaşsın (tutarlı

statistik qiymətlər). Müəyyənlik üçün aşağıda T_ε statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymət olması T_ε -nin $\Phi(\theta)$ -ya $\mathcal{P}_\theta^\varepsilon$ ehtimalına görə yığılması kimi anlaşılar.

M i s a l 6. Müşahidələrin (1) şəklində olduğu fərz olunur. 1 – 3 misallarnada d_ε , ξ_ε , F xarakteristikaları üçün alınan statistik qiymətlər tutarlı statistik qiymətlər olur. Misal 3-ün nəticələrindən tutarlı statistik qiymətlərin qurulması üçün ümumi bir metod alınır. Əgər F , $-X_j$ müşahidəsinin naməlum paylanma funksiyasıdırsa və $g(F)$ -i qiymətləndirmək tələb olunursa, onda geniş fərziyyələrlə $g(F_n)$ statistikaları tutarlı statistik qiymətlər olacaqdır.

M i s a l 7. Misal 5-in şərtlərlə X_ε , θ üçün tutarlı statistik

qiymətdir, $X_\varepsilon(t)$ isə $\int_0^t S(u)du$ üçün tutarlı statistik qiymətdir.

M i s a l 8. X_T müşahidəsi – orta qiyməti naməlum m olan $X(t)$, $0 \leq t \leq T$ erqodik stasionar prosesinin realizasiyasının bir

parçası olsun. Onda $X_T = T^{-1} \int_0^T X(t)dt$, m üçün tutarlı

statistik qiymətdir, $T \rightarrow \infty$: $T^{-1} \int_0^{T-\tau} (X(t+\tau) - \bar{X}_T)(X(t) - \bar{X}_T)dt$ isə $R(\tau)$, $\tau > 0$ korrelyasiya funksiyası üçün tutarlı statistik qiymətdir.

A. q. n.-nin tutarlı statistik qiymətlər axtarılması üçün ümumi metodları – *momentlər metodu*, *ən kiçik kvadratlar metodu*, *Beyes statistik qiymətləri* və *ən geniş yayılmış metod – maksimal doğruxaoxşarlıq metodu* kimi metodlardır. Sonuncu metod ümumi şəkildə belə şərh olunur: əgər bütün $\mathcal{P}_\theta^\varepsilon$ ölçüləri ümumi v_ε ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olarsa, maksimal doğruxaoxşarlıq metoduna əsaslanaraq, θ üçün statistik qiymət kimi maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti –

$$\mathcal{P}_\varepsilon(u) = \frac{d\mathcal{P}_u^\varepsilon}{dv_\varepsilon}(X_\varepsilon), \quad u \in \Theta$$

təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsi $\hat{\theta}_\varepsilon$ qəbul edilir. Əgər

$\Theta \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə $\hat{\theta}_\varepsilon$, θ üçün tutarlı statistik qiymətdir.

M i s a l 9. $X^T = (X_1, \dots, X_T)$ müşahidələrində X_j kəmiyyətlərinin 1-ci tərtib $X_j = \theta X_{j-1} + \xi_j$ avtoregressiya prosesi

təşkil etdiyi fərz olunur, burada ξ_j , $-(0, \sigma^2)$ parametrləri normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\theta \in (-1, 1)$ – naməlum parametrdir. Maksimal doğruxaoxşarlıq

metodu ilə alınmış $\hat{\theta}_T$ statistik qiyməti, $T \rightarrow \infty$ olduqda, birinci yaxınlaşmada

$$\sum_{j=2}^T X_j X_{j-1} / \sum_{j=1}^T X_j^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \theta$$

münasibətilə ifadə olunur.

M i s a l 10. Təbii olaraq, (2) ifadəsindəki X_ε kəmiyyəti θ üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətidir və $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduqda $X_\varepsilon \rightarrow \theta$. (3) münasibətində $S = S(t; \theta)$ olsun, θ namelum parametrdir və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Bu halda maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti

$$\frac{d}{d\theta} \left[\int_0^1 S(t; \theta) dX_\varepsilon(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 S^2(t; \theta) dt \right] = 0$$

maksimal doğruxaoxşarlıq tənliyindən təyin olunur və əgər, məs., $S(t; \theta) = \theta S(t)$, $\theta \in \mathbb{R}$ olarsa, onda

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \left[\int_0^1 S^2(t) dt \right]^{-1} \int_0^1 S(t) dX_\varepsilon(t) = \theta + o(1).$$

Aydın ki, T -nin statistik qiyməti kimi T_ε statistikasının tutarlı statistik qiymət olması T -nin T_ε ilə evez olunmasından yaranan xətlərin böyük və ya kiçikliyi haqqında təsəvvür yaratır. Buna görə də, A. q. n.-nin mühüm məsələsi $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon \{ |T - T_\varepsilon| > \delta \}$ ehtimallının azalma sürətinin qiymətləndirilməsidir. Bu məsələnin həllinin təbii yolu $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon |T - T_\varepsilon|^a$, $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon \exp \{ b |T - T_\varepsilon|^a \}$ momentlərinin asimptotik araşdırılmasıdır və sonra isə Çebışev bərabərsizliyindən istifadə olunmalıdır.

M i s a l 11. (1) seçimindəki X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin $1 - \theta$ və θ ehtimalları ilə uyğun olaraq 0 və 1 qiymətlərini aldığı fərz olunur.

$$\hat{\theta}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$$

– maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti tutarlı statistik qiymətdir və $\mathbf{M}_\theta \hat{\theta}_n = \theta$ və $\mathbf{D}_\theta \hat{\theta}_n = n^{-1} \theta (1 - \theta) \leq (4n)^{-1}$; Bernşteyn bərabərsizliyinə əsasən, hətta $\mathbf{P}_\theta \{ |\hat{\theta}_n - \theta| > \delta \} \leq 2 \exp \{ -2n\delta^2 \}$.

1 – 10 misalları da müqayisə etmək olar.

4. T kəmiyyəti üçün müəyyən edilən T_ε statistik qiymətlərinin tutarlı statistik qiymətlər olduğu təyin edildikdən sonra, $T_\varepsilon - T$ fərqlərinin paylanması asimptotik xassələrinin öyrənilməsi T_ε statistik qiymətlərinin asimptotikasının öyrənilməsi üçün növbəti addımdır. $a(\varepsilon)(T_\varepsilon - T)$ normalanmış fərqlərinin paylanmalarının yığılması asimptotik etibarlı intervallar və asimptotik kriterilərin qurulması üçün istifadə oluna bilər.

$a(\varepsilon)(T_\varepsilon - T)$ fərqi üçün limit paylanmasının varlığı T_ε statistik qiymətlərinin tutarlı statistik qiymətlər olmasından daha güclü nəticədir və belə nəticələrin isbatı olduqca mürəkkəbdir. Bu halda X_ε müşahidəsilə bağlı $\{\mathcal{X}^\varepsilon, \mathcal{A}^\varepsilon, \mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$ statistik eksperimentinin xüsusi bir strukturundan istifadə olunur (müşahidələrin asılı olmamazlığı, Markov xassəlik, stasionarlıq və s.). Daha sonra, müəyyənlik üçün (1) müşahidələrinin ən mühüm halına baxılır. Bir sıra məsələlər üçün klassik

limit teoremlərindən (misal 1), qaydalı statistikalar üçün limit teoremlərindən (misal 2), invariantlıq prinsipindən (misal 3) istifadə edərək, $T - T_\varepsilon$ fərqlərinin limit paylanmalarını almaq olur.

1 – 3 misallarının nəticələrinə əsaslanaraq, $\Phi(a_\nu, a_\mu, \dots)$, $\Phi(z_p, z_q, \dots)$, $\Phi(F_n)$ şəklində statistikaların limit paylanmalarını göstərmək olar və buna görə $a_\nu - a_\nu, \dots, z_p - z_p$ fərqlərinin qüvvət üstlərinə görə Teylor ayrılışını yazaraq, xətti hədlərlə kifayətlənmək yetərlidir.

Ümumi halda, $T_\varepsilon(X_\varepsilon)$ statistik qiyməti müşahidənin mürəkkəb funksiyasıdır və $T_\varepsilon - T$ fərqlərinin paylanmasının öyrənilməsi limit teoremlərinin yeni sinfinin alınması ilə nəticələnir. Maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri mühüm sinif təşkil edir. Müşahidələrin (1) şəklində verildiyi, bütün X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı $\{\mathcal{X}, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasından qiymətlər aldığı və bu fəzada hər hansı μ ölçüsünə görə $f(x; \theta)$ paylanma sıxlıq funksiyasına malik olduğu fərz olunur. θ namelum parametrdir və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Fərz olunur ki, $\{f(x; \theta)\}$ sıxlıqlar ailəsi müəyyən rəqulyarlıq şərtlərini ödəyir və bu şərtlər $\{f(\cdot; \theta)\}$ ailəsinin hamarlılığı ilə təyin olunur və mahiyyətə bu

şərtlər $I(\theta) = \left\| \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{d\mu}{f} \right\|$ Fişer informasiyasının var-

lığı tələbinə gətirilir. Bu şərtlər daxilində $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ statistikasının limit paylanması orta qiyməti sıfır bərabər, korrelyasion matrisi $I^{-1}(\theta)$ olan normal paylanmadır və

$$\mathbf{M}_\theta \left[\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \right]_n^p \rightarrow \mathbf{M} \left[\xi \right]^p,$$

$$\xi \in N(\theta, I^{-1}(\theta)), \quad p > 0.$$

Nəticənin belə alınmasını aşağıdakı mülahizələr sübut edir. Maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti

$$l_n(u) = \sum_{j=1}^n \ln f(X_j; u)$$

təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsidir və deməli, bu funksiyanın stasionar nöqtəsidir. Buna görə də,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = I^{-1}(\theta) n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\theta} \ln f(X_j; \theta) + o(1)$$

olduğu alınır.

M i s a l 12. $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ qiymətləndirilən və θ yerindəyişmə parametri olsun, yəni $f(x; \theta) = f(x - \theta)$. Əgər

$$I(\theta) = I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f'(x) \right]^2 f^{-1}(x) dx$$

integralı sonludursa, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqi asimptotik normaldır, $(0, I^{-1})$ bu fərqi asimptotik normal paylanmasının parametrləridir. Əgər I integralı yığılmırsa, onda $\hat{\theta}_n - \theta$ fərqi limit paylanması, ümumiyyətlə, normal paylanmadan fərqlidir, normalayıcı

46 ASIMPTOTİK

vuruğun tərtibi isə $\sqrt{n}$ -dən fərqlidir. Məs., $f(x) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \times x^{\alpha-1} e^{-x}$, $x > 0$ olsun. Onda $\alpha > 2$ olduqda $I < \infty$ və normalanmış $n^{1/\alpha}(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqi $(0, I^{-1})$ parametrləri asimptotik normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. $1 \leq \alpha < 2$ olduqda isə normalanmış $n^{1/\alpha}(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqi normal paylanmadan fərqli xüsusi limit paylanmasına malikdir.

M i s a l 13. X_j – parametri namelum λ olan Puasson paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət olsun, qiymətləndiriləcək θ parametri isə $\theta = \lambda^{-1}$ şərtlə təyin olunur. Bu halda maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{\theta}_n = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j \right)^{-1}$ düsturu

ile ifadə olunur və $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqi $(0, \theta^3)$ parametrləri asimptotik normal paylanmaya malikdir, lakin $\hat{\theta}_n$ -in dispersiyası sonsuzdur.

$f(x; \theta)$ sıxlıq funksiyası üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyaraq və $f(\cdot, \theta)$ funksiyasının olduqca hamar olmasını tələb edərək, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqlərinin limit paylanmaları üçün alınan nəticələri daha da güclü etmək mümkündür: $M_\theta I(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta))$ risk funksiyası üçün asimptotik ayrılış yazmaq və böyük yayınmalar ehtimallarının asimptotikasını göstərmək yeterlidir.

5. Qiymətləndirilmə məsələlərində asimptotik qoyuluşa keçid mürekkəb olan limiteqəder paylanmaların bunlarla müqayisədə sadə universal limit paylanmaları ilə yalnız əvəz etməyə deyil, hətta asimptotik mənada, ağılabatan surətdə optimal statistik qiymətləri təyin etməyə imkan verir. Məs., θ parametrinin ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$) statistik qiyməti T_ε -nin keyfiyyətinin $M_\theta^s I_\varepsilon(T_\varepsilon; \theta)$ risk funksiyası ilə ölçüldüyü fərz olunur. T_ε asimptotik optimal statistik qiymətlərini, təbii olaraq, $M_\theta^s I_\varepsilon(T_\varepsilon; \theta)$ risk funksiyasını θ -ya görə müntəzəm asimptotik minimal olaraq statistik qiymətlər kimi təyin etmək istədikdə, *ən yüksək effektiv statistik qiymətlərin* varlığı problemi qarşıya çıxır (ixtiyari T_ε statistik qiymətini bir neçə ayrı-ayrı θ nöqtələrində kifayət dərəcədə yaxşılaşdırmaq mümkündür). Bu halda itki funksiyası I_ε -nin ε -dan asılılığı qaçılmazdır və odur ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda T_ε -nin θ -ya yaxınlaşdığı hökmən nəzərə alınmalıdır. Sadəlik üçün fərz olunur ki, $I_\varepsilon(T_\varepsilon; \theta) = I(\varphi(\varepsilon)|T_\varepsilon - \theta|)$, burada $\varphi(\varepsilon)$ – normalayıcı vuruqdur. Əgər

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf_{T_\varepsilon} \sup_{|u - \theta| < \delta} M_u^s I(\varphi(\varepsilon)(T_\varepsilon - u)) - \sup_{|u - \theta| \leq \delta} M_u^s I(\varphi(\varepsilon)(\tilde{\theta}_\varepsilon - u)) \right] = 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\tilde{\theta}_\varepsilon$, θ nöqtəsində *asimptotik effektiv (asimptotik optimal) statistik qiymət* adlanır. Bu tərifin məzəzi ondan ibarətdir ki, optimal statistik qiymətin müntəzəm asimptotik ən yaxşı statistik qiymət olmasını deyil, yalnız lokal asimptotik minimaks statistik qiymət olmasını tələb edir. Optimallığın bu tərfi geniş bir sinfi əhatə edən

hallar üçün asimptotik effektiv statistik qiymətlərin varlığını isbat etməyə və onların konstruksiyasını göstərməyə imkan yaradır.

Requlyar halda statistik qiymətlərin asimptotik effektivliyi araşdırıldıqda lokal asimptotik normallıq şərti və bu şərtə əsaslanan aşağıdan dəqiqlik sərhədlərini təyin etməyə xidmət edən Qask – Le Kam bərabərsizlikləri mühüm rol oynayır. $T_\varepsilon - T$ fərqləri üçün limit teoremlərinə (bax, b. 4) əsasən bu halda asimptotik effektiv statistik qiymətləri təyin etmək olur.

Məs., müşahidələrin (1) şəklində olduğu, b. 4-ün requlyarlıq şərtlərinin ödənilməsi fərz olunur (Fişer informasiya matrisinin varlığı fərz olunur). Onda θ parametrinin ixtyari T_n statistik qiymətləri və $I \geq 0$ şərtini ödəyən itki funksiyalarının geniş bir sinfi üçün

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - u| < \delta} M_n I(\sqrt{n}(T_n - u)) \geq M I(\xi)$$

münasibəti ödənilir, burada ξ – təsadüfi vektordur və $\xi \in N(0, I^{-1}(\theta))$; digər tərəfdən (bax, b. 4), $\hat{\theta}_{nn}$ maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri üçün $\lim_n M I(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{nn} - \theta)) =$

$= M I(\xi)$ bərabərliyi ödənilir və maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir və bu bütün itki funksiyaları üçün doğru olur. Bu halda Bayes statistik qiymətləri də asimptotik effektiv olur. Beləliklə, requlyarlıq şərtlərində belə bir mühüm fakt doğrudur: asimptotik baxımdan itki funksiyalarının seçilməsində ixtiyariilik arzuolunmaz hallara səbəb olmur.

Requlyarlıq şərtinin pozulması vəziyyəti kəskin surətdə dəyişir. Maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik effektiv olmur. Asimptotik effektiv statistik qiymətlər sinfi seçilmiş itki funksiyasından olduqca asılı olur. X_j təsadüfi kəmiyyətinin $[0, \infty)$ -da eksponensial paylanmaya malik olduğu sadə bir halda (misal 12, $d = 0$) $\theta_n^* = \min X_j + \lambda/n$ statistik qiyməti λ nöqtəsində I -ə görə asimptotik effektiv statistik qiymətdir; λ , –

$$\int_0^1 I(s+u) e^{-u} du \text{ funksiyasının minimum nöqtəsidir.}$$

Requlyar məsələlər halında, yuxarıda qeyd olunduğu kimi bir çox statistik qiymətlər (Bayes, maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri) asimptotik effektiv statistik qiymətlər olur, yəni $M_\theta I(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta))$ risk funksiyasının asimptotik ifadələrində birinci hədd eyni olur. Requlyarlıq şərtlərini daha da gücləndirdikdə risk funksiyasının sonrakı hədlərini müqayisə etmək olar (2-ci tərtib asimptotik effektivlik).

6. Elə səbəblər vardır ki, bunlara görə bir sıra hallarda əvvəlki bənddə qeyd olunmuş asimptotik effektiv statistik qiymətlərə digərlərlə müqayisədə üstünlük verilir. Ola bilər ki, bu asimptotik effektiv statistik qiymətlər qiymətləndirilən parametrlər daha ətrafda yaxınlaşır, lakin bunlar digər üstünlüklərə malikdirlər: hesablamaların sadəliyi, universalıq, modelin dəyişkənliklərinə görə dayanıqlılıq kimi.

M i s a l 14. (1) müşahidələri üzrə yerindəyişmə parametri, yəni $P_\theta \{X_1 - x\} = F(x - \theta)$ qiymətləndirilir. Əgər F – normal paylanmadırsa, onda $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$ statistikası asimptotik

effektiv statistikadır; əgər F – Koşi paylanmasıdır, onda $\bar{X}$ hətta tutarlı statistika belə olmayacaqdır. Hər iki halda $z^{1/2}$ medianı tutarlıdır və $\sqrt{n}(z^{1/2} - \theta)$ fərqi asimptotik normaldır. Lakin F -in normal paylanma olduğu hallarda $M_\theta \left[\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \right]^2 = 1$, $M_\theta \left[\sqrt{n}(z^{1/2} - \theta) \right]^2 = \pi(1 + o(1))/2$ olur (misal 2).

Misal 14-də olduğundan daha ümumi, simmetrik paylanmanın mərkəzinin qiymətləndirildiyi halda, kəskin orta qiymətdən (böyük və kiçik müşahidələrin müəyyən hissələri atılır), qaydalı statistikalardan xətti kombinasiyalarından, M – statistik qiymətlərdən istifadə olunur. Bütün bu statistik qiymətlər, məs., T_n -lər ehtimal ki, fərqlər geniş fərziyyələrlə asimptotik normal olur.

7. Klassik A. q. n.-ndə fərz olunur ki, seçim həcmi n -in artmasına baxmayaraq Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsü məhduddur. Əslində isə, məs., $M_\theta \left[\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \right]^2$ dim. – ölçüdə

xətti asılı olur və buna görə də, maksimal doğruxaşarlıq metodundan istifadə etdikdə əgər dim. – ölçü k böyük olarsa, ciddi çətinliklər yaranır. Beləliklə də, seçimin həcmi n ilə birlikdə k dim. – ölçüsü üçün $k = k(n) \rightarrow \infty$ münasibəti ödənilərsə,

məs., $k(n)/n \rightarrow 0$ və ya $k(n)/n \approx 1$ olarsa, onda A. q. n.-nin yeni məsələləri yaranır.

Ola biler ki, Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsü sonsuzdur. Bu halda qiymətləndirmə məsələləri, mahiyyət etibarilə, qeyri – parametrik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinə aid olur. θ üçün tutarlı statistik qiymətlərin təyin olunmasında geniş yayılmış metodlardan biri aşağıdakı kimidir. Θ çoxluğu Θ_ε çoxluğu ilə approksimasiya olunur, belə ki, approksimasiya qaydası $I: \Theta \rightarrow \Theta_\varepsilon$ ilə seçilir ki, $\text{diam } I^{-1}(\theta_\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon) \downarrow 0$ münasibəti ödənilsin və approksiməedici çoxluq isə ehtimal ki, onun elementlərinin statistik qiymətləndirilməsi üçün mümkün olduqca sadə həll olsun. Θ_ε -dan olan elementin statistik qiyməti ilkin θ parametrinin statistik qiyməti kimi götürülür. Beləliklə, iki asimptotik məsələ: approksimasiya nəzəriyyəsi və əsl qiymətləndirmə nəzəriyyəsi məsələlərini həll etmək tələb olunur.

Misal 15. (1) müşahidələri üzrə $\mathbb{R}$ -də verilmiş X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasının məlum sıxlıq funksiyası $f(x)$ -i qiymətləndirmək tələb olunur; $f \in \Sigma$, Σ isə paylanma sıxlıqlarının verilmiş sinfidir. Approksiməedici Σ çoxluğu kimi

$a \int_{-\infty}^{\infty} H(b(x-y))f(y)dy$ tipli funksiyalar çoxluğu seçilir; $a = a(n)$, $b = b(n)$, H – münasib surətdə seçilmiş nüvədir.

Onda Σ_n -dən olan elementlər $a \int_{-\infty}^{\infty} H(b(x-y))dF_n(y)$ (nüvə statistik qiyməti) vasitəsilə qiymətləndirilir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Кендалл М., Стюарт А., Многомерный

статистический анализ в временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [5] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [6] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] Grenander U., Abstract inference, N. Y. – [a. o.], 1981; [8] Le Cam L., Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory, N. Y. – [a. o.], 1986; [9] Lehmann E. L., Theory of Point Estimation, N. Y. – [a. o.], 1983.

ASİMPTOTİK MEYLSİZ KRİTERİ «асимптотически несмещенный критерий; asymptotically unbiased test» – gücləri mühümlük ölçüsündən asimptotik olaraq kiçik olmayan statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində statistik kriterilər ardıcılığıdır. X_n , – $\theta \in \Theta$ naməlum parametridən asılı paylanmaya malik n həcmli seçim olsun. X_n seçimi üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ alternativinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur və müxtəlif n qiymətlərində bu hipotezlərin yoxlanılması məsələləri ardıcılığına baxılır.

Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} [\sup_{\theta \in \Theta_0} M_{n,\theta} \psi_n - \inf_{\theta \in \Theta_1} M_{n,\theta} \psi_n] \leq 0$$

münasibəti doğru olarsa, $\{\psi_n\}$ kriterilər ardıcılığı asimptotik meylsiz kriteri adlanır. A. m. k. anlayışı meylsizlik xassəli statistik prosedurun asimptotik analoqudur.

Əd.: [1] Русаев Д. Ж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ASİMPTOTİK MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT

«асимптотически несмещенная оценка; asymptotically unbiased estimator» – «асимптотик meylsiz statistik qiymətlər ardıcılığı» termininin qısaldılmış variantıdır; məlum parametridən əsl statistik qiymətləri ardıcılığı üçün tətbiq olunur ki, bu ardıcılığa meyllərin sıfır yaxınlaşan ardıcılığı uyğundur. $\{T_n\}$, – $\theta \in \Theta$ parametridən statistik qiymətləri ardıcılığı və $b_n(\theta) = M_\theta T_n - \theta$, $n = 1, 2, \dots$, – T_n statistik qiymətinin meylli olsun. Əgər ixtiyari $\theta \in \Theta$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $b_n(\theta) \rightarrow 0$ münasibəti ödənilərsə, onda $\{T_n\}$, – θ parametridən asimptotik meylsiz statistik qiymətlər ardıcılığı adlanır. θ parametridən meylsiz statistik qiymətlərinin ixtiyari ardıcılığı bu tərif ödəyir.

Misal. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri $a = M X_i$, $\sigma^2 = D X_i$ parametrləri normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan seçim olsun. Onda

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_n)^2, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

düsturları ilə təyin olunan $\{s_n^2\}$ ardıcılığı σ^2 parametridən A. m. s. q. ardıcılığıdır, belə ki, ixtiyari σ^2 üçün X seçiminin həcmi n -i qeyri – məhdud böyük götürdükdə

$$b_n(\sigma^2) = M s_n^2 - \sigma^2 = -\sigma^2/n \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilir.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки их применения, М., 1989.

ASİMPTOTİK MƏQBULLUQ(ğ u) statistik kriterinin « асимптотическая допустимость статистического критерия; asymptotic admissibility of statistical test » – bax, Məqbulluq(ğ u) statistik kriterinin.

ASİMPTOTİK MİNİMAKS KRİTERİ « асимптотически минимаксный критерий; asymptotically minimax test » – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində statistik kriterilər ardıcılığıdır, minimaks kriterilər ardıcılığına asimptotik ekvivalentdir. X_n , – $\theta \in \Theta$ naməlum parametrindən asılı paylanmaya malik n həcmli müşahidə olunan təsadüfi seçim olsun. Müxtəlif n -lər üçün irəli sürülən hipotezləri yoxlama məsələləri ardıcılığına baxılır: X_n seçimi üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır (bu hipotezlər, ümumiyyətlə, n -in artması ilə dəyişə bilər). $\varphi_n(X_n)$, – X_n seçimi üzrə qurulmuş α_n həddli minimaks kriteri olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $\alpha_n \rightarrow \alpha$ və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_1} |M_{n,\theta} \psi_n(X_n) - M_{n,\theta} \varphi_n(X_n)| = 0 \quad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\psi_n(X_n)\}$ kriterilər ardıcılığı asimptotik minimaks kriteri təşkil edir, deyilir. (*) şərti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \inf_{\theta \in \Theta_1} M_{n,\theta} \psi_n(X_n) - \sup_{\{\varphi_n\} \in K_\alpha} \inf_{\theta \in \Theta_1} M_{n,\theta} \varphi_n(X_n) \right| = 0$$

şərti ilə əvəz olunduğu halda A. m. k. üçün digər təriflər də mövcuddur, burada

$$K_\alpha = \{ \{ \varphi_n \} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} M_{n,\theta} \varphi_n(X_n) \leq \alpha \}.$$

Müəkkəb hipotezləri yoxlama məsələsində kifayət qədər geniş şərtlərlə A. m. k. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisidir*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Боровков А. А., Саханенко А. И., в сб.: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы, Новосибирск, 1982, с. 79–90.

ASİMPTOTİK MİNİMAKS STATİSTİK QIYMƏT « асимптотически минимаксная оценка; asymptotically minimax estimator » – parametrin elə statistik qiymətidir ki, bütün statistik qiymətlər sinfində riskin maksimumunun limiti müvafiq normalanmada minimaldır. θ_n , – n

həcmli seçim üzrə qurulmuş, $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ çoxluğundan olan, naməlum θ parametrinin statistik qiyməti olsun. Əgər

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} M_\theta [\sqrt{n}(\theta_n - \theta)]^2 &\leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} M_\theta [\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)]^2 \end{aligned}$$

münasibəti digər θ_n^* statistik qiyməti üçün ödənilərsə, onda θ_n statistik qiyməti Θ çoxluğunda asimptotik minimaks statistik qiymət adlanır. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri geniş rəqulyarlıq xassəsinə malik olur. Asimptotik minimakslıq anlayışının müxtəlif ümumləşmələri vardır, məs., vektor parametr üçün və ardıcıl analizdə.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Wald А., в кн.: «Proc. 2-th Berkeley symp. math. statist. probab.», Berk., 1951, p. 1–11.

ASİMPTOTİK MÜNTƏZƏM ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « асимптотически равномерно наиболее мощный критерий; asymptotically uniformly most powerful test » – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində bütün alternativ hipotezlər üçün eyni zamanda asimptotik ən güclü kriteri olan statistik kriterilər ardıcılığıdır. A. m. ə. g. k. üçün verilən asimptotik ən güclü kriterinin tərfi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_{n,\theta_1}(\varphi_n - \psi_n) \leq 0$$

münasibətinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta_1 \in \Theta_1} M_{n,\theta_1}(\varphi_n - \psi_n) \leq 0$$

münasibətilə əvəz olunmasından alınır.

ASİMPTOTİK MÜNTƏZƏM PAYLANMA « асимптотически равномерное распределение; asymptotically uniform distribution » – muntəzəm paylanma anlayışını ümumiləşdirən anlayışdır. $U = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ – yalnız tam qiymətlər alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ olsun. Əgər ixtiyari tam müsbət h üçün

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ S_n = j \bmod h \} &= 1/h, \\ j &= 0, 1, \dots, h-1 \end{aligned}$$

berabərliyi ödənilərsə, U ardıcılığına asimptotik muntəzəm paylanmış ardıcılıq deyilir.

$\mathfrak{A}$, – U ardıcılıqlarının ele çoxluğu olsun ki, bu ardıcılıqlardan onları təşkil edən təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu saydığını atdıqda və ya onları dəyişdikdə o, A. m. p. xassəsinə ya itirir və ya ona malik olmur. $U \in \mathfrak{A}$ ardıcılığının asimptotik muntəzəm paylanan ardıcılıq olması üçün tam ədədlər şəbəkəsinin ixtiyari $L_{ah} = \{ m : m = a + kh \}$ alt şəbəkəsi üçün

$$\sum_k \min \{ P(\xi_k \notin L_{ah}) : 0 \leq a \leq h-1 \} = \infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir (bax, [1]). S_n cəmlərinin xarakteristik funksiyaları terminləri ilə A. m. p.-ya malik olma kriterisi $n \rightarrow \infty$ olduqda $f_n(2\pi r/h) \rightarrow 0$ limit münasibətinin ödənilməsidir, burada h – qeyd olunmuş tam müsbət ədəd, $r = 0, 1, \dots, h-1$ (bax, [4]). S_n cəmlərinin A. m. p.-ya malik olması lokal limit teoreminin doğruluğu üçün zəruri şərtidir (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Прохоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 4, с. 535–38; [3] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [4] Dvoretzky A., Wolfowitz J., «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 501–07.

ASİMPOTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Bahadur a görə «асимптотическая относительная эффективность по Бахадору; Bahadur asymptotic relative efficiency» – bax, Asimptotik effektivlik(yi) kriterinin.

ASİMPOTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Hodges-Le-mana görə «асимптотическая относительная эффективность по Ходжесу-Леману; Hodges-Lehmann asymptotic relative efficiency» – bax, Asimptotik effektivlik(yi) kriterinin.

ASİMPOTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Pitmen e görə «асимптотическая относительная эффективность по Питмену; Pitman asymptotic relative efficiency» – bax, Asimptotik effektivlik(yi) kriterinin.

ASİMPOTOTİK NORMAL ARDICILLIQ «асимптотически нормальная последовательность; asymptotically normal sequence» – riyazi gözleməsi α -ya bərabər, dispersiyası σ^2 ($0 < \sigma^2 < \infty$) olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin S_n cəmi üçün mərkəzlənmiş və normalanmış S_n^* təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $P\{S_n^* < x\}$ -in $n \rightarrow \infty$ olduqda x -ə görə ($-\infty < x < \infty$) $\Phi(x)$ müntəzəm yığılması təmin olunan $\{S_n^*\}$ ardıcılığıdır, burada $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

$$S_n^* = \frac{S_n - \alpha n}{\sigma \sqrt{n}},$$

$\Phi(x)$ – $(0, 1)$ parametrləri normal qanunun paylanma funksiyasıdır. Bu halda S_n^* təsadüfi kəmiyyətləri asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

$\{\xi_n\}$ asılı olmayan, lakin ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər (eyni qanunla paylanması şərt deyil) ardıcılığı olsun. $\{\tilde{S}_n\}$ ardıcılığının asimptotik normallığı üçün aşağıdakı şərtin ödənilməsi kifayətdir:

ixtiyari $\tau > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{M}((\xi_k - a_k)^2; |\xi_k - a_k| > \tau B_n) \rightarrow 0,$$

burada $\mathbf{M}\xi_k = a_k$, $\mathbf{D}\xi_k = \sigma_k^2$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, $\tilde{S}_n =$

$$= \frac{S_n - \sum_{k=1}^n a_k}{B_n}.$$

Əd.: [1] Боровков А. А., Курс теории вероятностей, М., 1972.

ASİMPOTOTİK NORMAL ÇEVİRMƏ «асимптотически нормальное преобразование; asymptotically normal transformation» – təsadüfi kəmiyyətlərin

normal qanuna daha yaxşı yaxınlaşmasını təmin edən çevirmədir. $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{X_n < x\} = F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$$

olsun, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. $u_n(X_n)$ -in paylanması X_n -in paylanması ilə müqayisədə normal paylanmaya «daha yaxın» olması xassəsinə malik olduqca sadə $u_n(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün $F_n(x)$ funksiyasının

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=1}^r P_k(x) n^{-1/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

asimptotik ayrılışına baxılır,

$$\varphi(x) = \Phi'(x),$$

burada $P_k(x)$ – x -ə görə çoxhədlilərdir, sonra isə bu ayrılışın çevirməsi –

$$y(x) = \Phi^{-1}[F_n(x)] = x + \sum_{k=1}^r Q_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

funksiyası qurulur (bu ayrılışın doğruluğu üçün şərtlər [1] və [2]-də verilmişdir). Əgər

$$u_n(x) = x + \sum_{k=1}^r Q_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

götürülərsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{u_n(X_n) < x\} = \Phi(x) + O(n^{-(r+1)/2})$$

olur. A. n. ç.-yə misal – Vilson – Hilferti çevirməsidir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1959, т. 4, № 2, с. 136–49; [2] W a z o w W., «Proceeding of symposia in applied mathematics», 1956, v. 6, p. 251–59.

ASİMPOTOTİK NORMAL STATİSTİK QIYMƏT

«асимптотически нормальная оценка; asymptotically normal estimator» – parametrin ələ statistik qiymətidir ki, bu statistik qiymətin paylanması müvafiq normalanmadan sonra seçimin həcmi artdıqca normal paylanmaya yaxınlaşır. Məs., $X_1, \dots, X_n$ – elementləri $\mathbf{M}X_i = \theta$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$,

$\mathbf{M}X_i^4 < \infty$ şərtlərini ödəyən seçim olsun. Onda

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ seçimi ortası və } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ seçimi}$$

dispersiyası θ və σ^2 parametrlərinin A. n. s. q.-leridir. Bu nəticə o faktdan irəli gəlir ki, $\{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta), \sqrt{n}(s^2 - \sigma^2)\}$ ikiölçütlü təsadüfi vektoru asimptotik olaraq ikiölçütlü normal paylanmaya tabedir və bu paylanmanın orta qiymətlər vektoru sıfır vektordur, ikinci momentlər matrisi isə

$$\begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_4 - \mu_2^2 \end{pmatrix}$$

şəklindədir, burada $\mu_k = \mathbf{M}(X_i - \theta)^k$.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

50 ASİMPOTOTİK

* **ASİMPTOTİK NORMAL TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR** « асимптотически нормальные случайные величины; asymptotically normal random variables » – bax, *Asimptotik normal ardıcılıq*.

* **ASİMPTOTİK NORMALLIQ** « асимптотическая нормальность; asymptotic normality » – bax, *Asimptotik normal ardıcılıq*.

ASİMPTOTİK OPTİMAL KRİTERİ « асимптотически оптимальный критерий; asymptotically optimal test » – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində həllin effektivliyini xarakterizə edən hər hansı funksionala baxılan sinifdə ekstremum təmin edən statistik kriterilər ardıcılığıdır. A. o. k. hipotezləri yoxlama məsələsində tətbiq olunan asimptotik optimal prosedurun xüsusi bir halıdır. A. o. k. anlayışı hər bir konkret halda dəqiqləşdirilməlidir: məhz hansı asimptotik optimallığın nəzərdə tutulduğu aydın olmalıdır. A. o. k.-yə konkret misallar: *asimptotik Beyes kriterisi, asimptotik müntəzəm ən güclü kriteri, asimptotik minimaks kriteri* və b.

ASİMPTOTİK PİRSON ÇEVİRMƏSİ « асимптотически пирсоновское преобразование; asymptotic Pearson transformation » – təsadüfi kəmiyyətlərin çevirməsidir, *Pirson paylanmalar* ailəsindən olan limit paylanmasına yığılmanı yaxşılaşdırmaq üçün tətbiq olunur. A. P. ç. *asimptotik normal çevirmənin* ümumiləşməsidir. $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{X < x\} = F(x, t) \rightarrow \Phi(x)$$

olduğu fərz olunur, $\Phi(x)$ – Pirson əyriyələri ailəsindən paylanma funksiyasıdır. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası üzərinə bezi rəqulyarlıq şərtlərində $F(x, t)$ funksiyasının ayrılışını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$F(x, t) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=1}^r P_k(x) t^k + O(t^{r+1}),$$

burada $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $P_k(x)$ – müəyyən çoxhədlilərdir. Sonra isə bu ayrılışın çevirməsini almaq olar, yəni:

$$y(x) = \Phi^{-1}[F(x, t)] = y_r(x) + O(t^{r+1}),$$

$$y_r(x) = x + \sum_{k=1}^r S_k(x) t^k.$$

Belə ki, əgər $u_r(x) = y_r(x) + O(t^{r+1})$ olarsa, onda $t \rightarrow 0$ olduqda

$$P\{u_r(X) < x\} = \Phi(x) + O(t^{r+1}).$$

Məs., əgər X təsadüfi kəmiyyətinin paylanması – (p, q) parametrləri beta – paylanmadırsa, $t = 1/q \rightarrow 0$, $p = \text{const}$ olarsa, onda

$$F(x, t) = I(x, p) + O(t)$$

olur, burada $I(x, p)$ – p parametrlili gamma – paylanma funksiyasıdır. Əgər

$$u_1(x) = x/[1 - s(x + p - 1)], \\ s = t/[2 + t(p - 1)]$$

olarsa, onda $s \rightarrow 0$ olduqda

$$P\{u_1(X) < x\} = I(x, p) + O(s^2).$$

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 2, с. 129–55; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

ASİMPTOTİK PLAN « асимптотический план; asymptotic design » – bax, *Regressiya eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ASİMPTOTİK SIXLIQ (Ğİ) φ o x l u ğ u n « асимптотическая плотность множества; asymptotic density of a set » – bax, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi*.

ASİNXRON ÇOXGİRİŞLİ KANAL « асинхронный канал множественного доступа; asynchronous channel of multiple access » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

ASİNXRON KANAL « асинхронный канал; asynchronous channel » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

ASSOSİYALANMIŞ SPEKTRİ, PROSESİN « ассоциированный спектр процесса; associated spectrum of a process » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

ASTA DƏYİŞƏN FUNKSİYA « медленно меняющаяся функция; slowly changing function » – bax, *Düzgün dəyişən funksiya*.

AŞAĞI DƏYƏRİ (QİYMƏTİ), OYUNUN « нижняя цена игры; lower value of a game » – bax, *Oyunu, iki şəxsin*.

AŞAĞI ETİBARLI SƏRHƏD « нижняя доверительная граница; lower confidence bound » – bax, *Etibarlı zolaq*.

* **AŞAĞI KVARTİL** « нижняя квартиль; lower quartiler » – $p = \frac{1}{4}$ qiymətinə uyğun kvantildir. Bax, *Kvantil*.

AŞAĞI LİMİT(i) təsadüfi hadisələr ardıcılığının « нижний предел последовательности случайных событий; lower limit of sequence of random events » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən $A_1, A_2, \dots$ hadisələrindən, yalnız və yalnız, sonlu saydasından başqa bütün (sonsuz sayda) hadisələr baş verdikdə baş verən hadisədir, $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, Ω – eksperimentin uyğun *elementar hadisələr fəzasıdır*. A_n ilə işarə olunan bu hadisə $\{A_n\}$ hadisələr ardıcılığının aşağı limiti adlanır və bu limit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ kimi işarə olunur. A_n hadisəsi üçün

$$A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

berəberliyi doğrudur. Bu hadisə, yalnız və yalnız, o vaxt baş verə bilər ki, ya $\{A_n\}$ ardıcılığının hər hansı sonlu saylı hadisəsindən sonra gələn bütün hadisələr (sonsuz sayda) baş versin və ya sonlu sayda hadisəsindən başqa bütün hadisələr baş versin.

Əgər

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1}, \dots$$

olarsa, yeni $\{A_n\}$ monoton artan hadisələr ardıcılığı olarsa,

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

AŞAĞI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələr ardıcılığının «нижняя граница последовательности случайных событий; lower boundary of sequence of random events» – bax, Kəsişmə(si) / hasil(i) təsadüfi hadisələrin.

AŞAĞI SƏRHƏD FUNKSIONALI «нижний граничный функционал; lower boundary functional» – bax, Faktorizasiya eynilikləri.

AŞKARLANMA MƏSƏLƏSİ, POZULMANIN «обнаружения разладки задача; changepoint problem» – təsadüfi proseslərin ehtimali xarakteristikalarının dəyişdiyi anın təyin olunmasıdır (bu və ya başqa mənada optimal). Adətən, məsələnin iki qoyuluşu fərqləndirilir – ardıcıl və aposterior (retrospektiv). Birinci halda fərz olunur ki, müşahidə olunan $\zeta = (\zeta_t)$, $t \geq 0$ prosesi aşağıdakı şəkildədir:

$$\zeta_t = \begin{cases} \zeta_t^{(1)}, & t < \theta, \\ \zeta_t^{(2)}, & t \geq \theta. \end{cases}$$

burada θ – təsadüfi an (pozulma anı) olub, $\zeta^{(1)}$ prosesinin $\zeta^{(2)}$ prosesinə çevrilməsini xarakterizə edir. Əgər τ dayanma anı olarsa $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən, $\mathcal{A}_t = \sigma(\zeta_s, s \leq t)$, onda $\alpha = P\{\tau < \theta\}$ kəmiyyəti yanlış həyəcan ehtimalını xarakterizə edir, məs., $R(\tau) = M(\tau - \theta | \tau \geq 0)$ kəmiyyəti – həyəcan signalı t -nin düzgün verilməsi, yeni θ anından sonra gecikmə vaxtının və pozulmanın aşkarlanmasının xarakteristikası ola bilər. Olduqca geniş hallar sinfində gecikmə vaxtının $R(\tau^*) = \inf R(\tau)$ minimumunu təmin edən $\tau_a^* \in \{\tau: P\{\tau < \theta\} \leq \alpha\}$ qaydalarının tapılması haqqında məsələ olduqca ətraflı öyrənilmişdir (bax, [1]), burada infimum $\{\tau: P(\tau < \theta) \leq \alpha\}$ sinfi üzrə götürülür.

Aposterior qoyuluşda fərz olunur ki, bütün ζ_t , $t \leq T$ müşahidələri verilmişdir və hipotezlərin yoxlanılması ($\theta \leq T$ və ya $\theta > T$). θ parametrinin qiymətləndirilməsi və s. tipli problemləri həll etmək tələb olunur. Əslinə qaldıqda, bu məsələlər sinfi statistik nəticələr nəzəriyyəsinin klassik məsələləri sinfinə aiddir (bax, [2]).

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [2] Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Ширяев А. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1988, т. 182, № 5, с. 4–23.

52 AŞKARLANMA

AŞMA «выброс положительный; positive outlier» – bax, Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın.

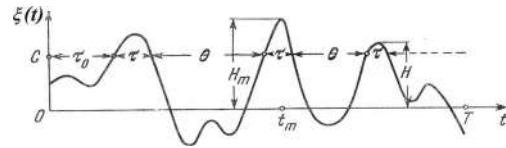
AŞMA – ENMƏ «выброс; outlier» – bax, Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın.

AŞMA – ENMƏ MÜDDƏTİ «длительность выброса; length of outlier» – bax, Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın.

AŞMA – ENMƏSİ, TƏSADÜFİ PROSES VƏ MEYDANIN «выброс случайного процесса и поля; excursion of a random process and field» – təsadüfi proses və ya təsadüfi meydanın seçimi funksiyasının (realizasiyasının) parametrlər fəzası ilə faza fəzasının düz hasilinin müəyyən bir seçilmiş oblastından kənarda yerləşən hissəsidir.

$\zeta(t)$, $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ heqiqi təsadüfi funksiyası üçün ($N = 1$ olduqda təsadüfi proses, $N \geq 2$ olduqda təsadüfi meydan) u səddini aşma – enmələr $\zeta(t)$ seçimi funksiyasının $A_u^+(\zeta) = \{t \in \mathbb{R}^N: \zeta(t) \geq u\}$ çoxluğunun əlaqə komponentlərinə uyğun hissələri kimi təyin olunur. T. p. və m. a. – e.-nin öyrənilməsi təsadüfi nöqtəvi proseslərin çıxışlarının, lokal ekstremumlarının, bliklərinin və s.-nin araşdırılması ilə sıx bağlıdır (bax, [1] – [3]).

$\{\zeta(t), t \in (0, T)\}$ təsadüfi prosesinin T müddəti ərzində realizasiyası aşağıda şəkildə verilmişdir. Bütün fiziki real təsadüfi



Şəkil. Stasionar təsadüfi prosesin realizasiyası

proseslər zamanın kəsilməz funksiyalardır. Belə funksiyalar sonlu T intervalında sonlu sayda müxtəlif H qiymətli maksimum və minimumlara malikdir və t_m anında realizasiya ən böyük (mütləq) maksimum H_m qiymətini alır.

$\zeta(t)$ realizasiyası qeyd olunmuş C səddini və ya verilmiş $c(t)$ əyrisini aşağıdan yuxarıya (müsbət töremə ilə) bir neçə dəfə kəsə bilər, belə ki, τ_0 anında realizasiya bu səddi ilk dəfə aşır (yeni C səddinə ilk dəfə τ_0 anında aşağıdan çatılır).

$\zeta(t)$ təsadüfi prosesi C səddini aşağıdan yuxarıya kəsdiyi halda a şma, yuxarıdan aşağıya kəsdiyi halda e nmə baş vermişdir, deyilir. Beləliklə, $(0, T)$ intervalında $\zeta(t)$ realizasiyasının C səddini aşmalarının sayı (enmələrinin sayı) n -ə bərabərdir (şəkildə aşmaların sayı üçə bərabərdir); şəkildə göstərilən τ və θ kəmiyyətləri, uyğun olaraq, a şma və e nmədə qalma müddətləri adlanır. θ kəmiyyəti bəzən enmə və aşma arasındakı intervalın uzunluğu (qalma müddəti) da adlandırılır.

τ , θ və H kəmiyyətləri bir realizasiya üçün C səddi və T intervalından asılı olaraq, bir neçə qiymət ala bilər və n , τ_0 və H_m kəmiyyətlərlə birgə bir realizasiyadan digər realizasiyaya keçdikdə təsadüfi qaydada dəyişirlər.

Bundan başqa n , τ , θ , τ_0 , H , H_m təsadüfi kəmiyyətlərinin statistik xarakteristikaları öz-özlüyündə təsadüfi prosesin detallı xarakteristikaları kimi maraqlıdır və bunlar bir çox praktiki

məsələlərin həllində mühüm rol oynayır. Məs., n , θ və H kəmiyyətləri müəyyən şərtlər ödənildikdə radioverilişlərinin kəsilmələrinin mühüm xarakteristikalarıdır. Kosmik uçuş aparatları ilə radioəlaqədə darzolaqlı təsadüfi signal üçün n kəmiyyəti – kəsilmələrin (feynqlərin) tezliyini, θ – müəyyən bir həddən aşağıda feydnqlərin uzunluğunu (müddəti) və H isə feydnqlərin dərinliyini ifadə edir.

n , H və H_m təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması ekstremal tənzimləmə sistemlərinin analizində (bax, [4]) və s. məsələlərdə istifadə olunur. Xüsusi halda, müəyyən bir intervalda baxılan təsadüfi prosesin realizasiyalarında H_m -in ən böyük qiymətlərinin ehtimalının sıxlıq funksiyası vasitəsilə signalın parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün əsas statistik kriterilərdən biri – maksimal doğruxoxşarlıq metodunun tətbiq olunma oblastını müəyyən etmək olur (bax, [5], [6]).

$\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ – vahid ehtimalla iki dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyalara malik, $\mathbf{M}\zeta(0) = 0$, $B(s) = \mathbf{M}\zeta(t)\zeta(t+s)$, $s, t \in \mathbb{R}^N$ şərtlərlə təyin olunan həqiqi bircins erqodik Gauss meydanı olsun. Belə meydan üçün u səddini tipik aşma – enmənin quruluşunu öyrənmək mümkündür və $u \rightarrow \infty$ olduqda isə aşma – enmənin xarakteristikalarının asimptotik paylanmalarını tapmaq olur. H_u , V_u , S_u – uyğun olaraq, $\zeta(t)$ təsadüfi meydanın u həddini aşma hündürlüyü, $(N+1)$ – ölçülü həcm və $\zeta(t)$ təsadüfi meydanının u səddini tipik aşması (enməsi) və $g(t) = u$ hiper – müstəvisi ilə hüdudlanmış, $(N+1)$ – ölçülü cismin oturacağıının N – ölçülü həcmi olsun. $\zeta_i(t) = \partial \zeta(t) / \partial t_i$, $i = 1, \dots, N$, $\zeta_{ij}(t) = \partial^2 \zeta(t) / \partial t_i \partial t_j$, $1 \leq i, j \leq N$ olsun. İxtiyari k sayda üst-üstə düşməyən $t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ nöqtələri üçün $\zeta(t^{(s)})$, $\zeta_i(t^{(s)})$, $i = 1, \dots, N$, $\zeta_{ij}(t^{(s)})$, $1 \leq i, j \leq N$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanması cırlaşmayan paylanma olsun. $B(t)$ kovariasion funksiyasının isə $|t| < H_0$, $H_0 > 0$ olduğu halda

$$\left| \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^4 \dots \partial t_N^4} - \frac{\partial^4 B(0)}{\partial t_1^4 \dots \partial t_N^4} \right| < \frac{A}{|\ln|t||^{1+\varepsilon}}, \quad A > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\sum_{i=1}^N n_i = 4, \quad n_i = 0, 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, N$$

şərtini ödədiyi fərz olunur. Onda (bax, [8])

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}_u \{u H_u > v\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}_u \{\gamma u^2 S_u^{2/N} > v\} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}_u \{\kappa u^{2-2/(N+2)} V_u^{2/(N+2)} > v\} = e^{-v/B(0)}, \quad v \geq 0.$$

Burada

$$\gamma^N = (2\pi B(0))^{-N} \Gamma^2(N/2 + 1) \det \Lambda^{(1)}, \quad \gamma > 0,$$

$$\kappa^{N+2} = (2\pi B(0))^{-N} \Gamma^2(N/2 + 2) \det \Lambda^{(1)}, \quad \kappa > 0,$$

$$\Lambda^{(1)} = (\mathbf{M}\zeta_i(0) \zeta_j(0))_{1 \leq i, j \leq N}.$$

burada $\Gamma(z)$ – qamma funksiyadır, $\tilde{\mathbf{P}}_u$, – $\zeta(t)$ təsadüfi meydanının u səddini tipik aşma – enməsinə uyğun ehtimal

ölçüsü («üfiqi pəncərə» ölçüsü) olub, $\zeta(t)$ meydanının u səddini aşan lokal maksimumlarının nöqtəvi təsadüfi prosesi üzrə Palm paylanmasıdır. $\tilde{\mathbf{P}}_u$ əvəzinə digər ehtimal ölçüləri istifadə olunduğu hallarda analogi nəticələr alınır (bax, [9]). Bir sıra hallarda (bax, [10]) göstərilən $(N+1)$ – ölçülü cismin səthinin sahəsi və onun oturacağıının səthinin sahəsi ilə bağlı funksionalların asimptotik paylanmaları tapılmışdır.

$N = 1$ olduğu halda qeyd olunan düsturlarla $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ stasionar erqodik Gauss təsadüfi prosesinin u səddini tipik aşma – enməsinin H_u hündürlüyünün, S_u müddətinin və V_u sahəsinin kəmiyyətləri asimptotik təyin olunur ($\mathbf{M}\zeta(t) = 0$); belə ki, bu düsturlar təsadüfi prosesin seçimi funksiyası üzərinə qoyulan iki dəfə kəsilməz differensiallanıqlı şərtinin ödənilmədiyi hal üçün də doğrudur.

$\tilde{\mathbf{P}}_u$ ölçüsü əvəzinə u səddindən çıxışların təsadüfi nöqtəvi prosesi üzrə Palm paylanmasını götürmək və təsadüfi prosesin kovariasion funksiyasının, $|t| < H_0$, $H_0 > 0$ olduqda

$$|B''(t) - B''(0)| < A / |\ln|t||^{1+\varepsilon}, \quad A > 0, \quad \varepsilon > 0$$

şərtini ödəməsinə tələb etmək kifayətdir (bax, [11]).

$\hat{\zeta}(t)$, – $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin Hilbert çevirməsi olsun; $Y(t) = (\zeta(t), \hat{\zeta}(t))$ – ikiölçülü vektor təsadüfi prosesinin $v_1^2 + v_2^2 < u^2$ dairəsindən çıxışlarının araşdırılması $\zeta(t)$ prosesinin qurşayıncısının (bax, Təsədüfi proses, kəsilmələr) $\zeta(t)$ üzərinə qoyulan şərtlərdə hündürlüyünün, aşma – enmə müddətinin, aşma – enmə sahəsinin asimptotik paylanmalarını tapmağa imkan verir (bax, [11]).

$D \in \mathbb{R}^N$ oblastında $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$ təsadüfi meydanının aşma – enmələri sayı haqqında məsələ olduqca mürəkkəbdir; aşma – enmələri sayı – $A_u^+(\zeta) \cap \bar{D}$ çoxluğunun əlaqəli komponentləri sayı $N^+(D)$ kimi təyin olunur, burada $\bar{D} = D \cup \Gamma$, $\Gamma = \partial D$, – D oblastının sərhədidir. $\zeta(t)$ – sanki yəqin üç dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyaları olan bircins Gauss meydanı olduğu halda, $N = 2$ olduqda, $N_u^+(D)$ üçün yuxarıdan və aşağıdan qiymətləri tapmaq mümkün olmuşdur (bax, [12]).

Gauss təsadüfi meydanları və bunlarla bağlı, sanki iki dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyaları olan $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$ təsadüfi meydanları üçün $A_u^+(\zeta) \cap I_0$ ($I_0 = [0, 1]^N$) çoxluğunun bəzi inteqro – həndəsi və differensial – topoloji xarakteristikalarının orta qiymətləri üçün düsturlar alınmışdır (bax, [3]). Belə meydanlar üçün $N = 2$ olduqda u səddinin izoxetlərinin strukturu da araşdırılmışdır. Gauss halında, $[0, T]^2$ kvadratında, $T \rightarrow \infty$ olduqda izoxetlərin toplam uzunluğunun asimptotik normallığı haqqında teoremlər isbat olunmuşdur (bax, [13]).

Qeyri – hamar realizasiyalarlı təsadüfi meydanlar üçün $A_u^+(\zeta)$ çoxluqları olduqca mürəkkəb struktura malikdirlər. Belə

meydanların bezi sinifləri üçün $A_u(\zeta) = \{t: \zeta(t) = u\}$ səddi Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsü araşdırılmışdır (bax, [3]). Belə təsadüfi meydanların sədd çoxluğunun seyreltilmə sxemi (bax, [14]) təklif olunmuşdur; bu sxem meydanın u səddindən kənara aşma – enmələrini (bunlar a ş m a – e n m ə l ə r i n $A - n$ ö q t e l e r i adlandırılır) müəyyənləşdirir, bu aşma – enmələr müsbət uzunluqlu intervallarla bölünmüş olur. Olduqca geniş şərtlərlə (bax, [15]), bircins Gauss təsadüfi meydanının u səddini aşma – enmələrinin $A -$ nöqtələrinin nöqtəvi təsadüfi prosesi $u \uparrow \infty$ olduqca paylanma üzrə (razılaşdırılmış zaman miqyasında, I_0 kubunda, $A -$ nöqtələrin orta sayını sabit saxlayan) stasionar Puasson nöqtəvi prosesinə yığılır.

Fiziki təbiiqlər üçün mühüm sızma haqqında məsələ ilə sıx bağlı, $A_u(\zeta)$ və $A_u^+(\zeta)$ çoxluqlarının qeyri – məhdud əlaqəli komponentlərinin varlığı haqqında məsələyə baxılmışdır (bax, [16]).

Əd.: [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Беляев Ю. К., Новые результаты и обобщения задач типа пересечений, в кн. [1], с. 341–78; [3] Adler R. J., The geometry of random fields, N. Y., 1981; [4] Моросанов И. С., Релейные экстремальные системы, М., 1964; [5] Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с приложениями в радиолокации, пер. с англ., М., 1955; [6] Тихонов В. И., Куликов Е., Распределение выбросов и максимумов флуктуаций. Радиотехника 17. № 2, 1962; [7] Носко В. П., в сб.: Тезисы докладов IV Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, т. 2, Вильнюс, 1985, с. 269–71; [8] Носко В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 722–33; [9] Wilson R. J., «Adv. Appl. Probab.», 1988, v. 20, p. 756–74; [10] Носко В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1990, т. 35, в. 1, с. 148–53; [11] Беляев Ю. К., Носко В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 2, с. 302–14; [12] Носко В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 592–96; [13] Малевич Т. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 3, с. 501–13; [14] Беляев Ю. К., Питербарг В. И., в кн.: Выбросы случайных полей, М., 1972, с. 62–89; [15] Питербарг В. И., в кн.: Выбросы случайных полей, М., 1972, с. 90–118; [16] Молчанов С. А., Степанов А. К., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 2, с. 294–97; [17] Питербарг В. И., в кн.: Итоги науки и техники, Теория вероятностей, Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99; [18] Тихонов В. И., Выбросы случайных процессов, М., 1970.

* **АТОМ** « atom; atom » – ehtimal nezeriyyesinde ehtimali sıfırdan fərqli yegane x nöqtəsindən ibarət çoxluğa deyilir.

($\Omega, \mathcal{F}, P$) – ehtimal fəzası. $F(x)$ – paylanma funksiyası olsun. Hər hansı bir $A \in \mathcal{F}$ üçün $F\{\bar{A}\} = 0$ olarsa, F paylanması A çoxluğunda toplanmışdır, deyilir, $F\{\bar{A}\}$, – $\bar{A}$ çoxluğunun və ya intervalının funksiyasıdır (ölçüsüdür).

Özünün atomları çoxluğunda toplanmış paylanmaya atomik paylanma deyilir.

M i s a l. (0,1) parçasındaki rəşional ədədləri $r_1, r_2, \dots$ ardıcılığı kimi ələ yerləşdirmək olar ki, r_i -nin indeksi onun məxrecinin atomları ilə artmasın.

Hər bir $r_k \in [0, 1]$ nöqtəsinə 2^{-k} ehtimalı qarşı qoyularsa, F atomik paylanmadır, lakin $[0, 1]$ parçasının bütün nöqtələri

F -in artım nöqtəleridir. ($\Omega, \mathcal{F}, P$) – ehtimal fəzası, $F(x)$ – paylanma funksiyası olsun. Hər hansı bir $\varepsilon > 0$ üçün $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$ olarsa, x nöqtəsinə $F(x)$ -in artım nöqtəsi deyilir. Atom nöqtələrinin sayı hesabı saydan artıq deyildir.

Atomları olmayan paylanma kəsilməz paylanma adlanır.

$a_1, a_2, \dots$ – çekiləri (ehtimalları) uyğun olaraq $p_1, p_2, \dots$

olan atomlar, $p = \sum p_k$, $F_a(x) = \frac{1}{p} \sum_{a_k \leq x} p_k$ olsun; a_k -lar

($-\infty, x$] intervalındandır. $F_a(x)$ funksiyası paylanma funksiyası olub, F -in atomik komponenti adlanır. Əgər $p = 1$ olarsa, F atomik paylanmadır. $p < 1$ olduqda, $[F - pF_a]/q = F_c$ kəsilməz paylanma funksiyasıdır; $q = 1 - p$. Bu halda

$$F = pF_a + qF_c \quad (*)$$

paylanma funksiyası atomik F_a və kəsilməz F_c paylanma funksiyalarının xətti kombinasiyasıdır. Əgər F atomik paylanmadırsa, onda $p = 1$ və bu halda F_c -ni ixtiyari kəsilməz paylanma funksiyası götürmək olar. Əgər paylanmanın atomları yoxdursa, (*)-da $p = 0$ olacaqdır. Bu fakt özünü Jordan ayrılışı teoremində ehtiva edir; hər bir ehtimal paylanması atomik və kəsilməz paylanmaların (*) tipli qarışığıdır, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$.

Bax, Atomik paylanma.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

* **АТОМİK КОМПОНЕНТ** « атомическая компонента; atomic component » – bax, Atom.

АТОМİK ÖLÇÜ « атомическая мера; atomic measure », sırf atomik ölçü, atomik paylanma. – ölçülən ($\Omega, \mathcal{A}$) fəzasında aşağıdakı xassəni ödəyən ehtimal ölçüsü μ -dür: ələ $\Omega = (\bigcup \Omega_i) \cup \Omega'$ sonlu və ya hesabı bölgüsü vardır ki, $\Omega' \in \mathcal{A}$, $\mu(\Omega') = 1$ və hər bir Ω_i , μ ölçüsünün atomudur, yəni $\Omega_i \in \mathcal{A}$, $\mu(\Omega_i) > 0$ və $A \in \mathcal{A}$ və $A \in \Omega_i$ olarsa, onda ya $\mu(A) = 0$ və ya $\mu(A) = \mu(\Omega_i)$ olur. Onda (Hausdorf topoloji fəzasında ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü üçün ümumi halda) separabel metrik fəzada ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü üçün hər bir atom hökmən birnöqtəvi çoxluqdur və bu halda A . ö. diskret ölçü adlanır. Əgər yalnız bir nöqtənin ölçüsü 1-ə bərabərdirsə, uyğun diskret ölçü cırlaşmış ölçü (və ya Dirak ölçüsü) adlanır.

Qeyri – atomik ölçülər tez-tez istifadə olunur. Əgər ehtimal ölçüsü μ -nün heç bir atomu yoxdursa, yəni ixtiyari $\mu(B) > 0$ şərtini ödəyən $B \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün ələ $A \subset B$, $A \in \mathcal{A}$ çoxluğu vardır ki, $0 < \mu(A) < \mu(B)$ münasibəti ödənilir, onda μ ölçüsü ölçülən ($\Omega, \mathcal{A}$) fəzasında qeyri – atomik ölçü adlanır. Əslinə qaldıqda qeyri – atomiklik halında daha güclü hökm yerinə yetir: $A \subset B$ və $A \in \mathcal{A}$ münasibətini ödəyən bütün A -lar üçün $\mu(A)$ -nın qiymətləri çoxluğu bütün $[0, \mu(B)]$ intervalını doldurur.

Əd.: [1] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

ATOMİK PAYLANMA « атомическое распределение; atomic distributions » – Ω elementar hadisələr fəzasının altçoqluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ – cəb-rində *ehtimal paylanmasıdır*, özünün atomları çoxluğunda toplanmışdır. Bu halda $A \in \mathcal{A}$ çoxluğu ($\Omega, \mathcal{F}, P$) ehtimal fəzasında paylanmanın atomu adlanır, eger $P(A) > 0$ olarsa, $A \supset B \in \mathcal{A}$ olduqda, $P(B) = 0$ və $P(A \setminus B) = 0$ olur. Xüsusi halda atomlar məhz ayrı-ayrı nöqtələr olarsa, A. p. *diskret paylanma* ilə üst-üstə düşür.

ATSİKLİK / APERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ « ациклическая / неперидическая цепь Маркова; acyclic / aperiodic Markov chain », qeyri-periodik Markov zənciri, – yalnız bir tsiklik altsinfi özündə saxlayan mühüm vəziyyətlərin yeganə C sinfindən ibarət, sonlu və ya hesabi biricins Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*, vəziyyətlərin təsnifatı). A. M. z.-ində t addıma keçid ehtimallının limitləri –

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j$$

vardır və eger C sinfi qayıdırsız və ya sıfır sinfidirsə, onda bütün p_j -lər sıfıra bərabərdir və eger bu sinif müsbət sinif olarsa, bütün p_i -lər müsbətdir və bunlar zəncirin yeganə stasionar paylanmasını əmələ gətirir.

ATSİKLİK VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin « ациклическое состояние цепи Маркова; acyclic / aperiodic state of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri*, vəziyyətlərin təsnifatı.

ATTRAKTOR « аттрактор; attractor » – bax, *Stoxastik attraktor*, *Qərribə attraktor*.

AVTOİNFORMATİVLİK ÖLÇÜSÜ « автоинформативности мера; autoinformation measure » – bax, *Çoxölçülü statistik analiz*.

AVTOKORRELOQRAM(i) təsadüfi prosesin « автокоррелограмма случайного процесса; autocorrelogram of random process » – *korreloqram* deməkdir. Bax, *Korreloqram*.

AVTOKORRELYASİON FUNKSİYA « автокорреляционная функция; autocorrelation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

AVTOKORRELYASİYA(s) təsadüfi prosesin « автокорреляция случайного процесса; autocorrelation of random process », $\zeta_i(t)$ təsadüfi prosesinin avtokorrelyasiyası – ζ_i və ζ_{i+h} təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiyasıdır. A. termini «korrelyasiya funksiyası» termini ilə yanaşı da işlənir və əsasən, stasionar təsadüfi proseslərin araşdırılmasında (bu proseslər üçün A. t -dən deyil, yalnız h -dan asılıdır) istifadə olunur.

AVTOKORRELYASİYA FUNKSİYASI XÜSUSİ « автокорреляции частной функция, частной автокорреляции функция; partial autocorrelation function », xüsusi avtokovariasiya funksiyası, xüsusi korrelyasiya funksiyası, xüsusi kovariasiya funksiyası, – diskret zamanlı $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ təsadüfi prosesi üçün

$$v(t, k) = \begin{cases} D\zeta(t), & k = 0, \\ \rho_{t, t-1}, & k = 1, \\ \rho_{t, t-k, t-k+1, \dots, t-1}, & k = 2, \dots \end{cases}$$

münasibetlə təyin olunan kəmiyyətdir, burada

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}[\zeta(i), \zeta(j)]}{\sqrt{D\zeta(i) D\zeta(j)}}$$

– $\zeta(i)$ və $\zeta(j)$ kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsali*, $\rho_{t, t-k, t-k+1, \dots, t-1}$ – $\zeta(t-k-1), \dots, \zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t)$ və $\zeta(t-k)$ kəmiyyətləri arasında *xüsusi korrelyasiya əmsalıdır*. $F(x_0, x_1, \dots, x_k)$ – $\zeta(t-k)$, $\zeta(t-k+1), \dots, \zeta(t)$, $k > 1$ təsadüfi kəmiyyətlər vektorunun $(k+1)$ -ölçülü birgə paylanma funksiyası. P bu vektorun korrelyasion matrisi:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{t-k, t-k+1} & \dots & \rho_{t-k, t} \\ \rho_{t-k+1, t-k} & 1 & \dots & \rho_{t-k+1, t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{t, t-k} & \rho_{t, t-k+1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

və $P_{i,j}$ – $\rho_{i,j}$ elementinin cəbri tamamlayıcısı olsun. Onda $\zeta(t-k+1), \dots, \zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t-k)$ və $\zeta(t)$ arasında xüsusi korrelyasiya əmsali

$$\rho_{t, t-k, t-k+1, \dots, t-1} = \frac{-P_{t-k, t}}{(P_{t-k, t-k} P_{t, t})^{1/2}}$$

düsturu ilə təyin olunur. Xüsusi halda, eger $F(x_0, x_1, \dots, x_k)$ $(k+1)$ – ölçülü normal paylanma funksiyası olarsa, onda $\rho_{t-1, t-k, t, t-k+1, \dots}$ əmsali $\zeta(t-k+1), \dots, \zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t)$ və $\zeta(t-k)$ təsadüfi kəmiyyətlər cütünün marginal ikiölçülü normal paylanmasının korrelyasiya əmsali ilə üst-üstə düşür.

X. a. f. Boks – Cenkins modellərinin statistik analizində istifadə olunur. Eger $\zeta(t)$ p tərtib stasionar avtoregressiv təsadüfi prosesdirsə, onda bu proses üçün $k = 0, 1, \dots, p$ olduqda $v(t, k) \neq 0$, $k \geq p+1$ olduqda isə bu proses üçün $v(t, k) = 0$ olur. Bu xassəyə əsasən Boks – Cenkins modelinin $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin realizasiyasına görə qurulmasına avtoregressiyanın tertibi p -ni identifikasiya etmək olur.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

AVTOKOVARIASİON FUNKSİYA « автоковариационная функция; autocovariance function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

AVTOKOVARIASIYA(sı) təsadüfi prosesin « автоковариация случайного процесса; autocovariance of random process », ζ_t təsadüfi prosesinin avtokovariasiyası – ζ_t və ζ_{t+h} proseslərinin kovariasiyasıdır. Avtokovariasiya $M(\xi_t - M\xi_t)(\xi_{t+h} - M\xi_{t+h})$ riyazi gözləməsinə bərabərdir. Avtokovariasiya termini, adətən, *stasionar təsadüfi proseslər* (geniş mənada) üçün istifadə olunur. Bu proseslər üçün A. yalnız h -dan asılıdır və avtokorrelyasiyadan yalnız ζ_t -nin dispersiyasına bərabər vuruqla fərqlənir. A. termini ilə yanaşı «kovariasion funksiya» termini də istifadə olunur.

AVTOKOVARIASIYA – XÜSUSİ AVTOKOVARIASIYA FUNKSIYASI « автоковариационной частной функция, частной автоковариации функция; partial autocovariance function » – *xüsusi avtokorrelyasiya funksiyası* ilə eynidir.

AVTOMAT EHTİMALİ « автомат вероятностный; probabilistic automation » – bax, *Ehtimali avtomat*.

AVTOMATİK TƏSNİFAT « автоматическая классификация; automatical classification » – n obyektədən ibarət çoxluğun daxilolma əməli üzrə $C_0, C_1, \dots, C_m$ bölgələrinin (klaster çoxluqlarının və ya kəsişən siniflərin) ardıcılığının qurulmasıdır, bu bölgədəki siniflərin sayı indeks artdıqca monoton azalır. $C_0, C_1, \dots, C_m$ – obyektlər çoxluğu olsun; C_0 çoxluğu yalnız bir obyektədən ibarət n sayda klasterdən ibarətdir, C_j çoxluğundan olan hər bir klaster ya özü klasterdir, yaxud C_{j-1} çoxluğunun klasterlərinin birləşməsidir. C_m çoxluğu yalnız n elementdən ibarət klasterdir.

Əd.: [1] Дюр ан Б., О дел л П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Ж ам б ю М., Иерархический кластер-анализ и соответствия, пер. с франц., М., 1988.

AVTOMODEL LİMİTİ, PAYLANMANIN « авто-модельный предел распределения; scaling limit of a probability distribution » – bax, *Renormalization qrup*.

AVTOMODEL LİMİTİ, TƏSADÜFİ MEYDANIN « автомодельный предел случайного поля; scaling limit of a random field » – bax, *Renormalization qrup*.

AVTOMODEL PAYLANMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN « автомодельное распределение состояний; self-similar probability distribution » – bax, *Renormalization qrup*.

AVTOMODEL PROSES « автомодельный процесс; automodel / demistable / scaling process », *semi-dayanıqlı proses, skayling-proses*, – eht. X_t , $t \geq 0$ təsadüfi prosesidir ki, ixtiyari $k \neq 0$ qiymətində eht. A_k tapılır ki, $X_{kt} = A_k X_t$ prosesinin bütün sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşür. Bu onu ifadə edir ki, zaman şkalasının dəyişməsi ($t \rightarrow kt$) faza şkalasının dəyişməsinə

($X_t \rightarrow A_k X_k$) səbəb olur. A. p. stasionar artımlı prosesdirsə, $X_0 = a$. Əgər $M X_t^2 < \infty$ olarsa, ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $M X_t = a$ olur. eht. $A_k = k^H$, $0 \leq H \leq 1$ olarsa, onda $M(X_t - X_s)^2 = \sigma^2 |t-s|^{2H}$. Beləliklə, prosesin struktur funksiyası H parametridən asılıdır. $0.5 < H \leq 1$ olduqda $X_t - X_s$ artımının korrelyasion funksiyası integrallanmayandır, bu isə onu ifadə edir ki, H parametrlı A. p. sonsuz yaddaşa malikdir. Əgər $H = 0.5$ olarsa, onda A. p. asılı olmayan artımlı prosesdir, eht. $H = 1$ olarsa, onda $X_t = a + X t$, $M X = 0$, $M X^2 = \sigma^2$ olur. Gauss A. p. – fraktal Braun hərəkətidir, $A_k = k^H$.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 274–77; [2] Mandelbrodt B. B., Van Ness J. W., «SIAM. Rev», 1968, v. 10, № 4, p. 422–37; [3] Taqqu M. S., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, v. 50, p. 53–89.

AVTOMODELLİK « автомодельность; self-similarity » – bax, *Kolmogorov avtomodelliyi*.

AVTOMODELLİK TƏNLİKLƏRİ « автомодельности уравнения; self-similarity equations » – bax, *Renormalization qrup*.

AVTOMORFİZM(i) ölçülü fəzanın « автоморфизм пространства с мерой; automorphism of a measure space » – ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fəzasının özünə qarşılıqlı birqiymətli eht. T inikasıdır ki, bu inikas P ölçüsünü dəyişməz saxlayır və tərs inikasıla birgə ölçüləndir, yəni ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün $T^{-1}A \in \mathcal{A}$, $TA \in \mathcal{A}$ və $P(T^{-1}A) = P(TA) = P(A)$ münasibətlərini ödəyir. Beləliklə, ölçülü fəzanın A. tərs inikası endomorfizm olan ölçülü fəzanın endomorfizmidir. Sıfır ölçüyə malik münasib bilinen çoxluğu xaric olunan fəzanın avtomorfizmə çevrilən inikası – sıfır modulu üzrə avtomorfizm adlanır (avtomorfizm mod 0). Sonlu və ya hesabı çevirmələr ailəsi ilə bağlı erqodik nəzəriyyə məsələlərində avtomorfizm və avtomorfizm mod 0 arasındakı fərq mühüm əhəmiyyət kəsb etmir. x_n , $-\infty < n < \infty$ təsadüfi ardıcılığının dar mənada ikitərəfli stasionar realizasiyaları fəzasında yerindəyişmə ehtimal fəzasının avtomorfizminə bir misaldır.

AVTOMORFİZM sıfır modulu üzrə « автоморфизм по модулю нуля; automorphism of mod 0 » – bax, *Avtomorfizm(i)* ölçülü fəzanın.

K – AVTOMORFİZM « K – автоморфизм; K – automorphism » – bax, *K – sistem*.

AVTOREQRESSİV – İNTEQRALLANAN SÜRÜŞƏN ORTA PROSES « авторегрессион – проинтегрированного скользящего среднего процесс; autoregressive – integrated moving average process », *ARISO – proses* (APICC – процесс; ARIMA process). Boks – Cenkins prosesi – $t=0, \pm 1, \dots$ diskret zamanlı eht. qeyri – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir ki, onun sonlu hər hansı d tərtibli artımları – stasionar *qanşıq avtoeqressiv – sürüşən orta prosesdir* [Odur ki, A. – i. s. o. $\zeta(t)$ prosesi d tərtibli stasionar artımlı prosesdir]. A. – i. s. o. $\zeta(t)$ prosesi

$$Y(t) - a_1 Y(t-1) - \dots - a_p Y(t-p) = Z(t) - b_1 Z(t-1) - \dots - b_q Z(t-q) \quad (*)$$

münasibətini ödəyir, burada $Y(t) = \nabla^d \zeta(t) = \zeta(t) - C_{d\zeta}^1(t-1) + C_{d\zeta}^2(t-2) - \dots + (-1)^d \zeta(t-d), Z(t),$

$t=0, \pm 1, \dots$ – orta qiyməti sıfıra bərabər, dispersiyası məlum verilmiş qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı (yeni diskret zamanlı *bəyaz küy prosesi*), $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ ele ədədi əmsallardır ki, (*) tənliyinin stasionar həlli vardır. p, q və d qeyd olunmuş, mənfi olmayan ədədlərdir və baxılan $\zeta(t)$ prosesinin tərtibini (və ya tipini) təyin edir və bunlar müşahidələrin nəticələrinin verilənləri əsasında təyin olunur (bax, *Parametrik model; tərtibin seçilməsi*); yalnız bundan sonra, bu verilənlər əsasında $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ əmsallarının qiymətləri qiymətləndirilir.

A. – i. s. o. p.-lər sinfi C. Boks (G. Box) və Q. Cenkins (G. Jenkins) tərəfindən daxil olunmuş və ətraflı öyrənilmişdir. Onlar göstərmişlər ki, bu sinifdən olan proseslər müşahidələrin nizamsız fluktuasiya edən ən müxtəlif sıralarını kifayət dərəcədə yaxşı təsvir edir və belə sıralara aid statistik məsələlərin geniş sahəsinin həlli üçün olduqca əlverişlidir (bax, [1]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1-2, М., 1974.

AVTOREQRESSİV MODEL « авторегрессион модель; autoregression model » –

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_p \zeta(t-p) = \sigma^2 Z(t)$$

tənliyini ödəyən, ümumi halda skalyar kompleksqiymətli $\{\zeta(t), t \in T\}, T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ *təsadüfi prosesinin* modelidir, burada $a_1, \dots, a_p$ – heqiqi ədədlərdir, $0 < \sigma^2 < \infty, \{Z(t), t \in T\}$ – ümumi halda kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin standart qeyri – korrelyar ardıcılığıdır, yeni bu təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün $MZ(t) = 0, MZ(s) \overline{Z(t)} = \delta_{st}, s, t \in T$ şərtləri ödənilir: p ədədi A. m.-in tərtibi adlanır.

A. m. sürüşən orta modeli ilə birlikdə diskret zamanlı və kəsirasional spektral sıxlıqlı, stasionar skalyar kompleks – qiymətli proseslər modellərinin sinfini tamamilə əhatə edir. A. m. praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərin adekvat stoxastik modelidir.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [2] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

AVTOREQRESSİV PROSES « авторегрессион процесс; autoregressive process » – ele $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, onun aldığı qiymətlər

$$\zeta(t) = a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_p \zeta(t-p) + Y(t) \quad (*)$$

avtoeqressiya tənliyini bəzi sabit $a_1, \dots, a_p$ qiymətlərində ödəyir, burada p – hər hansı müsbət ədəd, $Y(t)$ -lər, adətən, qeyri – korrelyar və eyni qanunla paylanmış, riyazi gözləməsi 0, dispersiyası σ^2 olan kəmiyyətlərdir. Arqumenti kompleks z olan

$\varphi(z) = z^p - a_1 z^{p-1} - \dots - a_p$ funksiyasının bütün sıfırları vahid radiuslu daire daxilindədirsə, (*) tənliyinin həlli vardır və bu həll

$$\zeta(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} Y(t-\nu)$$

ifadəsilə təyin olunur, burada b_{ν} və a_i -lər

$$\varphi^{-1}(z) = \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$$

münasibətilə bağlıdır.

Məs., $\{Y(t)\}$ – spektral sıxlığı $\sigma^2/2\pi$ olan bəyaz küy prosesi olarsa, onda (*) tənliyini ödəyən yeganə A. p. spektral sıxlığı $f(\lambda) = (\sigma^2/2\pi) |\varphi(e^{i\lambda})|^{-2}$ olan geniş mənada stasionar prosesdir, bu şərtlə ki, $\varphi(e^{i\lambda})$ heqiqi sıfırlara malik olmalıdır. Prosesin avtokovariasiyalrı $r_k = M\zeta(t)\zeta(t-k), r_k = a_1 r_{k-1} + \dots + a_p r_{k-p}, k > 0$ rekurrent münasibətini ödəyir və b_{ν} terminlərində

$$r_k = \sigma^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} b_{\nu+k}$$

şəklində ifadə olunur. Avtoeqressiya parametrləri a_k -lar prosesin $\rho_k = r_k/r_0$ avtokorrelyasiya əmsalları ilə $A = R_p^{-1} \rho_p$ matris münasibətilə əlaqəlidir, burada $A = (a_1, \dots, a_p), \rho_p = (\rho_1, \dots, \rho_p)$ və R_p – avtokorrelyasiya əmsalları matrisidir (*Yul – Uoker tənlikləri*). Bax, *Xətti filtr*.

Əd.: [1] Grenander V., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockholm, 1956; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

AVTOREQRESSİV PROSES kəsri tərtibli « авторегрессион процесс дробного порядка; fractional autoregressive process » – bax, *Hörst fenomeni*.

AVTOREQRESSİV SPEKTRAL STATİSTİK QIYMƏT « авторегрессионная спектральная оценка; autoregressive spectral estimator » – bax, *Maksimal entropiya; spektral statistik qiymət*.

AVTOREQRESSİYA « авторегрессия; autoregression » – hər hansı $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ *təsadüfi ardıcılığının* X_n qiymətlərinin bu ardıcılığın əvvəlki $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_{n-m}$ qiymətlərindən regression asılılığıdır. m – tərtib xətti A. sxemi X_n -in $X_{n-k}, k=1, \dots, m$ üzrə xətti reqressiya tənliyi ilə, yeni

$$X_n = \beta_1 X_{n-1} + \dots + \beta_m X_{n-m} + \varepsilon_n \quad (*)$$

tənliyi ilə təyin olunur, burada $\beta_1, \dots, \beta_m$ – sabitlərdir, ε_i – riyazi gözləmələri sıfıra bərabər, dispersiyaları σ^2 olan və qeyri – korrelyar (bəzən asılı olmayan) eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. A. sxemi bir sıra zaman sıralarının

təsviri üçün faydalı stoxastik modeldir. (*) A. sxemində xüsusi tip təsadüfi proses – *avtoregressiv proses* kimi baxmaq olar.

AYIRDETMƏ ZOLAĞI VƏ HESABLANMA

ZOLAĞI « разрешающая и вычислительная мощность; resolution bandwidth and calculation bandwidth » spektral sıxlığın qeyri-parametrik statistik qiymətinin – məsafə ilə təyin olunan anlayışlardır, bu zolaqda verilən statistik qiymətdən istifadə edərək, əsl *spektral sıxlığın* iki zirvəsini müəyyənləşdirmək olur. Əgər N həcmli seçim üçün alınmış spektral sıxlığın statistik qiymətinin spektral pəncərəsi $\Phi_N(x)$ aşağıdakı münasibətlərlə ifadə olunarsa, yeni

$$\Phi_N(x) = A_N \Phi(A_N x), \quad A_N > 1, \quad A_N \rightarrow \infty;$$

$$N \rightarrow \infty \text{ olduqda } A_N/N \rightarrow 0$$

olarsa, onda $1/A_N$ kəmiyyəti ayırdetmə zolağının eni olur.

A_N kəmiyyəti

$$b_N(t) = b(A_N^{-1}t)$$

korrelyasion pəncərəsinin enini təyin edir, yeni A_N , – $b_N(t)$ funksiyasının sıfırdan fərqli və ya sıfırdan olduqca fərqli olduğu zaman parçasıdır.

Ayırdetmə zolağının enini təyin etmək üçün çoxsaylı üsullar vardır. Bəzən bu zolaq spektral pəncərənin özünün maksimal qiymətinin yarısını aldığı nöqtələr arasındakı məsafəyə bərabər fərz olunur.

Müxtəlif formalı spektral pəncərələrin en üzrə müqayisəsi üçün (bax, [4]) N uzunluqlu seçimə görə $f_N(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiymətinin spektral pəncərəsinin normalanmış ekvivalent eni anlayışı daxil olunmuşdur, bu kəmiyyət aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$W_i = \frac{1}{N} \frac{(\mathbf{M} \hat{f}_N(\lambda))^2}{\mathbf{D} \hat{f}_N(\lambda)} \approx \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N^2(x) dx} \quad (*)$$

İstifadə olunan müxtəlif formalı pəncərələr üçün W_i kəmiyyətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Pəncərə	Müntəzəm ortalamının spektral pəncərəsi	Parzen pəncərəsi	Bartlett pəncərəsi	Optimal pəncərə
W_i	$\frac{1}{A_N}$	$\frac{1,33}{A_N}$	$\frac{1,86}{A_N}$	$\frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{\pi^2 A_N(2\alpha^2+2\alpha+1)}$

Optimal pəncərə özünün ayırdetmə zolağı ilə α göstəricisindən asılıdır, $\alpha < 0 \leq 1$; α baxılan λ nöqtəsində spektral $f(\lambda)$ sıxlığının hamarlığını təyin edir və Hölder şərtində (bərabərsizlikdə) daxil olunmuş kəmiyyətdir.

Spektral sıxlığın statistik qiymətləri $\hat{f}_N(\lambda)$ -ların hesablandığı nöqtələr arasındakı məsafə **hesablanma zolağının**

58 AYIRDETMƏ

eni adlanır. Əgər $b = 1/A_N$ olarsa, onda addımın belə seçilməsində statistik qiymətlər statistik olaraq asılı olmurlar. Lakin ters Furiye çevirməsi üzrə zaman sıralarının qurulmasında (bax, *Diskret Furiye çevirməsi*) alınan effektin qarşısını almaq üçün $b = 1/2 A_N$ götürmək zəruridir. Addımı belə seçmək üçün N uzunluqlu ardıcılığa N sayda sıfır əlavə olunmalıdır.

Əd.: [1] Журбенко И. Г., *Спектральный анализ временных рядов*, М., 1982; [2] Отнес Р., Эноксон Л., *Прикладной анализ временных рядов*, пер. с англ., М., 1982; [3] Яглом А. М., *Корреляционная теория стационарных случайных функций*, Л., 1981; [4] Blackman R., Tukey J., *The measurement of power spectra. From the point of view of communications engineering*, N. Y., [1959].

A – AYIRICI PLAN « A – разделяющий план; A – separating plan » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*.

AYRILAN EHTİYATDA SAXLAMA « раздельное резервирование; separate redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

*** AYRILAN XARAKTERİSTİK FUNKSIYA « разложимая характеристическая функция; decomposable characteristic function »** – bax, *Ayrılanlıq*.

AYRILAN MARKOV ZƏNCİRİ « приводимая / разложимая цепь Маркова; reducible / decomposable Markov chain » – *ayrılmaz Markov zənciri* olmayan sonlu və ya həسابi Markov zənciridir. Sonlu Markov zənciri, yalnız və yalnız, o halda ayrılır ki, onun keçid matrisi (ola bilər ki, vəziyyətlərin hər hansı nömrələnməsindən sonra da)

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

blok matrisi şəklində yazılsın; P_1 və P_2 – kvadratik stoxastik matrislər, 0 – uyğun ölçülü sıfır matrisdir. Bax, *Markov zənciri*.

AYRILAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « разложимый ветвящийся процесс; decomposable branching process » – hissəciklərinin tiplərinin əmələ gətirdiyi siniflər sayı ikidən az olmayan, hissəciklərinin tipləri sonlu, *şaxələnən prosesdir*. Hissəciklərinin tipləri sayı n -ə bərabər olan prosesin vəziyyəti $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ vektoru ilə təsvir olunur, burada $Z_k(t)$, – t anında mövcud olan k -cı tipin hissəcikləri sayıdır. i tipli hissəcici yalnız i və $i+1$ tipli ($1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$) hissəciklər doğuran kəsilməz zamanlı $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ şaxələnən prosesinin xüsusi halı A. ş. p.-in asimptotikası haqqında təsəvvürü verir. Bu halda tiplər çoxluğu hər biri bir hissəcikdən ibarət n sinfə ayrılır. Final siniflərin olmadığı (bax, *Şaxələnən proses hissəciklərinin tipləri sayı sonlu*) və $Z(t)$ -nin ikinci momentlərinin varlığı fərz olunur. Baxılan prosesin asimptotikası

$$A_{ii}(t) = \mathbf{M}\{Z_i(t) | Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, \dots, n\} = e^{a_{ij}t},$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

riyazi gözlemlərinin ne cür olmasından olduqca asılı olur, burada a_{ij} – hər hansı sabitlərdir. Əgər bütün a_{ii} -lər $a_{ii} > 0$ şərtini

ödeyərse, onda proses kritikaltı prosesdir və bu prosesin davam olunması ehtimalan –

$$Q_j(t) = P\{Z_1(t) + \dots + Z_n(t) > 0 | Z_j(0) = \delta_{ij}, j = 1, \dots, n\}$$

$t \rightarrow \infty$ olduqda eksponensial azalır. Əgər bütün i -lər üçün $a_{ii} \geq 0$ olarsa və $a_{11}, \dots, a_{nn}$ arasında p sayda ($p \geq 1$) sıfırlar vardırsa, onda proses kritik prosesdir və $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$Q_1(t) = q_1 t^{-2^{1-p}} (1 + o(1)),$$

burada $q_1 > 0$ – hər hansı sabitdir. Əgər $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$ olarsa, onda

$$P\left\{\frac{Z_1(t)Q_1(t)}{A_{11}(t)} < y_1, \dots, \frac{Z_n(t)Q_n(t)}{A_{nn}(t)} < y_n | Z_j(t) = \delta_{ij}, \sum_{j=1}^n Z_j(t) > 0\right\}$$

şerti ehtimalları üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanmasının Laplas çevirməsi $\varphi(s_1, \dots, s_n)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(s_1, \dots, s_n) = 1 - \left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{-2^{1-n}}.$$

A. ş. p. üçün $Z(t)$ -nin ikinci momentlərinin sonlu olduğu şərtində limit paylanmalarının tam təsviri [2] – [4]-də verilmişdir. İkinci momentlərin sonsuz olduğu halı üçün limit paylanmaları haqqında [5]-ə bax.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Поллин А. К., «Матем. сб.», 1976, т. 100, с. 420–35; [3] Поллин А. К., «Матем. сб.», 1977, т. 104, с. 151–61; [4] Огура Y., «J. Math. Kyoto Univ.», Ser. A., 1975, v. 15, № 2, p. 251–302; [5] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67.

* **AYRILANLIQ «разложимость; self-decomposability»** – ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu və onun xarakteristik funksiyası üçün daxil olunmuş anlayışdır, əgər hər bir ixtiyari $c \in (0, 1)$ ədədi üçün ele cırılşmayan f_c xarakteristik funksiyası varsa ki, hər bir u qiymətində $f(u) = f(cu)f_c(u)$ bərabərliyi ödənilsin, onda $\mathcal{L}$ qanunu və onun uyğun xarakteristik funksiyası ayrılış qanunu və ayrılan xarakteristik funksiyaya adlanır. Ayndır ki, cırılşmış xarakteristik funksiya ayrılan xarakteristik funksiyadır və onun bütün komponentləri f_c -lər də ayrılan xarakteristik funksiyalardır.

Əgər f ayrılan xarakteristik funksiyadırsa, onda $f \neq 0$ (bax, [1]).

Ayrılanlıq kriterisi. Əgər S_n/b_n ardıcılıqları münəzəm sonsuz kiçiklik şərtini ödəyərse, onda mərkəzi limit teoreminə əsasən $\frac{S_n}{b_n} - a_n$ normalanmış cəmlər ardıcılıqlarının bütün mümkün limit teoremləri müəyyən bir sonsuz bölünən qanunlar ailəsi – $\mathcal{N}$ ailəsini təşkil edir.

Ayrılanlıq kriterisi onu ifadə edir ki, ixtiyari $\mathcal{L}$ qanunu, yalnız

və yalnız, ayrılan qanun olduğu halda $\mathcal{N}$ ailəsindəndir (bax, [1]); $a_n, b_n > 0$ – heqiqi ədədlər, S_n isə n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmidir. Ayrılan xarakteristik funksiya f və onun komponentləri f_c sonsuz bölünən xarakteristik funksiyalardır. Əgər f ayrılan xarakteristik funksiya dırsa, $f \neq 0$.

Əd.: [1] Л о з в М., Теория вероятностей, М., 1962.

* **AYRILANLIQ KRİTERİSİ «разложимости критерий; decomposable test»** – bax. Ayrılanlıq.

* **AYRILIŞ QANUNU «разложения закон; law of decomposability»** – bax. Ayrılanlıq.

AYRILMAYAN PAYLANMA «неразложимое распределение; indecomposable distribution» – iki cırılşmayan paylanmanın kompozisiyası şəklində ifadə olunan ehtimal paylanmasıdır. Arksinus paylanması, normal və Puasson paylanmalarının qarışığı A. p.-ya misaldır. Paylanmasının daşıyıcısı bir nöqtədə kəsişən sonlu sayda düz xətlərin birləşməsi olan və ya hər hansı ciddi qabarıq qapalı

hipermüstəvi ilə üst-üstə düşən, $\mathbb{R}^n$ -də ($n \geq 2$ qiymətlərində) ixtiyari paylanma A. p.-dır. Hal-hazırda A. p.-lar çoxluğunun tam təsviri məlum deyildir, lakin ayndır ki, A. p.-lar sinfi olduqca geniş sinfidir. A. p.-lar çoxluğu variasiya üzrə məsafə ilə doğrulmuş güclü topologiyada bütün ehtimal paylanmaları çoxluğunda sıx çoxluqdur. Kompozisiya əməli ilə ehtimal paylanmaları semi – qrupunda vurma əməli kimi A. p. çoxluğuna natural ədədlər çoxluğunda sadə ədədlər çoxluğunun müəyyən analoqu kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 348–51; [3] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 425–37.

AYRILMAYAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES «неразложимый ветвящийся процесс; indecomposable branching process» – hissəciklərinin tipləri sayı sonlu ele şaxələnən prosesdir ki, bu prosesdə hər bir tipin hissəciklərinin varisi (bilavasitə və ya uzaq) müsbət ehtimalla ixtiyari tip hissəcik ola bilər. n tipli hissəcikli

$\zeta''(t) = (\zeta_1''(t), \dots, \zeta_n''(t))$ A. ş. p. asimptotik olaraq, bir tipli hissəcikləri şaxələnən proses kimi cərəyan edir, burada $\zeta_k''(t)$, – t anında k -cı tiptən olan hissəciklərin sayıdır. Prosesin diskret zamanlı olduğu fərz olunur. Əgər $A_j(t) = M(\zeta_j(t) | \zeta_k(0) = \delta_{ik}, k = 1, \dots, n), A(t) = (A_j(t))$ olduğu qəbul edilərsə,

onda $A(t) = A'(1)$ münasibəti doğrudur. Ayrılmayan proseslər üçün $A(1)$ – ayrılmayan matrisdir. Bundan başqa, $A(1)$ qeyri – periodik matris olarsa, onda $t \rightarrow \infty$ olduqda $A_j(t) = u_j \lambda^t + o(\lambda^t)$ olur, burada λ , – $A(1)$ -in perronlar köküdür; $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)$, – $A(1)$ -in λ -ya uyğun sağ və sol mexsus vektorlarıdır. A. ş. p. – $\lambda < 1$ olduqda kritikaltı, $\lambda > 1$ olduqda kritiküstü, $\lambda = 1$ olduqda kritik şaxələnən proses adlanır və tiplər çoxluğu final sinif emələ gətirmir. $\zeta(t)$ -nin ikinci momentlərinin

sonlu olmasını fərz etdikdə, A. ş. p. üçün bezi asimptotik nəticələr alınır.

Kritikaltı proseslər üçün ixtiyari i qiymətlərində və $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$Q_i(t) = \mathbf{P}\{\zeta_1(t) + \dots + \zeta_n(t) > 0 \mid \zeta_k(0) = \delta_{ik}, k = 1, \dots, n\}$$

prosesinin davam etməsi ehtimalı eksponensial azalır, kritik proseslər üçün isə bu ehtimal $1/t$ -yə mütənəsib olaraq azalır.

$t \rightarrow \infty$ olduqda, kritikaltı proses üçün

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1(t)}{A_1(t)} < x_1, \dots, \frac{\zeta_n(t)}{A_n(t)} < x_n \mid \zeta_k(0) = \delta_{ik},\right.$$

$$\left. k = 1, \dots, n; \sum_{k=1}^n \zeta_k(t) > 0 \right\}$$

paylanmaları diskret paylanmalara, kritik və kritiküstü proseslər üçün isə $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ diaqonalında toplanmış paylanmalara yığılır. Kritik halda diaqonalda paylanma üstlü paylanma olur. Kesilməz zamanlı A. ş. p.-lər üçün analogi nəticələr alınmışdır.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

BAKSTER TEOREMİ « Бакстера теорема; Baxter theorem » – Gauss prosesi artımlarının kvadratları cəmi haqqında teoremdir: əgər $0 \leq t \leq T$ intervalında verilmiş həqiqi $\zeta(t)$ Gauss prosesinin t -yə görə kəsilməz $M\zeta(t) = m(t)$ orta qiyməti və t, s -ə görə kəsilməz $b(t, s) = M[\zeta(t) - M\zeta(t)][\zeta(s) - M\zeta(s)]$ korrelyasion funksiyası varsa, $0 \leq t \leq T$ olduqda $m'(t)$ törəməsi məhduddursa, $t \neq s$ olduqda $b(t, s)$ funksiyasının bütün ikinci tertib törəmələri müntəzəm məhduddurlarsa, onda $\zeta(t)$ prosesinin N sayda subintervalllarda artımlarının kvadratları cəmi (subintervallar $[0, T]$ intervalının N bərabər hissəyə bölünməsilə alınır) N sonsuzluğa sürətlə yaxınlaşdıqda $t = s$ diaqonalında $\partial b(t, s) / \partial t$ törəməsinin sıçrayışının qiyməti ilə təyin olunan sabit ədədə sanki yəqin yaxınlaşır. Yəni yuxarıda qeyd olunmuş $m(t)$ və $b(t, s)$ üzərinə qoyulan şərtlər ödənilərsə, onda

$$D^+(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{b(t, t) - b(s, t)}{t - s},$$

$$D^-(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{b(t, t) - b(s, t)}{t - s}$$

limitləri həmişə vardır və bu halda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[\zeta\left(\frac{kT}{2^n}\right) - \zeta\left(\frac{(k-1)T}{2^n}\right) \right]^2 = \int_0^T [D^-(t) - D^+(t)] dt \quad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir (bax, [1]). Xüsusi halda, $\zeta(t)$ standart Viner prosesi və bu proses üçün $b(t, s) = \min(t, s)$ olarsa, (*)-nın sağ tərəfi T -yə bərabər olur; bu xüsusi hal üçün (*) ilk dəfə P. Levi tərəfindən isbat olunmuşdur (bax, [2]); bu Levi teoremi də adlandırılır. B. t. və onun çoxsaylı ümumləşmələri və modifikasiyalrı (bax, məs., [3] – [7]) əsasında bir çox hallarda müəyyən etmək olur ki, verilmiş iki $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ Gauss proseslərinin (və ya meydanlarının) realizasiyalarının funksional fəzasında təyin olunmuş ehtimal ölçüləri qarşılıqlı singulyardır, yeni kəsişən çoxluqlarda toplanmışlar (bax, məs., [3] – [9]).

Əd.: [1] Baxter G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 522–27; [2] Levy P., «Amer. J. Math.», 1940, v. 62, p. 487–550; [3] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 57–66; [4] Краснитский С. М., в сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, в. 5, 1971, с. 71–80; [5] Арак Т. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 153–60;

[6] Gine E., Klein R., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 4, p. 716–21; [7] Курченко А. А., в сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, в. 33, К., 1985, с. 53–57; [8] Slepian D., «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, v. IT-4, № 2, p. 65–68; [9] Varberg D. E., «Pacific J. Math.», 1961, v. 11, № 2, p. 751–62.

BALANSLANMIŞ BLOK PLAN « сбалансированный блочный план; balanced block design » – bax, Blok plan.

BANAX FƏZASI dayanıqlı p tip « банахово пространство устойчивого типа p »; **Banach space of stable type p** – bax, Banax fəzası p tip.

BANAX FƏZASI Sazonov xassəli « банахово пространство со свойством Сазонова; Banach space with Sazonov property », S -fəza, – eht fəzadır ki, bu fəzaya qoşma fəza məqbul topologiyaya malikdir. Məs., Hilbert fəzası (bax, [1]), $1 \leq p < 2$ olduqda l^p fəzası, kompakt аппроксимасија şərtini ödəyən və $p < 1$ olduqda l^p altfəzasına izomorf ixtiyari Banax fəzası belə fəzalardır (bax, [2]).

Əd.: [1] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [2] Муштар Д. Х., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 66–77; [3] Муштар Д. Х., Вероятности и топологии в банаховых пространствах, Каз., 1989.

BANAX FƏZASI l_p^n -ni özündə müntəzəm saxlayan « банахово пространство равномерно содержащее l_p^n »; **Banach space uniformly containing l_p^n** , – eht Banax fəzasıdır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və ixtiyari natural n ədədi üçün eht n – ölçülü $B_n \subset B$ altfəzası tapılar ki, $d(B_n, l_p^n) < 1 + \varepsilon$ şərti ödənilsin, burada l_p^n , – $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektorlarının adi n – ölçülü həqiqi fəzasıdır və bu vektorlar: $1 \leq p < \infty$ olduqda

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

norması ilə verilir və

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\},$$

$d(E, F)$ izomorf Banax fəzaları E və F arasında aşağıdakı düsturla ifadə olunan Banax – Mazur məsafəsidir:

$$d(E, F) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \},$$

burada infimum E və F arasında bütün izomorfizmlər üzrə götürülür.

Her bir sonsuz B. f. l_2^n fəzasını özündə müntəzəm saxlayır (Dvoretzki lemması). Buradan Dvoretzki – Rogers lemması asanlıqla alınır: hər bir sonsuz-ölçülü B. f.-da mütləq yığılmayan, şərtsiz yığılan sıra vardır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin məsələlərində l_p^n fəzasını özündə saxlamayan B. f. mühüm yer tutur. Bir çox cəhətlərə görə bu aşağıdakı müddəaların doğruluğu ilə əsaslandırılır:

a) B. f. l_p^n fəzasını özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, hər hansı $p < \infty$ üçün p kotip B. f. olsun;

b) B. f. l_1^n fəzasını özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, hər hansı $1 < p \leq 2$ üçün p tip B. f. olsun;

c) B. f. l_p^n fəzasını $1 \leq p < 2$ üçün özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, dayanıqlı p tip B. f. olsun.

l_∞^n fəzasını özündə müntəzəm saxlamayan B. f.-lan Banax fəzalarında təsadüfi sıraların yığılmasında maraq doğurur, belə ki, bu fəzalarda $\sum x_i \varepsilon_i$ və $\sum x_i \gamma_i$ sıralarının sanki yəqin yığılması ekvivalentdir (burada ε_i və γ_i , $i = 1, 2, \dots$ – uyğun olaraq qarşılıqlı asılı olmayan Bemulli və standart Gauss təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığıdır); belə fəzalara B. f.-da sıraların şərtsiz yığılma nəzəriyyəsində də təsadüf olunur.

Əd.: [1] M a r e y B., P i s i e r G., «Studia Math.», 1976, v. 58, fasc. 1, p. 45–90.

BANAX FƏZASI PIP xassəli «банახово пространство со свойством PIP; Banach space with PIP» – ehtimal B Banax fəzasıdır ki, hər bir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və qiymətlər oblası B-də məhdud hər bir zəif ölçülən $X: \Omega \rightarrow \mathbf{B}$ inikası üçün $\int_\Omega X d\mathbf{P}$ Pettis integralı

vardır. Separabel, həmçinin, refleksiv fəzalar bu xassəyə malikdirlər. Məhdud ədədi ardıcılıqların fəzası l_∞ PIP xassəsinə malik deyildir (PIP – Pettis Integral Property anlayışının qısa variantıdır).

Əd.: [1] E d g a r G. A., «Indiana Univ. Math. J.», 1979, v. 28, № 4, p. 559–79; [2] F r e m l i n D. H., T a l a g r a n d M., «Math. Z.», 1979, Bd 168, S. 117–49.

BANAX FƏZASI p kotip «банახово пространство котипа p ; Banach space of cotype p » – bax. Banax fəzası p tip.

BANAX FƏZASI p tip «банახово пространство типа p ; Banach space of type p » – qiymətləri Banax fəzalarından olan təsadüfi elementlərin öyrənilməsində istifadə olunan anlayışdır; bu anlayışla sıx bağlı p kotip Banax fəzası və dayanıqlı p tip Banax fəzası anlayışları da daxil olunmuşdur.

62 BANAX

ε_n – qarşılıqlı asılı olmayan Bemulli təsadüfi kəmiyyətləri, $\mathbf{P} \{ \varepsilon_n = +1 \} = \mathbf{P} \{ \varepsilon_n = -1 \} = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. B

Banax fəzasında $\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılmasından $\sum x_n \varepsilon_n$ sırasının sanki yəqin yığılması alınarsa, onda B. f. B p tip Banax fəzası adlanır, $x_n \in \mathbf{B}$. Fərz olunur ki, $1 \leq p \leq 2$, çünki $p > 2$ tipi üçün B. f. yoxdur, hər bir B. f.-nin 1 tipi (və deməli, $p < 1$ tipi) vardır.

ε_n əvəzinə p tərtib mütləq momentləri olan digər, eyni qanunla paylanmış cırlaşmayan mərkəzlənmiş ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər istifadə etmək olar.

B Banax fəzasında $\sum x_n \varepsilon_n$, $x_n \in \mathbf{B}$, $n \in \mathbb{N}$ sırasının sanki yəqin yığılmasından $\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılması alınarsa,

B fəzası p kotip B. f. adlanır. Fərz olunur ki, $2 \leq p < \infty$, belə ki, $p < 2$ kotipi üçün B. f. yoxdur. ε_n əvəzinə ixtiyari, bütün tərtib mütləq momentlərə malik olan eyni qanunla paylanmış cırlaşmayan mərkəzlənmiş təsadüfi kəmiyyətlər istifadə etmək olar. B fəzasının p kotipi, yalnız və yalnız, o halda vardır

ki, hər hansı c_p konstantı və B-də verilmiş $\mathbf{M} \|X_k\|^p < \infty$, $\mathbf{M} X_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ xassəsinə ödəyən qarşılıqlı asılı olmayan separabelqymətli təsadüfi elementlərin bütün sonlu toplusı üçün

$$\mathbf{M} \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^p \geq c^p \sum_{k=1}^n \mathbf{M} \|X_k\|^p \quad (*)$$

berəbersizliyi ödənilsin.

B fəzasının p tipi, yalnız və yalnız, o halda vardır ki, (*) berəbersizliyi əvəzinə tərs xarakterli hər hansı τ_p konstantı ilə

$$\mathbf{M} \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^p \leq \tau_p \sum_{k=1}^n \mathbf{M} \|X_k\|^p$$

berəbersizliyi doğru olsun.

$L_r(\Lambda, \Sigma, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ fəzalarının $p = \max(r, 2)$ kotipi və $p = \min(r, 2)$ tipi vardır və əgər fəzalar sonluölçülü fəzalara cırlaşmırlarsa, bu ədədləri yaxşılaşdırmaq mümkün olmur. l_∞ fəzasının $p > 1$ tipi və heç bir kotipi yoxdur. Heç bir tipi və kotipi olmayan fəzalara aid sadə misallar – kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ və sıfır yığılan ardıcılıqların c_0 fəzasıdır. Hilbert fəzalarının eyni zamanda 2 kotipi və 2 tipi vardır. Müəyyən mənada tərs müddəə də doğrudur: əgər B. f.-nin 2 tipi və 2 kotipi varsa, onda o, Hilbert fəzasına izomorfdur (xətti izomorfdur) (Kvapen teoremi).

Dayanıqlı p tip B. f. ehtimal B B. f.-na deyildir ki, bu fəzada

$\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılmasından $\sum x_n f_n$ sırasının sanki yəqin yığılması alınır, burada (f_n) – dayanıqlılığı p üstlü, eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan simmetrik dayanıqlı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, yeni $\mathbf{M} \exp(it f_n) = \exp(-|t|^p)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Fərz olunur ki, $1 \leq p \leq 2$, belə ki, dayanıqlı $p > 2$ tipi üçün heç bir B. f. yoxdur; hər bir B. f.-nin

dayanıqlı $p < 1$ tipi vardır. Dayanıqlı p tip B. f.-nin p tip B. f. da vardır. 2 tip B. f. eyni zamanda dayanıqlı 2 tip B. f.-dir. Əgər B. f.-nin p tipi varsa, onda bütün $p_1 < p$ üçün onun dayanıqlı p_1 tipi vardır. Əgər B.-nin dayanıqlı p tipi varsa, onda onun bütün $p_1 \leq p$ üçün dayanıqlı p_1 tipi vardır. $p < 2$ üçün isə hər hansı $p_2 > p$ üçün dayanıqlı p_2 tipi vardır.

Əd.: [1] Hoffmann-Jørgensen J., «Aarhus Univ. Matem. inst.», preprint, 1972-73, № 15; [2] Maurey B., Pisier G., «Studia Math.», 1976, v. 58, № 1, p. 45-90; [3] Wołczyński W., в кн.: Probability on Banach space, N. Y., 1978.

BANACH – MAZUR MƏSAFƏSİ «Банаха – Мазура расстояние; Banach – Mazur distance» – bax, Banax fəzası l_p^n -ni özündə müntəzəm saxlayan.

BARİMƏRKƏZ(i) ehtimal ölçüsünün «барн-центр вероятностной меры; baricentre of a probability measure» – bax, Orta qiymət(i) μ ehtimal ölçüsünün.

BARTL – DANFORD – ŞVARTS TEOREMİ «Бартла – Данфорда – Шварца теорема; Bartle – Dunford – Schwartz theorem» – bax, Vektor ölçü.

BARTLETT KORRELYASİON PƏNCƏRƏSİ «Бартлетта корреляционное окно; Bartlett lag window» – bax, Korrelyasion pəncərə.

BARTLETT KRİTERİSİ «Бартлетта критерий; Bartlett test» – normal qanuna təbə bir neçə ümumi çoxluğun dispersiyalarının bərabərliyini empirik verilənlər əsasında yoxlamaq üçün statistik kriteridir.

$S_1^2, \dots, S_k^2$ – uyğun olaraq $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ dispersiyaları üçün qarşılıqlı asılı olmayan statistik qiymətlər olsun; $v_i S_i^2 / \sigma_i^2$ kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcəsi sayı v_i -yə bərabər χ^2 –

paylanması ilə paylanmışlar, $i = 1, \dots, k$, $N = \sum_{i=1}^k v_i$ və

$$M = N \ln \left(\sum_{i=1}^k v_i S_i^2 / N \right) - \sum_{i=1}^k v_i \ln S_i^2$$

olsun. $H_0: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin kritik oblastı

$$M / \left[1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i} - \frac{1}{N} \right) \right] > C(k, v_1, \dots, v_k, \alpha)$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur. Əgər i -nin bütün qiymətlərində $v_i > 3$ olarsa və H_0 hipotezi doğru olarsa, onda bərabərsizliyin sol tərəfindəki kəmiyyət təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$ -ə bərabər χ^2 – paylanması ilə paylanır. $C(k, v_1, \dots, v_k, \alpha)$ kritik qiymətlər cədvəli [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Bartlett M. S., «Proc. Roy. Soc.», 1937, V. A. 160, p. 268-82; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

BARTLETT STATİSTİK QİYMƏTİ «Бартлетта оценка; Bartlett estimator» – bax, Spektral sıxlıq; qeyri-parametrik statistik qiymət.

BARTLETT – ŞEFFE KRİTERİSİ «Бартлетта – Шеффе критерий; Bartlett – Scheffe test» – Berens – Fişer probleminə aid statistik kriteridir. $x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2},$

– asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $j = 1, \dots, n_i$.

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} / n_i, \quad i = 1, 2, \quad n_1 \leq n_2,$$

$$C_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl} (n_1/n_2)^{1/2} - (n_1 n_2)^{-1/2} + n_2^{-1}, & l \leq n_1 \text{ olduqda,} \\ n_2^{-1}, & l > n_1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

$$l_k = x_{1k} - \sum_{l=1}^{n_2} C_{kl} x_{2l}, \quad k = 1, \dots, n_1, \quad l = 1, \dots, n_2,$$

$$L = \sum_{k=1}^{n_1} l_k / n_1, \quad Q = \sum_{k=1}^{n_1} (l_k - L)^2$$

olsun, burada δ_{kl} – Kroneker simvoludur. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \Delta$ (Δ – verilmiş ədəddir) hipotezini yoxlamaq üçün Şeffe kriterisinin kritik oblastı

$$\frac{\sqrt{n_1} |L|}{[Q/(n_1 - 1)]^{1/2}} > C$$

kimi təyin olunur. Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda bərabərsizliyin sol tərəfi sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n_1 - 1)$ -ə bərabər Student t – paylanmasına malik kəmiyyətin moduludur. $n_1 = n_2$ olduğu xüsusi halda Bartlett kriterisi alınır.

Əd.: [1] Scheffe H., «Ann. Math. Statist.», 1943, v. 14, № 1, p. 35-44; [2] Л и н н и к Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

BAŞ KOMPONENTLƏR ANALİZİ «главных компонент анализ; principal component analysis», baş komponentlər metodu, – 1) B. k. a. (statistik yanaşma) – n – ölçülü təsadüfi x vektorunun p – ölçülü

$v = U^T x$ vektoruna xətti ortoqonal U çevirməsinin tapılması üçün ələ metoddur ki, bu metodla hər hansı kriterinin $\min$ ($\max$) alınır və bu da x -in v ilə ən yaxşı ifadə olunmasını təmin edir. Kriterilər aşağıdakılardır:

$$a) \quad p=1, \quad p=2 \quad \text{və s. üçün} \quad \sum_{j=1}^p \sigma^2(v_j) \rightarrow \max, \quad \text{yeni}$$

$$\sigma^2(v_1) \rightarrow \max, \quad \sigma^2(v_2) \rightarrow \max \quad \text{və} \quad v_2 \perp v_1 \quad \text{və s.}$$

$$b) \quad \|D(x-v)\| \rightarrow \min, \quad \text{burada} \quad D(x-v), \quad -x-v \quad \text{təsadüfi}$$

vektorunun dispersion matrisidir və $\|D\|$, – $D(x-v)$ -nin Evklid normasidir.

Bu kriterilər bunların vasitəsilə alınan həllə nəzərən ekvivalentdir, bu həll isə $\mathbf{x}$ vektorunun kovariasiyalar matrisi Ξ -nin məxsusi vektorlarının və məxsusi qiymətlərin tapılmasına gətirir. $U^T U = E$ olarsa, $\|\Xi - \lambda E\| U = 0$, burada E uyğun dim. – ölçülü vahidi matrisdir. Bu halda $\sigma^2(v_j) = \lambda_j$. N həcmli seçim üçün λ_j və U_j -nin maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri $\hat{\lambda}_j$ və $\hat{U}_j$ kovariasiyalar matrisi $S = (N-1)^{-1} X^T X$ üzrə axtarılır, burada X , – $(N \times n)$ – ölçülü seçimi ortalanan matrisdir. Bu nöqtəyi – nəzərdən B. k. a., adətən, *faktor analiz* metodlarından biri kimi hesab olunur.

2) B. k. a. (həndəsi yanaşma) – p dim. – ölçülü ele ortoqonal altfəzanın tapılması metodudur ki, n – ölçülü ($n > p$) fəzanın N nöqtələrinin sisteminin bu altfəzaya konfigurasiyalarının təhrif olunmuş proyeksiyaları minimal olsun. Kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$\|Q - \theta\| \rightarrow \min$, burada $Q = X X^T$, $\theta = V V^T$, X , – n – ölçülü fəzada nöqtələrin verilmiş sisteminin mərkəzlənmiş koordinatlarının matrisidir, $V = X U$, $\|Q - \theta\|$, – $(Q - \theta)$ matrisinin Evklid norması və U – ortonormalanmış ele matrisdir ki, bu matrisin sütunları $u_1, \dots, u_p$ $X^T X$ matrisinin məxsusi vektorlarıdır və bunlar S -dən yalnız $(N-1)^{-1}$ vurduğu ilə fərqlənir. B. k. a.-nin optimal həndəsi xassələri seçimin strukturunun vizual öyrənilməsində istifadə olunur (bax, [2]).

3) B. k. a. (asılı olan müşahidələr ardıcılığı üçün) – təsadüfi $f(x)$ funksiyasının təsadüfi v_j çəkilişli ortonormalanmış koordinat funksiyaları $\varphi_j(x)$ -lərin sistemi üzrə ən yaxşı xətti ayrılışı üçün metoddur (bərpə xətasının kvadratik orta anlamında). Uyğun nəzəriyyə – «təbii ortoqonal hədlərli ayrılış» (bax, [3]) və «Karunen – Loev ayrılışı» adı ilə məlumdur.

Həndəsi interpretasiyada B. k. a. ilk dəfə K. Pirson tərəfindən işlənilmişdir (bax, [4]); H. Hotelling B. k. a.-nin statistik nəzəriyyəsinə vermişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] Rao C. R., «Sankhya, ser. A», 1964, v. 26, p. 329–58; [2] Gower J. C., «Biometrika», 1966, v. 53, № 3/4, p. 325–38; [3] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1960, № 3, с. 432–39; [4] Pearson K., «Philos. Mag.», 1901, v. 2, p. 559–72; [5] Hotelling H., «J. Educ. Psych.», 1933, v. 24, p. 498–520; [6] Jolliffe I. T., Principal Component Analysis, 1986; [7] Андрукович П. Ф., в кн.: Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях, М., 1974, с. 189–228; [8] Okamoto M., в кн.: Proceed. of the Second Intern. Symp. of Mult. Analysis, N. Y. – L., 1969, p. 673–85; [9] Anderson T. W., «Ann. Math. Stat.», 1963, v. 34, № 1, p. 122–48.

BAŞ KOMPONENTLƏR METODU « главных компонент метод; principal components method » – bax, *Baş komponentlər analizi*.

BAYES DÜSTURU « Байеса формула; Bayes formula » – bax, *Beyes düsturu*.

BBQKİ TƏNLİKLƏR ZƏNCİRİ « ББККИ цепочка уравнений; BBGKY equations hierarchy / chain » – bax, *Boqolyubov tənliklər zənciri*.

64 BELLMAN

BELL ƏDƏDLƏRİ « Белла числа; Bell numbers » – bax, *Kombinator ədədlər, Təsadüfi bölgü*.

BELLMAN OPTİMALLIQ PRİNSİPİ « Беллмана принцип оптимальности; Bellman optimality principle » – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma*.

BELLMAN TƏNLİYİ « Беллмана уравнение; Bellman equation » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses, İdarəolunan sıçrayışvari proses*.

BELLMAN – HARRİS PROSESİ « Беллмана – Харриса процесс; Bellman – Harris process », (G, h) – proses, – *şaxələnen proseslər nəzəriyyəsində*

əsas modellərdən biridir. R. Bellman və T. Harris tərəfindən [1]-də *Qalton – Vatson prosesi* və kəsilməz zamanlı şaxələnen Markov prosesinin ümumiləşməsi kimi təklif olunmuşdur. B. – H. p.-ində hissəciklər bir-birində asılı olmadan evolyusiya edir. Bir hissəciyin yaşama müddəti – paylanma funksiyası $G(t)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir. Hissəcik $h(s)$ doğuran funksiyasına müvafiq təsadüfi sayda varislər doğuraraq məhv olur. Əgər $Z(t)$ – B. – H. p.-də t anında hissəciklər sayı olarsa, onda

$$F(t; s) = \mathbf{M} [s^{Z(t)} | Z(0) = 1]$$

funksiyası

$$F(t; s) = \int_0^t h(F(t-u; s)) dG(u) + s(1-G(t))$$

integral tənliyini ödəyir.

Bax, *Şaxələnen proses, Kritik şaxələnen proses, Şaxələnen proses; requlyarlıq*.

Əd.: [1] Bellman R., Harris T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601–04.

BELYAYEV ALTERNATİVİ « Беляева альтернатива; Belyayev alternative » – bax, *Təsadüfi proses; trayektoriyaların requlyarlılığı*.

BENFORD QANUNU « Бенфорда закон; Benford's law » – bax, *İlk mühüm rəqəm qanunu*.

BER σ – CƏBRİ « бэровская σ – алгебра; Baire σ – algebra » – T topoloji fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbridir; T ele topoloji fəzadır ki, bütün $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ kəsilməz funksionalları bu fəzaya nəzərən ölçülən funksionallardır. B. σ – c. Borel σ – cəbrinin tərkibindədir və fəza metrikləşən olduğu halda bu σ – cəbrlər üst-üstə düşür.

Kompakt fəza metrikləşməyən olduğu halda B. σ – c. xüsusilə mühüm əhəmiyyət kəsb edir. B. σ – c.-nin elementləri *Ber çoxluqları* adlanır. G_δ çoxluqlarının doğruduğu σ – halqanın elementləri bəzən *Ber çoxluqları* kimi də anlaşılr.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

BER ÇOXLUĞU « бэровское множество; Baire set » – bax, *Ber σ – cəbri*.

BER FUNKSİYASI « бэровская функция; Ber function » – bax, *Ber sinfi*.

BER ÖLÇÜSÜ « Бэра мера; Bair measure » – 1) lokal kompakt Hausdorff topoloji fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – halqada təyin olunmuş, kompakt G_δ – çoxluqlarının doğruduğu və bu çoxluqlarda sonlu qiymətlər alan ölçüdür (bax, [1]).

2) B. ö. tamamilə rəqulyar topoloji T fəzasının Bəre σ – cəbrində təyin olunmuş ölçüdür. Hər bir sonlu B. ö. rəqulyar ölçüdür. Hər bir τ_0 – hamar sonlu B. ö. yeganə surətdə τ – hamar ölçüyə (sonlu və Borel) qədər davam olunur. Bu halda əgər $B_0(T)$ -nin açıq çoxluqlarının $U_\lambda U_\lambda = T$ şərtini ödəyən ixtiyari artan (U_λ) şəbəkəsi üçün $\sup_\lambda \nu(U_\lambda) = \nu(T)$ bərabərliyi

ödənilərsə, sonlu B. ö. ν , T -də τ_0 – hamar ölçü adlanır.

Tamamilə rəqulyar Hausdorf fəzasında hər bir sıx sonlu B. ö., (bax, *Sıx ölçü*) yeganə surətdə, *Radon ölçüsünə* qədər davam olunur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953, с. 218–23.

BER SİNFİ « Бэра класс; Baire class » – bax, *Borel funksiyası*.

BER TƏSNİFATI « Бэра классификация; Baire classification » – bax, *Borel funksiyası*.

BERENS – FİŞER PROBLEMİ « Беренс – Фишера проблема; Behrens – Fisher problem » – dispersiyaları naməlum iki *normal paylanmanın* riyazi gözlemələrinin müqayisəsi üçün statistik məsələ ilə əlaqədar yaranmış analitik problemdir. $x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2}$, – asılı

olmayan, $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ parametrləri normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $i=1, 2$. $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, $j=1, \dots, n_i$ parametrlər vektorunun kafi statistikası $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2)$ toplusudur,

$$\bar{X}_i = \sum_{1 \leq j \leq n_i} x_{ij} / n_i,$$

$$S_i^2 = \sum_{1 \leq j \leq n_i} (x_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i=1, 2.$$

B. – F. p. ele K_α çoxluğunun təyin olunmasından ibarətdir ki, $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ hipotezi doğru olduğu halda $\{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2) \in K_\alpha\}$ hadisəsinin ehtimalı naməlum parametrlərdən asılı deyildir və $\alpha \in (0, 1)$ olan, əvvəlcədən verilmiş ixtiyari α -ya dəqiq olaraq bərabər olur (Δ – verilmiş ədəddir). Seçmələrin həcmi n_1 və n_2 -nin tək və ya cüt olmasından asılı olmayaraq B. – F. p.-nin həlli vardır (bax, [2]). B. – F. p.-nin təqribi həlləri (bax, məs., [3] – [6]) ele L_α çoxluğunun təyin olunmasından ibarətdir ki, α -nın verilmiş qiymətində $\{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)/S_1, S_1^2/S_2^2 \in L_\alpha\}$ hadisəsinin ehtimalı H_0 hipotezinin doğruluğu şərtlə σ_1^2/σ_2^2 kəmiyyətindən zəif asılı olur. Bartlett – Şeffe kriterisi tipli kriterilər kafi statistika ilə ifadə olunmayan statistikalarla əsaslandığından güclü sayılır.

Əd.: [1] Behrens W. U., «Landwirth. Jahrb.», 1929, Bd. 68, № 6, S. 807–37; [2] Ливнико Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Selected papers in statistics and probability by A. Wald, N.Y. – [a.o.], 1955, p. 669–95; [4] Пагузова В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 561–69; [5] Welch B. L., «Biometrika», 1947, v. 34, p. 28–35; [6] Lee A. F. S., Gurland J., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1975, v. 70, p. 933–41.

BERQ METODU avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün «**Бэра метод** оценивания параметров авторегрессии; **Burg's method of estimation of parameters of autoregressive process**» – avtoreqressiya əmsalları φ_i -lərin, $i=1, \dots, p$ və qalıq küy dispersiyası

$\sigma_a^2(p)$ -nin p tərtib avtoreqressiya modelində qiymətləndirilməsi metodudur. Bu modeldən istifadə olunması – $x_1, x_2, \dots, x_n$ müşahidələr toplusunun p tərtib avtoreqressiya prosesinin realizasiyası olduğu fərziyyəsinə əsaslanır (bax, *Xətti filtr*). C. Berqin (J. Burg) qiymətləndirmə metodunun (bax, [1]) ənənəvi sxemlərdən (bax, *Yul – Uoker statistik qiymətləri*, *Boks – Centkins metodu*) fərqi ondan ibarətdir ki, müşahidələrin intervalı çərçivəsində sıranın irəli və geri biraddımlı ekstrapolyasiyasında xətlərin empirik dispersiyaları cəminin yansına bərabər $\sigma_a^2(p)$ statistik qiymətindən istifadə olunur. B. m. ilə alınan sonuncu avtoreqressiya əmsalı φ_p -nin («inikas əmsalı») modulunun vahiddən ciddi kiçik olması təmin olunur. B. m.-na əsasən hesablanan spektral sıxlığın parametrik statistik qiymətləri *Yul – Uoker tənliklərinin* (bax, [2]) birbaşa həlli nəticəsində alınan statistik qiymətlərdən dispersiyasının böyüklüyü və tezliyin daha yüksək ola bilməsi ilə fərqlənir.

B. m.-da müşahidələr sırasını biraddımlı ekstrapolyasiya xətləri ardıcılıqlına çevirən xətti filtrin əmsallarının statistik qiymətləri axtarılır. *Levinson alqoritmindən* istifadə olunan uyğun hesablamaların sxemi, məs., [3], [4]-də şərh olunmuşdur. Avtoreqressiya əmsallarının və qalıq küy dispersiyasının hesablanması üçün altproqramlar [2], [5], kompleks proqram – [4]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Modern Spectrum analysis, N. Y., 1978, p. 38–41; [2] Ulrich T., Bishop T., «Rev. Geophys. Space Phys.», 1975, v. 13, № 1, p. 183–200; [3] Smylie D., Clarke G., Ulrich T., «Methods in Comput. Phys.», 1973, v. 13, p. 391–430; [4] Привалевский В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), М., 1985; [5] Канасевич И. Э. Р., Анализ временных последовательностей в геофизике, пер. с англ., М., 1985.

BERLİNG BƏRABƏRSİZLİYİ « Берлинга неравенство; Burling's inequality » – bax, *Tam variasiya metriksi*.

BERNŞTEYN BƏRABƏRSİZLİYİ « Бернштейна неравенство; Bernstein's inequality » – klassik *Çəbişev bərabərsizliyinin* dəqiqləşdirilmiş forması olub, S. N. Bernşteynə (1911, bax, [1]) məxsusdur; böyük yayınmalar ehtimalının qüvvət üstlü statistik qiymətini eksponensial surətdə azalanla əvəz etməyə imkan verir (bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*).

Əgər $MX_j = 0$ və $MX_j^2 = b_j$, $j=1, \dots, n$ şərtlərini ödəyən,

asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $M|X_j|^l \leq b_j H^{l-2} l! / 2$ ($l > 2$, H , – j -dən asılı olmayan sabitdir) bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda $S_n = X_1 + \dots + X_n$ cəmi üçün $r > 0$ olduqda

$$P\{|S_n| > r\} \leq 2 \exp\{-r^2/2(B_n + Hr)\}, \quad (1)$$

– Bernşteyn bərabərsizliyi doğrudur.

BERNŞTEYN 65

$B_n = \sum b_j$. Eyni qanunla paylanmış məhdud X_j təsadüfi kəmiyyətləri üçün ($MX_j = 0$, $MX_j^2 = \sigma^2$ və $|X_j| \leq L$, $j = 1, \dots, n$) (1) bərabərsizliyi

$$P\{|S_n| > \sigma\sqrt{n}\} \leq 2\exp\{-t^2/2(1+a/3)\} \quad (2)$$

münasibəti ilə daha sadə şəkildə ifadə olunur: $a = L/\sqrt{n\sigma}$. A. N. Kolmoqorov (1)-də ehtimalın aşağı qiymətini almışdır. Bernşteyn – Kolmoqorov qiymətləndirilmələri təkrar loqarifm qanununun isbatında istifadə olunur. (2)-nin dəqiqliyi haqqında müəyyən təsəvvür (2) bərabərsizliyinin sol tərəfi üçün mərkəzi limit teoreminin

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \left(1 - \frac{\theta}{t^2}\right) e^{-t^2/2}, \quad 0 < \theta < 1$$

düsturu ilə verilən təqribi qiyməti ilə müqayisədən alınır. 1967-dən sonra birölçülü B. b.-lərindən başqa çoxölçülü və sonsuzölçülü hallar üçün də analoji bərabərsizliklər alınmışdır.

Əd.: [1] Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. 4 изд., М. – Л. 1946; [2] Колмогоров А. Н. «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126–35; [3] Hoeffding W., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1963, v. 58, № 301, p. 13–30; [4] Прохоров Ю. В. «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 266–74; [5] Прохоров А. В. «Матем. заметки», 1968, т. 3, в. 6, с. 731–39; [6] Юринский В. В. «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 1, с. 106–07.

BERNŞTEYN TEOREMİ «Бернштейна теорема; Bernstein theorem» – bax, *Böyük ədədlər qanunu*.

BERNULLİ AXINI «Бернулли поток; Bernoulli flow» – bax, *Bernulli yerindəyişməsi*.

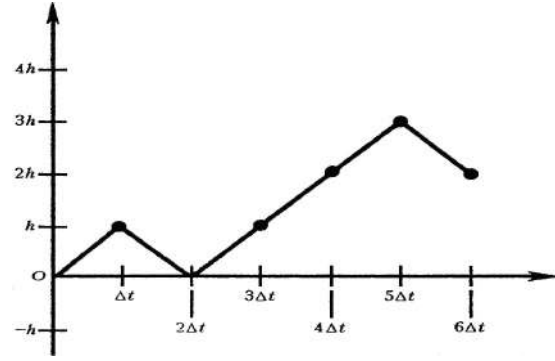
BERNULLİ ARDICILLIĞI «Бернулли последовательность; Bernoulli sequence» – bax, *Binomial paylanma*.

BERNULLİ AVTOMORFİZMİ «Бернулли автоморфизм; Bernoulli automorphism» – bax, *Bernulli yerindəyişməsi*.

BERNULLİ DOLAŞMASI «Бернулли блуждание; Bernoulli random walk» – *Bernulli sınaqlarının* doğruduğu *təsadüfi dolaşmadır*. B. d. timsalında daha ümumi təsadüfi dolaşmaların bəzi əsas cəhətlərini izah etmək mümkündür. İntuitiv nöqtəyi – nəzərdən təsadüflüyün paradoksal xassələri bu sadə sxemdə aydın olur.

B. d.-ni, məs., aşağıdakı terminlərlə ifadə etmək olar. Məs., hissəcik x oxu üzrə kh (k – tam ədəddir, $h > 0$) tipli nöqtələr şəbəkəsilə hərəkət edir («dolaşır»). Hərəkət $t=0$ anında başlayır və hissəciyin vəziyyəti yalnız $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ diskret anlarında qeyd olunur. Hissəciyin koordinatı hər addımda əvvəlki vəziyyətdən asılı olmayaraq h qədər p və $q=1-p$ ehtimalları ilə uyğun olaraq ya artır, yaxud azalır.

Beləliklə, hissəciyin sağa və ya sola yerindəyişməsi (uyğun olaraq «müvəffəqiyyət» və «qeyri – müvəffəqiyyət») «müvəffəqiyyət» ehtimalı p -yə bərabər olan Bernulli sxemi ilə ifadə olunur. B. d., adətən, həndəsi olaraq təsvir olunur: zaman oxu t – absis oxu, x oxu isə ordinat oxu kimi götürülür (bax, şəkil 1, burada hərəkəti 0 anında başlayan hissəciyin hərəkət qrafikinin başlanğıc hissəsi verilmişdir).



Şəkil 1. Bernulli hərəkəti edən hissəciyin hərəkət qrafikinin başlanğıc hissəsi.

ξ_i , i -ci addımda hissəciyin yerindəyişməsinə (i addımına) bərabər təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı əmələ gətirir.

Hərəkətdə olan hissəciyin $n\Delta t$ anındakı vəziyyətinin koordinatı $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti ilə təyin olunur. Buna görə də, B. d.-nin qrafiki təsadüfi kəmiyyətlərin artmaqda olan cəmlərini əyani olaraq təsvir edir və qrafikdə olan bu dəyişmələrə xas olan bir çox seçiyəvi cəhətlər daha ümumi təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün də dəyişməz qalır. Klassik «iffas məsələsi»ndə oyunçulardan birinin kapitalının dəyişmələri də bu qrafiklə təsvir edilir (məhz bu məsələ ilə əlaqədar B. d.-nin bir çox müşahidə olunan hadisələrinin ehtimalları üçün düsturlar tapılmışdır).

Fizikada birölçülü diffuziya proseslərinin (bax, *Diffuzion proses*) «kobud» təsvirində, molekulların təsviri ilə hərəkətdə olan maddi hissəciklərin Braun hərəkəti üçün B. d. istifadə olunur.

B. d. ilə bağlı mühüm faktlar aşağıdakılardır (əgər qeyd olunmursa, $\Delta t=1$, $h=1$ qəbul olunmuşdur).

Qayıdış ehtimalları. Hissəcik hərəkəti sıfırdan başlayır. Bu halda hissəciyin sıfır vəziyyətinə heç olmasa bir qayıdış ehtimalı $1 - |p - q|$ -yə bərabərdir, yəni $p = q = 1/2$ olan simmetrik halda vahidə bərabərdir, $p \neq q$ olan simmetrik halda isə bu ehtimal vahiddən kiçikdir. Simmetrik halda τ_1 – hissəciyin sıfır vəziyyətinə ilk qayıdışa qədər müddəti, τ_2 – birinci və ikinci qayıdışlar arasındakı müddət və τ_3 – ikinci və üçüncü qayıdışlar arasındakı müddət və i. a. olarsa, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ məhz asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. τ_i təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonsuzluqdur. Hissəciyin sıfır vəziyyətinə N -ci qayıdışına qədərki müddət, yəni $\tau_1 + \dots + \tau_N$ təsadüfi kəmiyyəti ($cəmi$) N^2 kimi artır, daha dəqiq $\tau_1 + \dots + \tau_N < xN^2$ bərabərsizliyinin ehtimalının limiti

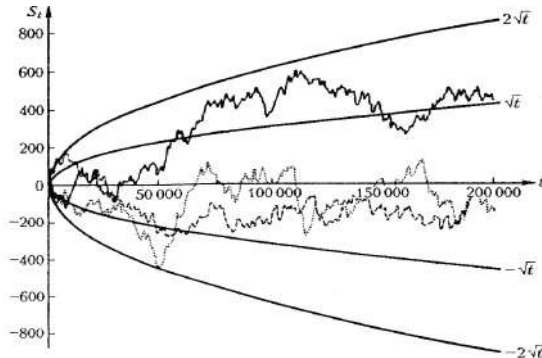
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$$

kəmiyyətinə bərabərdir. $2n$ addımda qayıdışlar sayı N_{2n} təsadüfi kəmiyyətinin orta qiyməti

$$M(N_{2n}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} C_{2n}^n - 1$$

düsturu ilə təyin olunur və bu kəmiyyət $\sqrt{n}$ kimi artır:

$$M(N_{2n}) \sim 2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$



Şəkil 2. Üç Bernulli dolaşmasının qrafiki, hər bir dolaşma 200000 zaman vahidi ərzində müşahidə olunmuşdur.

Bu faktdan paradoksal nəticə: simmetrik B. d.-nin qrafikindəki ardıcıl surətdə sıfır qayıdışlar arasındakı «dalğalar»ın son dərəcə uzun (şəkil 2) olması nəticəsi alınır. Bununla bir də belə vəziyyət əlaqədardır ki, B. d.-sının qrafikinin absis oxundan yuxarıda olduğu müddətin hissesi T_n/n üçün $1/2$ -ə yaxın olan qiymətləri ən az ehtimallı olur. Daha dəqiqliklə, $k \rightarrow \infty$, $n-k \rightarrow \infty$ olduqda $T_{2n} = 2k$ bərabərliyinin ehtimalı $p_{2n,2k}$ üçün

$$p_{2n,2k} \sim \frac{1}{\pi n \sqrt{x(1-x)}}$$

düsturunun doğruluğu hökmü alınır, burada $x = x_{n,k} = k/n$. Bu hökmdən nəticə kimi arksinus qanunu alınır: hər bir $0 < \alpha < 1$ şərtini ödəyən α üçün

$$P\{T_n/n < \alpha\} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}.$$

Bu fakta əsaslanaraq göstərmək olar ki, 10000 addıma hissəcik $\geq 0,1$ ehtimalı ilə müsbət tərəfdə zamanın 9930 andan çox dəfə qalır, başqa sözlə, hissəcik hər on həftə bir dəfədən az olmaya-raq müsbət tərəfdə olacaqdır (ilk baxışdan bu hal mənasız görünür).

Maksimal yayınma. Hərəkətdə olan hissəcik vahid ehtimalla $p > q$ olduqda $+\infty - a$, $p < q$ olduqda $-\infty - a$ gedir.

Buna görə də, məs., $p < q$ olduqda $S^+ = \max_{0 \leq t < \infty} S_t$ təsadüfi

kəmiyyəti təyin olunur və bu kəmiyyətin ehtimalı

$$P\{S^+ = x\} = (1 - p/q)(p/q)^x$$

olur.

Sərhədlərli Bernulli dolaşması. Bir çox hallarda uducu və ya əksedici ekranları B. d.-na baxılır. Məs., fərz olunur ki, dolaşma sıfırdan başlayır. a nöqtəsində uducu ekranın olması hissəciyin bu nöqtəyə çatdıqda həmin nöqtədə qalması kimi anlaşılır, yəni hissəcik hərəkət etmir və a nöqtəsində qalır.

$a = (k + 1/2)$ nöqtəsində ($k \geq 0$, tam ədəddir) əksedici ekran olduğu halda, hissəcik q ehtimalı ilə k -dan $k-1$ vəziyyətinə keçir və p ehtimalı ilə öz yerində qalır. Udulma ehtimalları və bu və ya digər nöqtələrə çatma ehtimallarının hesablanması üçün əsas vasitə fərqlər tənlikləridir. Məs., uducu nöqtənin $-a$ ($a > 0$) olduğu fərz olunur. $z_{t,x} = t$ anında x nöqtəsində olan hissəciyin n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) udulmadığı ehtimalıdırsa, onda bu ehtimal

$$z_{t,x} = q z_{t+1,x-1} + p z_{t+1,x+1}, \quad x > -a$$

tənliyi və

$$z_{t,-a} = 1, \quad 0 \leq t \leq n$$

$$z_{n,x} = 0, \quad x > -a$$

sərhəd şərtlərlə təyin olunur. $p = q = 1/2$ olduqda bu məsələnin həlli A. Muavr (A. Moivre) və P. Laplas (P. Laplace) məlum idi. Laplas düsturu aşağıdakı şəkildədir:

$$z_{t,x} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin \varphi} (\cos \varphi)^t d\varphi, \quad (*)$$

burada

$$\gamma = a + x + 2 \left[\frac{n-t-x-a}{2} \right] + 1.$$

Diffuziya məsələləri ilə bağlı hallarda, məs., $p = q = 1/2$, $\Delta t = 1/N$, $h = 1/\sqrt{N}$ olduğu halda B. d. sxemi üçün $N \rightarrow \infty$ olduqda hesablanmış ehtimallar Braun hərəkəti üçün analogi ehtimallara bərabər olan limitlərə yaxınlaşır. Hərəkəti sıfırdan başlayan hissəciyin T anına qədər uducu ekranda $-a$ nöqtəsində hərəkəti dayandırması hadisəsinin ehtimalını hesablamaq tələb olunur. $n/N = T$, $t=0$, $x=0$, $a/\sqrt{N} = \alpha$ olduqda, (*) düsturunda limitə keçdikdə

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sqrt{N}} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{N}}^\infty e^{-z^2/2} dz$$

kəmiyyəti alınır. Bu kəmiyyət Braun hərəkətində olan hissəciyin koordinatı $X(v)$ -nin $\min_{0 \leq v \leq T} X(v) \leq -a$ bərabərsizliyini ödəməsi

ehtimalına, yəni hissəciyin $-a$ səddində udulma ehtimalına bərabərdir. Bu və ya digər surətdə oxşar paralel münasibətləri tam təsvir etmək üçün ümumi nöqtəyi – nəzərdən yanaşaraq «artmaqda olan cəmlərin» diskret prosesindən kəsilməz təsadüfi prosese keçidi araşdırmaq olar.

B. d. sxemi ilə gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu və təkrar loqarifm qanunu kimi təsadüfi kəmiyyətlərin cəminə xas olan qanunauyğunluqları əyani surətdə izah etmək olar.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1-2. М., 1984.

BERNULLİ ENDOMORFİZMİ «Бернулли эндоморфизм; Bernoulli endomorphism» – bax. Bernulli yerindəyişməsi.

BERNULLİ ƏDƏDLƏRİ « Бернулли числа; Bernoulli numbers » – Ya. Bernullinin adı ilə adlandırılmış.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

aynı şəkildə təyin olunan, rəşional B_n ədədləridir. İlk dəfə B. ə. natural qüvvət üstlü ardıcıl natural ədədin qüvvət üstlü cəmlərinin öyrənilməsi ilə əlaqədar Bernulli tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1]). Bəzən $\beta_n = (-1)^{n-1} B_{2n}$, $n \geq 1$ ədədləri də B. ə. adlanır. $n \geq 3$ şərtini ödəyən bütün təkqiymətli n -lər üçün $B_n = 0$, ilk B. ə.-nin qiymətləri isə $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$; $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/2730$ kimidir. B. ə.-nin sonrakı qiymətləri isə

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n > 1$$

rekurrent münasibətilə təyin olunur.

$n \leq 90$ olduğu hallarda B_{2n} üçün dəqiq qiymətlər, $n \leq 250$ halları üçün təqribi qiymətlər hesablanmışdır (bax, [2]).

z -in cüt qiymətlərində B. ə. $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}$ Riman dzeta –

funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n), \quad n \geq 1.$$

B. ə. analiz, ədədlər nəzəriyyəsinin, kombinatorikanın, riyazi statistikanın bir çox məsələlərində mühüm rol oynayır, bir sıra maraqlı arifmetik və kombinator xassələrə malikdir.

Qeyri – məxsusi inteqrallar sırasının qiymətləri B. ə. vasitəsilə ifadə olunur, məs.:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{ax} + 1} dx = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{2n} |B_{2n}|, \quad a > 0, \quad n \geq 1;$$

bunlar bir çox analitik funksiyaların qüvvət sıralarına aynılışdakı əmsallar olur, məs.:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} \frac{z^{2n-1}}{z}, \quad |z| < \frac{\pi}{2};$$

$$\ln \left(\frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!} \frac{z^{2n}}{z}, \quad |z| < \pi.$$

B. ə. Eyler – Makleron cəmləmə düsturunda iştirak edirlər:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = \int_x^{x+n} f(t) dt - \frac{1}{2} (f(x+n) - f(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^r \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(x+n) - f^{(2k-1)}(x)) + R_r(x, n).$$

Təqribi hesablamalar üçün istifadə olunan asimptotik Stirling sıra-
sı da B. ə. ilə ifadə olunur:

$$\ln \Gamma(x+1) \approx (x + 1/2) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} x^{-2k+1}.$$

Riyazi statistikada B. ə.-nə, əsas etibarilə, müşahidələri qruplaşdırarkən momentlərə Şepard düzəlişləri ilə əlaqədar təsadüf olunur. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması mütləq kəsilməz paylanmadırsa və bu paylanma h uzunluqlu intervallarla qruplaşdırılırsa və $\bar{\alpha}_v$ qruplandırılmış paylanmanın v tərtib momentidir, onda uyğun şərtlərlə

$$\alpha_v \equiv M \xi^v = \sum_{k=0}^v C_v^k (2^{1-k} - 1) B_k h^k \bar{\alpha}_{v-k};$$

semiinvariantlar üçün isə daha sadə ifadə:

$$\kappa_v = \bar{\kappa}_v - B_v h^v / v, \quad v > 1, \quad \kappa_1 = \bar{\kappa}_1$$

olur.

Mərkəzi momentlər, ikiölçülü momentlər və semiinvariantlar üçün analogi düsturlar mövcuddur (bax, [3]).

Əd.: [1] Б е р н у л л и Я., О законе больших чисел, пер. с лат., 1986; [2] Tables of the higher mathematical functions, v. 2, Bloomington, 1935; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Г е л ь ф о н д А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [5] Б у р б а к и Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965.

BERNULLİ PAYLANMASI « Бернулли распределение; Bernoulli distribution » – bax, *Binomial paylanma*.

BERNULLİ SXEMİ « Бернулли схема; Bernoulli scheme » – bax, *Bernulli sınaqları*.

BERNULLİ SINAQLARI « Бернулли испытания; Bernoulli trials » – yalnız iki nəticə ilə (məs., «müvəffəqiyyət» və «qeyri – müvəffəqiyyət») ifadə oluna bilən *əslə olmayan sınaqlardır* ki, ixtiyari sınaqda baş verə bilən eyni bir nəticənin ehtimalı sınaqdan sınağa dəyişmir. B. s. ehtimal nəzəriyyəsində baxılan əsas sxemlərdən biridir.

p – bir sınaqda «müvəffəqiyyət» (sadəlik üçün «M» ilə işarə etmək olar) baş verməsi ehtimalı, $q = 1 - p$ isə bir sınaqda «qeyri – müvəffəqiyyət» («Q» simvolu ilə işarə etmək olar) baş verməsi ehtimalı olsun. Onda n sayda sınaqlar ardıcılığında, məs., $\underbrace{MMQ \dots QM}_{n-3}$ düzümünün ehtimalı $\underbrace{ppq \dots qp}_{n-3} =$

$= p^3 q^{n-3}$ olur. B. s. sxemi ilə bir çox ehtimal paylanmalar bilavasitə bağlıdır. Məs., *binomial paylanma*, *mənfi binomial paylanma*, *həndəsi paylanma* belə paylanmalardır. n sayda B. s.-nda baş verən müvəffəqiyyətlər sayı S_n olsun. Onda $\{S_n = k\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur, $k = 0, 1, \dots, n$; yeni S_n təsadüfi kəmiyyəti binomial paylanma qanununa tabədir. Binomial paylanma üçün (*) düsturunda $n \rightarrow \infty$ olduqda, $P\{S_n = k\}$ ehti-

malı ya normal paylanmaya, yaxud Puasson paylanmasına yaxınlaşır (bax, [1], [2]). X_1 – ilk müvəffəqiyyətə qədər aparılan sınaqların sayı olsun. Onda $\{X_n = k\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$\underbrace{q \cdot \dots \cdot q}_k p \text{ hasili ilə təyin olunur və } P\{Y_1 = k\} = q^k p.$$

$k = 0, 1, \dots$. Bu halda Y_1 təsadüfi kəmiyyəti *həndəsi paylanma* qanununa tabedir. Əgər Y_r , – r -ci «müvəffəqiyyət» baş verənə qədər, «qeyri – müvəffəqiyyət»lərin sayı olarsa, onda r -ci «müvəffəqiyyət» yalnız $(r+k)$ -cı sınaqda baş verdiyinə görə $\{Y_r = k\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P\{Y_r = k\} = C_{r-1+k}^k p^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

düsturu ilə təyin olunur. Bu halda Y_r təsadüfi kəmiyyəti *mənfi binomial paylanma* qanununa tabedir. B. s.-ində müvəffəqiyyətlər sayı S_n -i n sayda asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi ilə ifadə etmək olar; bu halda ξ_i – bir sınaqda «müvəffəqiyyət» sayını ifadə edən ele təsadüfi kəmiyyətdir ki, $P\{\xi_i = 1\} = P\{M\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = P\{Q\} = q$, $p + q = 1$. Onda $\xi_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminə aid olan bir çox mühüm qanunauyğunluqlar ilk dəfə B. s. sxemi üçün müəyyənləşdirilmişdir (*Bernulli teoremi, böyük ədədlər qanunu, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu, təkrar loqarifm qanunu, mərkəzi limit teoremi* və s.).

Sonsuz B. s.-nin ciddi araşdırılması üçün 0 və 1-dən ibarət sonsuz ardıcılıqlar fəzasında ehtimal ölçüsünün təyin olunması zəruridir. Bu ya bilavasitə, ya da ki, $p = q = 1/2$ halı üçün aşağıda şərh olunan qaydada təyin olunur. ω , – $(0, 1)$ parçasında ixtiyari seçilmiş ədəd, *müntəzəm qanunla* paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun. $\xi_j(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti 0 və ya 1 qiymətlərindən birini alır, $j = 1, 2, \dots$.

Onda $\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega)/2^j$ cəmi ω -nin ikilik kəsre ayrılışıdır.

Ayındır ki, $P\{\xi_j(\omega) = 0\} = P\{\xi_j(\omega) = 1\} = 1/2$ və $\xi_j(\omega)$ -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Deməli, ω -nın 0 və 1-lərin müəyyən düzümü ilə ikilik kəsre ayrılışı B. s. sxemi ilə təsvir olunur, bu halda $p = 1/2$. Lakin $(0, 1)$ -də ölçünü ele təyin etmək olar ki, ixtiyari p ($p \neq 1/2$ olduqda Lebeq ölçüsünə görə singulyar ölçü alınır) üçün B. s. sxemi alınsın.

B. s. bir çox hallarda həndəsi olaraq izah edilir (bax, *Bernulli dolaşması*). B. s. ilə bağlı bir sıra ehtimallar iflas məsələləri ilə əlaqədar olaraq ehtimal nəzəriyyəsinin ilkin mərhələlərində həsablənmişdir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

BERNULLİ TEOREMİ « *Бернулли теорема; Bernoulli theorem* » – *böyük ədədlər qanununun* tarixən ilk dürüst ifadəsidir. B. t. Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) « *Ars conjectandi* » (Fərzətmələr məharəti) kitabının dördüncü hissəsində şərh olunmuşdur. Kitabın bu hissəsi ehtimal nəzəriyyəsi üzrə ilk ciddi əsər sayılır. B. t. *asılı olmayan sınaqlar* ardıcılığına (bax, *Bernulli sınaqları*) aiddir; bu sınaqlardan hər birində hər hansı

müşahidə oluna bilən müəyyən bir hadisənin baş vermə ehtimalı («müvəffəqiyyət» ehtimalı) p -yə bərabərdir. n – sınaqların sayı, m – bu sınaqlarda «müvəffəqiyyət»lər baş verməsi sayı olsun. B. t.-ində hökm olunur ki, ε və η ixtiyari müsbət ədədlər olarsa, ele n_0 ədədi vardır ki, $n \geq n_0$ şərtini ödəyən bütün n -lər üçün

$$P\{-\varepsilon \leq m/n - p \leq \varepsilon\} \geq 1 - \eta$$

münasibəti doğrudur. Ya. Bernullinin bu teorem üçün verdiyi isbat, (və yalnız binomial paylanmada ehtimalların ən böyük ehtimalı qiymətdən uzaqlaşdıqca azalması xüsusiyyətinin öyrənilməsinə əsaslanan) verilmiş ε və η -ya görə n_0 üçün sərhədi təyin etməyə imkan verən bərabərsizliyə əsaslanır. Məs., Ya. Bernulli hesablamışdır ki, $p = 2/5$ və $n \geq 25550$ olduqda

$$P\{-1/50 \leq m/n - p \leq 1/50\} \geq 0,999$$

olur.

Ya. Bernullinin ilkin mülahizələri bir qədər təkmilləşdirilməklə, kifayətdir ki, n_0 ədədi

$$n_0 > (1 + \varepsilon) / \varepsilon^2 \log 1/\eta + 1/\varepsilon$$

şərti ödənilməklə seçilsin və buna görə də, $|m/n - p| > \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalı $(1 - P)$ -nin qiymətləndirilməsi üçün $2 \cdot \exp\{-n\varepsilon^2/2\}$ alınır.

Yuxanda verilmiş misal üçün $n \geq 17665$ şərti alınır (daha mürekkəb qiymətləndirmələrdən aydın olur ki, $n \geq 6502$ götürmək kifayətdir; müqayisə üçün: Muavr – Laplas teoreminə əsasən n_0 üçün təqribi qiymət 6498 alınır). $1 - P$ ehtimalı üçün *Bernşteyn bərabərsizliyindən* və onun analoglarından istifadə etməklə digər qiymətləndirmələr almaq olur (bax, *Binomial paylanma*).

Əd.: [1] Бернулли Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Берштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946.

BERNULLİ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİ « *Бернулли случайная величина; Bernoulli random variable* » – 1) 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, p və $1 - p$ ($0 < p < 1$) ehtimalları ilə alan təsadüfi kəmiyyətdir. Əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ – asılı olmayan B. t. k.-ləridirsə, onda $\xi_1 + \dots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti binomial paylanma qanunu ilə paylanır.

2) -1 və $+1$ qiymətlərini eyni ehtimalla alan təsadüfi kəmiyyətdir. Rademaxer ardıcılığı asılı olmayan B. t. k.-ə misaldır.

BERNULLİ VEKTORU « *Бернулли вектор; Bernoulli vector* » – bax, *Lyusian*.

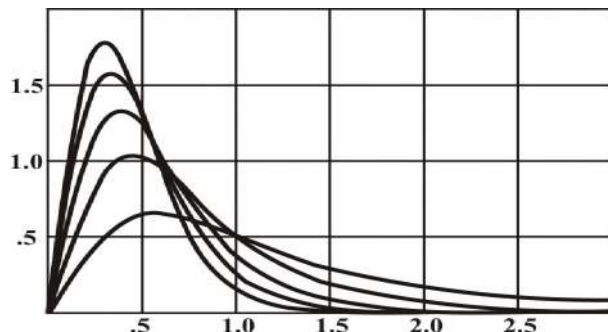
BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ « *Бернулли сдвиг; Bernoulli shift* » – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının realizasiyaları fəzasında yerindəyişmə çevirməsidir. B. y. T – hesabı sayda $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ehtimal fəzalarının düz hasilili $\prod_{i \in I} (Y_i, \mathcal{B}_i, \nu_i)$ fəzasında təsir göstərir (bu zaman $I = \mathbb{Z}^+$ və ya $\mathbb{Z}$) və bu

çevirmə $\omega = (\omega_i, i \in I)$ ardıcılığını $\omega' = (\omega'_i, i \in I)$ ardıcılığına çevirir. burada $\omega'_i = \omega_{i+1}$. Əgər $I = \mathbb{Z}^+$ olarsa, onda T – birtərəfli Bernulli yerindəyişməsi (və ya Bernulli endomorfizmi), əgər $I = \mathbb{Z}$ olarsa, onda T – ikitərəfli Bernulli yerindəyişməsi (və ya Bernulli avtomorfizmi) adlanır. $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vəziyyətlər fəzası adlanır. Bütün dinamik sistemlərdəki B. y.-ləri ən güclü stoxastiklik (qarşıma) xassələri ilə seçirlər: məs., birtərəfli B. y. dəqiq endomorfizmdir. ikitərəfli B. y. isə K – avtomorfizmdir. «B. y.» termini (eyni zamanda «Bernulli endomorfizmi» və «Bernulli avtomorfizmi» terminləri) ehtimal fəzasının ixtiyari endomorfizmine (avtomorfizmine) görə işlənir, bu halda endomorfizm (avtomorfizm) yuxarıda qeyd olunan mənada B. y.-nə izomorfudur. Sonlu sayda vəziyyətləri olan dar mənada stasionar x_n , $-\infty < n < \infty$ təsadüfi ardıcılığının realizasiyanı fəzasında yerindəyişmə üçün izomorfizm, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, x_n ardıcılığı Ornşteynin «çox zəif Bernullilik» şərtini ödəsin (bax, [1], [2]). bu şərt isə Kolmoqorov qeydli və mütəqil qeydli şərtləri arasında (bax, [3]) yer tutur.

Eyni entropiyalı bütün B. y.-ləri izomorfikdirlər (bax, *İzomorfizm, dinamik sistemlərin metrik*). Her bir ikitərəfli T B. y. hər hansı bir $\{S^t, -\infty < t < \infty\}$ ölçülən axınına ələ daxil ola bilər ki, $T = S^1$ olsun. Belə axına daxil olan hər bir çevirmə uyğun entropiyası ilə B. y.-nə izomorfikdir, axının özü isə Bernulli axını adlanır.

Əd.: [1] Орнштейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [2] Ornstein D., Weiss B., «Isr. J. Math.», 1974, v. 17, № 1, p. 94–104; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970.

BERR PAYLANMASI «Берра распределение; Burr distribution» – məlum paylanmaların, o cümlədən, normal paylanmanın approksimasiyası üçün İ. Berr tərəfindən [1]-də təklif olunmuş *paylanmalar* ailəsidir. B. p. empirik paylanma funksiyasının hamarlanması üçün də tətbiq olunur.



$\alpha = 2$ və $\beta = 1:2:3:4:5$ qiymətlərində Berr paylanmasının sıxlıq funksiyası.

Ən sadə B. p.-nin paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^\alpha)^\beta}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Burr I., «Ann. Math. Statist.», 1942, v. 13, № 2, p. 215–32.

70 BERR

BERRİ – ESSEEN BƏRABƏRSİZLİYİ «Берри – Эсseen неравенство; Berry – Esseen inequality» – bir ölçülü F və G paylanma funksiyalarına uyğun f, g xarakteristik funksiyalar terminlərində $\rho(F, G)$ *müntəzəm metrikası*nın yuxarı sərhədidir.

Sıxlıq funksiyası məhdud olan G paylanmaları halında B. – E. b.-nin bir-birindən prinsipial fərqlənməyən variantları A. Berr (bax, [1]) və K. Esseen (bax, [2]) tərəfindən bir-birindən asılı olmayaraq tapılmışdır. Bu bərabərsizlik bir qədər modifikasiya olunmuş şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\rho(F, G) \leq A \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + B \frac{q}{T}, \quad (1)$$

burada T – ixtiyari müsbət ədəddir, $q = \sup_x G'(x)$,

$$A(\theta) = \frac{\theta}{\pi(2V(\theta) - \theta)}, \quad B(\theta) = \frac{\theta V(\theta)}{2V(\theta) - \theta}, \quad (2)$$

$$V(\theta) = \frac{2}{\pi} \left(\theta \int_0^\theta \sin t \frac{dt}{t} - 1 + \cos \theta \right),$$

θ parametri isə $2V(\theta) > \theta$ ($\theta > 1.6996$) şərtini ödəyən ixtiyari qiymətləri ala bilər.

A və B kəmiyyətlərinin dəyişikliklərinin xarakteri haqqında onların aşağıdakı qiymətlərinə görə mülahizə yürütmək olar:

θ	$A(\theta)$	$B(\theta)$
3.1	0.5930	4.4376
3.8	0.4659	4.6812
4.5	0.4169	5.1967
5.2	0.3992	5.8610
5.7	0.3956	6.3923
6.7	0.3951	6.7236

A və B əmsallının (2) şəklini saxlamaqla (1) bərabərsizliyini müəyyən bir qayda üzrə $V(\theta)$ funksiyasını seçmək hesabına dəyişmək olar ki, bu θ -nın konkret qiymətləri üçün $A(\theta)$ və $B(\theta)$ qiymətlərini azaltmağa imkan verir (bax, [3], [4]). B. – E. b. paylanmaların limit paylanmasına yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi məsələlərinin bir çoxunda, məs., *Berr – Esseen teoremlərində* olduğu kimi, mühüm analitik alət rolunu oynayır. B. – E. b.-nin çoxölçülü yaxşı analoqları yoxdur, lakin birölçülü halda bir sıra digər metrikalar üçün belə analoqlar vardır (bax, *Levi metrikası, Orta metrika*).

Əd.: [1] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 120–36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat., Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, S. 1–19; [3] Zolotarev V. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 8, S. 332–42; [4] van Beek P., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd 23, S. 187–96.

BERRİ – ESSEEN TEOREMİ «Берри – Эсseen теорема; Berri – Esseen theorem» – $MX_1 = 0$,

$MX_1^2 + \dots + MX_n^2 = 1$, $\epsilon = M|X_1|^3 + \dots + M|X_n|^3 < \infty$ şərtlərini ödəyən, asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri

nin cəmi $S_n = X_1 + \dots + X_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F_n -in standart normal qanunun paylanma funksiyası Φ -dən yayınmasının ρ müntəzəm metrikasında yuxarı sərhəd qiyməti, yeni

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C\varepsilon, \quad (1)$$

münasibətinin doğruluğu haqqında teoremdir, burada C – mütləq sabitdir. Bu qiymət A. M. Lyapunov tərəfindən alınmış (bax, *Lyapunov teoremi*) analoji qiymətin dəyişməsi olub, A. Berri və K. Esseen (uyğun olaraq, [1] və [2]-də) tərəfindən bir-birindən asılı olmayaraq alınmışdır. X_i – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda, S_n cəmini $S_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/\sqrt{n}$ şəklində, $MY_i = 0$, $MY_i^2 = 1$ şərtləri ilə ifadə etmək olar; onda (1) bərabərsizliyi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C\beta/\sqrt{n}, \quad (2)$$

burada $\beta = M|Y_1|^3$. (1) və (2)-də C -nin yuxarı qiymətləri bir çox müəlliflər tərəfindən tapılmışdır (bax, [5]). C üçün ən yaxşı qiymətləri hal-hazırda İ. S. Şıqanov [4]-də tapmışdır: ümumi (1) halında $C \leq 0,7975$, (2) xüsusi halında isə $C \leq 0,7655$ (bax, [4] və [3]). K. Esseen isbat etmişdir ki, $C \geq C_0 = (\sqrt{10} + 3)/6\sqrt{2\pi} = 0,4097\dots$ (1)-də C -nin minimal qiymətinin C_0 -a bərabər olması haqqında hipotez olduqca doğrulaşır. (1), (2) şəklində B. – E. t.-nin müxtəlif dəyişmələri vardır. Bunlardan ən maraqlısı (2)-ni dəyişdirən Salahutdin – Ulyanov qiymətidir:

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_1 \min(\kappa_3, \kappa_3^{\alpha_n}) n^{-1/2},$$

burada C_1 – mütləq sabitdir, $\alpha_n = \min(1, n/4)$ və $\kappa_3 = 3 \int x^2 |F(x) - \Phi(x)| dx$ – üçüncü tərtib fərq psevdomentidir ki, bu momentdə F , Y_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 120–36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat. Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, S. 1–19; [3] Esseen C.-G., «Skand. Actuar.», 1956, № 3–4, p. 160–70; [4] Шиганов И. С., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1982, с. 109–15; [3] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

BERTRAN MƏSƏLƏSİ «Бертрана задача; Bertrand problem» – bax, *Bertran paradoksu*.

BERTRAN PARADOKSU «Бертрана парадокс; Bertrand paradox» – ehtimal məsələlərinin həllində məsələnin qoyuluşunda ilkin şərtlərin (fərziyələrin) qeyri – səlis ifadə olunması ilə bağlı paradokslardan biridir. J. Bertran tərəfindən qeyd olunmuşdur. [1]-də Bertran məsələsində vahid radiuslu dairedə «ixtiyarı» seçilmiş vətərin uzunluğunun bu daire daxilində çəkilmiş düzgün üçbucağın tərəfindən böyük olması ehtimalını tapmaq tələb olunur. Vətərin vəziyyətini təyin edən parametrlərdən asılı olaraq axtarılan ehtimal üçün üç müxtəlif qiymət ($1/2$, $1/3$, $1/4$) alınır: vətərin vəziyyəti birinci halda dairenin mərkəzindən vətərə qədər ρ məsafəsi və x oxu ilə vətərə çəkilmiş normal arasındakı θ

bucağı ilə; ikinci halda vətərin çevrə ilə kəsişdiyi α və β nöqtələrinin bucaq koordinatları ilə; üçüncü halda dairenin mərkəzindən vətərə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağıının dekart koordinatları (x, y) ilə təyin olunur. Hər üç halda dairenin mərkəzi koordinat başlanğıcıdır. A. Puankare göstərmişdir ki (bax, [2]), paradoksun alınması səbəbi hər dəfə uyğun parametrlərin uyğun oblasda müntəzəm paylandığını qəbul edilməsidir. Həndəsi nöqtəyi – nəzərdən ρ -nün $0 \leq \rho \leq 1$ intervalında.

θ -nin $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervalında müntəzəm paylanan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu qəbul etmək təbii olardı (bax, [3]).

Əd.: [1] Bertrand J., Calcul des probabilités. P., 1889; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités. 2. éd., P., 1912; [3] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972.

BESSEL OPERATORU «Бесселя оператор; Bessel operator» – bax, *Bessel prosesi*.

BESSEL PROSESİ «Бесселя процесс; Bessel process» – aparımsalı $a(t, x) = (\alpha - 1)/2x$, diffuziya əmsalı $b(t, x) = 1$ olan birölçülü diffuzion prosesdir. Bele prosesin doğuran operatoru

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha - 1}{2x} \frac{d}{dx} \right)$$

düsturu ilə ifadə olunan Bessel operatoru adlandırılan operatorudur. Əgər $\alpha = d$ natural ədəddirsə, onda B. p. d -ölçülü $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_d(t)\}$ Viner prosesinin radial hissəsi

$$|w(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^d w_i^2(t)} \quad \text{ilə eyniləşdirilə bilər. } \alpha = 2 \text{ olan}$$

B.p. – Reley prosesi adlanır.

BETA – APPROKSİMASIYA «бета – аппроксимация; beta approximation» hiperhəndəsi paylanma üçün – xüsusi olaraq seçilmiş paylanma vasitəsilə hiperhəndəsi paylanmanın yaxınlaşmasına əsasən qurulmuş approksimasiyadır. «B. – a.» termini binomial paylanmanın approksiməedici funksiyasının uyğun beta-paylanması terminologiyasında ifadə oluna bilinməsi ilə bağlı yaranmışdır.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin parametrləri N, n və M olan hiperhəndəsi paylanma qanununa tabe olduğu fərz olunur:

$$P\{\xi = m\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{C_N^{n-m} C_{N-M}^m}{C_N^n}, & \text{əgər } \max(0, M+n-N) \leq m \leq \min(M, n) \text{ olarsa;} \\ 0, & \text{digər hallarda.} \end{cases}$$

$N \geq 25$ olduqda $P\{\xi \leq m\}$ ehtimalını hesablamaq üçün B. – a. məsləhətdir (bax, [1]) və bu halda

$$P\{\xi \leq m\} \approx I_{1-x}(n'-m+c, m-c+1)$$

götürülür, burada $0 \leq t \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$ olduqda

$$I_r(a, b) = B_{a,b}(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^t z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz$$

beta – paylanma funksiyasıdır,

$$n' = \frac{(N-2)^2}{N-1} \times \frac{nM(N-n)(N-M)}{[(N-M)(N-n) + nM - N][N(n+M-1) - 2nM]},$$

$$x = \frac{N(n+M-1) - 2nM}{N(N-2)},$$

$$c = \frac{nM(M-1)(n-1)}{(N-1)[(N-M)(N-n) + nM - N]}.$$

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., 1987.

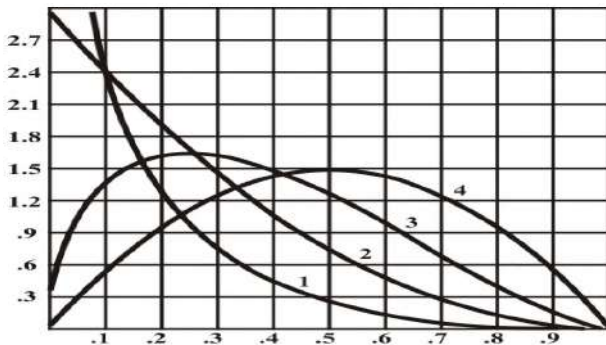
BETA – PAYLANMA « бета – распределение; beta distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası (şəkil)

$$\beta_{m,n}(x) = \frac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \quad (1)$$

düsturu ilə verilən, (0, 1)-də toplanmış kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada m, n – mənfi olmayan parametrlər, normalayıcı $B(m, n)$ vuruğu –

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

düsturu Eyler beta – funksiyasıdır.



(1) $m = 0,5, n = 3,5$; (2) $m = 1, n = 3$; (3) $m = 1,5, n = 2,5$; (4) $m = 2, n = 2$ olduqda beta – paylanmanın sıxlıq funksiyaları (bütün hallarda $m + n = 4$).

B – p.-nin paylanma funksiyası natamam beta – funksiyası vasitəsilə ifadə olunur:

$$I_x(m, n) \equiv B_{m,n}(x) = \frac{1}{B(m, n)} \int_0^x y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy, \quad 0 < x < 1$$

B – p.-nin momentləri

72 BETA

$$m_k = B(m+k, n)/B(m, n), \quad k = 1, 2, \dots$$

düsturu ilə ifadə olunur: B – p.-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $m/(m+n)$ və $mn/(m+n)^2(m+n+1)$ nisbətlərlə, asimmetriyası isə $2(m-n)/(m+n-2)$ nisbətilə ifadə olunur. Əgər $m > 1$ və $n > 1$ olarsa, onda $\beta_{m,n}(x)$ sıxlıq funksiyası əyrisinin yeganə $x = (m-1)/(m+n-2)$ maksimum nöqtəsi vardır, intervalın uclarında isə $\beta_{m,n}(x) = 0$ olur. Əgər $m < 1$ və ya $n < 1$ olarsa, onda qrafikin uc ordinatlarından biri sonsuzluqdur. lakin eger $m < 1$ və $n < 1$ olarsa, onda hər iki uca ordinatlar sonsuzluqdur və eyri bu halda U şəkilli olur. B – p.-nin xarakteristik funksiyası cırlaşmış hiperhəndəsi $F(m, m, n, it)$ funksiyasıdır. $m=1$ və $n=1$ olduqda, B – p. (0, 1) intervalında müntəzəm paylanmaya çevrilir. B – p.-nin digər xüsusi halı $m=n=1/2$ olduğu haldir ki, bu da paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\beta_{1/2, 1/2}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x(1-x)}$$

kimi ifadə olunan arksinus paylanmasıdır. (1)-də $x = 1/(1+t)$ əvəzləməsi apardıqda, paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\beta'_{m,n}(t) = \frac{1}{B(m, n)} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}}, \quad 0 < t < \infty \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan və ikinci növ B – p. adlandırılan paylanma alınır.

(1) və (2) paylanmaları Pearson paylanmaları sisteminde I tip və VI tip paylanmalara uyğundur.

B – p.-nin yaranması hallarından biri belədir: eger ξ_1 və ξ_2 – uyğun olaraq, m və n parametrlili gamma – paylanma ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ təsadüfi kəmiyyəti paylanmasının sıxlıq funksiyası $\beta_{m,n}(x)$ olan B – p. ilə paylanmışdır. Bu fakt təbiiq məsələlərdə, xüsusilə də, riyazi statistikada B – p.-nin rolunu izah edir: mühüm statistikaların çoxunun paylanmaları B – p. olur. Məs., F – nisbet paylanma funksiyası $F_{m,n} = n\chi_m^2/m\chi_n^2$

$$P\{F_{m,n} < x\} = B_{m/2, n/2}(mx/(n+mx))$$

düsturu ilə ifadə olunur (χ^2 təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı k olan χ^2 – kvadrat paylanması ilə paylanmışdır).

F – paylanmaların qiymətləri, adətən, B – p. üçün tərtib olunmuş cədvəllər vasitəsilə hesablanır.

B – p. funksiyası vasitəsilə binomial paylanma funksiyalarının qiymətlərini

$$B_{n-m, m+1}(1-p) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

münasibətinə əsaslanaraq hesablamaq olur.

B – p. yalnız riyazi statistikada tətbiq olunmur; məs., B – p.-nin sıxlıq funksiyası Yakobi ortoqonal çoxhədlilər sistemi üçün çəki funksiyasıdır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] П и р с о н К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974.

BETA – PAYLANMA $\zeta o x \ddot{o} l \check{u} l \ddot{u}$ « **бета – распределение** многомерное; multidimensional beta distribution » – bax, *Dirixle paylanması*.

BEYES DÜSTURU « **Бейеса формула; Bayes formula** » – hadisələrin (və ya hipotezlərin) *aposterior ehtimalları* *aprior ehtimallar* vasitəsilə hesablamaq üçün düsturdur. $A_1, \dots, A_n$ uyuşmayan hadisələrin tam qrupu olsun: $\bigcup A_i = \Omega$, $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \emptyset$; Ω – yaqın hadisə, $\emptyset$ – qeyri – mümkün hadisədir. Hər bir i üçün $P(A_i) > 0$. Onda $P(B) > 0$ şərtini ödəyən ixtiyari B hadisəsinin baş verməsi şərti ilə A_i hadisəsinin baş verməsinin *aposterior ehtimalı* $P(A_i|B)$, –

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}, \quad i = \overline{1, n} \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur. $P(A_i)$, – A_i hadisəsinin *aprior ehtimalı*, $P(B|A_i)$, – A_i hadisəsinin ($P(A_i) > 0$) baş verməsi şərti ilə B hadisəsinin şərti ehtimalıdır. (*) *Bayes düsturu* T. Bayes (T. Bayes) tərəfindən isbat olunmuş, 1763-də çap olunmuşdur.

Bax, *Bayes prinsipi*.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

BEYES HƏLLEDİCİ FUNKSIYASI « **бейесовская решающая функция; Bayesian decision function / rule** » – *aposterior riskə minimum qiymət təmin edən həlledici funksiyadır*. B. h. f. bezen *aprior riskin* *minimizasiyası* ilə təyin olunur; əgər *Bayes riski* (B. h. f.-nin *aprior riski*) sonlu olarsa, onda bu iki tənif üst-üstə düşür. Bax, *Bayes yanaşması* statistik məsələlərə.

Əd.: [1] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

BEYES HƏLLEDİCİ QAYDASI « **бейесовское решающее правило; Bayesian decision rule** » – bax, *Qeyri – parametrik diskriminant analiz*.

BEYES HƏLLİ « **бейесовское решение; Bayesian decision** » – *Bayes həlledici funksiyası* əsasında qəbul olunmuş qərardır (həldir). Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*, *Bayes yanaşması* statistik məsələlərə.

BEYES KRİTERİSİ « **бейесовский критерий; Bayesian test** » – statistik məsələlərə *Bayes yanaşması* əsasında qurulmuş *statistik kriteridir*. B. k. statistik həllər nəzəriyyəsində ümumi *Bayes həlledici funksiyası* anlayışının statistik hipotezlərin yoxlanılma nəzəriyyəsində konkretləşdirilməsidir.

X – təsadüfi seçim, P_θ , – X seçiminin naməlum $\theta \in \Theta$ parametrlərindən asılı paylanması, $p(x|\theta)$ – bu paylanmanın müəyyən bir σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası olsun. X üçün $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezinə $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezi qarşı qoyulur; Θ_0 və Θ_1 , – Θ -nin boş olmayan kəsişməyən altçoxluqlarıdır.

Θ parametrik fəzasında (bu fəzanın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrlə) $\pi(\cdot)$ *aprior paylanması* verilir. $\pi(\cdot)$ paylanması Θ_0 və Θ_1 altçoxluqlarında $\pi_0(\cdot)$ və $\pi_1(\cdot)$ paylanmalarını H_0 və H_1 hipotezlərinin q_0 və q_1 *aprior ehtimallarını* doğurur. $q_0 + q_1 = 1$. Bütün kriterilər arasında

$$r_\pi(\varphi) = q_0 M_{\pi_0} \varphi(X) + q_1 M_{\pi_1} (1 - \varphi(X))$$

aprior riskini *minimallaşdırən* $\varphi(\cdot; \pi)$ *kriterisi* *Bayes kriterisi* adlanır, burada $i = 0, 1$ üçün

$$M_{\pi_i} \varphi(X) = \int \varphi(x) f_{\pi_i}(x) \mu(dx),$$

$$f_{\pi_i}(x) = \int_{\Theta_i} p(x|\theta) \pi_i(d\theta).$$

B. k. $\varphi(\cdot; \pi)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi(x; \pi) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } q_0 f_{\pi_0}(x) > q_1 f_{\pi_1}(x), \\ 1, & \text{əgər } q_0 f_{\pi_0}(x) < q_1 f_{\pi_1}(x) \end{cases}$$

olarsa, $\{\pi_n\}$ *aprior paylanmalar ardıcılığına* görə $\{\varphi(\cdot; \pi_n)\}$ B. k.-ləri *ardıcılığının limiti* (*kriterilərin zəif yığılması* mənada olan) – *geniş mənada* B. k. adlandırılan kriteridən fərqli olaraq, $\varphi(\cdot; \pi)$ – *bezen dar mənada* B. k. adlanır.

Olduqca geniş şərtlərlə geniş mənada bütün B. k.-lərinin çoxluğu kriterilərin tam sinfini əmələ gətirir və bu zaman yalnız hər biri sonlu sayda nöqtələrdə toplanmış *aprior paylanmalar ardıcılıqları* ilə kifayətlənmək olar.

B. k.-ni qurmaq üçün yuxarıda verilmiş yanaşma bezen tam *Bayes yanaşması* adlanır; Θ_0 və Θ_1 -də yalnız π_0 və π_1 *aprior paylanmalarının* verilib, *hipotezlərin aprior ehtimallarının* isə verilmədiyi digər hal *qismən Bayes yanaşması* adlanır. Qismən *Bayes yanaşmasında* bezen

$$\int \varphi(x) f_{\pi_0}(x) \mu(dx) \leq \alpha$$

şərtini ödəyən kriterilərə baxılmaqla kifayətlənmək olur: belə sinifdə ən güclü Neyman – Pirson kriterisindən iki sadə hipotezin fərqləndirilməsi məsələsində istifadə olunur. Bu hipotezlər X seçiminin paylanması sıxlıq funksiyaları $f_{\pi_0}(\cdot)$ və $f_{\pi_1}(\cdot)$ üçün irəli sürülmüş hipotezlərdir. Müşahidələrin ardıcıl sxeminə hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində də B. k. təyin edilir və qurulur.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] В а л ь д А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967; [4] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [5] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.

BEYES ÖLÇMƏSİ « **бейесовское измерение; Bayesian measurement** » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

BEYES PRİNSİPİ « бейесовский принцип; Bayesian principle » statistik oyunlar nəzəriyyəsində – statistik oyunların Bayes strategiyasının tapılması məsələsinin ondan daha sadə və adi olan *iki şəxsin oyunu* məsələsi kimi sadələşdirilməsi üçün müddədir.

(D, Θ, w) – iki şəxsin ilkin oyunu, $(\mathcal{D}, \Theta, W)$ isə (X, P_θ) cütü ilə birlikdə uyğun statistik oyun olsun; $X \in \mathcal{X}$, – P_θ paylanmasına müvafiq seçim, $\theta \in \Theta$, $\mathcal{D}$ – bütün $\delta(X): \mathcal{X} \rightarrow D$ həlledici funksiyalarının çoxluğu olsun:

$$W(\delta(\cdot), \theta) = \int w(\delta(x); \theta) P_\theta(dx).$$

Əgər $\mathcal{X}$ -də təyin olunmuş hər hansı σ – additiv μ ölçüsünə nəzərən P_θ paylanmasının şərti sıxlıq funksiyası $f_\theta = dP_\theta(x)/d\mu$ varsa və Θ -da təyin olunmuş hər hansı σ – additiv λ ölçüsünə nəzərən Q aprior paylanmasının sıxlıq funksiyası $g(t) = dQ(t)/d\lambda$ varsa, onda verilən X seçimi üzrə şərti olan Q_X aprior paylanmasının λ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası –

$$q(t|X) = \frac{q(t)f_t(X)}{f(X)},$$

$$f(X) = \int q(t)f_t(X)\lambda(dt) \quad (*)$$

münasibətlərlə təyin olunur (Bayes düsturu).

İxtiyari Q aprior paylanmasının ilkin oyunu (D, Θ, w) üçün Bayes strategiyası π_Q -nün varlığı ferz olunur. B. p.-ində iddia edilir ki, f_θ və q sıxlıq funksiyalarının varlığı ferz olunduqda, (D, Θ, W) statistik oyununda Q aprior paylanmasına ehtimal $\pi_Q(X)$ Bayes strategiyası uyğundur ki, bu strategiya iki şəxsin ilkin oyununun Q_X təbii strategiyanı üçün ilə π_{Q_X} Bayes strategiyası ilə üst-üstə düşür, burada Q_X – sıxlığı (*) olan aposteriori paylanmadır.

Bu müddəa $\pi_Q(X) = \pi_{Q_X}$ bərabərliyi ilə ifadə olunur və qoyulmuş məsələni Q_X aposteriori paylanmasının tapılması və ilkin oyun üçün Bayes strategiyasının axtarılması məsələsinə gətirir. B. p. – statistik məsələlərin əsas sinifləri üçün Bayes strategiyasının formasını lazımi anda təyin etməyə imkan verir.

Məs., $D = \{\delta_1, \delta_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $w(\delta_i, \theta_j) = w_{ij}$, $(w_{11} = w_{22} = 0)$ olsun. P_θ paylanmalı X seçimi əsasında $\{\theta = \theta_1\}$ və $\{\theta = \theta_2\}$ iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsinə baxılır; onda əgər $f_{\theta_1}(X)/f_{\theta_2}(X) < a(1-q)/q(1-a)$ olarsa, Bayes kriterisi $\delta(X) = \theta_2$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $a = w_{12}/(w_{12} + w_{21})$, q isə $\{\theta = \theta_1\}$ hadisəsinin aprior ehtimalıdır.

Əgər D və Θ , – $\mathbb{R}^k$ fəzasının oblastları, $w(\delta, \theta) = c(\delta - \theta)^2$ olarsa, onda θ parametrinin Bayes statistik qiyməti

$$\theta_Q^* = \int t Q_X(dt) = \int t q(t|X)\lambda(dt)$$

kimi ifadə olunur. Bu statistik qiymət aposteriori paylanmanın orta qiymətidir. Əgər $w(\delta, \theta) = c|\delta - \theta|$, $k = 1$ olarsa, onda

θ_Q^* aposteriori paylanmanın medianına bərabərdir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика (Дополнительные главы), М., 1984.

BEYES REQRESSİYASI « бейесовская регрессия; Bayesian regression » – parametrlərin aprior paylanması verildikdə xətti *regression eksperiment* parametrlərinin qiymətləndirilməsidir. Bax, *Aprior informasiyadan istifadə*.

BEYES RİSKİ « бейесовский риск; Bayesian risk » – *aprior riskin* bütün həlledici funksiyalar üzrə aşağı sərhəddir. Əgər Bayes həlledici funksiyası varsa, onun aprior riski B. r.-ə bərabərdir. Bax, *Bayes yanaşması statistik məsələlərə, Aposteriori risk(i) həlledici funksiyaların, Qeyri-parametrik diskriminant analiz*.

BEYES STATİSTİK QIYMƏTİ « бейесовская оценка; Bayesian estimator » – aposteriori riskin minimum qiymətini təmin edən *statistik qiymətdir*. Məs.,

kvadratik itki funksiyası $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ olarsa, skalyar θ parametrlərinin B. s. q. θ -nin aposteriori ortasıdır, $L(\theta, d) = |\theta - d|$ olduğu halda isə θ -nin aposteriori paylanmasının medianıdır; θ -nin (μ, τ) parametrləri aprior normal paylanmalı təsadüfi kəmiyyət olduğundan və $L(|\theta - d|)$ tipli qəbənq itki funksiyasının nə cür olmasından asılı olmayaraq, qeyd olunmuş n həcmli seçim üzrə təyin edilmiş (θ, σ) parametrləri normal paylanmanın seçimi orta qiyməti θ üçün B. s. q. –

$$(n\bar{x}\sigma^{-2} + \mu\tau^{-2}) / (n\sigma^{-2} + \tau^{-2})$$

aposteriori orta qiymətinə bərabərdir.

Müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanması və qiymətləndirilən θ parametrlərinin aprior paylanması üzərinə qoyulan uyğun rəqulyarlıq şərtlərində B. s. q.-nin asimptotik paylanması (seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda) aprior paylanmadan asılı olmur və maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətinin asimptotik paylanması ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Aprior informasiyadan istifadə*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

BEYES STRATEGİYASI « бейесовская стратегия; Bayesian strategy » statistik oyunlar nəzəriyyəsində – parametrik çoxluqda verilmiş aprior paylanmaya əsasən orta itkiləri minimallaşdıran strategiyadır (həlledici funksiyadır).

Bax, *Oyunu, iki şəxsin, Statistik oyun*.

BEYES YANAŞMASI « бейесовский подход; Bayesian approach » – bax, *Bayes yanaşması empirik, Bayes yanaşması statistik məsələlərə*.

BEYES YANAŞMASI empirik « бейесовский подход эмпирический; empirical Bayesian approach » – G paylanması naməlum olduğu hallarla bağlı statistik məsələlər *Bayes yanaşmasının* ilə statistik realizasiyasıdır ki, bu halda baxılan eksperimentdən əvvəl aparılmış statistik eksperimentlərin nəticələri – $x^{(k)} = (x_1, \dots, x_k)$ seçimləri üzrə δ_G Bayes həlledici funksiyaların tutarlı statistik

qiymətləri təyin olunur. Cari eksperimentin nəticəsi x , X təsadüfi elementinin (məs., seçimin) realizasiyasıdır; $\mathbf{P}(\cdot | \theta)$, – X -in paylanması, θ , – Θ parametrik fəzasının nəmülm qeyd olunmuş nöqtəsidir və θ -nin bu qiymətinə görə $\mathcal{D}$ həllər fəzasından müəyyən bir d həllini seçmək tələb olunur. «Arxiv» verilənlərinin nəticəsi $x_1, \dots, x_k$, $X \rightarrow$ analogi $X_1, \dots, X_k$ asılı olmayan təsadüfi elementlərinin realizasiyalarıdır və bu elementlərin $\mathbf{P}(\cdot | \theta_i)$, $i = 1, \dots, k$ paylanmalarındakı uyğun $\theta_1, \dots, \theta_k$ qiymətləri öz növbəsində G paylanmasından olan təsadüfi seçimin realizasiyasıdır.

Bələliklə, $x^{(k)}$, – X -in şərtsiz (marginal)

$$\mathbf{P}_G(\cdot) = \int_{\Theta} \mathbf{P}(\cdot | \theta) G(d\theta)$$

paylanmasına uyğun seçimin realizasiyasıdır.

Əgər mümkün G aprior paylanmalarının sinfi $\mathfrak{G} = \{G(\cdot, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ hər hansı sonluölçülü λ parametrinin qiymətlərinə qədər dəqiqliklə konkretləşdirilmişdirsə, onda λ -nı $\mathbf{P}_G(\cdot, \lambda)$ paylanmasına uyğun $X^{(k)}$ seçiminə görə qiymətləndirmək olar; Bayes həlledici funksiyasını qurmaq üçün G aprior paylanması əvəzinə onun statistik qiyməti $G(\cdot, \hat{\lambda}_k)$ -dan istifadə etmək olar.

Tarixən bu metod empirik qaydaların qurulması üçün ilk tətbiq olunmuş metoddur; bu metodu K. Cini (1911, bax. [1]) istifadə etmişdir və empirik B. y.-nin kəşfində bu metoda üstünlük verilir. Bütün mümkün olan aprior paylanmalar sinfi $\mathfrak{G}$ parametrik fəzada verildiyi halda (bax, [2]) K. Cininin aldığı bir sıra nəticələr «qeyri – parametrik» hal üçün empirik B. y.-nin müasir ideyalarını belə üstələyir.

S. N. Bernşteyn (bax, [3]) istehsal edilən məhsulun keyfiyyətinin atestasiyası məqsədilə klassik (Bayes olmayan) etibarlı interval qiymətləndirmədən istifadənin korrekt olmadığını göstərərək, Bayes etibarlı interval qiymətləndirməsində G -nin statistik qiyməti kimi

$$\hat{p}_k(x, x^{(k)}) = \int_{\Theta} p(x | \theta) G(d\theta) \quad (*)$$

integral tənliyinin (birinci növ Fredholm tənliyinin) həllini götürməyi təklif etmişdir, burada $\hat{p}_k(x, x^{(k)})$, – $\mathbf{P}_G$ paylanmasının arxiv məlumatları əsasında hesablanmış sıxlıq funksiyasının statistik qiyməti, $p(x | \theta)$, – $\mathbf{P}(\cdot, \theta)$ -nin müəyyən bir μ ölçüsünə görə sıxlıq funksiyasıdır.

Riyazi statistikanın bu sahəsində son «sıçrayış» H. Robbinse ([4], [5]) məxsusdur. O, empirik Bayes həllinin ümumi məsələsini ifadə etmiş, empirik prosedurlar riski anlayışını daxil etmiş, empirik həlledici funksiyaların seçilməsində optimallıq prinsipini ifadə etmiş və bunların qurulmasını ümumi metodlarını yenidən işləmişdir.

Statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində empirik B. y. tədqiqat obyekti kimi $\delta_G = \delta_G(x)$ Bayes həlledici funksiyalarını və onların empirik analogları $\delta_k = \delta_k(x, x^{(k)})$ empirik həlledici funksiyalarını araşdırır; bu funksiyalar $(\mathcal{X}^{k+1}, \mathfrak{X}^{k+1})$ seçimi fəzalarının düz hasilində təyin olunan funksiyalardır.

Verilmiş $L(\theta, d)$ itki funksiyasına görə δ_G Bayes həlledici funksiyası qurulmuş olduğu halda δ_k empirik həlledici funksiyasının riski tam orta itkilər kimi təyin olunur:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_G(\delta_k) &= \mathbf{ML}(v, \delta_k(X, X^{(k)})) = \\ &= \int \dots \int_{\mathcal{X}^k} \int_{\Theta} G(d\theta) \int_{\mathcal{X}} L(\theta, \delta_k(x, x^{(k)})) \mathbf{P}(dx | \theta) \prod_{i=1}^k \mathbf{P}_G(dx_i). \end{aligned}$$

Empirik həlledici funksiyanın (δ_k -nin) riski $k \rightarrow \infty$ və G ixtiyari qeyd olunmuş paylanma olduqda Bayes riskinə yığılarsa, yeni $\mathcal{R}_G(\delta_k) \rightarrow \mathcal{R}_G(\delta_G)$ olarsa, onda δ_k empirik həlledici funksiyası asimptotik optimal həlledici funksiya adlanır. Son nəşr olunmuş bəzi ədəbiyyatda «asimptotik optimal empirik həlledici funksiya» əvəzinə «empirik Bayes həlledici funksiyası» termini də istifadə olunur; əvvəllər Robbinsin istifadə etdiyi kimi sonuncu termin ixtiyari empirik həlledici funksiya üçün onun optimallıq xassələrindən asılı olmadan istifadə olunurdu.

Asimptotik optimal empirik həlledici funksiyaların varlığı üçün zəruri şərt Bayes həlledici funksiyası δ_G -nin «sədəliyi»dir – δ_G -nin G aprior paylanmasından yalnız X -in şərtsiz ehtimalı ilə asılılığıdır. Daha dəqiqliklə: əgər $\mathbf{P}_{G_1} = \mathbf{P}_{G_2}$ bərabərliyi ixtiyari $G_1 \neq G_2$ paylanmalar üçün sanki hər yerdə $\delta_{G_1} = \delta_{G_2}$ bərabərliyini təmin edərsə, δ_G sadə Bayes həlledici funksiyası adlanır.

Misal 1. $(0, \theta)$ -da müntəzəm paylanmış θ parametri haqqında irəli sürülmüş $\theta \leq \theta_0$ (birinci həll) və $\theta > \theta_0$ (ikinci həll) iki mürekkəb hipotezi yoxlamaq tələb olunur.

Statistik eksperiment paylanması verilmiş ailədən olan təsadüfi kəmiyyətin bir müşahidəsinin nəticəsi x -in qeydə alınmasından ibarətdir. $0 - 1$ tipli itki funksiyasından istifadə olunur:

Verilmiş θ üçün düzgün və ya səhv qərar qəbul edilməsindən asılı olaraq, itki uyğun olaraq, 0 və ya 1 -ə bərabər götürülür. Fərz olunur ki, bütün aprior paylanmalar (G) sinfi müsbət yarımoxda verilmiş Lebeq ölçüsünə görə mütləq kəsilməz bütün paylanmalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür və $g(\theta)$, G paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır. Müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyətinin şərtsiz paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_G(x) = \int_{\mathcal{X}} (g(\theta)/\theta) d\theta$$

integralına bərabərdir və $X = x$ olduqda əgər $2p_G(\max(\theta_0, x)) < p_G(x)$ olarsa, Bayes həlledici funksiyası d_1 qiymətini, əks halda isə d_2 qiymətini alır. Bayes həlledici funksiyası sadədir, çünki G -dən X -in marginal sıxlığı vasitəsilə asılıdır. Odur ki, asimptotik optimal empirik həlledici funksiyası $p_G(x)$ sıxlıq funksiyasının tutarlı statistik qiymətinə əsasən (məs., nüvə statistik qiyməti) qurmaq olar.

Misal 2. Binomial sxemdə n həcmli seçimə baxılır; θ – bir sınaqda uğurlu nəticə («müvəffəqiyyət») ehtimalı olsun. Kvadratik itki funksiyası halı üçün θ -nin Bayes statistik qiymətini təyin etmək problemi araşdırılır.

Sınaqların verilən sxemində müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyəti üçün məqbul statistika vardır, onun x realizasiyası n sınaqda «müvəffəqiyyət»lər sayına bərabədirsə, onda δ_G Bayes

statistik qiyməti seçimi verilənlərdən yalnız x realizasiyası vasitəsilə və marginal $p_G(y, n) = \mathbf{P}_\theta\{X = y\}$ paylanmaları ilə asılı olub,

$$\delta_G(x) = \frac{x+1}{n+1} \frac{p_G(x+1, n+1)}{p_G(x, n)}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bu halda $\delta_G(x)$ həlledici funksiyası sadə Bayes statistik qiyməti deyildir (bu sonlu seçimi fəzalara xas olan tipik bir haldır; bax, [7]), deməli, asimptotik optimal empirik statistik qiymət yoxdur. Lakin n həcmli seçim üçün arxiv verilənlərindən istifadə edərək, $n-1$ həcmli seçim üzrə Bayes statistik qiymətinə uyğun asimptotik optimal empirik statistik qiymət təyin etmək mümkündür. n -in kifayət qədər böyük qiymətində bu yanaşma empirik statistik qiymətin optimallaşdırılma probleminin praktik cəhətdən həlli üçün tam mənada qaneedici olur.

H. Robbins və C. Neymanın məqalələrinin ([5] və [6]) nəşrindən sonra, qeyd olunan problemlərlə bağlı, xüsusilə də, kvadratik itki funksiyası halı üçün həqiqi θ parametrinin qiymətləndirilməsi sahəsində nəticələr alınmışdır. Bu halda Bayes statistik qiymətinin aşkar ifadəsi vardır, o, θ parametrinin aposterior orta qiymətinə bərabərdir. Buna görə də, Bayes statistik qiymətinin sadəliyi problemi və asimptotik optimal statistik qiymətlərin varlığı üçün kifayət qədər geniş ehtimal modelləri sinfində həll olunur (bax, məs., [9]). Nəşr olunmuş əsas nəticələrin eksperimental konkret ehtimal modelləri çərçivəsində optimal statistik qiymətlərin təyin olunmasına və arxiv həcmi $k \rightarrow \infty$ olduqda bu statistik qiymətlərin Bayes statistik qiymətlərinə yığılma sürətinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Sonsuzölçülü fəzalar halında mümkün aprior paylanmaların yığılma sürəti, adətən, $O(k^{-1})$ -dən kiçik olur (patoloji hallar istisna olunmaqla); bu Sinqx hipotezi adlanır və bu məsələnin tam həlli yığılma sürətinin aşağı sərhədləri göstərilməklə [10]-da verilmişdir.

Asimptotik optimal statistik qiymət olmadığı hallarda, L. N. Bolşev praktik cəhətdən faydalı olan Bayes həlledici funksiyasının ikitərəfli qiymətləndirilməsi metodunu təklif etmişdir (bax, [11]). Parametrik qiymətləndirilmənin ümumi məsələsi çərçivəsində bu metod aşağıdakından ibarətdir. Cari eksperimentin nəticəsi x -ə görə $\delta_G(x)$ Bayes həlli ilə bağlı olan

$$\underline{\delta}(x, \mathbf{P}_G) = \inf_G \delta_G(x) \text{ və } \overline{\delta}(x, \mathbf{P}_G) = \sup_G \delta_G(x)$$

iki ekstremum hesablanır; bu hesablama $\mathbf{P}_{G'} = \mathbf{P}_G$ bərabərliyini ödəyən bütün G' paylanmaları üzrə aparılır. $\underline{\delta}$ və $\overline{\delta}$ sərhədləri sadə funksiyalardır və olduqca ümumi şərtlər daxilində arxiv verilənləri üzrə əsaslı qiymətləndirilir.

Empirik B. y. statistik həllər nəzəriyyəsinin inkişafında böyük rol oynamışdır. Əslinə qaldıqda riyazi statistikanın yeni sahəsi olub, zamanətli keyfiyyət nəzarətinin mühüm problemlərini, məhsulun seçimi atestasiyasını, statistik diaqnostikanı və digər məsələləri praktik həll etməyə geniş imkanlar yaradır; empirik həllər funksiyasında keçmişin təcrübəsi nəzərə alındığından orta itki, statistik eksperimentin qoyulmasına şərf olunan xərclər olduqca azalır.

Zamanətli statistik nəticələr probleminə d – aposterior yanaşmasının tətbiqi üçün H. Robbinsin ideyalının inkişafı [12]-də

verilmişdir (bax, *Bayes yanaşması statistik məsələlərə*).

Əd.: [1] Gini C., «Metron», 1949, v. 15, p. 133–71; [2] Forcina A. «Int. Statist. Rev.», 1982, v. 50, p. 65–70; [3] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1941, т. 5, с. 85–94; [4] Robbins H., в кн.: Proceedings Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability, v. 1, Berk. – Los Ang., 1956, p. 157–63 (рус. пер. «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 133–40); [5] Robbins H., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, № 1, p. 1–20 (рус. пер. «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 122–40); [6] Neyman J., «Rev. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 30, № 1, p. 11–27 (рус. пер. – «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 113–32); [7] Каган А. М., «Докл. АН СССР», 1963, т. 150, № 4, с. 733–35; [8] Singh R. S., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, № 4, p. 890–902; [9] Казакьявичюс В. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 67–73; [10] Казакьявичюс В. В., в кн.: IV Междунар. Вильнюс. Конф. По теории вероятн. и матем. статист. Тезисы докл., Вильнюс, 1985, т. 2, с. 7–8; [11] Болшеев Л. Н., в кн.: Междунар. Конгресс математиков в Ницце, 1970. Докл. сов. матем., М., 1972, с. 48–55; [12] Симушкин С. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 42–58.

BEYES YANAŞMASI statistik məsələlərə « бейсовский подход к статистическим задачам; **Bayesian approach** to statistical problem » – θ параметрик fəzasında aprior G paylanmasının varlığını fərz edən yanaşmadır, məqsədi

$$R_G(\delta) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta) G(d\theta)$$

aprior riskini minimallaşdıran δ həlledici funksiyalarının qurulmasıdır. Beləliklə, B. y.-sında müşahidə olunan X təsadüfi elementinin (məs., seçimin) paylanması $\mathbf{P}(\cdot|\theta)$ -dakı θ ($\theta \in \Theta$) parametrinin əsl (naməlum) qiyməti paylanması G olan hər hansı θ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi anlaşılır; risk – risk funksiyası $R(\theta, \delta)$ -nin orta qiyməti (G paylanması üzrə), yeni tam itki kəmiyyəti $R_G(\delta) = \mathbf{M}L(\theta, \delta(x))$ götürülür, $L(\theta, \delta(x))$ – itki funksiyasıdır.

$R_G(\delta)$ -nin minimumunu təmin edən $\delta_G = \delta_G(x)$ həlledici funksiyası *Bayes həlledici funksiyası*, onun aprior riski $R_G(\delta_G)$ *Bayes riski* adlanır. Əgər Bayes həlledici funksiyası mövcud deyildirsə, onda Bayes riski kimi $\inf_{\delta} R_G(\delta)$ kəmiyyəti anlaşılır.

Riyazi statistikada bir sıra hallarda Bayes həlledici funksiyasını təyin edən xassə aprior riskin minimallığı deyil,

$$R_G(\delta|x) = \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) p(x|\theta) G(d\theta) / p_G(x)$$

aposterior riskinin minimallığıdır, burada $p = d\mathbf{P}/d\mu$ – təsadüfi X elementinin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır [seçimi ($\mathcal{X}$, $\mathfrak{X}$) fəzasında hər hansı μ ölçüsünə görə],

$$p_G(x) = \int_{\Theta} p(x|\theta) G(d\theta)$$

– X -in marginal (şərtsiz) sıxlıq funksiyası, $L(\theta, \delta)$ – itki funksiyasıdır. Bayes həlledici funksiyasının belə tərifı daha konstruktivdir. Əgər aposterior riskin minimumunun $\mathbf{P}_G$ ölçüsü üzrə sonlu orta qiyməti vadırsa, onda verilən təriflər ekvivalent olur, çünki

$$R_G(\delta) = \int_{\mathcal{D}} R_G(\delta|x) p_G(x) \mu(dx).$$

Aprior risk həlledici funksiyanın ədədi xarakteristikasıdır, buna görə də, Bayes həlledici funksiyası mövcud olmasa belə, ε – Bayes həlledici funksiyası δ_G^ε vardır və bu funksiya üçün hər hansı bir $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$R_G(\delta_G^\varepsilon) \leq \inf_{\delta} R_G(\delta) + \varepsilon$$

münasibəti ödənilir.

Məsələn, iki müəkkəb $H_0: \theta \in \Theta_0$ (d_0 həlli) və $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ (d_1 həlli) hipotezlərinin yoxlanılması məsələsində itki funksiyası 0 – 1 tipli olarsa:

$$L(\theta, d_i) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } \theta \in \Theta_{1-i}, \\ 0, & \text{əgər } \theta \in \Theta_i, \end{cases} \quad i = 0, 1$$

olur, həlledici δ funksiyasının $\delta = d_i$ nöqtəsində aposterior riski – H_i hipotezinə alternativ H_{1-i} hipotezinin doğru olmasının aposterior ehtimalı –

$$R_G(d_i|x) = \int_{\Theta_{1-i}} p(x|\theta) G(d\theta) / p_G(x)$$

ehtimalına bərabərdir.

Deməli, Bayes kriterisinə görə hipotez o halda qəbul olunur ki, onun doğruluğunun aposterior ehtimalının qiyməti ən böyük olsun (aposterior ehtimallar bərabər olduğu halda randomizasiya etmək mümkündür).

Qiymətləndirmə ilə bağlı statistik problemdə Bayes həlledici funksiyasına misal Bayes statistik qiyməti məqaləsində şərh olunmuşdur.

B. y. məqbul statistik prosedurların (Bayes həlledici funksiyaları və onların limitləri həlledici funksiyaların tam sinfini əmələ gətirir) və minimaks həlledici qaydaların qurulmasında mühüm rol oynayır (bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi). B. y. çərçivəsində statistik nəticənin zamanətli prosedurlarının qurulmasında məhdudiyyətlər ekrən hallarda aprior riskə deyil, bilavasitə aposterior risk üzərinə qoyulur (aposterior risk, əsas etibarilə, Bayes etibarlı intervalarının qurulmasında istifadə olunur). Bundan əlavə, bir sıra tətbiqi məsələlərdə (məs., qəbul etmə nəzarətində) hər bir d həllinin qəbul olunması ilə əlaqədar olaraq orta itki üzərinə qoyulan verilmiş məhdudiyyətlərin ödənilməsi statistik prosedurların qurulması zəruridir, yəni d – risk funksiyası –

$$R_G(d, \delta) = \mathbf{M}\{L(\theta, d) | \delta(x) = d\}, \quad d \in \mathcal{D}$$

üzərinə məhdudiyyətlər qoyulmalıdır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının statistik problemi çərçivəsində d – aposterior yanaşma adlandırılan statistik nəticənin zamanətlilik probleminə yanaşma 1974-də L. N. Bolşev tərəfindən təklif olunmuşdur. Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi çərçivəsində onun ideyalarının inkişafı [5]-də şərh olunmuşdur.

Statistik eksperimentlər ardıcılığı ilə müşahidə apardıqda bu eksperimentlərə uyğun naməlum $\theta_1, \theta_2, \dots$ qiymətləri, həqiqətən də, G paylanmasından seçim olduğu halda (məs., keyfiyyət nəzarət statistik məsələsində, istehsal olunmuş məhsulun atestasiyasında) B. y.-nın praktiki realizasiyasında çətinliklər yaranır və bu çətinlik əsas etibarilə, aprior paylanmanın konkretləşdirilməsi zəruriliyi ilə izah olunur. Təbiidir ki, G -ni və həmçinin

müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanmasını yalnız Θ parametrik fəzasında uyğun ehtimal modelini quraraq, bəlkə də bəzi parametrlərin qiymətinə qədər dəqiqliklə konkretləşdirmək olar və ya riyazi statistikanın qeyri – parametrik metodlarından da istifadə etmək olar. İxtiyari halda naməlum G paylanması haqqında obyektiv informasiya «arxiv» məlumatlarına – əvvəllər aparılmış statistik eksperimentlərin analoji nəticələrinə əsaslanaraq və burada empirik Bayes yanaşması realizə olunur.

Aprior paylanmanın digər konkretləşdirilmə üsulları da mövcuddur; bu üsullarda subyektiv ehtimal anlayışından, faydalılıq funksiyalarından, etibardan istifadə edən ən az informasiya prinsipindən istifadə olunur. Zamanətli prosedurların qurulmasında konservativ yanaşma da istifadə olunur.

Əd.: [1] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [2] Hartigan J. A., Bayes theory, N. Y. – [a. o.], 1983; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [5] Володин И. Н., в сб.: Исследования по прикладной математике, Казань, 1984, в. 10, с. 13–53.

BEYES YAYINMASI « бейсовское отклонение; Bayesian deviation » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

BƏRABƏRÇƏKİLİ DİNAMİK SİSTEM « равновесная динамическая система; equilibrium dynamical system » – bax, *Dinamik sistem(i) statistik mexanikanın*.

BƏRABƏRÇƏKİLİ PAYLANMA « равновесное распределение; equilibrium distribution » – bax, *Dinamik sistem(i) statistik mexanikanın*.

BƏRABƏRÇƏKİLİ POTENSİAL « равновесный потенциал; equilibrium potential » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov zənciri üçün, Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün*.

BƏRABƏRÇƏKİLİ STATİSTİK MEKANİKA « равновесная статистическая механика; equilibrium statistical mechanics » – bax, *Statistik mexanika*.

BƏRABƏRƏHTİMALLI YERLƏŞMƏ SXEMİ, HİSSƏCİKLƏRİN; группарла yerləşmənin bərabərəhtimallı sxemi « равновероятное схема размещения частиц комплектами; equiprobable scheme for group allocation of particles » – bax, *Yerləşməsi, hissəciklərin группарла*.

BƏRABƏRƏHTİMALLI YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « равновероятное размещение частиц; equiprobable allocation of particles / uniform allocation of particles » – bax, *Polinomial / multinomial yerləşməsi, hissəciklərin*.

BƏRPA(sı) Markov prosesinin « восстановление марковского процесса; regeneration of a Markov process » – bax, *Markov prosesi; çevirmələr*.

BƏRPA AXINI « восстановления потока; renewal input » – bax, *Giriş axını keçmiş məhdud təsirliliyə malik*.

BƏRPA ANI « восстановления момент; renewal time » – *regenerativ prosesin* ehtimal xassələrinin yenidən bərpa olduğu andır.

BƏRPA FUNKSIYASI « восстановления функция; renewal function » – hər hansı *paylanma funksiyası* $F(t)$ üzrə F -in özü-özü ilə n – qat kompozisiyaları sırasının cəmi, yəni

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} F^{*n}(t) = \sum_{n \geq 0} P\{X_n \leq t\}$$

cəmi kimi ifadə olunan $H(t)$ funksiyasıdır, burada $(X_n, n \geq 0)$ – nöqtəvi *bərpa prosesidir*; bərpa intervalları – $\tau_n = X_n - X_{n-1}, n \geq 1$ təsadüfi intervallarının paylanma funksiyası F -dir.

Əgər $P\{\tau_n = 0\} < 1$ olarsa, $H(t)$ sonlu funksiyadır və

$$H(t) = 1 + \int_0^t H(t-s) dF(s)$$

şəklində *bərpa tənliyini* ödəyir (integral qapalı $[0, t]$ intervalı üzrə götürülür). $H(t)$ funksiyası azalmayan, mənfii olmayan, semi-additiv funksiyadır, yəni

$$H(t+s) \leq H(t) + H(s)$$

və $t, s \geq 0$ olduqda, elementar bərpa teoremini ödəyir, yəni

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m},$$

burada $m = \int_0^\infty t dF(t)$. Bundan əlavə, $m_2 = \int_0^\infty t^2 dF(t)$ ikinci momenti sonlu olarsa, onda

$$t/m \leq H(t) \leq t/m + m_2/2m^2$$

berabersizlikləri doğrudur.

Blekuell teoreminin hökmünə görə, $F(t)$ şəbəkəvari olmayan paylanma funksiyası olduqda, ixtiyari $a > 0$ qiymətində

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (H(t+a) - H(t)) = a/m$$

olur, yəni $F(t)$ -nin artım nöqtələri $\{0, d, 2d, \dots\}$ tipli hər hansı bir şəbəkə təşkil etmir. Bu fərziyyə ilə

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (H(t) - t/m) = m_2/2m^2$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

BƏRPA İNTERVALI « восстановления интервал; renewal interval » – bax. *Bərpa prosesi*.

BƏRPA NƏZƏRİYYƏSİ « восстановления теория; renewal theory » – ehtimal nəzəriyyəsinin ələ bir

bölməsidir ki, bu bölmədə hər hansı mürekkəb sistem elementlərinin imtinası (sıradan çıxması) və bərpa olunması ilə bağlı təsadüfi hadisə və proseslər araşdırılır. Bu təsadüfi hadisə və proseslərə xas olan ən mühüm xassə bərpa anı adlanan hər hansı təsadüfi zaman anlarında hadisə və proseslərin ehtimal xassələrinin tamamilə bərpa olunmasıdır. Bu anlar ardıcılığı daxil olunmuş *bərpa prosesini* təşkil edir.

B. n.-nin əsas nəticələri bərpa proseslərinin və regenerativ proseslərin asimptotik cərəyanı ilə bağlıdır. Bu proseslərin paylanmalar *bərpa tənliyindən* birqıymətli təyin olunduğundan, analitik nöqtəyi – nəzərdən, B. n.-nin tədqiq obyektli bərpa tənliyinin həllərinin asimptotik xassələrinin öyrənilməsidir. B. n.-nin nəticələri (xüsusilə də, əsas *bərpa teoremi*) xidmət sistemləri nəzəriyyəsi, şaxələnən proseslər nəzəriyyəsi, ehtiyatlar nəzəriyyəsi kimi nəzəriyyələrin tətbiqi və nəzəri problemlərinin tədqiqatında effektiv surətdə istifadə olunur.

B. n.-nin klassik nəticələrinin çoxsaylı ümumiləşmələri bərpa anları arasında intervalların verilməsindən asılı olaraq: a) intervallar dəyişənşəbəli; b) vektor qiymətlərlə verilən ($\mathbb{R}$ və $\mathbb{R}^n$ -də B. n.), c) müsbət ehtimalla sonsuz olan, ç) intervallar yalnız şərti asılı olmayan (Markov bərpası nəzəriyyəsi), d) müxtəlif paylanmalara malik, e) seriyalar sxeminə dəyişən və s. halları üçün araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Севастьянов Б. А., Теория восстановления, в кн.: Итоги и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 2, М., 1974, с. 99–128; [3] Феллер В., Введение в теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

BƏRPA PROSESİ « восстановления процесс; renewal process » – paylanma funksiyası $F(t)$ olan, mənfii olmayan, eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan $\tau_1, \tau_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $X_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n, n \geq 1, X_0 = 0$

cəmlərinin klassik sxemi ilə bağlı *təsadüfi prosesdir*. $v(t)$ sayıcı bərpa prosesinin t anında qiyməti

$$v_t = \sum_{n \geq 0} I(X_n \leq t) = 1 + \max(n : X_n \leq t)$$

münasibətilə təyin olunur.

Əgər $\tau_n = X_n - X_{n-1}$ berabərliylə təyin olunan bərpa intervalları ardıcıl olaraq dəyişdirilən (və ya bərpa olunan) identik elementlərin fasiləsiz işləmə müddəti kimi interpretasiya olunarsa, onda v_t təsadüfi kəmiyyəti t müddəti ərzində dəyişdirilmələr (və ya bərpalar) sayına bərabərdir. v_t təsadüfi prosesinin trayektoriyaları hissəvi sabitdir və $(X_n, n \geq 0)$ təsadüfi zaman anlarında vahid uzunluqlu sıçrayışlardırlar, bu anlar bərpa anları adlanır.

B. p. *bərpa nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. v_t prosesinin tədqiqində bərpa funksiyası $H(t) = Mv_t$ əsas rol oynayır; bu funksiya vasitəsilə moment funksiyaları rekurrent ifadə olunur:

$$H_k(t) = M(v_t)^k \quad (k \geq 2 \text{ olduqda});$$

$$H_k(t) = \sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^{i-1} \int_0^t H_{k-i}(t-s) dH(s).$$

v_t prosesi ilə yanaşı, hissəvi xətti trayektoriyalı *ötüm prosesi* $\gamma(t)$ və *çatım prosesi* $\eta(t)$ də təyin olunur ki, bu

proseslərin qiymətləri uyğun olaraq t nöqtəsindən ($X_n, n \geq 0$) ardıcılığının ən yaxın sağ (sol) nöqtəsinə qədər məsafəsinə bərabərdir və ötürmə müddəti $\gamma(t)$, çatım müddəti $\eta(t)$ bu halda $\nu(t)$ ilə uyğun olaraq

$$\gamma(t) = \zeta_{v_t} - t, \quad \eta(t) = t - \zeta_{v_t-1}$$

münasibətlərlə bağlıdır.

$\gamma(t)$ və $\eta(t)$ – təsadüfi Markov prosesləridir. $\gamma(t)$ və $\eta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması üçün

$$\mathbf{P}\{\gamma(t) \geq u, \eta(t) \geq v\} = q_{u+v}(t - v)$$

bərabərliyi ödənilir, burada $q_u(t)$ funksiyası

$$q_u(t) = 1 - F(t + u) + \int_0^t q_u(t - s) dF(s)$$

*berpa tənliyi*nin həllidir və $F(t)$ paylanma funksiyasının şəbəkəvari olmaması və $m = \mathbf{M}\tau_1$ riyazi gözləməsinin sonlu olması şərtləri ödənilərsə, bu funksiya

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_u(t) = \frac{1}{m} \int_u^\infty (1 - F(t)) dt$$

münasibətini ödəyir (bax, *Bərpa funksiyası*).

Əgər $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ olarsa, onda B. p.-nin mühüm halı – Puasson prosesi alınır, bu halda $\mathbf{P}\{v_t = n + 1\} = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$, $n \geq 0$, $H(t) = 1 + \lambda t$, $q_u(t) = e^{-\lambda u}$, $m = 1/\lambda$ olur və $\nu(t)$ ilə $\gamma(t)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 2, 1984.

BƏRPA PROSESİ; superpozisiya « восстановления процесс; суперпозиция; superposition of renewal process » – ν_t^k , $1 \leq k \leq l$ ilkin bərpa proseslərinə müvafiq bütün nöqtələrin birləşməsi kimi təyin olunan, ədəd oxu üzərində *nöqtəvi prosesdir*. Əgər bərpa prosesləri (ζ_n^k , $n \geq 0$) nöqtələrindən yaranmış proseslərdirsə, onda B. p. $\{\zeta_n^k, n \geq 0, 1 \leq k \leq l\}$ çoxluğunun artmaqla nizamlanmasından alınan (ζ_n , $n \geq 0$) nöqtələrindən ibarətdir. Bu prosese uyğun

$$\nu_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{I}(\zeta_n \leq t)$$

sayıcı prosesi üçün $\nu_t = \nu_t^1 + \dots + \nu_t^l$ münasibəti doğrudur. B. p.-nin superpozisiyası ilkin bərpa proseslərini doğuran l sayda bərpəolunan elementlərdən ibarət sistemdə imtina anları ardıcılığı kimi interpretasiya olunur.

BƏRPA TEOREMİ « восстановления теорема; renewal theorem » – *bərpa funksiyasının* asimptotik xassələrini ifadə edən hökmdür. $\xi_1, \xi_2, \dots$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

$$\zeta(t) = 1 + \max(n : S_n < t) = \min(n : S_n \geq t),$$

$H(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$ olsun. İntegral və lokal B. t. adlandırılan iki B. t. vardır. İntegral B. t.-ndə hökm olunur ki,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} H(t) = 1/m, \quad m = \mathbf{M}\xi_k$$

münasibəti doğrudur. Lokal B. t.-ndə hökm olunduğuna görə, şəbəkəvari olmayan ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri və qeyd olunmuş ixtiyari $h > 0$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t + h) - H(t)] = h/m$$

münasibəti doğrudur.

Əgər ξ_n tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər və ξ_n -lərin mümkün qiymətlərinin ən böyük ortaq böleni 1-ə bərabər olarsa, onda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [H(k + 1) - H(k)] = 1/m$$

münasibəti doğrudur, k tam qiymətlər alır. Lokal B. t. əsasən B. t. adlandırılan hökm, yəni: şəbəkəvari olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri və $(0, \infty)$ -ə bilavasitə Riman mənada inteqrallanan ixtiyari $g(u)$ funksiyası üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t - u) dH(u) = \frac{1}{m} \int_0^\infty g(u) du \quad (*)$$

münasibəti doğrudur, hökmünə ekvivalentdir. Tamqiymətli ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri üçün analogi nəticə ödənilir, lakin ardıcılıq $t \rightarrow \infty$ olduqda tamqiymətli olmalıdır və (*)-nın sağ tərəfi

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^\infty g(k)$$

şəklində ifadə olunmalıdır.

Bərpa funksiyası $H(t)$ Vald eyniliyinə əsasən dolaşmanın *çatım anı* – $\chi(t)$ -nin riyazi gözləməsi ilə

$$mH(t) = t + \mathbf{M}\chi(t)$$

münasibətilə bağlıdır, burada $\xi_k \geq 0$ olduğu halda

$$\mathbf{P}\{\chi(t) > v\} = \int_0^t dH(u) \mathbf{P}\{\xi_1 > t - u + v\}$$

olduğundan, əsas B. t.-ne görə

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M}\chi(t) = \frac{1}{m} \int_0^\infty G(t) dt = \frac{\mathbf{M}\xi_1^2}{2m},$$

$$G(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\xi_1 > v\} dv.$$

olur (tamqiyəmətlı ξ_k -lar üçün $t \rightarrow \infty$ tamqiyəmətlı qiyəmətlər üzrə götürülür). Buna görə də, $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{M_{\xi_1}^2}{2m^2} + o(1).$$

B. t. təsadüfi dolaşmaların xüsusiyyətlərinin tədqiqində mühüm rola malikdir. Bu halda

$$R(t) = H(t) - \frac{t}{m} - \frac{M_{\xi_1}^2}{2m^2}$$

fərqlinin sıfıra yığılması sürəti maraqlıdır. Əgər $M_{\xi_1}^{k+2} < \infty$

və $\liminf_{|\lambda| \rightarrow \infty} |1 - M e^{i\lambda \xi_1}| > 0$ olarsa, onda

$$R(t) = -\frac{1}{m^2} \int_0^t G(u) du + o\left(\frac{\ln t}{t^{k+1}}\right) = o(t^{-k}).$$

$M_{\xi_1}^{k+2} < \infty$ şərtini ödəyən tamqiyəmətlı ξ_k -lar üçün

$$R(t) = -\frac{1}{m^2} \sum_{j \geq t} \sum_{k > j} P\{\xi_1 \leq k+1\} + o(t^{-k-1}).$$

Əgər $P\{\xi_1 > t\}$ eksponensial olaraq azalarsa və o, mütləq kəsilməz komponenti özündə saxlayarsa, onda bəzi $\varepsilon > 0$, $c < \infty$ ədədləri üçün

$$R(t) < c e^{-\varepsilon t},$$

$$\text{var } R(t) < c e^{-\varepsilon t}$$

olur. Bu hökm tamqiyəmətlı ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1-2, М., 1984; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Stone С., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 120, № 2, p. 327-42; [5] Takacs L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, N. Y. - [a. o.], 1967.

BƏRPA TEOREMİ ELEMENTAR « восстановление элементарная теорема; elementary renewal theorem » – *berpa funksiyasının* asimptotikası haqqında teoremdir.

BƏRPA TƏNLİYİ « восстановления уравнение; renewal equation » –

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s) dF(s)$$

şəklində, $[0, \infty)$ -da verilmiş funksiyalar üçün xətti integral tənlikdir, burada x – naməlum, y – verilmiş funksiya, F isə sıfırdan toplanmayan hər hansı paylanma funksiyasıdır. İntegral qapalı $[0, t]$ intervalı üzərində. *Berpa nəzəriyyəsi* B. t.-nin həllərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Lokal məhdud ölçülən funksiyalar sinfindən olan hər bir $y(t)$ funksiyası üçün B. t.-nin yeganə həlli vardır. Bu həll

$$x(t) = \int_0^t y(t-s) dH(s)$$

düsturu ilə verilir, burada $H(t)$, $-F(t)$ paylanma funksiyasına görə qurulmuş *berpa funksiyasıdır*.

Əsas *berpa teoremi*ndə hökm olunur ki,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} y(t) dt,$$

burada $m = \int_0^{\infty} t dF(t)$. Bu hökmün doğruluğu üçün m kəmiyyətinin sonlu olması və aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənilməsi kifayətdir:

(a) $F(t)$ paylanma funksiyası *şəbəkəvari* paylanma deyildir, yeni $F(t)$ funksiyasının artım nöqtələri hər hansı bir arifmetik şəbəkə təşkil etmir:

$$\sum_{n \geq 0} F(nh+) - F(nh-) < 1,$$

ixtiyari $h > 0$ üçün $y(t)$ funksiyası $[0, \infty)$ -da Riman mənasında bilavasitə inteqrallanan olsun, yeni

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{[n, n+1]} |y(t)| < \infty$$

və $\delta \rightarrow 0$ olduqda

$$\delta \sum_{n \geq 0} \sup_{[n\delta, n\delta+\delta]} y(t) - \inf_{[n\delta, n\delta+\delta]} y(t) \rightarrow 0;$$

(b) $F(t)$ paylanma funksiyası ciddi qeyri-singulyar paylanmadır, yeni $F^{*n}(t)$ kompozisiyasının mütləq kəsilməz komponenti vardır. $y(t)$ funksiyası isə kəsilməz olub, $[0, \infty)$ -da Lebeq mənasında inteqrallananıdır və $t \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник. К., 1983.

BƏYAZ KÜY « белый шум; white noise » – spektral sıxlığı sabit olan ümumiləşmiş stasionar $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesi*dir. B. k. prosesinin korrelyasiya (ümumiləşmiş) funksiyası $B(t) = \sigma^2 \delta(t)$ şəklindədir, burada σ^2 – müəyyən müsbət sabit, $\delta(t)$ isə delta – funksiya. B. k. prosesi tətbiqi məsələlərdə çox qısa müddətli korrelyasiyaya malik təsadüfi kükrəntiləri təsvir etmək məqsədilə istifadə olunur (məs., «istilik küyü» – naqildə elektronların istilik hərəkəti nəticəsində yaranan cərəyan gücünün pulsasiyaları). $\zeta(t)$ B. k. təsadüfi prosesinin

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz(\lambda) \quad (*)$$

spektral ayrılışındakı $e^{i\lambda t} dz(\lambda)$ «elementar rəqs»ləri bütün λ tezlikləri üçün (orta mənadə) eyni intensivliyə malikdirlər, yeni amplitudun kvadratının orta qiyməti

$$M|dz(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə eyni bir kəmiyyətlə təyin olunur.

(*) spektral ayrılışı onu ifadə edir ki, kvadratı ilə inteqrallanan ixtiyari $\varphi(t)$ funksiyası üçün

$$\langle \zeta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \zeta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) dz(\lambda)$$

münasibəti doğrudur, burada $\tilde{\varphi}(\lambda)$, $-\varphi(t)$ funksiyasının Furiye çevirməsidir. Ümumiləşmiş $\zeta = \langle \zeta, \varphi \rangle$ prosesinin $\varphi(t)$ funksiyasından daha aşkar olan asılılığı $dz(\lambda)$ tipli uyğun stoxastik $d\eta(t)$ ölçüsünün köməyi ilə ifadə oluna bilər [$d\eta(t)$ – stoxastik $dz(\lambda)$ ölçüsünün Furiye çevirməsidir], yəni

$$\langle \zeta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\eta(t).$$

Qauss bəyaz küy prosesi $\eta(t)$ Braun hərəkəti prosesinin ümumiləşmiş törəməsidir: $\zeta(t) = \eta'(t)$. Bu proses

$$Y'(t) = a(t, Y(t)) + \sigma(t, Y(t)) \eta'(t)$$

tipli stoxastik differensial tənliklərdə «idarəolunan» stoxastik differensial $Y(t)$ proseslərinin qurulması üçün əsas götürülür; bu tənliklər, adətən, differensial formada

$$dY(t) = a(t, Y(t)) dt + \sigma(t, Y(t)) d\eta(t)$$

şəklində yazılır.

B. k. istifadə olunan digər mühüm model – dayanıqlı rəqsi sistemin $\zeta(t)$ -nin stasionar təsadüfi kükrəntilərinin təsirini ilə evolyusiyasını təsvir edən $Y(t)$ təsadüfi prosesidir və bu $Y(s)$, $s < t$ və $\zeta(u)$, $u > t$ asılı olmayan təsadüfi proseslər olmalıdır. $P(z)$ – sol yarımüstəvidə kökləri olan çoxhədlidir, $P(d/dt)Y(t) = \zeta(t)$ tipli sistem belə sistmə ən sadə misaldır; «keçid proseslərinin» sönməsindən sonra

$$Y(t) = \int \frac{1}{P(i\lambda)} dz(\lambda)$$

olur.

Tətbiqi məsələlərdə kəsri effekt proseslərinin təsvirində

$$\zeta(t) = \sum_k \delta(t - \tau_k)$$

tipli B. k. prosesi böyük rol oynayır (k indeksi $-\infty$ -dan ∞ -a qədər dəyişir və $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$ – zamana görə Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi anlardır), yeni $\zeta(t)$ prosesi $\eta(t)$ Puasson prosesinin ümumiləşmiş törəməsidir. Kəsri effekt prosesinin özü

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s) \zeta(s) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s) d\eta(s) = \sum_k c(t, s - \tau_k)$$

münasibətlə ifadə olunur, burada $c(t, s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t, s)|^2 ds < \infty$$

şərtini ödəyən hər hansı çəki funksiyasıdır; bu halda $\zeta = \langle \zeta, \varphi \rangle$ ümumiləşmiş prosesinin orta qiyməti

$$a(\varphi) = a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$$

düsturu ilə təyin olunur, burada a – yuxarıda qeyd olunan Puasson qanununun parametridir və

$$\zeta(t) = a + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz(\lambda)$$

spektral ayrılışında bu prosesin $dz(\lambda)$ stoxastik ölçüsü elədir ki,

$$M|dz(\lambda)|^2 = (a/2\pi) d\lambda.$$

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

BƏYAZ KÜY diskret «белый шум дискретный»; discrete white noise – bax, Diskret bəyaz küy.

BƏYAZ KÜY kəsri «белый шум дробный»; fractional white noise – bax, Kəsri bəyaz küy.

BƏYAZ KÜY tezliklərin sonlu zolağında «белый шум в конечной полосе частот»; white noise in a finite bandwidth – ele Gauss (və ya bu terminin genişlənmiş məna ilə istifadə olunan, ixtiyari) stasionar təsadüfi prosesidir ki, orta qiyməti sıfıra bərabərdir, spektral sıxlığı əgər $|\lambda| \leq \Omega$ olarsa, $f(\lambda) = f_0 = \text{const}$, $|\lambda| > \Omega$ olduqda isə, $f(\lambda) = 0$ şəklində ifadə olunur (burada Ω – hər hansı müsbət sabitdir) və korrelyasion funksiyası –

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda = 2f_0 \frac{\sin \Omega\tau}{\tau}$$

münasibətlə təyin olunur. Tezliklərin sonlu zolağında B. k. adı B. k.-ün dairəvi tezlikləri $\lambda \leq \Omega$ olan harmonik rəqslərini heç cürə dəyişməyən, lakin $\lambda > \Omega$ tezlikli bütün rəqslərin qarşısını aşağı tezliklərin xətti filtrləndirilməsi vasitəsilə alınır.

BƏYAZLANMA «предбелнивание; prewhitening» – zaman sıralasının spektral analizində istifadə olunan prosedurdur. Əgər analiz olunan zaman sırası Y_i -nin spektral

sıxlığının zirvələri və çökekliyi haqqında əvvəlcədən məlum bilgiler olarsa, onda çevirmə vasitəsilə yeni Z_t sırasına keçid faydalı olur:

$$Z_t = \sum_{r=0}^q c_r Y_{t-r}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Bu halda sıranın spektral sıxlığı

$$h(\lambda) = \left| \sum_{r=0}^q c_r e^{i\lambda r} \right|^2 f(\lambda) \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $f(\lambda)$, $-Y_t$ -nin spektral sıxlığıdır (bax, Xetti filtri). c_r əmsalları ələ seçilməlidir ki, $h(\lambda)$ mümkün olduqca hamar olsun (bəyaz küynün spektral sıxlığına yaxın olsun). Hamar spektral sıxlığı qiymətləndirmək olduqca asan olduğundan, əvvəlcə Z_t sırası üzrə $h(\lambda)$ qiymətləndirilir, sonra isə (*)-dan $f(\lambda)$ tapılır.

BHATTACHARYA – RAO SFERİK MƏSAFƏSİ
« Бхаттачарья – Рао сферическое расстояние; Bhattacharya – Rao spherical distance » – bax, Riman informasiya metriksi.

BİXƏTTİ MODEL(i) təsadüfi prosesin « билинейная модель случайного процесса; bilinear model for random process / bilinear time series model » – diskret zamanlı həqiqi $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin

$$\zeta(t) + \sum_{i=1}^p a^i \zeta(t-i) = e(t) + \sum_{i=1}^r b^i e(t-i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c^{ij} \zeta(t-i) e(t-j), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (*)$$

fərqlər tenliyi ilə təyin olunması üçün modeldir, burada $e(t)$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır: $\mathbf{M} e(t) = 0$, $\mathbf{M} e^2(t) = \sigma^2 < \infty$ (bəyaz küy), $\{a^i, 1 \leq i \leq p\}$, $\{b^j, 1 \leq j \leq q\}$ və $\{c^{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ – sabitlərdir. Bəzən $e(t)$ dar mənada stasionar ardıcılıq olduqda, daha ümumi B. m.-lərə də baxılır. (*) modeli p, q, r, s parametrlərinin qiymətləri ilə xarakterizə olunur və $BL(p, q, r, s)$ simvolu ilə işarə olunur. Əgər bütün $i = 1, \dots, r$ və $j = 1, \dots, s$ qiymətlərində $c^{ij} = 0$ olarsa, onda B. m. (p, q) tərtib avtoregressiv sürüşən orta prosesinin modelinə çevrilir.

Təsadüfi proseslərin ümumi B. m.-lərinin öyrənilməsi uyğun proseslərin vəziyyətlər fəzasında onların vektor təsvirlərinə əsaslanır ki, bu da modeli təsvir edən fərqlər tenliklərinin tərtiblərini azaltmağa imkan verir. Təsadüfi proseslərin B. m. nəzəriyyəsinin əsas istiqamətləri – modellərin tenliklərinin stasionar həllərinin varlığı şərtlərinin və zaman sıralarını proqnozlaşdırma məsələlərinə təsadüfi proseslərin B. m.-lərinin tətbiqində mühüm rol oynayan bixətti modellərin çevirmə şərtlərinin,

həmçinin B. m.-in parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələlərinin araşdırılmasından ibarətdir (bax, [1] – [3]). Burada B. m.-in çevrilməsi, modelin özü və onun parametrləri tamamilə məlum olarsa, müşahidəoluna bilinməyən $e(t)$ prosesi üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M} [e(t) - \hat{e}(t)]^2 = 0$$

şərtini ödəyən $\hat{e}(t)$ statistik qiymətlərinin alınmasının mümkünlüyü anlaşılır.

Diskret zamanlı

$$\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_n(t)\}$$

vektor təsadüfi prosesinin çoxölçülülüyü B. m.

$$\begin{aligned} \zeta_k(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{u=1}^n a_{ku}^i \zeta_u(t-i) &= e_k(t) + \\ + \sum_{j=1}^q \sum_{u=1}^n b_{ku}^j e_u(t-j) &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^n c_{kuv}^{ij} \zeta_u(t-i) \times \\ &\times e_v(t-j), \quad k=1, \dots, n \end{aligned}$$

– fərqlər tenlikləri sistemi ilə verilir, burada $e(t) = \{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcılığıdır: $\mathbf{M} e(t) = 0$, G – korrelyasiya matrisi, $\{a_{ku}^i, 1 \leq i \leq p, k, u = 1, \dots, n\}$, $\{b_{ku}^j, 1 \leq j \leq q, k, u = 1, \dots, n\}$, $\{c_{kuv}^{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s, k, u, v = 1, \dots, n\}$ – sabitlərdir.

Əd.: [1] Granger C. W. J., Andersen A. P., An introduction to bilinear time series models, Gött., 1978; [2] Rao T. S., «J. Roy. Stat. Soc., ser. B», 1981, v. 43, № 2, p. 244–55; [3] Rao T. S., Gabor M. M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, B., 1984.

BİKOMPAKT TOPOLOJİ ($\mathcal{X}, \mathcal{F}$) FƏZASINDA

« бикомпакт в топологическом пространстве ($\mathcal{X}, \mathcal{F}$); bicomcompact / compact set in a topological space » – ələ $K \subset \mathcal{X}$ çoxluğudur ki, onun ixtiyari açıq örtüyünün sonlu altörtüyü vardır. Əgər K çoxluğunun qapanması bikompakt çoxluq olarsa, onda K nisbi bikompakt çoxluq (rus. относительно бикомпактным) adlanır. K topoloji fəzada, yalnız və yalnız, o halda bikompakt çoxluqdur ki, K -da hər bir şəbəkənin yığılan altşəbəkəsi olsun (bax, [1]). B. – bəzən kompakt da adlandırılır. Metrik fəzada kompakt və B. anlayışları üst-üstə düşür. Ümumi halda, bu anlayışlar arasındakı fərqi ayırmaq üçün kompakt çoxluqlar həssas bikompakt çoxluqlar adlandırılır. İxtiyari kompakt B.-dir, lakin ixtiyari B. kompakt deyildir.

Əd.: [1] Келли Дж.-Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М. – Л., 1948.

BİLYARD «бильярд; billiards» – bax, Sinay bilyardı.

BİMODAL PAYLANMA «бимодальное распределение; bimodal distribution», ikizirvəli paylanma, – təsadüfi kəmiyyətin paylanması sıxlıq funksiyası $f(x)$ -in $modasının$ iki qiyməti ilə təyin olunan iki maksimumunun varlığı ilə xarakterizə olunan ehtimal paylanmasıdır. B. p. bir çox hallarda iki normal paylanmanın «qarışığı» kimi alınır. Bax, Multimodal paylanma. Unimodal / təkizirvəli paylanma.

BİNAR MÜNASİBƏTLƏR STATİSTİKASI « бинарных отношений статистика; binary relations statistics »

– qeyri – ədədi təbiiyyətli obyektlər statistikasının ele bölməsidir ki, burada müşahidə nəticələri binar münasibətlərdir. Binar münasibətlər arasında ən çox tətbiq olunanlar – rənglənmə (xətti kvaziqayda münasibətləri), bölgülər (ekvivalentlik münasibətləri), tolerantlıq (refleksiv simmetrik münasibətlər) kimi münasibətlərdir. Seçimi orta kimi *Kemeni məsafəsi* vasitəsilə təyin olunan *Kemeni medianından* və digər yaxınlıq ölçüləri əsasında qurulan orta kəmiyyətlərdən istifadə olunur. Sıxlığın nüvə statistik qiymətləri (altıoxluğun elementlərinin sayına müvafiq ölçü üzrə) regressiyada, diskriminant analizdə, bircinsliyin yoxlanılmasında və başqa məsələlərdə tətbiq olunur. Bir çox hallarda, xüsusilə də, binar münasibətlər doğuran ehtimalların qurulmasında, *ekstremal statistik məsələlər* həll olunur. Binar münasibətlərin izotrop fazalarında ehtimalların *monoton paylanmaları* mühüm rol oynayır. Belə paylanmalar üçün moda nəzəri orta ilə üst-üstə düşür. Binar münasibət, bu münasibətin təyin olunduğu sonlu çoxluğun dekart kvadratının altıoxluğu ilə eyniləşdirildiyindən, B. m. s. *Sonlu təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır (bax, [1]). B. m. s.-nin bir çox məsələlərində aksiomatik daxil edilən yaxınlıq ölçüləri istifadə olunur (bax, [2]).

Təsadüfi tolerantlıqlar nəzəriyyəsi asılı olmayan elementləri sonlu təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin bir hissəsidir və deməli, lyusianlar nəzəriyyəsinin bir hissəsidir. Ölçmə nəzəriyyəsinə görə qaydalı və ya nominal şkalalarda ölçmələr uyğun olaraq, rənglənmə və bölgülərə gətirir. Təsadüfi rənglənmələr nəzəriyyəsi 20-ci əsrin əvvəllərindən inkişaf etməyə başlamışdır (bax, [3], [4]). İxtiyari A və B xətti qaydaları üçün Kendall rəng korrelyasiyası $\tau(A, B)$ və Kemeni məsafəsi $d(A, B)$

$$\tau(A, B) = 1 - 2d(A, B)/k(k-1)$$

münasibətlə bağlıdır, burada k – rənglənən obyektlərin sayıdır. Təsadüfi bölgülər nəzəriyyəsi (bax, [5]) riyazi cəhətdən olduqca çətindir.

Cüt-cüt müqayisələr nəzəriyyəsinə B. m. s.-na aid etmək olar, belə ki, bu müqayisələr binar münasibətlərin alınması üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Раушенбах Г. В., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 169–203; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [5] Мамая Г. В., Некоторые задачи статистического анализа классификаций, Тал., 1982; [6] Дэвид Г., Метод парных сравнений, пер. с англ., М., 1978.

BİNAR ŞAXƏLƏNƏN PROSES « бинарный ветвящийся процесс; binary branching process » – eyni tipli hissəcikləri ele *şaxələnən prosesdir* ki, hissəciklər bir çevrilmədə ya itir (məhv olur), ya da iki hissəyə bölünür. Kəsilməz zamanlı B. ş. p.-in t anında hissəcikləri sayının paylanmasının uyğun doğuran funksiyası $\psi(t; s)$ aşkar şəkildə ifadə olunur. Kritik şaxələnən proses halında

$$\psi(t; s) = 1 - (1 - s) \left[\frac{bt}{2}(1 - s) + 1 \right]^{-1}$$

olur, burada $b > 0$ sabitdir. Qeyri – kritik proses halında

$$\psi(t; s) = 1 - e^{at}(1 - s) \left[\frac{b}{2a}(e^{at} - 1)(1 - s) + 1 \right]^{-1},$$

$a \neq 0$.

B. ş. p. *doğum və ölüm prosesinin* xüsusi halıdır.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

BİNAR TƏSADÜFİ PROSES « бинарный случайный процесс; binary random process », dioxotomik təsadüfi proses – hər bir realizasiya yalnız iki qeyd olunmuş c_1 və c_2 qiymətlərini alan $\zeta(t)$

təsadüfi prosesidir. $\zeta(t) \rightarrow a\zeta(t) + b = \zeta_1(t)$ xətti çevirməsilə (c_1, c_2) qiymətlərini ixtiyari verilmiş ədədlər düzü ilə əvəz etmək olar; buna görə də, B. t. p.-i tədqiq edərkən ele əvvəlcədən $c_1 = 1, c_2 = 0$ və ya $c_1 = 1, c_2 = -1$ götürülür. Sonuncu halda, B. t. p. bəzən *vahidi təsadüfi proses* adlanır (bax, məs., [1]).

B. t. p.-ə ilk misalı N. Viner araşdırmışdır (bax, [2], [3]). Stasionar B. t. p.-ə tipik misal *təsadüfi teleqraf siqnalıdır*; bu halda B. t. p.-ə – binar rabitə kanalı ilə ötürülən signal modeli kimi baxmaq olar, məs., fasilələrlə bir-birini əvəz edən cərəyanlar ardıcılığı göndərilən teleqraf kanalı.

B. t. p.-lər təbii olaraq girişə daxil olan $\zeta(t)$ signalını qeyri – xətti çevirən məhdudlayıcının çıxışındakı proseslərin baxılmasında yaranır; bu məhdudlayıcı daxil olan $\zeta(t)$ signalını $|\zeta(t)| \leq a$ (burada a – qeyd olunmuş müsbət ədəddir)

olduqda daxil olunmuş signalı təhrifsiz ötürür. Əgər $|\zeta(t)| > a$ olarsa, onda bu signalı $a\zeta(t)/|\zeta(t)|$; Əgər $M\zeta(t) = 0$,

$M\zeta^2(t) \geq a^2$ olarsa, onda belə məhdudlayıcının çıxışındakı proses faktiki olaraq B. t. p.-dən fərqlənməyəcəkdir.

$\zeta(t)$ – Gauss stasionar prosesi,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ olduqda,} \\ -1, & x < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

olarsa, $Y(t) = \operatorname{sgn} \zeta(t)$ prosesi stasionar B. t. p.-dir, $Y(t)$ prosesi $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin korrelyasiya funksiyasının polyar qiymətləndirmə metodunda əsas rol oynayır (bax, *Polyar korrelyasion funksiya*); $Y(t)$ -dən $\zeta(t)$ -nin spektral sıxlığının sadə təqribi yaxınlaşmasının təyin olunması üçün də istifadə olunur (bax, [4]).

$\zeta(t)$ stasionar B. t. p.-in $B(\tau) = M\zeta(t + \tau)\zeta(t)$ korrelyasiya funksiyasının qrafikinə $\tau = 0$ nöqtəsində hökmən zirvəsi olur (bax, [1]).

Əd.: [1] Masry E., «SIAM J. Appl. Math.», 1972, v. 23, № 1, p. 28–33; [2] Wiener N., «Acta math.», 1930, t. 55, № 2–3, p. 117–258; [3] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, пер. с англ., М., 1963, с. 194; [4] Кедэм Б., Binary time series, N. Y., Basel, 1980.

BİNOMİAL ƏMSAL « биномиальный коэффициент; binomial coefficient » – Nyuton binom ayrılışında C_N^n əmsalıdır:

$$(x + y)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n x^n y^{N-n},$$

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}, \quad 0 \leq n \leq N$$

düsturu ilə hesablanan B. ə. N sayda müxtəlif elementdən ibarət çoxluğun n sayda elementli birləşmələrinin sayına bərabərdir. B. ə. $\binom{N}{n}$ simvolu ilə də işarə olunur.

B. ə.-lər arasında bir çox münasibətlər vardır. Məs.,

$$C_N^n = C_N^{N-n}, C_{N+1}^{n+1} = C_N^n + C_N^{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^N C_N^n = 2^N, C_N^n = \sum_{k=0}^m C_m^k C_{N-m}^{n-k}, 1 \leq m \leq n.$$

B. ə.-lər müxtəlif ehtimal – kombinator məsələlərdə təbii olaraq yaranır. Məs., hiperhəndəsi paylanma

$$p(M, N, m, n) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

$0 \leq m \leq n \leq N, m \leq M \leq N, n-m \leq N-M$ münasibətlərlə təyin olunur.

$$B_n = \frac{1}{n!} M \xi (\xi-1) \dots (\xi-n+1) = \sum_{N=n}^{\infty} C_N^n P\{\xi = N\}$$

berabərlikləri tamqiymətli ξ təsadüfi kəmiyyətinin faktorial momentlərini təyin edir. Əgər $h(u) = -u \log_2 u - (1-u) \times \log_2(1-u)$, $\tau = (2n+1)/2N$ olarsa, onda

$$C_{N-1}^n = \frac{2^{Nh(\tau)}}{\sqrt{2\pi N}} e^{\varepsilon(N,n)},$$

$$0 \leq \varepsilon(N, n) \leq (16n\tau(1-\tau))^{-1}.$$

B. ə.-lərin bir sıra ümumiləşmələri vardır. Bunlardan **polinomial əmsallar**:

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

$$n_1 + \dots + n_k = N, k \geq 2,$$

q – binomial əmsallar və ya **Qauss əmsallarını** (bu əmsallar $q \rightarrow 1$ olduqda B. ə. ilə üst-üstə düşür):

$$\binom{N}{n}_q = \frac{\prod_{i=1}^N (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^n (q^i - 1) \prod_{i=1}^{N-n} (q^i - 1)}, q > 1$$

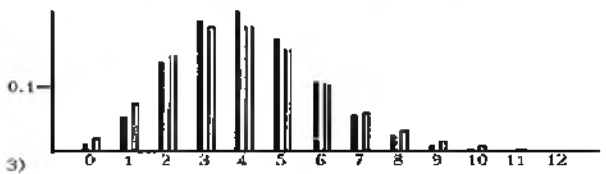
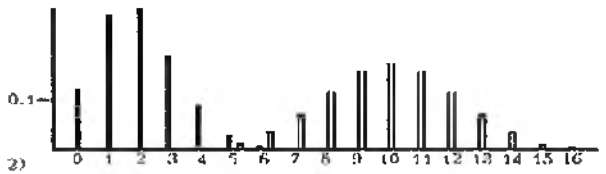
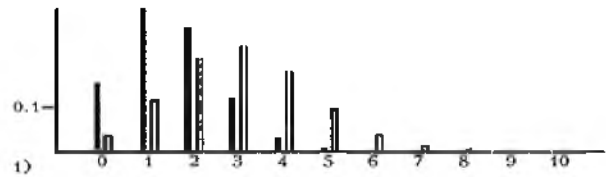
qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1-2, М., 1984.

BINOMIAL PAYLANMA « биномиальное распределение; binomial distribution », Bernulli paylanması – $k = 0, 1, 2, \dots, n$ tam qiymetlerini uyğun olaraq

$$p_k = P\{\xi = k\} = b(k; n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır (bax, şəkil).



1) $n = 5, p = 0,3$ və $n = 10, p = 0,3$;

2) $n = 20, p = 0,1$ və $p = 0,5$;

3) $n = 20, p = 0,2$ binomial paylanma olduğu halda $\lambda = np = 4$ approksiməedici halı üçün Puasson paylanması.

p – B. p.-nin parametridir və müsbət nəticə («müvəffəqiyyət») ehtimalıdır, $0 \leq p \leq 1$. B. p. asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı ilə bağlı əsas ehtimal paylanmalarından biridir. $\xi_1, \xi_2, \dots$ – 0 və 1 qiymetlərini uyğun olaraq, p və $1-p$ ehtimalları ilə alan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun (yeni hər bir ξ_i təsadüfi kəmiyyəti $n = 1$ halı üçün B. p. qanununa tabedir).

ξ_i təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan sınaqların nəticələri kimi interpretasiya olunur: əgər i -ci sınaq «müvəffəqiyyət»lə nəticələnmişdirsə, $\xi_i = 1$, əks halda isə $\xi_i = 0$ götürülür. Əgər aparılan sınaqların ümumi sayı qeyd olunmuşdursa, onda belə sxem *Bernulli sınaqları* adlanır. $\{\xi_i, i \geq 1\}$ ardıcılığına *Bernulli ardıcılığı* deyilir. n sınaqda «müvəffəqiyyət»lər sayı $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \geq 1$ bu halda p parametrlı B. p. qanununa tabedir. B. p.-nin doğuran funksiyası $\psi(s) = (ps + q)^n$ -ə bərabərdir ($q = 1 - p$). $\psi(s)$ doğuran funksiyasının Nyuton binomuna ayrılışı $b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n$ olduğundan «B. p.» termini qəbul edilmişdir: $b_k = b(k, n, p)$.

B. p.-nin momentləri aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$M\xi = np, D\xi = M[\xi - M\xi]^2 = np(1-p),$$

$$M(\xi - M\xi)^2 = np(1-p)(1-2p);$$

B. p.-nin asimetriyası

$$As = (1-2p)/\sqrt{np(1-p)},$$

ekssesi

$$Es = (1-6p(1-p))/np(1-p),$$

xarakteristik funksiyası isə

$$f(z) = (1 + p(e^{iz} - 1))^n$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Binomial paylanma funksiyası ixtiyari həqiqi y üçün

$$F(y) = P\{\xi \leq y\} = \sum_{k=0}^{[y]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < y < n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $[y]$, y -in tam hissəsidir.

Bütün həqiqi y qiymətlərində

$$F(y) = \Phi\left[\frac{y-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + R_n(y, p)$$

berəbərlili müntəzəm ödənilir, burada Φ – Laplas funksiyası.

$$R_n(y, p) = O(n^{-1/2}).$$

$n \rightarrow \infty$ olduqda B. p. funksiyası Φ standart normal paylanma funksiyası terminologiyasında

$$F(y) \equiv \frac{1}{B([y]+1, n-[y])} \int_p^1 t^{[y]} (1-t)^{n-[y]-1} dt$$

asimptotik düsturu ilə (Muavır – Laplas teoremi) ifadə olunur, burada $B(a, b)$ – Eylər beta – funksiyasıdır.

Əgər asılı olmayan sınaqlar sayı n böyük, p ehtimalı kiçik olarsa, onda $b(k; n, p)$ individual ehtimalları, asimptotik olaraq Puasson paylanması terminləri ilə ifadə olunur:

$$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$

Bu halda, əgər $n \rightarrow \infty$ və $0 < c \leq y \leq C$ (c və C – sabitlərdir) olarsa, onda $0 < p < 1$ intervalından olan bütün p -lərə görə müntəzəm olaraq

$$F(y) = \sum_{k=0}^{[y]} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + O(n^{-2}), \quad \lambda > 0$$

asimptotik düsturu ödənilir, burada

$$\lambda = (2n - [y])p/(2-p).$$

B. p.-nin çoxölçülülüyü ümumiləşməsi *polynomial paylanmadır*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [4] Прохоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 135–42; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

BINOMIAL SEÇİM « биномиальная выборка; binomial sample » – bax, Seçim statistik.

BİR EHTİMAL FƏZASI METODU « одного вероятностного пространства метод; common probability space method » – limit teoremlərinin isbatı

(təsadüfi proseslər üçün də) və bunlarda yığılma sürətinin qiymətlərinin alınması metodu olub, bir ehtimal fəzasında verilmiş, araşdırılan təsadüfi elementlərin bunların paylanması ilə eyni paylanmaya malik olan və müəyyən bir metrikada bir-birinə yaxın olan digər təsadüfi elementlərlə əvəz olunmasından ibarətdir. X_n , $n=0, 1, \dots$ – qiymətləri $(\mathcal{X}, d)$ metrik fəzasından olan, ola bilər ki, müxtəlif ehtimal fəzalarında da verilən təsadüfi elementlər olsun. X_n^* , $n=0, 1, \dots$, – $(\mathcal{X}, d)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi elementlər olsun, lakin bu təsadüfi elementlərin eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi, X_n , $n=0, 1, \dots$ təsadüfi elementləri ilə eyni qanunla paylandığı

ferz olunur. Əgər $\{X_n^*\}$ elementlərini eht seçmək olarsa ki, $d(X_n^*, X_0^*) \rightarrow 0$ münasibəti sanki yəqin və ya ehtimala görə ödənilsin, onda $P_n \Rightarrow P_0$ olur; P_n , X_n elementinin paylanmasıdır, $n=0, 1, \dots$. Bu yanaşma təsadüfi proseslər üçün ümumi limit teoremlərinin isbatında tətbiq edilmişdir (bax, [1]). Bu üsulan yığılma sürətinin qiymətlərinin alınmasında da istifadə olunmuşdur, çünki Levi – Proxorov məsafəsi $\pi(P_n, P_0)$ üçün

$$\pi(P_n, P_0) \leq \inf_{\varepsilon} \max [\varepsilon, P\{d(X_n^*, X_0^*) > \varepsilon\}] \quad (*)$$

berəbərsizliyi doğrudur. $(\mathcal{X}, d)$ tam separabel fəza olduqda Ştrassen teoreminə görə B. e. f. m. geniş imkanlar yaradır: (*)-da bərabərlik halı X_n^* və X_0^* təsadüfi elementlərinin birgə paylanmasının «ən yaxşı» seçilməsi ilə alınır, həmçinin $P_n \Rightarrow P_0$ zəif yığılmasından $d(X_n^*, X_0^*) \rightarrow 0$ münasibətinin sanki yəqin ödənildiyini təmin edən $\{X_n^*\}$ elementlərinin varlığı faktı alınır (bax, [1]).

B. e. f. m.-nin tətbiqinə aid misal: $\{X_n\}$ həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, $X_n^* = F_n^{-1}(Y)$, $n=0, 1, \dots$, $F_n(\cdot)$, X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, Y , $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olduğu halıdır.

B. e. f. m. yığılma sürətinin araşdırılmasında geniş surətdə tətbiq edilir (bax, [2], [3], [4], [5], [6]).

Əd.: [1] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [3] Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, К., 1961; [4] Strassen V., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Stat. Probab.», 1967, v. 2, № 1, p. 315–43; [5] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Warh. und verw. Geb.», 1975, Bd 32, № 1, S. 111–31; 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [6] Berkes I., Philipp W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 29–54.

BİRADDIMLI KEÇİD EHTİMALI « одношаговая вероятность перехода; one-step transition probability » – bax, Markov zənciri.

BİRCİNS XAOS « однородный хаос; homogeneous chaos » – sonluölçülülük paylanmaları yenidənqayışmalarla nəzərdən invariant olan, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ fəzasında təsadüfi ölçünün

işarə olunması üçün termindir (bax, [1]). B. x. nəzəriyyəsində Viner prosesinin kvadratı ilə inteqrallanan funksionallarının Viner – İto çoxqat inteqralları (polinomial bircins xaos) ilə yaxınlaşması mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Wiener N., «Amer. J. Math.», 1938, v. 60, p. 897–936; [2] Х и д а Т., Брауновское движение, пер. с англ., М., 1987.

BİRCİNS İZOTROP KORRELYASİON FUNKSİYA « однородная изотропная корреляционная функция; homogeneous isotropic correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

BİRCİNS KANAL « однородный канал; homogeneous channel » – bax, *Kanal yaddaşsız*.

BİRCİNS KEÇİD FUNKSİYASI « однородная переходная функция; homogeneous / stationary transition function » – bax, *Keçid funksiyası*.

BİRCİNS KORRELYASİON FUNKSİYA « однородная корреляционная функция; homogeneous correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

BİRCİNS MARKOV PROSESİ « однородный марковский процесс; homogeneous Markov process » – bax, *Markov prosesi*.

BİRCİNS MARKOV ZƏNCİRİ ZAMAN ÜZRƏ « однородная по времени цепь Маркова; time homogeneous Markov chain » – zaman keçdikcə evolyusiya xarakteri dəyişməyən *Markov zənciridir*. Ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında verilən, biraddımlı keçid ehtimalları $p_n(x, \Gamma), n \geq 0$ olan $X = (X_n)$ Markov zənciri üçün bircinslik xassəsi $p_n(x, \Gamma)$ ehtimalının n -dən asılı olmamazlığıdır. Vəziyyətləri sayı hesabıdan çox olmayan $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ vəziyyətlər çoxluğunda verilən Markov zənciri üçün bircinslik tələbi $p_{ij}(n, n+1) = p_n(i, \{j\})$ ehtimalının n -dən asılı olmamazlığına getirilir. ($i, j \in \mathcal{E}$).

Z. ü. B. M. z. – Markov zəncirləri nəzəriyyəsinin öyrənilən əsas obyektlərindəndir. «Markov zənciri» və «Zaman üzrə B. M. z.» terminləri əksər hallarda sinonimlər kimi işlədilir.

BİRCİNS ÖLÇÜ « однородная мера; homogeneous measure » – bax, *Təsadüfi ölçü*.

BİRCİNS PUASSON ÖLÇÜSÜ « однородная пуассоновская мера; homogeneous Poisson measure » – bax, *Puasson ölçüsü*.

BİRCİNS SİNFİ, FUNKSİYALARIN Р е н у и е г ö r ə « однородный класс функций по Реньи; R é n y i ' s homogeneous class of functions » – gücü n -ə bərabər sonlu Λ çoxluğunda funksiyaların aşağıdakı şərtlə verilən $\mathcal{F}$ sinfidir: Λ -dan olan ixtiyari λ və μ üçün $f(\lambda) = f(\mu)$ şərtini ödəyən $f \in \mathcal{F}$ funksiyalarının sayı λ və μ -dən asılı olmayan R_2 ədədinə bərabərdir. İsbat olunmuşdur ki, $\mathcal{F}$ -in gücü $2R_2(n-1)/(n-2)$ ədədini aşmır. $\mathcal{F}$ -in ixtiyari seçilmiş N sayda elementlərinin Λ -dan olan hər hansı λ və μ -lərdəki qiymətlərinin ardıcılığının üst-üstə düşməsi ehtimalı üçün yuxarı və aşağı sərhədlər tapılmışdır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

86 BİRCİNS

BİRCİNS TƏSADÜFİ MEYDAN « однородное случайное поле; homogeneous random field » – s nöqtələrinin bircins $S = \{s\}$ fəzasında verilmiş $\text{elə } X(s)$

təsadüfi meydandır ki, bu meydan S fəzasını özünə çevirən $G = \{g\}$ tranzitiv çevirmələr qrupu ilə təmin olunmuşdur və bu meydan $\text{elə xassəyə malikdir ki, onun qiymətlərinin müəyyən statistik xarakteristikaları } s \text{ arqumentlərinə } G \text{ qrupunun ixtiyari çevirməsinin tətbiqi nəticəsində dəyişmir. B. t. m. iki sinfə ayrılır: əgər ixtiyari } n = 1, 2, \dots \text{ və } g \in G \text{ üçün } n \text{ sayda } s_1, \dots, s_n \text{ ixtiyari nöqtələrində meydanın qiymətlərinin sonluölçülü ehtimal paylanması həmin meydanın } g s_1, \dots, g s_n \text{ nöqtələrində qiymətlərinin ehtimal paylanması ilə üst-üstə düşərsə, } X(s) \text{ meydanı } d a r m ə n a d a$

B. t. m. adlanır; əgər bütün $s \in S, s_1 \in S$ və $g \in G$ üçün $M|X(s)|^2 < \infty$ və $MX(s) = MX(g s), MX(s)\overline{X(s_1)} = MX(g s)\overline{X(g s_1)}$ olarsa, $X(s)$ geniş mənada B. t. m. adlanır.

Mühüm xüsusi hal – G qrupu kimi bütün mümkün ola bilən paralel köçümlər qrupu seçildikdə k ölçülü $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasında (və ya tamqiymətli koordinatları $\mathbb{R}^k$ -nin nöqtələrinin $\mathbb{Z}^k$ şəbəkəsində) B. t. m. halıdır, bəzən B. t. m. kimi, ümumiyyətlə, məhz bu – sonuncu tip meydan anlaşılr. $\mathbb{R}^k$ -da bütün mümkün ola bilən izometrik çevirmələrin G qrupuna müvafiq, $\mathbb{R}^k$ -da verilən B. t. m., əksər hallarda, *bircins* və *izotrop təsadüfi meydan* adlandırılır.

B. t. m. anlayışı stasionar təsadüfi proses anlayışının təbii ümumiləşməsidir; stasionar təsadüfi prosesdə olduğu kimi B. t. m.-nin özü və onun kovariasion funksiyası üçün xüsusi şəkilli *spektral ayrılış* mümkündür (bax, məs., [1] – [3]). B. t. m. və onun bəzi ümumiləşmələrinə əksər hallarda müxtəlif tətbiqi məsələlərdə təsadüf olunur; o cümlədən, statistik turbuləntlik nəzəriyyəsində $\mathbb{R}^k$ -da bircins və izotrop təsadüfi meydanlar kimi (skalyar və vektor), lokal bircins və lokal izotrop təsadüfi meydanlar (başqa sözlə – bircins və izotrop artımlı meydanlar) adlandırılan meydanlar da mühüm rol oynayır və bunlar da bircins və izotrop meydanların sadə ümumiləşmələridir (bax, məs., [4]), müasir fiziki kvantlanmış meydanlar nəzəriyyəsində və statistik fizikada isə ümumiləşmiş B. t. m.-lər nəzəriyyəsi tətbiq olunur (bax, *Ümumiləşmiş təsadüfi meydan*).

Əd.: [1] Y a g l o m A. M., в кн.: Proceedings of 4th Berkeley symposium mathematical statistics and probability, v. 2, Berk. – Los. Ang., 1961, p. 593–622; [2] Х е н н а н Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [3] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [4] М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967.

BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES ASILI OLMAYAN ARTIMLARLI « однородный случайный процесс с независимыми приращениями; homogeneous random process with independent increments » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımlırlı*.

BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES, ZAMAN ÜZRƏ « однородный по времени случайный процесс; time homogeneous random process » – bax, *Stasionar təsadüfi proses*.

BİRCİNS ÜMUMİLƏŞMİŞ MEYDAN « однородное обобщенное поле; homogeneous generalized field » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses.*

BİRCİNS VƏ HƏNDƏSİ PROSES « однородный и геометрический процесс; homogeneous and geometric process » – bax, *Həndəsi proses.*

BİRCİNS VƏ İZOTROP HƏNDƏSİ PROSES « однородный и изотропный геометрический процесс; homogeneous and isotropic geometric process » – bax, *Həndəsi proses.*

BİRCİNS VƏ İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « однородное и изотропное случайное поле; homogeneous and isotropic random field » – Evklid fəzasında ehtimal təsadüfi funksiyadır ki, onun müəyyən xarakteristikaları fəzanın izometrik çevirmələri qrupu G -yə nəzərən invariantdır (paralel köçürmələr, fırlanmalar və simmetriyalar kimi çevirmələr). Əgər $M[X(t)]^2 < +\infty$ şərtini ödəyən $X(t)$,

$t \in \mathbb{R}^n$ həqiqi qiymətli təsadüfi funksiyasının riyazi gözləməsi $MX(t)$ t -dən asılı olmazsa və $MX(t)X(s) = B(|t-s|)$ yalnız t və s arasında $|t-s|$ məsafəsindən asılı olarsa, onda $X(t)$ təsadüfi funksiyası bircins və izotrop təsadüfi meydan adlanır. Qoyulan tələb ilk iki momentin (orta qiymət və kovariasion funksiyaların) G qrupuna nəzərən invariantlığını ifadə edir. B. və i. t. m.-nin mühüm xüsusiyyəti həm korrelyasion funksiyaların, həm də meydanın özünün spektral ayrılıqlarının olmasıdır.

Kvadratik orta mənada kəsilməz təsadüfi meydanın kovariasion funksiyası $B(r)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$B(r) = \int_0^\infty Y_n(\lambda r) d\Phi(\lambda), \quad (1)$$

burada

$$Y_n(x) = 2^{(n-2)/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J^{(n-2)/2}(x)}{x^{(n-2)/2}}$$

– sferik Bessel funksiyasıdır, $\Phi(\lambda)$, $-\infty$ -da məhdud kəsilməz funksiya olub, $X(t)$ təsadüfi meydanının spektral funksiyası adlanır. $X(t)$ meydanının özü aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [1]):

$$X(t) = c_n \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \times \int_0^\infty \frac{I_{m+(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{(n-2)/2}} Z_m^l(d\lambda) \quad (2)$$

burada $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, t nöqtəsinin sferik koordinatları, $S_m^l(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, m dərəcəli ortonormalanmış sferik harmoniklər,

$$h(m, n) = (2m + n - 2) \frac{(m + n - 3)!}{(n - 2)! m!}$$

– bəzi harmoniklərin sayı, $Z_m^l(\cdot)$ – ixtiyari S_1 və S_2 Borel çoxluqları üçün

$$M Z_m^l(S_1) Z_{m_1}^{l_1}(S_2) = \delta_m^{m_1} \delta_l^{l_1} \Phi(S_1 \cap S_2)$$

şərtini ödəyən, ortoqonal qiymətli təsadüfi ölçülər toplusudur [burada $\Phi(S) = \int_S d\Phi(\lambda)$, $-\Phi(\lambda)$ spektral funksiyasının doğrduğu Lebəq – Stilyes ölçüsüdür, $c_n^2 = 2^{n-1} \Gamma(n/2) \pi^{n/2}$, δ_l^j – Kroneker simvoludur]. (1)-dəki integrallar ortoqonal ölçü üzrə stoxastik integrallardır; (2) sırası kvadratik orta mənada yığılır.

B. və i. t. m. $\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{R}^3$ -də tətbiq üçün böyük maraq doğurur. B. və i. t. m.-nin $\mathbb{R}^2$ -də spektral ayrılışı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$X(r, \varphi) = \sum_{k=0}^\infty \cos k\varphi \int_0^\infty Y_k(\lambda r) Z_k^l(d\lambda) + \sum_{k=1}^\infty \sin k\varphi \int_0^\infty Y_k(\lambda r) Z_k^2(d\lambda) +$$

burada $Z_k^l(\cdot)$, $l = 1, 2, \dots$ (3) şərtini ödəyən ortoqonal təsadüfi ölçülər toplusudur.

Tətbiqdə çoxölçülü təsadüfi meydanlar da mühüm rol oynayır (məs., sürətlər meydanı). İxtiyari $g \in G$ üçün

$$MX(t) = 0, \quad MX'(t)X(s) = gMX'(gt)X(gs)g',$$

olarsa, $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ vektor təsadüfi funksiyası bircins və izotrop vektor təsadüfi meydanı adlanır.

$$B(r) = MX'(t+r)X(t) = (B_{ij}(r))$$

kovariasion matrisi iki

$$B_{ij}(r) = [B_{il}(r) - B_{lk}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{kk}(r) \delta_i^j$$

skalyar funksiyaları ilə ifadə olunur.

$B_{il}(r)$ və $B_{kk}(r)$ funksiyaları, uyğun olaraq, uzununa və eninə korrelyasion funksiyalar adlanır və bunlar aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$B_{il}(r) = MX'_l(t+r)X_l(t),$$

$$B_{kk}(r) = MX_k(t+r)X_k(t),$$

burada $X_l(t)$, $X(t)$ vektorunun r istiqamətinə proyeksiyası, $X_k(t)$ – bu vektorun r -ə perpendikulyar olan hər hansı istiqamətə proyeksiyasıdır. Vektor B. və i. t. m.-nin kovariasion matrisləri üçün də spektral ayrılışlar məlumdur.

Əd.: [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [3] Яглом А. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338.

BİRGƏ ÖLÇMƏ « совместное измерение; joint measurement » – bax, *Müşahidələnen*.

BİRGƏ PAYLANMA « совместное распределение; joint distribution » – eyni ehtimal fəzasında verilən bir neçə təsadüfi kəmiyyətin *paylanması* aid ümumi termindir. $X_1, \dots, X_n, - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş, $(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$ ölçülən fəzalarında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$ çoxluqlarında

$$P_{X_1, \dots, X_n}(B_1, \dots, B_n) = P\{X_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}_n\}$$

kimi ilə təyin olunan $P_{X_1, \dots, X_n}(B_1, \dots, B_n)$ funksiyasına $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması deyilir. B. p. ilə birgə paylanma funksiyası, ehtimal paylanmalarının birgə sıxlığı anlayışları da daxil olunmuşdur.

Əgər $X_1, \dots, X_n$ adi həqiqi təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda B. p. $\mathbb{R}^n$ fəzasında $(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun paylanmasıdır (bax, *Çoxölçülü paylanma*). Əgər $X(t), t \in T$ təsadüfi prosesdirsə, onda $t_1, \dots, t_n \in T$ olduqda $X(t_1), \dots, X(t_n)$ qiymətlərinin B. p. – $X(t)$ təsadüfi prosesinin çoxölçülü paylanmaları adlanır, $n \geq 2$.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

BİRGƏ SIXLIĞI, EHTİMAL PAYLANMALARININ « совместная плотность распределения вероятностей; joint probability density » – bax, *Birgə paylanma*.

BİRXƏTLİ XİDMƏT SİSTEMİ « однолинейная система обслуживания; single – server queueing system », birkanallı xidmət sistemi – eyni zamanda bir tələbdən artıq xidmət mümkün olmayan *xidmət sistemidir*. B. x. s.-nin əsas tipi gözleməli, birkanallı *xidmət sistemidir*. Adətən, B. x. s.-nin işləməsi

$$z_{n+1} = f(z_n, \xi_n)$$

rekurrent münasibətilə verilən (z_n) ardıcılığı ilə xarakterizə olunur, burada (ξ_n) – idarəedici ardıcılıqdır. Gözləməli sistemdə n -ci tələbi gözləmə müddəti w_n üçün

$$w_{n+1} = \max \{0, w_n + \eta_n - u_n\}$$

münasibəti doğrudur, burada η_n – n -ci tələbin xidmətlənmə müddəti, u_n – n və $n+1$ -ci tələblərin daxil olduğu anlar arasındakı müddətdir.

BİRİNCİ LAPLAS QANUNU « первый закон Лапласа; Laplace first law / distribution » – bax, *Laplas paylanması*.

BİRKANALLI XİDMƏT SİSTEMİ « одноканальная система обслуживания; single-channel queueing system » – *birxətli xidmət sistemidir*.

88 BİRGƏ

BIRKHOFF – XİNÇİN ERQODİK TEOREMİ

« Биркгофа – Хинчина эргодическая теорема; Birkhoff – Khinchin ergodic theorem » – dar mənada stasionar ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ üçün $M|\xi_0| < \infty$ olduqda,

$$\begin{aligned} M(\xi_0 | I_\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \xi_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=-m}^0 \xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \xi_k \end{aligned}$$

limitləri vahid ehtimalla mövcuddur, hökmü ilə ifadə olunan tarixən ilk *erqodik teoremdir*, burada $I_\xi, - \{\xi_i\}$ ardıcılığının yerdəyişməyə nəzərən invariant hadisələr σ – cəbridir. Bu teorem bezi məhdudiyyətlərlə G. Birkhoff ([1]), tamamilə ümumi hal üçün isə A. Ya. Xinqin ([2]) tərəfindən isbat olunmuşdur. Dar mənada stasionar $\xi(t), -\infty < t < \infty$ prosesləri üçün $M|\xi(0)| < \infty$ olduqda analogi hökm doğrudur (bu halda cəmlər inteqrallarla əvəz olunur).

Əd.: [1] Birkhoff G., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1931, v. 17, p. 656–60; [2] Chintschin A., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, S. 485–88.

BİRQİYMƏTLİLİK XASSƏSİ ÇOXLUĞUN ÖLÇÜ-YƏ NƏZƏRƏN « однозначности свойство множества по отношению к мере; one-valued property of a set relatively to a measure » – bax, *Davamlılaşma, ölçülər*.

BİRLƏŞDİRİLMİŞ SPEKTRİ, PROSESİN « присоединенный спектр процесса; associated spectrum of a process » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

BİRLƏŞMƏ(s) hadisələrin « объединение событий; union of events » – hadisələr *cəmidir*.

BİRLƏŞMƏ təkrarsız « сочетание без повторений; combination without repetitions » – bax, *Birləşmə*.

BİRLƏŞMƏ(s)/CƏM(i) təsadüfi hadisələrin « объединение / сумма случайных событий; union / sum of random events » – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B təsadüfi hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən, onlardan heç biri baş vermədikdə baş verməyən hadisəyə deyilir və $A \cup B$ və ya $\sup(A, B)$ kimi işarə olunur. İxtiyari sayda təsadüfi hadisələrin birləşməsi analogi qaydada təyin olunur:

A_i – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisə, $i \in J$, J isə i -nin qiymətlər aldığı ixtiyari çoxluqdursa,

A_i hadisələrinin *birləşməsi* hadisəsi – $\bigcup_{i \in J} A_i$, yalnız və

yalnız, A_i hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir. Ω elementar hadisələr fəzası, A müşahidə oluna bilən ixtiyari təsadüfi hadisədirsə ($A \subset \Omega$), onda

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup \Omega = \Omega.$$

Tərifə görə $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Əgər C ehtimal hadisəsi olarsa ki, $A \subset C$ və $B \subset C$, onda

$$A \cup B \subset C.$$

yeni $A \cup B$ hadisəsi A və B hadisələrinin dəqiq yuxarı sərhədidir. Hadisələr üçün birləşmə əməli kommutativlik: $A \cup B = B \cup A$;

assosiativlik: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

distributivlik: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

idempotentlik: $A \cup A = A$

xassələrinə tabedir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Невз Ж., Математические основы теории вероятностей, М., 1969.

BİRÖLÇÜLÜ DIFFUZIYA «одномерная диффузия; one-dimensional diffusion» – həqiqi oxun intervalında verilmiş, kəsilməz trayektoriyaları standart Markov prosesi. İxtiyari birölçülü bircins diffuzion proses B. d.-nin xüsusi halıdır. B. d.-nin müfəssəl öyrənilməsinə V. Fellerin əsas təşkil edici işləri ilə başlanmışdır (bax, [1], [2]) və o, əsas etibarilə analitik metodları tətbiq etmişdir. Hal-hazırda üstünlük verilən ehtimali yanaşma Y. V. Dinkin (bax, [3], [4]) tərəfindən işlənmişdir. B. d. nəzəriyyəsi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin tamamlanmış fəsillərindən biri sayılır (bax, [4], [5]).

$\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $- E \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari intervalında verilmiş B. d. olarsa və onun ixtiyari $x \in D$ nöqtəsindən çıxan trayektoriyası kəsildiyi ana qədər D -nin ixtiyari qeyd olunmuş nöqtəsinə çatarsa, ζ – rəqulyar diffuzion proses adlanır. Əgər B. d. bütün E -də rəqulyar olarsa, E isə ya parça, ya da interval olarsa, o, Feller prosesi əmələ gətirir. $E = [c_1, c_2]$ parçasında rəqulyar, kəsilməz (bax, Qırılma anı) ζ B. d.-nin keçid funksiyası və evolyusiya xarakteri – kano-nik (və ya təbii) $p(x)$ şkalası və $n(x)$ ölçüsü ilə birqıymətli təyin olunur, $x \in E$. Bunlardan birincisi $p(x) = \mathbf{P}_x\{\zeta_{\tau_1} = c_2\}$ bərabərliyi ilə verilir və E -də kəsilməz, artan funksiyadır, burada τ_1 , $-\zeta$ -nin $\mathbf{I} = (c_1, c_2)$ -dən ilk çıxış anıdır. $n(x)$ ölçüsü $\mathbf{I}$ -də $D_p^+ m(x)$ -ə bərabər götürülür, burada $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_1 < \infty$ ($D_p^+ m(x)$ -in sağ töreməsi –

$$\lim_{y \downarrow x} \frac{m(y) - m(x)}{p(y) - p(x)}$$

limitinə bərabər götürülür; $D_p m(x)$ -in itirəflili töreməsi analogi qaydada təyin olunur). Tərifə görə, fərz olunur ki, $n(c_i) = -\beta_i$, $i=1, 2$, burada β_1 (uyğun olaraq β_2), $-c_1$ -dən (c_2 -dən) başlayan trayektoriyalar üçün c_2 (c_1) nöqtəsinə çatma müddətinin riyazi gözləməsidir. $n(x)$ funksiyası E -də artır və $\mathbf{I}$ daxilində kəsilməzdir. ζ prosesinin infinitezimal operatoru A , Feller düsturu – $Af(x) = D_p D_p^+ f(x)$, $x \in E$ ilə verilir. A operatorunun təyin olunma oblastından olan f funksiyasının strukturu tamamilə təsvir olunmuşdur (bax, [4], [5]); məlumdur

ki, məs., bunlar E -də kəsilməzdir və E parçasının ucları c_1 və c_2 -də

$$v_i D_p D_p^+ f(c_i) + (-1)^i D_p f(c_i) = 0, \quad i=1, 2$$

sərhəd şərtlərini ödəyirlər, burada $v_1 = n(c_1 + 0) - n(c_1)$, $v_2 = n(c_2) - n(c_2 - 0)$.

Hər hansı intervalda verilmiş qınılmayan və bu intervalda rəqulyar B. d.-nin infinitezimal operatorları yuxarıda qeyd olunan tip ümumiləşmiş ikinci tərtib differensial operatorların köməyiylə sərhəd şərtləri olmadan təsvir olunur (bax, [4], [5]). Qapalı intervallarda verilmiş verilən B. d.-yə qədər oxşar B. d.-lərin davamlarının qurulması məsələsinə [1], [2]-dən başlayaraq çox şeylər edilmişdir.

Qınılar və rəqulyar olmayan B. d.-lər həlali ətraflı öyrənilmişdir (bax, [4], [5]). Məlumdur ki, birölçülü Viner prosesinin zaman dəyişənini təsadüfi əvəz etməklə çevirmə apararaq bir çox B. d. almaq olur (bax, Markov prosesi; çevirmələr; [4], [5]).

Bax, Birölçülü diffuziya; sərhədlərin təsnifatı.

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417–36; [3] Дынкин Е. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 105, с. 206–09; [4] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [5] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [6] Волконский В. А., «Тр. Моск. Матем. о-ва», 1960, т. 9, с. 143–89.

BİRÖLÇÜLÜ DIFFUZIYA; sərhədlərin təsnifatı «одномерная диффузия; классификация границ one-dimensional diffusion; classification of boundaries» – $E = (c_1, c_2) \subset \mathbb{R}^1$ intervalının sərhəd nöqtələrinin təsnifatıdır və bu təsnifat E -də verilmiş $X = \{X_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x\}$ birölçülü diffuziya prosesinin bu nöqtələr ətrafındakı vəziyyətindən asılı olaraq təyin edilir. c_1 sərhəd nöqtəsi olsun. a) $X_\xi = \lim_{t \downarrow \xi} X_t$ olduqda $\mathbf{P}_x\{X_\xi = c_1\}$ ehtimalı ya müsbət və ya sıfıra bərabər olarsa, c_1 – cazibə və ya itələyici sərhəddir. b) $\mathbf{P}_x\{X_\xi = c_1, \xi < \infty\}$ ehtimalı ya müsbət və ya sıfıra bərabər olarsa, c_1 – çatılan və ya çatılmaz sərhəddir. c) τ_c , $-(c_1, c)$ intervalından ilk çıxış andırsa, $\mathbf{M}_x \tau_c$ riyazi gözləməsinin sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq, c_1 sərhəd nöqtəsi finit və ya qeyri-finit sərhəd adlanır (bax, İlk çatım anı. a) və b) təriflərində x nöqtəsi E -də, c) tərifində isə (c_1, c) intervalında deyildir. $c \in E$. c_2 nöqtəsi üçün də analogi təriflər qəbul edilir.

c_1 və c_2 sərhədlərindən hər biri, ya cazibə və ya itələyici sərhəddir. İxtiyari itələyici sərhəd çatılmaz sərhəddir. Cazibə sərhədi finit və ya qeyri-finit sərhəd olmasından asılı olaraq çatılan və çatılmaz sərhəddir.

B. d.-nin verildiyi ixtiyari $E \subset \mathbb{R}^1$ intervalının sərhəd nöqtələri də müxtəlif xassələrinə görə təsnif olunur. Məs., əgər $c_1 \in E$ və c_1 nöqtəsi E -nin digər nöqtələrindən çatılmayırsa, onda c_1 təbii sərhəddir; əgər $c_1 \in E$ və X diffuziyası $E \setminus \{c_2\}$ -də rəqulyardırsa, onda c_1 əksedici sərhəddir.

adlanır. Adi Viner prosesinin faza fəzasının $\gamma: x \rightarrow |x|$ çevirməsi nəticəsində alınan $c_1 = 0$ nöqtəsində əksolunan Viner prosesi üçün qeyd olunan nöqtə əksədici sərhəddir (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr).

E intervalının sərhədlərinin təsnifatı bilavasitə uyğun kanonik ölçü ilə bağlı terminlərlə ilk dəfə V. Feller tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, № 2, p. 468–599.

BİRÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ PROSES « **одномерный случайный процесс**; **one-dimensional random process** » – bax, *Təsadüfi proses*.

BİRPARAMETRLİ EYLER ƏDƏDLƏRİ « **однопараметрические числа Эйлера**; **one-parameter Euler numbers** » – bax, *Eyler ədədləri*.

BİRSEÇİMLİ STYUDENT KRİTERİSİ « **одновыборочный критерий Стьюдента**; **one-sample Student's test** » – bax, *Styudent kriterisi*.

BİRTƏRƏFLİ BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ « **односторонний сдвиг Бернулли**; **one-sided Bernoulli shift** » – bax, *Bernulli yerinideyişməsi*.

BİRTƏRƏFLİ DOĞURUCU « **односторонняя об-разующая**; **one-sided generator** » – bax, *Entropiya(sı) dinamik sistemin*.

BİRTƏRƏFLİ PAYLANMA « **одностороннее распределение**; **one-sided distribution** » – bax, *Birtərəfli sonsuz bölünən paylanma*.

BİRTƏRƏFLİ SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « **одностороннее безгранично делимое распределение**; **one-sided infinitely divisible distribution** » – tamamilə $[r, \infty)$ (və ya $(-\infty, r]$) yarımxunda toplanmış *sonsuz bölünən paylanmadır*, burada $|r| < \infty$. $F(x)$ paylanma funksiyası üçün

$$\text{left } F = \inf \{x: x, -F \text{ -in artım nöqtəsidir} \},$$

$$\text{right } F = \sup \{x: x, -F \text{ -in artım nöqtəsidir} \}.$$

olsun. Əgər $\text{left } F > -\infty$ və ya $\text{right } F < \infty$ olarsa, F birtərəfli paylanma adlanır. F – sonsuz bölünən paylanma funksiyası, $f(t)$ isə bu paylanmanın spektral funksiyası $G(x)$ olan, *Levi – Xinçin kanonik ifadəsi* ilə təyin olunan xarakteristik funksiyası olsun. $\text{left } F > -\infty$ ($\text{right } F < \infty$) olması üçün G funksiyasının $x \leq 0$ ($x \geq 0$) yarımxunda sabit olması və

$$\int_0^{\infty} x^{-1} dG < \infty \quad \left(\int_0^{\infty} |x^{-1}| dG < \infty \right)$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu halda

$$\text{left } F = \gamma - \int_0^{\infty} x^{-1} dG, \quad \text{right } F = \gamma - \int_{-\infty}^0 x^{-1} dG.$$

90 BİRTƏRƏFLİ

Məs., B. s. b. p. Gauss komponentlərinə malik ola bilməz.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Рамачандран Б., Теория характеристических функций, пер. с англ., М., 1975.

BİRTƏRƏFLİ STYUDENT KRİTERİSİ « **односторонний критерий Стьюдента**; **one-sided Student's test** » – bax, *Styudent kriterisi*.

BİSPEKTR « **биспектр**; **bispectrum** » – bax, *Bispektral sıxlıq*.

BİSPEKTRAL FUNKSİYA « **биспектральная функция**; **bispectral function** » – birölçülü stasionar təsadüfi prosesin üçüncü tərtib *spektral funksiyasıdır* (bax, *Spektral sıxlıq*, *Spektral semi-invariant*).

BİSPEKTRAL SIXLIQ « **биспектральная плотность**; **bispectral density** », bispektr , $-M\zeta(t) = 0$

şərtini ödəyən birölçülü stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin üçüncü tərtib *spektral* (bax, *Spektral semi-invariant*) *sıxlığıdır*.

Əd.: [1] Brillinger D., «Ann. Math. Stat.», 1965, v. 36, p. 1351–74; [2] Brillinger D., Rosenblatt M., в кн.: Spectral Analysis of Time Series, N. Y. – L. – Sydney, 1967, p. 153–88, 189–232; [3] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [4] Subba Rao T., Gabr M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, N. Y. – [a. o.], 1984.

BİT « **бит**; **bit** » – informasiya miqdarının ikilik vahididir və miqdarın təyin olunmasında 2 əsasına görə loqarifmdən istifadə etdikdə alınır (ing. – binary digit, qısaca «B»). B. informasiya miqdarının ən çox istifadə olunan vahididir. Tərifdə natural və ya onluq loqarifmdən istifadə olunduqda uyğun olaraq, «nab» (ing. natural digit) və «hartli» (ing. hartley) vahidləri istifadə edilir.

BLEKMAN – TYUKİ METODU « **Блэкмана – Тьюки метод**; **Blackman – Tukey method** » – $\zeta(t)$, $t = 0, 1, \dots$ stasionar təsadüfi ardıcılığının (stasionar zaman sırasının) $t = 1, 2, \dots, T$ qiymətlərində bir realizasiyası x_t üzrə spektral sıxlığı $f(\lambda)$ üçün statistik qiymət $f_T^*(\lambda)$ -nin

$$f_T^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=0}^{k_T-1} a_T(\tau) B_T^*(\tau) \cos \lambda \tau \quad (*)$$

düsturu ilə hesablanma metodudur, burada $B_T^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \times$

$$\times \sum_{t=1}^{T-\tau} x_{t+T} x_t, \quad -x_t \text{ sırasının seçimi korrelyasion funksiyasıdır,}$$

$a_T(\tau)$, $-\tau > k_T$ olduqda sıfır çevrilən, ağlabatan sürətdə seçilmiş korrelyasion pəncərədir, burada k_T , $-T$ -nin kiçik bir hissəsidir (məs., $k_T = 0,1 T$). B. – T. m. [1]-də inkişaf etdirilmişdir və 20-ci əsrin 50 – 60-cı illərində spektral qiymətləndirmədə əsas praktiki metod olmuşdur (bax, məs., [2] – [4]). Lakin sürətli çevirmələrin alqoritmləri və Furiye çevirmələrinin digər yaxın sürətli hesablama metodları geniş sürətdə yayıldıqdan sonra, bu metod öz əhəmiyyətini itirmiş oldu və yalnız müşahidələrin olduqca kiçik sıralarına tətbiq olunduqda istifadə üçün məsləhət görüldü (T -nin tərtibi 100 və ya daha az olduğu hallar üçün). T -nin böyük qiymətlərində B. – T. m.-nu yalnız dəyişilmiş formada istifadə etmək məsləhətdir, bunun üçün isə sürətli Furiye çevirmə alqoritmini üç dəfə tətbiq etmək lazımdır.

[x_i] sırasının $I_T(\lambda)$ periodogramını hesablamaq üçün $B_T^*(\lambda)$ seçimi korrelyasion funksiyasını $I_T(\lambda)$ -nın Furiye çevirməsi kimi təyin etmək üçün və nəhayət, f_T^* -ni (*) düsturu ilə hesablamaq üçün] (bax, məs., [5]).

B. – T. m.-nin bir sıra ümumiləşmələri və dərin modifikasiyaları mövcuddur (bax, məs., [6]).

Əd.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Бендат Дж., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [5] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [6] Наттолл А. Х., Картер Дж. К., «Тр. Ин-та электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9, с. 243–55.

BLEKUELL TEOREMİ « Блэкуэлла теорема; Blackwell theorem » – bax, *Берпа nəzəriyyəsi, Statistik qiymətləndirmə*.

BLOK « блок; block » – bax, *Blok plan*.

BLOK DEKODLA(N)MASI « блоковое декодирование; block decoding » – blok kodlarının n uzunluqlu kod sözlərinin kanalın çıxışında n uzunluqlu hərfərin ardıcılığına görə bərpə olunduğu *dekodlanmadır*, bu halda ardıcıl kod sözlərinin dekodlanması bir-birindən asılı olmayaraq aparılır. Diskret signallar və məlumatlar halında B. d.-nin xüsusi cəhəti ondan ibarətdir ki, bütün əməliyyatlar sonlu sayda elementi olan müəyyən bir çoxluğun altçoxluluğunda aparılır. B. d.-da, adətən, *doğruyaoxşarlıq maksimumu* üzrə, *kod məsafəsinin minimumu* üzrə *dekodlama* metodları istifadə olunur. Bu halda, bir çox məlum blok kodlarının B. d. blokun uzunluğuna görə polinomial müəkkəbliyə aparılır (bax, *Müəkkəbli(y i) kodlama və dekodlamanın*).

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

BLOK KODU « блоковый код; block code » – A əlifbasının n hərfli bütün sözlərindən ibarət *koddur*. n ədədi B. k.-nin $uzunluğu$, $R = n^{-1} \log_2 M$ ədədi B. k.-nin *sürəti* adlanır, M B. k.-nin *gücüdür*. Kodun cəbri strukturundan asılı olaraq B. k. altsiniflərə ayrılır. Əgər A -da meydanın strukturu verilsə (adətən, $|A| < \infty$ və meydan son-

ludur) və B. k. A^n -də k ölçülü altfəzadırsa, onda B. k. *xətti* (*qrup*) (n, k) – *kodu* adlanır. İxtiyari xətti kodun kodlama müəkkəbliyi $O(n^2)$ -dir. Additiv küylü kanalların xətti kodlarında ötürücülük qabiliyyətililiyinə, həmçinin *səhv dekodlama ehtimalının* B. k. sinfində ən yaxşı məlum yuxarı statistik qiymətinə nail olunur. Koordinatların tsiklik yerindəyişməsinə görə invariant xətti kodlar *tsiklik kodlar* adlanır və bunlar kodlama nəzəriyyəsinin araşdırdığı əsas obyektlərdən biridir. Bir çox məlum B. k.-ləri üçün polinomial müəkkəbliyi olan dekodlama metodları mövcuddur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Мак-Вильямс Ф. Д., Слоэн Н. Д. А., Теория кодов, исправляющих ошибки, пер. с англ., М., 1979.

BLOK PLAN « блочный план; block design » – eksperimentin bloklı strukturlu planıdır, yəni üzərində *regression eksperiment* aparılan obyektlər çoxluğu *bloklar* adlandırılan altçoxluluqlara ayrılmış plandır. Eksperiment üçün ayrı-ayrı təcrübələrin aparılmasında qoyulan şərtlərin bircins olmadığı şəraitdə eksperimentin nəticələrinə bu şərtlərin təsirini azaltmaq

məqsədlə R. Fişer [1]-də bloklar və randomizasiyadan istifadəni təklif etmişdir. Məs., bitkilər becərilən sahədə kənd təsərrüfatı bitkisinin növlərinin məhsuldarlığı müqayisə olunarkən, bu sahənin müəyyən hissələrində məhsuldarlıq, adətən, fərqli olur. Bu nöqtəyi – nəzərdən, bütün sahə kiçik hissələrə bölünür, sonra eyni tipli hissələr bloklar şəklində (mümkün olduqca) qruplaşdırılır. Növlərdən hər birini bütün bloklardan olan hissələrdə təcrübədən keçirdikdə məhsuldarlıq statistik qiymətinin dispersiyasının minimallığına nail olunur, statistik qiymətin hər bir blokda meylsiz olması üçün isə növ təyin etmək üçün hissə təsadüfi seçilməlidir. Çoxfaktorlu modeldə, bu qayda ilə faktorların səviyyələrinin ixtiyari toplusu üçün *tam randomlaşmış B. p.* alınır.

Təsadüfi hadisə və proseslərin statistik modellərində blokların olduğunu nəzərə almaq lazımdır. Məs., yuxarıdakı misalda B. p.-nin

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1, \dots, t, j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, K_{ij} \quad (*)$$

münasibətilə verilən *additiv modeli* təbiidir, burada y_{ijk} , – (i, j) – oyuğunun k -ci təkrarında məhsulun miqdarı, μ – ümumi orta qiymət, α_i, β_j , – uyğun olaraq j -ci blokun i -ci növünün əsl effektləridir, ε_{ijk} – təcrübələrin təkrarındakı xətalardır. *Faktor eksperimentlər nəzəriyyəsi* nöqtəyi – nəzərin-cə təcrübələr çoxluğunun bloklara bölgüsü yardımçı «blok» faktorun daxil olunmasına ekvivalentdir, belə ki, bu blok faktorun səviyyəsinin qiymətləri göstərir ki, təcrübə şərtləri bloklardan hansına aiddir və bu halda eksperimentin nəticələrinin üzərində statistik olaraq yenidən işlənmələr aparıldıqda, adətən, β_j effek-tinin statistik qiymətindən istifadə olunmur.

Bir çox səbəblərə görə (qənaət baxımından, çətinliklərlə əlaqə-dar) tam B. p.-i əksər hallarda reallaşdırmaq mümkün olmur. Digər tərəfdən də, blokların sayının çoxaldılması onların bircins-liyini azaldaraq, blokdaxili dispersiyanın artmasına və bununla da, parametrlərin statistik qiymətlərinin dəqiqliyinin azalmasına səbəb olur. Bəzən blokların kiçikliyi isə fiziki qeyri – bircinslik səbəblərindən yaranır. Göstərilən səbəblərə əsaslanaraq, kiçik həcmli blok-ları olan *n a t a m a m B. p.-l*ardan (blokları tam olmayan plan-lardan) istifadə olunur, belə kiçik həcmli blokların həcmi qoyulan şərtlərin ümumi sayından az olur. Bunların qurulmasında istifadə olunan ixtiyari simmetriya eksperiment nəticələrinin analizinin sadələşməsinə səbəb olur. Buna görə də, natamam B. p.-ların mü-hüm sinifləri balanslanmış və qismən balanslanmış planlar sinif-ləri hesab edilir (bax, [2], [3]).

Hər bir blokda k vahid sahə hissəsi olan b sayda blokdan ibarət, $t > k$ növün müqayisəsi üçün baxılan B. p., əgər t sayda növdən hər bir növ r sahə hissəsində reallaşırsa və hər bir növlər cütü isə λ sayda blokda təsadüf olunursa, *b a l a n s - l a n m ı ş b l o k p l a n ı* adlanır (BNBP – rus. СБП). Belə parametrləri BNBP-nin varlığı üçün $rt = bk$ və $\lambda(t-1) = r(k-1)$ şərtləri zəruri, lakin kafi deyildir. Kombinator analizdə BNBP-nin varlığı və ya yoxluğu üçün bir sıra kafi şərtlər alınmışdır.

(*) münasibətindəki α_i parametrlərinin müxtəlifliyi haqqında hipotezlər $k = \sum c_i \alpha_i$ ($\sum c_i = 0$) kontrastlarını qiymətlən-dirməklə yoxlanılır. Buna görə $k_1, \dots, k_{t-1}$ kontrastlarının ixtiyari ortonormalanmış bazisini seçərək $\hat{k} = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_{t-1})$ vektorunun

kovariasiyalar matrisi D tapılır, burada $\hat{k}_i$, $-k_i$ kontrastının ən kiçik kvadratlarda statistik qiymətidir. D -nin təyin olunması B. p. analizinin ən çox vaxt aparan və çətin hesablanan hissəsidir. BNPB üçün bu hissə trivialdır, belə ki, D -nin diaqonal elementləri bərabərdir və diaqonal elementlərdən fərqli elementlərin hamısı isə üst-üstə düşür.

Natamam B. p.-nin daha ümumi tipi qismən balanslanmış blok planıdır (QBNBP – rus. частично сбалансированный блочный план, ЧСБП), yəni parametrləri b, k, t və r olan, yuxarıda verilən mənada, ixtiyari ehtimalatamam B. p.-dir ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) növlərin bütün nizamlanmamış cütleri m sayda altçoxluğa bölünür; hər bir topluya bu altçoxluqlardan i -cisinə aid olan yalnız n_i sayda cüt daxildir;

2) i -ci altçoxluğun cütleri yalnız λ_i blokda iştirak edir;

3) eger hər hansı cüt i -ci altçoxluğa daxildirsə, onda bu cüt-dəki növlərdən birinin j -ci altçoxluqdan biri ilə, digərinin isə k -ci altçoxluqdan olan biri ilə cüt eməle gətirdiyi elementlərin sayı $p_{jk}^i = p_{kj}^i$ ədədinə bərabərdir.

$m=1$ olan QBNBP – BNPB-dir. QBNBP-nin parametrləri bir sıra münasibətlərlə əlaqədirdir; QBNBP-nin varlığı haqqında, həmçinin onların bir sıra kombinator xassələri haqqında bir sıra nəticələr məlumdur (bax, [8]).

Fərz olunur ki, (*) additiv modelinə baxılır. Burada X oblastı (i, j) şəbəkəsidir, $i=1, \dots, t, j=1, \dots, b$ (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*), i – növün nömrəsi, j – blokun nömrəsi, $\alpha^T \mathbf{1} = \beta^T \mathbf{1} = 0$, $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$, $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $\mathbf{1}$ – vahidlərdən ibarət matrisdir. Ümumi ləşmiş ξ planı X şəbəkəsində verilən ixtiyari ehtimal paylanmasıdır.

$$Z = \|\xi(i, j)\|, \quad r_i = \sum_j \xi(i, j), \\ k_j = \sum_i \xi(i, j), \quad r^T = (r_1, \dots, r_t),$$

$K = \text{diag}(k_1, \dots, k_b)$, $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_t)$ və $\min k_i > 0$ olsun. Qiymətləndirilən bilinən kontrastlar və $I^T \alpha$ xətti formalarının çoxluqları, yalnız və yalnız, o halda üst-üstə düşür ki, $C(\xi)$ -nin rəngi $(t-1)$ -ə bərabər olsun, burada $C(\xi) = K - ZK^{-1}Z^T$, belə ki, $I_1^T \alpha$ və $I_2^T \alpha$ üçün ən kiçik kvadratlarda statistik qiymətlərini $\hat{k}_1$ və $\hat{k}_2$ ilə evez etdikdə, $\text{cov}(k_1, k_2) = I_1^T C^{-1}(\xi) I_2$ olur, burada C^{-1} – C -yə g-tərs ixtiyari matrisdir.

Adətən, planlar sinfi $k_j = k$ şərtlə daraldılır. Əgər ehtimalatamam ξ^* planı varsa ki, hər hansı c, d üçün $C(\xi^*) = cI_v + dI_v I_v^T$ şərtini ödəmiş olsun və $C(\xi)$ -nin izi $C(\xi)$ matrislərinin S çoxluğunda ən böyüyü olsun, onda $C(\xi^*)$ matrisi S -də Şur mənada maksimumdur, yəni

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i(\xi^*) - \lambda_i(\xi)) \geq 0$$

bərabərsizliyi bütün $m=1, 2, \dots, v$ qiymətlərində ödənilir, burada $\lambda_i(\xi^*)$, $-C(\xi)$ -nin i -ci məxsusi qiymətidir (qiymətinə görə).

Nəticə: $\Phi(C(\xi^*))$ funksiyası S -də, bütün populyar kriterilər də daxil olmaqla, $\Phi(C)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün minimaldır (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*). Əlavə şərtlə, hətta $k_i = k$ fərziyyəsini qəbul etmədikdə belə, nəticə

doğrudur. BNPB ξ^* -nin optimallığı bu nəticələrin nəticəsidir.

Bir sıra ümumiləşmələr isbat olunmuşdur: çoxfaktorlu hal – burada bloklar indekslər sistemi ilə nömrələnir, optimal planlara misallar – latın, yunan – latın və s. kvadrat, Yuden planlarıdır; sanki balanslanmış hal – S -də tələb olunan şəkilli $C(\xi^*)$ matrisi yoxdur. Onda bir çox hallarda QBNBP-lar Φ – optimal olur.

Əd.: [1] Фишер Р. А., Статистические методы для исследователей, пер. с англ., 1958; [2] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [3] Финн Д., Введение в теорию планирования экспериментов, пер. с англ., М., 1970; [4] Partially balanced design, в кн.: Encyclopedia of Statistical Sciences, v. 6, N. Y., 1985; [5] Nearly balanced design, в кн.: Encyclopedia of Statistical Sciences, v. 6, N. Y., 1985; [6] Clatworthy W. H., Nables of two-associate-class partially balanced designs, Wash., 1973; [7] Маркова Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979; [9] Giovagnoli A., Wynn H. P., «Proc. Berk. Conf. in Honor of J. Neyman and J. Kiefer», 1985, v. 1, p. 418–33.

BLOK – SXEM «блок – схема; block scheme» – bax, *Kombinator analiz*.

BLOK – STRUKTUR «блочная структура; block structure» – bax, *Blok plan*.

BLOK TEZLİYİ «блоковая частота; block frequency» – bax, *Seçimi bloklar*.

BLUMENTAL – GETUR – MAK-KİN TEOREMİ «Блюменталь – Гетура – Мак-Кинна теорема; Blumenthal – Getoor – Mc Kean theorem» – bax, *Markov prosesi; zamanın təsadüfi evezlənməsi*.

BOXNER İNTEQRALI «Бохнера интеграл; Bochner integral» – qiymətləri Banax fəzasından olan güclü birinci tertiblə güclü ölçülən (Boxnerə görə ölçülən) funksiyanın inteqralıdır. Daha dəqiq, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – ehtimal fəzası və ya daha ümumi, müsbət ölçülü fəza, $\mathcal{B}$ – Banax fəzası olsun. Əgər $f: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ sadə funksiyanın (yeni yalnız sonlu sayda müxtəlif qiymətlər alan) sıfırdan fərqli aldığı qiymətlər $\mathcal{A}$ -nın sonlu μ – ölçülü çoxluqlarında alınarsa, bu funksiya μ – inteqrallanan funksiya adlandırılır və bunlar üçün inteqral aydın təbii şəkildə təyin olunur. Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| d\mu(\omega) = 0 \quad (*)$$

münasibətini ödəyən μ – invariant $f_n: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ sadə funksiyanın ardıcılığı varsa, onda $f: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ funksiyası Boxnerə görə inteqrallanan funksiya adlanır. Bu halda, aydındır ki, f_n -in inteqralları ardıcılığı $\mathcal{B}$ -də fundamental ardıcılıqdır və bu ardıcılığın limiti, (*) bərabərliyi mənasında f -i approksiməedici μ – inteqrallanan sadə funksiyanın bütün ardıcılıqları üçün eynidir. Bu limitə f funksiyanın μ ölçüsünə görə Boxner inteqralı deyilir.

Güclü ölçülən f funksiyasının Boxnere görə inteqrallanan olması üçün

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu(\omega) < +\infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

B. i.-nin varlığı Pettis inteqralının varlığını doğurur və bu inteqralların qiymətləri üst-üstə düşür.

Əd.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

BOXNER – XİNÇİN TEOREMİ « Бохнера – Хинчина теорема; Bochner – Khinchin theorem » – müsbət müəyyən funksiyaların ifadə olunması haqqında teoremdir: $t \in \mathbb{R}^n$ olduqda $f(t)$ funksiyasının

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \{i(t, x)\} P(dx)$$

şəklində ifadə olunması üçün $f(t)$ -nin kəsilməz müsbət müəyyən funksiya olması zəruri və kifayətdir. Başqa sözlə, $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş ehtimal paylanmalarının uyğun xarakteristik funksiyaları sinfi $f(0)=1$ şərti ilə normalanmış kəsilməz müsbət müəyyən funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür.

Bu teoremin isbatını S. Bochner ilk dəfə [1] və [2]-də nəşr etdirmişdir. B. – X. t. A. Ya. Xinqine məxsus (bax, [3]) stasionar prosesin korrelyasiya funksiyasının spektral ayrılığı üçün bir təməl rolunu oynamışdır.

B. – X. t.-ni $\mathbb{R}^n$ -dən fərqlənən strukturlarda təyin olunan müsbət müəyyən funksiyalar sinfi üçün ümumiləşdirmək olur (bax, [5], [6]).

Məs., tam ədədlərin $\mathbb{Z}$ qrupu halında (momentlərin triqonometrik problemi ilə əlaqədar olaraq) bu teorem F. Riss (F. Riesz) və H. Herqlots (H. Herglotz) tərəfindən əvvəlcə alınmışdı. B. – X. t. harmonik analizin ən mühüm nəticələrindən biridir. Sonsuzölçülü fəzalar halında bu teoremin ümumiləşmələri alınmışdır (bax, Sazonov teoremi, Sazonov topologiyası).

Əd.: [1] B o c h n e r S., Vorlesungen über Fouriersche integral, Lpz., 1932. (рус. пер. Б о х н е р С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962); [2] B o c h n e r S., «Math. Ann.», 1933, Bd 108, S. 378–410; [3] K h i n c h i n A., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 604–15 (рус. пер. – «Успехи матем. наук», 1938, в. 3, с. 42–51); [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [5] Г е л ь - ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, М., 1961; [6] Х е й е р X., Вероятностные меры на локально группах, пер. с англ., М., 1981; [8] Х ь ю и т т Э., Р о с с К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975.

BOKS – CENKİNS METODU « Бокса – Дженкинса метод; Box – Jenkins approach / method » – zaman sırasının avtoregressiv sürüşən orta prosesi (ARSO – proses) modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi və identifikasiyası prosedurudur. ARSO – proses modeli – modelin tərtibinin seçilməsi, onun parametrlərinin öncədən qiymətləndirilməsi, əvvəlki statistik qiymətlərdən ilkin məlumatlar kimi istifadə olunmaqla sonuncu qiymətləndirmə, diaqnostik yoxlama və yekun modelin seçilməsindən ibarətdir. Bu zaman öncədən fərz olunur ki, baxılan x_t , $t=1, \dots, n$ zaman sırası (p, d, q) tərtib hər hansı avtoregressiv – inteqrallanan sürüşən orta prosesinin (ARİSO – prosesinin) realizasiyasıdır; bu proses $(1-B)^d \varphi(B)(x_t - Mx_t) = \theta(B)a_t$ şəklində tənliklə ifadə olunur, burada

$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ – avtoregressiya operatoru, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ – sürüşən orta operatoru, $Bx_t = x_{t-1}$, $Mx_t = x_t$ sırasının orta qiyməti, a_t – riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası σ_a^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. $\varphi(z)=0$ və $\theta(z)=0$ tənliklərinin bütün köklərinin $\mathbb{Z}$ kompleks müstəvisində vahid radiuslu daire xaricində yerləşdiyi fərz olunur: onda x_t prosesi stasionardır və çevriləndir. p, d, q parametrlərini, φ_j , $j=1, \dots, p$ avtoregressiya əmsallarını, θ_j , $j=1, \dots, q$ sürüşən orta əmsallarını və σ_a^2 dispersiyasını qiymətləndirmək tələb olunur.

B. – C. m. [1]-də təklif olunmuşdur. Qüvvət üstü d -nin seçilməsi çevirmədən sonra alınmış $W_{d,t} = (1-B)^d(x_t - Mx_t)$ sırasının seçimi korrelyasion funksiyasının olduqca tez azalması üçün qoyulan tələbə əsaslanır. p və q naməlum olduqda d -ni seçmək üçün [2]-də şərh olunmuş metoddan istifadə etmək olar: bu metod $w_{d-1,t-1}$ üzrə $w_{d,t}$ artımlarının regressiya əmsallarının sıfıra bərabər olması hipotezinin ardıcıl yoxlanılmasından ibarətdir. $d \geq 1$ olduğu halda, sonradan (p, q) tərtib qarışıq avtoregressiv orta sürüşən prosesinin (ARSO – proses) realizasiyası olan $w_{d,t}$ sırası analiz olunur. Modelin tərtibi (p, q) -nı əvvəlcədən seçmək üçün $w_{d,t}$ sırasının korrelyasion və xüsusi korrelyasion funksiyalarının statistik qiymətləri analiz olunur; korrelyasion funksiya $k > q$ yerindəyişməsi olduğu halda q tərtib sürüşən orta prosesi modeli üçün sıfıra çevrilməlidir, xüsusi korrelyasion funksiya isə $k > p$ olduğu halda, p tərtib avtoregressiya prosesi modeli üçün sıfıra çevrilməlidir. p və q -nün digər qiymətləndirilmə metodları «Parametrik model: tərtibin seçilməsi» məqaləsində şərh olunmuşdur.

Avtoregressiya parametrlərinin ilkin statistik qiymətləri

$$r_{q+i} = \sum_{j=1}^p \varphi_j r_{q-j+i}, \quad i=1, \dots, p$$

şəkilli Yul – Uoker tənliklər sisteminin həllindən sonra axtarılır.

Orta sürüşən parametrlərinin statistik qiymətləri, sonradan

$$C_k = (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) / \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \right)$$

– sürüşən orta tənliklərinin parametrlərinə görə qeyri – xətti tənliklərin Nyuton – Rəfson metodu ilə həlli vasitəsilə hesablanır, burada C_k , $k=1, \dots, q$, –

$$w'_{d,t} = w_{d,t} - \sum_{j=1}^p \varphi_j w_{d,t-j}$$

sırasının kovariasion funksiyasıdır. Bu halda σ_a^2 dispersiyasının statistik qiyməti də alınır.

Avtoregressiya və sürüşən orta parametrlərinin ilkin mərhələdə alınan statistik qiymətləri maksimal doğrulaşma statistik qiymətlərinin qurulması üçün ilkin şərtlərdir; bu vaxt fərz olunur ki,

$w_{d,t}$ sırası verilmiş periodlu mövsüm dəyişikliklərini də əks etdirir. $\hat{a}_t$ qalıq beyaz küyünün kvadratları cəmini minimallaşdıraraq parametrlərin statistik qiymətləri Markvardt algoritmi vasitəsilə hesablanır. B. – C. m. parametrlərin statistik qiymətlərinin korrelyasion matrisinin hesablanması da təmin edir və bu da sonradan diaqnostik yoxlama ərəfəsində istifadə olunur. Uyğun alqoritmlər [1]-də verilmişdir.

$q=0$ olduqda, avtoregressiya parametrlərinin ilkin statistik qiymətlərinin tapılması o qədər də zəruri deyildir, çünki yaxşı statistik qiymətləri daha sadə üsulla da almaq olur (məs., *Bərq metodu*). $q \neq 0$ olduğu halda (bax, məs., [5]) φ_j və θ_k parametrlərini qiymətləndirmək üçün bu metoda yaxın olan çox da mürekkəb olmayan metodlar təklif olunmuşdur.

[3]-də (p, q) tertib ARSO – proses modelinin skalyar zaman sırası kimi ifadəsinin təmin edən kompleks program verilmişdir (bax, [3]). [4]-də çoxölçülü hal araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Said S., Dicksey D., «Biometrika», 1984, v. 71, № 3, p. 599–607; [3] Akaike H., Arakato E., Ozaki T., «Computer Science monographs», 1975, № 5; [4] Akaike H., Nakagawa T., Statistical Analysis and Control of Dynamic Systems, Dordrecht, 1988; [5] Friedlander B., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1982, v. IT-28, № 4, p. 639–46.

BOKS – CENKİNS PROSESİ « Бокса – Дженкинса процесс; Box – Jenkins process » – bax, *Avtoregressiv – integrallanan sürüşən orta proses (ARISO – proses)*.

BOKS – UİLSON METODU « Бокса – Уилсона метод; Box – Wilson method » – ölçmələrdə təsadüfi xətlər olduqda funksiyanın ekstremumunun axtarışında qradient metodunun modifikasiyasıdır (bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*).

BOQOLYUBOV TƏNLİKLƏR ZƏNCİRİ « Боголюбова цепочка уравнений; Bogolyubov equations hierarchy / chain » qeyri-tənzatlı statistik mexanikada – μ_t vəziyyətinin korrelyasion funksiyalarını əlaqələndirən

$$\rho^{(n)}((q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n); t) = \rho_{\mu_t}^{(n)}((q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n)), \\ q_j, p_j \in \mathbb{R}^d, 0 \leq j \leq h, h \geq 0$$

xətli tənliklər sistemidir, burada μ_t – ilkin $\mu (= \mu_0)$ ehtimal paylanmalarından başlayan hərəkət tənliklərinin həlli boyunca yerindəyişmə nəticəsində alına bilən ehtimal ölçüsüdür. B. t. z. aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(n)}(\cdot; t) = \{ \rho^{(n)}(\cdot, t), H^{(n)} \} + \\ + \int dq_{n+1} dp_{n+1} \{ \rho^{(n+1)}(\cdot, |q_{n+1} p_{n+1}; t), V_{q_{n+1}}(\cdot) \}, n \geq 0. \quad (*)$$

Burada

$$H^{(n)}((q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n)) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \|p_j\|^2 + \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq n} U(\|q_{j_1} - q_{j_2}\|)$$

94 BOQOLYUBOV

– qarşılıqlı təsirinin cüt potensialı $U(r)$, $r \geq 0$ olan n – natamam hamiltonian, $V(q_{n+1} | q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n U(\|q_{n+1} - q_j\|)$,

– $q_{n+1} \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsindəki hissəciyin $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$ nöqtələrində yerləşən hissəciklərlə qarşılıqlı təsir enerjisi, $\{\cdot, \cdot\}$ – Puasson möterizəsidir. $\{\mu_t\}$ vəziyyətlər ailəsini, çox vaxt, korrelyasion funksiyalar (*) tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin həllini verən ehtimal ölçülərinin ailəsi kimi təyin etmək məsləhətdir. (*) sistemi [1]-də N. N. Boqolyubov tərəfindən təklif edilmiş və öyrənilmişdir. Ədəbiyyatda ББКН (kiril əlifbasında, Боголюбов – Борн – Грин – Кирквуд – Ивон) «tənliklər zənciri» termini də istifadə olunur. (*) sistemi üçün varlıq və yeganəlik teoremləri hal-hazırkı dövrə qədər yalnız xüsusi hallar üçün alınmışdır (bax, [2], [4]). Stasionar həllər bir sıra işlərdə öyrənilmişdir (bax, [5]).

B. t. z. kinetik tənliklərin və hidromexanika tənliklərinin riyazi çıxarılışında mühüm rol oynayır (bax, [6], [7]).

Əd.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М. – Л., 1946, а также: Избранные труды, т. 2, К., 1970, с. 90–196; [2] Gallavotti G., Lanford O., Lebowitz J., «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, № 11, p. 2898–905; [3] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, К., 1985; [4] Синай Я. Г., Сухов Ю. М., «Теоретич. и матем. физика», 1974, т. 19, № 3, с. 344–63; [5] Gutwirth B. M., Suhov Yu. M., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 49, № 1, p. 63–96; 1977, v. 54, № 1, p. 81–96; 1977, v. 56, № 3, p. 225–36; 1982, v. 84, № 3, p. 333–76; [6] Srobn H., «Rev. Mod. Phys.», 1980, v. 52, № 3, p. 569–615; [7] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84.

BOLŞEV APPROKSİMƏSİYASI « Большевская аппроксимация; Bol'shev's approximation » – bax, *Hiperhəndəsi paylanma*.

BOLTSMAN PAYLANMASI « Больцмана распределение; Boltzmann distribution » – $r_1 + \dots + r_n = r$ şərtini ödəyən, mənfəi olmayan tam $r_1, \dots, r_n$ qiymətlərini alan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin diskret birgə paylanmaları –

$$P\{\xi_1 = r_1, \dots, \xi_n = r_n\} = \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \cdot \frac{1}{n^r} \quad (*)$$

düsturu ilə verilən paylanmadır.

r müxtəlif kürəciyin n müxtəlif oyuqda yerləşdirilməsi məsələsində bütün mümkün olan n^r sayda yerləşmələrin eyni ehtimalı olduğu fərz olunarsa və ξ_j – i -ci oyuqdakı kürəciklərin sayı olarsa, onda $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ təsadüfi vektoru B. p. ilə paylanır. Bu halda 1, 2, ..., n nömrəli oyuqlarda uyğun olaraq $r_1, \dots, r_n$ sayda hissəciyin yerləşməsi ehtimalı (*) düsturu ilə hesablanır; hissəciklərin oyuqlarda yerləşmələrinin qeyd olunan ehtimallarla verilməsi Maksvell–Boltzman statistikası adlanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

BOLTSMAN STATİSTİKASI « Больцмана статистика; Boltzmann statistics » – klassik mexanikada qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklər sistemində (klassik ideal qaz) tətbiq edilən statistikadır. L. Boltzman (L. Boltzmann; 1868 – 71)

tərəfindən təklif olunmuşdur; bu statistika bir hissəciyin koordinat və impulslarının faza fazasında hissəciklərin paylanmasını təyin edir.

Bu faza fəzası çox sayda kiçik oyuqlara bölünür, hər bir oyuqda isə yerləşən hissəciklər sayı N_i böyük ədəd olur və bu oyuqlarda hissəciklərin bütün mümkün ola bilən yerləşmələrinin paylanmalarına baxılır. i -ci oyğunun faza həcmi G_i bu oyğunun 6 – ölçülü fəzada h^3 vahidində həcmidir, burada $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ – Plank sabitidir. Hissəciklərin verilmiş sayına və enerjiyə uyğun bütün mikroskopik vəziyyətlər eyni ehtimallı sayılır. G_i ölçülü oyuqlardan hər birində N_i hissəcik yerləşməklə, N sayda hissəciyin M sayda oyuqda yerləşməsi üçün müxtəlif üsulların sayı

$$W_B(\dots N_i \dots) = N! \prod_{1 \leq i \leq M} G_i^{N_i} / N_i!, \\ N = \sum_i N_i$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada hissəciklərin tamamilə asılı olmadıqları, fərqlənmədikləri və hər bir oyuq daxilində hissəciklərin yerləşmələrinin vəziyyətinin dəyişmədiyi nəzərə alınır. B. s.-nda bu kəmiyyət vəziyyətin statistik çəkisini təyin edir. Statistik çəki təyin olunarkən, bundan başqa, nəzərə alınmalıdır ki, eyni tipli hissəciklərin yer dəyişməsi vəziyyəti dəyişmir və buna görə də, W_B -ni $N!$ dəfə azaltmaq lazımdır.

B. s.-nda fərz olunur ki, tarazlıq vəziyyəti statistik olaraq ən böyük ehtimal paylanmasına uyğundur, bu da hissəciklərin qeyd olunmuş N qiymətində və E enerjisinin qeyd olunmuş qiymətində W -nin maksimumuna uyğun olur və bu da oyuqda hissəciklərin orta sayı üçün Boltzman paylanmasına gətirir; bu paylanma aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\bar{n}_i = \bar{N}_i / G_i = e^{(\mu - \varepsilon_i) / kT}, \quad E = \sum_i \varepsilon_i N_i,$$

burada k – Boltzman sabiti (universal sabitdir və $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad), T – mütləq temperatur, μ – kimyəvi potensialdır.

Əd.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [2] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955.

BOLTSMAN TƏNLİYİ « Больцмана уравнение; Boltzmann equation » – L. Boltzmanın 1872-də (bax, [1]) təklif etdiyi, seyrekləşmiş qazların kinetik nəzəriyyəsinin aşağıdakı şəkildə verilən əsas tənliyidir:

$$\frac{\partial f(q, v, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial f(q, v, t)}{\partial q} + \\ + \iint [f(q, v', t) f(q, v_1, t) - f(q, v, t) f(q, v_1, t)] \times \\ \times |v - v_1| B(v - v_1, \omega) d\omega dv_1,$$

burada $f(q, v, t)$ – qaz hissəciklərinin $q \in \mathbb{R}^3$ nöqtəsində $v \in \mathbb{R}^3$ sürəti ilə t anında orta toplanmasıdır, $\omega \in S^2$, $(\omega, v - v_1) \geq 0$, $B(v, \omega)$ – səpələnmənin differensial kəsiyi-dir, qaz hissəciklərinin qarşılıqlı təsir potensialı üzrə təyin olunur, $v' = v - (v - v_1, \omega) \omega$, $v_1' = v_1 + (v - v_1, \omega) \omega$. Belə hesab olunur ki, bu tənlik Boltzman – Qred limitində alınır (bax, [1] – [4]).

Bəzi potensiallar üçün B. t.-ni keçid intensivliklərinin $f(\cdot, t)$ -dən xətti asılılığı olan sıçrayışvari qeyri – xətti Markov prosesi üçün *Kolmoqorov tənliyi* kimi yazmaq olar (bax, [2], [3]).

$\{f_n\}$, $f_n = f(q_1, v_1, t) f(q_2, v_2, t) \dots f(q_n, v_n, t)$ toplusu, B. t. zəncirinin həllidir (bax, [2] – [4]). Bu «molekulyar chaos» hipotezinə müvafiqdir və Markov şəxələnən proseslərinə bağlılığı göstərir, bu bağlılıq isə B. t.-nə analogi tənliklər üçün müəyyən olunmuşdur və Monte – Karlo metodunda istifadə olunur. Hal-hazırda B. t.-nin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər ümumi şəkildə kifayət dərəcədə isbat olunmamışdır, Boltzman – Qred limit keçidinin korrektiliyi yoxlanılmamışdır, müvafiq xətti (şəxələnən) və qeyri – xətti Markov prosesləri qurulmamışdır.

Əd.: [1] Б о л ь ц м а н Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1956; [2] Nonequilibrium phenomena, «Stud. Stat. Mech.», 1983, v. 10; [3] Г у р е в и ч Б. М., О с е л е д е ц В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 14, М., 1977, с. 5–39; [4] Д о б - р у ш и н Р. Л., [и др.], в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 233–307; [5] Ч е р ч и н ь я н и К., Уравнение Больцмана, пер. с англ., М., 1981; [6] Ч е р ч и н ь я н и К., Теория и приложения Больцмана, пер. с англ., М., 1978.

BONFERRONI BƏRABƏRSİZLİYİ « Bonferroni неравенство; Bonferroni's inequality » – n sayda $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən r saydasının eyni zamanda baş verməsi ehtimalı $P_{[r]}$ -i aşağı və yuxandan qiymətləndirmək üçün bərabərsizlikdir. Məlumdur ki,

$$P_{[r]} = \sum_{j=r}^n (-1)^{j-r} C_{j-r}^{j-r} p_j, \quad (1)$$

$$p_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} P \left\{ \bigcap_{k=1}^j A_{i_k} \right\}, \quad p_0 = 1.$$

n hadisədən heç olmasa r saydasının baş vermə ehtimalı P_r aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$P_r = \sum_{i=r}^n P_{[i]} = \sum_{j=n}^n (-1)^{j-r} C_{j-r}^{j-r} p_j. \quad (2)$$

Əgər (1) düsturunda və ya (2) düsturunda yalnız $P_r, P_{r+1}, \dots, P_{r+k-1}$ hədlərini saxlayıb, $P_{r+k}, \dots, P_n$ hədləri atılırsa, onda yaxınlaşma xətasının işarəsi birinci atılan toplananın işarəsi ilə eynidir və bu xəta mütləq qiymətcə birinci atılan toplanandan kiçikdir. Məs., (1) düsturunda $k=1$ və $k=2$ seçilsə, uyğun olaraq

$$p_r - C_{r+1}^1 p_{r+1} \leq P_{[r]} \leq p_r \quad \text{və} \quad p_r - C_{r+1}^1 p_{r+1} \leq P_r \leq p_r$$

bərabərsizlikləri alınır.

Xüsusi halda, əgər $r=n$ olarsa, onda

$$1 - \sum_{i=1}^n P \{ \overline{A_i} \} \leq P \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i \right\}.$$

Bax, *Daxiletmə və xaricətmə metodu*.

Əd.: [1] Bonferroni C. E., «Publ. Ist. Sup. Sci. Econ. Commun. Firenze», 1936, t. 8, p. 1–62; [2] Bonferroni C. E., в кн.: Volume

di Studi in onore di prof. S. Ortu Carboni Genova, 1936; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984.

BOREL CƏBRİ « борелевская алгебра; Borel algebra » – bax. *Borel meydanı, hadisələrin*.

BOREL σ – CƏBRİ « борелевская σ – алгебра;

Borel σ – algebra » – bütün açıq altçoxluqları özündə saxlayan, topoloji fəzanın altçoxluqlarının minimal σ – cəbridir. B. σ – c.-nə aid altçoxluqlar Borel çoxluqları adlanır. Lokal kompakt Hausdorf fəzası halında kompakt altçoxluqların doğurduğu σ – cəbrdən olan altçoxluqlar da bəzən Borel çoxluqları adlanır. Bax. *Çoxluqlar σ – cəbri*.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

BOREL ÇOXLUĞU « борелевское множество;

Borel set » – verilmiş topoloji fəzanın Borel σ – cəbrinə (yeni bu fəzanın bütün açıq hissələrinin ailəsinin doğurduğu σ – cəbrə) aid olan çoxluqdur. B. ç. anlayışı *Borel funksiyası* anlayışı ilə sıx bağlıdır. Tam separabel metrik fəzalara homeomorf olan polski topoloji fəzalarının Borel altçoxluqları ümumi topologiyada, ehtimal nəzəriyyəsində və funksional analizdə xüsusilə mühüm rol oynayır. Qeyri – hesabi polski fəzalarında B. ç. ω_1 -dən ciddi kiçik bütün mümkün ordinal ədədlərin köməyi ilə müəyyən surətdə təsniflənir, burada ω_1 – birinci qeyri – hesabi ordinaldır. İsbat olunur ki, belə təsnifatda bütün siniflər boş olmayan siniflərdir. Borel çoxluğunun strukturu nöqtəyi – nəzərindən polski fəzasının ixtiyari iki qeyri – hesabi Borel altçoxluqları öz aralarında izomorfdurlar.

Klassik analizin kəsilməzlik və yığılma ilə bağlı müxtəlif suallarında G_δ , F_σ , $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$ və s. tipli çoxluqların – ilkin siniflərin B. ç.-larna tez-tez təsadüf olunur. İxtiyari polski topoloji fəzasında hər bir G_δ – çoxluğu doğurulmuş topologiyaya nəzərən polski fəzasıdır (P. S. Aleksandrov teoremi). Sonluölçülü Evklid fəzasında ixtiyari B. ç. Lebeq menada ölçülən olub, Ber xassəsinə malikdir. İxtiyari topoloji fəzanın bütün Borel altçoxluqları Ber xassəsinə malikdirlər.

Bax. *Cəbri çoxluqların*.

Əd.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

BOREL FUNKSIYASI « борелевская функция;

Borel function » – T topoloji fəzasında təyin olunmuş, Bo-

rel menada ölçülən ədədi f funksiyasıdır. Əgər ixtiyari $a \in \mathbb{R}^1$

üçün $f^{-1}((a, +\infty))$ çoxluğu T topoloji fəzasında Borel çoxlu-

ğudursa, f Borel menada ölçülən funksiyadır, deyilir (bax. *Borel çoxluğu*).

Ekvivalent tərif: $f, - T$ -də verilmiş ixtiyari ədədi

funksiya və $A \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari Borel çoxluğu olduqda $f^{-1}(A)$ çox-

luğu T -də Borel çoxluğu olarsa, f Borel funksiyası

adlanır. g və $f, - T$ -də ixtiyari B. f.-ları olsun. Onda $g + f,$

λg ($\lambda \in \mathbb{R}^1$), gf , $\sup(g, f)$, $\inf(g, f)$, $|g|$ funksiyaları

da B. f.-larıdır. Əgər $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, - T$ -də B. f. ardıcılığıdırsa və

bu ardıcılıq hər bir $x \in T$ nöqtəsində yığılandırsa, onda

$f = \lim_n f_n$ limit funksiyası da B. f.-dır. Hər bir B. f. Ber

xassəsinə malikdir. (T', S') – ölçülən fəza, $\varphi, - T'$ -də ədədi

ölçülən funksiya, $g -$ həqiqi $\mathbb{R}^1$ oxunda verilmiş ixtiyari B. f. olsun. Onda $g \circ \varphi$ kompozisiyası (T', S') ölçülən fəzasında

ölçülən funksiyadır. Əgər $T = \mathbb{R}^n$ olarsa, onda T -də təyin

olunmuş ixtiyari B. f. Lebeq menada ölçüləndir. Tərsi doğru

deyildir. Yalnız hökm etmək olar ki, $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş Lebeq

menada ölçülən ixtiyari ədədi f funksiyası üçün $\mathbb{R}^n$ -də ele g

B. f. tapılar ki, sanki bütün $x \in \mathbb{R}^n$ nöqtələrində $f(x) = g(x)$

olur.

İxtiyari polski topoloji T fəzasında verilən B. f.-ları ω_1 -dən

ciddi kiçik olan bütün mümkün olan ordinal ədədlər vasitəsilə

təsnif olunur; ω_1 – birinci qeyri – hesabi ordinaldır. B. f.-larının

belə təsnifatı Ber təsnifatı, uyğun siniflər isə Ber

sinifləri adlanır. Bu təsnifat əsasında B. f.-ları haqqında

bir çox faktlar transfinit induksiya metodu ilə isbat olunur.

Qeyri – hesabi polski fəzasında verilən bütün B. f.-larının

çoxluğunun gücü kontinuum gücünə bərabərdir. Belə fəzada

Borel menada ölçülməyən ədədi funksiyalar mövcuddur. İsbat

olunmuşdur ki, qeyri – hesabi polski fəzaları üçün bütün Ber

sinifləri boş olmayan siniflərdir (Lebeq teoremi). B. f.

anlayışı daha ümumi Borel inikası anlayışının

xüsusi halıdır. Borel inikası T topoloji fəzasının Y topoloji

fəzasına ele inikasıdır ki, ixtiyari $A \subset Y$ Borel çoxluğu üçün bu

inikada $f^{-1}(A)$ çoxluğu T fəzasında Borel çoxluğu olur.

Əgər T və Y – polski fəzaları, $f, - T$ fəzasının Y fəzasına

Borel inikası, B isə T -də Borel altçoxluğu olarsa, onda $f(B)$

obrazı, ümumiyyətlə, Y -də Borel çoxluğu olmayacaqdır. Bu

obraz Y -də analitik (Suslin) altçoxluqdur. Lakin f inikası

eyni zamanda inyektiv (qarşılıqlı birqıymətli) inikası olarsa, onda

$f(B)$ çoxluğu Y fəzasında Borel çoxluğu olur.

Əd.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Использо-

вание вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

BOREL QANUNU, GÜCLƏNDİRİLMİŞ BÖYÜK

ƏDƏDLƏRİN « Бореля усиленный закон больших

чисел; Borel strong law of large numbers » – Bemulli

sxemi üçün (bax. *Bemulli sınaqları*) E. Borel tərəfindən tərtib

və isbat olunmuş (bax. [1]) *böyük ədədlərin gücləndirilmiş*

qanununun tarixən ilk variantıdır. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ eyni qanunla pay-

lanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$P\{\xi_i = 0\} = P\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Onda $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ «müvəffəqiyyət» ehtimalı $1/2$ olan Bemulli

sxeminə «müvəffəqiyyətlər sayıdır. E. Borel [1]-də isbat etmiş-

dir ki,

$$S_n/n \rightarrow 1/2$$

münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda vahid ehtimalla ödənilir. Sonradan

Q. Hardi (G. Hardy, 1914) və J. Litvud (J. Littlewood) isbat

etmişlər ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - n/2|}{\sqrt{n \ln n}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. 1922-də A. Ya. Xinqin daha güclü nəticə almışdır: o isbat etmişdir ki,

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - n/2|}{\sqrt{n \ln \ln n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = 1.$$

Bax, *Təkrar loqarifm qanunu*.

Əd.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

BOREL İNİKASI « борелевское отображение; Borel mapping » – bax, *Borel funksiyası*.

BOREL MEYDANI, ÇOXLUQLARIN « борелевское поле множеств; Borel field of sets », M çoxluqlar sisteminin doğurduğu – M -i özündə saxlayan, hesabi sayda birləşmə əməli və tamamlama əməlinə keçidə görə qapalı olan, minimal çoxluqlar sistemidir.

BOREL MEYDANI, HADİSƏLƏRİN « борелевское поле событий; Borel field of events », σ -meydan, Borel cəbri, hadisələrin σ -cəbri-boş olmayan Ω çoxluğunun (elementar hadisələr fəzasının) *Borel meydanını* təşkil edən altçoxluqların (hadisələrin) $\mathcal{A}$ sinfidir.

BOREL MƏNADA ÖLÇÜLƏN FUNKSIYA « измеримая функция в смысле Бореля; Borel measurable function » – bax, *Borel funksiyası*.

BOREL MODELİ « борелевская модель; Borel model » – bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

BOREL ÖLÇÜSÜ « борелевская мера; Borel measure » – topoloji T fəzasının çoxluqlarının Borel σ -cəbrində verilmiş μ ölçüsüdür. Əgər $\mu(T) = 1$ olarsa, B. ö. – ehtimali ölçü adlanır. B. ö.-nün mühüm siniflərini τ -hamar, rəqulyar, sıx və Radon ölçüləri təşkil edir.

«B. ö.» termini başqa mənalarda da istifadə olunur. Məs., kompakt çoxluqların doğurduğu, kompakt çoxluqlarda sonlu qiymətlər alan, σ -halqada verilmiş ölçü, lokal kompakt fəzada ölçü də B. ö. adlanır. Bəzən $\mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsünün Borel σ -cəbrinə daralması da B. ö. adlandırılır.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

BOREL «SIFIR-VAHİD» KRİTERİSİ « Бореля критерий «нуль-единица»; Borel zero-one law » – bax, *Borel – Kantelli lemması*.

BOREL TEOREMİ « Бореля теорема; Borel theorem » – bax, *Limit teoremləri, diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin*.

BOREL – KANTELLİ LEMMASI « Бореля – Кантелли лемма; Borel – Cantelli lemma »: ixtiyari $\{A_n, n \geq 1\}$ təsadüfi hadisələr ardıcılığı üçün $\sum P(A_n)$ sırası yığılarsa,

$$P \left\{ \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right\} = P \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right\} = 0.$$

Əgər $A_1, A_2, \dots$ asılı olmayan hadisələdirsə, $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ hadisəsinin ehtimalı ya 0-a, yaxud 1-ə bərabərdir. Bu halda, Borelin «sıfır, yaxud vahid» kriterisi doğrudur: $\sum P(A_n)$ sırasının yığılan

olub-olmamasından asılı olaraq $P(A)$ ehtimalı ya sıfır, yaxud vahidə bərabərdir.

Bu nəticə A. N. Kolmoqorovun «Sıfır, yaxud vahid» qanununun xüsusi bir halıdır.

B. – K. I. *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* ilə bağlı elmi işlərdə isbat olunmuşdur. B. – K. I.-nin hadisələrin cüt-cüt asılı olmaması (bax, [1]) və asılılığı (bax, [2]) halları üçün ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39–45; [3] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [4] Лозв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

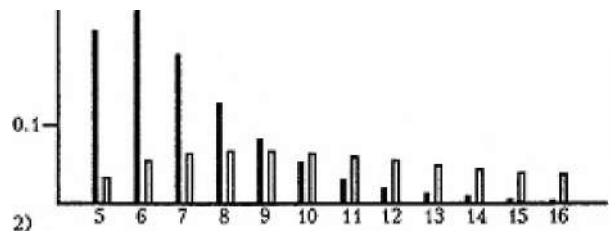
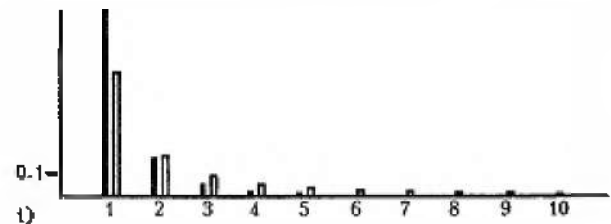
BOREL – KANTELLİ – LEVİ LEMMASI « Бореля – Кантелли – Леви лемма; Borel – Cantelli – Lévy lemma » – bax, *Kompensator*.

BOREL – TANNER PAYLANMASI « Бореля – Таннера распределение; Borel – Tanner distribution » – tamqiymətli $m = k, k+1, \dots$ qiymətlərini (k – tam ədəddir)

$$p_m = P\{\xi = m\} = \frac{k}{(m-k)!} m^{m-k-1} e^{-\alpha m} \alpha^{m-k},$$

$$0 < \alpha < 1, k > 0$$

ehtimalları ilə (bax, şəkil) alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır. B. – T. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsində α parametrlı Puasson giriş axınlı kütləvi



Borel – Tanner paylanması: 1) $k = 1, \alpha = 0,3$ və $\alpha = 0,7$;

2) $k = 5, \alpha = 0,3$ və $\alpha = 0,7$.

xidmət sisteminə məşğulluq periodunda xidmət olunmuş tələblərin sayının paylanması kimi yaranır; bu halda başlanğıc anda növbənin uzunluğunun k -ya bərabər olduğu və xidmət müddətinin sabit olduğu nəzərdə tutulur.

BOŞ BLOKLAR KRİTERİSİ « пустых блоков критерий; empty blocks test » – F_1 paylanmasından n_1 həcmli təkrar seçimlə yaranmış və F_2 paylanmasından

əvvəlki seçimdən asılı olmayan n_2 həcmli təkrar seçim nöqtələri ilə doldurulmuş boş seçim bloklannın sayının $-\mu_0^{(1)}(n_1, n_2)$ statistikasının əsası təyin olunan *statistik kriteridir*.

B. b. k. boş qutular kriterisinin analoqudur və bu kriteri F_1 və F_2 kəsilməz paylanma funksiyalarının üst-üstə düşməsi hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. Boş bloklar sayı ilə seriyaların ümumi sayının statistikası arasında əlaqə vardır (bax, *Seriyalar kriterisi*):

$$u = -2\mu_0^{(1)}(n_1, n_2) + 2(n_1 + 1) + \gamma = \\ = -2\mu_0^{(2)}(n_2, n_1) + 2(n_2 + 1) + \gamma,$$

burada γ , -0 və ya 1 qiymətini alır, $\mu_0^{(2)}(n_2, n_1)$ – birinci seçim blokları dolduqda ikinci seçimin boş bloklannın sayıdır.

Əd.: [1] У н л к с. С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] К у д л а с в. Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988; [3] М о о д А. М., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 367–92.

BOŞ QUTULAR KRİTERİSİ «*пустых ящиков критерий; empty cells test*» – müşahidə nəticələrinin seçimdə olmadığı ədəd oxu intervallannın sayına bərabər statistikaya əsaslanan, paylanmanın növü haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*.

Yoxlanılan hipotezə görə, $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçimindəki asılı olmayan müşahidə nəticələrinin paylanma funksiyası eyni $F(x)$ kəsilməz funksiyası olsun. $z_0 = -\infty < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = \infty$ nöqtələri elə seçilir ki, $F(z_k) - F(z_{k-1}) = 1/N$, $k = 1, 2, \dots, n$ olsun. μ_0 elə $(z_{k-1}, z_k]$ yarıintervallannın sayı olsun ki, bu intervallarda seçimi qiymətlərdən heç biri yoxdur. B. q. k.-nin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, hipotez $\mu_0 \leq C$ olduqda qəbul olunur, $\mu_0 > C$ olduqda isə qəbul olunmur. Bu kriterinin xarakteristikalarının hesablanması hissəciklər haqqında klassik məsələ ilə bağlıdır.

n sayda müxtəlif qutuya bir-birindən asılı olmayaraq r sayda müxtəlif hissəcik yerləşdirilir; ixtiyari qeyd olunmuş hissəciyin ixtiyari qeyd olunmuş qutuya düşməsi ehtimalı $1/N$ -ə bərabər götürülür. Boş qutuların sayı $\mu_0(n, N)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması B. q. k. statistikasının paylanması ilə eynidir.

$\mu_0(n, N)$ statistikasına əsaslanan kriteridən hissəciklərin oyuqlarda polinomial qanunla yerləşməsi haqqında alternativ hipotezə qarşı onların oyuqlarda müntəzəm yerləşməsi hipotezinin yoxlanılmasında istifadə etmək olar. Oyuqların nömrələrinin dəyişilməsinə görə μ_0 statistikasının invariantlığına əsaslanaraq qeyd olunmuş alternativ hipotez əvəzinə alternativ hipotezlərin uyğun sinfinə baxılır.

B. q. k.-nin təbii ümumiləşməsi $\eta_r = c_{r0}\mu_0 + c_{r1}\mu_1 + \dots + c_{rr}\mu_r$ kəmiyyətinə əsaslanan kriteridir; μ_k – yalnız k sayda hissəciklər olan qutuların sayıdır. Bu kəmiyyət bölünən statistikadır.

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976.

98 BOYSKAUT

*** BOYSKAUT BIÇAĞI (QATLANAN BIÇAQ) METODU** «*бойскаутского ножа (складного ножа метод); method of correction bias, jackknife method*» – Kenuy-Tyuki metodu, meylə düzəliş metodu, parçalama metodu, cəknayf metodu – çoxölçülü statistik analizin qeyri – ənənəvi metodlarından biri olub, araşdırılan statistikanın meyl və dispersiyasının qiymətləndirilməsi, hər hansı bir statistikanın paylanmasının əvvəlcədən verilmiş nöqtəyə görə simmetrik olması haqqında ilkin hipotezlərin yoxlanılması üçün psevdoqiymətlərə əsaslanan metoddur.

R. Miller bu metodu [1]-də mükəmməl surətdə təsvir etmişdir. B. b. m.-nin izahı daha sadə «*butstrep*» – metodun köməyi ilə verilir. Əslində butstrep – metodlar B. b. m.-ndən daha geniş surətdə tətbiq olunur, belə ki, onlar daha etibarlı nəticələrin alınmasına imkan verir. Məs., butstrep – metodun tətbiqi nəticəsində seçimi medianın dispersiyası asimptotik olaraq daha korrekt qiymətləndirilir, lakin bu məsələdə B. b. m.-nu tətbiq etmək olmur. Məlumdur ki, butstrep – metod xətti diskriminasiya məsələlərində xətalarnın hissələrinin qiymətləndirilməsində «yenidenyoxlama» qeyri – parametrik metodunun əvəzləyicisi kimi əvəzlənməzdir.

B. b. m. butstrep – metodun approksimasiyası üçün xətti ümumiləşmədir.

$x_1, \dots, x_n$ – paylanma funksiyası F_θ olan ümumi çoxluqdan seçim olsun; θ – naməlum parametir. $\theta_n(x_1, \dots, x_n)$, θ üçün statistik qiymətdir. Onda θ_n statistik qiymətinin psevdoqiyməti – $\theta_{ni} = n\theta_n - (n-1)\theta_{n-1}^i$, $i = 1, \dots, n$ olacaqdır, burada $\theta_{n-1}^i = \theta_{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $-x_i$ müşahidələnin xaric edildiyi seçim üzrə müəyyən edilmiş statistik qiymətdir. Meylin azaldılması üçün B. b. m. θ_n -in

$$\theta_n^* = n^{-1} \sum_{i=1}^n \theta_{ni}$$

qiyməti ilə əvəz olunmasından ibarətdir.

Əgər θ_n statistik qiymətinin meyli $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$M(\theta_n - \theta) = b_1/n + b_2/n^2 + o(n^{-3})$$

asimptotik ayrılışı kimi ifadə olunarsa, onda θ_n^* -nin meyli bir tərtib az olur, yəni $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$M(\theta_n^* - \theta) = -b_2/n^2 + o(n^{-3}).$$

B. b. m.-nu m dəfə tətbiq etdikdə, meylin ayrılışındakı hədləri n^{-m} tərtibə qədər xaric etmək olur. θ_n statistikasının dispersiyasının B. b. m. ilə hesablanmış statistik qiyməti

$$\sigma_n^* = (n(n-1))^{-1} \sum_{i=1}^n [\theta_{ni} - \theta_n^*]^2$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Miller R. G., The jackknife – a review «*Biometrika*» 61, p. 1–17, 1974; [2] Quenouille M., «*Biometrika*», 1956, v. 43, № 3–4, p. 353–60; [3] Tukey J., «*Ann. Math. Statist.*», 1958, v. 29, № 2, p. 614; [4] Эфрон Б., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988.

BOZE – EYNŞTEYN MODELİ «*Бозе – Эйнштейна модель; Boze – Einstein model*» – bax, *Boze – Eynşteyn statistikasi*.

BOZE – EYNŞTEYN STATİSTİKASI « Бозе –

Эйнштейна статистика; Boze – Einstein statistics » – bir-birindən fərqlənməyən tam spinli [spin – elementar hissəciklərin (elektron, proton, neytron) və ya bunların kvant təbiətli atom nüvəsinin hərəkət miqdarının məxsusi mexaniki momentidir] sistemlərə tətbiq edilən kvant statistikasıdır. Ş. Boze (S. Boze) və A. Eynşteyn (A. Einstein) tərəfindən 1924-də təklif olunmuşdur. Bu statistikada çoxhissəli sistemin hər bir kvant vəziyyətində bir-birindən fərqlənməyən ixtiyari sayda hissəcik ola bilər.

Statistik mexanikada faza fəzası n sayda oblaşa və ya oyuqlara bölünür. Bir-birindən fərqlənməyən r sayda hissəciyi Boze – Eynşteyn modeli adlanan modele görə n sayda müxtəlif oyuqda

$C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$ müxtəlif üsulla yerləşdirmək olar, hər bir oyuqda heç olmazsa bir hissəcik olması şərtlə (bütün oyuqlar doludur, boş oyuq yoxdur) r sayda bir-birindən fərqlənməyən hissəciyi n müxtəlif oyuqda C_{n+r-1}^{n-1} ($r > n$) üsulla yerləşdirmək olar.

Fotonlar, özündə cüt sayda elementar hissəcik daşıyan atomlar və atom nüvələrinin paylanması məhz Boze – Eynşteyn modelinə uyğundur.

Məs., ideal qazın kvant vəziyyəti səviyyələrin dolması saylarının çoxluğu $\{n_p\}$ ilə təyin olunur, hər bir n_p ədədi impulsu p olan birhissəvi kvant vəziyyətində olan hissəciklərin sayıdır, B. – E. s. halında $n_p = 0, 1, 2, \dots$. Böyük sistemlər üçün enerji səviyyələri olduqca sıx yerləşir və $V \rightarrow \infty$ olduqda kəsilməz spektrə yaxınlaşırlar. Buna görə də, səviyyələri orta enerjisi $\varepsilon_i = p_i^2 / 2m$ olan G_i səviyyəyə malik kiçik oyuqlar üzrə qruplaşdırmaq mümkündür, bu halda fərz olunur ki, $G_i \gg 1$. Bütün sistemin vəziyyəti $\{N_i\}$ toplusu ilə təyin olunur; N_i – oyuğun səviyyələri üzrə n_p -lərin cəmidir. Makroskopik vəziyyətin statistik çəkisi, yeni hissəciklərin oyuqlarda müxtəlif yerləşmələrinin sayı –

$$W(N_i) = \prod_i (G_i + N_i - 1)! / N_i! (G_i - 1)!$$

ədədinə bərabərdir. Vəziyyətlər üzrə hissəciklərin ən ehtimallı yerləşməsi $E = \sum_i \varepsilon_i N_i$ enerjisi verildiyi halda statistik

çəkini maksimumluğu şərtindən və $N = \sum_i N_i$ hissəciklərin sayından tapılır. Oyuqların müvafiq olan dolu olma ədədləri –

$$\bar{n}_i = \bar{N}_i / G_i = (e^{B(\varepsilon_i - \mu)} - 1)^{-1}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada μ – kimyəvi potensial, k – Boltzman sabiti (universal sabitdir və $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$), T – mütləq temperaturdur.

B. – E. s.-na tabe hissəciklər sistemi üçün vəziyyətlər simmetrik dalğa funksiyası ilə təsvir olunurlar, bu isə B. – E. s.-nın tərifinin yalnız ideal qaz üçün doğru olduğunu deyil, digər hallarda da doğru olmasını ifadə edir.

Əd.: [1] Х у а н г К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., М., 1997; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Б о г о л ю б о в Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в его кн.: Избранные труды, т. 2, К., 1970.

BOZON FƏZASI « бозонное пространство; boson space » – bax, Fok fəzası.

* **BÖLGÜ** « разбиение; partition », sonlu bölgü – hər hansı bir Ω çoxluğunun cüt-cüt uyuşmayan və birləşməsi Ω -ya bərabər olan boş olmayan altçoxluqlarından təşkil olunmuş çoxluqlar sinfinə deyilir. Əgər $B_i \subset \Omega$, $B_i \neq \emptyset$, ($i = \overline{1, n}$),

$i \neq j$ olduqda, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, n}$, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ olarsa,

$\mathcal{B}_n = \{B_1, \dots, B_n\}$ çoxluqlar sistemi Ω çoxluğunun bölgüsünü təşkil edir. B_i -lərə $\mathcal{B}_n$ bölgüsünün atomları deyilir.

$\mathcal{B}_n$ bölgüsünün doğurduğu $\mathcal{A}(\mathcal{B}_n)$ çoxluqlar cəbri 2^n sayda çoxluqlardan ibarətdir:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_n) = \{ \{B_1\}, \dots, \{B_n\}, \{B_1 \cup B_2\}, \dots, \{B_{n-1} \cup B_n\}, \dots, \Omega, \emptyset \}.$$

$n=2$ olduqda, $\mathcal{B}_2 = \{B, \bar{B}\}$ və $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2) = \{ \{B\}, \{\bar{B}\}, \Omega, \emptyset \}$.

($\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}$) ehtimal fəzası, $B_i \in \mathcal{F}$, $i = \overline{1, n}$ olarsa, $\mathcal{B}_n = \{B_1, \dots, B_n\}$ hadisələr çoxluğunun doğurduğu $\mathcal{A}(\mathcal{B}_n)$ cəbri Ω -nın $\mathcal{B}_n$ «bölgüsü»nün doğurduğu hadisələr cəbridir. Hər bir sonlu hadisələr (çoxluqlar) cəbri müəyyən bir «bölgü»nün doğurduğu cəbrdir.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

hesabi bölgüsü analogi təyin olunur.

Bax, Binar münasibətlər statistikasi.

Əd.: [1] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, М., 1980.

BÖLGÜ(sü) natural ədədin « разбиение натурального числа; partition of natural number » – bax, Təsadüfi bölgü.

K – BÖLGÜ « K – разбиение; K – partition » – μ ölçülü Ω Lebeq fəzasının ölçülən ξ bölgüsüdür və bu fəzada ölçünü saxlayan ele işlek $\{T^t, t \in \mathbb{Z}$ və ya $\mathbb{R}\}$ dinamik sistemi vardır ki,

$$1) t \geq 0 \text{ üçün } T^t \xi \geq \xi,$$

$$2) \bigvee_t T^t \xi = \varepsilon \pmod{0},$$

burada ε – ayn-ayrı nöqtələrə bölgüdür;

$$3) \bigvee_t T^t \xi = \sigma \pmod{0},$$

burada ν – trivial bölgüdür və onun yeganə elementi Ω -dır. K – b. rəqulyar proseslər halında $t < 0$ olduqda stasionar prosesin evolyusiyasından asılı hadisələr σ – cəbrinin analogudur. K – b.-yə malik dinamik sistemlər K – sistemlər adlanır.

BÖLÜNƏN / DİZYUNKT ÖLÇÜLƏR AİLƏLƏRİ « разделимые семейства мер; disjoint families of measures » – cüt-cüt singulyar ölçülərdən ibarət və bəzi əlavə xassələrə malik ailələrdir. $(X, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza olsun. Əgər

ölçülən çoxluqların ehtimal ailesi $\{X_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailesi varsa ki, $\theta = \theta'$ olduqda $\mu_\theta(X - X_{\theta'}) \neq 0$ və $\theta \neq \theta'$ olduqda $\mu_\theta(X_{\theta'}) = 0$ şərtləri $\mathcal{A}$ σ -cəbrində təyin olunmuş μ_θ ölçüləri üçün ödənilsin, onda $\mu_\theta, \theta \in \Theta$ ölçülər ailesi **zəif bölünən** (*zəif dizyunkt*) ölçülər ailesi adlanır.

Əgər ehtimal ailesi $\{X_\theta, \theta \in \Theta\}$ ölçülən çoxluqlar ailesi varsa ki, $\theta \neq \theta'$ olduqda $X_\theta \cap X_{\theta'} = \emptyset$ və $\theta = \theta'$ olduqda $\mu_\theta(X - X_{\theta'}) = 0$ şərtləri ödənilsin, onda $\mathcal{A}$ σ -cəbrində təyin olunmuş $\mu_\theta, \theta \in \Theta$ ölçülər ailesi **bölünən** (*dizyunkt*) aile adlanır.

Misal. X – müstəvidə $[0, 1] \times [0, 1]$ kvadratı, $\mathcal{A}$ – bu kvadratin Borel altçoxluqlarının σ -cəbri, $\Theta = [0, 1] \cup [2, 3]$ olsun. Əgər $\theta \in [0, 1]$ olarsa, μ_θ ölçüsü $0 \leq x \leq 1, y = \theta$ parçasında Lebeq ölçüsü olsun, əgər $\theta \in [2, 3]$ olarsa, μ_θ ölçüsü $x = \theta - 2, 0 \leq y \leq 1$ parçasında Lebeq ölçüsü olsun. Əgər X_θ – göstərilən parçalardır, onda $\{\mu_\theta, \theta \in [0, 1] \cup [2, 3]\}$ ölçülər ailesi zəif bölünən, $\{\mu_\theta, \theta \in [0, 1]\}$ ölçülər ailesi bölünən ailedir (bax, [2]).

[1]-də Martinin nəzəri – çoxluq aksiomunun köməyiylə (bu kontinuum hipotezindən olduqca zəifdir) isbat olunmuşdur ki, tam separabel metrik fəzada verilmiş Borel ölçülərinin zəif bölünən hər bir kontinual ailesi B. ö. a.-dır.

X – kontinuum güclü çoxluq olsun, bu çoxluq ϵ ilə işarə olunmuşdur. Cüt-cüt singulyar ölçülərin X -də ehtimal ailesi qurulmuşdur ki (bax, [3]), onun gücü 2^{ϵ} -dir. X -də hər bir zəif B. ö. a.-nin gücü 2^{ϵ} -dən çox deyildir, X -də hər bir B. ö. a.-nin gücü isə ϵ -dən çox deyildir. Deməli, X -də ehtimal B. ö. a. vardır ki, o, B. ö. a. deyildir.

Əd.: [1] Зеракидзе З. С., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1984, т. 113, № 2, с. 273–75; [2] Ибрагмхалилов И. Ш., Скороход А. В., Состоятельные оценки параметров случайных процессов, К., 1980; [3] Харазисвили А. Б., Некоторые вопросы функционального анализа и их применения, Тб., 1979.

BÖLÜNƏN STATİSTİKA «разделимая статистика; decomposable statistic» –

$$X_n = \sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(Y_{nk}, Z_{nk}) \quad (1)$$

kimə ifadə olunan **tesadüfi kəmiyyətdir**, burada Y_{nk} və Z_{nk} – uyğun olaraq, l – ölçülü və m – ölçülü tesadüfi vektorlar, f_{nk} – $\mathbb{R}^{l+m}$ Evklid fəzasında təyin olunmuş həqiqi Borel funksiyalardır (vektor funksiya). Bu halda $T_{nk} = (Y_{nk}, Z_{nk})$, $k = 1, \dots, k_n$ vektorlarının birgə paylanması P_n bəzi asılı olmayan tesadüfi $\theta_{nk} = (\eta_{nk}, \zeta_{nk})$, $k = 1, \dots, k_n$ vektorlarının şərti paylanması ilə üst-üstə düşür, bu şərtlə ki,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \eta_{nk} = \gamma_n, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \zeta_{nk} = z_n. \quad (2)$$

100 BÖLÜNƏN

Burada fərz olunur ki, η_n təsadüfi vektorunun paylanması

$\mathbb{R}^l$ -də Lebeq ölçüsünə görə mütləq kəsilməz paylanmadır, ζ_n təsadüfi vektorunun paylanması isə tamqiymətli koordinatlı, maksimal addımı 1-ə bərabər m – ölçülü şəbəkədə toplanmış şəbəkəvari paylanmadır.

Bu termin ilk dəfə (bax, [1]) ən mühüm və öyrənilmiş B. s.-ların sinfi üçün – n sayda asılı olmayan sınaqlarlı və nəticələrinin baş vermə ehtimalları p_{nk} , $0 < p_{nk} < 1$, $k = 1, \dots, k_n$ olan polinomial sxemdə additiv statistikalar sinfi üçün daxil olunmuşdur. Bu sinfə, məs., doğruxaoxşarlıq nisbəti kriterisinin, χ^2 – kvadrat kriterisinin, boş qutular kriterisinin statistikaları daxildir. Bu sxem üçün (1)-də Y_{nk} komponenti yoxdur, $m = 1$, $Z_{nk} \equiv v_{nk}$ k -cı nəticənin baş vermə tezliyidir, $\theta_{nk} = \zeta_{nk}$, $k = 1, \dots, k_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması, uyğun olaraq,

$n p_{nk}$ parametrlərli Puasson paylanmasıdır, (2)-də $\sum_n z_n = n$.

Polinomial sxemin **simmetrik** B. s.-ları mühüm sinif təşkil edir; bu halda (1)-dəki f_{nk} funksiyalar k indeksindən asılı

olmur. Bu altsinif $\sum_{r=0}^n c_r \mu_r$ xətti kombinasiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür, burada

$$\mu_r = \sum_{k=1}^{k_n} I(v_{nk} = r)$$

[$I(A)$ – A hadisəsinin indikatorudur]. Digər B. s.-lar sinfi $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanma ilə bağlı seçimi interval-ları additiv funksiyalardır. B. s.-ların müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşmələri və bir sıra misallar [2] – [6]-də şərh olunmuşdur.

Tətbiq üçün ən böyük maraq doğuran hal $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$ olduqda B. s.-ların zəif yığılmasının öyrənilməsidir.

X_n B. s.-nın xarakteristik funksiyasının asılı olmayan təsadüfi $(f_{nk}(\theta_{nk}), \theta_{nk})$, $k = 1, \dots, k_n$ vektorlarının cəminin birgə xarakteristik funksiyası ilə ifadəsinə əsaslanaraq, geniş şərtlər daxilində belə cəmlər üçün limit teoremlərini istifadə edərək, bu halda, B. s.-nın limit paylanmalarının sinfinin müfəssəl təsviri mərkəzi limit teoremində yığılma sürətinin qiymətləndirilməsindəki suallar, P_n -ə kontinual alternativlər halında B. s.-nın nə şəkildə ifadə olunması, həmçinin B. s.-ya əsaslanmış statistik kriteriylərin asimptotik effektivliyi də daxil olmaqla alınmışdır.

Əd.: [1] Медведев Ю. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 5, с. 987–89; [2] Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 22, М., 1984; [3] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Ронжин А. Ф., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 177; [4] Кудлаев Э. М., в кн.: «Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика», т. 26, М., 1988; [5] Кудлаев Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1985, т. 30, № 1, с. 170–74; [6] H o l s t L., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, № 5, p. 818–30.

BÖLÜNƏNLİK ŞƏRTİ «разделимости условие; separability condition» – bax, *Ehtimal* kvant fizikasında.

BÖLÜNMƏ PRİNSİPİ « разделения принцип; separation principle » – *tesadüfi proseslərin* idarəetmə məsələlərinə aid prinsipdir, bu məsələlərdə idarəetmə müşahidələrdən alınan idarəolunan statistikanın seçimi ilə həyata keçirilir.

Fərz olunur ki, $w = (w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto differensialı

$$dY_t = (a(t)Y_t + c(t)u_t)dt + B(t)dw_t$$

ilə $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *tesadüfi prosesinin* idarəetmə məsələsində $u = (u_t)_{t \geq 0}$ idarəetmə prosesi $X_s, 0 \leq s \leq t$ *tesadüfi kəmiyyətləri* ilə doğrulmuş $\mathcal{F}_t^X$ σ -cəbrləri axını $(\mathcal{F}_t^X)$ ilə uzlaşdırılmışdır, burada $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *tesadüfi prosesinin* $\tilde{w} = (\tilde{w}_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto differensialı –

$$dX_t = A(t)Y_t dt + B(t)d\tilde{w}_t$$

vardır, $\tilde{w}$ prosesi w -dən asılı deyildir və

$$V_t(u) = M \left\{ I(Y_T) + \int_0^T L(t, Y_t, u_t) dt \right\}$$

funksionalının minimizasiyası məqsədilə seçilir.

Əgər (X_0, Y_0) Qauss vektoru olarsa, aşağıdakı bölünmə prinsipi doğrudur:

$$V_T(u) = M \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi P(T)}} \int_{-\infty}^{\infty} I(y) \exp \left(-\frac{(y - \pi_T(Y))^2}{2P(T)} \right) dy + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi P(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} L(t, y, u_t) \exp \left(-\frac{(y - \pi_t(Y))^2}{2P(t)} \right) dy dt \right\}.$$

burada $(\pi_t(Y), P(t))_{t \geq 0}$ prosesləri aşağıdakı tənliklər sistemi ilə təyin olunur:

$$d\pi_t(Y) = (a(t)\pi_t(Y) + c(t)u_t)dt + \frac{A(t)P(t)}{B(t)}d\tilde{w}_t, \\ \frac{dP(t)}{dt} = 2a(t)P(t) + b^2(t) - \left(\frac{A(t)P(t)}{B(t)} \right)^2.$$

$\bar{w} = (\bar{w}_t)_{t \geq 0}$ yeniləşdirici Viner prosesisidir və

$$\bar{w}_t = \int_0^t \frac{dX_s - A(s)\pi_s(Y)ds}{B(s)};$$

bu proseslə bağlı olaraq, tam sürətdə məlum olmayan verilənlər üzrə Y prosesinin idarəetmə məsələsi tam sürətdə məlum olan verilənlərlə $\pi(Y) = (\pi_t(Y))_{t \geq 0}$ prosesinin $X_s, 0 \leq s \leq t$ müşahidələri üzrə Y_t -nin kvadratik orta menada optimal Y_t statistik qiyməti ilə idarəetmə məsələsinə gətirilir.

Əd.: [1] W o n h a m W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312–26.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU « больших чисел закон; law of large number » – olduqca ümumi bəzi şərtlərlə *tesadüfi faktorların* birgə təsirini *tesadüfdən* sanki asılı

olmayan bir nəticəyə gətirən ümumi prinsipdir. $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – sonlu riyazi gözlemləri olan $(M[\xi_k] < +\infty)$ *tesadüfi kəmiyyətlər* ardıcılığı olsun.

$$\frac{1}{n} \sum \xi_k - \frac{1}{n} \sum M \xi_k$$

fərqlinin ehtimala görə sıfıra yığılmasını ifadə edən teoremlər B. ə. q. adlanır. B. ə. q. adlanan limit teoremlərinin ümumi ideyası riyazi formada 1933-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [6], səh. 99–100). Sınaqlar sayının kifayət qədər böyük qiymətlərində *tesadüfi hadisənin* baş vermə tezliyinin onun ehtimalı ilə yaxınlaşması qeyd olunan prinsipin təsirine ilk misəldir.

17-ci əsrin sonu 18-ci əsrin əvvəllərində Ya. Bernulli [1]-də isbat etmişdir ki, n sayda asılı olmayan sınaqlardan hər birində $0 < p < 1$ şərtini ödəyən p ehtimalı ilə baş verən A hadisəsinin tezliyi v_n ilə p arasındakı fərq $n \rightarrow \infty$ olduqda ehtimala görə sıfıra yığılır, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|v_n - p| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad (1)$$

burada $v_n = \frac{1}{n} \sum \xi_k$ – ilk n sınaqda A hadisəsinin tezliyi,

$\xi_k, k = 1, 2, \dots$, – k -ci sınaqda A hadisəsinin baş verib-verməməsindən asılı olaraq, uyğun olaraq, 1 və ya 0 qiymətlərini p və $1 - p$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan *tesadüfi kəmiyyətlər*dir.

Bernulli teoremi adı ilə məlum olan bu teorem sonradan S. Puasson tərəfindən, A hadisəsinin ehtimalının baş verdiyi sınağın nömrəsindən asılı ola bilən asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı halı üçün isbat olunmuşdur (bax, [2]). p_k , – A hadisəsinin k -ci sınaqda baş vermə ehtimalı, $k = 1, 2, 3, \dots$ və $\bar{p} = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)/n$ olsun. Puasson teoreminə hökm olunur ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|v_n - \bar{p}| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (2)$$

münasibəti ödənilir. Bu teoremin ilk ciddi isbatını Puasson isbat metodundan tamamilə fərqli metodla, bəzi ekstremal mülahizələrə əsaslanaraq P. L. Çebışev (1846) vermişdir; S. Puasson (2)-ni qeyd olunan ehtimalın təqribi düsturundan – Qauss qanununa əsaslanan və hələ o vaxtlar ciddi əsaslandırılmamış düsturdan istifadə edərək çıxarmışdır. S. Puasson Bernulli teoreminin ümumiləşməsi olan öz teoremini «böyük ədədlər qanunu» adlandıraraq, «B. ə. q.» terminini ilk dəfə istifadə etmişdir.

Bernulli və Puasson teoremlərinin sonrakı təbii ümumiləşmələri alınmışdır. Bernulli halında Mv_n ($M\xi_t$ -lərin ededi ortası ilə üst-üstə düşən) p -yə, Puasson halında $\bar{p}$ -yə bərabərdir. Başqa sözlə, hər iki halda ξ_k *tesadüfi kəmiyyətinin* ededi ortasının bu *tesadüfi kəmiyyətlərin* riyazi gözlemlərinin ededi ortasından yayınmasına (fərqi) baxılır.

P. L. Çebışevin «Orta kəmiyyətlər haqqında» əsərində (1867) isbat olunmuşdur ki, asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ *tesadüfi*

kemiyetləri üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $n \rightarrow \infty$ şərtlərində olduqca ümumi fərziyyələrlə

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (3)$$

münasibəti doğrudur. P. L. Çebişev $M \xi_k^2$ riyazi gözləmələrinin eyni bir sabitlə məhdud olduğunu fərz etmişdi, lakin onun isbatından aydın olur ki, ξ_k -nin dispersiyası $D \xi_k = M \xi_k^2 - (M \xi_k)^2$ -nin məhdud olmasının və ya $n \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D \xi_k =$

$= o(n^2)$ olması kifayətdir. Beləliklə, P. L. Çebişev Bernulli teoreminin geniş ümumiləşdirilməsinin mümkünlüyünü göstərmişdir. A. A. Markov ixtiyari təsadüfi kemiyətlər (yeni asılı olan və ya asılı olmayan təsadüfi kemiyətlər) ardıcılığı üçün B. e. q.-nu daha da ümumi halda isbat etmişdir (bax, [3]): ixtiyari $\{\xi_k, k \geq 1\}$ təsadüfi kemiyətlər ardıcılığı üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{1}{n^2} D \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) \rightarrow 0$$

şərti ödənilərsə, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. O təklif etmişdir ki, Bernulli teoreminin ümumiləşmələrinin hamısı (o cümlədən, [3]) B. e. q. adlandırılın.

B. e. q.-nın isbatı üçün Çebişev metodu riyazi gözləmələrin ümumi xassələrinin dəqiq təyin edilməsi və Çebişev bərabərsizliyinin tətbiqinə əsaslanır [Çebişev bərabərsizliyinin tətbiqindən (3) ehtimalı üçün

$$n^{-2} \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n D \xi_k$$

sərhəd qiyməti alınır; bu sərhədi müəyyən məhdudiyyətlərlə daha da dəqiqləşdirmək olur; bax, *Bernşteyn bərabərsizliyi*]. B. e. q.-nın digər sonrakı isbat formaları bu və ya digər dərəcədə Çebişev metodu əsasında alınmışdır. A. A. Markov ξ_k təsadüfi kemiyetlərinin dispersiyalarının olmadığı halı araşdırmışdır. Bu halda ξ_k təsadüfi kemiyətləri deyil, bu təsadüfi kemiyətlərdən alınmış

«kəsik» təsadüfi kemiyətlər: $\xi'_{n,k}$ kemiyətləri götürülür; bu «kəsik» təsadüfi kemiyətlər isə

$$\xi'_{n,k} = \begin{cases} \xi_k, & \text{əgər } |\xi_k - M \xi_k| \leq L_n \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əgər } |\xi_k - M \xi_k| > L_n \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur, burada L_n - müəyyən sabitlərdir. Məs., o isbat etmişdir ki, bezi $\delta > 0$, $L > 0$ sabitləri və bütün n -lər üçün eger $M |\xi_n - M \xi_n|^{1+\delta} < L$ şərti ödənilərsə, onda (3) münasibəti doğrudur.

102 BÖYÜK

ξ_k - eyni qanunla paylanmış, sonlu riyazi gözləmələri olan təsadüfi kemiyətlər olduğu halda B. e. q. (3) ödənilir, bu hal A. Ya. Xinqin tərəfindən (1929) isbat olunmuşdur və Xinqin teoremi adlanır.

Asılı olmayan təsadüfi kemiyətlər cəmi üçün B. e. q.-nın sonuncu variantını müəyyən dərəcədə ifadə etmək mümkündür. Buna görə təsadüfi kemiyətlər ardıcılığının limit üzrə sabitlik anlayışı ilə bağlı daha ümumi nöqteyi - nəzərdən yanaşma məqsədəuyğundur. Əgər $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ təsadüfi kemiyətlər ardıcılığı və elə $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ sabitlər ardıcılığı varsa ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P \{ |\eta_n - C_n| > \varepsilon \} \rightarrow 0 \quad (4)$$

münasibəti ödənilsə (yeni $\{\eta_n - C_n\}$ ardıcılığı ehtimala görə sıfıra yığılsın; eger (4) hər hansı bir C_n üçün ödənilirsə, onda bu münasibət $C'_n = m \eta_n$ üçün də ödənilir. $m \eta_n$ - η təsadüfi kemiyətinin medianıdır), onda $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ limit üzrə sabit təsadüfi kemiyətlər adlanır.

Daha sonra, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kemiyətlər ardıcılığı əvəzinə

$$\begin{aligned} & \xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,k_1}, \\ & \xi_{2,1}, \dots, \xi_{2,k_2}, \\ & \dots \dots \dots \\ & \xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k_n}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

seriyalar sxemi adlanan təsadüfi kemiyətləri götürmək olar (ξ_{n,k_n} -in birinci indeksi seriyanın nömrəsi, ikinci indeksi isə seriyaya daxilində təsadüfi kemiyətin nömrəsidir). Hər bir ayn seriyadakı təsadüfi kemiyətlərin asılı olmayan təsadüfi kemiyətlər olduğu fərz olunur. Təsadüfi kemiyətlər ardıcılığını $k_1 = 1$,

$k_2 = 2, \dots, \xi_{n,k} = \xi_k / n$ qəbul edərək seriyalar sxemi kimi göstərmək olar.

$\eta_n = \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,k_n}$ olsun. Onda asılı olmayan təsadüfi kemiyətlər cəminə B. e. q.-nın tətbiqi məsələsi ümumi formada belə ifadə olunur: hansı şərtlər daxilində η_n cəmləri limit üzrə sabitdir? Bu suala A. N. Kolmoqorov cavab vermişdir (1928). Ümumilik baxımından $\xi_{n,k}$ -lərin medianlarının sıfıra bərabər olduğu fərz olunur. $\tilde{\xi}_{n,k}$ -

$$\tilde{\xi}_{n,k} = \begin{cases} \xi_{n,k} & \text{əgər } |\xi_{n,k}| \leq 1 \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əgər } |\xi_{n,k}| > 1 \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan təsadüfi kemiyət olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{k_n} P \{ |\xi_{n,k}| > 1 \} \rightarrow 0$$

və $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{k_n} M \tilde{\xi}_{n,k}^2 \rightarrow 0$$

şərtlərinin eyni zamanda ödənilməsi η_n cəmlərinin limit üzrə sabitliyi üçün zəruri və kifədir. C_n əvəzinə $\sum_{k=1}^n \mathbf{M} \tilde{\xi}_{n,k}$ götürmək olar. Bu şərtlərin kafiliyi Çebişev metodu ilə asanlıqla isbat olunur. Əgər $\mathbf{M} \tilde{\xi}_{n,k}$ riyazi gözləmələri vardırsa, onda əlavə şərtlər göstərmək olar ki, bu şərtlər əsasında $C_n = \mathbf{M} \eta_n$ götürmək olar və bu da B. ə. q.-nın (3) şəklində klassik ifadəsi üçün zəruri və kafi şərtlərə gətirir. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\{\xi_i\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün isə bu şərtlər Xincinin qeyd olunmuş teoreminə uyğun olaraq riyazi gözləmənin varlığı şərtinə gətirir. Lakin bu halda η_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortalamasının limit üzrə sabitliyi üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$n \mathbf{P} \{ |\xi_1| > n \} \rightarrow 0 \quad (5)$$

şərtlərin ödənilməsi zəruri və kifədir.

(5) şərti ödənilməyən hallara aid misallar vardır. Məs., əgər ξ_n təsadüfi kəmiyyəti paylanması sıklıq funksiyası $1/\pi(1+x^2)$ olan Koşi paylanması ilə paylanmışdırsa (belə təsadüfi kəmiyyətin uyğun xarakteristik funksiyası $e^{-|t|}$ -yə bərabərdir), (5) şərti ödənilmir. Bu halda $\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ ədədi ortalamasının uyğun xarakteristik funksiyaları $e^{-n|t|/n} = e^{-|t|}$ -yə bərabərdir və deməli, n -in ixtiyari qiymətində η_n və ayrıca götürülmüş ixtiyari ξ_i toplananının xarakteristik funksiyası eynidir və o, $e^{-|t|}$ -yə bərabərdir və deməli, η_n -in və hər bir toplananın paylanması da eynidir.

B. ə. q. ödənilməyən mühüm hallara aid misal kimi təsadüfi dolaşmalarda qayıdış müddəti ilə bağlı məsələləri qeyd etmək olar. Məs., simmetrik *Bernulli dolaşmasında* başlanğıc ana n -ci qayıdış müddəti τ_n təsadüfi kəmiyyəti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmidir: $\tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Belə ki, ξ_1 – birinci qayıdışa qədər keçən müddət, ξ_2 – birinci və ikinci qayıdışlar arasındakı müddətdir və s. τ_n/n^2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, $n \rightarrow \infty$ olduqda paylanmasının sıklıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\sqrt{2}x} x^{-3/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

olan cırlaşmayan limit qanunu ilə paylanır. Beləliklə, bu halda ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortasının paylanması, yeni τ_n/n (kobud ifadə ilə) n tərtib uzunluqlu parçada yerləşir [lakin qeyd olunmalıdır ki, əgər B. ə. q. tətbiq oluna bilinərsə, τ_n/n -in paylanması $o(1)$ uzunluqlu parçalarda toplanır].

B. ə. q.-nın asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəminə tətbiqi (ister klassik formada, istərsə də daha ümumi hallarda) ilk növbədə onunla bağlıdır ki, ξ_i və ξ_j təsadüfi kəmiyyətlərinin indeksləri arasındakı $|i-j|$ fərqi artdıqca, bu kəmiyyətlər arasında asılılıq azalır. Markov zənciri yaradan asılı təsadüfi kəmiyyətlərlə bağlı uyğun teoremlər ilk dəfə A. A. Markov tərəfindən (1907) isbat

olunmuşdur. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ sonlu sayda qiymətlər alan, birincis Markov zənciri yaradan və bir addıma bütün keçid ehtimalları müsbət olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, ξ_j və ξ_i arasında asılılığın $(j-i) \rightarrow \infty$ olduqda olduqca azalması ξ_i -nin qeyd olunmuş qiymətində ξ_j -nin şərti paylanmasının $n \rightarrow \infty$ olduqda ξ_i -nin seçilmiş qiymətindən asılı olmayan limitlə ifadə olunması ilə bağlıdır (erqodik Markov teoremi). Bu hökmdən nəticə kimi B. ə. q. alınır: əvvəlcə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{M} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right)^2 \rightarrow 0$$

münasibətinin ödənilib-ödənilməməsi təyin olunur, burada $a = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M} \xi_k$; əgər bu münasibət ödənilərsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$

olduğu alınır. B. ə. q.-nın tətbiq edilməsi üçün daha ümumi hal S. N. Bərmşteynin təklif etdiyi aşağıdakı şərtlərlə ifadə olunur: L – hər hansı sabit, R – korrelyasiya əmsalı, $\varphi(n)$, $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşan funksiyadırsa və əgər $\mathbf{D} \xi_j < L$, $R(\xi_i, \xi_j) \leq \varphi(|i-j|)$ şərtləri ödənilərsə, onda $\{\xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinə (3) münasibətilə ifadə olunan B. ə. q. tətbiq olunur. Əgər $\{\xi_n\}$ geniş mənada stasionar təsadüfi ardıcılıqdırsa, onda korrelyasiya əmsalı üzərinə qoyulan şərti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_j = 0$$

zəif şərtlə evez etmək olar, burada $R_j = R(\xi_i, \xi_{i+j})$.

Əvvəlki nəticələri müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirmək mümkündür. Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda hər yerdə «ehtimala görə» yığılmaya baxılırdı. Digər tip yığılmalara da baxılır: vahid ehtimalla, kvadratik orta mənada və s. (əslinə qaldıqda yuxarıda göstərilən şərtlərin çoxu kvadratik orta yığılmanı təmin edir və bu yığılmadan da ehtimala görə yığılma alınır). Vahid ehtimalla yığılma halı mühüm olduğundan bu hal xüsusi bir adla «böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu» adlandırılmışdır (bax, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu*).

Daha sonra bir çox teoremlər müvafiq dəyişikliklərlə ixtiyari d – ölçülü Evklid fəzasından, bəzi Banax fəzalarından, Hilbert fəzasından qiymətləri olan təsadüfi vektorlar üçün də ifadə olunmuşdur. Məs., əgər $\{\xi_n\}$ – qiymətləri separabel Banax fəzasından olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa və əgər $\mathbf{M} \|\xi_n\|$ ($\|x\|$ – x -in nomasıdır) riyazi gözləmə olarsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün və $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P} \left\{ \left\| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \mathbf{M} \xi_1 \right\| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur.

Ən ümumi formada baxılan B. ə. q. *erqodik teoremlərlə* sıx əlaqədardır. Aydındır ki, bu halda bir çox teoremlər $\frac{1}{T} \int_0^T \zeta(t) dt$

şəklində orta qiymətlərlə ifadə olunur, burada $\zeta(t)$ – kəsilməz parametrdən asılı təsadüfi prosesdir (bax, məs., [11]).

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi əvəzinə onların simmetrik funksiyalarına da baxmaq olar. Bu hal A. Ya. Xinqin tərəfindən statistik mexanikanın bəzi nəticələrinin əsaslandırılması ilə bağlı araşdırılmışdır (1951–55, bax, [10]).

A. Ya. Xinqinin aldığı nəticə aşağıdakı xüsusi bir misalla izah olunur. $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n} -$

$$\xi_{n,1}^2 + \dots + \xi_{n,n}^2 = n\mu, \quad \mu > 0$$

küresinin səthi üzərində müntəzəm paylanmış nöqtələrin koordinatları olsun. Onda $f(\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n})$ simmetrik funksiyalarının geniş bir sinfi üçün B. ə. q. ödənilir: bu isə o mənada anlaşılar ki, bu funksiyaların qiymətləri $n \rightarrow \infty$ olduqda limit üzrə sabit kəmiyyətlər olur [R. Levi (1925) qeyd etmişdir ki, olduqca çoxlu sayda dəyişənlərin kifayət qədər rəqulyar funksiyaları təyin olunduqları oblastın böyük hissəsində, demək olar ki, sabitdir].

Əd.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basilae, 1713 (в рус. пер. – Бернулли Я., О закона больших чисел, М., 1986); [2] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [3] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [4] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946; [6] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [7] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [8] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [9] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [10] Хинчин А. Я., Симметрические функции на многомерных поверхностях, в кн.: Памяти А. А. Андреева, М., 1955, с. 541–74; [11] Лозе М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [12] Uspensky J. V., Introduction to mathematical probability, N. Y. – L., 1937.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU Banax fəzalarında «больших чисел закон» в банаховых пространствах; **law of large numbers** in Banach spaces – Banax fəzasının *təsadüfi elementlərinin* normalanmış və mərkəzlənmiş cəmlərinin bu fəzanın təsadüfi olmayan elementlərinə müvafiq surətdə yığılma faktını əks etdirən ümumi prinsipdir. Topoloji nöqtəyi – nəzərdən yığılma, bir qayda olaraq, Banax fəzasının təbii norma mənasında anlaşılar, lakin bununla belə sonsuzölçülü Banax fəzalarında daha zəif topologiyalarda yığılma istisna edilmir. Nəzəri – ehtimali baxımdan ehtimala görə yığılmaya, müvafiq tərtib orta mənada yığılmaya və 1 ehtimalla yığılmaya baxılır. Təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. q.-na oxşar, 1 ehtimalla yığılma halı Banax fəzalarında böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu adı ilə xüsusilə seçilir. Banax fəzalarında B. ə. q.-nın müxtəlif formalarının ödənilməsi şərtlərini təyin edən teoremlər – Banax fəzalarında təsadüfi elementlər cəmlərinin asimptotikasını öyrənən mühüm limit teoremləridir.

B. ə. q. Banax fəzalarında və daha ümumi xətti normalanmış fəzalarda təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – parametrik statistikasi məsələlərində və təsadüfi proseslərin statistikasında tətbiq olunur. Banax fəzalarında B. ə. q. ilə mahiyyətə bağlı ilk teoremlərdən biri empirik paylanma funksiyaları haqqında

Glivenko–Kantelli teoremidir (bax, [1]). Bu teoremə görə, əgər ξ_k , $k \geq 1$ – ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdırsa, onda

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir, burada

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}\{\xi_k < x\}$$

– empirik paylanma funksiyası, $\mathbf{I}\{\xi_k < x\}$, – $\{\xi_k < x\}$ hadisəsinin indikatorudur. Baxılan halda, indikator funksiyalarına ($\mathbf{I}\{\xi_k < x\}$, $-\infty < x < \infty$) məhdud həqiqi funksiyalar fəzasında təsadüfi elementlər kimi baxmaq olar ki, bu funksiyaların bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılma norması ilə verildiyi fəzə olunur.

Banax fəzalarında B. ə. q.-nın müxtəlif variantlarının sistemətilik surətdə öyrənilməsi klassik teoremlərin bir sıra analoglarının təyin olunması ilə nəticələnmişdir. Kolmogorov teoreminin Banax fəzalarında ümumiləşməsi olan Murye teoremi (bax, [2]) belələrinəndir. Doğrudan da, əgər $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – separabel $(B, \|\cdot\|)$

Banax fəzasında eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcılığıdırsa, onda $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ ardıcılığı bu fəzanın

normasında 1 ehtimalla, yalnız və yalnız, $\mathbf{M}\|\xi_1\| < \infty$ olduğu halda yığılır. Bu halda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = \mathbf{M}\xi_1;$$

$\mathbf{M}\xi_1$, – ξ_1 təsadüfi elementinin riyazi gözləməsidir.

Skalyar normalanmalarla Banax fəzalarında B. ə. q.-na formal olaraq, təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. q.-nın bilavasitə ümumiləşməsi kimi baxmaq olar. Lakin ümumi Banax fəzalarında və təsadüfi kəmiyyətlərin (toplananların) müxtəlif paylanmalı olduğu halda B. ə. q.-nın bu və ya digər formalan fəzanın topoloji və həndəsi strukturu ilə sıx bağlıdır (bax, [3]–[5]).

Operator normalanmalarla Banax fəzalarında da asılı olmayan təsadüfi elementlərin cəmi üçün də B. ə. q.-nın müxtəlif variantları vardır.

Əd.: [1] Glivenko V., «Atti Accad. naz. Lincei», 1928, v. 8, p. 673–76; [2] Mourier E., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1953, t. 13, p. 161–244; [3] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] Hoffman-Jorgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587–99; [5] Taylor R. L., «Lect. Notes in Math.», 1978, № 672; [6] Булдыгин В. В., Солнцев С. А., Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин, К., 1989.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün «закон больших чисел» для нестационарных случайных процессов; **law of large numbers** for non-stationary random processes –

1) qeyri-stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinin geniş sinfi üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \zeta(t) dt = \hat{\zeta}, \quad (1)$$

ve ya diskret t zamanlı təsadüfi proseslər üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta(t) = \hat{\zeta} \quad (1a)$$

limitlərinin varlığı haqqında müddədir, burada limit ya kvadratik orta menada (deməli, həmçinin ehtimalla görə) və ya 1 ehtimalla yığılma menada anlaşılır [sonuncu halda limitin varlığı haqqında (1) və ya (1a) münasibətlərlə ifadə olunan müddə qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu adlanır]. Əgər t kəsilməz zaman, $M|\zeta(t)|^2 < \infty$, $0 < t < \infty$ və $M\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ isə t, s -in kəsilməz funksiyası olarsa, məs., hər hansı $C < \infty$ üçün və bütün $T > 0$, $S > 0$ şərtini ödəyən T və S -lər üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty, S \rightarrow \infty} \frac{1}{TS} \int_0^T \int_0^S B(t, s) dt ds$$

limiti varsa və

$$\frac{1}{TS} \int_0^T \int_0^S |B(t, s)| dt ds < C$$

şərti ödənilərsə, qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q. ödənilir (bax, [1], [2]). Qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q. ixtiyari harmoniklənən təsadüfi proseslər üçün də ödənilir, belə ki, yalnız Loev mənada harmoniklənən $\zeta(t)$ prosesləri üçün deyil, Rozanov mənada harmoniklənən (və ya zeif harmoniklənən) proseslərin geniş sinfi üçün də ödənilir; bu halda $\hat{\zeta} = Z(+0) - Z(-0)$ olur, burada $Z(\lambda)$, – $\zeta(t)$ prosesinin ifadəsinə Furje – Stiltjes integralı kimi daxil olan təsadüfi funksiyadır, burada (1) və (1a)-nın sol tərəfindəki $0 \leq t \leq T$ intervalı üzrə ortalanmanı ixtiyari $S \leq t \leq T$ intervalı üzrə, $T - S \rightarrow \infty$ şərti ödənilməklə əvəz etmək olar (bax, [3], [4]). Qeyri – stasionar proseslər üçün B. ə. q. ortalanmış korrelyasion funksiyaya malik olan bütün $\zeta(t)$ təsadüfi prosesləri üçün də doğrudur (bax, [5], [6]).

2) Məs., kəsilməz t halında, bu teorem geniş şərtlərlə

$$\hat{\zeta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\zeta(t) dt \quad (2)$$

münasibətinin doğruluğu haqqında teoremdir, belə ki, $\zeta(t)$ -nin qiymətlərinin uzun zaman intervalı üzrə orta qiyməti – $M\zeta(t)$ orta qiymətinin $0 \leq t \leq \infty$ yarıoxu üzrə ortalanmış olduqca dəqiq qiymətdir [(2)-nin sağ tərəfindəki limitin varlığı həmişə fərz olunur]. $\hat{\zeta} = [\zeta(t) - M\zeta(t)]$ olduğundan hesab etmək olar ki, $M\zeta(t) = 0$ və hansı şərtlərdə $\hat{\zeta} = 0$ olacağını araşdırmaq lazımdır. Belə şərtlərdən ən sadəsi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) dt ds = 0$$

şərtidir (bax, [7]). Əgər $\zeta(t)$ harmoniklənən prosesdirsə, $\hat{\zeta} = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğru olur ki, $\lambda = 0$, $\omega = 0$ nöqtəsinin prosesin spektral ölçüsü $F(\lambda, \omega)$ -nın qiymə-

tinə təsiri sıfıra bərabər olsun (bax, [3], [4]); əgər $\zeta(t)$ – ortalanmış spektral funksiyası $F(x)$ olan prosesdirsə, $\hat{\zeta} = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $F(\lambda)$ funksiyası $\lambda = 0$ nöqtəsində kəsilməz olsun (bax, [5], [6]). Xüsusi halda, stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün bütün bu şərtlər stasionar təsadüfi proseslər üçün böyük ədədlər qanununun doğruluğu şərtlərinə çevrilir.

Əd.: [1] Kawata T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 276–302; [2] Kawata T., в сб.: Keio mathem. seminar reports, № 1, Yokohama, 1973, p. 1–23; [3] Л о в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 496–99; [4] Розанов Ю. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [5] Nagabhushanam K., Bhagavan C. S. K., «Sankhya», Ser. A., 1969, v. 31, p. 421–424; [6] Rao M. M., в сб.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [7] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 99–103.

БӨYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU Markov prosesləri üçün « закон больших чисел для марковских процессов; law of large numbers for Markov processes » – Markov zəncirinin bir-birindən uzaq zaman anlarında aldığı qiymətlərin asılılıq dərəcəsinə qoyulan əlavə məhdudiyyətlərlə doğru olan müddədir. $\omega_1, \omega_2, \dots$ – Markov zənciri, ω_i , $i = 1, 2, \dots$ – ölçülən $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

$(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = (\Omega, \mathcal{A})$ və $\omega_1, \omega_2, \dots$ – bircins Markov zənciri olsun. Fərz olunur ki: 1) $0 < \varphi(\Omega) < \infty$ şərtini ödəyən φ ölçüsü və ele $\nu \geq 1$ tam ədədi və $\varepsilon > 0$ ədədi vardır ki, $\varphi(A) < \varepsilon$ olduqda, ν addıma keçid funksiyası üçün $p^\nu(\omega, A) < 1 - \varepsilon$ şərti ödənilir və 2) Ω -da yeganə ergodik vəziyyətlər sinfi vardır. π , – $\mathcal{A}$ -da stasionar ehtimal ölçüsü, $X(\omega)$, – Ω -da ölçülən funksiya olsun, bu şərtlə ki,

$$\int_{\Omega} |X|(\omega) \pi(d\omega) < \infty.$$

Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\omega_k) = \int_{\Omega} X(\omega) \pi(d\omega)$$

sanki yaqın ödənilir.

1) şərti D ö b l i n şə r t i adlandırılan şərtin ümumiləşmiş formasıdır; əgər Ω çoxluğu sonlu olarsa, onda bu şərt ödənilir.

Məhdudiyyətlərin digər təbii tipi – «müntəzəm qarışmanın göstəricilərinə» qoyulan əlavə məhdudiyyətlərdir ki, bunlar Markov zənciri halında aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\varphi_n = \sup_{1 \leq k < \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}_{k+n}, B \in \mathcal{A}_k, P(B) > 0} |P(A|B) - P(A)|.$$

X_k , – Ω_k -da ölçülən funksiya, $\xi_k = X_k(\omega_k)$ olsun. Aşağıdakı müddə [3]-dəki nəticələrin xüsusi halıdır. Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{1/2} < \infty \text{ və } \sum_{k=1}^{\infty} D_{\xi_k}^2 / k^2 < \infty \text{ olarsa, onda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{M} \xi_k) = 0 \quad (*)$$

sanki yaqın ödənilir; əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k^{1/2} n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbf{D} \xi_k = 0$$

olarsa, (*) münasibətində ehtimala görə yığılma ödənilir. Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k)^{1/2} < \infty \text{ olarsa, } \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{1/2} < \infty \text{ şərti ödənilir. } \alpha_k -$$

zəncirin erqodiklik əmsəlidir (bax, *Mərkəzi limit teoremi Markov prosesləri üçün*).

Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbf{D} \xi_k = 0$$

münasibəti ödənilərsə, (*)-da ehtimala görə yığılma ödənilir (bax, [2]).

Əd.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Statulevičius V., «Proc. 2-nd Japan - USSR Sympos. on Probab. Theory», 1972, v. 1, p. 138-52; [3] Утев С. А., «Тр. Ин-та матем. СО АН СССР», 1984, т. 3, с. 50-77.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU stasionar təsadüfi proseslər üçün « **больших чисел закон** для стационарных случайных процессов; **law of large numbers for stationary random processes** » – 1) ixtiyari, geniş mənada *stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi posesi* üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t) dt = \hat{\zeta} \quad (1)$$

və ya

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S}^{T-1} \zeta(t) = \hat{\zeta} \quad (1a)$$

limitlərinin həmişə varlığı haqqında müddəadır. [(1) düsturu kəsilməz zamanlı proseslər üçün, (1a) düsturu isə diskret zamanlı proseslər üçündür], burada limit kvadratik orta (və ya ehtimala görə) yığılma mənada anlaşılar. Stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q.-nün bu forması A. Ya. Xinqinə məxsusdur (bax, [1], [2]).

$\hat{\zeta}$ təsadüfi kəmiyyəti $\zeta(t)$ prosesinin $\lambda=0$ nöqtəsində spektral ayrılışına daxil olan $Z(\lambda)$ təsadüfi funksiyasının sıçrayışı ilə üst-üstə düşür (bax, məs., [3]).

2) $\hat{\zeta} = \mathbf{M} \zeta(t)$ bərabərliyi, yalnız və yalnız,

$$b(\tau) = \mathbf{M} [\zeta(t+\tau) - \mathbf{M} \zeta(t+\tau)] [\zeta(t) - \mathbf{M} \zeta(t)]$$

funksiyası ya

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau = 0 \quad (2)$$

şertini və ya uyğun olaraq,

106 BÖYÜK

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} b(\tau) = 0 \quad (2a)$$

şertini ödədiyi halda doğrudur, müddəsidir [yeni $\hat{\zeta} = \mathbf{M} \zeta(t)$ bərabərliyi haqqında müddəə onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesinin orta qiymətini ən böyük dəqiqliklə təyin etmək mümkündür, buna görə bu prosesin müşahidə olunmuş qiymətlərinin olduqca böyük interval üzrə orta qiymətini götürmək lazımdır]. Stasionar proseslər üçün B. ə. q.-nün bu forması Ye. Ye. Slutskiye məxsusdur, əksər hallarda Slutski erqodik teoremi və ya Slutski teoremi adlanır ([4], [5]); spektral terminlərdə (2) və ya (2a) şərtlərini $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyasının $\lambda=0$ nöqtəsində kəsilməzlik şərti kimi ifadə etmək olar (bax, [3]).

Stasionar proseslər üçün B. ə. q.-nün yuxarıdakı ifadələri $\mathbb{R}^k$ və ya $\mathbb{Z}^k$ bircins təsadüfi meydanları halında ixtiyari tam k qiyməti üçün ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Матем. сб.», 1933, т. 40, с. 124-28; [2] Khintchine A., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 604-15; [3] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [4] Slutski E. E., в сб.: Actualités Sci. et Industr., № 738, P., 1938, p. 33-55; [5] Слуцкий Е. Е., в его кн.: Избранные труды, М., 1960.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU təsadüfi çoxluqlar üçün « **больших чисел закон** для случайных множеств; **law of large numbers for random sets** » – bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU təsadüfi meydanlar üçün « **больших чисел закон** для случайных полей; **law of large numbers for random fields** » – ortalanma aparılan oblastı genişləndirdikdə *təsadüfi meydanın* orta qiymətlərinin yığılması haqqında müddəadır. Orta qiymətlərin yığılması anlayışı müxtəlif mənalarla: ehtimala görə, kvadratik orta mənada, 1 ehtimalla yığılma mənada (bu halda böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun tətbiq olunması nəzərdə tutulur) anlaşılar. Məs., fərz olunur ki, $X(t)$ – tamqiymətli $\mathbb{R}^m$ şəbəkəsində ele bircins təsadüfi meydandır ki, $\mathbf{M} X(t) = 0$. Belə meydanın korrelyasion funksiyası $B(h) = \mathbf{M} X(t+h) \overline{X(t)}$ aşağıdakı şəkildə ifadə oluna bilər:

$$B(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \sum_{k=1}^m h_k \lambda_k} F(d\lambda),$$

burada $F(\cdot)$, $[-\pi, \pi]^m$ fəzasının Borel çoxluqlarının σ – cəbri $\mathcal{B}_m$ -də ölçüdür. $X(t)$ meydanının özü isə

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \sum_{k=1}^m t_k \lambda_k} z(d\lambda)$$

ifadəsilə təyin olunur, burada $z(\cdot)$, $\mathcal{B}_m$ -də ele ortoqonal təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M} z(S_1) \overline{z(S_2)} = F(S_1 \cap S_2)$, $S_1 \in \mathcal{B}_m$, $S_2 \in \mathcal{B}_m$. Onda $z\{(0)\}$ -a bərabər olan, kvadratik orta mənada

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)^m} \sum_{\substack{|X_j| \leq N, \\ j=1, \dots, m}} X(t)$$

E. Borel və F. Kantellinin isbatları aşağıdakı mülahizəyə əsaslanmışdır. Fərz olunur ki, müsbət ədədlərin hər hansı $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ olduqda) ardıcılığı üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |S_n/n - A_n| > \varepsilon_n \} < \infty \quad (5)$$

münasibəti ödənilir. Onda Borel – Kantelli lemmasına əsasən (5) münasibətində ehtimal işarəsi altındakı hadisələrdən yalnız sonlu sayda 1 ehtimalla baş verir. Buna görə də, n -in olduqca böyük bütün qiymətlərində

$$|S_n/n - A_n| \leq \varepsilon_n$$

hadisəsi 1 ehtimalla baş verir, yəni (3) münasibəti ödənilir. E. Borel (5) sırasının hədlərini Muavr – Laplas teoreminə görə, F. Kantelli isə dördüncü momentlə Çebişev bərabərsizliyi ilə qiymətləndirmişlər.

B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlərin sonradan genişləndirilməsi A. Ya. Xinqin və A. N. Kolmoqorov tərəfindən həyata keçirilmişdir. A. Ya. Xinqin [3], [4]-də «böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu» terminini daxil etmiş və $A_n = M(S_n/n)$ şərti ilə B. ə. g. q.-nun kafi şərtini vermişdir (asılı təsadüfi kəmiyyətlər üçün də).

ξ_i və ξ_k arasında korrelyasiya əmsalını $r_{i,k}$ ilə işarə edərək,

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |r_{i,k}|, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

qəbul edərək Xinqin şərtini hər hansı $\delta > 0$ üçün $B_{n,2} C_n = O(n^{2-\delta})$ formasında yazmaq olar.

Toplananlar asılı olmadığı halda B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlər: sonlu dispersiyalı təsadüfi kəmiyyətlər üçün A. N. Kolmoqorov kafi şərti (1930) və riyazi gözləmələri sonlu olan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün zəruri və kafi şərtlər (1933) məlumdur. Sonlu dispersiyalı (1) təsadüfi kəmiyyətləri üçün Kolmoqorov teoreminə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_{\xi_n}^2/n^2 < \infty \quad (6)$$

şərtində B. ə. g. q.-nun $A_n = M(S_n/n)$ qiymətləri (1) ardıcılığına tətbiq olunduğu alınır. Dispersiya terminləri (6) şərti o mənada ən yaxşı şərt hesab oluna bilər ki, b_n – ixtiyari müsbət ədədlər, $\sum b_n/n^2$ dağılan ardıcılıq olarsa, B. ə. g. q.-na tətbiq olunan $D_{\xi_n}^2 = b_n$ və asılı olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı qurmaq mümkündür. (6) şərtinin (asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsinin digər bir sıra şərtlərinin də) tətbiq olunma oblası aşağıdakı qeydə əsaslanaraq genişləndirilə bilər. m_n – ξ_n -in medianı olsun.

$\sum P \{ |\xi_n - m_n| > n \}$ sırasının yığılması B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün zəruri şərtidir. Borel – Kantelli lemmasına əsasən, hər hansı bir nömrədən başlayaraq 1 ehtimalla $|\xi_n - m_n| < n$ bərabərsizlikləri ödənilir.

Buna görə də, B. ə. g. q.-nun tətbiq olunub-olunmadığını araşdırdıqda ilk növbədə bu son şərti ödəyən təsadüfi kəmiyyətlə kifayətlənmək olar.

A. Ya. Xinqin və A. N. Kolmoqorovun isbatlarında (5) sırasının yığılması əvəzinə, $n_k = 2^k$ qiymətlərində

$$\sum_k P \left\{ \max_{n_k < n \leq n_{k+1}} |S_n/n - A_n| > \varepsilon_n \right\}$$

sırasının yığılması müəyyənləşdirilir. Bu zaman A. Ya. Xinqin mahiyyətə sıralar nəzəriyyəsinin funksiyaların ortoqonal sistemləri üzrə bezi ideyalarından, A. N. Kolmoqorov isə təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin maksimumları üçün onun adını daşıyan bərabərsizlikdən istifadə etmişlər.

B. ə. g. q.-nın zəruri və kafi şərtini asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün vermək olar. $2^k < n \leq 2^{k+1}$ şərti ilə təyin olunan n -lər üzrə $\sum_{(k)} c_n$ cəmini hesabladıqda, $Z_k = 2^{-k} \sum_{(k)} \xi_n$

qəbul edərək, bu şərti aşağıdakı şəkildə yazmaq olar: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_k P \{ |Z_k - m Z_k| > \varepsilon \} < \infty, \quad (7)$$

burada $m Z_k$ – Z_k -nin medianıdır (bax, [6]). Bezi əlavə məhdudiyyətlərlə (7)-dən ayrı-ayrı toplananların xarakteristikaları vasitəsilə ifadə olunan şərtlər almaq olur. Məs., əgər $\xi_n = O(n/\ln \ln n)$ və ya bütün ξ_n -lər normal qanunla paylanmış olarsa, onda (7) şərti: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_k \exp \{ -\varepsilon / D Z_k \} < \infty$$

şərtinin ödənilməsilə eynigücdür. Burada ξ_i -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunduğundan

$$D Z_k = 2^{-2k} \sum_{(k)} D_{\xi_n}^2.$$

Markov zəncirləri və stasionar proseslərə B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması şərtləri məlumdur (bax, [7]). Məs., korrelyasiya funksiyası $R(n)$ olan geniş mənada stasionar ξ_n ardıcılıqlarına Xinqin metodu tətbiq edildikdə belə bir müddəə alınır: əgər $\sum \ln^2 n / |R(n)|$ sırası yığılarsa, onda $(\xi_0 + \dots + \xi_n)/(n+1) \rightarrow M_{\xi_0}$ münasibəti 1 ehtimalla ödənilir. Dar mənada stasionar proseslər üçün B. ə. g. q., bəzən

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_0 + \dots + \xi_n)/(n+1)$$

limitinin 1 ehtimalla ödənilməsi kimi anlaşılır (Y təsadüfi kəmiyyəti ξ_0 -in yerindəyişməyə nəzərən invariant çoxluqların σ – cəbri üzrə şərti riyazi gözləməsinə bərabərdir. Y kəmiyyəti vahid ehtimalla sabitdir və yalnız metrik tranzitiv proseslər üçün $M_{\xi_0}^2$ -ə bərabərdir). B. ə. g. q. məhz bu formada Birkhof – Xinqin ergodik teoremidir.

Normalanmış xətti fəzalarda təsadüfi vektorlar üçün B. ə. g. q.-nın variantları mövcuddur (bax, [9]). Tarixən ilk misal kimi empirik paylanma funksiyalarının nəzəri paylanma funksiyasına yığılması haqqında Qlivenko – Kantelli teoremini qeyd etmək olar. S_n/n -in A_n -dən yayınmaları haqqında ifadədən *tekrar loqarifm qanunu* alınır.

Əd.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39–45; [3] Хинчин А. Я., Основные законы теории

вероятностей, М., 1927; [4] Х н н ч и н А. Я., «С. г. Acad. sci.», 1928, т. 186, р. 285–87; [5] К о л м о г о р о в А. Н., «С. г. Acad. sci.», 1930, т. 191, р. 910–12; [6] П р о х о р о в Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, с. 523–36; [7] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965.

S. V. Naqayevin işində (bax, [10]) asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün bir kriteri də təklif olunmuşdur. Ümumiliyi pozmadan, Yu. V. Proxorov kimi (bax, [11]) fərz etmək olar ki, ξ_i simmetrik paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bunu nəzərə alıqda S. V. Naqayev teoremini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

$h_k(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ və $k = 1, 2, \dots$ – uyğun

$$\frac{\partial}{\partial h} \log M \exp(hZ_k) I(W_k < \varepsilon) = 2\varepsilon$$

tenliklərinin həlli olsun. Z_k (7)-dəki kimi təyin olunur və

$$W_k = \max(|\xi_m|/m : 2^k < m \leq 2^{k+1}).$$

Əgər $h_k(\varepsilon)$ həlli varsa, onda bu həll yeganədir. Əks halda, tərifi görə fərz olunur ki, $h_k(\varepsilon) = \infty$.

Onda B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{P(\xi_n > \varepsilon n) + \exp(1 - \varepsilon 2^{n+1} h_n(\varepsilon))\} \quad (8)$$

sırasının yığılması zəruri və kafidir.

Yu. V. Proxorovun (7) kriterisinə oxşar S. V. Naqayev kriterisi mürekkəb Z_k və W_k təsadüfi kəmiyyətlərinin istifadə edilməsi ilə bağlı olduğundan, bu kriterinin birinci kriteridən hansısa prinsipial üstünlüyü olmur. Bununla əlaqədar olaraq, yalnız asılı olmayan ayrı-ayrı ξ_i toplananlarının xarakteristikalarından istifadə etmək (6) və (8) şərtləri kimi) B. ə. g. q.-nun kriterisinin alınması probleminin tamamilə həll olunduğunu hesab etmək olmaz. [10]-da misal göstərilmişdir ki, axtarılan kriterini sonlu sayda momentlər istifadə olunduğu halda qurmaq mümkün deyildir.

Əd.: [10] Н а г а е в С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 609–18; [11] П р о х о р о в Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 153–65.

БӨYÜK ƏDƏDLƏRİN GÜCLƏNDİRİLMİŞ QANUNU stasionar təsadüfi proseslər üçün «больших чисел усиленный закон для стационарных случайных процессов: **strong law of large numbers for stationary random processes**» – 1) stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t) dt = \hat{\zeta} \quad (1)$$

və ya (t diskret olduqda)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S}^{T-1} \zeta(t) = \hat{\zeta} \quad (1a)$$

limitlərinin 1 ehtimalla varlığı haqqında müddədir. Stasionar proseslər üçün B. ə. g. q.-na aid olan ən mühüm müddə Birkhoff – Xinqin ergodik teoremidir; bu teoreme əsasən, dar mənada

stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün $M|\zeta(t)| < \infty$ şərti (kəsilməz t halında çox ümumi requlyarlıq şərti də əlavə olunmaqla, belə ki, bu tətbiqi məsələlərdə həmişə ödənilir) B. ə. g. q.-nun ödənilməsinə təmin edir.

1) müəyyən şərtlər daxilində [bu halda bu şərtlər $\zeta(t)$ stasionar prosesi üçün B. ə. g. q.-nun doğruluq şərtləri adlanır] $\hat{\zeta} = M\zeta(t)$.

2) Əgər $\zeta(t)$ geniş mənada stasionar prosesdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesinə adi böyük ədədlər qanununun tətbiqi üçün [yeni (1) və (2)-nin ehtimalla görə və kvadratik orta mənada limitinin varlığı üçün, burada $\hat{\zeta} = M\zeta(t)$]

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(s) ds &= 0 \\ \text{və ya da ki,} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^T b(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Slutski şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada

$$b(s) = M[\zeta(t+s) - M\zeta(t+s)][\zeta(t) - M\zeta(t)]$$

(bax, Böyük ədədlər qanunu stasionar təsadüfi proseslər üçün). Əgər $\zeta(t)$ – dar mənada stasionar proses və $M|\zeta(t)| < \infty$ olarsa, onda Birkhoff – Xinqin teoreminə əsasən (1) və (2) limitləri 1 ehtimalla vardır, əgər bundan başqa, $M|\zeta(t)|^2 < \infty$ da olarsa [$\zeta(t)$ prosesi geniş mənada stasionar olduğundan], $\hat{\zeta} = M\zeta(t)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün Slutski şərti (3)-ün ödənilməsi təbii olaraq zəruri və kafidir [yeni $\zeta(t)$ prosesi üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün].

Lakin, bununla belə, $\zeta(t)$ prosesi dar mənada deyil, yalnız geniş mənada stasionar proses olarsa, onda bu proses üçün ola bilər ki, Slutski şərti ödənilsin [yeni $\zeta(t)$ üçün adi böyük ədədlər qanunu doğrudur], amma bu halda (1) və ya (2) limitləri 1 ehtimalla yoxdur [yeni $\zeta(t)$ üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu ödənilmir]. Bu növ ilk misal [1]-də göstərilmişdir, daha əvvəllər (bax, [2], [3]) stasionar (geniş mənada) $\zeta(t)$ prosesləri üçün B. ə. g. q.-nun doğruluğunun bezi ümumi kafi şərtləri göstərilmişdir, xüsusi halda, bu şərtlərdən aydın olur ki, əgər (3)-də $1/T$ vuruğunu daha yavaş azalan $1/T^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ vuruğu ilə əvəz etdikdən sonra (3) şərti doğru olarsa, B. ə. g. q. yəqin ki, ödəniləcəkdir (bax, [4]). [4], [5]-də göstərilmişdir ki, $1/T$ vuruğu $(\log T)^a/T$, $a > 3$ ilə əvəz olunduqdan sonra (3) şərti doğru olarsa, B. ə. g. q. da doğrudur. Sonralar isbat olunmuşdur ki (bax, [6], [7]), bəzi $C > 0$ və $\varepsilon > 0$ qiymətlərində, olduqca böyük bütün s -lər üçün $|b(s)| < C(\log \log s)^{-2-\varepsilon}$ bərabərsizliyi ödənildikdə geniş mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün

B. ö. g. q. həmişə ödənilir, lakin $b(s)$ sonsuzluqda $(\log \log s)^{-2}$ kimi ödənilməyi $\zeta(t)$ prosesləri üçün bu qanun doğru olmaya da bilər.

Əd.: [1] Blanc - Lapierre A., Tortrat A., «C. r. Acad. sci.», Ser. A - B, 1968, t. 267, № 20, p. 740-43; [2] Loeve M., «Rev. Sci.», 1945, v. 83, p. 297-303; [3] Blanc - Lapierre A., B r a r d R., «Bull. Soc. Math. France», 1946, t. 74, p. 102-15; [4] В е р б и ц к а я И. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 358-65; [5] В е р б и ц к а я И. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 715-20; [6] Г а л о ш к и н В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 388-92; [7] Г а л о ш к и н В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 295-319.

BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN GÜCLƏNDİRİLMİŞ QANUNU təsadüfi çoxluqlar üçün «больших чисел усиленный закон для случайных множеств; strong law of large numbers for random sets» - bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

BÖYÜK KANONİK ANSAMBL «большой канонический ансамбль; grand canonical ensemble» - bax, *Gibbs paylanması*.

BÖYÜK dim. - ÖLÇÜLƏR EFFEKTİ «больших размерностей эффект; large dimensions effect» - statistik fizikada bəzi kəmiyyətlərin hesablanmasıda çoxsaylı naməlum parametrlərlə ifadə olunan, bəzi kəmiyyətlərin tutarlı statistik qiymətlərinin tapılmasında əsas sayılan, sayı sonsuzluğa yaxınlaşan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı Borel funksiyalarının öz-özünə ortalaşma xassəsidir (bax, aşağı). B. dim. - ö. e. çoxölçülü statistik analizdə böyük dim. - ölçülü müşahidələrdə və həm də, nizamlanmamış strukturlar nəzəriyyəsində aşkar olunmuşdur. Bu analizinin əsas statistik qiymətlərindən biri Ξ kovariasion matrisinin rezolventinin normalanmış izinin statistik qiyməti olub,

$$\varphi(z, \Xi) = m_n^{-1} \operatorname{tr} \|Iz - \Xi\|^{-1}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada z - kompleks parametr, I - vahid matris, m_n - Ξ matrisinin tərübidi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - normal qanunla $(N(a, \Xi))$ paylanmış ξ təsadüfi vektoru üzərində aparılmış asılı olmayan müşahidə nəticələri olsun. Əgər Ξ matrisinin məxsusi qiymətləri λ_p -lər aşağı və yuxarıdan kəskinliklə məhdudlarsa və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n/n = c, \quad 0 < c < \infty$$

Kolmoqorov şərti ödənilərsə, onda B. dim. - ö. e. ondan ibarətdir ki, $\varphi(z, \hat{\Xi})$ funksiyaların öz-özünə ortalaşır, yəni

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(z, \hat{\Xi}) - \mathbf{M}\varphi(z, \hat{\Xi})] = 0, \quad \operatorname{Im} z \neq 0$$

münasibəti ödənilir və $\theta(z) = \mathbf{M}\varphi(z, \hat{\Xi})$ funksiyası

$$\theta(z) = m_n^{-1} \sum_{p=1}^{m_n} [z - \lambda_p (1 - k_n + k_n \theta(z))]^{-1} + o(1)$$

funksional tənliyini ödəyir, burada

110 BÖYÜK

$$\hat{\Xi} = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{a})(x_k - \hat{a})^T,$$

$$\hat{a} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k, \quad k_n = m_n/n < 1.$$

Bu tənlikdən istifadə edərək, göstərmək olar ki, Kolmoqorov şərti ödənilməyi halda $\varphi(z, \Xi)$ funksiyasının statistik qiyməti kimi $\varphi(\hat{y}, \hat{\Xi}) \hat{y} z^{-1}$ ifadəsini götürmək olar, burada $\hat{y}$, - $1 - k_n + k_n \gamma \varphi(\gamma, \hat{\Xi}) = \gamma z^{-1}$ tənliyinin analitik həllidir.

Çoxölçülü analizin əsas ifadələrinin analizində B. dim. - ö. e.-dən istifadə etdikdə aşağıdakı tutarlı statistik qiymətlər alınır: c_n - sabitlərin hər hansı ardıcılığı olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{-2} \ln [n(n - m_n)^{-1}] = 0$$

şərtini ödəyən, normalanmış ümumiləşmiş $c_n^{-1} \ln \det \Xi$ dispersiyasının statistik qiyməti -

$$c_n^{-1} \{ \ln \det \hat{\Xi} + \ln [(n-1)^{m_n} (A_{n-1}^{m_n})^{-1} n(n - m_n)^{-1}] \}$$

kəmiyyətinə bərabərdir, burada $A_n^m = n \dots (n - m + 1)$;

$(a_1 - a_2)^T \Xi^{-1} (a_1 - a_2)$ Mahalanobis məsafəsinin statistik qiyməti

$$(\hat{a}_1 - \hat{a}_2)^T \Xi^{-1} (\hat{a}_1 - \hat{a}_2) \frac{n_1 + n_2 - 2 - m}{n_1 + n_2 - 2} \frac{m}{n_1} \frac{m}{n_2}$$

ifadəsinə bərabərdir, burada Ξ - iki asılı olmayan m - ölçülü ξ_1 və ξ_2 təsadüfi vektorlarının ümumi kovariasion matrisi, $\mathbf{M}\xi_1 = a_1$, $\mathbf{M}\xi_2 = a_2$.

$$\hat{\Xi}_1 = (n_1 + n_2 - 2)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_1} (x_k - \hat{a}_1)(x_k - \hat{a}_1)^T + \sum_{p=1}^{n_2} (y_p - \hat{a}_2)(y_p - \hat{a}_2)^T \right\},$$

x_i və y_i - uyğun olaraq, ξ_1 və ξ_2 vektorları üzərində asılı olmayan müşahidələrin nəticələridir, $\hat{a}_1 = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$, $\hat{a}_2 =$

$$= n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} y_i.$$

Regulyarlanmış Mahalanobis məsafəsi - $(a_1 - a_2)^T (I\mathcal{E} + \Xi)^{-1} (a_1 - a_2)$ -in statistik qiyməti

$$(\hat{a}_1 - \hat{a}_2)^T (I\mathcal{E} + \mathcal{E}\hat{\Xi}_1)^{-1} (\hat{a}_1 - \hat{a}_2) - (n_1^{-1} + n_2^{-1}) \operatorname{tr} \mathcal{E}\hat{\Theta}^{-1} \hat{\Xi}_1 (I\mathcal{E} + \mathcal{E}\hat{\Theta}^{-1} \hat{\Xi}_1)^{-1}$$

ifadəsile təyin olunur, burada $\hat{\Theta}$, -

$$1 - k_m + k_m \theta_m^{-1} \operatorname{tr} (I\theta + \hat{\Xi}_1)^{-1} = \theta \mathcal{E}^{-1}, \quad \mathcal{E} > 0,$$

$$k_m = m(n_1 + n_2 - 2)^{-1}$$

tənliyinin müsbət həllidir.

Ədədi analizdə də B. dim. – ö. e.-nin tətbiqi yaxşı nəticələr verir. $Ax = b$ matrisinin verildiyi fərz olunur, burada $A = \|a_{ij}\|$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ – düzbucaqlı matris, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $x^T = (x_1, \dots, x_m)^T$ – axtarılan həldir, A matrisinin elementləri orta qiymətləri A matrisinin uyğun elementlərinə bərabər olan hər hansı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalarıdır.

$$x_\alpha = [I\alpha n + A^T A]^{-1} A^T b, \quad \alpha > 0$$

– $Ax = b$ tənliklər sisteminin rəqulyarlanmış həlli olsun. Belə həllər üçün B. dim. – ö. e.-i aşağıdakı kimi ifadə olunur. X matrisinin elementlərinin $N(a_{ij}, \sigma^2)$ normal qanunla paylanmış asılı təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur.

$c \in \mathbb{R}^m$ və b vektorları

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^m |(A^T b, \varphi_k)(c, \varphi_k)| < \infty$$

şərtini ödəyir, belə ki,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=1, \dots, n} n^{-1} \lambda_k(A^T A) < \infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} mn^{-1} < 1,$$

burada λ_k və φ_k – uyğun olaraq, $A^T A$ matrisinin məxsusi qiymətləri və normalanmış məxsusi vektorlarıdır.

Onda $A = X$ olduqda

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(x_\alpha, c) + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(z, y)_{z=0} dy \right] = 0$$

münasibəti ödənilir, burada $f(z, y)$ funksiyası

$$f(z, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^m [y(1 + \sigma^2 f(z, y)) + \sigma^2 \left(1 - \frac{m}{n}\right) + \lambda_k(z)(1 + \sigma^2 f(z, y))^{-1}] + o(1)$$

tənliyini ödəyir, $\lambda_k(z)$ isə $K^T(z)K(z)$ matrisinin məhsusi qiymətləridir,

$$K(z) = n^{-1/2} A + z b c^T n^{1/2}.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 2, с. 252–65; [2] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988; [3] Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А., Введение в теорию неупорядоченных систем, М., 1982.

BÖYÜK YAYINMALAR empirik paylanma funksiyası üçün «большие отклонения для эмпирической функции распределения; large deviation for empirical distribution function» – empirik paylanma funksiyasının uzaq oblasta düşməsi ehtimalı kiçik olan yayınmalardır. $F_n = F_n(t)$ – paylanma funksiyası $F = F(t)$ olan $(x_1, \dots, x_n)$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası. G_1 – paylanma funksiyaların çoxluğu, G_2 – məhdud variasiyalı funksiyalar çoxluğu olsun. Əgər G_1 və G_2 ehtimallıqlar olarsa ki, $n \rightarrow \infty$, $x = x(n) \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{F_n \in G_1\} \rightarrow 0, \quad P\{(F_n - F)\sqrt{n} \in x G_2\} \rightarrow 0 \quad (*)$$

münasibətləri təmin olunsun, onda (*) ehtimallının asimptotik təsviri məsələləri empirik paylanma funksiyası üçün böyük yayınmalar haqqında məsələlər adlanır.

B. y. ehtimallının kobud (loqarifmik) asimptotikası araşdırıldıqda G , H məhdud variasiyalı funksiyaların Kulibak – Leybler informasiya məsafəsi –

$$K(G, H) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{dG}{dH}(t) dG(t)$$

və

$$R(G, H) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dG}{dH}(t) \right)^2 dH(t)$$

məsafəsi əsas rol oynayır; əgər $G(t)$ $H(t)$ -yə nəzərən mütləq kəsilməz funksiya deyildisə, onda bu məsafələr ∞ -a bərabər götürülür. Əgər var $G = 0$ olarsa, onda $F(G, H)$ məsafəsinə

$$R(G, H) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K(H + \Delta G, H)}{\Delta^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K(H, H + \Delta G)}{\Delta^2}$$

limiti kimi baxmaq olar.

Bəzi $\mathfrak{M}_1^F$ və $\mathfrak{M}_2^F$ siniflərindən olan G_1 və G_2 çoxluqları üçün aşağıdakı müddəalar ödənilir:

$$\ln P\{F_n \in G_1\} \sim -n \inf_{H \in G_1} K(H, F),$$

$$\ln P\{(F_n - F)\sqrt{n} \in x G_2\} \sim -x^2 \inf_{H \in G_2} R(H, F).$$

$\mathfrak{M}_1^F$ və $\mathfrak{M}_2^F$ sinifləri «zərif» sərhəddli çoxluqlardan ibarətdirlər.

Məs., əgər $F \in [0, 1]$ -də müntəzəm paylanmadırsa, onda $\mathfrak{M}_2^F$ sinfinə

$$\inf_{H \in G^0} K(H, F) = \inf_{H \in \bar{G}} K(H, F)$$

şərtini ödəyən çoxluqlar daxildir, burada G^0 və $\bar{G}$ – müntəzəm yığılma topologiyasında G -nin daxili və qapalıdır.

B. y. ehtimallının kobud asimptotikası haqqında analogi nəticələr ixtiyari fazadan qiymətlər alan $(x_1, \dots, x_n)$ seçimi üzrə qurulmuş empirik ölçülər üçün də doğrudur.

(*) məsələlərinin ikincisində $x < \sqrt{\ln n}$ halında B. y.-ların kobud asimptotikasının məlum olması empirik paylanma funksiyası üçün təkrar loqarifmik qanunlarının müxtəlif variantlarını almağa kifayət edir.

Empirik paylanma funksiyalarının B. y.-ı ehtimallarının dəqiq (loqarifmik olmayan) asimptotikası bəzi xüsusi G_i çoxluqları sinfi üçün məlumdur.

Bax, Böyük yayınmalar təsadüfi dolaşma üçün. Əd.: [1] Санов И. Н., «Матем. сб.», 1957, т. 42, № 1, с. 11–44; [2] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [3] Боровков А. А., Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26; [4] Groenboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H., «Ann. Probab.», 1979, в. 7, № 4, p. 553–86.

BÖYÜK YAYINMALAR təsadüfi dolaşma üçün «*большое отклонение для случайного блуждания*» **large deviations for a random walk** – *təsadüfi dolaşmanın* trayektoriyasının uzaq oblasta düşməsi ehtimalları kiçik olan yayınlardır. $S = (S_0, S_1, \dots)$ – təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası, Ω – V fəzasında $s = (s_0, s_1, \dots)$ ardıcılıqlarının çoxluğu olsun; $a \in \mathbb{R}$ olduqda, $as = (as_0, as_1, \dots)$, $a\Omega = \{as : s \in \Omega\}$ olduğu fərz olunur. Əgər Ω və $x \rightarrow \infty$ ardıcılığı üçün $x \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{S \in x\Omega\} \rightarrow 0 \quad (1)$$

münasibəti ödənilsə, onda bu ehtimalın asimptotik ifadəsinin təyin edilmə məsələsi böyük yayınlarmal haqqında məsələ adlanır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0 \quad (2)$$

cəmlərinin doğrurduğu təsadüfi dolaşmalar üçün B. y. müfəssəl öyrənilmişdir.

(2) təsadüfi dolaşmasının B. y. haqqında məsələlərinin geniş sinfi (1) ehtimalının araşdırılmasına gətirilir; bu halda $S = S_{(n)}$ (S_k , $k \leq n = n(x)$) trayektoriyasının başlanğıc hissəsidir, $\Omega = \Omega_n$ isə n uzunluqlu sonlu ardıcılıqlar fəzasında çoxluqdur.

(2) təsadüfi dolaşmaları üçün B. y. haqqında məsələlər arasında *sərhəd məsələləri* xüsusilə seçilir. Bu halda Ω çoxluğu iki sərhəd arasında olan trayektoriyalar (ardıcılıqlar) çoxluğu ilə əlaqədar olur. $g^+(t)$, $-[0, 1]$ parçasında verilmiş $g^-(0) < 0 < g^+(0)$, $g^-(t) < g^+(t)$ şərtlərini ödəyən hamar funksiyalar olsun. $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = 1$ olduqda (1) münasibəti ödənilsə, $s_n(k/n) = S_k/\sqrt{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$ qəbul edib, $s_n(t)$ kəsilməz təsadüfi sınıq xəttini almaq olar və $[0, 1]$ parçasının digər nöqtələrində $s_n(t)$ -ni, məs., xətti interpolasiya ilə də təyin etmək olar.

Əgər $\Omega = \{g(t) : g^-(t) \leq g(t) < g^+(t)\}$ zolağı $g(t) \equiv 0$ düzxətini özündə saxlamırsa, onda *invariantlıq prinsipinə* əsasən $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{s_n(\cdot) \in x\Omega\} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Əgər $g^\pm(t)$ əyrilərindən heç biri absis oxuna toxunmursa, onda $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{s_n(\cdot) \notin x\Omega\} \rightarrow 0.$$

Bu halda təsadüfi dolaşmaların sərhəd məsələlərinin B. y.-na baxılır. Her iki halda baxılan kiçik qiymətli ehtimalın asimptotik ifadəsinin tapılması təsadüfi dolaşmanın bir sərhəddən kənara çıxma ehtimalının hesablanmasına gətirilir. Məs.,

$$P\{s_n(\cdot) \in x\Omega\} = [P\{\max_{0 \leq t \leq 1} (s_n(t) - xg^+(t)) > 0\} + P\{\max_{0 \leq t \leq 1} (xg^-(t) - s_n(t)) > 0\}](1 + o(1)).$$

Nəticədə B. y. haqqında iki növ məsələ alınır.

1. Birinci sərhəd məsələsi, $\inf g(t) > 0$ halında

$$B_1 = \{\max_{t \in [0,1]} (s_n(t) - xg(t)) > 0\}$$

hadisəsinin ehtimalının asimptotikasının araşdırılması məsələsidir.

2. İkinci sərhəd məsələsi, $\inf g(t) < 0$ halında

$$B_2 = \{\max_{t \in [0,1]} (s_n(t) - xg(t)) < 0\}$$

hadisəsinin ehtimalının asimptotikasının araşdırılması məsələsidir.

Əgər $|\lambda| < \lambda_0$, $\lambda_0 > 0$ olduqda

$$\psi(\lambda) = X M e^{\lambda \cdot Y_1} < \infty, \quad (4)$$

Kramer şərti ödənilsə, onda 1 və 2 məsələləri nəticələrinin forması və həll metodlarına görə olduqca fərqli məsələlərdir. Nəticələri ifadə etmək məqsədilə, Kramer şərti ödənilmədiyi halda, bütün B. y. haqqında məsələlərdə təyinedici rol oynayan

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} (\lambda \alpha - \ln \psi(\lambda))$$

yayıma funksiyası daxil etmək zəruridir.

Birinci sərhəd məsələsinin həllinin təsvirində mühüm element – $t \Lambda(\alpha_t(t)/t) = \Lambda(\tau)$ tənliyinin həlləri kimi təyin olunan $\alpha_t(t)$ sədd xətlərinin birparametrlili ailesidir. $\alpha_t(t)$ funksiyaları t üzrə artan və qabarıq, τ -ya görə artandılar, məs., $(0, 1)$ parametrlili normal paylanma üçün

$$\Lambda(\alpha) = \alpha^2/2 \quad \text{və} \quad \alpha_t(t) = \tau \sqrt{t}.$$

Əgər τ kiçik ədəd olarsa, onda ixtiyari ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti üçün sədd xətləri $\tau \sqrt{t}$ -yə yaxın olur.

τ_g τ -nın ən kiçik qiyməti olsun ki, $\alpha_t(t)$ əyrisi $xg(t)/\sqrt{n}$ əyrisinə ilk dəfə τ_g -də toxunsun. Onda $g(t)$ funksiyasının hamarlığının ödənilməsi üçün bezi fərziyyələrlə

$$P(B_1) \sim c n^\beta e^{-n \Lambda(\tau_g)} \quad (5)$$

münasibəti ödənilir, bu halda β $\alpha_{\tau_g}(t)$ -nin $xg(t)/\sqrt{n}$ əyrisinə necə toxunmasından asılıdır. Məs., əgər $g(t)$ və $\alpha_{\tau_g}(t)$ toxunma nöqtəsi τ_g ətrafında kifayət qədər hamar funksiyalar, q isə τ_g nöqtəsində $g(t)$ və $\alpha_{\tau_g}(t)$ funksiyalarının üst-üstə düşən törəmələrinin sayı olarsa, onda $\beta = 1/2 - 1/(q+1)$. Əgər $g(t)$ və $\alpha_{\tau_g}(t)$ bütün bir intervalda üst-üstə düşərlərsə ($q = \infty$), onda $\beta = 1/2$ olur.

Λ yayıma funksiyası (t, g) müstəvisində özünəməxsus metrika təyin edir. Bu müstəvidə koordinat başlanğıcından çıxan düzxətli yollar ən qısa yollar, $\alpha_t(t)$ funksiyalarının qrafikləri isə τ qədər eyni məsafədə olan nöqtələrin xətləri olur. (5) ehtimalının qiymətinə əsas təsir edən, « τ_0 uzunluğu», demək olar ki, düzxətli olan trayektoriyalar dəstəsidir; bu trayektoriyalar koordinat başlanğıcını $(t_g, g(t_g))$ nöqtəsi ilə birləşdirir.

«Bərkidilmiş uclu» birinci sərhəd məsələsində, yeni $P\{S_n = \rho\} > 0$ olduğu halda $P\{B_1, S_n = \rho\}$ tipli ehtimalları tədqiq edərkən, analogi vəziyyət müşahidə olunur (əgər

$P\{S_n = \rho\} = 0$ olarsa, onda $P\{B_1, S_n \in \Delta\}$ ehtimalına baxılır, burada Δ – kiçik intervaldır. Sadəlik üçün $\rho = 0$ olsun. Bu halda bu məsələdə sədd xətləri

$$\Lambda(t, b) = \sup_{0 < \tau < 1} \Lambda(t, \tau) \equiv \Lambda_1(\tau)$$

tənziminin həlli kimi təyin olunur, burada

$$\Lambda(t, b) = t\Lambda(b/t) + (1-t)\Lambda(-b/(1-t))$$

və bu sədd xətləri kiçik τ -lar üçün normal paylanmaya uyğun sədd xətləri – $b_\tau(t) = \tau\sqrt{t(1-t)}$ xətlərinə oxşar olur. O biri hallar keyfiyyətə (5) halında olduğu kimi qalır, lakin, bu şərtlə ki, (5)-in sağ tərəfində n -dən asılı vuruq $n^{\beta_1} e^{-n\Lambda_1 \tau_s}$ ilə əvəz olunsun, burada $\beta_1 = -1/(q+1)$ (daha ətraflı bax, [1]-ə).

Bu nəticələr riyazi statistikada mühüm əhəmiyyətə malik olub, Kolmoqorov – Smirnov tipli asimptotik optimal kriteriylərin qurulmasına imkan verir.

İkinci sərhəd məsələsində $P(B_2)$ ehtimalının qiymətinə əsas təsir edən trayektoriyalar dəstəsi daha mürəkkəb quruluşa malikdir.

$g_m = \min g(t) < 0$, $h(t)$, – $(0, 0)$ və $(1, g_m)$ nöqtələri arasında «tel kimi çəkilmiş» və $g \geq g(t)$ şərtini ödəyən (t, g) nöqtələr çoxluğu A -nı aşağıdan qurşayan əyri olsun.

Onda

$$\ln P(B_2) \sim -n \int_0^1 \Lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}} h'(t)\right) dt$$

münasibəti doğrudur və ən böyük ehtimallı trayektoriyalar dəstəsi A çoxluğuna toxunmadan $h(t)$ əyrisi ətrafında toplanır. $P(B_2)$ ehtimalı üçün dəqiq asimptotik ifadə daha mürəkkəbdir (bax, [2]).

Əgər ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri (4) Kramer şərtini ödəmirsə, $P\{\xi_1 > x\}$ və $P\{\xi_1 < -x\}$ ehtimalları isə $x \rightarrow \infty$ olduqda kifayət dərəcədə düzgün olaraq (məs., üstlü) azalırsa, onda sərhəd məsələlərində B. y. ehtimalları ifadə edən qanunlar başqa formada olur. Burada B. y. ehtimalları ilə bağlı həndəsə tamamilə başqa olacaqdır. Bu halda $(0, 0)$ və (t, a) nöqtələrini birləşdirən $s_n(u)$ trayektoriyalarının ən qısa (və ya ən ehtimalı) yolları düzxətlər deyil, $u \leq v$ olduqda $d(u) = 0$, $v < u \leq t$ olduqda $d(u) = a$ şərtləri ilə təyin olunan pillevari $d(u)$ xətləri olacaqdır. Bu yaxşı məlum olan bir fakt – qüvvət üstlü halda böyük yayınmalar ehtimallarına əsas təsir edən trayektoriyaların yalnız bir əşması (və ya ən məsi) olan trayektoriyalar olması faktına əsaslanır. Birinci sərhəd məsələsində $x \gg \sqrt{\ln n}$ olduqda $P(B_1)$ ehtimalı üçün asimptotik ifadə

$$P(B_1) \sim n \int_0^1 P\{\xi_1 > x\sqrt{n} g_1(t)\} dt, \quad g_1(t) = \min_{u \geq t} g(u) \quad (6)$$

münasibətlərlə verilir.

İkinci sərhəd məsələsində isə

$$P(B_2) \sim n\gamma P\{\xi_1 < x\sqrt{n} g_m\} \quad (7)$$

münasibəti $P(B_2)$ ehtimalının asimptotik ifadəsidir, burada

$\gamma = \min\{t: g(t) g_m\} > 0$. Əgər $x \leq c\sqrt{\ln n}$ olarsa, onda (6) və (7) düsturlarında «Kramer» halında olduğu kimi əlavə hədlər olur (bax, [3]).

$g(t)$ düzxətli sərhəd olduğu xüsusi hal daha yaxşı araşdırılmışdır. Bu hal, mahiyyət etibarilə, $\bar{S}_n = \max_{k \leq n} S_k$ (bax, [4]) təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması haqqında məsələyə ekvivalentdir. Bu halda, adətən, $\bar{S}_n$ -in digər sərhəd funksionalları ilə birgə paylanması öyrənilir.

(3) ehtimalının asimptotikasını $\Omega \subset C[0, 1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasının $\mathfrak{B}$ Borel σ -cəbri ixtiyari çoxluğu olduğu halda da öyrənmək mümkündür.

Fərz olunur ki, $A \in \mathfrak{B}$ çoxluğu $g(t) = 0$ nöqtəsinin ətrafını özündə saxlamır. Onda $x \rightarrow \infty$ olduqda $P\{s_n \in xA\} \rightarrow 0$. Və fərz olunur ki, yuxarıdakı xassəli A çoxluqlarının $\mathfrak{A}$ sinfi verilmişdir. $z = z(n) \rightarrow \infty$ isə hər hansı artan ardıcılıqdır. w – standart Viner prosesinin paylanması olsun; əgər $y = y(n) \rightarrow \infty$, $y = o(z)$ olduqda

$$P\{s_n \in yA\} \sim w(yA), \quad A \subset \mathfrak{A}$$

olarsa, B. y. oblastında $(\mathfrak{A}, z)$ -invariantlıq prinsipi yerinə yetir, deyilir. Fərz olunur ki, $\mathfrak{A}$ və z aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$1) y \rightarrow \infty, A \in \mathfrak{A} \text{ üçün } \ln w(yA) \geq -cy^2,$$

2) $y = o(z)$ üçün $w([\partial(yA)]^{1/z}) = o(w(yA))$, burada ∂B , – B çoxluğunun sərhədi, $(B)^\varepsilon$ – bu çoxluğun ε -ətrafıdır.

Onda əgər $M|\xi_1|^r < \infty$, $r < 2$ olarsa, onda $(\mathfrak{A}, \sqrt{\ln n})$ -invariantlıq prinsipi doğrudur. Əgər (4) şərti ödənilsə, $(\mathfrak{A}, n^{1/6})$ – invariantlıq prinsipi doğrudur. Məlumdur ki, 1) şərti heç olmasa bir daxili nöqtəsi olan bütün A -lar üçün ödənilir, 2) şərti də çoxluqların geniş sinfi üçün ödənilir (hər halda sərhəd məsələlərində baxılan A zolaqları üçün).

$A \in \mathfrak{A}$ və $y = o(z)$ olduqda, əgər

$$\ln P\{s_n \in yA\} \sim \ln w(yA) \quad (8)$$

münasibəti ödənilsə, $(\mathfrak{A}, z)$ -kobud invariantlıq prinsipi yerinə yetir, deyilir. $\mathfrak{A}$ silindrik çoxluqları özündə saxladığıda və $\sqrt{\ln \ln n} = o(z)$ olduqda, təkrar loqarifm qanunu $(\mathfrak{A}, z)$ – kobud invariantlıq prinsipinin nəticəsidir.

Fərz olunur ki, $\mathfrak{A}$ 1) şərtini və

$$2') \ln w([\partial(yA)]^\delta) \leq \ln w(yA)(1+o(1))$$

şərtini ixtiyari $\delta = o(y)$ ardıcılığı üçün ödəyir. Onda əgər (4) şərti ödənilsə, $(\mathfrak{A}, \sqrt{n})$ – kobud invariantlıq prinsipi doğrudur (bax, [5]).

(8)-in sağ tərəfini aşkar şəkildə tapmaq olur. Doğrudan da,

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in xA\} \sim \frac{y^2}{2\sigma^2} \inf \int_0^1 (g'(t))^2 dt, \quad g \in A \cap C_1, \quad (9)$$

burada $C_1, - [0, 1]$ -də mütləq kesilməz funksiyalar çoxluğudur.

(8) və (9) münasibətləri $y \sim c\sqrt{n}$ üçün, ξ_j normal paylanmaya malik olmadıqda, doğru olmaya bilər. Bu halda da $\ln \mathbf{P}\{s_n \in xA\}$ -nin asimptotikasını aşkar şəkildə tapmaq mümkündür. Həqiqətən də, A çoxluqlarının geniş sinfi və $x \rightarrow \infty$ üçün (bax, [6]).

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in xA\} \sim -n \inf \int_0^1 \Lambda\left(\frac{x}{n} g'(t)\right) dt, \quad g \in A \cap C_1.$$

Əgər Kramer şərti ödənilmirsə və $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}, \mathbf{P}\{\xi_1 < -x\}$ düzgün (üstlü) surətdə azalırlarsa, onda A çoxluqlarının olduqca geniş sinfi üçün $\mathbf{P}\{s_n \in xA\}$ ehtimalının özünün (onun loqarifminin deyil) asimptotikasını aşkar olaraq tapmaq olur; yeni

$$\mathbf{P}\{s_n \in xA\} = w(xA)(1 + o(1)) + (c_1(A) + o(1)) \times \\ \times n\mathbf{P}\{\xi_1 > x\} + (c_2(A) + o(1)) n\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\sqrt{n}\};$$

burada $c_1(A), c_2(A)$ n -dən asılı deyildirlər [(7) və (8)-lə müq. et] və burada axırncı iki toplanan $x/\sqrt{\ln n} \rightarrow \infty$ olduqda əsas toplananlar hesab olunur (bax, [3]).

Yuxanda ifadə olunmuş müddəaların çoxu (2)-dəki toplananların eyni ehtimallı olması haqqında fərziyyəsi də doğrudur. Bunlar çoxölçülü fəzalarda (hətta sonsuzölçülü Banax fəzalarında) təsadüfi dolaşmalar üçün də doğru olur. ξ_k kəmiyyətlərinin asılı olmamalı şərtini də zəiflətmək mümkündür (bax, [7]).

Əd.: [1] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 2, с. 253–89; № 4, с. 750–67; [2] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–95; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [4] Боровков А. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [5] Могульский А. А., в кн.: Предельные теоремы для сумм случайных величин, Новосибирск, 1984, с. 93–124; [6] Пинелис И. Ф., «Теория вероят. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 73–87; [7] Вентцель А. Д., «Теория вероят. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 235–52; в. 3, с. 512–26.

БÖYÜK YAYINMALAR təsadüfi proseslər üçün «**большее отклонение для случайного процесса**»; **large deviations for a random process**» – təsadüfi prosesin trayektoriyasının uzaq oblasta (uyğun metrikada) düşməsidir. $\zeta(t)$ – trayektoriyaları hər hansı $\mathcal{X}$ funksional fəzasından olan təsadüfi proses, $\mathbf{P}$, – $\mathfrak{P}$ σ – cəbrli $\mathcal{X}$ fəzasında bu prosesin uyğun paylanması olsun. $\mathcal{X}$ fəzası kimi, adətən, σ – cəbrləri silindrik çoxluqların doğruduğu σ – cəbrlər olan $C(0, 1)$ və $D(0, 1)$ fəzalarına baxılır. $x \rightarrow \infty$ olduqda A çoxluğu $f=0$ nöqtəsinin ətrafını özündə (uyğun metrikada) saxlamadığı halda $\mathbf{P}(xA)$ asimptotikasının axtarılması məsələsi $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

böyük yayınmalar haqqında məsələ adlandırılır (burada $xA \in \mathfrak{P}$, – xf funksiyalarının çoxluğudur $f \in A$). Nadir hallar istisna olunmaqla, $\mathbf{P}(A)$ -nin aşkar ifadəsini, hətta ən sadə A çoxluqları və ən sadə ζ prosesləri üçün tapmaq mümkün olmur. Lakin tam bir sıra hallar üçün, $x \rightarrow \infty$ olduqda, $\mathbf{P}(xA)$ -nin asimptotikasını öyrənmək mümkün olur (eyni mülahizəni $x \rightarrow 0$, A isə məhdud olduğu halda da söyləmək olar).

B. y. haqqında məsələlərin həlli istiqamətində proqres, əsasən, ζ prosesinin təbiəti və A çoxluğu ilə əlaqədar fərziyələrin xarakteri ilə bağlıdır. Asılı olmayan artımlı proseslər, Markov və Qauss prosesləri və Markov zəncirində verilmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl cəmlərinin doğruduğu proseslər üçün bu sahədə ən ciddi irəliləyişlər əldə etmək mümkündür. Əgər «kobud» asimptotika məsələsinə [yeni $x \rightarrow \infty$ olduqda $\ln \mathbf{P}(xA)$ -nin asimptotik yığılması] baxılırsa,

A çoxluğu haqqında fərziyələr olduqca geniş olur, əgər məsələ $\mathbf{P}(xA)$ -nin özünün asimptotikası haqqındadırsa, onda xüsusi fərziyələr irəli sürülür. Sonuncu halda, əsas etibarilə, əyri xətlə zolaqlarla:

$$A = A(g_-, g_+) = \{g: g_-(t) < g(t) < g_+(t); 0 \leq t \leq 1\}$$

ilə kifayətlənilir, burada $g_-(t), g_+(t)$ – verilmiş funksiyalardır. (bu cür nəticələrlə, məs., [1]–[3]-də tanış olmaq olar.)

«Kobud» asimptotika halı. Əgər $\zeta(t) = w(t)$ – standart Viner prosesi, W , – $C(0, 1)$ -də bu prosese uyğun paylanmadırsa, onda $A \subseteq C(0, 1)$ çoxluqlarının geniş sinfi üçün

$$\ln W(xA) \sim -x^2 \Lambda(A)$$

olur, burada

$$\Lambda(A) = \inf_{f \in A \cap C^1} \Lambda(f),$$

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

($\Lambda(f)$ – Viner prosesinin yayınma funksiyasıdır), C^1 – mütləq kesilməz $f = f(t)$ funksiyaları sinfi, $f(0) = 0$. A çoxluğu $\Lambda(A_0) = \Lambda(\bar{A})$ şərtini ödəməlidir, burada A_0 və $\bar{A}$ – uyğun olaraq, A çoxluğunun müntəzəm norma topologiyasında daxili və qapayıcıdır.

İxtiyari kesilməz Qauss proseslərinin B. y. haqqında «kobud» teoremlər analoji olur. $\mathcal{X}^*$, – $\mathcal{X} = C(0, 1)$ fəzasında bütün kesilməz xətti $\theta = \theta(f)$ funksionallarının qoşma fəzası olsun. $\mathcal{X}$ -də $\zeta(t)$ prosesi üçün yayınma funksiyası

$$\Lambda(f) = \sup_{\theta \in \mathcal{X}^*} \{ \theta(f) - \ln \mathbf{M} e^{\theta(\zeta)} \}, \quad f \in \mathcal{X}$$

bərabərliylə təyin olunur. Onda Borel çoxluqları $A \in \mathfrak{P}$ üçün

$$\Lambda(A_0) = \Lambda(\bar{A}) \quad (*)$$

şərti ödənilirdi halda

$$\ln P(xA) \sim -x^2 \Lambda(A)$$

hökümü doğrudur (bax, [4], [5]), burada $\Lambda(A) = \inf_{f \in A} \Lambda(f)$.

Markov prosesleri və $s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq nt} X_i$ prosesleri ardıcılıqları üçün (bu proseslər asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu təsadüfi proseslərdir; $MX_i = 0$) nəticələr bir qədər çətin ifadə olunur [burada nəticə x/n nisbətindən də asılı olur; $x = x(n)$, müəyyən şərtlərlə $P\{s_n \in xA\}$ ehtimalı $n \rightarrow \infty$ olduqda özünü $W(xA)$ kimi apanır] (bax, [1]).

$s_n(t)$ prosesleri ardıcılıqları üçün (və bir sıra digər hallarda) B. y. haqqında məsələyə $P\{\zeta^{(n)} \in A\}$ ehtimalının asimptotika məsələsi kimi yanaşmaq olar, burada $\zeta^{(n)} (= x^{-1}s_n(t))$, $-f(t) = 0$ funksiyasına ehtimalla görə yığılan proseslər ardıcılıqlıdır, A isə qeyd olunmuş çoxluqdur. Məsələnin belə qoyuluşu daha ümumdür, bir sıra hallarda isə daha da məqsəduşğundur.

İndi isə, fərz olunur ki, $\zeta^{(n)}(t)$ – trayektoriyaları $\mathcal{X} = D(0,1)$ fəzasından olan Markov təsadüfi proseslərinin ardıcılıqlıdır, $P^{(n)}$ $\mathcal{X}$ -də ($\mathfrak{B}$ silindrik çoxluqların və ya ρ Skoroxod metrikasına nəzərən Borel çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbrlə) verilmiş müvafiq paylanmadır.

$\zeta^{(n)}$ Markov proseslərinin B. y. ehtimallarının kobud asimptotikası, təsir funksionalı adlanan $k(n)S(f)$ həssasi ilə təsvir olunur ki, bu funksional $\zeta^{(n)}$ -in f funksiyasının ətrafına düşmə çətinliyini xarakterizə edir və yayınmalar funksiyasının analoqudur:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} k^{-1}(n) \ln P\{\rho(\zeta^{(n)}, f) < \delta\} = -S(f).$$

Daha dəqiq, müsbət $k(n)$ ardıcılığı ∞ -a yaxınlaşır, $S(f)$ funksionalı $[0, \infty)$ qiymətini alır. $S(A) = \inf_{f \in A} S(f)$ olsun.

Əgər:

0) ixtiyari $s \geq 0$ üçün $\Phi(s) = \{f : S(f) \leq s\}$ kompakt çoxluq olarsa;

1) ixtiyari açıq $A \subseteq \mathcal{X}$ çoxluğu üçün

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} k^{-1}(n) \ln P\{\zeta^{(n)} \in A\} \geq -S(A)$$

berəbersizliyi ödənilərsə;

2) ixtiyari qapalı $A \subseteq \mathcal{X}$ çoxluğu üçün

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} k^{-1}(n) \ln P\{\zeta^{(n)} \in A\} \leq -S(A)$$

olarsa, $k(n)S(f)$, – $\zeta^{(n)}$ prosesi üçün təsir funksionalıdır, deyilir (bax, [2]). Əgər $S(A_0) = S(\bar{A})$ olarsa [(*) ilə müqayisə et], $A \subseteq \mathcal{X}$ çoxluğu S funksionalına nəzərən rəqulyar çoxluq adlanır.

1), 2) şərtlərini bir şərt kimi aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

1) + 2)) ixtiyari rəqulyar $A \subseteq \mathcal{X}$ çoxluğu üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{-1}(n) \ln P\{\zeta^{(n)} \in A\} = -S(A)$$

ödənilərsə.

Proseslərin B. y. haqqında kobud teoremlər alınmışdır, məs., [2], [6] – [9]-da.

B. y.-ın kobud asimptotikasının daha bir təsvir forması integral formasıdır:

3) əgər $F(f)$ $\mathcal{X}$ -də kəsilməz məhdud funksionaldırsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{-1}(n) \ln M e^{k(n)F(\zeta^{(n)})} = \sup_{f \in \mathcal{X}} \{F(f) - S(f)\}$$

münasibəti doğrudur (bax, [10], [11]).

Diskret zamanlı Markov prosesi üçün təsir funksionalı aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [2]).

$\zeta^{(n)}(t)$ diskret t zamanlı ele Markov prosesi olsun ki, onun aldığı qiymətlər $\tau = n^{-1}$ -ə bölünən olsun. $z \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^1$ üçün $\zeta^{(n)}$ prosesinin x nöqtəsində bir addıma artımının paylanmasının Laplas çevirməsinin loqarifmi

$$G(t; x, z) = \ln M \left(e^{\tau z(\zeta^{(n)}(t+\tau) - x)} / \zeta^{(n)}(t) = x \right)$$

olsun.

$$H(t; x, \alpha) = \sup_{z \in \mathbb{R}^1} \{ \alpha z - G(t; x, z) \}$$

isə $G(t; x, z)$ funksiyasının Lejandr çevirməsi olsun. Onda geniş fərziyyələrlə $\zeta^{(n)}$ prosesinin təsir funksionalı

$$n S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} H(k/n, f(k/n), f'(k/n))$$

düsturu ilə ifadə olunur. Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinin geniş sinfi üçün təsir funksionalı analoji ifadə edilir (bax, [2]).

$x \rightarrow \infty$ olduqda $P(xA)$ -nın dəqiq asimptotikasını hesablamaq üçün ən çətin texniki vasitələr tələb olunur: bu nəticələr bu halda çətin ifadələrlə alınır (bax, [12], [13]).

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [2] В е н т ц е л ь А. Д., «Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов», М., 1986; [3] Случайные процессы. Выборочные функции и пресечения. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978; [4] Б о р о в к о в А. А., М о г у л ь с к и й А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; [5] B a h a d u r R. R., Z a b e l l S. L., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 4, p. 587–621; [6] V a g a d h a n S. R. S., «Com. Pure Appl. Math.», 1966, v. 19, № 3, p. 261–286; [7] Б о р о в к о в А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [8] М о г у л ь с к и й А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 309–23; [9] В е н т ц е л ь А. Д., Ф р е й д л и н М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [10] S c h i l d e r M., «TAMS», 1966, v. 125, № 1, p. 63–85; [11] Д у б о р о в с к и й В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 215; [12] Б о р о в к о в А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 2, с. 253–89; № 4, с. 750–67; [13] М о г у л ь с к и й А. А., «Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд.», 1984, т. 3, с. 93–124.

BÖYÜK YAYINMALAR EHTİMALLARI « БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ; large deviations probabilities » – $\mathbf{P}\{S_n - a_n > b_n\}$, $\mathbf{P}\{S_n - a_n < -b_n\}$,

$\mathbf{P}\{|S_n - a_n| > b_n\}$ tipli ehtimallardır, burada $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $\{\xi_j\}$ – təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $\{b_n\}$ və $\{a_n\}$, $-b_n > 0$ və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|S_n - a_n| b_n^{-1} > \varepsilon\} = 0$ (ehtimala görə yığılma) şərtlərini ödəyən ardıcılıqlar olsun.

Əgər ξ_i , $i = 1, 2, \dots$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri sıfır, dispersiyaları isə sabit σ^2 -na bərabərdirsə, onda $a_n = 0$ və $b_n = x_n \sigma \sqrt{n}$ götürmək olar, burada $n \rightarrow \infty$ olduqda $x_n \rightarrow \infty$ olur. Bu ehtimalların hesablanması üçün Kramer (bax, [2]) və Linnik (bax, [3]) teoremlərinin və bunlardan da güclü (bax, [2], [6], [9]) teoremlərin böyük əhəmiyyəti vardır.

[7], [9]-da B. y. e.-nin araşdırılması üçün *semi-invariantlar metodu* təklif edilmişdir; bu metod ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər (o cümlədən, asılı) cəmi əvəzinə bəzi funksionallara baxmağa imkan verir. Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı müddəadan ibarətdir: $\Delta > 0$ parametrindən asılı ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası vahid olduqda, bu təsadüfi kəmiyyətin k tərtib *semi-invariantı* s_k

$$|s_k| \leq (k!)^{1/\gamma} \Delta^{2-k}, \quad k=3, 4, \dots, \gamma \geq 0 \quad (*)$$

şərtini ödəyərsə, onda $0 \leq x < \Delta_1$ intervalında

$$1 - F_\xi(x) = (1 - \Phi(x)) \exp\{L(x)\} \times \\ \times \{1 + \theta(x+1) ((1 - x/\Delta_1) \Delta_1)^{-1}\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\Delta_1 = (1/6)(\sqrt{2}\Delta/6)^{1/(1+2\gamma)}$, $L(x)$, $-\gamma = 0$ olduqda Kramer sırasının analoqu, $\gamma > 0$ olduqda bu sıranın parçasıdır və bu sıranın əmsalları s_k *semi-invariantları* ilə ifadə olunur, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, θ – məhdud kəmiyyətdir (bax, [8], [9]).

B. y. e.-nin təminatlı qiymətlərinin alınması üçün Çebişev bərabərsizliyi tipli bərabərsizliklərdən istifadə olunur və bu qiymətlər B. y. e. üçün *eksponensial qiymətlər* adlanır. Məs., ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün (*) şərti ödənilsə, onda $x > 0$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün

$$\mathbf{P}\{\xi \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \frac{(x\Delta)^\beta}{2x^2 + (x\Delta)^\beta}\right\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\beta = (1 + \gamma)^{-1}$.

Böyük yayınmalar problematikasındakı böyük yayınmaların loqarifmik ehtimallarının asimptotik tədqiqatı mühüm yer tutur (kəbud teoremlər adlanır). $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ doğuran funksiyalarının *semi-invariantları* $\varphi_j(\lambda) = \ln \mathbf{M} \exp\{\lambda \xi_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ olan təsadüfi

kəmiyyətlər ardıcılığı olsun, belə ki, $\lambda \in [c, d]$, $0 \leq c < d$ üçün $n^{-1} \varphi_n(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda)$; $D = \{\lambda \in (c, d) : \varphi' \text{ vardır və}$

λ nöqtəsində kəsilməzdir $\}$ və $A = \{a : \varphi'(\lambda) = a, \lambda \in D\}$ olsun. Bu halda aşağıdakı müddəə doğrudur: əgər $\varphi(\lambda) [c, d]$ intervalında ciddi qabarıq funksiyadirsə, onda

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\{\xi_n \geq na\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \varphi^*(a), \quad a \in A,$$

münasibəti doğrudur, burada $\varphi^*(a) = \inf\{-\lambda a + \varphi(\lambda) : \lambda \in [c, d]\}$ yayınma funksiyasıdır (bax, [9]).

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] П р о х о р о в Ю. В., в сб.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972, с. 5–24; [5] Ю р и н с к и й В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 152–54; [6] Н а г а е в С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 231–54; [7] S t a t u l e v i c i u s V., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1966, Bd 6, № 2, S. 133–44; [8] Р у д з к и с Р., С а у л я н с к и й Л., С т а т у л я в и ч у с В., «Лит. матем. сб.», 1978, т. 18, № 2, с. 99–116; [9] С а у л я н с к и й Л., С т а т у л я в и ч у с В., Предельные теоремы о больших отклонениях, Вильнюс, 1989; [10] P l a c h k y D., S t e i n b a c h J., «Period. Math. Hungar.», 1975, v. 6, p. 343–45.

BRAUN EKSKURSIYASI « брауновская экскурсия; Brownian excursion », Braun hərəkəti üçün ekskursiya –

$$w_e(t) = (\tau_2 - \tau_1)^{1/2} |w((1-t)\tau_1 + t\tau_2)|, \quad 0 \leq t \leq 1$$

münasibətilə Viner prosesi üzrə (*Braun hərəkəti prosesi*) təyin olunan kəsilməz $w_e(t)$, $0 \leq t \leq 1$ təsadüfi prosesidir, burada $\tau_1 = \sup\{t \leq 1 : w(t) = 0\}$ və $\tau_2 = \inf\{t \geq 1 : w(t) = 0\}$ – uyğun olaraq, $t=1$ anından əvvəlki anda $w(t)$ -nin sonuncu sıfır, $w(t)$ -nin bu zaman anından sonrakı birinci sıfırdır. B. e. qeyri – bircins Markov diffuzion prosesidir; bu prosesin birölçülü ehtimal paylanması və keçid ehtimallarının sıxlıq funksiyaları [1]-də verilmişdir (fəsil 2). B. e. ilə Braun körpüsü arasında əlaqələr və müəyyən təsadüfi proseslər ardıcılıqlarının B. e.-na yığılması teoremləri [2] – [7]-də verilmişdir.

Əd.: [1] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] D u r r e t t R. T., I g l e h a r t D. L., M i l l e r D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 117–29; [3] D u r r e t t R. T., I g l e h a r t D. L., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 130–35; [4] V e r v a a t W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 143–49; [5] G e t o o r R. K., S h a r p e M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H.1, S. 83–106; [6] K n i g h t F. B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1980, v. 258, № 1, p. 77–86; [7] I m h o f J. P., «Stud. sci. Math. Hung.», 1985, v. 20, № 1–4, p. 1–10.

BRAUN HƏRƏKƏTİ çoxparametrlili « брауновское движение многопараметрическое; multiparametric Brownian motion » – bax, *Lévy meydanı*.

BRAUN HƏRƏKƏTİ; ekskursiya « брауновское движение экскурсия; Brownian excursion » – bax, *Braun ekskursiyası*.

BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « брауновского движения процесс; Brownian motion process » – maye içərisində çəkili hissəciklərin (həddindən kiçik) kəsilməz xəotik hərəkətidir. 1827-də R. Braun (R. Brown) tərəfindən kəşf edilmişdir. Yalnız mikroskopla müşahidə olunan çəkili hissəciklər bir-birindən asılı olmayaraq, müəkkəb trayektoriyalarla hərəkət edir; hər bir hissəcik mayenin molekulları ilə təsadüfi toqquşmaya məruz qalır; molekulların hissəciyə hər bir təkanı nəzərə alınmayacaq dərəcədə təsir göstərməsinə baxmayaraq, onların birlikdə etdiyi təkanlar hissəciyin müşahidə olunan hərəkətinə səbəb olur.

Braun hərəkəti nəzəriyyəsi XX əsrin əvvəllərində L. Başelye (L. Bachelier), A. Eynşteyn (A. Einstein) və M. Smoluxovski (M. Smoluchowski) tərəfindən təklif olunmuşdur. ξ_t – Braun hissəciyinin t anında koordinatlarından biri olsun; müəyyənlik üçün $\xi_0 = 0$ fərz olunur. Hissəciyi əhatə edən molekulların hərəkəti yalnız statistik olaraq təsvir oluna bilindiyindən ξ_t təsadüfi kəmiyyətdir. Hissəciyin $[0, t]$ müddəti ərzində yerdeyişməsi demək olar ki, bir-birindən asılı olmayan, lakin olduqca kiçik çoxlu sayda təsirlərin cəminin ümumi nəticəsidir. Buna görə də, *mərkəzi limit teoreminə* əsasən, ξ_t -nin normal qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyət olduğu postulatı tamamilə doğruxa oxşardır.

Əgər mayenin özlüklüyü kifayət qədər çox olarsa, hissəciyin hərəkət sürəti olduqca azalır və onda hissəciyin müşahidə olunan yerdeyişmələrinin bir-birilə kəsişməyən zaman intervalllarında bir-birindən asılı olmadığını hesab etmək olar. Simmetriya nöqtəyi – nəzərindən $M \xi_t = 0$ götürülür və əgər fiziki şərtlər dəyişməzsə,

onda $M(\xi_{t+s} - \xi_t)^2 = f(s)$ t -dən asılı olmur. Bu sonuncu razılaşma, qeyd olunan asılı olmamazlıqla birlikdə dispersiya üçün $f(s) = cs$ münasibətilə ifadə olunur. c sabiti fiziki nəzəriyyə üçün əhəmiyyət kəsb edir. A. Eynşteyn c sistemin ölçmə aparılması mümkün olan bəzi parametrləri və bəzi fiziki sabitləri arasında əlaqə olduğunu sübut etmişdir. Məs., sferik hissəciklər üçün

$$c = kT/3\pi\eta a \quad (*)$$

burada a – hissəciyin radiusu, k – Boltzman sabiti, T – mütləq temperatur, η – mayenin dinamik özlülük ədədidir.

N. Viner (N. Wiener, 1929) B. h. p.-nin ehtimal modeli olaraq, aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan $\{\xi(\omega, t); t \geq 0\}$ təsadüfi prosesini $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -də təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər ailəsini qurmuşdur:

- 1) sanki yəqin $\xi(\omega, 0) = 0$ olur;
- 2) əgər $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ olarsa, $\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ artımları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir;
- 3) ixtiyari $s, t \geq 0$ qiymətlərində $\xi_{t+s} - \xi_t$ artımı riyazi gözləməsi 0, dispersiyası s -ə bərabər olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir;
- 4) sanki bütün qeyd olunmuş ω -lar ($\omega \in \Omega$) üçün $\xi(\omega, t)$ t -yə görə kəsilməz funksiyadır.

Bu proses standart Braun hərəkəti prosesi və ya standart Viner prosesi adlanır və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm yer tutur.

Birölçülü Braun hərəkəti prosesi (Viner prosesi) $t \geq 0$ qiymətlərində təyin olunmuş $\xi_t = \xi(\omega, t)$ təsadüfi prosesi-

dir ki, bu prosesin sonluölçülü paylanmaları $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ olduqda, $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyaları ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left[2\pi(t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\} \right]$$

$x_0 = 0$, $x_1, \dots, x_n$ – həqiqi dəyişənlərdir.

$\xi(\omega, t)$ prosesi diffuziya prosesləri üçün də ehtimal modeli kimi götürülür.

Əd.: [1] Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение, пер. с нем., М. – Л., 1936; [2] Ламперти Дж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973; [3] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [4] Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. 2-ое, С. Корольук, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, М., 1985.

BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ **çoxölçülü « брауновское движение процесс многомерный; multivariate Brownian motion process »** – bax, *Çoxölçülü Braun hərəkəti prosesi*.

BRAUN KÖRPÜSÜ « брауновский мост; Brownian bridge » – bax, *Viner körpüsü*.

BRAUN MEANDRI « брауновский меандр; Brownian meander » –

$$w_m(t) = (1 - \tau_1)^{1/2} |w(\tau_1 + (1 - \tau_1)t)|, \quad 0 \leq t \leq 1$$

münasibətilə Viner prosesi üzrə (*Braun hərəkəti prosesi* üzrə) təyin olunan kəsilməz $w_m(t)$, $0 \leq t \leq 1$ təsadüfi prosesidir. $\tau_1 = \sup\{t \leq 1: w(t) = 0\}$ $t = 1$ anından əvvəlki anda $w(t)$ -nin sonuncu dəfə sıfıra bərabər olma anıdır. B. m. *Braun ekskursiyasına* yaxın qeyri – bircins Markov diffuzion prosesidir.

Əd.: [1] Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 4, p. 117–29; [2] Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 130–35.

BRAUN MƏLƏFƏSİ « брауновская простыня; brownian sheet » – bax, *Viner meydanı*.

BRAUN PROQNOZLAMA METODU « Брауна метод прогнозирования; Brown's method of forecasting / prediction » – *təsadüfi proseslərin eksponensial hamarlanmaya əsaslanan adaptiv proqnozlanması üçün sadə metoddur. ξ_t təsadüfi prosesinin B. p. m. ilə proqnozlanma modeli*

$$\hat{\xi}_t(k) = a_0(t) + a_1(t)k + \dots + a_p(t)k^p$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

$a_0(t), \dots, a_p(t)$ əmsalları çəkili en kiçik kvadratlar metodu ilə, yeni

$$\sum_{j=0}^p (\xi_{t-j} - \hat{\xi}(-j))^2 \beta^j$$

kəmiyyətinin minimalıq şərtindən təyin edilir, burada β -nın qiyməti hamarlama əmsalı adlanır. $|\beta| < 1$ olduğu halda proqnozlamada bu əmsaldan istifadə müşahidə olunan prosesin son müşahidələrdəki qiymətlərinin böyük çəkili, nadir müşahidə olunan qiymətlərinin isə az çəkili götürülməsinə imkan verir. $\hat{\zeta}_t(k)$ -dan $\hat{\zeta}_{t+1}(k)$ -ya keçiddə əmsalların hesablanması rekurrent qayda ilə aparılır. Məs., $p = 1$ olduqda $a_0(t+1)$ və $a_1(t+1)$ əmsalları üçün

$$a_0(t+1) = (1 - \beta^2) \zeta_{t+1} + \beta^2 a_0(t) + \beta^2 a_1(t),$$

$$a_1(t) = (1 - \beta^2) \zeta_{t+1} - (1 - \beta^2) a_1(t) - (1 - \beta^2) a_0(t) + a_1(t)$$

düsturları doğrudur.

Əd.: [1] Brown R., Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Englewood Cliffs (N. Y.), 1963; [2] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

BRAUN VƏRƏQİ «брауновский лист; Brownian sheet» – bax, *Viner vərəqi*.

BUCAQ MODULYASIYASI «угловая модуляция; angular modulation» – bax, *Tezlikli – modular ossilyasiya*.

BUCAQ TEZLİYİ «угловая частота; angular frequency» – bax, *Tezlik*.

BUFER YADDAŞ «буферная память; buffer memory» – bax, *Ardıcıl dekodlaşdırma*.

BUL CƏBRİ normalanmış «булева алгебра нормированная; standardized Boolean algebra» – bax, *Təsadüfi hadisə*.

BUL FUNKSIYASI təsadüfi «булева функция случайная; random Boolean function» – bax, *Təsadüfi Bul funksiyası*.

BUL MODELİ «булева модель; Boolean model» – $\mathbb{R}^n$ -də, paralel yerindəyişmələrin T_n qrupuna nəzərən invariant təsadüfi çoxluqdur. B. m. aşağıdakı kimi qurulur: T_n -də $\mathcal{N} = \{t_i\}$ – invariant nöqtəvi təsadüfi prosesi və eyni qanunla paylanmış asılı olmayan qabarıq təsadüfi çoxluqlar ardıcılığı $\{D_i\}$ götürülür. $U = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} t_i D_i$ çoxluğuna $\{t_i\}$ və $\{D_i\}$ ilə

doğurulmuş Bul modeli deyilir. Əgər $\mathcal{N} = \{t_i\}$ Puasson nöqtəvi prosesi olarsa, onda B. m. Puasson Bul modeli adlanır. Əgər $U \subset \mathbb{R}^n$ -də B. m.-dirsə, onda $U \cap T_r$ də B. m.-dir, burada T_r – $\mathbb{R}^n$ -də r – ölçülü müstəvidir, $r \leq n$. $U \cap T_1$ çoxluğunu kəsişməyən $\{I_k\}$ intervallarının birləşməsi şəklində ifadə etmək olur, onun tamamlayıcısı isə kəsişməyən $\{I'_k\}$ intervallarının birləşməsinin tamamlayıcısıdır. I'_k isə I -nin tamamlayıcısıdır. Əgər U – Puasson B. m.-dirsə, onda bir-birini əvəz edən $\{I_k, I'_k\}$ ardıcılığında intervallar asılı olmayandırlar, $\{I'_k\}$ -dən olan tipik intervalın uzunluğu (bax, *Həndəsi proses*) eksponensial paylanma qanunu ilə paylanır. Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant

B. m. üçün $\{I'_k\}$ -dən olan tipik intervalın eksponensial paylanma ilə paylanması $U \cap T_1$ prosesinin rekurrentliyindən alınır (bax, *Stoxastik həndəsə*).

Əd.: [1] Stochastic geometry, geometric statistics, stereology, Lpz., 1984; [2] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

BUNYAKOVSKI BƏRABƏRSİZLİYİ «Буняковского неравенство; Bunyakovskii's inequality» – ehtimal nəzəriyyəsində – sonlu $M\xi\eta$ riyazi gözləməsinə malik ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri $M\xi$ və $M\eta$ üçün bərabərsizlikdir və bu bərabərsizlik aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$(M\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2. \quad (*)$$

Bu bərabərsizlik inteqrallar üçün 1859-da ilk dəfə V. Y. Bunyakovski tərəfindən verilmişdir. A. Koşi (A. Cauchy) (*) bərabərsizliyinin analoquunu 1821-də cəmlər üçün isbat etdiyindən, (*) eyni zamanda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi də adlanır. Bəzən B. b. Şvarts bərabərsizliyi də adlanır, lakin bu bərabərsizliyə H. Şvartsın (H. Schwarz) işlərində 1884-dən sonra təsadüf olunmuşdur.

B. b., yalnız və yalnız, o halda bərabərliyə çevrilir ki, əgər $a^2 + b^2 > 0$ şərtini ödəyən a və b sabitləri olarsa ki, $a\xi + b\eta = 0$ bərabərliyi sanki yaqın ödənilsin. (*)-dan kovariasiya üçün

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi D\eta}.$$

korrelyasiya əmsalı üçün

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$$

bərabərsizlikləri alınır.

BURGERS TƏNLİYİ «Бюргерса уравнение; Burgers equation» – bax, *Statistik hidromexanika*.

BURKHOLDER – QANDİ – DEVİS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ «Буркхольдера – Ганди – Дэвиса неравенства; Burkholder – Gundy – Davis inequalities» –

$$c_p M[\zeta, \zeta]_T^{p/2} \leq M(\zeta_T^*)^p \leq C_p M[\zeta, \zeta]_T^{p/2}, \quad p \geq 1$$

ikiterəfli bərabərsizliklərdir, burada $\zeta = \{\zeta_t, t \geq 0\}$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı *lokal martinqal*, $\zeta_0 = 0$, $[\zeta, \zeta] = ([\zeta, \zeta]_t, t \geq 0)$, – ζ -nin kvadratik variyasiyası, T isə $\zeta^* = (\zeta_t^*, t \geq 0)$ təsadüfi prosesinin *Markov andır*, $\zeta_t^* = \sup_{s \leq t} |\zeta_s|$, c_p və C_p sabitləri yalnız p -dən asılıdır.

$p > 1$ olduqda bu bərabərsizliklər Burkholder–Qandi bərabərsizlikləri, $p = 1$ olduqda isə Davis bərabərsizlikləri adlanır.

Əd.: [1] Burkholder D., Davis B., Gundy R., Integral inequalities for convex functions of operator on martingales, в сб.: Proc 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 1972, v. 2, p. 223–40; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

BUTSTRƏP – QİYMƏT « бутстрап – оценка; bootstrap estimator » – bax, *Butstrep qiymətləndirmə metodu*.

BUTSTRƏP QİYMƏTLƏNDİRMƏ METODU « бутстрап – метод оценивания; bootstrap method of estimation » – $X_n = (x_1, \dots, x_n)$ seçiminə görə qurulmuş statistikanın paylanması X_n -in empirik paylanmasından olan seçim üzrə qurulmuş eyni statistikanın paylanması vasitəsilə statistik qiymətləndirilmə metodudur.

F , – x_i -nin paylanma funksiyası, $T(F)$, $-F$ -in hər hansı funksionalı olsun [məs., $T(F)$ F -in orta qiyməti, medianı və ya dispersiyası ola bilər]. $T_n(X_n)$, – X_n seçiminə görə $T(X)$ funksionalı üçün qurulmuş statistik qiymət olsun. Praktikada X_n seçimi üzrə təyin edilən $\theta_n(X_n, F) = T_n(X_n) - T(F)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının müxtəlif xarakteristikalarının statistik qiymətlərinin olması faydalıdır. Belə xarakteristikalardan ən çox istifadə olunanlar θ_n təsadüfi kəmiyyətinin meyli adlanan $\mathbf{M}\{\theta_n(X_n, F)\}$ və $\mathbf{D}\{\theta_n(X_n, F)\}$ dispersiyası kimi tipik xarakteristikalardır. Bəzən $\theta_n(X_n, F)$ statistikasının özünün paylanma funksiyasının qiymətləndirilməsi tələb olunur. Bu məqsədlə də B. q. m.-dan istifadə edilir. $\theta_n(X_n, F)$ statistikasının paylanmasının *butstrep – qiyməti* (θ_n -in *butstrep – paylanması* adlanan) X_n qeyd olunduqda $\theta_n(X_n^*, F_n)$ statistikasının paylanması kimi təyin edilir. Burada F_n , – X_n seçiminə uyğun paylanma funksiyası, $X_n^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $x_i^* -$ paylanma funksiyası F_n olan $i = \overline{1, n}$ qiymətlərində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T_n -nin meyli və dispersiyasının [$\theta_n(X_n, F)$ statistikasının paylanmasının digər xarakteristikalarının da] *butstrep – qiymətləri* θ_n -in *butstrep – paylanması* uyğun xarakteristikaları kimi təyin olunur.

Butstrep – paylanmanın aşkar analitik hesablanması yalnız bəzi xüsusi hallarda mümkündür. Buna görə də, bir qayda olaraq, aşağıdakı üsulla *butstrep – paylanma* üçün *aproksimasiyalar* qurulur. Paylanma funksiyası F_n olan x_{ij}^* , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$ təsadüfi kəmiyyətləri çoxluğundan N sayda asılı olmayan seçimlər $X_{1n}^* = (x_{11}^*, \dots, x_{1n}^*)$, $\dots$, $X_{Nn}^* = (x_{N1}^*, \dots, x_{Nn}^*)$ götürülür.

Sonra $\theta_1^* = \theta_n(X_{1n}^*, F_n)$, $\dots$, $\theta_N^* = \theta_n(X_{Nn}^*, F_n)$ kəmiyyətləri hesablanaraq, statistikanın paylanmasının statistik qiyməti kimi $\theta_1^*, \dots, \theta_N^*$ kəmiyyətlərinin empirik paylanması götürülür. Praktika da bu üsul B. q. m.-nın tətbiqi məqsədilə əsas götürülür. Əgər T_n statistikasının yalnız meyli və ya dispersiyasının qiymətləndirilməsi tələb olunursa, onda ümumi sayılmayan digər üsul – *Ceknayf metodu* (rus. “метод складного ножа” – kimi də adlanan) üsulunu tətbiq etmək olar. Bu metodla alınmış statistik qiymətlərin meyli və dispersiyası *butstrep – qiymətlərin aproksimasiyası*dır.

Əd.: [1] Э ф р о н Т. Б., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988.

* **«BUTSTRƏP» METOD « «бутстрап» метод; «Boot-strap» method »** – çoxölçülü statistik analizin qeyri – ənənəvi metodlarından biridir. B. Efron tərəfindən 1977-də təklif olunmuş B. m. ənənəvi statistik metodlardan onunla fərqlənir ki,

alınmış məlumatların müxtəlif hissələri dəfələrlə araşdırılır və alınan nəticələr müqayisə olunur və son qərar qəbul olunur. «Butstrep» ter-mininin ilk dəfə işlənilməsi 20-ci əsrin 50-ci illərinə təsadüf edir. Rus ədəbiyyatında «раскрукта» kimi işlənməmişdir. Sonradan bu termin [8]-də belə ifadə olunmuşdur: «Bootstrap» – özü-özünü təmin edən. Metoda və cihaza aid istifadə olunur. *Butstrep proseduru* məlumatları araşdırma prosesində seçimi idarə etmə qaydası kimi anlaşılır. Seçimin ənənəvi idarə olunma oblası eksperimentlərin və ya tədqiqatların planlaşdırılmasıdır; lakin yeni cəhət hesablama prosedurlarına, məlumatlar üzərində işləmə qaydalarına müəyyən bir qaydaya görə yanaşmadan ibarətdir.

Ənənəvi yanaşmada, əgər seçim verilmişdirsə, ən effektiv statistik qiymətlərin alınması üçün və hipotezlərin yoxlanılması üçün ən güclü kriterinin təyin edilməsi məqsədilə seçimi müşahidələnlərin hər biri istifadə olunmalıdır; belə ki, hər bir müşahidələnlənin hesaba alınmaması sərbəstlik dərəcəsi sayının bir vahid azalmasına səbəb olur və bu da alınan nəticələrə təsir edir. Bu halda alınan statistik qiymətlər meyli olur.

Məlumatlar ardıcıl seriyalarla (seçimlərlə) və ya tək-tək daxil olduğu halda, B. m.-un tətbiqi üçün çox da böyük olmayan həcmli seçim götürülür (B. Efron).

İmitasiya modelləmə yaranana qədər hesablama prosesində seçimin idarə olunması haqqında məlumat belə olmadığı halda, «yenidən yoxlama» və ya «kross – yoxlama» yanaşması təklif olunmuşdu. Bu sadə yanaşmanın mahiyyəti ondan ibarətdir ki, verilmiş seçim təsadüfi qaydada yarı bölünür. Birinci hissə müşahidəni maraqlandıran statistik qiymətlərin alınması, ikinci hissə isə «imtahan» üçün istifadə olunur. Sonradan bu ideya tək-milləşmiş və seçimin bir dəfə yox, bir neçə dəfə (ən yaxşısı çox dəfə) bölünməsi, məhz yarı deyil, məs., on hissəyə bölünməsi kimi hallar araşdırılmışdır. Hesablama texnikası imkan verir ki, effektivlik itkisi çox az, seçimi meylin olduqca az olmasını təmin edən proseduru tətbiq edilsin. Belə bir proseduru 1949-da M. Kenuy (M. Quenouille) (bax, [1]) təklif etmişdir. Bu prosedurun ideyası ondan ibarətdir ki, ardıcıl surətdə müşahidələr bir-biri xaric olunur, hər dəfə qalan informasiya üzərində işlənilir və çıxarılmış nöqtədə nəticənin nə olacağı təyin olunur. Bütün nöqtələr üzrə bu qayda ilə alınan fərqlənmələr toplusu özündə meyli haqqında informasiya daşıyır və bundan da istifadə olunur. Bundan başqa bu məlumatlarda dispersiya haqqında da informasiya olur və bu cəhətdən bu prosedurun tətbiqi üçün yeni perspektivlər meydana gəlir. Bu metodu C. Tyuki tək-milləşdirmiş (bax, [2], [3]) və onu «qatlanan bıçaq» metodu (*Ceknayf metodu*) adlandırmışdır. Bu metod rus ədəbiyyatında *Kenuy metodu*, *meyle düzəliş*, *parçalama metodu* kimi də adlandırılmışdır. Statistiklərin «qatlanan bıçaq» metoduna gətirən araşdırmalarından asılı olmayaraq mütəxəssislər obrazların müəyyənləşdirilməsi üzrə eyni nəticələrə gəlmişlər. Belə metodla alınan statistik qiymətlərin meylsiz statistik qiymətlər olduğu 1969-da isbat olunmuşdur (bax, [4]).

B. m. «qatlanan bıçaq» prosedurunun müəyyən bir ümumləşməsidir. Belə ki, «qatlanan bıçaq» metodunda yenidən yoxlama metodlarında altseçimlərin formalaşması verilmiş ümumi çoxluqdan qaytarmamaq şərtlə seçim edilməsidir. B. Efron qaytarmamaq şərtlə seçimi təklif etmişdir. Onda məlumatlar üzərində araşdırmaların hər bir mərhələsində bütün sərbəstlik dərəcəsi sayları formal olaraq dəyişmir. Seçimi idarə etmə planlarından B. m.-un üstünlüyü məhz bununla izah olunur.

Butstrep – prosesin ehtimal modeli aşağıdakı kimi qurulur.

$\xi_1, \dots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x) = \mathbf{P}\{\xi_j < x\}$ olsun. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ seçimi üzrə hər hansı verilmiş $\mathcal{F}$ funksional ailəsində $\theta = \theta(F)$

qiymeti qiymətləndirilir. n – ölçülü seçim üzrə hesablanmış $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\xi)$ statistik qiyməti

$$R(\hat{\theta}, F) = \mathbf{M}_F L(\hat{\theta}(\xi), F) \quad (1)$$

kəmiyyəti ilə ölçülür. Burada $L(\hat{\theta}, F)$ – əsl F paylanmasına uyğun $\theta = \theta(F)$ naməlum qiyməti əvəzinə $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin götürülməsindən yaranan itkilərdir. B. m. (1) bərabərliyi ilə verilən $R(\hat{\theta}, F)$ -i

$$\hat{R}(\hat{\theta}) = R(\hat{\theta}^*, \hat{F}) \equiv \mathbf{M}_{\hat{F}} L(\hat{\theta}(\xi^*), F) \quad (2)$$

əvəzləməsi ilə qiymətləndirməyə imkan verir. Burada $\hat{F}$, – F paylanmasının statistik qiyməti, ξ^* , – $\hat{F}$ -dən asılı olmayan n – həcmli təkrar seçimdir, yeni $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\xi_1, \dots, \xi_n$ verilmiş qiymətlərinə nəzərən birgə şərti paylanması

$$\mathbf{P}\{\xi_1^* < x_1, \dots, \xi_n^* < x_n | \xi_1, \dots, \xi_n\} = \hat{F}(x_1) \dots \hat{F}(x_n) \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

$\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ çoxluğu $\hat{F}$ -dən n – həcmli **b u t s t r e p** s e ç i m adlanır. $\hat{\theta}(\xi^*) = \hat{\theta}^*$, – $\hat{\theta}$ -nin butstrap realizasiyasıdır.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\hat{\theta}(\xi^*) < x | \xi_1, \dots, \xi_n\} = \\ = \int \dots \int_{\{z: \hat{\theta}(z) < x\}} d\hat{F}(z_1) \dots d\hat{F}(z_n) = \hat{G}(x) \end{aligned} \quad (4)$$

şərti ehtimalı paylanma funksiyası

$$\mathbf{P}\{\hat{\theta}(\xi) < x\} \leq \int \dots \int_{\{z: \hat{\theta}(z) < x\}} dF(z_1) \dots dF(z_n) = G_F(x) \quad (5)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\hat{\theta}$ statistikasının **b u t s t r e p** statistik qiymətidir. Bu halda (2) düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{\theta}) = \int \dots \int L(\hat{\theta}(z_1, \dots, z_n), \hat{F}) d\hat{F}(z_1) \dots d\hat{F}(z_n) = \\ = \int L(z, \hat{F}) d\hat{G}(z) \end{aligned} \quad (6)$$

F paylanma funksiyasının statistik qiymətinin seçilmə proseduru aprior informasiya ilə müəyyənləşdirilir. Parametrik halda, F -in $\mathcal{F} = \{F_\eta, \eta \in H\}$ ailəsinə mənsub olması məlum olarsa,

H isə $\mathbb{R}^p$ p – ölçülü fəzanın oblastıdırsa, $\hat{F}$ statistik qiyməti əksər hallarda maksimal doğruxa oxşarlıq statistik qiyməti η -nin əvəz olunmasının nəticəsi olur, yeni $\hat{F} = \hat{F}_\eta$ olur.

Bu halda qiymətləndirilən $\theta = \theta(F_\eta) = \theta(\eta)$ funksionalı bir qayda olaraq, η -nin ($\eta \in H$) hamar funksiyası olur, $\hat{R}(\hat{\theta})$ kəmiyyəti isə

120 BUTSTRƏP

$$R(\hat{\theta}, F) = r(\hat{\theta}, \eta) =$$

$$= \int \dots \int l(\hat{\theta}(z_1, \dots, z_n), dF_\eta(z_1) \dots dF_\eta(z_n)) \quad (7)$$

statistikası ilə, $l(\hat{\theta}, \eta) = L(\hat{\theta}, F_\eta)$, $\eta = \hat{\eta}$ əvəzləməsi ilə təyin olunur.

Digər qeyri – parametrik statistika halı əsl paylanma funksiyası F -in məlum olmadığı halıdır.

Bu halda, $\hat{F}$ statistik qiyməti, adətən, empirik paylanma funksiyasıdır, yeni n sayda $\xi_1, \dots, \xi_n$ nöqtələrinin hər birinə $1/n$ çəkisi qarşı qoyulur. Butstrap – seçimlər, bu halda $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ -də toplanmış şərti polinomial paylanma qanununa tabe olur və ξ_1 -in butstrap – seçimdə v_1 dəfə, ξ_n -in v_n dəfə ($v_1 + \dots + v_n = n$) təkrar olunması hadisəsinin şərti ehtimalı

$$\frac{n!}{v_1! \dots v_n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n, \quad 0! = 1$$

düsturu ilə təyin olunur.

İstər parametrik, istərsə qeyri – parametrik halda (6) düsturu ilə $\hat{R}(\hat{\theta})$ -ni (7)-dəki inteqralları çoxqat olması və polinomial sxemdəki toplananlar sayının çox olması ilə əlaqədar olaraq həmişə dəqiqliklə hesablamaq mümkün olmur. Buna görə də, B. Efron, statistik nəzəriyyəni Monte – Karlo metodu ilə əlaqələndirməni təklif etmişdir.

B. Efronun elmi işlərində verilmiş hallardan fərqli hallarda – ilkin seçimlərlə butstrap seçimlərin həcmələrinin üst-üstə düşməyəcəyi hallarda P. Bikel və D. Fridman (bax, [5]) riyazi gözləmə və paylanma funksiyası üçün butstrap – statistik qiymətlərin asimptotikasını müəyyən etmişlər. $\mu_n = (x_1 + \dots + x_n)/n$ kəmiyyəti

$$\begin{aligned} \mu = \int x dF(x) - \text{riyazi gözləməsinin statistik qiyməti, } s_n^2 = \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_n)^2 \text{ isə } \sigma^2 = \int (x - \mu)^2 dF(x) \text{ dispersi-} \end{aligned}$$

yasının statistik qiyməti olsun, $0 < \sigma < \infty$; butstrap – verilənlər

üzrə $\mu_m^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^*$ realizasiyaları təyin olunur; ($\xi_i^*, i = 1, \dots, m$), – $\hat{F} = \hat{F}_n$ paylanma funksiyası ($\xi_1, \dots, \xi_n$ nöqtələrinə $1/n$ çəkisini qarşı qoyan) ilə şərti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda $m, n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|\mu_m^* - \mu_n| > \delta(\xi_1, \dots, \xi_n)\} \rightarrow 0$$

münasibəti ixtiyari $\delta > 0$ və sanki bütün seçimi ardıcılıqlar üçün ödənilir. Bu *Böyük ədədlər qanununun* ümumiləşməsidir. Bundan başqa, sanki bütün ardıcılıqlar üçün t -nin ixtiyari qiymətində $m, n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\sqrt{m}(\mu_m^* - \mu_n) < t s_n / \xi_1, \dots, \xi_n\}$$

şərti ehtimalları $\Phi(t)$ -yə yığılır, yeni *mərkəzi limit teoremi* yerinə yetir.

R. Beran butstrap – statistik qiymətlərin asimptotik optimallığını [6]-da araşdırmışdır. R. Beran həm də etibarlı statistik qiymətləndirmə fenomenini də izah etmişdir. B. Efron etibarlı qiymətləndirmənin yaxşılaşdırılmış butstrap – prosedurlarını təklif etmiş.

R. Beran isə onların üstünlüyünü izah etmişdir və o göstərmişdir ki, standart intervala əsaslanan $\hat{H}_n(t) = \Phi(t/\hat{\sigma}_n)$ statistik qiyməti butstrəp – statistik qiymətindən pisdır,

$$\hat{H}_n(t) \equiv H_n(\hat{F}, t) = \mathbf{P}_{\hat{F}} \{ (\hat{\theta}_n^*(\xi^*) - \hat{\theta}(\xi)) < t/\sqrt{n} \}$$

– $H_n(F, t)$ paylanma funksiyasının butstrəp – statistik qiyməti asimptotik optimallıq xassəsinə malikdir.

$$H_n(F, t) = \mathbf{P}_F \{ \hat{\theta}_n(\xi) - \theta(\xi) < t/\sqrt{n} \}$$

normalanmış paylanma funksiyasıdır.

Beləliklə, B. m. seçilmə əlaqədar yaranan meyli aradan qaldırmaq məqsədilə yaranmışdır. Bu metod təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları haqqında hipotezləri yoxlamaq məqsədilə, regressiya, dispersion analiz və s. ilə əlaqədar ixtiyari statistik məsələlərin araşdırılmasında tətbiq olunur.

Əd.: [1] Quenouille M. N., Approximate tests of correlation in time series // J. Roy. Statist. Soc.-Ser. B., 1949, 11, p. 68–84; [2] Quenouille M. H., Notes on bias in estimation // Biometrika, 1956, 43, p. 353–360; [3] Tukey J. W., Bias and confidence in not quite large samples // Ann. Math. Statist., 1958, 29, p. 614; [4] Лунц А. Л., Браиловский В. Л., Об оценке признаков, полученных в статистических процедурах и распознавания. Изв. АН. СССР – Сер. Техн. Кибернетика, № 3, 1969; [5] Viskel P. J., Freedman D. A., Some asymptotic theory for the bootstrap., Ann. Statist., 9, № 6, p. 431–443, 1981; [6] Beran R., Estimated sampling distributions: the bootstrap and competitors, Ann. Statist., 10, № 1, p. 212–223, 1982; [7] Ефрон Б., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988; [8] Вычислительная техника и обработка данных: Терминологический толковый словарь фирмы ВМ.-М.: Статистика, 1978.

Вах. Сəknəyf metodu.

BUTSTRƏP – PAYLANMA « бутстрап – распределение; bootstrap distribution » – bax, *Butstrəp qiymətləndirmə metodu*.

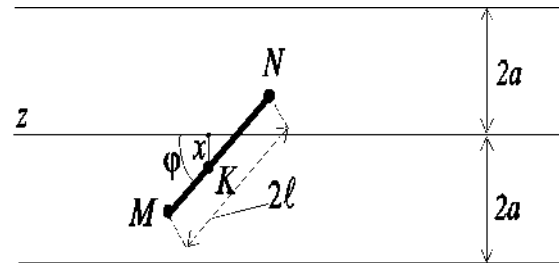
BÜTÜN REQRESSİYALAR METODU « всех регрессионный метод; all possible regressions method » – kompyuter yaddaşının qənaətlə istifadə edilməsini ifadə edən, kvadratlının qalıq cəmini minimalaşdıran, regression eksperimentin prediktorlarının gücləri verilmiş altı çoxluqlarının sürətləndirilmiş ayırd olunmasıdır.

Əd.: [1] С е б е р Г., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Статистические методы для ЭВМ, пер. с англ., М., 1986.

BYENEME – ÇEBİŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ « Бьенеме – Чебышева неравенство; Bienaime – Chebyshev inequality » – bax, *Çəbişev bərabərsizliyi*.

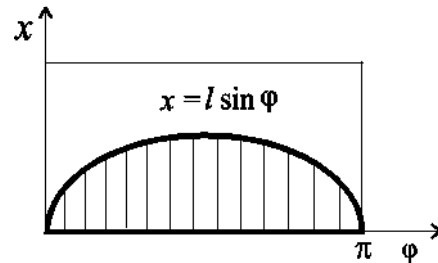
BYUFFON HALQASI « Бюффоново кольцо; Buffon ring » – bax, *İntegral həndəsə*.

BYUFFON İYNƏ MƏSƏLƏSİ « Бюффона задача об игле; Buffon's needle-tossing problem » – *həndəsə ehtimalları hesablanmasına aid ilk misaldır. Məsələ J. Byuffon tərəfindən 1733-də qoyulmuş. 1777-də həlli ilə birlikdə nəşr olunmuşdur (bax, [1]). Məsələ aşağıdakı kimi qoyulmuşdur: bir-birindən 2a uzunluqda məsafədə yerləşən və OY oxuna paralel olan düz xətlər çəkilmiş müstəvi üzərinə ixtiyari qaydada 2l (l < a) uzunluqlu iynə atılır. İynənin bu düz xətlərdən birini kəsməsi hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur. x – iynənin mərkəzi nöqtəsindən ona soldan ən yaxın düz xəttə qədər məsafə, φ – iynə ilə bu düz xəttin əmələ gətirdiyi bucaq olsun.*



Şəkil 1

φ bucağı və x kəmiyyəti iynənin müstəvidəki vəziyyətini birqiymətli təyin edir. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası – $\Omega = \{(x, \varphi): 0 \leq x \leq l, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ düzbucaqlısı olacaqdır.



Şəkil 2

Ayındır ki, iynə düz xətlərdən birini, yalnız və yalnız, $x \leq l \sin \varphi$ şərti ödənildikdə kəsə bilər.

$$C = \{(x, \varphi): x \leq l \sin \varphi, (x, \varphi) \in \Omega\}$$

çoxluğu şəkil 2-də ştrixlənmiş oblastdır. Əgər x və φ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və uyğun olaraq, (0,1) və (0, π)-də müntəzəm qanunla paylanmışlarsa, onda axtarılan ehtimal

$$\mathbf{P}(C) = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi} \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur.

(*) düsturundan istifadə edərək, π ədədinin qiymətini eksperimental olaraq təyin etmək mümkün olmuşdur (iynənin atılma sayını çoxaltmaq şərti ilə). Əgər qurulmuş ehtimal modeli eksperimenti adekvat olaraq ifadə edirsə, onda n -in böyük qiymətlərinə iynənin düz xətti kəsəməsi hadisəsinin tezliyi m/n $\mathbf{P}(C)$ ehtimalından çox az fərqlənəcəkdir, yəni $2l/a\pi \sim m/n$ münasibəti ödənilməlidir. Bu münasibətdən

$$\pi \sim \frac{2l \cdot n}{am}$$

olduğu alınır.

Birinci hesablama Monte – Karlo metodu ilə aparılmışdır.

B. m.-ne uyğun ikili məsələ də qoyulur: iynənin vəziyyəti qeyd olunur və bu halda müstəvi üzərinə ixtiyari qaydada, bərabər –

vahid məsafədə yerləşən paralel düz xətlərdən ibarət şəbəkə atılır; bu halda B. m. müstəvi üzərində düzxətlərin Evklid hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçü anlayışına, yeni integral həndəsə anlayışlarına gətirir.

Əd.: [1] B u f f o n G., Essai d'arithmetique morale Supplementa «L'Histoire Naturelle», 1777, t. 4; [2] К е н д а л л М., М о р а н П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [3] Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. Сб. статей, Ер., 1980.

BYUFFON – SILVESTR MƏSƏLƏSİ « Бюффона – Сильвестра задача; Buffon – Sylvester problem » – *Byuffon iynə məsələsinin* iynələrin sayının m -ə bərabər halı üçün ümumiləşməsidir; [1]-də C. Silvestr tərəfindən araşdırılmışdır; məsələ aşağıdakı şəkildə qoyulur. Müstəvi üzərində m sayda iynə qeyd olunmuşdur. B_i , – i -ci iynəni kəsən düzxətlər çoxluğu, μ – düzxətlər fəzasında Evklid hərəkətləri qrupuna

nəzərən invariant ölçü olsun. $\mu\left(\bigcap_{i=1}^m B_i\right)$ və $\mu\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right)$ ölçülə-

ninin qiymətlərini təyin etmək tələb olunur. C. Silvestrin aldığı

nəticəyə görə $\mu\left(\bigcap_{i=1}^m B_i\right)$ və $\mu\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right)$ – iynələrin uçları ara-

sında bütün mümkün məsafələrin tamqiymətli əmsallarla xətti funksiyalandır. İynələrin sayının ixtiyari ədəd olduğu və onların ümumi yerləşdirilməsi halında tamqiymətli əmsalların hesablama alqoritmı ilk dəfə [2]-də təklif olunmuşdur. Sonrakı araşdırmalardan aydın olmuşdur ki, B. – S. m. kombinator integral həndəsənin ümumi nəzəriyyəsinin başlanğıc hissəsində əhatə olunmuşdur.

Əd.: [1] S y l v e s t e r J. J., «Acta Math.», 1890, v. 14, p. 185–205.

CALAŞDIR(IL)MA(sı) təsadüfi proseslərin «склеивание случайных процессов, каплинг; coupling of random processes», kapling – iki və ya bir neçə təsadüfi prosesin eyni bir ehtimal fəzasında verilməsinin xüsusi bir qaydasıdır ki, ya bu proseslərin vəziyyətləri və ya paylanmaların zaman anlarının müəyyən çoxluğunda üst-üstə düşür (calaşır). Bu üsul ergodik teoremlərin isbatında (varlıq və yeganəlik teoremlərinin), stasionar paylanmalara yığılma sürətinin qiymətləndirilməsində, təsadüfi proseslərin dayanıqlılığının qiymətləndirilməsi və dayanıqlılıq şərtlərinin tapılmasında və s.-də effektiv olur. Calanma metodu ən geniş surətdə vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari olan Markov zəncirlərinin, təsadüfi Gibbs meydanlarının, regenerarlanan və yeniləşən proseslərin analizində istifadə olunur. Calanma qaydasının mənası marginal paylanmalar qeyd olunduğu halda müqayisə olunan təsadüfi proseslərin birgə paylanmasının variasiyasıdır, bu şərtlə ki, calanma effektiv olsun. Calanma effektiv olduğu bir prosesin xassələri haqqında onunla «calanmış» prosesin xassələrinə görə mülahizələr aparmaq və onun üçün kəmiyyətə uyğun statistik qiymətlər almaq olur.

Bax. *Markov prosesi; çevirmələr*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [3] Калашников В. В., Метод склеивания, его развитие и применения, в кн.: Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989.

CARİ ÖDƏMƏ «текущая плата; reward function» – bax, *idərolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

CAZİBƏ OBLASTI «притяжения область; attraction domain» – bax, *Renormalization grup*.

CAZİBƏ OBLASTI dayanıqlı qanunun «притяжения область устойчивого закона; domain of attraction of a stable law», G dayanıqlı qanununun C. o. – e F paylanmalarının çoxluğu ki, normalayıcı A_n ardıcılıqlarını hər hansı cür seçdikdə və $B_n > 0$ olduqda, bütün x -lər üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$F^{*n}(B_n x + A_n) \rightarrow G(x) \quad (*)$$

münasibəti ödənilir, burada $*n$, – n – qat kompozisiyanı ifadə edir. (*) şərti

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i - A_n \right) / B_n$$

cəmlərinin paylanma funksiyalarının $G(x)$ funksiyasına zəif yığılmasına ekvivalentdir, burada X_i – paylanma funksiyaları $F(x)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bütün dayanıqlı qanunlar və yalnız bunlar boş olmayan C. o.-na malikdirlər. Eyni tip qanunlara aid cazibə oblastları bezən üst-üstə düşür və belə hallarda onlara tiplərin cazibə oblastları deyilir. Əgər qanun xarakteristik göstəricisi $0 < \alpha \leq 2$, α olan dayanıqlı paylanmanın C. o.-na aid olarsa, onda ixtiyari $0 < \delta < \alpha$ üçün

$$\int |x|^\delta F(dx) < \infty$$

olur və (*)-da B_n kəmiyyətləri $B_n = n^{1/\alpha} h(n)$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $h(n)$ – asta dəyişən funksiyalardır. Hər bir dayanıqlı G qanunu özünün C. o.-na aiddir, bu halda $B_n = n^{1/\alpha}$ olur, α isə G qanununun göstəricisidir. (*) münasibəti $B_n = a n^{1/\alpha}$ ($a > 0$ sabitdir) bərabərliyi ilə verilən B_n -lər üçün ödənilərsə, onda F paylanmaların çoxluğu *normal cazibə oblastı* adlanır.

Paylanma funksiyası $F(x)$ -in göstəricisi α olan, $0 < \alpha \leq 2$ dayanıqlı qanunun C. o.-na aid olması üçün

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \chi(z) / \int_0^z x^2 d\chi(x) = (2 - \alpha) / \alpha$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir, burada $\chi(z) = 1 - F(z) + F(-z)$, $z > 0$ (Sakoviç teoremi [3]).

$0 < \alpha < 2$ olduğu halda

$$F(x) = (C_1 + o(1)) |x|^{-\alpha} h(|x|), \quad x \rightarrow -\infty,$$

və

$$F(x) = 1 - (C_2 + o(1)) x^{-\alpha} h(x), \quad x \rightarrow \infty$$

şərtləri də zəruri və kafi şərtlərdir, burada $h(x)$ – asta dəyişən funksiyadır, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, $C_1 + C_2 > 0$.

$\alpha = 2$ olduqda, yeni normal qanuna cazibə üçün aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir:

1) $F(x)$ sonlu dispersiyaya malik paylanmadır;

2) $(1 - F(x) + F(-x))x^2$, – $x \rightarrow \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır.

Paylanmanın dayanıqlı qanunların C. o.-na aid olması haqqında kriterlər çoxölçülü hallar üçün də məlumdur (bax, məs., [3]).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Саквич Г. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 357–61.

CAZİBƏ OBLASTI qrupda dayanıqlı paylanmanın « **притяжения область** устойчивого распределения на группе; **domain of attraction of a stable distribution on a group** » – lokal kompakt G qrupunda bütün v ehtimal paylanmalarının çoxluğu ki, bu v -lər üçün G qrupunda kəsilməz avtomorfizmlərin e $\{x_n\}$ ardıcılığı və G qrupunun elementlərinin e $\{x_n\}$ ardıcılığının varlığı fərz olunur ki,

$$Y_n = \sigma_n(S_n \circ x_n) \quad (1)$$

normalanmış kompozisiyalarının paylanmaları $n \rightarrow \infty$ olduqda G qrupunda verilmiş μ dayanıqlı paylanmasına zəif yığılır, burada $\circ$ – qrup əməlidir, $S_n = X_1 \circ \dots \circ X_n$ – eyni μ paylanması ilə verilən asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kompozisiyasıdır.

Əgər G qrupunun bütün kəsilməz avtomorfizmlərinin $\text{Aut } G$ çoxluğundan hər bir σ üçün v G qrupunda təyin olunmuş bütün Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -dən μ ölçüsü üçün, hər bir $E \subset G$ Borel çoxluğu üçün $\sigma\mu$ ölçüsü $\sigma\mu(E) = \mu(\sigma^{-1}(E))$ qaydası üzrə təyin olunarsa, onda (1) münasibətini paylanmalar simvolikası ilə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sigma_n(v^{*n}) * \delta_{x_n} \Rightarrow \mu \quad (2)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar, burada v^{*n} – kompozisiya əməlinə nəzərən v -nin n – qat kompozisiyasıdır, δ_{x_n} – x_n nöqtəsində cırlaşmış ehtimal paylanmasıdır, μ paylanmasının G qrupunun avtomorfizmlərinin kəsilməz birparametrlili $T = \{\tau_t, t > 0\}$ qrupuna nəzərən dayanıqlı paylanma olduğu fərz olunur (bax, *Dayanıqlı paylanma qrupda*). G qrupunda normal dayanıqlı paylanmanın C. o. e $v \in \mathcal{M}^1(G)$ ehtimal paylanmalarının çoxluğu kimi təyin olunur ki, bunlar üçün (1) münasibəti və ya (2) münasibəti $\sigma_n = \tau_{1/n}$ avtomorfizmlərlə ödenilsin. $\mathcal{D}(\mu)$ və $\mathcal{D}_N(\mu)$ uyğun olaraq, dayanıqlı və normal μ paylanmasının C. o. olsun. (1) və (2) münasibətlərində $x_n = e$ olduqda, C. o. üçün ciddi mənada daha güclü nəticələr alınmışdır. Bu halda limit paylanması μ G qrupunda *ciddi dayanıqlı paylanma* olacaqdır. (Bundan sonra, burada, C. o. və dayanıqlı paylanmalar ciddi mənada anlaşılar.) C. o.-nı ixtiyari $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanması üçün təyin etmək olar. Bununla belə, bu anlayış aşağıdakı nəticəyə əsasən yalnız dayanıqlı paylanmalar üçün məzmun kəsb edir. Əgər μ ölçüsü G -də tam ehtimal ölçüsüdürsə, yeni μ ölçüsü G qrupunun əlaqəlilik siniflərinin heç birində özünün əlaqə altqrupu üzrə topalanmamışdırsa, onda $\mathcal{D}(\mu)$, yalnız və yalnız, μ ölçüsü dayanıqlı olduğu halda boş olmayan C. o.-dır (bax, [1]).

G qrupunda ixtiyari ciddi dayanıqlı μ paylanması $C_0 \otimes_\gamma K$ yarıdüz hasilinə izomorf olan hər hansı qapalı T – invariant C altqrupunda topalanmışdır, burada C_0 – birləşməli nilpotent Li

qrupu, K – kompakt qrup, $\gamma: K \rightarrow \text{Aut}(C_0)$ – yarıdüz hasilin strukturunu təyin edən homomorfizmdir. μ dayanıqlı paylanması $\mu = \mu_0 * \omega_K$ şəklində ayrılışa ifadə oluna bilər, burada μ_0 , – C_0 -da dayanıqlı paylanma, ω , – K -da normalanmış Haar ölçüsüdür (bax, [1]). Əgər G – birləşməli nilpotent $\mathfrak{g}$ Li cəbrinə malik Li qrupudursa və $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ eksponensial inikasdırsa, onda G qrupunda ixtiyari obyekt üçün (ölçü, avtomorfizm, funksional doğuran funksiyalar üçün) eksponensial inikas istifadə edərək, $\mathfrak{g}$ Li cəbrində analoji obyekt təyin etmək mümkündür. Belə obyektin hər biri qrupdakı eyni hərflə, lakin yuxarıda $\circ$

işaresi ilə (məs., əgər $v \in \mathcal{M}^1(G)$ olarsa, onda $\hat{v} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$) işarə olunduqda və əgər μ ölçüsü G -də dayanıqlı ölçüdürsə, onda *ölçülərin kompozisiya semi-qrupuna* uyğun A *doğuran funksionalından* istifadə edərək $\mathfrak{g}$ -də ölçülərin kompozisiya semi-qrupunun doğuran funksionalı $\hat{A}$ və $\hat{\lambda}$ ölçüsünü təyin etmək mümkündür. $\hat{\lambda}$ ölçüsü $\mathfrak{g}$ -də $\hat{T}$ – dayanıqlı ölçü olur. Qeyd etmək lazımdır ki, $\hat{\lambda} \neq \hat{\mu}$. Belə bir nəticə doğrudur: $v \in \mathcal{D}(\mu)$

münasibəti, yalnız və yalnız, $\hat{v} \in \mathcal{D}(\hat{\lambda})$ olduğu halda doğrudur (bax, [2], [3]). Ümumi halda, μ dayanıqlı paylanmasının idempotent ω_k vuruğu olarsa, C. o.-nın təsviri yalnız qrupların xüsusi sinifləri üçün alınmışdır. Məs., $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasının məxsusi hərəkətlərinin qrupu $M(d)$ üçün $\{X_n\}$ asılı olmayan $M(d)$ – qiymətli, v paylanmasına malik elementlərin ardıcılığı olsun. Hər bir X_i elementini $X_i = (U_i, Y_i)$ kimi göstərmək olar, burada $U_i \in SO(d)$ – koordinat başlanğıcı ətrafında fırlanma, Y_i , – $Y_i \in \mathbb{R}^d$ vektoruna $\mathbb{R}^d$ -də yerindəyişmə işarələməsidir. $\bar{v}$ ilə U_i -nin paylanması işarə olunmuşdur. Aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər μ $M(d)$ -də göstəricisi α -ya bərabər dayanıqlı paylanmadırsa, onda $v \in \mathcal{D}(\mu)$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki: 1) $\bar{v}^{*n}$ n – qat kompozisiyası $n \rightarrow \infty$ olduqda $SO(d)$ qrupunda normalanmış Haar ölçüsünə zəif yığılır; 2) $\mathbf{P}\{|Y_i| > x\} = (c + o(1))x^{-\alpha}h(x)$, burada $c > 0$, $h(x)$, – $x \rightarrow \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır (bax, [4] – [6]).

Bax, *Mərkəzi limit teoremi* qruplarda.

Əd.: [1] H a z o d W., «Lecture Notes in Math.», 1986, № 1210, p. 304–52; [2] K h o k h l o v Y u. S., In: Probability Measures on Groups, X. N. Y., 1991, p. 239–48; [3] H a z o d W., S c h e f f l e r H.-P., «J. Theor. Probab.», 1993, v. 6, № 1, p. 175–86; [4] X o k l o v Y u. S., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 342–44; [5] Г р и н ц я в и ч у с А. К., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 3, с. 39–52; [6] Г р и н ц я в и ч у с А. К., «Литов. матем. сб.», 1990, т. 30, № 1, с. 14–29.

CAZİBƏ OBLASTI operator dayanıqlı paylanmanın « **притяжения область** операторно устойчивого распределения; **domain of attraction of an operator stable distribution** » – $\mathbb{R}^d$ -də bütün e v ehtimal paylanmalarının toplusudur ki, bunlar üçün $\mathbb{R}^d$ -də xətti operatorların $\{A_n\}$ ardıcılığı vardır və $\mathbb{R}^d$ -də vektorların e $\{a_n\}$ ardıcılığı vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$Y_n = A_n(S_n - a_n)$ normalanmış cəmlərinin paylanmalar operator dayanıqlı μ paylanmasına zəif yığılır, burada $S_n = X_1 + \dots + X_n$ – eyni ν paylanmasına malik asılı olmayan təsadüfi vektorların cəmidir. B – operator dayanıqlı μ paylanmasının eksponenti olduqda, A_n kimi n^{-B} şəklində operator götürülsə, onda operator dayanıqlı paylanmanın normal cazibə oblastının tərifi alınır.

μ – eksponenti B olan, $\mathbb{R}^d$ -də tam operator dayanıqlı paylanma olsun. μ paylanması $\mathbb{R}^d$ -də sonsuz bölünən paylanmadır və onun xarakteristik funksiyası $\hat{\mu}$ -nin (a, C, M) üçlüyü ilə Levi – Xinçin kanonik ifadəsi mümkündür, burada $a \in \mathbb{R}^d$, C – kovariasion operator, M – Levi ölçüsüdür. Aydırdır ki, ixtiyari operator dayanıqlı μ paylanması $\mu = \mu_g * \mu_p$ şəklində ifadə olunur, burada μ_g – R_g altfəzasında tam Gauss ölçüsüdür, μ_p paylanması R_p altfəzasında Gauss komponenti olmayan tam operator dayanıqlı paylanmadır, R_g və R_p altfəzaları B – invariant fəzalardır və $R_p \cap R_g = \{0\}$, $R_g \oplus R_p = \mathbb{R}^d$. Levi ölçüsü aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$M(E) = \int_L \int_0^\infty I_E(t^B x) t^{-2} dt K(dx),$$

I_E – $E \subset \mathbb{R}^d$ çoxluğunun indikatorudur,

$$L = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1, \|t^B x\| > 1 \text{ bütün } t > 1 \text{ üçün}\},$$

$$K(A) = M(t^B x : x \in A, t \geq 1), A \subset L.$$

Levi ölçüsü faktiki olaraq R_p altfəzasında toplanmışdır.

F_g və F_p – uyğun olaraq, R_g və R_p altfəzalarında proyeksiyalayıcı operatorlar, $D_N(\mu)$ – operator dayanıqlı μ paylanmasının normal C. o. olsun. Aşağıdakı nəticə doğrudur: $\nu \in D_N(\mu)$ münasibəti, yalnız və yalnız o halda doğrudur ki, $F_g(\nu) \in D_N(\mu_g)$ və $F_p(\nu) \in D_N(\mu_p)$ münasibətləri ödənilsin. Bundan əlavə, $\nu \in D_N(\mu)$, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, ixtiyari $A \subset L \cap R_p$ Borel altçoxluğu üçün: $K(\partial A) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t\nu\{s^B x : x \in A, s > t\} = K(A)$ və $F_g(\nu)$

isə C kovariasion operatoru ilə üst-üstə düşən kovariasion operatora malik olsun, burada ∂A – A çoxluğunun sərhədidir (bax, [1], [2]).

Cazibə normal olmadıqda vəziyyət müəkkəbləşir, belə ki, bu halda normalayıcı operatorların şəklində verilmir.

$S^{d-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^d : \|\theta\| = 1\}$ olsun.

$$a_n(\theta) = \sup \{a \geq 0 : n\mathbf{M}(\langle X_1, \theta \rangle^2 \wedge a^2) \geq a^2\} \text{ və}$$

$$w(\theta) = \sup \{w \geq 0 : \int_{-\infty}^\infty (y^2 \wedge w^2) M_\theta(dy) + \|C_\theta\|^2 \geq w^2\}$$

S^{d-1} -də təyin olunmuş funksiyalardır, burada $a \wedge b = \min(a, b)$, C_θ – C operatorunun mehdudiyyəti, M_θ – M

ölçüsünün $\theta \in S^{d-1}$ istiqamətinə proyeksiyası, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – $\mathbb{R}^d$ -də skalyar hasilidir. $d_{n,\theta} > 0$, $M_{n,\theta}$ – spektral Levi ölçüləri olduqda, eger ixtiyari $\gamma > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} |n\mathbf{P}\{\langle X, \theta \rangle \geq d_{n,\theta}(\gamma)\} - M_{n,\theta}\{[\gamma, \infty)\}| = 0$$

münasibəti ödənilsə, onda X^d təsadüfi vektoru qalıqlarda müntəzəm $(d_{n,\theta}, M_{n,\theta})$ şərtini ödəyir, deyilir. $l_n(\theta)$ – S^{d-1} -dən olan vektorlar ardıcılığı və

$$m_{n,l_n}(\theta) = n\mathbf{M}(\langle X, \theta \rangle I\{\|\langle X, \theta \rangle\| \leq a_n(\theta)/w(l_n(\theta))\}),$$

burada $I(A)$ – A hadisəsinin indikatorudur,

$$h_{n,l_n}(\theta) = m_{n,l_n}(\theta) - a_1(M_{l_n}, b_{l_n}) a_n(\theta)/w(l_n(\theta))$$

olsun, burada

$$\begin{aligned} b_\theta &= \langle a, \theta \rangle + \\ &+ \int \langle u, \theta \rangle [(1 + \langle u, \theta \rangle^2)^{-1} - (1 + \|u\|^2)^{-1}] M(du) \\ a_1(M_\theta, b_\theta) &= b_\theta + \int_{|u| \leq 1} u^3 (1 + u^2)^{-1} M_\theta(du) + \\ &+ \int_{|u| > 1} u (1 + u^2)^{-1} M_\theta(du). \end{aligned}$$

Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} \left| h_{n,l_n}(\theta) - \sum_{j=1}^d h_{n,l_n}(\xi_{nj}) \langle \theta, \xi_{nj} \rangle \right| / a_n(\theta) = 0$$

olarsa, kəsik orta qiymətlər $m_{n,l_n}(\theta)$, $\{\xi_{n1}, \dots, \xi_{nd}\}$ bazisinə nəzərən vektoraoxşar orta qiymətlər adlanır. Bu halda ν -nün paylanması operator dayanıqlı μ paylanmasının C. o.-na, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, vahidi vektorlardan $\{\gamma_{nj}, j = 1, \dots, d\}$ bazisi mövcud olsun ki,

$$R_n : R_n^{*-1} \gamma_{nj} = (a_n(\gamma_{nj})/w(e_j)) e_j$$

operatorları və $g_n(\theta) = R_n^{*-1} \theta / \|R_n^{*-1} \theta\|$ vektorları üçün aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) X_1 təsadüfi vektoru qalıqlarda $a_n(\theta)/w(g_n(\theta), M_{g_n}(\theta))$ – müntəzəm şərtini ödəyir;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} \left| a_n(\theta)/w(g_n(\theta)) \|R_n^{*-1} \theta\|^{-1} \right| = 0;$$

3) $m_n(\theta) = m_{n,g_n}(\theta)$ kəsik orta qiymətlər $\{\xi_{n1}, \dots, \xi_{nd}\}$ bazisinə nəzərən vektoraoxşar orta qiymətlərdir, bu bazis isə R_n^{*-1} -in aşağıdakı şəkildə verilən polyar ayrılığı ilə təyin olunur:

$$R_n^{*-1} x = \sum_{j=1}^d \langle x, \xi_{nj} \rangle \|R_n^{*-1} \xi_{nj}\| \psi_{nj}.$$

burada $\{\psi_{n1}, \dots, \psi_{nj}\}$ – ortonormalanmış bazisdir. R_n operatorlarını $\{S_n\}$ ardıcılığı üçün normalayıcı kimi götürmək olar. $\{\gamma_{n1}, \dots, \gamma_{nd}\}$ bazisinin konstruktiv qurulması məsələsi hələ ki, həll olunmamışdır (bax, [3]).

Əgər μ xalis Qauss paylanmasıdır, onda ümumiliyi pozmadan, onu standart normal paylanma hesab etmək olar ki, bu paylanma da sferik simmetrik paylanmadır. Bu halda, X_1 təsadüfi vektorunun paylanması ν tam operator dayanıqlı μ paylanmasının C. o.-na, yalnız və yalnız, o halda mənsudur ki,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} r^2 \mathbf{P} \{ |\langle X_1, \theta \rangle| > r \} / \mathbf{M} (\langle X_1, \theta \rangle^2 \wedge r^2) = 0$$

münasibəti ödənilsin. Bu zaman $\alpha_n(\theta)$ funksiyasından istifadə edərək, normalayıcı A_n operatorlarını aşkar şəkildə yazmaq olur (bax, [4]). Göstəricisi $\alpha < 2$ olan sferik simmetrik dayanıqlı qanunlara cazibə şərtləri ümumi halla müqayisədə olduqca sadə olur (bax, [4]).

Əd.: [1] Jurek Z. J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 396–400; [2] Hudson W. W., Mason J. D., Vech J. A., «Ann. Prob.», 1983, v. 11, № 1, p. 178–84; [3] Hahn M. G., Klass M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1985, Bd 69, S. 479–505; [4] Hahn M. G., Klass M. J., «Lecture Notes Math.», 1981, № 860, p. 187–218.

CAZİBƏ SƏRHƏDİ « притягивающая граница; attracting boundary » – bax. *Birölçülü diffuziya; sərhədlərin təsnifatı*.

CESSEN – VİNTNER TEOREMİ « Джессен – Винтнера теорема; Jessen – Wintner theorem »: əgər ədəd oxunda diskret paylanma funksiyalarının hesabi sayda kompozisiyası paylanma funksiyasıdır, onda bu paylanma funksiyası ya diskret, ya singular, ya da mütləq kəsilməzdir (bax, *Lebeq ayrılışı*). Misallar göstərir ki (bax, [2], VIII fəs., §5), qeyd olunan hallardan hər biri reallaşır. C. – V. t. metrikləşən lokal kompakt Abel qrupları halı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Jessen B., Wintner A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, v. 38, № 1, p. 48–88; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Золотарев В. М., Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 712–24; [4] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979.

CEYMS – STEYN STATİSTİK QIYMƏTİ « Джеймса – Стейна оценка; James – Stein estimator » – kovariasion matrisi $\sigma^2 E$, orta qiymətlər vektoru nəmülüm θ olan, $\mathbb{R}^p$ -də $N(\theta, \sigma^2 E)$ Qauss paylanmasına tabe təsadüfi X vektoru üzrə təyin olunan

$$\hat{\theta}^{JS} = (1 - \sigma^2(p-2)/|X|^2)X$$

şəkildə *statistik qiymətdir*, burada E – vahidi matrisdir. $p > 2$

olduqda $\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiyməti X -in $|\hat{\theta} - \theta|^2$ itki funksiyasına nəzərən adi statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur, yəni:

$$\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}^{JS} - \theta|^2 < \mathbf{M}_\theta |x - \theta|^2 = p\sigma^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^p, \quad (1)$$

münasibəti ödənilir. Xüsusi halda $\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}^{JS}|^2 = 2\sigma^2 \cdot \hat{\theta}^{JS}$ – minimaks, lakin $\mathbb{R}^p$ -də qeyri-məqbul statistik qiymətdir və

$$\hat{\theta}_+^{JS} = (1 - \sigma^2(p-2)/|X|^2)_+ X$$

statistik qiymətini aşmır, burada $a_+ = \max(a, 0)$ işarələməsindən istifadə olunmuşdur.

X kimi eyni paylanmaya malik n sayda asılı olmayan müşahidələr nəticəsində $\hat{\theta}_n^{JS}$, $\hat{\theta}_{+n}^{JS}$ statistik qiymətləri X vektorunun seçimi vektorla, σ^2 -nin isə σ^2/n ilə əvəz olunması ilə alınır. $n \rightarrow \infty$ olduqda hər iki statistik qiymət $|\theta| > \delta$, $\delta > 0$ üzrə müntəzəm ayrılığa ifadə olunur:

$$n \mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}_n - \theta|^2 = p\sigma^2 - (p-2)\sigma^4 n^{-1} |\theta|^2 (1 + o(1))$$

və n^{-1} -ə qədər dəqiqliklə məqbul statistik qiymətlərdir.

(1)-i ödəyən $\hat{\theta}$ statistik qiymətlərin varlığı 1956-da Ç. Steyn tərəfindən kəşf olunmuşdur (bax, [1]), $\hat{\theta}^{JS}$ və $\hat{\theta}_+^{JS}$ statistik qiymətləri [2]-də təklif olunmuşdur.

Geniş planda Ç. Steynin aldığı nəticə (effekt) ondan ibarətdir ki, asılı olmayan seçimlər üzrə qurulmuş, $\hat{\theta}_i$ komponentləri və uyğun θ , parametrlərinin məhz məqbul statistik qiymətləri olan $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ statistik qiyməti skalyar itki funksiyasına nəzərən $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ vektorunun qeyri – məqbul statistik qiyməti ola bilər. Bu nəticə qiymətləndirmənin müxtəlif məsələlərini hələ edir.

$N(\theta, G)$ Qauss paylanmasına malik X müşahidəsi üzrə nəmülüm θ vektorunu qiymətləndirmək tələb olunur; bu halda kvadratik itki funksiyasının $L(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|^T H(\hat{\theta} - \theta)$ olduğu fərz olunur, burada G, H – verilmiş simmetrik müsbət müəyyən matrislərdir. $\hat{\theta} = X + Gg(X)$ şəkilli statistik qiymətlər üçün risk

$$\mathbf{M}_\theta L(\hat{\theta}, \theta) = \mathbf{M}_\theta (L(X, \theta) + \delta(X))$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, – $N(\theta, G)$,

$\theta \in \mathbb{R}^p$ ölçüsü üzrə $|g|^2$ ilə birlikdə inteqrallanan hissə-hissə kəsilməz tələmələrə malikdir,

$$\delta(x) = \sum_{i,j=1}^p C_{ij} \left(2 \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + g_i(x) g_j(x) \right),$$

$$C = (C_{ij}) = GHG. \quad (2)$$

$g(x) = \nabla \ln f^2(x)$, $f(x) > 0$ olsun. Onda

$$\delta(x) = \varphi f^{-1}(x) \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

olur və $f(x) = \lambda(C^{1/2}x)$ əvəzləməsindən sonra $\delta(x)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\delta(x) = \varphi(\Delta\lambda/\lambda)(C^{-1/2}x),$$

$\Delta\lambda$ – Laplas operatorudur.

Beləliklə, $\Delta\lambda/\lambda$ nisbətinin xüsusiyyətləri ilə integrallanan ixtiyari müsbət superharmonik λ funksiyası üçün X -in standart statistik qiymətindən üstün olan $\hat{\theta}$ statistik qiyməti vardır. $p > 2$ olduqda, xüsusi halda, $\alpha = (2-p)/2$ qiymətlərində $\Delta\lambda/\lambda$ nisbətinin minimal olduğu sinifdə $\lambda = |x|^\alpha$, $2-p \leq \alpha \leq 0$ belə funksiyalardır. Bu halda uyğun statistik qiymət

$$\hat{\theta} = (1 - (p-2)H^{-1}G^{-1}/X^T G^{-1}X)X$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və $H = G = E$ olduqda bu bərabərlikdən $\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiyməti alınır.

$\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiymətinin qurulma metodunun çoxsaylı ümumləşmələri mövcuddur. $\hat{\theta}^{JS}$ -in bezi modifikasiyalari aşağıda şərh olunur.

1) Statistika G matrisi məlum deyildir, lakin ona orta qiyməti G -yə bərabər və sərbəstlik dərəcəsi sayı $n-1$ olan, Uışart paylanmış S' statistik qiyməti məlumdur. $p > 2$ olduqda

$$(1 - (p-2)/(n-p+3))X^T S^{-1}X)X$$

statistik qiyməti itki funksiyası $(\hat{\theta}-\theta)G^{-1}(\hat{\theta}-\theta)$ -ya nəzərən X -in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur (bax, [2]).

$$2) y_i = \sum_{j=1}^p X_{ij} \theta_j + \varepsilon_i$$

tenlikləri ilə verilən xətti reqressiya məsələsində $(\hat{\theta}-\theta)^T X^T \times X(\hat{\theta}-\theta)$ itki funksiyasının Ceyms – Steyn tipli statistik qiyməti

$$(1 - \sigma^2(p-2)/|\hat{\theta}_0|^2)\hat{\theta}_0$$

kimi ifadə olunur, burada ε_i – müşahidələrin $(0, \sigma^2)$ parametrləri asılı olmayan Gauss xətalari, $X = (X_{ij})$, $\hat{\theta}_0$ – ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunmuş statistik qiymətdir.

3) X vektorunun komponentlərinin asılı olmayan X_i təsadüfi kəmiyyətləri, $M X_i = \theta_i$, $M(X_i - \theta_i)^2 = 1$, $M(X_i - \theta_i)^3 = 0$, $M(X_i - \theta_i)^4 = k$ olduğu fərz olunur. Onda bütün $p > 2$, $b \leq p-2$, $a \geq 4,5 + 4(k-3)/3$ qiymətlərində $\hat{\theta} = (1 - b/(a + |X|^2))X$ statistik qiyməti $|\hat{\theta}-\theta|^2$ itki funksiyasına nəzərən X -in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur.

4) $X-\theta$ vektorunun sferik simmetrik paylanmaya malik olduğu fərz olunur. Onda $p > 3$, $0 < a \leq 2(p-2)/p M_0 |X|^{-2}$ qiymətlərində $(1 - a/|X|^2)X$ statistik qiyməti $|\hat{\theta}-\theta|^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$ itki funksiyasına nəzərən X -in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur (bax, [4]).

Əgər müşahidə olunan X vektorunun komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, onların paylanmaları eksponensial

paylanmalar sinfindən olarsa, onda $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ standart statistik qiymətlərinin yaxşılaşdırma proseduru $\delta(x) \leq 0$ differensial bərabərsizliyinin həllinə getirilir, burada δ – $C_{\theta}(x)$ əmsalları dəyişən olan (2) tipli ifadədir (bax, [5] – [7]). X vektorunun həddim. – ölçüsü (Gauss paylanması halında ikiyə bərabərdir) bu halda ixtiyari ola bilər.

Əd.: [1] Stein C., в кн.: Proc. 3rd Berk. Sympos. Math. Statist. Probab., v. 1, Berk., 1956, p. 197–206; [2] James W., Stein C., в кн.: Proc. 4th Berk. Sympos. Math. Statist. Probab., v. 1, Berk., 1961, p. 361–79; [3] Shinozaki N., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 1, p. 322–35; [4] Brandwein A., Strawderman W., «Ann. Statist.», 1980, v. 8, № 2, p. 279–84; [5] Berger J., «Ann. Statist.», 1980, v. 8, № 3, p. 545–71; [6] Brown L., «Ann. Statist.», 1980, v. 8, № 3, p. 572–85; [7] Ghosh M., Parsian A., «J. Multivar. Anal.», 1980, v. 10, № 4, p. 551–64.

* – CƏBR «* – алгебра; * – algebra» – bax, Cəbri müşahidələnlərin.

CƏBR, A ÇOXLUĞUNUN DOĞURDUĞU « алгебра, порожденная множеством A; algebra, induced by set A » – bax, Çoxluqlar cəbri.

CƏBRİ DEKODLAMA « алгебраическое декодирование; algebraic decoding » – kodun cəbri strukturunu istifadə edən dekodlamadır. Məs., $n = q^m - 1$ uzunluqlu, $2t + 1$ konstruktiv məsafəli,

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha^{ij} = 0, \quad j=1, 2, \dots, 2t$$

xətti tenliklər sistemi ilə verilən q -lük BÇH kodu üçün C. k. – namelum $y_i, x_i \in F_q^m$ simvollarına görə

$$\sum_{i=1}^t y_i x_i^j = S_j, \quad j=1, 2, \dots, 2t$$

cəbri tenliklər sisteminin həllindən ibarətdir; α , – q^m elementdən ibarət F_q^m meydanının primitiv elementidir. BÇH (Bouz – Çoudhuri – Hokvinqem; Boze R. C., Ray – Chaudhuri D. K., Hocquenghen A.) kodlarının əsas xassəsi ondan ibarətdir ki, onların vasitəsilə asanlıqla reallaşan sadə alqoritmlə t saydaya qədər səhvi düzəltmək olur. Müvafiq Berlekemp alqoritm polinomial mürəkkəbliyə malikdir (bax, Mürəkkəblilik(yi) kodlama və dekodlamanın) və əgər səhvlərin sayı t -ni aşmırsa, o, məlumatı (kod sözünü) düzgün bərpa etməyə imkan verir.

Qeyd etmək lazımdır ki, hal-hazırda kodların geniş bir sinfi üçün səhv dekodlama ehtimalını minimallaşdıran C. d.-lər məlum deyildir.

Əd.: [1] Берлекемп Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971.

CƏBRİ, HADİSƏLƏRİN « алгебра событий; algebra of events » – elementləri elementar hadisə adlanan hər hansı Ω çoxluğunun altçoxluqlarının cəbri. Hər bir çoxluqlar cəbri kimi H. c. sonlu sayda birləşmə, kəsişmə və inkar əməllərinə nəzərən qapalı sinfidir. Hesabi sayda birləşmə əməlinə görə qapalı H. c. hadisələr σ -cəbri adlanır. İxtiyari hadisələr σ – cəbri hesabi sayda aparılan nəzəri – çoxluq əməllərinə nəzərən qapalı çoxluqdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində ekrer hallarda aşığıdaki H. c. və hadisələr σ – cəbrlərinə baxılır.

1) Ω çoxluğunun sonlu altçoxluqlarının və onların tamamlayıcılarının cəbri; Ω çoxluğunun hesabi altçoxluqlarının və onların tamamlayıcılarının σ – cəbri. 2) $\mathbb{R}^k$ -nin $\{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, \dots, k, -\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty\}$ şəklində intervallarının sonlu birləşmələrindən təşkil olunmuş, $\mathbb{R}^k$ -nin altçoxluqlarının cəbri. 3) Ω -nın bütün açıq altçoxluqlarını özündə saxlayan minimal σ – cəbr, yəni Ω topoloji fəzasının Borel altçoxluqlarının σ – cəbri. 4) Funksiyalara (trayektoriyalar fəzasında σ – cəbr və bu funksiyaların doğurduğu σ – cəbr.

Hadisələr cəbri və hadisələr σ – cəbrləri $\mathbf{P}$ ehtimalının təyin olunma oblastlarıdır. Əgər $\mathbf{P}(E) = 0$ olarsa, E – qeyri – mümkün hadisə, $\mathbf{P}(E) = 1$ olarsa, E – yəqin hadisə adlanır. $\mathcal{A}$ cəbrində ixtiyari σ – additiv ehtimal $\mathcal{A}$ -nın doğurduğu σ – cəbrdə (yəni $\mathcal{A}$ -ni özündə saxlayan minimal σ – cəbrdə) təyin olunan σ – additiv ehtimala qədər birqiymətli davam olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

σ – CƏBRI, HADİSƏLƏRİN « σ – алгебра событий; σ – algebra of events » – bax, Cəbri, hadisələrin, Borel meydanı, hadisələrin.

CƏBRI, KVAZİLOKAL MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏRİN « алгебра квазилокальных наблюдаемых; algebra of quasilocal observables » – bax, Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.

CƏBRI, MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏRİN « алгебра наблюдаемых; algebra of observables » – qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir.

Toplama, hasil, kompleks ədədə vurma əməlləri və $X \rightarrow X^*$ involyusiya əməli təyin olunmuş assosiativ cəbr aksiomları və

$$(X^*)^* = X, (X+Y)^* = X^* + Y^*$$

$$(XY)^* = Y^*X^*, (\lambda X)^* = \bar{\lambda}X^*$$

aksiomları ödənilən, $X, Y, \dots$ elementlərinin çoxluğuna $*$ – cəbr deyilir, burada λ – ixtiyari kompleks ədəddir. Məs., verilmiş ehtimal fəzasında təyin olunmuş kompleks təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu kommutativ $*$ – cəbr təşkil edir. Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində fiziki sistemlərin ümumi modellərinə baxılır və bu modeller üçün müşahidələnlər çoxluğu, ümumiyyətlə, ixtiyari $*$ – cəbri təşkil edir. Müşahidələnlər X və Y -in qeyri – kommutativliyi, məs., kvant – mexaniki sistemlərdə tamamlanma fenomeninin real təzahürüdür (bax, Qeyri – müəyyənliklər münasibəti). Nəzərə alınmalıdır ki, sözün həqiqi mənasında müşahidələnlər (gerçək) mehz $*$ – cəbrin öz-özünə qoşma elementləridir, yəni ele X elementləridir ki, $X^* = X$. Riyazi nöqtəyi – nəzərdən norma anlayışının daxil olunması mümkün olan məhdud M. c. əlverişlidir. $\|X^*X\| = \|X\|^2$ bərabərliyi ödənilən Banax $*$ – cəbri $\mathcal{A}$, C^* – cəbri

adlanır. $Y \in \mathcal{A}$, $X = Y^*Y$ olduqda $X \geq 0$ olarsa, öz-özünə qoşma $X \in \mathcal{A}$ müsbət element adlanır.

Əgər $X - Z \geq 0$ olarsa, $X \geq Z$ qəbul edərək, öz-özünə qoşma elementlər çoxluğu $\mathcal{A}$ -da həqiqi, qismən nizamlanmış vektor fəzası daxil edilir.

I vahidinə malik C^* – cəbrində vəziyyət $\mathcal{A}$ -da ele müsbət φ xətti funksionalına deyilir ki, $X \geq 0$ olduqda $\varphi(X) \geq 0$ və $\varphi(I) = 1$ olsun. Bütün mümkün vəziyyətlər çoxluğu $\mathfrak{S}$ qoşma $\mathcal{A}^*$ fəzasının zəif qabarıq $*$ – kompakt altçoxluğudur.

Misallar. 1) Adi cəbri əməllər, involyusiya kimi – kompleks qoşma və müntəzəm norma təyin olunmuş, verilmiş ölçülən Ω fəzasında $X(\omega)$ məhdud kompleks təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxluğu kommutativ C^* – cəbri təşkil edir. Ω -da hər hansı bir $\mathbf{P}(d\omega)$ ehtimal paylanması

$$\varphi(X) = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$$

düsturu ilə vəziyyət doğurur.

2) $\|X\| = \text{ess sup} |X(\omega)|$ norması ilə (Ω, μ) ölçülü fəzasında məhdud kompleks təsadüfi kəmiyyətlərin ekvivalentlik siniflərinin çoxluğu $L_{\infty}^{\mathbb{C}}(\Omega, \mu)$ kommutativ C^* – cəbri əmələ getirir. Əgər $p(\omega)$ ele inteqrallanan təsadüfi kəmiyyətdirsə ki, $p(\omega) \geq c \pmod{\mu}$ və

$$\int_{\Omega} p(\omega) \mu(d\omega),$$

onda

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} X(\omega) p(\omega) \mu(d\omega)$$

$L_{\infty}^{\mathbb{C}}(\Omega, \mu)$ vəziyyət təyin edir.

3) Operator norması ilə verilən kompleks H Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorlar çoxluğu $\mathfrak{B}(H)$ qeyri – kommutativ C^* – cəbri əmələ getirir. S – operator sıxlığı, tr – operatorun H -da izi olduqda, $\varphi(X) = \text{tr} SX$ münasibəti $\mathfrak{B}(H)$ -da vəziyyət təyin edir.

Abstrakt ixtiyari C^* – cəbri hər hansı Hilbert fəzası H -da məhdud operatorlar cəbrinə izomorfdur. Bu halda kommutativ C^* – cəbrləri funksiyalara vurma operatorlarının cəbri kimi reallaşır. Zəif operator topologiyasında qapalı operator C^* – cəbri W^* – cəbri adlanır [mis. 2) və 3)]. Əgər $\{Y_{\alpha}\} \subset \mathcal{A}$ Hermit elementlərinin məhdud istiqamətlənmiş çoxluğu üçün $\sup_{\alpha} \varphi(X_{\alpha}) =$

$= \varphi(\sup_{\alpha} Y_{\alpha})$ bərabərliyi ödənilərsə, φ vəziyyəti W^* – cəbri

$\mathcal{A}$ -da normal vəziyyət adlanır. 2) və 3) mis.-da uyğun W^* – cəbrlərində normal vəziyyətlərin ümumi şəkil verilir

Əd.: [1] Дикслее Ж., C^* – алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [2] Браттлн У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

CƏBRİ, SİLİNDRİK ÇOXLUQLARIN « алгебра цилиндрических множеств; algebra of cylinders » – sonluölçülü ölçülən oturacaqları $\Omega = \prod_{t \in T} \Omega_t$ fəzalar hasilindən

olan silindrlərin $\mathcal{A}$ – cəbridir, burada T – ixtiyari çoxluq, Ω_t – hər bir $t \in T$ üçün altçoxluqlarının uyğun $\mathcal{A}_t$ cəbri ilə verilən çoxluq olsun. $\mathcal{A}$ cəbrinin elementləri olan

$$\left\{ \omega = \{ \omega_t, t \in T \} : T_s \omega \in E \in \prod_{t \in S} \mathcal{A}_t \right\} \quad (*)$$

şəklində çoxluqlar – silindrlər adlandırılır, burada $S, - T$ -də sonlu altçoxluqdur, $T_s \omega = \{ \omega_t, t \in S \}$, – ω elementinin $\prod_{t \in S} \Omega_t$ fəzasına proyeksiyası və $\prod_{t \in S} \mathcal{A}_t$, – $\mathcal{A}_t, t \in S$ cəbrləri-nin hasilidir, yəni $\prod_{t \in S} \Omega_t$ -nin $\{ \{ \omega_t, t \in S \} : \omega_t \in E_t \in \mathcal{A}_t, t \in S \}$ şəklində altçoxluqlarının sonlu birləşmələrinin çoxluğudur.

E çoxluğu (*) silindrinin oturacağı adlanır. Əgər $\mathcal{A}_t \sigma$ – cəbrlər olarsa, onda S -in qeyd olunmuş (*) çoxluqları da σ – cəbr təşkil edir, lakin $\mathcal{A}$ -nin özü, ümumiyyətlə, cəbr deyildir.

Bax, Silindrik σ – cəbr.

Əd.: [1] Н е в Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Л о в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

CƏBRİ TƏSADÜFİ TƏNLİK « алгебраическое случайное уравнение; algebraic random equation » – əmsalları $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri olan

$$f(t) = t^n + \xi_1 t^{n-1} + \dots + \xi_n = 0 \quad (*)$$

tipli tənlikdir. (*) tənliyinin kökləri $v_1 = \lambda_1 + i\mu_1, v_2 = \lambda_1 - i\mu_1, \dots, v_{2k-1} = \lambda_k + i\mu_k, v_{2k} = \lambda_k - i\mu_k, v_{2k+1} = \tau_1, \dots, v_n = \tau_{n-2k}$ şəklində ifadə olunur, $|v_1| \geq \dots \geq |v_n|$, burada $\lambda_l, \mu_l, l = \overline{1, k}, \tau_j, j = \overline{1, n-2k}$ – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, k isə təsadüfi kəmiyyətin indeksi olub, 0-dan $[n/2]$ -yə qədər tam qiymətlər alır.

Əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması sıxlıq funksiyası $p(x_1, \dots, x_n)$ vardırsa, onda (*) tənliyinin kökləri vahid ehtimalla müxtəlifdir. Əgər ξ_i -lər kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, ξ_i -lərin isə xəyali və həqiqi komponentlərinin birgə paylanması sıxlıq funksiyası $p(\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i; i = \overline{1, n})$ vardırsa, onda v_i köklərinin ($i = \overline{1, n}$) paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(\operatorname{Re} \Delta_i, \operatorname{Im} \Delta_i; i = \overline{1, n}) \prod_{\substack{i, j = \overline{1, n} \\ i > j}} |z_i - z_j|$$

şəklindədir, burada $\arg v_1 > \dots > \arg v_n; \arg z_1 > \dots > \arg z_n, \Delta_i$ funksiyası z_i kompleks dəyişənin simmetrik funksiyasıdır, $i = \overline{1, n}$. (*) tənliyinin (a, b) intervalında köklərinin sayı $n(a, b)$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$n(a, b) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_a^b \cos[yf(t)] |f'(t)| dt,$$

burada təkrarlanan kök bir dəfə nəzərə alınır və əgər kök a və ya b ilə üst-üstə düşərsə, bu halda $n(a, b)$ $1/2$ qədər azalır. $\xi_i, i = \overline{1, n}$ əmsalları $(0, 1)$ parametrlili normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$M n(a, b) = \pi^{-1} \int_a^b [1 - h_n^2(t)]^{-1/2} (1 - t^2)^{-1} dt,$$

$$h_n(t) = n t^{n-1} (1 - t^2)(1 - t^{2n})^{-1}.$$

Əd.: [1] Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред., Прохоров Ю. В., М., 1999; [2] К а ц М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965.

CƏKNAYF METODU « метод складного ножа; Jackknife method » – bax, Boyskaut bıçağı (qatlanan bıçaq) metodu.

CƏMİ, TƏSADÜFİ SAYDA TƏSADÜFİ KƏMİY-YƏTLƏRİN « сумма случайного числа случайных величин; sum of random number of random variables » – bax, Təsadüfi cəm.

CƏMLƏNMƏ SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « схема суммирования случайных величин; scheme of summation of random variables » – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas modellərindən biridir ki, burada təsadüfi kəmiyyətlərin $S_n = X_1 + \dots + X_n$ cəmlərinin sonlu və sonsuz toplulana baxılır. C. s.-nin xüsusi halları $X_j, j = \overline{1, n}$ toplananları üçün hər hansı əlavə fərziyyələrlə bağlıdır. Nəticədə Markov zənciri təşkil edən və ya stasionar ardıcılıq əmələ gətirən və s. kimi təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin modelləri yaranır. Ümumi halda $(X_1, \dots, X_n)$ toplananlarının birgə paylanması n -dən asılı ola bilər (bax. Seriyalar sxemi, üçbucaq sxem), cəmlərdəki toplananların sayı isə sonsuz da ola bilər (sonuncu halda fərz olunur ki, sıra sanki yəqin yığılır). Təsadüfi kəmiyyətlərin C. s. ilə bağlı digər nəticələr haqqında bax, Limit teoremləri, Limit teoremləri Markov zəncirləri üçün.

p – CƏMLƏYİCİ OPERATOR « p – суммирующий оператор; p – summing operator » – bax, Radonlayıcı operator.

CIRLAŞAN PAYLANMA « вырожденное распределение; degenerate distribution » n ölçülü Евклид fəzasında – baxılan fəzanın dim. – ölçüsü n -dən kiçik olan hər hansı xətti çoxoxobrazlısında toplanmış ehtimal paylanmasıdır. Əks halda paylanma cırlaşmayan paylanma adlanır. İkinci momenti sonlu C. p. onunla səciyyələnir ki, uyğun kovariasiyalar (və ya korrelyasion) matrisinin rəngi r, n -dən kiçik olur. Bu halda r verilmiş C. p.-nin toplanıldığı xətti çoxoxobrazlının dim. – ölçülərindən ən kiçiyi ilə üst-üstə düşür. C. p. anlayışı təbii olaraq vektor fəzalarında verilmiş paylanmalar üçün də verilir. Bəzən C. p. qeyri-məxsusi paylanma, cırlaşmayan paylanma isə məxsusi paylanma da adlanır.

Xarakteristik funksiyası vahidə bərabər olan, yeganə artım nöqtəsi $x=0$ nöqtəsində olan cırlaşan təsadüfi kəmiyyətin paylanması C. p.-dir. Təsadüfi kəmiyyətin C. p.-si $\mathcal{L}(0)$ ehtimal nəzəriyyəsinin əsas qanunlarından biridir.

CIRLAŞMAYAN PAYLANMA, məxsusi paylanma « невырожденное распределение, собственное распределение; nondegenerate distribution » – bax, Cırlaşan paylanma.

CIRLAŞMAYAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « невырождающийся ветвящийся процесс; nondegenerating branching process » – bax, Şaxələnen proses; cırlaşan.

CIRLAŞMIŞ İKİÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « вырожденное двумерное нормальное распределение; degenerate / singular bivariate normal distribution » – bax, İkiölçülü normal paylanma.

CIRLAŞMIŞ ÖLÇÜ « вырожденная мера; degenerate / singular measure » – bax, Atomik ölçü.

CİDDİ DAYANIQLI PAYLANMA « строго устойчивое распределение; strictly stable distribution » – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan, müəyyən $B_n > 0$ sabitləri ilə normalanmış $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri –

$$Z_n = (\xi_1 + \dots + \xi_n) B_n^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda bütün mümkün ola bilən limit paylanmalarını özündə cəmləşdirən. *dayanıqlı paylanmalar* sinfinin altsinfi $\mathfrak{M}$ -dən olan paylanmadır. $\mathfrak{M}$ -dən olan qanunların paylanma funksiyaları üçparametrlidir

$$G(x, \alpha, \theta, \lambda), \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

$$|\theta| \leq \min(1.2/\alpha - 1), \quad \lambda > 0$$

ailesini əmələ gətirir.

$$G(x, \alpha, \theta, \lambda) = G(x\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta, 1)$$

olduğundan bu qanunları standartlaşdırmaq mümkündür. $G(x, \alpha, \theta) = G(x, \alpha, \theta, 1)$ funksiyaları bir-birilə çoxsaylı analitik münasibətlərlə əlaqədirlər (bax, [1]), xüsusilə də, bu funksiyalar üçün *sonsuz bölünən paylanmaların ikilik xassəsi* olduqca geniş variantlarda məlumdur: əgər $\alpha \geq 1$, $x > 0$ olarsa, onda ixtiyar θ üçün

$$\alpha(1 - G(x, \alpha, \theta)) = C(x^{-\alpha}, \alpha^*, \theta^*) - (1 - \theta^*)/2$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\alpha^* = 1/\alpha$, $1 + \theta^* = \alpha(1 - \theta)$.

C. d. p.-lar *Dayanıqlı paylanma* məqaləsində qeyd olunmuş funksional tənliyin həlləri çoxluğunu təşkil edir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

CİDDİ MARKOV XASSƏSİ « строго марковское свойство; strong Markov property » – $\zeta_t = \zeta(t)$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin qeyd olunmuş anda «indiki» ζ_τ vəziyyəti məlum olarsa, onun «gelecek» $\{\zeta_t\}_{t \geq \tau}$ vəziyyətlərinin bu

prosesin «keçmiş» $\{\zeta_t\}_{t < \tau}$ vəziyyətlərindən asılı olmamalıdır (ehtimali nöqtəyi – nəzərdən) xassəsidir, burada τ yalnız Markov xassəsindəki konstantlar kimi deyil, ixtiyari dayanma anları kimi də anlaşılar. Sadəlik üçün fərz olunur ki, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$, – $(E, \mathcal{B})$ fəza fəzasında qınılmayan bircins Markov prosesi, $p(t, x, \Gamma)$ isə əsas $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında keçid funksiyasıdır. $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında ζ_τ -i $\zeta_{\tau+t}$ -yə çevirən θ_t operatorlarının da təsir etdiyi nəzərdə tutulur. ζ *progressiv ölçülən proses* olsun (bu şərt ζ_τ -nin $\mathcal{A}_\tau$ – ölçülənliyini təmin edir).

Əgər ixtiyari $t \geq 0$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ və ixtiyari sonlu τ dayanma anı üçün $(\Omega$ -də θ_τ funksiyası üçün ki, $0 \leq \tau < \infty$ və $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t$, $t \geq 0$), burada $\mathcal{A}_t = \{A: A \in \mathcal{A}, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t, t \geq 0\}$)

$$P_x\{\zeta_{\tau+t} \in \Gamma | \mathcal{A}_\tau\} = p(t, \zeta_\tau, \Gamma) \quad (*)$$

bərabərliyi P_x – sanki yəqin ödənilərsə, ζ – ciddi Markov xassəli prosesdir. (*)-dan C. M. x.-nin digər formaları alınır:

$$P_x\{\zeta_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{A}_\tau\} = p(\eta, \zeta_\tau, \Gamma), \quad P_x \text{ – sanki yəqin}$$

burada $\eta \geq 0$ – ixtiyari $\mathcal{A}_\tau$ – ölçülən sonlu funksiyadır və

$$M_x(\xi \theta_\tau \psi) = M_x(\xi M_{\zeta_\tau} \psi)$$

şəklində C. M. x.-nin ifadələri; sonuncu bərabərlikdə ξ, ψ – məhdud təsadüfi kəmiyyətlər, uyğun olaraq $\mathcal{A}_\tau$ və $\sigma(\zeta_\tau)$, $t \geq 0$ σ – cəbrlərinə nəzərən ölçülən funksiyalardır.

C. M. x. ilk dəfə C. Dub tərəfindən (bax, [1]) ifadə olunmuş və vəziyyətləri çoxluğu hesabı olan Markov prosesləri və $\tau \geq 0$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün isbat olunmuşdur ki, $\xi_{\tau+0} = \zeta_\tau$

və « $\tau < s$, $\tau > s$ hadisələri $t < s$ olduqda ζ_t -nin qiymətləri üzrə təyin olunur» (bax, [1]). $\mathcal{A}_\tau$ σ – cəbrləri ilə (*)-nın ifadəsi

[2]-də verilmişdir və burada τ «gelecekdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət» kimi ifadə olunmuşdur. C. M. x.-nin ümumi tərifinin digər variantı [3]-də təklif olunmuşdur. C. M. x.-ne malik proses *ciddi Markov prosesi* adlanır. C. M. x. bircins olmayan Markov prosesləri və təsadüfi proseslər üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 58, p. 455–73; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [3] Blumenthal R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 52–72; [4] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [5] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

CİDDİ MARKOV PROSESİ « строго марковский процесс; strong Markov process » – *ciddi Markov xassəli təsadüfi prosesdir*. Ümumi C. M. p. anlayışı bir-birindən asılı olmayaraq [1] və [2]-də daxil olmuşdur, xüsusi hallara isə əvvəllər baxılmışdır [hesabi bircins C. M. p. C. Dub (J. Doob), sonra A. A. Yuşkeviç tərəfindən, asılı olmayan artımlı bircins C. M. p. isə C. Hunt (J. Hunt) tərəfindən araşdırılmışdır].

Diskret zamanlı ixtiyari Markov prosesi C. M. p.-dir, kəsilməz zamanlı proseslər üçün bu doğru deyildir (bax, [1]). İsbat olunur ki, əgər: 1) $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ bircins Markov prosesinin bütün trayektoriyaları E metrik fəzasında sağdan kəsilməz olarsa və

2) ζ – Feller prosesidirsə, yeni ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $F(x) = M_x f(\zeta_t)$, $x \in E$ funksiyası ixtiyari məhdud f funksiyası üçün E -də kəsilməzdirsə, onda ζ C. M. p.-dir (bax. [1]). Bu nəticə $\mathcal{A}_t$, σ – cəbrlərini $\mathcal{A}_{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{A}_u$

σ – cəbri ilə əvəz etdikdə də doğrudur və biricins olmayan Markov proseslərini də əhatə edir.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [2] Blumenthal R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 53–72; [3] Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 2, с. 187–213; [4] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

CONSON – UELÇ ÇEVİRMƏSİ « Джонсона – Уэлча преобразование; Johnson – Welch transformation » – mərkəzlənməyən Student t – paylanmasının mərkəzlənməməzlik parametri üçün birtərəfli etibarlılıq sərhədinin approksimasiyasıdır. X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $X \sim N(\delta, 1)$, Y^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı n olan χ^2 – paylanmasına təbə təsadüfi kəmiyyət, $T = \sqrt{n} X / Y$ olsun. Onda δ üçün etibarlılıq əmsali p -yə bərabər δ_p aşağı etibarlı sərhədi, təqribi olaraq

$$\tilde{\delta}_p = T - \Phi^{-1}(p) \sqrt{1 + T^2/2n}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\Phi^{-1}(p)$ standart normal paylanmanın p – kvantilidir (bax. [1]).

$$\delta_p^* = \begin{cases} (\beta - F_v^{-1}(p)) / \alpha, & T < 0 \text{ olduqda,} \\ (\beta - F_v^{-1}(1-p)) / \alpha, & T > 0 \text{ olduqda,} \end{cases}$$

approksimasiyası alınmışdır, burada $F_v^{-1}(p)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı v olan χ – paylanmanın p – kvantilidir. $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$v \approx n/x^3, \quad \alpha \approx (-\text{sign } T) \sqrt{(1-x)/2}, \\ \beta \approx \sqrt{n}(1-x^2)x^{-3/2},$$

olduğu alınır, burada $x = T^2/(T^2 + 2n)$, $\tilde{\delta}_p - \delta_p = O(n^{-1/2})$

olur, lakin $n \rightarrow \infty$ olduqda $\delta_p^* - \delta_p = O(n^{-3/2})$ olur.

Əd.: [1] Johnson N. L., Welch B. L., «Biometrika», 1940, v. 31, p. 369–89; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., П а г у р о в а В. И., Аппроксимация нецентрального t – распределения, М., ЦЭМИ, 1975 (репринт).

CÜT–CÜT ASILI OLMAMAZLIQ « попарная независимость; pairwise independence » – bax, *Asılı olmamazlıq*.

CÜTLÜYÜN KORRELYASIYA ƏMSALI « парной корреляции коэффициент; paired correlation coefficient » – bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi*.

ÇATILABİLİNƏN SƏRHƏD « достижимая граница; attainable boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

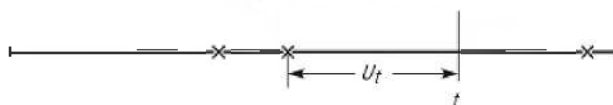
ÇATILABİLİNƏN VƏZİYYƏT « достижимое состояние; accessible / reachable state » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabı.

ÇATILMAYAN SƏRHƏD « недостижимая граница; inattainable boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

ÇATILMAYAN VƏZİYYƏT, *Markov zənciri* üçün « недостижимое состояние цепи Маркова; nonaccessible state of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

ÇATIM MÜDDƏTİ / ДЕФЕКТ « недоскок / дефект / обратное время возвращения; defect » $\eta(t)$, – $\zeta(t)$ semi – *Markov prosesi*nin ixtiyari qeyd olunmuş t anından əvvəlki sonuncu bərpə anı ilə t arasındakı müddətdir (bax, şəkil), yeni

$$\eta(t) = t - \sup_x \{s \leq t: \zeta(s) \neq \zeta(t)\}$$



× – bərpə anıdır.

Ç. m. semi – *Markov prosesi* ilə birlikdə, $\{\zeta(t), \gamma(t); t \geq 0\}$ xəttvari *Markov prosesi*ni əmələ gətirir. Xüsusi halda, $G(t) = P\{\theta_k \leq t\}$ paylanma funksiyası və sonlu $M\theta_k = m$ riyazi gözləməsi ilə təyin olunan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, n \geq 1$$

bərpə prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s)) ds / m$$

olan η^* stasionar Ç. m. vardır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ÇEBİŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ « Чебышева неравенство; Chebyshev inequality », *Byeneme – Çebişev bərabərsizliyi* – ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsindən yayınmasının ehtimalını bu təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası ilə qiymətləndirən bərabərsizlikdir.

$\xi(\omega)$ – sonlu riyazi gözləməsi $M\xi(\omega)$ və dispersiyası $D\xi(\omega)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Ç. b. onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\{\omega: |\xi(\omega) - M\xi(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

hadisəsinin ehtimalı $D\xi/\varepsilon^2$ ədədini aşmır və ya

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon \sqrt{D\xi}\} \leq 1/\varepsilon^2.$$

Bu bərabərsizlik bir-birindən asılı olmadan İ. Byeneme (I. Bienaymé, 1853) və P. L. Çebişev (1866) tərəfindən kəşf olunmuşdur. Müasir ədəbiyyatda bu bərabərsizlik daha çox Ç. b. adlandırılır, bu da ona əsaslanır ki, *böyük ədədlər qanununun* ümumiləşmiş formasının isbatı P. L. Çebişevin adı ilə bağlıdır (*Çebişev teoremi*).

Ç. b. eynitipli bərabərsizliklərin bütün bir sinfinin ifadəçisidir; bunlardan ən sadəsində hökm olunur ki, riyazi gözləməsi sonlu $M\xi$ olan, mənfə olmayan ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq M\xi/\varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur (bu bərabərsizlik bezen *Markov bərabərsizliyi* adlanır). Bu bərabərsizlikdən ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər üçün momentlərlə ifadə olunan aşağıdakı bərabərsizliklər alınır:

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq M|\xi|^r/\varepsilon^r.$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq M|\xi - M\xi|^r/\varepsilon^r, r \geq 1$$

bərabərsizlikləri ($r=2$ olduqda Ç. b.-nin özü), daha ümumi olan x -in müsbət qiymətlərində azalmayan, mənfə olmayan cüt $f(x)$ funksiyası üçün

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq Mf(\xi)/f(\varepsilon) \quad (*)$$

bərabərsizliyi belələrindəndir. (*) bərabərsizliyindən bu tipli yeni bərabərsizliklər alınır. Məs.,

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq M e^c \xi / e^{c\varepsilon}, c > 0$$

eksponensial bərabərsizliyi. Ənənəvi olaraq, bütün bu bərabərsizliklər Çebişev tip bərabərsizliklər hesab olunur və hətta «Ç. b.» də adlandırılır. Ç. b.-ni almaq üçün momentlər üzərinə müəyyən şərtlərlə ümumi prinsip vardır ki, bu da Çebişev çoxhədliyi sistemindən istifadəyə əsaslanır (bax, [4]). İxtiyari təsadüfi kəmiyyətlər üçün Çebişev bərabərsizlikləri dəqiq yaxşılaşmayan qiymətlər verir, lakin bezi konkret hallarda bu qiymətləri dəqiqləşdirmək mümkün olur. Məs., ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması unimodal, modası μ olarsa və bu moda onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşürsə, onda

$$P\{|\xi - \mu| \geq \varepsilon\} \leq (4/3)(\sigma^2/\varepsilon^2).$$

$$\varepsilon \geq 2\sigma/\sqrt{3}$$

– Gauss bərabərsizliyi doğrudur, burada $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$.

Ehtimal nəzəriyyəsində Ç. b.-nin əhəmiyyəti onun dəqiqliyi ilə deyil, onun sadəliyi və universallığı ilə təyin olunur. Ç. b. və onun müxtəlif formaları böyük ədədlər qanununun isbatında təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinə tətbiq olunması ilə, təkrar loqarifm qanununa tətbiqi ilə böyük rol oynamışlar. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün Ç. b. iki istiqamətdə ümumiləşdirilmiş və dəqiqləşdirilmişdir. Bunlardan birincisi

$$\mathbf{P}\{|\xi_1 + \dots + \xi_n - (\mathbf{M}\xi_1 + \dots + \mathbf{M}\xi_n)| \geq \varepsilon\} \leq \mathbf{D}(\xi_1 + \dots + \xi_n)/\varepsilon^2$$

Ç. b.-ndən daha da güclü

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_1 + \dots + \xi_k - (\mathbf{M}\xi_1 + \dots + \mathbf{M}\xi_k)| \geq \varepsilon\right\} \leq \mathbf{D}(\xi_1 + \dots + \xi_n)/\varepsilon^2$$

bərabərsizliyinə keçidlə bağlıdır. Bu bərabərsizlik A. N. Kolmoqorov tərəfindən isbat olunmuş və onun *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* üçün verdiyi isbatda da istifadə olunmuşdur (bax, *Kolmoqorov bərabərsizliyi*).

İkinci istiqamət Ç. b.-ndə qüvvət üstlü qiymətin eksponensial azalanla əvəz olunmasına həsr olunmuşdur və bu da

$$\mathbf{P}\{|\xi_1 + \dots + \xi_n| \geq \varepsilon\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2(1+a/3)}\right\}$$

– Bernşteyn–Kolmoqorov bərabərsizliyinə gətirir, burada $|\xi_i| \leq C$, $\mathbf{M}\xi_i = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$, $a = C/\sigma^2$ (bax, *Bernşteyn bərabərsizliyi*). Ç. b.-nin belə dəqiqləşmələri ξ_i toplananlarının məhdudluğuna qoyulan əlavə şərtlərlə alınır.

Burada şərh olunan bərabərsizliklərin bəzilərini çoxölçülülük analogları alınmışdır (bax, [5]).

Əd.: [1] Чебышев П. Л., «Матем. сб.», 1867, т. 2, с. 1–9; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [4] Карлин С., Стадден В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [5] Прохоров Ю. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 5–24.

ÇEBİŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ; çoxölçülülük analogları «Чебышева неравенство; многомерные аналоги; multidimensional analogs of the Chebyshev inequality» – X təsadüfi vektorunun onun qiymətləri fəzasının altçoxluluğu A -ya daxil olması ehtimalı üçün

$$\mathbf{P}\{X \in A\} \leq \inf\{\mathbf{M}\varphi(X): \varphi(x) \geq 1, x \in A; \varphi(x) \geq 0, x \in A\}$$

qiymətinin nəticələridir. Məs., $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ vektorunun kovariasion matrisi B -dirsə, C isə simmetrik, müsbət müəyyən, diaqonal elementləri vahid olan matris və $C^{-1}BC^{-1}$ onun diaqonal matrisidirse, onda

$$\mathbf{P}\left\{\max_i |X^{(i)} - \mathbf{M}X^{(i)}| \geq x\right\} \leq x^2 \operatorname{tr}(C^{-1}BC^{-1}), \quad x > 0$$

münasibəti doğrudur.

Çebişev bərabərsizliyinin modifikasiyası böyük yayınmalar ehtimalları üçün *Bernşteyn bərabərsizliyi*dir. Əgər qiymətləri sepərabel $(\mathcal{X}, |\cdot|)$ Banax fəzasından olan X_i təsadüfi vektorları asılı olmayandırlarsa və bütün natural $m \geq 2$ qiymətlərində təsadüfi olmayan a_i -lərin hər hansı toplusu üçün $(a_i \in \mathcal{X})$

$$\mathbf{M}|X_1 - a_1|^m + \dots + \mathbf{M}|X_n - a_n|^m \leq m! B^2 L^{m-2}/2 \quad (1)$$

olarsa, onda $x \geq 0$ və $X = X_1 + \dots + X_n$ olduqda

$$p_x = \mathbf{P}\{|X| \geq xB + \mathbf{M}|X|\} \leq \exp\{-x^2/(2 + 2xL/B)\}$$

münasibəti doğrudur (bax, [4]). Sonlu sayda toplananların momentlərindən istifadə olunan oxşar qiymətlər vardır. Məs., (1) şərtindən $a_i = 0$ və $m = 3$ qiymətlərində

$$p_x \leq c'x^{-3}L/B + \exp\{-c''x^2\}, \quad x > 0$$

bərabərsizliyi alınır (bax, [5]), burada c', c'' – mütləq konstantlardır. (2) bərabərsizliyinin Hilbert fəzasında dəqiqləşdirilmələri üçün bax, [4], [6].

Bax, *Burkholder – Qandi – Davis bərabərsizlikləri*, *Kolmoqorov bərabərsizliyi*.

Əd.: [1] Карлин С., Стадден В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [2] Tong Y. L., Probability inequalities in multivariate distributions, N. Y., 1980; [3] Olkin I., Pratt J. W., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 226–34; [4] Пинелис И. Ф., Саханенко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 127–31; [5] Пинелис И. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 630–37; [6] Юринский В. В., «J. Multivar. Analysis», 1976, v. 6, № 4, p. 473–99.

ÇEBİŞEV TEOREMİ «Чебышева теорема; Chebyshev theorem» – bax, *Böyük ədədlər qanunu*, *Çebişev bərabərsizliyi*.

ÇEKON – CEMİSON TEOREMİ «Чекона – Джемсона теорема; Chacon – Jamison theorem» – bax, *Markov prosesi*; trayektoriyaların daxili xassələri.

ÇENTSOV STATİSTİK QIYMƏTİ *раулапма sıxlığının «Ченцова оценка плотности распределения; Chentsov distribution density estimator»* – bax, *Sıxlıq, paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət.

ÇERNOV SƏRHƏDİ «Чернова граница; Chernov boundary» – səhv təsnifat ehtimalının yuxarı sərhədidir. ω_1 və ω_2 statistik çoxluqlarının və hər hansı həlledici $h(x)$ qaydasının verildiyi fərz olunur. $\varphi_1(\omega)$, – ω_1 çoxluğu üçün həlledici $h(x)$ qaydasının xarakteristik funksiyası olsun:

$$\varphi_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega h) p(h/\omega_1) dh,$$

$j\omega$ -nı həqiqi s ədədi ilə əvəz etdikdə $h(x)$ üçün $\phi_1(s)$ doğru-
ran funksiyası alınır:

$$\phi_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sh) p(h/\omega_1) dh,$$

$\mu(s) = -\ln \phi_1(s)$ olsun. Fərz olunur ki, g təsadüfi kəmiy-
yətdir və onun paylanma sıxlığı vardır və o, aşağıdakı düsturla
təyin olunur:

$$p_g(g = h/\omega_1) = \exp(sh + \mu(s)) p(h/\omega_1),$$

g -nin riyazi gözləməsi –

$$M(g/\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h p_g(g = h/\omega_1) dh = -\frac{d\mu(s)}{ds},$$

və dispersiyası –

$$D(g/\omega_1) = -\frac{d^2\mu(s)}{ds^2}$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Xəta ehtimalı ε isə p_g ilə ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_t^{\infty} p(h/\omega_1) dh = \\ &= \int_t^{\infty} \exp(-\mu(s) - sh) p_g(g = h/\omega_1) dh = \\ &= \exp(-\mu(s)) \int_t^{\infty} \exp(-sh) p_g(g = h/\omega_1) dh. \end{aligned}$$

Xəta ehtimalı ε üçün yuxarı sərhəd aşağıdakı kimi alınır:
 $s \geq 0, t \leq h$ olduqda

$$\exp(-sh) \leq \exp(-st)$$

bərabərsizliyi doğrudur, odur ki,

$$\varepsilon \leq \exp(-\mu(s) - st) \int_t^{\infty} p_g(g = h/\omega_1) dh.$$

$$\int_t^{\infty} p_g(g = h/\omega_1) dh < 1 \text{ olduğundan}$$

$$\varepsilon \leq \exp(-\mu(s) - st)$$

bərabərsizliyindən ixtiyari $s \geq 0$ üçün xəta ehtimalı ε üçün axta-
nılan yuxarı sərhəd alınır.

Əd.: [1] Фукунга Г., Введение в статистическую теорию
распознавания образов, пер. с англ., М., 1979.

**ÇEVİRMƏ DÜSTURU «обращения формула; in-
version formula»** – $f(t)$ xarakteristik funksiyası üzrə
uyğun paylanma funksiyası F -i təyin etmək üçün aşağıdakı
şəkildə ifadə edilən düsturdur:

$$F(a+h) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-ith}}{it} e^{-ita} f(t) dt$$

burada a və $a+h$ F -in kəsilməzlik nöqtələridir, $h > 0$. Əgər
 f mütləq inteqrallandırsa, onda F mütləq kəsilməzdir və
onun kəsilməz məhdud

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt$$

törəməsi vardır (sıxlıq üçün Ç. d.). Digər çevirmə düsturları üçün
bax, [1] – [3]-ə.

Əd.: [1] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ.,
М., 1979; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее
приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Петров В. В.,
Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин,
М., 1987.

**ÇEVİRMƏSİ, ZAMANIN «обращение времени;
time reversal»** – bax, *Çevrilmiş Markov prosesi*.

**ÇEVİRMİŞ MARKOV PROSESİ «обращенный
марковский процесс; reversed Markov process»** –
ilkın *Markov prosesindən* alınan eht. prosesdir ki, hesablandığı
andan onun evolyusiyası eks istiqamətdən başlayaraq cərəyan

edir. $\zeta_t, t \in (-\infty, \infty)$ – Markov xassəli proses olsun. $\hat{\zeta}_t = \zeta_{-t}$
prosesi keçmiş və gələcəyin simmetrikliliyinə görə Markov xassə-
sinə malik olur və *çevrilmiş Markov prosesi*
adlanır. Bircins Markov prosesləri üçün keçmiş və gələcəyin
simmetriyası üst-üstə düşür və bu halda *çevrilmiş proses*
 $\hat{\zeta}_t = \zeta_{\xi-t}, t \leq \xi$ prosesi kimi anlaşıdır, burada $\xi, -\zeta_t$
prosesinin qınılma andır [və ya eht. təsadüfi andır ki, $\xi(\theta_h, \omega) =$
 $= \max \{ \xi(\omega) - h, 0 \}, h > 0, \theta_h$ – yerindəyişmə operatoru-
dur]. Belə proses, ümumiyyətlə, Markov prosesi olmaya bilər, $\hat{\zeta}_t$
prosesinin Markov prosesi olması üçün ζ_t prosesinin ciddi
Markov prosesi olması kafi şərtidir. Bezi əlavə fərziyyələrlə $\hat{\zeta}_t$
prosesinə ζ_t prosesinə dual, bircins Markov prosesi kimi
baxmaq olar.

Əd.: [1] Chung K. L., Walsh J. B., «Acta. math.», 1969,
t. 123, p. 225–51; [2] Smythe R. T., Walsh J. B., «Invent.
math.», 1973, t. 19, p. 113–48; [3] Nagasawa M., «Nagoya Math.
J.», 1964, v. 24, p. 177–204; [4] Jeulin T., «Z. Wahr. und verw.
Geb.», 1978, Bd 42, H. 3, S. 229–60.

**ÇEVİRMİŞ MARKOV ZƏNCİRİ «обращенная
цепь Маркова; reversed Markov chain»**, verilən
zəncirə tərs Markov zənciri, – zaman üzrə
evolyusiyası verilən zəncirin evolyusiyasına uyğun eks zaman
ərzində baş verən *Markov zənciridir*. Klassik mənada ixtiyari
Markov zənciri $X = (X_1, X_2, \dots)$ üçün $Y_n = X_n, n \geq 0$
olduqda $Y = (\dots, Y_{-1}, Y_0)$ ailəsi uyğun formada Markov xassə-
sinə malikdir (bax, [1]); Y ailəsi məhz X -ə nəzərən
Ç. M. z.-dir.

Ç. M. z.-ə bir qədər başqa mənə də verilir. Əgər keçid ehti-
malları p_{ij} olan bircins Markov zənciri X sonlu və ya hesabi
vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ -də verilmişdirsə və $\mu_i > 0$
şərtlə verilən $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ ilkin (başlanğıc) stasionar pay-
lanmasına malikdirsə, onda Y zəncirinin uyğun keçid ehti-
malları

$$\hat{p}_{ij} = P\{Y_n = j / Y_{n-1} = i\} = \mu_j p_{ij} / \mu_i \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $i, j \in \mathcal{E}$, $n \geq 0$. Bu halda belə keçid ehtimalları olan ixtiyari Markov zənciri X zəncirinə nəzərən $\mathcal{C}$. M. z. adlandırılır. Bu ad hər hansı zəncirin keçid ehtimalları $p_{ij}^{(*)}$ ifadələrindən sonuncusu ilə verildikdə də dəyişmir, lakin bu halda μ -nün X üçün $\mu_i > 0$ şərti ixtiyari invariant ölçü olduğu fərz olunur. Əgər $p_{ij} = p_{ji}$ olarsa, X zənciri çevrilən zəncirdir.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [3] Гихман И. Н., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

ÇƏKİ « **вес; weight** » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

ÇƏKİ(Sİ) PLAN NÖQTƏLƏRİNİN « ВЕС ТОЧЕК ПЛАНА: weighing of supporting points » – *regression eksperimentin plan daşıyıcısından olan nöqtələrinin tezliyidir; plan daşıyıcısı – nəzarət olunan dəyişənin bir-birilə üst-üstə düşməyən qiymətlərinin çoxluğu*.

ÇƏKİ MATRİSİ « **весовая матрица; weight matrix** » – *regression eksperimentin – ölçmə xətalının kovariasiyalı matrisinə tərs matrisdir. Ç. m. ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiyməti minimalaşdıran regressiya uzlaşmazlıqlarının kvadratik formasını və həmin statistik qiymətin əmsallarını təyin edir.*

ÇƏKİLƏMƏ PLANI « **взвешивания план; weighted design / strategy** » – k sayda əşyanın ikigözlü və birgözlü terezlərdə N dəfə çəkilməsi ilə onların çəkirlərinin qiymətləndirilməsi üçün aparılan eksperiment planıdır. Terezlərdə ölçmə nəticələri $x_n^T = [x_{n1}, \dots, x_{nk}]$ setri və matris planı

$D = [x_1, \dots, x_N]^T$ ilə təyin olunur. İkigözlü terezlərdə x_{ni} kəmiyyəti i -ci əşyanın sol gözə və ya sağ gözə qoyulmasından və ya n -ci çəkilmədə iştirak etməməsindən asılı olaraq, uyğun olaraq, -1 , $+1$ və ya 0 qiymətlərini alır. Birgözlü terezlərdə ölçmələr aparıldığı halda x_{ni} i -ci əşyanın n -ci çəkilmədə iştirak edib-etməməsindən asılı olaraq 1 və ya 0 qiymətlərini alır. Çəkilmə modeli

$$y_n = b_0 + b_1 x_{n1} + \dots + b_k x_{nk} + \varepsilon_n$$

şəklində olur, burada y_n – n -ci çəkilmədə alınan nəticədir, $n = 1, \dots, N$; b_0 – terezinin əşyasız göstəricisi, b_i – i -ci əşyanın çəkisidir, $i = 1, \dots, k$; ε_n – n -ci çəkilmə xətasıdır.

Bütün əşyaların ayrı-ayrılıqda çəkilmə proseduru ilə müqayisədə əşyaların çəkirlərini daha dəqiq qiymətləndirməyə imkan verən birgözlü terezlərdə çəkilmə proseduru qurulmuşdur (bax, [1]). Analoji nəticə ikigözlü terezlər üçün də alınmışdır (bax, [2]). İnformasiya matrisin hər hansı qəbənq funksionalını minimalaşdıran optimal Ç. p.-ları (bax, [3], [4]), həm də *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması* öyrənilmiş və qurulmuşdur.

Əd.: [1] Yates F., «J. Roy. Statist. Soc. Supp.», 1935, v. 2, p. 181–247; [2] Hotelling H., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 297–305; [3] Бродский В. З., Введение в факторные планирование эксперимента, М., 1976; [4] Banerjee K. S., Weighing designs, N. Y., 1975.

ÇƏKİLİ ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU « **взвешенный метод наименьших квадратов; weighted least squares method / generalized least squares method** » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*.

ÇƏKİLİ KVADRATİK YAYINMA « **взвешенное квадратическое отклонение; weighted quadratic deviation** » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

ÇƏP FİRLANMASI, faktor oxlarının « **косоугольное вращение факторных осей; oblique rotation of factorial axes** » – bax, *Faktorial oxların fırlanması*.

ÇƏP VİNER PROSESİ « **косой винеровский процесс; skew Wiener process** » – bax, *Viner prosesi* ya *gimoxda*.

ÇIXIQLAR METODU « **вычетов метод; method of residues** » – bax, *Modeləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*.

ÇIXIŞ EHTİMALININ SIXLIĞI « **выхода плотность вероятности; exit rate / probability density** » – bax, *Sıxlığı, çıxış ehtimalının*.

ÇIXIŞ İNTENSİVLİYİ « **выхода интенсивность; exit rate** » – bax, *Sıxlığı, çıxış ehtimalının*.

ÇIXIŞ SİGNALI « **выходной сигнал; output signal** » – bax, *Ehtimali avtomat*.

ÇJUN TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « **Чжуна закон повторного логарифма; Chung's law of the iterated logarithm** » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu empirik ölçülər üçün*.

ÇOXALDILMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirlərinin « **укрупнение состояний цепи Маркова; aggregation of states of a Markov chain** » – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin çoxaldılması*.

ÇOXALTMA FUNKSİYASI « **укрупнения функция; aggregation function** » – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin çoxaldılması*.

ÇOXGİRİŞLİ KANAL « **множественного доступа канал; multiple access channel** » – bir neçə ötürücü və bir qəbulediciyə malik rabitə sistemini təsvir edən *çoxkomponentli kanala* aid misallardan biridir. Aşağıda ikigirilişli yaddaşsız diskret stasionar Ç. k.-in kodlanılması təsvir olunmuşdur (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*). Belə kanal iki giriş əlifbası – $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, bir çıxış əlifbası – $\mathcal{Y}$ ($\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ – sonlu çoxluqlardır) və keçid ehtimalları – $p(\tilde{y}/y_1 y_2)$ ilə verilir. Baxılan kanal üçün N uzunluqlu və (M_1, M_2) həcmli kod – $y_{m_1}^1 \in \mathcal{X}_1^N$, $y_{m_2}^2 \in \mathcal{X}_2^N$, $1 \leq m_k \leq M_k$, $k = 1, 2$ (burada $\mathcal{X}_k^N$ – $\mathcal{X}_k$ sonlu çoxluğunun N -ci Dekart qüvvət üstüdür) sözləri toplusu və həm də bütün $\mathcal{Y}^N$ çoxluğunu örten $C_{m_1 m_2} \subset \mathcal{Y}^N$, $1 \leq m_k \leq M_k$, $k = 1, 2$ kəsişən dekodlama oblaslarının toplusudur. Göründüyü kimi, $C_{m_1 m_2}$ ele $\tilde{y}$ -lərin ($\tilde{y} \in \mathcal{Y}^N$) çoxluğu ki, bunların qəbula alınmasının sonunda dekoder qərar verir ki, $y_{m_1}^1$ və $y_{m_2}^2$ kod sözləri (yeni m_1 və m_2 məlumatları) ötürülmüşdür. m_1 və m_2 məlumatlarının ötürülməsində xəta ehtimalı

$$P_e(m_1, m_2) = \sum_{\tilde{y} \in C_{m_1 m_2}} p^{(N)}(\tilde{y} | y_{m_1}, y_{m_2})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N) \in \mathcal{Y}^N$, $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{kN})$, $k=1, 2$ üçün

$$p^{(N)}(\tilde{y} | y_1, y_2) = \prod_{n=1}^N p(\tilde{y}_n | y_{1n}, y_{2n}).$$

Ç. k. üçün kodun xəta ehtimalının orta qiyməti P_{or} və maksimal qiyməti P_{max} uyğun olaraq

$$P_{or} = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{m_1, m_2} P_e(m_1, m_2),$$

$$P_{max} = \max_{m_1, m_2} P_e(m_1, m_2)$$

düsturları ilə təyin olunur.

Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $M_k \geq 2^{N(R_k - \varepsilon)}$, $k=1, 2$, $P_{or} < \varepsilon$ şərtlərini ödəyən N uzunluqlu kod varsa, onda sürətlər toplusu $R = (R_1, R_2)$ çatılabilən (rus. достижимый) sürətlər toplusu adlanır. Xəta ehtimalının orta qiymətinə görə kriteri üzrə Ç. k.-in ötürücülük qabiliyyətli oblastı $\mathcal{R}_{or}$ bütün çatılabilən R topluslarının çoxluğu kimi təyin olunur. Xəta ehtimalının maksimal qiymətinə görə ötürücülük qabiliyyətli oblastı $\mathcal{R}_{max}$ analoji qayda ilə təyin olunur. Baxılan kanallar şəbəkəsi üçün $\mathcal{R}_{or}$ oblastı kanalın ötürücülük qabiliyyətli oblastı ilə üst-üstə düşür. Yaddaşsız diskret stasionar Ç. k. üçün $\mathcal{R}_{or}$ oblastı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathcal{R}_{or} = co \left(\bigcup_{p_1(y_1), p_2(y_2)} \mathcal{R}(p_1, p_2) \right), \quad (*)$$

burada co – qabarıq örtükdür, p_1, p_2 , – uyğun olaraq, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ – də ehtimal paylanmalarıdır və bu ehtimallar $p(\tilde{y} | y_1, y_2)$ ehtimalı ilə $F_1, F_2, \tilde{F}$ təsadüfi kəmiyyətlər üçlüyünü $p_1(y_1)p_2(y_2) \times p(\tilde{y} | y_1, y_2)$ birgə ehtimalı və

$$\mathcal{R}(p_1, p_2) = \{(R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I(F_1; \tilde{F} | F_2), \\ 0 \leq R_2 \leq I(F_2; \tilde{F} | F_1), R_1 + R_2 \leq I(F_1, F_2; \tilde{F})\}$$

ilə təyin edilir, burada I – informasiya miqdadıdır.

Ümumiyyətlə, $\mathcal{R}_{max}$ oblastı $\mathcal{R}_{or}$ oblastı ilə üst-üstə düşür (birgirişli və birçixışlı rabitə kanalı halından fərqli olaraq).

Ç. k.-in yuxarıda baxılan ən sadə modelinin çoxsaylı ümumiləşmələri mövcuddur. Məs., L çıxışlı Ç. k.-dən başqa hər bir girişindəki gücü məhdudlandırılan, diskret zamanlı Gauss Ç. k. üçün kodlanma araşdırılmışdır. Korrelyarlanmış mənbələrli və ters rabitəli Ç. k.-lərə də baxılmışdır. Aydın olmuşdur ki, ters rabitə, ümumiyyətlə, Ç. k.-in ötürücülük qabiliyyəti oblastını genişləndirir. Bundan başqa, koderlərdən bəzilərində digər koderlər tərəfindən verilən məlumatlar məlum olan hallarda da kodlama sxemlərini tədqiq etmək mümkündür (baxışla kodlama).

Kanalın yuxarıda şərh olunmuş modeli *sinxron* çoxgirişli kanal adlanır. *Asinxron* çoxgirişli

kanal – kanalın girişlərində kod bloklarnın sərhədləri bir-birinə nəzərən yerini dəyişir və bu yer dəyişmələri ne kodlama, ne de ki, dekodlama zamanı kəmiyyətcə məlum olmur. Bu halda da ötürücülük oblastı $\mathcal{R}_{or, as}$ -i hesablamaq mümkündür. Bu oblast qabarıq olmur və (*) düsturuna analoji düsturla verilir; bu halda yeganə fərq ondan ibarət olur ki, $\mathcal{R}_{or, as}$ -i hesablamaq üçün qabarıq örtük götürmək lazım gəlir.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Van der Meulen E. C., «IEEE Trans. Inform. Theory» 1977, v. 23, № 1, p. 1–37.

ÇOXGİRİŞLİ QOŞMALIQ CƏDVƏLİ «МНОГОВХОДОВАЯ ТАБЛИЦА СОПРЯЖЕННОСТИ; multiway contingency table» – bax, *Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət*.

ÇOXGİRİŞLİLİK «множественный доступ; multiple access» – çoxsaylı istifadəçilər tərəfindən resursun kollektiv istifadəsinin təşkilidir (bax, *Çoxgirişli kanal*). Ç.-yə ən sadə misal radioverilişidir: burada resurs – radio dalğalarının diapozonu, istifadəçilər – radiostansiyalardır. Resursun istifadəsinin təşkili tezliklər diapozonunun və stansiyalar arasında verilmiş vaxtının bölgüsü haqqında əvvəlcədən qərara alınmış razılaşdırılmadan ibarətdir. Daha mürekkəb hallarda stansiyalar radioveriliş tezlik və ya vaxt bölgüsü aparılmadan verir. Bu halda Ç. informasiyanın münasib surətdə *kodlaşdırılmasından* ibarət olur. Burada ehtimal nəzəriyyəsinin metodları rabitə sisteminin ötürücülük qabiliyyətli oblastının və optimal kodların axtarılması üçün tətbiq olunur.

Ç.-yə aid misallarn çoxu kütləvi xidmət sistemləri ilə bağlıdır. Burada resurs – xidmətədi cihaz (və ya cihazlar), istifadəçilər – tələblər, çağırışlar, müştərilərdir, cihazın istifadəsinin tipik təşkili isə tələblərin nizamlandırılması və əvvəlki tələbin xidmətindən sonra növbədəki tələbin xidmətindən ibarətdir. Belə çoxgirişli sistemlər üçün ehtimal nəzəriyyəsi bu sistemlərin müxtəlif parametrlərinin (növbenin uzunluğu, xidmətə başlanma anını gözləmə müddəti və s.) paylanmalarının öyrənilməsində istifadə olunur.

Qeyd olunan misallarda resursun istifadəsinin təşkili vaxt sərf olunmadan və ya resursun öz gücündən istifadə edilmədən baş verir. Lakin bu həmişə belə olmur. Məs., EHM lokal şəbəkələrində resurs – istifadəçiləri EHM ilə birləşdirən ümumi rabitə *kanalıdır*. Bu kanal əksər hallarda EHM-nin verilənləri arasında ötürmələr üçün (əsas iş), həm də istifadəçilərdən hansılarda ötürmə üçün tələb olunan verilənlərin olması aydınlaşdırmaq üçün, bu istifadəçilərin nizamlanması və şəbəkənin bütün istifadəçilərini müəyyən olunmuş qayda haqqında və nizamlanmanın digər detalları haqqında xəbərdarlıq üçün (yardımcı iş) istifadə olunur. Resursun bütün işləmə müddətində onun əsas iş müddətinin orta payı resursun effektivliyi adlanır. Ç.-in müxtəlif üsulları üçün resursun effektivliyinin hesablanması araşdırma məsələsidir. Bu məsələdə ilkin verilənlər istifadəçilər tərəfindən resurs üçün tələblərin yaranmasında alınan nişanlanmış nöqtəvi proseslərin ehtimal xarakteristikalarıdır.

Münaqişəli (rus. с конфликтами) Ç. də mövcuddur. Əgər resurs ixtiyari anda xidmət üçün bir istifadəçidən artıq istifadəçi qəbul edə bilmir və eyni zamanda resursu iki və ya daha çox tələblər olursa, bu tələblər *münaqişəli* adlanır. Münaqişəli tələblər resurs istifadəsinə heç bir halda buraxılmır və bu istifadəçilər bu tələbləri təkrar etməlidirlər. Əgər bütün tələblər eyni bir zamandan bir təkrar olunursa, onda bu tələblər yenə də münaqişə yaratmış olurlar. Bu vəziyyətin yaranmaması üçün *təsadüfi çoxgirişlilik metodları* tətbiq olunur. Təsadüfi Ç.-də münaqişədə olan tələblər təsadüfi zaman müddətlərindən bir təkrar olunurlar, məs., müxtəlif tələblər üçün tələblər asılı olmayan təsadüfi zaman müddətlərindən bir təkrar olunurlar və bununla da, resursun münaqişəsiz istifadəsinin sıfırdan fərqli ehtimalla təşkili yaranmış

olur, yeni münaqişə aradan qaldırılır. Münaqişənin həlli metodu təsadüfi Ç.-in algoritminin əsas tərkib hissəsidir.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979; [2] Bertsekas D., Gallager R., Data Networks, N. Y., 1987.

ÇOXGİRİŞLİLİK təsadüfi «множественный доступ случайный; random multiple access» – bax, *Təsadüfi çoxgirişlilik*.

ÇOXXƏTLİ XİDMƏT SİSTEMİ «многолинейная система обслуживания; multichannel queueing system» – çoxkanallı xidmət sistemi, – eyni zamanda birdən çox tələbə xidmət oluna bilən (hər kanalda, xətdə, cihazda) növbənin yaranması prosesinin riyazi modelidir. Ç. x. s., adətən, çoxölçülü Markov prosesi ilə təsvir olunur (bax, *Hissəvi xətti proses*). Ç. x. s.-nin əsas növləri özleməli çoxkanallı xidmət sistemi və imtinalı xidmət sistemidir. İxtiyari tələbin ixtiyari kanala daxil ola bilib-bilməməsindən asılı olaraq, Ç. x. s.-ləri tamgirişli və natamamgirişli Ç. x. s.-lərə ayrılır. Ç. x. s.-nin əsas tədqiqat metodu xidmət sistemlərinin statistik modeləşdirilməsi metodudur.

ÇOXKANALLI XİDMƏT SİSTEMİ «многоканальная система обслуживания; multichannel queueing system» – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi*.

ÇOXKASKADLI XİDMƏT SİSTEMİ «многокаскадная система обслуживания; multicascade queueing system» – bax, *Xidmət sistemi imtinalı*.

ÇOXKOMPONENTLİ KANAL «многокомпонентный канал; multiterminal channel» – bir neçə ötürücüdən bir neçə qəbuledicinə ötürmə təmin edən rabitə kanalıdır. K girişli və L çıxışlı ümumi çoxkomponentli kanalı

$$\{(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}}), (\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}}), Q(x, A), V\}$$

rabitə kanalı kimi təyin etmək olar, bu rabitə kanalı üçün giriş signallarının ehtimal fəzası K sayda fəzanın düz hasilı, yəni

$$(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}}) = (\mathcal{X}_1, S_{\mathcal{X}_1}) \times \dots \times (\mathcal{X}_K, S_{\mathcal{X}_K});$$

çıxış signallarının ehtimal fəzası L sayda fəzanın düz hasilı, yəni

$$(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}}) = (\tilde{\mathcal{X}}_1, S_{\tilde{\mathcal{X}}_1}) \times \dots \times (\tilde{\mathcal{X}}_L, S_{\tilde{\mathcal{X}}_L})$$

kimi ifadə olunur və mümkün ola bilən giriş signallarına məhdudiyyətləri verən, $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ -də ehtimal ölçülərinin altçoxlğu V də düz hasilidir: $\mu \in V$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda təmin olunur ki, $\mu_k \in V_k$ münasibəti ödənilsin, burada μ_k – μ -nın $(\mathcal{X}_k, S_{\mathcal{X}_k})$ -də proyeksiyası, V_k isə $(\tilde{\mathcal{X}}_k, S_{\tilde{\mathcal{X}}_k})$ -də ehtimal ölçülərinin hər hansı altçoxlğudur. Intuitiv olaraq, $1 \leq k \leq K$ qiymətlərində $\mathcal{X}_k$ – Ç. k.-in giriş signalının k -ci komponentinin qiymətləri çoxluğudur, $\tilde{\mathcal{X}}_l$, $1 \leq l \leq L$ isə çıxış signalının l -ci komponentinin qiymətləri çoxluğudur.

Diskret yaddaşsız Ç. k.-in xüsusi halda giriş və çıxış signalları sonlu $\mathcal{X}_k$, $\tilde{\mathcal{X}}_l$ çoxluqlarının elementlərinin ardıcılıqlarıdır. Belə Ç. k. $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_K)$ keçid ehtimallarının toplusu ilə verilir, burada $\tilde{y}_l \in \tilde{\mathcal{Y}}_l$, $y_k \in \mathcal{Y}_k$.

Ç. k. üçün kodlanmanın xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, hər bir giriş komponentinin kodlanması məlumatları Ç. k.-in bir və ya bir

neçə çıxış komponenti üçün təyin olunmuş ayrıca bir koderlə həyata keçirilir. Kanalı *əngələdayanılıqlığı* Ç. k.-in girişindən onun çıxışına ötürülən informasiyanın maksimal çatılabilən sürətini təyin edən ötürücülük qabiliyyəti əlaqəsi ilə xarakterizə olunur (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*).

Ç. k.-in xüsusi halları *genişyayımli kanal* ($K=1$), *çoxgirişli kanal* ($L=1$), *interferens kanalıdır* ($K=L=2$). Koder və dekoderlərin xüsusi təşkilində, yəni kanalın bəzi çıxışlarındakı informasiyadan istifadə edə bilən koder və dekoderlərin təşkilində *çoxtərəfli kanal* alınır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

ÇOXKOMPONENTLİ MƏLUMATLAR MƏNBƏİ «многокомпонентный источник сообщений; multicomponent source» – bir-birindən asılı bir neçə məlumatlar mənbəinin riyazi təsviri üçün istifadə olunan nəzəri – informasiya terminidir. Aşağıda yaddaşsız diskret stasionar çoxkomponentli məlumatlar mənbəinin tərfi verilməlidir.

M komponentli U mənbə M sayda sonlu $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_M$ çoxluqları (mənbənin komponentlərinin əlifbası) və $p(x_1, \dots, x_M)$, $x_m \in \mathcal{X}_m$ ehtimal paylanması ilə verilir. Hər bir x_m elementi U mənbəinin m -ci komponentinin elementar məlumatı kimi interpretasiya olunur. Mənbənin stasionarlığı və yaddaşsızlığı onunla ifadə olunur ki, ehtimal paylanması p , məlumatlar bloklarında N uzunluqlu

$$p^{(N)}(x_1, \dots, x_M) = \prod_{i=1}^N p(x_{i1}, \dots, x_{iM})$$

düsturu ilə təyin olunan $p^{(N)}$ ehtimal paylanmasını doğrurur, burada $x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mN}) \in \mathcal{X}_m^N$.

Daha ümumi Ç. m. m.-lərinə də baxmaq olar (qeyri – stasionar, yaddaşlı, məlumatlar fəzası kəsilməz və s.); teriflər adı məlumat mənbəi üçün uyğun teriflərə analogidir.

Ç. m. m. üçün kodlama məsələsinə mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün kodlama məsələsinin xüsusi halı kimi baxmaq olar. Bax, *Kodlanma(sı) əlavə informasiyalı mənbənin*.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

ÇOXQAT QARIŞMA «кратное перемешивание; multiple mixing», r -qat qarışma – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

ehtimal fəzasının endomorfizmi T halında dinamik sistemin aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunan xassəsidir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[P \left\{ \bigcap_{i=0}^r T^{-k_i(n)} A_i \right\} - \prod_{i=0}^r P(A_i) \right] = 0,$$

burada $A_0, \dots, A_r$, $\mathcal{A}$ -nin ixtiyari çoxluqları və $\{k_i(n),$

$n = 1, 2, \dots\}$, $i = 0, 1, \dots, r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq r} |k_i(n) - k_j(n)| = 0$

şərtini ödəyən natural ədədlərin ixtiyari ardıcılıqlarıdır. Kəsilməz zamanlı dinamik sistem üçün Ç. q. analogi təyin olunur. 1 qat qarışma sadə *qarışmadır*, «Ç. q.» termini, adətən, $r \geq 2$ olan çoxqat qarışmaya görə istifadə olunur. r -qat və $(r+1)$ -qat

qarıxdırıcı dinamik sistemlər siniflərinin üst-üstə düşüb-düşməməsi məsələsi r -in heç bir qiymətində həll olunmamışdır (aydındır ki, bu siniflərdən birincisi ikincisini daxilinə alır).

Əd.: [1] Р о х л и н В. А., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 1949, т. 13, № 4, с. 329–40; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Э р г о д и ч е с к а я т е о р и я, М., 1980.

ÇOXQAT STOXAŞTİK İNTEQRAL « кратный стохастический интеграл; multiple stochastic integral » – bax, *Çoxqat Viner inteqralı*.

ÇOXQAT VİNER İNTEQRALI « кратный винеровский интеграл; multiple Wiener integral », *çoxqat stoxastik inteqral* – Viner prosesi üzrə $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ funksiyasının (tesadüfi olmayan) –

$$I_n(f) = \int \dots \int f(t_1, \dots, t_n) dw_{t_1} \dots dw_{t_n}$$

inteqraldır. İto konstruksiyasının xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, pilləvari funksiyanın inteqralı yalnız f funksiyalarının inteqral cəmi ilə üst-üstə düşür ki, bunlar heç olmasa iki argumenti üst-üstə düşdükdə sıfıra bərabər olsun. Ç. V. i. aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) $MI_n(f) = 0, n \geq 1$;
- 2) $MI_n(f) = MI_n(\tilde{f})$, burada $\tilde{f}$ – f funksiyasının simmetrizasiyasıdır;
- 3) $MI_n(f) \cdot I_m(g) = 0, m \neq n$;
- 4) $MI_n(f) I_n(g) = n! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_n$, burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ – $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ -da skalyar hasilidir;

- 5) ixtiyari $\eta \in L^2(\mathcal{A})$ tesadüfi kəmiyyəti $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ cəmi

şəklində ifadə oluna bilər, belə ki, əgər f_n – simmetrik funksiyalar olarsa, bu aynılıq birqiymətli, burada $\mathcal{A}$ – w -nin doğurduğu σ – cəbrdir.

Ç. V. i. stoxastik analizdə, xüsusilə də, *genişləndirilmiş stoxastik inteqral* və *stoxastik törəmənin* konstruksiyalarında istifadə olunur.

Əd.: [1] И т о К., «J. Math. Soc. Jap.», 1951, v. 3, p. 157–69.

ÇOXÖLÇÜLÜ BETA – PAYLANMA « многомерное бета – распределение; multidimensional beta distribution » – X tesadüfi kəmiyyəti üçün aşağıdakı kimi təyin olunan *paylanmadır*. Fərz olunur ki, $H \sim \sigma^2 \chi_{m_H}^2$,

$E \sim \sigma^2 \chi_{m_E}^2$ və H və E statistik asılı deyildir. $T = H/E$ və $v = T/(1+T) = H/(E+H)$ üçün sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq

$$f(t) = \frac{t^{(m_H/2)-1}}{B(m_H/2, m_E/2)(1+t)^{(m_H+m_E)/2}}, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$q(v) = \frac{1}{B(m_H/2, m_E/2)} v^{(m_H/2)-1} (1-v)^{(m_E/2)-1},$$

$$0 \leq v \leq 1$$

olsun, burada $B(a, b)$ – beta – funksiyasıdır.

138 ÇOXÖLÇÜLÜ

Rahatlıq üçün $v \sim B(m_H/2, m_E/2)$ işarələməsindən istifadə

olunur və deyilir ki, X tesadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları $m_H/2$ və $m_E/2$ olan I tip beta – paylanması ilə paylanır; analogi olaraq $m_E T/m_H \sim F(m_H, m_E)$ işarələməsi də istifadə olunur və deyilir ki, T tesadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları uyğun olaraq $m_H/2$ və $m_E/2$ olan II tip beta – paylanması ilə paylanır.

Bax, həm də *Dirixle paylanması*.

ÇOXÖLÇÜLÜ BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « многомерный процесс брауновского движения; multidimensional Brownian process » – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

ÇOXÖLÇÜLÜ MÜŞAHİDƏ « многомерное наблюдение; multidimensional observation » – eyni bir obyektə aid n ($n > 1$) sayda birölçülü müşahidələrin nizamlanmış çoxluğu. Ehtimal – statistik nöqtəyi – nəzərdən Ç. m. *çoxölçülü tesadüfi kəmiyyətin* realizasiyasıdır.

Ç. m.-nin komponentləri, ümumiyyətlə, müxtəlif şkalalarda ölçülə bilər.

ÇOXÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « многомерное нормальное распределение; multivariate normal distribution » – bax, *Normal paylanma*.

ÇOXÖLÇÜLÜ PAYLANMA « многомерное распределение; multivariate distribution » – s – ölçülü $\mathbb{R}^s$ Evklid fəzasının Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə ehtimal *paylanmasıdır*. Ç. p., adətən, çoxölçülü tesadüfi kəmiyyətin və ya $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ tesadüfi vektorunun paylanması kimi anlaşılır və bu halda bu paylanma eyni bir Ω elementar hadisələr fəzasında verilmiş həqiqi $\xi_1(\omega), \dots, \xi_s(\omega)$, $\omega \in \Omega$ tesadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması mənasını daşıyır ($\xi_1, \dots, \xi_s$ tesadüfi kəmiyyətlərinə $\Omega = \mathbb{R}^s$ fəzasında koordinat kəmiyyətləri kimi baxılır). Ç. p. *paylanma funksiyası* –

$$F(x_1, \dots, x_s) = P\{\xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_s(\omega) < x_s\}$$

$x_1, \dots, x_s$ həqiqi dəyişənlərinin funksiyası vasitəsilə birqiymətli təyin olunur.

Birölçülü paylanmalar halında olduğu kimi ən çox yayılmış Ç. p.-lar – diskret və mütləq kəsilməz paylanmalardır. Diskret halda Ç. p. $\mathbb{R}^s$ fəzasında sonlu və ya hesabi $(x_1, \dots, x_s)$ nöqtələri çoxluğunda toplanmış olur, odur ki,

$$P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_s = x_s\} = p_{x_1, \dots, x_s} \geq 0,$$

$$\sum_{x_1, \dots, x_s} p_{x_1, \dots, x_s} = 1; \quad (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$$

(bax, mes., *Polynomial / multinomial paylanma*).

Mütləq kəsilməz paylanmalar halında $\mathbb{R}^s$ -də sanki hər yerdə Lebeq ölçüsü üzrə

$$\frac{\partial^s F(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1 \dots \partial x_s} = p(x_1, \dots, x_s)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $p(x_1, \dots, x_s)$ funksiyası *çoxölçülü paylanma sıxlığı* (*çoxölçülü sıxlıq*)

adlanır və bu funksiya ixtiyari A üçün $(A, - \mathbb{R}^s$ fəzasının Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ -cəbrin ixtiyari çoxluğu)

$$P\{\xi \in A\} = \int_A p(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

münasibətini ödəyir:

$$p(x_1, \dots, x_s) \geq 0, \int_{\mathbb{R}^s} p(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = 1.$$

Ç. p. verildiyi halda ixtiyari $\xi_i = \xi_i(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətin və ya ixtiyari $m < s$ qiymətində $\xi_1, \dots, \xi_m$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması Ç. p.-ya nəzərən *xüsusi* və ya *marginal paylanma* adlanır. Aydındır ki, marginal paylanmalar verilmiş Ç. p. ilə tam mənası ilə təyin olunur. $\xi_1, \dots, \xi_s$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda $F(x_1, \dots, x_s) = F_1(x_1) \dots F_s(x_s)$ və $p(x_1, \dots, x_s) = p_1(x_1) \dots p_s(x_s)$ olur, burada $F_i(x)$ və $p_i(x)$, $i = \overline{1, s}$, ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, marginal paylanma funksiyaları və paylanmaların sıxlıq funksiyalarıdır.

$\xi_1, \dots, \xi_s$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari funksiyası $f(\xi_1, \dots, \xi_s)$ -in riyazi gözləməsi bu funksiyanın Ç. p.-ya görə integrali ilə təyin olunur; Ç. p. mütləq kəsilməz olduğu halda, riyazi gözləmə

$$Mf(\xi_1, \dots, \xi_s) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1, \dots, x_s) p(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

integrali ilə təyin olunur.

Ç. p.-nin xarakteristik funksiyası $t = (t_1, \dots, t_s)$ vektorunun funksiyasıdır və $\varphi(t) = Me^{it'x}$ -ə bərabərdir, burada $tx' = t_1 x_1 + \dots + t_s x_s$. Ç. p.-nin əsas xarakteristikləri $M\xi^{k_1} \dots \xi^{k_s}$ - qarışıq momentləri və $M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1} \dots (\xi_s - M\xi_s)^{k_s}$ - mərkəzi qarışıq momentləridir, burada $k_1 + \dots + k_s$ uyğun momentin tertibidir. Ç. p.-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $M\xi = (M\xi_1, \dots, M\xi_s)$ vektoru və kovariasion matris təşkil edən 2-ci tertib mərkəzi qarışıq momentlər çoxluğudur. Əgər $i \neq j$ şərtini ödəyən bütün i, j qiymətlərində $M(\xi_i - M\xi_i) \times (\xi_j - M\xi_j) = 0$ olarsa, onda $\xi_1, \dots, \xi_s$ cüt-cüt qeyri-korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər adlanır (kovariasion matris bu halda diaqonal matrisdir). Əgər kovariasion matrisin rəqəmi m, s -dən kiçik olarsa, onda Ç. p. *cırışan paylanma* adlanır; bu halda Ç. p. $\mathbb{R}^s$ -in m -ölçülü hər hansı xətti çoxobrazısında toplanmış olur.

$\xi_1, \dots, \xi_s$ arasında asılılığın araşdırılması metodları haqqında, bax, *Korrelyasiya* və *Regressiya* meq.-inə.

ÇOXÖLÇÜLÜ SIXLIQ « многомерная плотность; multivariate density » – bax, *Çoxölçülü paylanma; Sıxlıq, ehtimal sıxlığı*.

ÇOXÖLÇÜLÜ STATİSTİK ANALİZ « многомерный статистический анализ; multivariate statistical analysis » – riyazi statistikanın ele bölməsidir ki, bu bölmə məlumatların toplanılması üçün optimal planların riyazi metodlarla qu-

rulmasına, çoxölçülü statistik verilənlərin sistemləşdirilməsi və yenidən işlənilməsinə həsr olunmuş, araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentləri arasında qarşılıqlı əlaqələrin xarakteri və strukturunun aşkar edilməsinə yönəlmiş və elmi – praktiki nəticələrin alınması üçün təxiz olunmuşdur. $x_1, \dots, x_p$ göstəricilərindən (əla-

mətlər, dəyişənlər) ibarət p -ölçülü $x = (x_1, \dots, x_p)$ vektoru

çoxölçülü əlamət kimi anlaşıdır. $x_1, \dots, x_p$ göstəriciləri kəmiyyət göstəriciləri, qaydalı (və ya ordinal) göstəricilər və təsnif (və ya nominal) göstəriciləri kimi siniflərə ayrılır. Kəmiyyət göstəriciləri – araşdırılan obyektin xassələrinin aşkar olunma dərəcəsinə müəyyən şkalada skalyar ölçən göstəriciləridir; qaydalı (və ya ordinal) göstəricilər – analiz olunan obyektləri bu obyektlərdə öyrənilən xassənin aşkar olunma dərəcəsinə görə nizamlamağa imkan verən göstəriciləridir; təsnif (və ya nominal) göstəriciləri obyektlərin araşdırılan çoxluğunu nizamlamayan birincis (analiz edilən xassəyə görə) siniflərə ayırmağa imkan yaradan göstəriciləridir. Araşdırılan çoxluğun n obyektinin hər birində bu göstəricilərin ölçmə nəticələri

$$\{x_i\}_1^n = \{(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})\}_1^n \quad (1)$$

– çoxölçülü müşahidələr ardıcılığını və ya Ç. s. a. aparmaq üçün çoxölçülü verilənlərin ilkin əsas massivini əmələ gətirir. Ç. s. a.-in əsas hissəsi araşdırılan x çoxölçülü əlamətinin *çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət* kimi və uyğun olaraq, (1) *çoxölçülü müşahidələr* ardıcılığının – ümumi çoxluqdan seçim kimi interpretasiya olunduğu hallara xidmət edir. Bu halda ilkin statistik verilənlər üzərində yenidən işlənilmə metodlarının seçilməsi və verilənlərin xassələrinin analizi $P(x)$ çoxölçülü (birgə) ehtimal paylanma qanununun xüsusiyyətlərinə görə bu və ya digər fərziyyələr əsasında aparılır.

Ç. s. a. məzmununa görə şərti olaraq üç altbölməyə ayrılır: çoxölçülü paylanmalar və onların əsas xarakteristikalarının Ç. s. a.; araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentləri arasında qarşılıqlı əlaqələrin xarakter və strukturunun Ç. s. a.; çoxölçülü müşahidələrin araşdırılan çoxluğunun həndəsi strukturunun Ç. s. a.-i.

Çoxölçülü paylanmalar və onların əsas xarakteristikalarının çoxölçülü statistik analizi yalnız üzərində işlənilən (1) müşahidələrinin ehtimali təbii olduğu, yeni bu müşahidələrin uyğun ümumi çoxluqdan seçim kimi interpretasiya olunduğu halları əhatə edir. Bu altbölmenin əsas məsələsi aşağıdakılardır: araşdırılan çoxölçülü paylanmaların və onların əsas xarakteristikalarının və parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi; istifadə olunan statistik qiymətlərin xassələrinin araşdırılması; analiz olunan çoxölçülü verilənlərin ehtimali təbiəti haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriteriylərin qurulmasında istifadə edilən bir sıra statistikaların ehtimal paylanmalarının araşdırılması. Əsas nəticələr belə bir xüsusi hal üçün alınmışdır: x əlaməti paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x|\mu, V)$ –

$$f(x|\mu, V) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |V|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' V^{-1} (x - \mu) \right\} \quad (2)$$

münasibətilə verilən $N_p(\mu, V)$ çoxölçülü normal paylanma qanununa tabedir, burada $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$, – x təsadüfi kəmiyyətin komponentlərinin riyazi gözləmələrinin vektorudur, yeni $\mu_l = Mx_l$, $l = 1, 2, \dots, p$, $V = \|v_{ij}\|_{i,j=1}^p$, – x təsadüfi vektoru

runun kovariasion matrisidir, yeni $v_{ij} = \mathbf{M}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)$, $\mathbf{x}$ vektorunun komponentlərinin kovariasiyalardır (ranqın $\mathbf{V} = p$ olduğu cırlaşmayan hala baxılır; əks halda, yeni ranqın $\mathbf{V} = p' < p$ olduğu halında bütün nəticələr doğrudur, bu şərtlə ki, bunlar kiçik p' dim. – ölçülü altfəzadə götürülür ki, araşdırılan təsadüfi $\mathbf{x}$ vektorunun ehtimal paylanması məhz bu fəzadə toplanmışdır).

Odur ki, əgər (1) asılı olmayan müşahidələr ardıcılığıdır və bu ardıcılıq $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ paylanmasından olan təsadüfi seçimi yaradırsa, onda (2)-dəki $\boldsymbol{\mu}$ və $\mathbf{V}$ parametrləri üçün maksimal doğruoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad (3)$$

və

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \quad (4)$$

düsturları ilə ifadə olunur, belə ki, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ təsadüfi vektoru p – ölçülü $N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\mathbf{V})$ normal qanununa tabədir və $\hat{\mathbf{V}}$ -dən asılı deyildir,

$\hat{\mathbf{Q}} = n\hat{\mathbf{V}}$ matrisinin elementlərinin çoxölçülü paylanmalar Uışart paylanması adlandırılan (bax. [4]) paylanma ilə paylanır ki, bu paylanmanın sıxlıq funksiyası aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$a(\hat{\mathbf{Q}} | \mathbf{V}; n) = \begin{cases} \frac{|\hat{\mathbf{Q}}|^{(n-p-2)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\hat{\mathbf{Q}})\right\}}{2^{(n-1)p/2} \pi^{p(p-1)/4} |\mathbf{V}|^{(n-1)/2} \prod_{j=1}^p \Gamma((n-j)/2)}, \\ \text{əgər } \hat{\mathbf{Q}} \text{ müsbət müəyyəndirsə,} \\ 0, \quad \text{əks halda.} \end{cases}$$

Bu sxem çərçivəsində çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin seçimi xarakteristikalarından cüt-cüt, xüsusi və toplam korrelyasiyalar kimi xarakteristikalar, ümumiləşmiş dispersiya (yeni $|\hat{\mathbf{V}}|$ statistikasası), ümumiləşmiş Hotelling T^2 – statistikasası (bax. [5]) kimi statistikaların paylanmaları araşdırılmışdır. Xüsusi halda (bax. [1]) $\mathbf{S}_n$ seçimi matrisi kimi «meylsizlik» üçün düzəliş aparılmış $\hat{\mathbf{V}}$ statistik qiymətini, yeni

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{n-1} \hat{\mathbf{V}}$$

qiymətini təyin etdikdə, $\sqrt{n} (|\mathbf{S}_n|/|\mathbf{V}| - 1)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda $N_1(0, 2p)$ normal paylanmasına yaxınlaşır,

$$\frac{n-p}{p(n-1)} T^2 = \frac{n-p}{p(n-1)} n(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}_n^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \quad (6)$$

140 ÇOXÖLÇÜLÜ

və

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} \tilde{T}^2 = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} \times \times \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2})' \mathbf{S}_{n_1+n_2}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2}) \quad (7)$$

təsadüfi kəmiyyətləri isə sərbəstlik dərəcələri sayı uyğun olaraq, $(p, n-p)$ və $(p, n_1 + n_2 - p - 1)$ olan F – paylanmalarına tabədir. (7) münasibətində n_1 və n_2 (1) şəkilli iki asılı olmayan seçimlərin həcmləridir və bu seçimlər eyni bir $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ normal paylanmaya tabə ümumi çoxluqdan edilmişdir; (3) və (4) – (5) şəkilli $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_i}$ və $\mathbf{S}_{n_i}$ statistik qiymətləri i -ci seçim üzrə qurulmuşdur.

$$\mathbf{S}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1)\mathbf{S}_{n_1} + (n_2 - 1)\mathbf{S}_{n_2}]$$

isə ümumi seçimi kovariasion matris olub, $\mathbf{S}_{n_1}$ və $\mathbf{S}_{n_2}$ statistik qiymətləri əsasında qurulmuşdur.

Araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentlərinin qarşılıqlı əlaqələrinin xarakteri və strukturunun çoxölçülü statistik analizi Ç. s. a.-in toplam reqressiya, çoxölçülü *dispersion analiz*, *kovariasion analiz*, *faktor analiz* kimi metod və modellərinə və baş komponentlər metodu, kanonik korrelyasiyalar analizinə xidmət edən anlayış və nəticələri özündə birləşdirmişdir. Bu altbölmənin məğzini təşkil edən nəticələr şərti olaraq iki əsas tipə ayrılır.

1) Qeyd olunmuş modellərin parametrləri üçün ən yaxşı statistik qiymətlərin (müəyyən menada) qurulması və bunların xassələrinin analizi (dəqiqliyi, ehtimalı qoyuluşda isə onların paylanmaları, etibarlı oblastların və s. analizi) kimi. Məs., araşdırılan çoxölçülü $\mathbf{x}$ əlamətinin p – ölçülü $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ normal qanunu ilə paylanmış vektor təsadüfi kəmiyyət kimi interpretasiya olunduğu və uyğun olaraq, q və $p-q$ ölçülü $\mathbf{x}^{(1)}$ və $\mathbf{x}^{(2)}$ – iki alternativ-sütuna ayrıldığı fərz olunur. Bu halda riyazi gözlemələr vektoru $\boldsymbol{\mu}$ -nün, nəzəri və kovariasion $\mathbf{V}$ və $\hat{\mathbf{V}}$ matrislərinin də uyğun olaraq, aşağıdakı ayrılışını təyin edirik:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{və} \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_{11} & \hat{\mathbf{V}}_{12} \\ \hat{\mathbf{V}}_{21} & \hat{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix}.$$

Onda $\mathbf{x}^{(1)}$ altvektorunun şərti paylanması (ikinci altvektorun qeyd olunmuş $\mathbf{x}^{(2)}$ qiymətini almasına nəzərən) $N_q(\boldsymbol{\mu}^{(1)} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}), \Xi)$ normal paylanma olur (bax. [1], [2]). Bu halda

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(1)} | \mathbf{x}^{(2)}) = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}) \quad (8)$$

toplam reqressiyasının klassik çoxölçülü modelinin reqression emsallar matrisi $\mathbf{B}$ və kovariasiyalar matrisi Ξ üçün maksimal doğruoxşarlıq statistik qiymətlər $\hat{\mathbf{B}}$ və $\hat{\Xi}$ – uyğun olaraq, qarşılıqlı asılı olmayan statistik qiymətlər olub, aşağıdakı kimi ifadə olunacaqdır:

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \quad \text{və} \quad \hat{\Xi} = \hat{\mathbf{V}}_{11} - \hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{21};$$

burada $\tilde{\mathbf{B}}$ statistik qiymətinin paylanması $N_{q(p-q)}(\mathbf{B}, \mathbf{V}_B)$ normal qanununa tabedir, $n\hat{\Xi}$ statistik qiyməti isə Ξ və $n - (p - q)$ parametrləri Uışart paylanma qanununa tabedir ($\mathbf{V}_B$ kovariasion matrisinin elementləri $\mathbf{V}$ matrisinin elementləri terminləri ilə ifadə olunur).

Faktor analiz, baş komponentlər və kanonik korrelyasiyalar modellərində statistik qiymətlərin parametrlərinin qurulması və onların xassələrinin araşdırılması üzrə əsas nəticələr müxtəlif kovariasion matrislərin məxsusi (xarakteristik) qiymətlərinin və vektorların ehtimal – statistik xassələrinin analizinə aiddir.

Klassik normal model çərçivəsinə və hətta hər hansı ehtimal modeli çərçivəsinə sığmayan sxemlərdə əsas nəticələr parametrlər üçün modelin hər hansı ekzogen verilmiş funksional keyfiyyəti (və ya adekvatlığı) baxımından ən yaxşı statistik qiymətlərin hesablanması alqoritmlərinin qurulmasına (və onların xassələrinin araşdırılmasına) aiddir.

2) Araşdırılan qarşılıqlı əlaqələrin strukturu haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilərin qurulması. Çoxölçülü normal model çərçivəsində [(1) şəklində müşahidələr ardıcılıqları uyğun çoxölçülü normal paylanmalı ümumi çoxluqlardan təsadüfi seçimlər kimi interpretasiya olunur], məs., aşağıdakı hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilər qurulmuşdur.

I. Araşdırılan göstəricilərin riyazi gözləmələri vektoru μ -nün verilmiş, konkret μ^* vektoruna bərabərliyi haqqında $\mu = \mu^*$ hipotezi; Hotelling T^2 – statistikasının vasitəsilə, (6) düsturunda $\mu = \mu^*$ əvəzləməsinin aparılması ilə yoxlanılır.

II. İki seçimlə ifadə olunan iki ümumi çoxluqda (eyni, lakin naməlum kovariasion matrisləri) riyazi gözləmələr vektorlarının bərabərliyi haqqında $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ hipotezi; T^2 – statistikası ilə yoxlanılır.

III. Hər biri öz seçimi ilə ifadə olunan bir neçə ümumi çoxluqda (eyni, lakin naməlum kovariasion matrisləri) riyazi gözləmələr vektorlarının bərabərliyi haqqında $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(k)} = \mu$ hipotezi

$$U_{p,k-1,n-k} = \frac{\left| \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)}) (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)})' \right|}{\left| \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu}) (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu})' \right|}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\mathbf{x}_i^{(j)}$, – j -ci ümumi çoxluğu ifadə edən n_j həcmli seçimdə p – ölçülü müşahidədir, $\hat{\mu}^{(j)}$ və $\hat{\mu}$ – uyğun olaraq, hər bir seçim üzrə və $n = n_1 + \dots + n_k$ həcmli birləşdirilmiş seçim üzrə qurulmuş (3) şəkilli statistik qiymətlərdir.

IV. Özlərinin $\{\mathbf{x}_i^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$ seçimləri ilə ifadə olunan bir neçə normal ümumi çoxluğun ekvivalentliyi haqqında $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(k)} = \mu$ və $\mathbf{V}_1 = \dots = \mathbf{V}_k = \mathbf{V}$ hipotezi;

$$\lambda = \frac{\prod_{j=1}^k \left| n_j \hat{\mathbf{V}}_j \right|^{(n_j-1)/2}}{\left| \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu}) (\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mu})' \right|^{(n-k)/2}}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\hat{\mathbf{V}}_j$ – (4) şəklində statistik qiymət olub, j -ci seçimin müşahidələri üzrə qurulmuşdur, $j = 1, 2, \dots, k$.

V. $\mathbf{x}$ -in araşdırılan göstəricilərinin ilkin p – ölçülü vektorunun ayrıldığı $p_1 + p_2 + \dots + p_m = p$ şərtini ödəyən dim. –

$p_1, p_2, \dots, p_m$ ölçülü uyğun $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ altvektor-sütunların qarşılıqlı asılı olmamazlığı haqqında hipotez;

$$\psi = \frac{|n\hat{\mathbf{V}}|}{\prod_{i=1}^m |n_i \hat{\mathbf{V}}_i|}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\hat{\mathbf{V}}$ və $\hat{\mathbf{V}}_i$ – uyğun olaraq,

bütün $\mathbf{x}$ vektoru və onun altvektoru $\mathbf{x}^{(i)}$ üçün (4) şəkilli seçimi kovariasion matrislərdir.

Çoxölçülü müşahidələrin araşdırılan ardıcılığının həndəsi strukturunun çoxölçülü statistik analizi diskriminant analiz, ehtimal paylanmalarının qarışığı, klaster analiz və taksonomiya, çoxölçülü şkalalama kimi model və sxemlərin anlayış və nəticələrini özündə birləşdirir. Analiz olunan elementlər arasında məsafə anlayışı (yaxınlıq ölçüsü, oxşarlıq ölçüsü) bütün bu sxemlərin əsasını təşkil edir. Qeyd etmək lazımdır ki, hər birində $\mathbf{x}$ -in göstəricilərinin qiymətləri qeyd olunan real obyektlər analiz olunduğu kimi [bu halda araşdırılmış i -ci obyektin həndəsi obrazı uyğun p – ölçülü fəzada $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$

nöqtəsi olacaqdır], $\mathbf{x}_l$, $l = 1, 2, \dots, p$ göstəricilərinin özləri də analiz oluna bilər [bu halda l -ci göstəricinin həndəsi obrazı uyğun n – ölçülü fəzada $\mathbf{x}_l = (x_{l1}, \dots, x_{ln})$ nöqtəsi olacaqdır].

Diskriminant analizin metodları və nəticələri (bax, [1], [2], [7]) aşağıdakı məsələnin həllinə istiqamətləndirilmişdir. Ümumi çoxluqların sayının $k \geq 2$ olması məlumdur və tədqiqatçı araşdırmaq üçün hər bir çoxluqdan bir seçimə malikdir («öyrədici seçimlər»). Məlum öyrədici seçimlərə əsaslanan ən yaxşı təsnifedici qayda qurmaq tələb olunur, bu qayda üzrə hər hansı yeni elementin ($\mathbf{x}$ müşahidəsi) özünün ümumi çoxluğundan olması təyin olunur, bu şərtlə ki, bu elementin ümumi çoxluqlardan hansına aid olması məlum olmalıdır. Təsnifedici qayda, adətən, müəyyən əməliyyatlar ardıcılığı olub, aşağıdakılardan ibarətdir: araşdırılan göstəricilərin skalyar funksiyasının hesablanması və bu funksiyaların qiymətlərinə görə elementin hansı sinfə daxil ediləcəyi qərarının verilməsi (diskriminant funksiyasının qurulması); elementin siniflərə düzgün aid edilməsi nöqtəyi – nəzərindən göstəricilərin informativlik dərəcəsinə görə nizamlandırılması; səhv təsnifatın uyğun ehtimallarının hesablanması.

Ehtimal paylanmaları qarışıqlarının analizi məsələsi əksər hallarda (lakin həmişə deyil) baxılan çoxluğun «həndəsi strukturunun» tədqiqatı ilə bağlı olaraq da yaranır. Bu halda r -ci bircins sinif anlayışı ilə ümumi çoxluğun vasitəsilə formalaşır ki, bu çoxluq hər hansı (bir qayda olaraq, unimodal) $\mathbf{P}(\mathbf{x}|\theta_r)$ paylanma qanunu ilə təsvir olunur, belə ki, (1) seçimi edilmiş ümumi çoxluğun paylanması

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^k \pi_r \mathbf{P}(\mathbf{x}|\theta_r)$$

şəkində paylanmalar qarışıqı ilə təsvir olunur, burada π_r – ümumi götürülmüş ümumi çoxluğun r -ci sinfinin aprior ehtimalıdır (elementlərinin xüsusi çəkisi). Məsələ ($\{x_i^{(n)}\}_1$ seçimi üzrə)

θ_r , π_r naməlum parametrlərinin və bəzən k -nın da «yaxşı» statistik qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bu işə, xüsusən də, öyrədici seçimlərin olmamasına baxmayaraq, elementlərin təsnifat məsələsini diskriminant analiz sxemində gətirməyə imkan verir.

Klaster – analizin metod və nəticələri (təsnifi, taksonomiyaları (yunan. taxis – qaydalı düzülüş + nomos – qanun), obrazların «müəllimsiz» tanınması (bax, [2], [6]) aşağıdakı məsələnin həllinə istiqamətlənmişdir. Analiz olunan elementlər çoxluğunun strukturu ya uyğun nöqtələrin koordinatları ilə (yeni $\|x_{ij}\|$ matrisi

ilə, $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, n$) və ya onların qarşılıqlı yerləşmələrinin həndəsi xarakteristikaları toplusu ilə verilir, məs., cüt-cüt məsafələr matrisi $\| \rho_{ij} \|_{i,j=1}^n$ ilə. Araşdırılan elementlər çoxluğunun

nisbətən azsaylı (əvvəlcədən ya məlum, ya da ki, məlum olmayan) siniflərə ələ bölgüsü tələb olunur ki, bir sinfin elementləri bir-birindən az məsafədə olsunlar, bu şərtlə ki, müxtəlif siniflər mümkün olduqca bir-birindən olduqca uzaq olmuş olsunlar və bu siniflər eyni zamanda bir-birindən çox da uzaq hissələrə bölünməsinlər.

Çoxölçülü şkalılanma məsələsində (bax, [6]) tədqiq olunan elementlər çoxluğu cüt-cüt məsafələr matrisi $\| \rho_{ij} \|_{i,j=1}^n$ vasitəsi-

lə verilir və elementlərdən hər birinə verilmiş (p) sayda koordinatlar ələ şəkildə qarşı qoyulur ki, bu əlavə olunmuş köməkçi koordinatların köməyi ilə ölçülmüş elementlər arasında cüt-cüt qarşılıqlı məsafələr strukturu verilmiş strukturdan orta hesabla çox az fərqlənsin. Qeyd etmək lazımdır ki, klaster – analizin və çoxölçülü şkalılanmanın əsas nəticələri və metodları ilkin verilənlərin ehtimali təbiəti haqqında, adətən, hər hansı fərziyyələr edilmədən inkişaf edir.

Çoxölçülü statistik analizin tətbiqi rolu əsas etibarilə aşağıdakı üç problemə xidmət etməkdən ibarətdir.

Analiz olunan göstəricilər arasında asılılıqların statistik araşdırılması problemi. Göstəricilərin məğzinə və araşdırmanın son məqsədlərinə görə statistik qeydə alınmış göstəricilərin araşdırılan toplusu x vektorunun öngörül (rus. предсказываемых) (asılı) dəyişənlərin q – ölçülü $x^{(1)}$ altvektoruna və öngörən (rus. предсказывающий) (asılı) dəyişənlərin $(p - q)$ – ölçülü $x^{(2)}$ altvektoruna bölgüsünün aparıldığı fərz olunur; problem – məqbul həllər sinfi F -dən $x^{(1)}$ -in göstəricilərinin altvektorunun müəyyən mənada ən yaxşı approksimasiyasının (1) seçimi əsasında q – ölçülü vektor $f(x^{(2)})$ funksiyasının təyin olunmasından ibarətdir. Funksionalın konkret şəklindən və analiz olunan göstəricilərin təbiətindən asılı olaraq approksimasiyanın keyfiyyəti, toplam regressiya, dispersion, kovariasion və ya konflyuent analizin bu və ya digər sxemləri alınır.

Elementlərin (obyektlərin və ya göstəricilərin) təsnif problemi ümumi (ciddi olmayan) q o y u l u ş d a ondan ibarətdir ki, $\|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$ matrisi və ya $\| \rho_{ij} \|$, $i, j = 1, \dots, n$ matrisi şəklində statistik ifadə olunmuş elementlərin analiz olunacaq bütün toplusu müəyyən mənada bircins olan nisbətən az sayda qruplara bölünməlidir. Təsnifat keyfiyyəti kriterisini müəyyən edən funksionalın konkret şəkli və aprior

informasiyanın təbiətindən asılı olaraq, diskriminant analiz, klaster – analiz (taksonomiya, obrazların «müəllimsiz» tanınması), paylanmalar qarışıqının parçalanması (ayrılması) kimi bu və ya digər sxemlər alınır.

Araşdırılan faktor fəzanın dim. – ölçüsünün kiçildilməsi və informativ göstəricilərin ən yaxşılarının seçilməsi problemi ondan ibarətdir ki, ilkin $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ göstəricilərinin məq-

bul $Z(x)$ çevirmələri sinfindən tapılan, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$ göstəricilərinin nisbətən az olan $m \ll p$ sayda ələ toplusu müəyyən olunmalıdır ki, bu sinifdə əlamətlərin n – ölçülü sisteminin informativliyinin ekzogen [ekzo – yunan, + genos növ – təbiətli yaranış – xarici səbəblərin doğurduğu; ekzogen – proseslər – müəyyən səbəblər nəticəsində baş verən proseslər] verilmiş hər hansı ölçüsünün yuxarı sərhədi alınsın. A v t o i n f o r m a t i v l i k ö l ç ü s ü n ü [yeni statistik (1) massivindəki ilkin əlamətlərin özlərinə nəzərən informasiyanın maksimal qorunmasını təmin edən] təyin edən funksionalın konkretləşdirilməsi, məsələn, faktor analizin və baş komponentlərin müxtəlif sxemlərinə gətirir. X a r i c i i n f o r m a t i v l i k ö l ç ü s ü n ü təyin edən funksionallar, yeni (1) massivindən x -də bilavasitə olmayan digər göstəricilər və ya fenomenlərə nəzərən maksimal informasiyanın əldə olunmasını təmin edən funksionallar, asılılıqların statistik araşdırılması və diskriminant analiz sxemlərində ən informativ göstəricilərin seçilməsi üçün müxtəlif metodlara gətirir.

Ç. s. a.-in əsas riyazi instrumentarisi xətti tənliklər sistemi nəzəriyyəsi və matrislər nəzəriyyəsinin xüsusi metodları (vektorlar və məxsusi qiymətlər haqqında sadə və ümumiləşmiş məsələlərin həlli metodları; matrislərin sadə çevrilməsi və psevdöçevrilməsi; matrislərin diaqonalizasiyası prosedurları və s.) və bəzi optimizasiya alqoritmləridir (koordinatlar üzrə enmə, şəxələr və sərhədlərin, qoşma qradientlər, təsadüfi axtarışın müxtəlif variantları və stoxastik approksimasiyanın metodları).

Əd.: [1] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., «Bull. Int. Stat. Inst.», 1969, № 43, p. 425–41; [4] W i s h a r t J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32–52; [5] H o t e l l i n g H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360–78; [6] K r u s k a l J. B., «Psychometrika», 1964, v. 29, p. 1–27.

ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLANMA « многомерное шкалирование; multidimensional scaling » – baxılan ümumi çoxluğun obyektləri arasında fərqlərin (yaxınlığın) ölçüləri haqqında verilən informasiya əsasında bu obyektlərin hər birinə onun miqdar göstəricilərini xarakterizə edən vektor (verilmiş dim. – ölçüsü ilə) qarşı qoymaq üçün metodlar toplusudur; bu zaman axtarılan koordinat fəzasının dim. – ölçüsü əvvəlcədən verilir, analiz olunan obyektlərin işə əlavə koordinatlar kimi «əlavə olunması» ələ aparılır ki, bunlar arasında qarşılıqlı fərqlərin (yaxınlıqların) strukturu əlavə olunmuş koordinatların köməyi ilə ölçüldükdə verilən strukturdan orta hesabla çox az fərqlənmiş olsun (bax, [1]). Stimulların fəza təsviri məsələsinin həlli üçün formal aparat verilənlər arasında subyektiv fərqlər haqqında onların analizi əsasında ilk dəfə 1952-də (bax, [2]) işlənilmişdir və m e t r i k ç o x ö l ç ü l ü ş k a l l a n m a adlandırılmışdır. Metod metrik fəzada stimulların real konfigurasiyalar şəklində fərqləri haqqında verilənlərin inikası üçün zəruri şərtlərə əsaslanır. Bu metod məsafələr matrisindən konfigurasianın ağırlıq mərkəzi ilə nöqtələri birləşdirən skalyar vektorlar matrisinə keçidi yerinə yetirir. Matrisin rəngi fəzanın dim. – ölçüsü ilə üst-üstə düşür. Dəqiq məsafələr olmayan psixoloji fərqlərə bu metodun tətbiqinə additiv konstantın seçilməsi ilə nail olunur.

Subyektiv fərqlərin məsafələrlə kifayət dərəcədə üst-üstə düşməməsi haqqındakı mülahizələr fərqləri deyil, onların qaydasını

nəzərə alan psixoloji struktur inikasına yeni yanaşmanın yaranmasına səbəb oldu (bax, [3]). Bu məsələnin həllində iki tələb qoyulur: monotonluq və minimal dim. – ölçülülük. Yanaşma – yaxınlıqlar analizi və ya qeyri-metrik Ç.ş. kimi adlandırılmışdır. Belə Ç.ş.-nin qeyri – xətti funksionalın minimallaşdırılmasına əsaslanan metodları müəyyən kriteri mənasında optimal inikası alınmasına səbəb olur.

Müxtəlif subyektlərin psixoloji fəzaları arasında münasibətlərin öyrənilməsi üçün individual fərqlərin şkalalanma metodları təsis edilmişdir. Ən yayılmış modeldə stimullar arasında yaxınlıqlar qiymətləndirilərkən, bütün subyektlər eyni bir faktora əsaslanır, lakin bunları müxtəlif sürətdə nəzərə alır. Model iterativ ən kiçik kvadratlar metodu ilə reallaşdırılmışdır (bax, [4]). Bütün obyektlərin şkalalarının yalnız tərtib dəqiqliyi ilə üst-üstə düşməsi və ya nominal səviyyədə təyin olunması (bax, [5]) haqqında fərziyyələr subyektiv verilənlərin daha dəqiq inikasına gətirir. Uyğun metodların əsasını qeyri – xətti minimizasiya proseduru təşkil edir.

Ç.ş.-ya üstünlüklər analizi də daxildir (bax, [6]). Metodlar bu halda stimulların xassələrini bir neçə subyektin birgə üstünlük analizi yolu ilə aydınlaşdırmaq üçündür. Metodlar stimullar çoxluğunda üstünlüklərin subyektlər tərəfindən nə tərzdə ölçülməsi haqqında fərziyyələrdən asılı olaraq fərqlənirlər.

Əd.: [1] Дэвисон М., Многомерное шкалирование, пер. с англ., М., 1988; [2] Торгерсон У. С., в кн.: Статистическое измерение качественных характеристик, пер. с англ., М., 1972, с. 95–118; [3] Shepard R. N., «Psychometrika», 1962, v. 27, № 2–3, p. 125–40, 219–46; [4] Carroll J. D., Chang J. J., «Psychometrika», 1970, v. 35, № 3, p. 283–319; [5] Терехина А. Ю., Анализ данных методами многомерного шкалирование, М., 1986; [6] Coombs C. H., A theory of data, N. Y., 1964.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ DOLAŞMA « многомерное случайное блуждание; multidimensional random walk » – fəza fəzası d –ölçülü Evklid fəzası, xüsusi halda d –ölçülü $\mathbb{Z}^d$, $d > 1$ şəbəkəsi olan *təsadüfi dolaşmadır*.

$\mathbb{R}^d$, $d > 1$ fəzasında ən sadə Ç. t. d. aşağıdakı kimi təyin olunur. Hissəcik koordinat başlanğıcından hərəkətə başlayaraq koordinat oxlarına paralel istiqamətlərdən biri istiqamətində vahid uzunluqlu addımla yerini dəyişir. Beləliklə, dolaşan hissəciyin mümkün vəziyyətləri koordinatları tamqiymətli olan, $\mathbb{R}^d$ -yə məxsus bütün nöqtələrdir. Ç. t. d.-ni vermək üçün müxtəlif keçidlərə uyğun $2d$ sayda ehtimallar təyin olunmalıdır. Əgər bu ehtimallardan hər biri $d/2$ -yə bərabər olarsa, simmetrik Ç. t. d. alınır. Belə Ç. t. d.-lər üçün aşağıdakı Poya teoremi doğrudur (bax, [1]): $d = 2$ olduqda simmetrik Ç. t. d. üçün hissəcik öz əvvəlki vəziyyətinə tez və ya gec sanki yəqin qayıdacaqdır (bir və ya sonsuz say dəfə). $d = 3$ olduqda bu ehtimal təqribən yalnız 0,35-ə bərabər olur ($d > 3$ olduqda bu ehtimal daha da kiçik olur).

Ən çox tədqiq olunmuş Ç. t. d.-lər – vəziyyətləri çoxluğu $\mathbb{Z}^d$ və ya $\mathbb{Z}_+^d$ olan (mənfi olmayan, tamqiymətli koordinatları olan nöqtələr çoxluğu) Markov zəncirləridir. Belə Ç. t. d.-lər üçün öyrənilən əsas məsələlər erqodiklik, qayıdırlılıq, stasionar paylanmaların aşkar sürətdə hesablanması, bunların asimptotik qiymətlərinin hesablanması və s. kimi məsələlərdir.

$\mathbb{Z}_+^d$ və oxşar oblastlar üçün erqodiklik və qayıdırsızlıq şərtlərinin alınmasında ən universal metod Lyapunov funksiyaları (semimartinqalları majorantlayan) metodudur. Sıçrayışları məhdud olan, maksimal bircinslik xassəli dolaşmalar üçün, yeni oblast daxilində yerindəyişmələrə nəzərən invariant və oblastın bu üzrlərindən yaxındakı üzrlər boyu yerindəyişmələrə nəzərən invariant xassəli dolaşmalar üçün $d = 2, 3$

qiymətlərində təsnifat tamamilə verilmişdir (bax, [4]). $d > 3$ olduqda $\mathbb{Z}_+^d$ -də erqodiklik, bir sıra hallarda $\mathbb{Z}_+^{d-1}$ -də stasionar ehtimalların hesablanması gətirilir. Maksimal bircinslik xassəli dolaşmalar üçün aşkar hesablamaların çətinliyi baxılan oblastın üzrlərinin kodim.–ölçülüü κ ilə təyin olunur (məs., $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$ üçün $\kappa = 1$, $\mathbb{Z}_+^d$ üçün $\kappa = d$). 1-ə bərabər kodim. – ölçülük üçün həll Viner – Hopf metodu ilə alınır (faktorizasiya metodu; bax, [5]). $\kappa = 2$ üçün həll Abel inteqralları şəklində ifadə olunur (bax, [5]). Bəzi hallarda daha sadə həllər mümkündür (bax, [5]) və daha son nəticələr [3]-də verilir).

$\mathbb{Z}_+^d$ -də dolaşmaların maksimal bircinsliyinin ümumi halında aşkar həllər d üzrə induksiya ilə hər addımda $1 + K(z)$ şəkilli operator funksiyaların faktorizasiyasından istifadə etməklə alınır, burada $K(z)$ – bütün z , $|z| = 1$ üçün kompakt operatorudur (bax, [5]).

Asimptotik nəticələr, əsas etibarilə, ümumi nəzəriyyələr çərçivəsində alınır (məs., asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremləri nəzəriyyəsi və s.). $\mathbb{Z}_+^2$ halında spesifik nəticələr də vardır (bax, [5]). Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin ideyalan özü-özü ilə kəsişmələrsiz və qarşılıqlı təsirli dolaşmalar üçün yeni nəticələrin və məsələlərin yeni qoyuluşlarının alınmasına böyük təsir göstərmiş oldu (bax, [6]). Digər tərəfdən, çoxölçülü dolaşmalardan Gibbs təsadüfi meydanlarının ifadə olunmasında, korrelyasion bərabərsizliklərin çıxarılmasında, transfer – matrislərin spektrinin araşdırılmasında istifadə olunur (bax, [7]). Özü-özü ilə kəsişmələrsiz dolaşmalar nəzəriyyəsinin inkişafı nəticəsində, simlər nəzəriyyəsi ilə bağlı olan, özü-özü ilə kəsişmələrsiz səthlər nəzəriyyəsi yaranmışdır. Təsadüfi mühitdə çoxölçülü dolaşmaların öyrənilməsi də digər bir istiqaməti əhatə edir.

Əd.: [1] Спичер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Когэн Дж., Боксма О., Граничные задачи в теории массового обслуживания, пер. с англ., М., 1987; [4] Малышев В. А., Меньшиков М. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1979, т. 39, с. 3–48; [5] Малышев В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 13, М., 1976, с. 5–35; [6] Le Gall J.-F., «Comm. Math. Phys.», 1986, v. 104, p. 471–528; [7] Hayes J. T., Hayes L., «Comm. Math. Phys.», 1986, v. 105, p. 221–38; [8] Bricmont J., Frohlich J., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 98, p. 553–78.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « многомерная случайная величина; multidimensional random variable » – qeyd olunmuş p sayda ($p > 1$) birölçülü *təsadüfi kəmiyyətlərin* nizamlanmış toplusudur. Beləliklə, Ç. t. k. hər bir komponenti ξ_i təsadüfi kəmiyyəti olan p – komponentli $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ vektoru şəklində ifadə oluna bilər. Ç. t. k.-in realizasiyası *çoxölçülü müşahidədir*.

Ən çox baxılan hal ξ_i komponentlərinin kəsilməz və ya diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu hallardır ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərin aldığı mümkün qiymətlər ədəd oxunda təyin olunur. Belə Ç. t. k.-lərin öyrənilməsi *çoxölçülü statistik analizin predmetidir*. Ç. t. k.-in bütün komponentləri məhz kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda onun paylanması bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının sıxlıq funksiyası ilə verilir. Ç. t. k.-in bütün komponentləri diskret olduğu halda, onun paylanması

$$P_{i_1, \dots, i_p} = P \{ \xi = U_{i_1, \dots, i_p} \}$$

ehtimallar toplusu ilə verilir, burada $U_{i_1, \dots, i_p} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_p})$ və $U_{j_1 j_2}, \dots, j$ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətlərindən biridir.

$P_{i_1, \dots, i_p}$ qiymətlərinin toplusu çoxgirişli qoşmalılar cədvəli kimi adlandırılır.

Ç. t. k.-in praktikada ən çox istifadə olunan əsas ədədi xarakteristikaları – *orta qiymətlər vektoru* və *kovariasion matris* kimi xarakteristikalar və bu xarakteristikaların dayanıqlı analoqlarıdır.

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ PROSES « многомерный случайный процесс; multidimensional random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

ÇOXÖLÇÜLÜ VERİLƏNLƏRİN STRUKTUR MODELİ « многомерных данных модель структуры; model of structure of multivariate data » – verilənlərin aşağıdakı kimi təsvir olunan *statistik modelidir*. Üzərində statistik işlənmələr aparılacaq verilənlərin $n \times p$ – ölçülü verilənlər matrisinin **X** şəklində verildiyi fərz olunur; n – obyektlərin sayı, p – dəyişənlərin sayıdır. Obyektləri çoxölçülü (p – ölçülü) fəzada nöqtələr kimi təsəvvür etmək olar. Verilənlərin *tədqiqi statistik analizində* bu nöqtələr çoxluğunun strukturunu təsvir etmək üçün, adətən, aşağıdakı modellərdən biri istifadə olunur: (a) ellipsoid konfigurasiyaya oxşar nöqtələr «buludu» modeli, (b) *klaster modeli*, yeni bir-birindən olduqca uzaq yerləşən, bir neçə nöqtələr «buludlarının» toplusu; (c) «pozulma» modeli (rus. «модель засорения»), yeni uzaq aşma – enmələrin olduğu nöqtələrin kompakt «buludu»; (ç) dim. – ölçüsü ilkin çoxobrazlılığın dim. – ölçüsündən daha aşağı olan çoxobrazlı (xətti və ya qeyri – xətti) kimi, *nöqtələrin daşıyıcısı modeli*, tipik misal – cırılmış paylanmadan seçim; (d) tədqiqatçıya nöqtələrin müəyyən şəkildə bir neçə qrupa bölünmüş olduğu və onların bu və ya digər qrupa aid olması haqqında informasiya məlum olduğu halda *diskriminant model*.

(ç) modeli çərçivəsində, uyğun çoxobrazlı $X_{II} = F(X_I) + \varepsilon$ şəklində funksional ifadə ilə göstərilə bilərsə, *regression modelə* də baxmaq olar, burada X_I və X_{II} – ilkin topludan dəyişənlərin iki qrupudur (bu halda X_{II} -dən olan dəyişənlər *proqnozlanılacaq dəyişənlər*, X_I -dən olan dəyişənlər *öngörül dəyişənlər* adlanır), ε *öngörül xətasıdır*.

Aydındır ki, real verilənlər, adətən, bu modellər çərçivəsində yalnız təxmini olaraq təsvir oluna bilər, hətta ola da bilər ki, verilənlərin strukturu göstərilən modellərin təsvirindən heç birinə, hətta təxmini də olsa belə uyğun gəlməsin.

Verilənlərin tədqiqi statistik analizində nəticələrin analizi və interpretasiyası üsulları seçilmiş modeldən və verilənlər üzərində işlənilmə metodlarından olduqca asılıdır. Lakin nəticələrin analizi üçün bir sıra qaydalar və yanaşmalar seçmək olar ki, bunlar məhz tədqiqi analizin spesifikasiyasını olduqca yaxşı müəyyənləşdirsin. Bu dəyişənlərin çevrilməsi, qalıqların analizi, verilənlərin vizualizasiyası (verilənlərin qrafik inikası), qrafik inikas əsasında verilənlərlə manipulyasiya, aktiv və illüstrativ dəyişənlər və obyektlər aparatının istifadəsi kimi qayda və yanaşmalardır.

Dəyişənlərin çevrilməsi. Adətən, dəyişənlərin ele çevrilmələri istifadə olunur ki, bunlar nəticəsində ya normal

paylanma ($p > 1$ çoxölçülü halında çevrilmiş dəyişənlərin çoxölçülü normal paylanması) alınsın, yaxud bütün dəyişənlər və ya bəzi dəyişənlər arasında xətti asılılıq maksimal artmış olsun. Xətti asılılıq göstəriciləri kimi, məs., korrelyasiya əmsallarının kvadratları cəmi istifadə olunur. Sonradan çevrilmiş verilənlərə yaxşı işlənilmiş metodlardan, *faktor analiz*, *xətti regression analiz* və s. kimi metodlar tətbiq olunur.

Qalıqlar analizi. Üzərində işləniləcək verilənlərin onların qəbul olunan təsvir modelindən sisteməlik yayınmalarını aşkar etmək üçün istifadə olunur (məs., xəttilləşdirmə çevirməsindən sonra dəyişənlər arasında asılılığın xətti modelinin adekvatlığının yoxlanılması üçün).

Verilənlərin vizualizasiyası. Bu halda fərz olunur ki, bu və ya digər modeli başqa bir modelə gətirdikdə verilənlərin qrafik inikasını və ya qalıqların qrafik inikasını bu və ya digər üsulla almaq olar; odur ki, tədqiqatçı bu təsvirin bilavasitə vizual analizi yolu ilə sadəcə verilənlərin struktur modellərindən hansının olduğunu təyin edə bilər (bax, *Çoxölçülü verilənlərin vizualizasiyası*).

Grafik inikas əsasında verilənlərlə manipulyasiyalar. Bu aşağıdakı kimi anlaşılar. Əksər hallarda verilənlərin strukturunu, məs., bütün klasterləri bir histqram və ya səpələnmə diaqramı vasitəsilə tamamilə seçib ayırmaq olmur. Lakin ele hal ola bilər ki, verilənlər iki – bir-birindən olduqca ayrılan qruplara bölünmüş olsun. Bu halda verilənlər üzərində işlənilmə üçün effektiv üsullardan biri – verilənlər matrisinin hissələrindən birinin xaric olunması və matrisin qalan hissəsinə verilənlərin yeni matrisi kimi baxaraq araşdırmanın davam etdirilməsidir.

Aktiv və illüstrativ dəyişənlər və obyektlər aparatının istifadəsi. Obyektlərin aktiv və illüstrativ bölgüsü olduqca geniş surətdə istifadə olunur və mövcud seçimin öyrədici və imtahanedici seçimlərə bölgüsünə uyğun gəlir. Nəticələrin interpretasiyasında və məs., *klaster analiz* metodları tətbiq olunarkən onların dayanıqlılığının yoxlanılmasında digər faydalı üsul ilkin dəyişənlər çoxluğunun iki hissəyə – *aktiv*, yeni üzərində işlənilmə aparılan mərhələdə istifadə olunan hissələrə və *illüstrativ*, yeni yalnız interpretasiya mərhələsində istifadə olunan hissələrə bölgüsü üsuludur.

Məs., fərz olunur ki, tədqiqatçı dəyişənləri aktiv və illüstrativ hissələrə ayıraraq klaster prosedurlardan hansılarsındansa istifadə etmişdir. Interpretasiya üsullarından biri klasterlərin hər birində illüstrativ dəyişənlərin səpələnməsini və orta qiymətlərini analiz etməkdən ibarətdir. Əgər orta qiymətlər bir-birindən olduqca fərqlənsə, onda klasterlərin obyektiv varlığına inam çoxalır və bunların interpretasiya olunması üçün əlavə imkan yaranır (təbiidir ki, buna görə aktiv dəyişənlərdən istifadə olunur). Daha incə üsul – seçilmiş klasterlərə öyrədici seçimlər kimi baxaraq, illüstrativ dəyişənlər fəzasında həlledici qaydaların (məs., xətti diskriminant funksiyaların) alınması üsuludur.

Əd.: [1] T u k e y J. W., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 1–67; [2] T u k e y J. W., Exploratory data analysis, Reading, 1977; [3] L e b a r t L., M o r i n e a u A., W a r w i c k K. M., Multivariate descriptive statistical analysis, N. Y., 1984; [4] Interpreting multivariate data, N. Y., 1981.

ÇOXÖLÇÜLÜ VERİLƏNLƏRİN VİZUALİZASIYA-SI « многомерных данных визуализация; visualization of multivariate data » – *çoxölçülü müşahidələr* toplusunun analizi metodudur; müşahidələrin bir, iki və üçölçülü fəzaya müəyyən mənada az informasiya itkisi ilə inikasına və sonradan alınan nöqtələr çoxluğunun həndəsi konfigurasiyasının (birölçülü və ikiölçülü histqramların, tezlik poliqonlarının, ikiölçülü və üçölçülü səpələnmə diaqramlarının, sıxlıq həddunun əyrilərinin, üçölçülü fəzada sıxlıq səthlərinin və s.) vizual analizinə əsaslanır. Belə yanaşmanın effektivliyi ona əsaslanır ki, müstəvi və ya fəzada hər hansı nöqtələr çoxluğunu analiz edən şəxs bu çoxluğa xas olan struktur xüsusiyyətlərini, məs.,

klasterlerin olduğunu, her hansı eyni xətt ətrafında nöqtələrin qruplaşmasını, aşma – enmələri və anomal müşahidələrin olduğunu yaxşı dərk edə bilər. Ç. v. v. üçün ölçünün kiçildilməsində bütün metodlardan – *baş komponentlər analizi, çoxölçülülük şkallanması, məqsədyönlü proyeksiyalama* metodlarından istifadə edilir. Ç. v. v. – verilənlərin tədqiq məqsədli statistik analizi üçün əsas üsullardan biridir.

ÇOXÖLÇÜLÜ VİNER PROSESİ « многомерный винеровский процесс; multidimensional Wiener process ». çoxölçülülük Braun hərəkəti prosesi, – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ -dən olan, asılı olmayan artımlı kəsilməz bircins $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesdir. Ç. V. p. çoxölçülülük Braun hərəkəti üçün riyazi modellərdən biridir. Belə prosesin xarakteristik funksiyası

$$M \exp \{i(z, X(t))\} = \exp \{t[i(a, z) - (Bz, z)/2]\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, $a \in \mathbb{R}^m$ vektoru aparıcı vektoru, $\mathbb{R}^m$ -də B operatoru diffuziya operatoru adlanır. B operatoru simmetrik mənfi olmayan operatorudur. Sadə çevirmə ilə Ç. V. p. $t \geq 0$ «standart» Ç. V. p. $w(t)$, $t \geq 0$ prosesinə

çevrilə bilər və bu proses üçün $a=0$, $B=I$ (I , – $\mathbb{R}^m$ -də vahidi operatorudur). $X(t)$, $t \geq 0$ və $w(t)$, $t \geq 0$ prosesləri

$X(t) = ta + B^{1/2}w(t)$ münasibətilə əlaqədirlər, burada $B^{1/2}$, – B -nin mənfi olmayan kvadrat köküdür. $w(t)$, $t \geq 0$ Ç. V. p.-nin koordinatları asılı deyildir və bircins Viner prosesləridir.

Ç. V. p.-nin demək olar ki, bütün trayektoriyaları heç yerdə differensialanmır (bax, [1]). $m=2$ olduqda Viner trayektoriyası müsbət radiuslu ixtiyari dairedə sanki yəqin olur (Viner trayektoriyası müstəvidə hər yerdə sıxdır). $m=3$ olduqda

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} |w(t)| = +\infty \right\} = 1$$

və bütün $\lambda > 1$ üçün

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln T)^{\lambda/m-1/2}}{\sqrt{T}} \inf_{t > T} |w(t)| \geq 1 \right\} = 1.$$

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы в их траектории, пер. с англ. М., 1968; [2] Гинхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

ÇOXPARAMETRLİ BRAUN PROSESİ « многопараметрическое брауновское движение; multiparameter Brownian motion » – bax, *Levi meydanı*.

ÇOXTƏRƏFLİ KANAL « многосторонний канал; multi-way channel » – hər biri eyni zamanda məlumatları ötürən və qəbulədən bir neçə terminalı sistemdə informasiya ötürməsinə təsvir edən rabitə *kanalıdır*. Aşağıda diskret stasionar yaddaşsız Ç. k. üzrə informasiya ötürmə sxemi verilir.

K girişli və K çıxışlı diskret stasionar yaddaşsız *çoxkomponentli kanalın* verildiyi fərz olunur; kanalın giriş əlifbası $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_K$, çıxış əlifbası $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$ və keçid ehtimalları $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_K / y_1, \dots, y_K)$ verilmişdir. Fərz olunur ki, kanalın k -cı girişi və k -cı çıxışı k -cı terminala birləşdirilmişdir, $1 \leq k \leq K$. k -cı terminalda $(K-1)$ sayda m_{ki} məlumatı vardır, $1 \leq i \leq K$, $1 \leq k \leq K$, $i \neq k$ və $1 \leq m_{ki} \leq M_{ki}$ olduqda m_{ki} məlumatı k -cı terminaldan i -ci terminala ötürmə üçün təyin olunmuşdur. N uzunluqlu blok kodu NK sayda kodlandırıcı φ_{nk} funksiyası və K sayda dekodlayıcı ψ_k funksiyaları vasitəsilə verilir. Kodlaşdırıcı funksiya $\varphi_{nk}(\tilde{y}_{1k}, \dots, \tilde{y}_{n-1,k}, m_{k1}, \dots, m_{kN}) \in \mathcal{X}_k$ k -cı terminaldan ötürüləcək m_{ki} , $i \neq k$ məlumatlarından asılı olaraq kanalın k -cı girişində ötürülmə üçün n -ci simvolu və n anında k -cı çıxışda qəbul edilmiş $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}$, k simvollarını təyin edir. Dekodlaşdırıcı funksiya $\psi_k(\tilde{y}_{1k}, \dots, \tilde{y}_{Nk})$ bütün digər terminallardan k -cı terminala göndərilən bütün $m_{1k}, \dots, m_{Kk}$ məlumatlarının statistik qiymətlərini – $\hat{m}_{1k}, \dots, \hat{m}_{Kk}$ qiymətlərini təyin edir.

Verilmiş kod üçün P_e xəta ehtimalı $1 - P_e = P\{\hat{m}_{ki} = m_{ki}, \text{ bütün } k \neq i \text{ qiymətlərində}\}$ bərabərliyi ilə təyin olunur (ötürülən m_{ki} məlumatlarının bir-birindən asılı olmadığı və uyğun məlumatlar çoxluqlarında müntəzəm qanunla paylandığı fərz olunur). Ç. k.-in ötürücülük qabiliyyətli oblastı $\mathcal{R}$ bütün ele $R = \{R_{ki}\}$ toplusundan ibarətdir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və kifayət qədər böyük N üçün $M_{ki} \geq 2^{N(R_{ki}-\varepsilon)}$ münasibəti bütün $1 \leq i, k \leq K$, $i \neq k$ qiymətlərində ödənilsin və $P_e < \varepsilon$ şərtini ödəyən N uzunluqlu kod vardır. Ç. k. üçün ötürücülük qabiliyyətli oblast $\mathcal{R}$ -in hesablanması yalnız olduqca xüsusi bəzi siniflər üçün aparılmışdır. Ümumi halda $\mathcal{R}$ üçün yalnız yuxarı və aşağı statistik qiymətlər alınmışdır.

Ç. k.-in araşdırılması haqqında məsələni (xüsusi halda $K=2$) K. Şennon (C. Shannon) 1961-də daxil etmişdir (ikiterəfli kanal üçün).

Əd.: [1] Van der Meulen E. C., A survey of multi-way channels in information theory, 1961–1976, «IEEE Trans. Inform. Theory», 1977, v. 23, № 1, p. 1–37; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ. М., 1963, с. 622–63.

ÇOXZİRVƏLİ PAYLANMA « многовершинное распределение; multimodal distribution » – bax, *Multimodal paylanma*.

DADLİ METRİKASI « Дадли метрика; Dudley's metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

DADLİ ŞƏRTİ « Дадли условие; Dudley's condition » – *tesadüfi prosesin* parametrik çoxluğunun ε – *entropiyası* üzerine qoyulan məhdudiyyətdir. $\{\zeta(t), t \in T\}$ – parametrik çoxluğu ixtiyari T olan həqiqi qiymətli təsadüfi proses olsun; ixtiyari $t \in T$ üçün $M\zeta(t) = 0$, $M\zeta^2(t) < \infty$ olduğu, T çoxluğunun isə $d(t, s) = [M(\zeta(t) - \zeta(s))^2]^{1/2}$ psevdometrikasına görə tamamilə məhdud olduğu fərz olunur. $H(\varepsilon, T, d)$, (T, d) -də ε – şəbəkənin elementlərinin minimal sayının loqarifmi olsun.

$$\int_0^1 (H(\varepsilon, T, d))^{1/2} d\varepsilon$$

integralının sonlu olması tələbi D. ş.-dir. D. ş. $\zeta(t)$ ilə eyni kovariasiyalı T -də d – kəsilməz Qauss prosesinin varlığını təmin edir (bax, [1]).

Bezi əlavə məhdudiyyətlərlə D. ş. $\zeta(t)$ -nin asılı olmayan sürətləri ardıcılığına invariantlıq prinsipinin tətbiqi üçün kafidir (bax, *Yığılması*) empirik ölçülərin və empirik proseslərin, həmçinin [2], [3]).

Əd.: [1] Dudley R. M., «J. Funct. Anal.», 1967, v. 1, № 3, p. 290–330; [2] Dudley R. M., «Lect. Notes Math.», 1984, № 1097, p. 1–141; [3] Борисов И. С., «Тр. Ин-та матем.», Новосиб., 1985, т. 5, с. 3–27.

DAXİL EDİLMİŞ BƏRPA PROSESİ « вложенный процесс восстановления; embedded renewal process » – *tesadüfi dolaşmaların* tədqiqində mühüm yer tutan pille indeksi, pille boyu kimi təsadüfi kəmiyyətlərin emələ gətirdiyi *bərpa prosesidir* (ola bilsin ki, qırılan proses).

$\xi_1, \xi_2, \dots$ – paylanma funksiyaları eyni F -ə bərabər olan, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (1)$$

n – zaman parametri, S_n – ümumi təsadüfi dolaşma hərəkətinə olan hissəciyin $n > 0$ anındakı vəziyyəti olsun. Məs., ixtiyari I intervalı (ve ya digər bir çoxluq) üçün $\{S_n \in I\}$ hadisəsi hissəciyin I intervalına daxil olma hadisəsi adlanır və verilmiş intervala ardıcıl daxil olmaların araşdırılması $S_1, S_2, \dots$ ardıcılığının elementlərindəki mühüm dəyişmələri aşkar etməyə xidmət edir. n zaman parametri olduğundan, « n anı» ifadəsindən istifadə olunur.

$n > 0$ anında təsadüfi dolaşmanın *rekord qiyməti* alması, yeni $n > 0$ olduqda

$$S_n > S_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

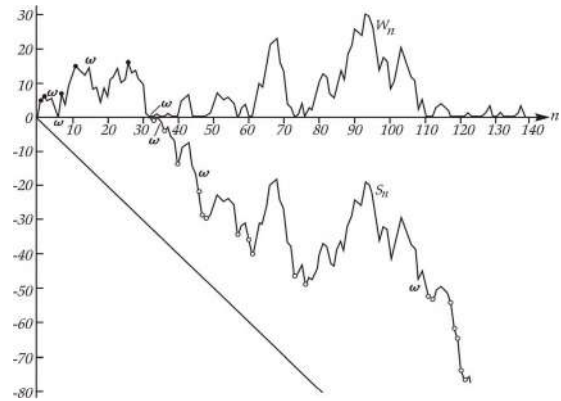
münasibətinin ödənilməsi fərz olunur (bax, [1]). (2) bərabərsizliklərinin k -cı dəfə ödənildiyi an k -cı pille (üst pille) indeksi adlanır. k -cı pille anında S_n -in qiymətinə k -cı pille boyu deyilir.

(Daxil olunmuş bu təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – məxsusi olduğu hesab olunur).

Alt pille indeksi, alt pille boyu kimi pille təsadüfi kəmiyyətləri analoji qaydada, lakin (2) bərabərsizliklərinə tərs bərabərsizliklərlə təyin olunur; yəni

$$S_n < S_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

bərabərsizliklərinin k -cı dəfə ödənildiyi ana k -cı alt pille indeksi, k -cı pille anında S_n -in aldığı qiymətə k -cı alt pille boyu deyilir. (2) və (3) ciddi bərabərsizliklərini uyğun olaraq $\geq$ və $\leq$ bərabərsizlikləri ilə əvəz etdikdə, zəif pille indeksləri terminləri istifadə olunur. Əgər paylanma funksiyası F kəsilməz olarsa, bu fərq heç bir əhəmiyyət kəsb etmir. Şəkildə zəif pille nöqtələri ω hərfi ilə işarə edilmişdir.



Şəkil. Təsadüfi dolaşma və onunla bağlı gözlemə prosesi.

(S_n) təsadüfi dolaşmasında ξ_n təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi -1, dispersiyası 16-ya bərabərdir. Yuxarı və aşağı pille nöqtələri uyğun olaraq $\bullet$ və $\circ$ kimi işarə olunmuşdur. Koordinatları (26, 16) olan beşinci pille nöqtəsi bütün təsadüfi dolaşmanın ən böyük ehtimalı maksimum nöqtəsidir.

[Rekord qiymətlərin ikinci və üçüncü dəfə alındığı nöqtələr ω ilə işarə olunmuşdur; bu nöqtələr (2) bərabərsizliyində ciddi bərabərsizlik işarəsinin $\geq$ işarəsi ilə əvəz olunması ilə təyin olunur.]

(S_n) bütün qrafik üzrə öz riyazi gözləməsi n -i aşır. Əslinə qaldıqda $S_n \leq -n$ şərtinə təyin olunan birinci indeks $n = 135$ -ə bərabərdir (bu halda $S_{135} = -137$). Qeyd olunan bu hal n pille anının riyazi gözləməsinin sonsuzluğa bərabər olması faktı ilə uzlaşır.

ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq, (1, 3, 5, 7, 9) və (2, 4, 6, 8, 10) çoxluqlarında müntəzəm paylanmış, qarşılıqlı asılı olmayan η_n və γ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqi $(\xi_n = \eta_n - \gamma_n)$ bərabərdir.

$(S_0, S_1, \dots)$ trayektoriyasında pille nöqtələri – trayektoriyanın əvvəl çatmamış olduğu nöqtələrdir (rekord qiyməti). Şəkilə sonuncu müsbət vəziyyəti $n = 31$ anında olan, mənfə sonsuzluğa gedən təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası təsvir edilmişdir. Bu qrafikdə trayektoriyanın 5 üst və 18 alt nöqtələri uyğun olaraq, • və ◊ kimi işarələnmişdir.

İlk pille indeksi $\mathcal{A}_1$, $(0, \infty)$ intervalına ilk daxilolma anına, $\mathcal{A}_1$ ilk pille boyu isə $S_{\mathcal{A}_1}$ -ə bərabərdir. $\mathcal{A}_1$ anından sonra təsadüfi dolaşmanın davamı – bütün təsadüfi dolaşmanın ehtimali təkrandır. $\mathcal{A}_1 = n$ olduqda, $k > n$ anında ikinci pille indeksinin a -ya bərabər olması yalnız $\xi_{n+1}, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır və buna görə də, birinci və ikinci pille indeksləri arasındakı sınaqların sayı $\mathcal{A}_1$ -dən asılı olmayan və onunla eyni qanunla paylanmış $\mathcal{A}_2$ təsadüfi kəmiyyətdir. Analoji mülahizələrdən aşağıdakı ümumi nəticə alınır: k -cı pille indeksi və k -cı pille boyu

$$\mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k \text{ və } \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k$$

cəmləri ilə ifadə olunur; bu halda $\mathcal{A}_i$ və $\mathcal{A}_i$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Başqa sözlə, pille indeksləri və pille boyun bərpə prosesi (mümkündür ki, qırılan) təşkil edir.

İntuitiv olaraq aydındır ki, qırılan təsadüfi proseslər halında S_n cəmləri $-\infty$ -a yaxınlaşır və $\{S_n\}$ ardıcılığı vahid ehtimalla maksimum qiymətini alır.

Ehtiyatlı idarəetmə nəzəriyyəsində, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində pille təsadüfi kəmiyyətləri bezi proseslərin araşdırılması üçün effektiv surətdə istifadə olunur.

Misal. $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} e^{ax}, & x < 0 \\ \frac{ab}{a+b} e^{-bx}, & x > 0 \end{cases}$$

olsun. Bu təsadüfi dolaşma ilə bağlı bütün paylanmalar dəqiqliklə hesablanılır. $p(x)$ funksiyası iki eksponensial paylanmanın sıxlıq funksiyalarının $[(0, \infty)$ və $(-\infty, 0)$ -da toplanmış] kompozisiyası olduğundan bu təsadüfi dolaşma kütləvi xidmət nəzəriyyəsində böyük rol oynayır.

Başqa sözlə, ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərini iki – müsbət, üstlü qanunla paylanmış asılı olmayan η_i və γ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqi ilə ifadə etmək olar. Ümumiliyi pozmadan $a \leq b$ götürmək olar. Bu halda, üst pille boyu $\mathcal{A}_1^+$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası ae^{-bx} -ə bərabərdir; $\mathcal{A}_1$ qeyri – məxsusi təsadüfi kəmiyyətdir və bu prosesin qırılma ehtimalı kimi interpretasiya olunan $q = 1 - F(\infty)$ ehtimalı (defekt adlanan) $(b-a)/b$ nisbətinə bərabərdir. Üst pille anı $\mathcal{A}_1$ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası $b^{-1}f(s)$ -ə bərabərdir, burada

$$2f(s) = a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4abs}.$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin defekti də $(b-a)/b$ -yə bərabərdir.

Alt pille boyu $\mathcal{A}_1^-$ -in paylanmasının sıxlıq funksiyası da ae^{ax} -ə bərabərdir. Alt pille anı $\mathcal{A}_1^-$ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası isə $a^{-1}f(s)$ -ə bərabərdir. $a=b$ olduğu halda, bu doğuran funksiya $1 - \sqrt{1-s}$ doğuran funksiyasına bərabər olur ki, bu da adi təsadüfi dolaşma (və ya metal pulun atılması) nəzəriyyəsindən məlumdur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., 1984.

DAXİL EDİLMİŞ MARKOV ZƏNCİRİ « вложенная цепь Маркова; embedded Markov chain » – $\zeta(t)$

Markov prosesində $\tau_k \leq \tau_{k+1}$, $k \geq 0$ şərtini ödəyən τ_k Markov anlarında P_ζ – sanki yəqin

$$P_\zeta \{ \zeta(\tau_k + t) \in A | \mathcal{A}_{\tau_k} \} = P_{\zeta_k} \{ \zeta(t) \in A \}$$

münasibətini ödəyən $\zeta_k = \zeta(\tau_k)$, $k \geq 0$ ardıcılığı ilə yaranan Markov zənciridir. Markov müdaxiləsi halında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin ergodik xassələri D. e. M. z.-nin ergodikliyindən alınır. Xüsusi halda, $(\zeta_k, \tau_k; k \geq 0)$ Markov bərpə prosesidirsə, onda $\zeta(t) = \zeta_{\nu(t)}$, $\nu(t) = \max \{ k : \tau_k \leq t \}$ – semi – Markov prosesidir.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

DAXİL EDİLMİŞ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « вложенный ветвящийся процесс; embedded branching process » – 1) ümumi və şaxələnən proses üçün Qalton – Watson prosesidir; ümumi şaxələnən prosesin hissəciklərinin evolyusiyasını zamana görə deyil, nəsillərə görə təsvir edir.

2) Kəsilməz zamanlı bircins Markov şaxələnən $\zeta(t)$, $t \geq 0$

prosesi üçün $\zeta_n^* = \zeta(n\delta)$, $\delta > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Qalton – Watson prosesidir. Qalton – Watson prosesi D. e. ş. p. olduğu halda, kəsilməz zamanlı bircins Markov şaxələnən prosesinin varlığı şərtlərinin tapılmasından ibarət, şaxələnən prosesin daxil edilmə problemi D. e. ş. p.-in sonuncu anlayışı ilə bağlıdır (bax, [1]). Bu problem indiye qədər həllini tapa bilməmişdir.

Əd.: [1] Athreya K. B., Ney P. E., Branching process, B. – Hdlb. – N. Y., 1972.

DAXİLETMƏ VƏ XARİCETMƏ METODU « включения и исключения метод; inclusion-exclusion method » – verilən sayda təsadüfi hadisələrin baş vermə ehtimallarının bu hadisələrin kəsişmələrinin ehtimalları ilə ifadə olunması üçün kombinator üsuldur. Məs., $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən yalnız r saydasının baş verməsi ehtimalı

$$P(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_k^r p_k \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$p_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} P\{A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}\}$$

Düsturun sağ tərəfində k üzrə r -dən $r+t$ -yə qədər xüsusi cəmlər $P(r)$ ehtimalının qiymətləndirilməsində yuxarı (t -nin cüt qiymətlərində) və aşağı (t -nin tək qiymətlərində) sərhədləri təyin edir; bu bərabərsizliklər Bonferroni bərabərsizlikləri adlanır (bax, Bonferroni bərabərsizlikləri). Bəzən D. və x. m. kimi (*) və ona yaxın düsturlar da nəzərdə tutulur.

Əd.: [1] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

DAİRƏVİ QANUN « круговой закон; circular law »

– elementləri asılı olmayan təsadüfi matrislərin normalanmış spektral funksiyaları üçün limit qanunudur. n tərtib

$H_n = \|\xi_{ij} n^{-1/2}\|$ kompleks matrisinin elementləri ξ_{ij} ,

$i, j = 1, \dots, n$, – n -in hər bir qiymətində asılı olmayan təsadüfi

elementlər olsun; fərz olunur ki, $M\xi_{ij} = 0$, $M|\xi_{ij}|^2 = \sigma^2$,

$0 < \sigma < \infty$, $\operatorname{Re} \xi_{ij}$ və $\operatorname{Im} \xi_{ij}$ kəmiyyətlərinin aşağıdakı şərti

ödəyən paylanma sıxlıqları $p_{ij}(x)$ və $q_{ij}(x)$ mövcuddur: hər hansı $\beta > 1$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} \int [p_{ij}^\beta(x) + q_{ij}^\beta(x)] dx < \infty,$$

hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} M|\xi_{ij}|^{2+\delta} < \infty.$$

Onda ixtiyari x və y üçün

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = v(x, y)$$

münasibətlə ifadə olunan dairevi qanun doğrudur, burada

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \sigma^{-2} \pi^{-1}, & x^2 + y^2 < \sigma^2 \text{ olarsa,} \\ 0, & x^2 + y^2 \geq \sigma^2 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$$v_n(x, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(\operatorname{Re} \lambda_k - x) F(\operatorname{Im} \lambda_k - y),$$

λ_k , – H_n matrisinin məxsusi qiymətləridir, $y < 0$ olduqda $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda $F(y) = 0$.

Əd.: [1] Г и р к о в В. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 669–79.

DAR TOPOLOGIYA « узкая топология; narrow topology » – bax, Zeif topologiya, Proxorov teoremi.

DAR YİĞİLMƏ « узкая сходимость; narrow convergence » – bax, Zeif yığılma.

DAR YİĞİLMƏ TOPOLOGİYASI « узкой сходимости топология; topology of narrow convergence » – bax, Proxorov teoremi.

DARLİNG TEOREMİ « Дарлинга теорема; Darling theorem » – asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ asta dəyişən «qalıqlı» paylanma funksiyası olarsa, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$ cəmləri

üçün limit teoremidir. Bu halda klassik nəzəriyyənin limit teoremlərindən fərqli olaraq xətti normalama faydasızdır (P. Lévy, 1934; bax, [1]). $\bar{S}_n = G_n(S_n)$, $G_n(x) = \theta(x)/n$ olsun, burada

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/(1-F(x)), & x \geq 1, \\ [\theta(1)(1+x) + \theta(-1)(1-x)]/2, & |x| < 1, \\ -1/F(x), & x \leq -1. \end{cases}$$

D. t-nə görə, $0 < p < 1$, $x \rightarrow \infty$ olduqda, əgər $(1-F(x))/(1-F(x) + F(-x)) \rightarrow p$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\bar{S}_n < x\} - q \rightarrow \begin{cases} p \exp(-1/(px)), & x > 1, \\ -q \exp(1/(qx)), & x < 0. \end{cases}$$

münasibəti doğrudur, $q = 1 - p$.

Əd.: [1] Darling D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 73, № 1, p. 95–107; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

DARMUA – SKİTOVIÇ TEOREMİ « Дармуа – Ски-товича теорема; Darmois – Skitovich theorem » – bax, Xarakterizasion teoremlər.

DAŞIYICI(SI) ÖLÇÜSÜNÜN « носитель меры; sup-

port of a measure » – topoloji fəzada ölçü xarakteris-

tikalarından biridir. T topoloji fəzasının $\mu(F) = 1$ şərtini

ödəyən bütün qapalı $F \subset T$ altçoxluqlarının kəsişməsi S_μ -nün

özünün də ölçüsü 1 olarsa, yeni $\mu(S_\mu) = 1$ olarsa, T

fəzasında Borel ehtimal ölçüsü μ daşıyıcısına malikdir, deyilir.

Bu halda S_μ , – μ ölçüsünün daşıyıcısı (və ya sup-

portu) adlanır. $t \in T$ nöqtəsi, yalnız və yalnız, o halda

S_μ -yə daxildir ki, onu daxilinə alan ixtiyari açıq U altçoxluğu

üçün $\mu(U) > 0$ olsun. Separabel metrik fəzada (və ya daha

ümumi ixtiyari hesabı bazaya malik topoloji fəzada) hər bir Borel

ölçüsü daşıyıcıya malikdir. Hər bir τ – hamar ehtimal ölçülü

topoloji fəzada, xüsusilə də, Hausdorff fəzasında hər bir Radon

ehtimal ölçüsü $\tilde{\mu}$, d.-na malikdir. Digər tərəfdən, ehtimal kompakt

Hausdorff fəzalan vardır ki, bunlarda ixtiyari Borel ehtimal

ölçüsünün $\tilde{\mu}$, d. yoxdur.

DAŞIYICI(SI) PLANIN « носитель плана; sup-

port design » – bax, Regression eksperimentlərin planlaş-

dırılması.

DAŞIYICI SİGNAL « несущий сигнал; carrier sig-

nal » – bax, Moduləyici və demodulyasiya.

DAŞIYICI TEZLİK « несущая частота; carrier fre-

quency » – bax, Amplitud modulyasiya.

DAVAMOLUNMASI, ÖLÇÜLƏRİN « продолжение

меры; extension of measure » – ölçülərin bir çoxluqlar

sinfindən çoxluqların daha geniş digər sinfinə genişləndiril-

məsidir. $\mathcal{R}$ – çoxluqların ixtiyari semi – halqası, μ , – $\mathcal{R}$ -də

σ – sonlu ixtiyari ölçü olsun. Onda $\mathcal{R}$ semi – halqasının doğur-

duğu $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ σ – halqasında ehtimal σ – sonlu $\bar{\mu}$ ölçüsü vardır

ki, o yeganədir və bütün $Y \in \mathcal{R}$, Y çoxluqları üçün $\bar{\mu}(Y) =$

$= \mu(Y)$ şərti ödənilir (Karateodori teoremi). Bu

halda $\bar{\mu}$ ölçüsü ilkin μ ölçüsünün davamı adlanır. Ümumi

halda, əgər iki λ və ν ölçüləri verildikdə, ikinci ölçü birincinin davamı o halda adlanır ki, çoxluq funksiyası kimi baxılan ν funksiyası λ funksiyasının davamı olsun. Ölçünün davamı prosesinin xüsusi halı ölçünün tamamlanması prosesidir. Hər hansı $\mathcal{A}$ σ – halqasında verilmiş λ ölçüsü üçün $F \in \mathcal{A}$, $\lambda(F) = 0$ və $Z \subset F$ münasibətlərindən $Z \in \mathcal{A}$ (və deməli, $\lambda(Z) = 0$) münasibəti alınarsa, λ – tam ölçü adlanır. İxtiyari μ ölçüsü üçün ən kiçik tam $\bar{\mu}$ ölçüsü vardır ki, bu ölçü $(\bar{\mu})$ μ ölçüsünün davamıdır. Bu ən kiçik tam ölçünün $(\bar{\mu}$ -nün) təyin olunma oblası $(Y \cup Z') \setminus Z''$ tipli bütün mümkün çoxluqlardan ibarətdir; Y – ixtiyari μ – ölçülən çoxluq, Z' və Z'' – ölçüləri sıfır bərabər olan hər hansı μ – ölçülən çoxluqların ixtiyari altçoxluqlarıdır. $\bar{\mu}$ ölçüsünün özü $\bar{\mu}((Y \cup Z') \setminus Z'') = \mu(Y)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Belə tərif korrektdir və $\bar{\mu}$ ilkin μ ölçüsünün tamamlanması (adi) adlanır. Ölçünün tamamlanması çoxluqların bu ölçüyə görə birqiymətlik xassəsi ilə sıx əlaqədardır. μ – əsas bazis çoxluğu X –də hər hansı ölçü və $Z \subset X$ olsun. Əgər:

1) μ ölçüsünün heç olmasa bir λ davamı tapılsa ki, Z çoxluğu λ -nın təyin olunma oblastına daxil olsun;

2) μ ölçüsünün iki belə μ_1 və μ_2 davamları üçün $\mu_1(Z) = \mu_2(Z)$ bərabərliyi ödənilsin, onda Z çoxluğu μ ölçüsünə nəzərən birqiymətlik xassəsinə malikdir, deyilir.

Aşağıdakı hökm doğrudur: μ – ixtiyari σ – sonlu ölçü, $\bar{\mu}$, – μ ölçüsünün adi tamamlanması olarsa, μ ölçüsünə nəzərən birqiymətlik xassəsinə malik çoxluqlar ailəsi ilə $\bar{\mu}$ – ölçülən çoxluqlar ailəsi ilə üst-üstə düşür.

μ , – bazis çoxluğu X –də ixtiyari σ – sonlu ölçü və $(Z_j)_{1 \leq j \leq m}$, – X çoxluğunun altçoxluqlarının ixtiyari sonlu ailəsidirsə, μ ölçüsünün davamı $\bar{\mu}$ həmişə vardır və $\bar{\mu}$ ölçüsünün təyin olunma oblastı hər bir Z_j , $1 \leq j \leq m$ çoxluğunu özündə saxlayır.

Əsas bazis çoxluğu X –in altçoxluqlarının hesabi ailəsi üçün analoji hökm, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

Əgər ilkin μ ölçüsü çevirmələrin hər hansı qrupuna nəzərən kvaziinvariant (invariant) ölçü olarsa, onda onun həmin çevirmələr qrupuna nəzərən kvaziinvariant (invariant) davamolanmalarına baxmaq təbiidir. Invariant ölçülərin invariant davamlarının qurulması üçün müxtəlif metodlar işlənmişdir (bax, [3], burada Ö. d.-na aid bir çox məsələlərin sonsuz kardinal ədədlərin ölçülənliliyi haqqında sırf çoxluq məsələləri ilə əlaqədar olması göstərilmişdir).

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ъ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Х а р а з н ш в и л и А. В., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

DAYAQ NÖQTƏSİ, PLANIN « опорная точка плана; supporting point of a design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

DAYANIQLI ALQORİTM « устойчивый алгоритм; stable algorithm » – bax, *Təsədüfi çoxgirişlilik*.

DAYANIQLI ALTFƏZA « устойчивое подпространство; stable subspace » – bax, *Martinqal*.

DAYANIQLI PAYLANMA « устойчивое распределение; stable distribution » – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan $\{X_k\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları və $\{A_k, B_k > 0\}$ sabit kəmiyyətlər ardıcılıqlarından yaranılan

$$Z_n = B_n^{-1}(X_1 + \dots + X_n - A_n), \quad n=1, 2, \dots$$

normalanmış cəmlərinin mümkün limit paylanmalarının sinfi $\mathcal{S}$ -ya aid paylanmadır. Hal-hazırda ciddi dayanıqlı paylanma adlandırılan «D. p.» termini P. Levi tərəfindən daxil olunmuş və ilk dəfə onun tərəfindən öyrənilmişdir ([1], [2]).

D. p.-lar özü-özünə ayrılan paylanmaların xüsusi halıdır və bunlar dörd ədədi parametrlərlə təyin olunur. Əsas parametr – D. p.-nin göstəricisi adlanır və o, α ilə işarə olunur, $0 < \alpha \leq 2$. Normal paylanmaların $\alpha=2$ qiymətinə uyğun *Levi kanonik ifadəsində* $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 = 0$ və $H(x) \geq 0$ uyğun olur; $0 < \alpha < 2$ qiymətinə isə $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 = 0$ və $H(x) = c_1 |x|^{-\alpha}$, $x < 0$, $H(x) = c_2 x^{-\alpha}$, $x > 0$ uyğun olur, burada $c_k \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$. Bütün cırlaşmayan D. p.-lar mütləq kəsilməzdir. Bəzi istisnalarla ($\alpha=2$; $\alpha=1$, $c_1 = c_2$, $\gamma=0$ halı *Koşi paylanmasına* uyğundur; $\alpha=\frac{1}{2}$, $c_1 c_2 = 0$) nə paylanma funksiyaları G , nə də ki, paylanmanın sıxlıq funksiyaları g elementar funksiyalarla aşkar ifadə olunmur. G D. p.-sının xarakteristik funksiyası f üçün P. Levi, $\alpha=1$ halında isə P. Levidən asılı olmayaraq A. Ya. Xinqin də aşkar ifadələr tapmışlar ([3]):

$$\log f(t) = i t \gamma - \lambda |t|^\alpha (1 - i \beta \omega_A(t, \alpha, \beta)), \quad (A)$$

burada

$$\begin{aligned} \omega_A(t, \alpha, \beta) &= \\ &= \begin{cases} \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha \neq 1 \text{ olarsa,} \\ -\beta \frac{2}{\pi} \log |t| \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha = 1 \text{ olarsa,} \end{cases} \\ 0 < \alpha \leq 2, |\beta| \leq 1, \lambda \geq 0 \text{ və } \gamma \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Analitik nöqtəyi – nəzərdən daha rahat olan bir sıra hallarda D. p.-nin parametrizasiyası üçün digər sistem götürülür:

$$\log f(t) = i t \gamma - \lambda |t|^\alpha \omega_B(t, \alpha, \beta), \quad (B)$$

burada

$$\begin{aligned} \omega_B(t, \alpha, \beta) &= \\ &= \begin{cases} \exp \left(-i \frac{\pi}{2} \beta K(\alpha) \operatorname{sign} t \right), & \text{əgər } \alpha \neq 1 \text{ olarsa,} \\ \frac{\pi}{2} + i \beta \log |t| \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha = 1 \text{ olarsa,} \end{cases} \end{aligned}$$

$K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(\alpha - 1)$ və parametrlərin dəyişmə oblastları isə (A)-da olduğu kimidir. (B) formasının parametrləri (A)-nın parametrləri ilə: $\alpha_A = \alpha_B$; əgər $\alpha=1$ olarsa, $\beta_A = \beta_B$.

$$\gamma_A = \frac{2}{\pi} \gamma_B, \quad \lambda_A = \frac{\pi}{2} \lambda_B; \quad \alpha \neq 1 \quad \text{olarsa,}$$

$$\beta_A = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \beta_B K(\alpha) \right),$$

$$\gamma_A = \gamma_B / \cos \left(\frac{\pi}{2} \beta_B K(\alpha) \right),$$

$$\lambda_A = \lambda_B / \cos \left(\frac{\pi}{2} \beta_B K(\alpha) \right)$$

münasibətlərlə əlaqədirlər.

$G(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ funksiyasının x arqumentinin xətti çevirməsi əsasında parametrizasiya üçün sistemin seçilməsindən asılı olmayaraq D. p.-nı standart şəkə gətirmək, yeni $\gamma=0$ və $\lambda=1$ almaq mümkündür. Standart D. p.-lann əsas analitik xassələri aşağıdakılardır: ixtiyari x, α, β qiymətlərində $g(x, \alpha, \beta) = g(-x, \alpha, -\beta)$; əgər $x \geq 0, \alpha < 1$ olarsa, onda $g(-x, \alpha, 1) = g(x, \alpha, -1)$; digər hallarda isə $g(x, \alpha, \beta) > 0$; hər bir paylanma sıxlığı $g(x, \alpha, \beta)$ birzəvəlidir; $g(x, \alpha, \beta)$ funksiyaları $\alpha \geq 1$ olduqda, $g(x^{-1/\alpha}, \alpha, \beta)$ funksiyaları $\alpha < 1$ olduqda tam funksiyalar olub, $x > 0$ yarımxondan analitik olaraq davam olunur.

$\mathfrak{S}$ sinfi ciddi dayanıqlı paylanmaların altsinfi $\mathfrak{M}$ -i özündə saxlayır, bu sinif yuxarıda verilən tərifdə əlavə $A_n = 0$ şərti ilə seçilir. G – D. p., yalnız və yalnız, $\alpha \neq 1, \gamma = 0$ və ya $\alpha = 1, \beta = 0$ olduqda (ixtiyari parametrizasiya sistemi üçün) $C \in \mathfrak{M}$ olur. $\mathfrak{M}$ sinfinin D. p.-ları üçparametrlilik ailə əmələ gətirir. Bunlar üçün analitik təsbit etmiş parametrizasiya sistemi vardır. Doğrudan da,

$$\log f(t) = -\lambda |t|^\alpha \exp \left(-i \frac{\pi}{2} \theta \alpha \operatorname{sign} t \right) \quad (C)$$

burada $0 < \alpha \leq 2, |\theta| \leq \min \left(1, \frac{2}{\alpha} - 1 \right), \lambda > 0$. Bu sistemin

$(\alpha, \theta, \lambda)$ parametrləri (B) sisteminin parametrləri ilə $\alpha_C = \alpha_B$ bərabərlikləri ilə əlaqədirlər; əgər $\alpha \neq 1$ olarsa, onda $\theta = \beta_B K(\alpha) / \alpha, \lambda_C = \lambda_B$; əgər $\alpha = 1$ olarsa, onda

$$\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\pi} \gamma_B \right) \quad \text{və} \quad \lambda_C = \lambda_B \left(\frac{\pi^2}{4} + \gamma_B^2 \right)^{1/2}.$$

Ciddi D. p.-lar ikilik münasibətlə əlaqədirlər. $(x, \alpha, \theta, \lambda) = (x \lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta, 1)$ standartlaşdırılması nəzərə alındıqda bu münasibət aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər $1 \leq \alpha \leq 2$ olarsa, onda ixtiyari məqbul θ -lar üçün

$$x g(x, \alpha, \theta, 1) = x g(x^{-\alpha}, 1/\alpha, \theta^*, 1),$$

burada $1 + \theta^* = \alpha(1 + \theta)$.

Ciddi D. p.-lann Mellin çevirmələrinin və کنار D. p.-lann iki-tərəfli Laplas çevirmələrinin ($\beta = 1$ olanlar üçün) aşkar ifadələri vardır (bax, *Dayanıqlı paylanma; integral çevirmələri*).

150 DAYANIQLI

Birölçülü D. p.-lann analitik xassələri olduqca ətraflı öyrənilmişdir. D. p.-lann analitik xassələrini öyrənmək üçün rahat asimptotik ifadələri, differensial tənliklərlə təsviri, integral ifadələri və verilmiş D. p.-larla təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası üçün sadə alqoritmlərin qurulması üsulları [4]-də tapmaq olar. $\mathfrak{S}$ və $\mathfrak{M}$ ailələri uyğun funksional tənliklərin həllərinin çoxluqlandır: $F \in \mathfrak{S}$, yalnız və yalnız, o halda olur ki, ixtiyari müsbət b_1 və b_2 ədədlər cütü üçün bütün x qiymətlərində

$$F(b_1 x) * F(b_2 x) = F(b x + a)$$

münasibətini ödəyən $b > 0$ və a ədədlər cütü tapılsın. Əgər $b > 0, a = 0$ cütünü seçmək olarsa, onda $F \in \mathfrak{M}$ və bu halda $b_1^\alpha + b_2^\alpha = b^\alpha$, burada $0 < \alpha \leq 2$ – hər hansı ədəd, D. p.-nın

göstəricisidir. $\mathbb{R}^1$ -də D. p. çoxölçülü paylanmalar və qruplarda paylanmalar (bax, *Dayanıqlı paylanma qrupları*), Banax fəzalarında paylanmalar (bax, *Dayanıqlı paylanma Banax fəzasında*) üçün də təyin olunmuşdur və ümumiləşdirilmişdir, lakin bunların xassələri birölçülü D. p.-lann xassələri ilə müqayisədə az öyrənilmişdir. Ən çox normal paylanma tətbiq olunur. Lakin hal-hazırda (20-ci əsrin 90-cı illəri) astronomiya, fizika, iqtisadiyyat və biologiyanın məsələlərinin çoxsaylı problemləri məlumdur ki, bunlarda D. p. təbii olaraq yaranır (bax, [4]).

$F(x)$, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. Əgər ixtiyari $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, b_1, b_2$ heqiqi ədədləri üçün ələ $a > 0$ və b ədədləri varsa ki,

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(a x + b)$$

bərabərliyi ödənilsə, onda $F(x)$ dayanıqlı paylanma funksiyası adlanır, $*$ – kompozisiya əməlini ifadə edir. Əgər $f(t)$ – D. p.-nın xarakteristik funksiyadırsa, onda ixtiyari $a_1 > 0$ və $a_2 > 0$ üçün ələ b və $a > 0$ vardır ki,

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-itb}.$$

D. p.-lann mühüm rolu aşağıdakı nəticə ilə ifadə olunur: $\xi_1, \dots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n, \quad (*)$$

burada $\beta_n > 0, \alpha_n$ – uyğun olaraq müəyyən normalayıcı və mərkəzləndirici sabitlərdir.

Əgər $F_n(x)$ η_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyadırsa, $\{F_n(x)\}$ ardıcılığı üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanmalar yalnız D. p.-lar ola bilər. Əksinə, ixtiyari D. p. olan $F(x)$ üçün ələ (*) tipli təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $F_n(x), F(x)$ -ə yığılır.

Deməli, D. p.-lar sonsuz bölünən paylanmalardır. Bax, *Dayanıqlı səmi-qrup*.

Əd.: [1] L e v y P., Calcul des probabilités, 1925; [2] L e v y P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [3] Х и н ч и н А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М – Л., 1938; [4] З о л о т а р е в В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

DAYANIQLI PAYLANMA Banax fəzasında « **устойчивое распределение** в банаховом пространстве; **stable distribution** in a Banach space » – Banax fəzasında X təsadüfi elementinin ele paylanmasıdır ki, bu paylanma aşağıdakı şərti ödəyir: ixtiyari həqiqi $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ üçün ele $b > 0$ və $a \in B$ vardır ki,

$$\alpha(b_1 X) * \alpha(b_2 X) = \alpha(bX + a), \quad (1)$$

burada $\alpha(X)$ – təsadüfi X elementinin paylanması, $*$ – paylanmaların konvolyusionudur. Əgər (1) ödənilsə, onda $b^\alpha = b_1^\alpha + b_2^\alpha$ bərabərliyi doğrudur, burada $0 < \alpha < 2$, α , – D. p.-nin göstəricisidir. $\alpha = 2$ qiymətinə normal paylanma uyğundur. $0 < \alpha < 2$ göstəricisinə malik μ D. p.-nin karakteristik funksionalı

$$\hat{\mu}(f) = \exp \{ i f(x_0) - \int_{S_1} |f(x)|^\alpha \Gamma(dx) - i w(f, \alpha) \} \quad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f \in B^*$, $S_1 = \{x \in B: \|x\| = 1\}$, $\Gamma - S_1$ -də hər hansı sonlu ölçü,

$$w(f, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2} \int_{S_1} |f(x)|^\alpha \operatorname{sign} f(x) \Gamma(dx), & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \int_{S_1} f(x) \ln |f(x)| \Gamma(dx), & \alpha = 1. \end{cases}$$

İxtiyari Banax fəzasında $\alpha \geq 1$ olduqda (2) düsturu hər bir sonlu Γ ölçüsü üçün D. p. təyin etmir; D. p.-ları təyin edən ölçülərin tam təsviri hələ ki, məlum deyildir.

D. p. üçün sıfır – vahid qanunu ödənilir: əgər $\mu - B$ -də D. p. olarsa, onda B -nin ixtiyari xətti alt çoxluğu sıfıra bərabər və ya vahidə bərabər μ – ölçüyə malikdir. Banax fəzasında D. p.-lar birözlülü halda olduğu kimi, konstantlarla normalanmış olduğu halda, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanması üçün limit paylanmalarıdır. Əgər normalanma üçün xətti operatorlardan istifadə olunarsa, onda limit paylanmaları sinfi operator dayanıqlı paylanmalara qədər genişlənir.

Əd.: [1] Linde W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983; [2] Weron A., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1080, p. 306–64.

DAYANIQLI PAYLANMA; integral çevirmələri « **устойчивое распределение; интегральные преобразования; stable distribution; integral transforms** » – Furiye, Mellin çevirmələri və bunların bu paylanmanın sıxlığı g -yə uyğun modifikasiyalardır. Bütün bu çevirmələr elementar funksiyalarla ifadə olunur, D. p.-ların sıxlıqlarından fərqli olaraq, bunlar üçün belə ifadələr yalnız bir neçə halda məlumdur.

$\beta = 1$ olduqda ikiterəfli Laplas çevirməsi (kenar D. p.-lar) parametrizasiya sistemi (B)-də aşağıdakı kimi ifadə olunur ($\operatorname{Re} s \geq 0$):

$$\int e^{-sx} g dx = \begin{cases} \exp(-s\gamma - \lambda s^\alpha \operatorname{sign}(1 - \alpha)), & \alpha \neq 1; \\ \exp(-s\gamma + \lambda s \log s), & \alpha = 1; \end{cases}$$

əgər $\alpha < 1$ olarsa, onda bu çevirmə biterəfli Laplas çevirməsinə çevrilir, belə ki, bu halda $x < \gamma$ olduqda $g(x, \alpha, 1, \gamma, \lambda) = 0$.

Ciddi dayanıqlı paylanmanın sıxlığı $g(x, \alpha, \theta, \lambda)$ -nin Mellin çevirməsi ($-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ üçün)

$$\int_0^\infty x^s g dx = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(1-\theta)}{\sin \pi s} \frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s)} \lambda^{s/\alpha}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Ciddi dayanıqlı paylanmanın karakteristik çevirməsi

$$w_k(t) = \lambda^{it/\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(k-it\theta)}{\cos \frac{\pi}{2}(k-it)} \frac{\Gamma(1-it/\alpha)}{\Gamma(1-it)}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $k = 0, 1$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfi $-\alpha < \operatorname{Im} t < 1$ zolağına analitik davam oluna bilər.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA qrupda « **устойчивое распределение** на группе; **stable distribution on a group** » – lokal kompakt G qrupunda ölçülərin kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olan sonsuz bölünən μ paylanmasıdır. $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupunun doğuran funksionalı aşağıdakı xassəni ödəyir: ixtiyari $t > 0$ üçün

$$\tau_t(A) = tA + X_t, \quad (*)$$

burada X_t , – G qrupunun Li cəbri $\mathfrak{G}$ -nin hər hansı elementi, $\{\tau_t, t > 0\}$, – G qrupunun avtomorfizmlərinin kəsilməz birparametrik qrupudur.

Daha dəqiq, $T = \{\tau_t, t > 0\}$ – avtomorfizmlərin kəsilməz birparametrik qrupu olsun, yəni τ_t , – G qrupunun bütün kəsilməz avtomorfizmlərinin $\operatorname{Aut}(G)$ qrupunun elementidir; ixtiyari $t, s > 0$ üçün $\tau_t \tau_s = \tau_{t+s}$ və $t \rightarrow 0$ olduqda $\tau_t(g) \rightarrow e$ münasibətinin (e , – G qrupunun vahididir) ixtiyari $g \in G$ üçün ödənilməsi fərz olunur. Əgər τ_t , – G -nin özünə ölçülən inikasıdırsa, onda ixtiyari ehtimal ölçüsü μ üçün $\tau \mu$ ölçüsü aşağıdakı qayda ilə təyin olunur: ixtiyari $E \subset G$ Borel altqrupu üçün $\tau \mu(E) = \mu(\tau^{-1}(E))$. İxtiyari həqiqi ölçülən f funksiyasının və hər hansı funksional fəzada həqiqi A funksionalı üçün: $\tau(f)(x) = f(\tau(x))$ və $\tau(A)(f) = A(\tau(f))$ qaydaları ilə $\tau(f)$ funksiyası və $\tau(A)$ funksionalını təyin etmək olar. Əgər G qrupunda sonsuz bölünən μ paylanması doğuran funksionalı A olan kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olunarsa və G qrupunun avtomorfizmlərinin ele kəsilməz birparametrik T qrupu və $X_t \in \mathfrak{G}$, $t > 0$ elementləri olarsa ki, (*) münasibəti ödənilsin, onda μ_t , – qrupda dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər bu münasibətdə bütün $t > 0$ üçün $X_t = 0$ olarsa, onda μ paylanması G qrupunda ciddi

dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər $\tau \in \text{Aut}(G)$, $c \in (0, 1)$ ədədi və G qrupunun Li cəbrinin X elementi olarsa ki, $\tau(A) = cA + X$ bərabərliyi ödənilsə, onda doğuran funksional A olan kəsilməz konvolýusion $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olan, G qrupunda sonsuz bölünən ehtimal paylanması μ , $-G$ qrupunda semi – dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər $X=0$ olarsa, onda μ ciddi semi – dayanıqlı paylanma adlanır. Avtomorfizmlərin konkret kəsilməz birparametrik T qrupları və (τ, c) vətəndişi halda, paylanma T – dayanıqlı və ya (τ, c) – semidayanıqlı adlanır.

Ən güclü nəticələr ciddi dayanıqlı və semidayanıqlı paylanmalar üçün (bundan sonra yalnız bu hala baxılır) alınmışdır. Ciddi dayanıqlılıq və semidayanıqlılıq halında bunların təriflərini bilavasitə ehtimal ölçülərinin öz terminləri ilə ifadə etmək olar. G -də bütün ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -dən olan ehtimal ölçüsü μ , yalnız və yalnız, o halda T – dayanıqlıdır ki, $\{\mu_t = \tau_t(\mu), t \geq 0\}$ ölçülər ailəsi G -də ölçülərin kəsilməz konvolýusion semi – qrupunu əmələ gətirsin, yəni 1) $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$, μ_t -nin tərifinə əsasən isə 2) $\tau_t(\mu_s) = \mu_{ts}$, $t, s > 0$. $\{\mu_t, t \geq 0\}$ kəsilməz olduğundan $\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t = \mu_0$ limiti mövcud olmalıdır və 1) – 2) xassələri bütün $t, s \geq 0$ üçün ödənilməlidir. Ölçülərin kəsilməz konvolýusion semi – qrupu μ_t , $t \geq 0$ üçün 2) şərti ödənilərsə, o, T – dayanıqlı semi – qrup adlanır. $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupu, yalnız və yalnız, o halda semidayanıqlıdır ki, $\tau(\mu_t) = \mu_{tc}$, $t \geq 0$ şərtini ödəyən $\tau \in \text{Aut}(G)$ və $c \in (0, 1)$ münasibətləri ilə təyin olunan τ və c mövcud olsun (bax, [1], [2]).

Evklid fəzasının hərəkət qrupu $M(d)$ və Heyzenberq qrupu H_n üçün qrupun avtomorfizmlərinin bütün kəsilməz birparametrik qrupları aşkar şəkildə təsvir olunmuşdur (bax, [3], [4]). Özünün əlaqə altqrupu üzrə qrupun əlaqələrinin heç bir sinfində toplanmayan ölçülər – tam ölçülər adlandırılan – yaxşı xassələrə malikdir (bax, [5]).

Ölçülərin dayanıqlı və semidayanıqlı kəsilməz konvolýusion semi – qruplar nəzəriyyəsində iki qrup mühüm rol oynayır.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{\mu_t\}) = \{\tau \in \text{Aut}(G): \tau(\mu_t) = \mu_t, t \geq 0\}$$

qrupuna μ_t ölçülərinin kəsilməz konvolýusion semi – qrupunun invariantliq qrupu (ciddi mənada) deyilir.

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\{\mu_t\}) =$$

$$= \{(\tau, c): \tau \in \text{Aut}(G), c > 0, \tau(\mu_t) = \mu_{tc}, t \geq 0\}$$

qrupuna μ_t ölçülərinin kəsilməz konvolýusion semi – qrupunun ayrılmalıq qrupu (rus. группа разложимости) (ciddi mənada) deyilir. Belə hesab etmək olar ki, $\mathcal{F}$ – elementləri $(\tau, 1)$ şəklində olan $\mathcal{Z}$ ayrılmalıq qrupunun altqrupudur.

$\varphi(\tau, c) = c$ qaydası üzrə $\varphi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ inikası təyin olunur. $\mathcal{F}$ və $\mathcal{Z}$ qrupları aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) bunlar $\text{Aut}(G)$ -də və $\text{Aut}(G) \oplus \mathbb{R}_+^*$ -də uyğun olaraq

qapalı altqruplardır; 2) μ_t ölçüləri, yalnız və yalnız, o halda tam ölçülərdir ki, $\mathcal{F}$ qrupu $\text{Aut}(G)$ -də kompakt olsun; 3) $\varphi: \mathcal{F}$ nüvəsi ilə kəsilməz homomorfizmdir; 4) μ_t hər hansı T qrupuna nəzərən, yalnız və yalnız, o halda dayanıqlıdır ki, $\varphi(\rightarrow) = \mathbb{R}_+^*$ olsun. 4) xassəsi ölçülər semi – qrupunun dayanıqlılığının daxili təsvirini müəyyən edir. Doğrudan da, $\{\mu_t, t \geq 0\}$ hər hansı (τ, c) cütünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda semidayanıqlıdır ki, hər hansı $c > 0$ üçün $\varphi(\mathcal{Z}) \supset \{c^n, n \in \mathbb{Z}\}$ münasibəti ödənilmiş olsun (ölçülərin semi – qrupu $\varphi(\mathcal{Z}) = \{c^n, n \in \mathbb{Z}\}$ olduğu halda dayanıqlı deyildir) (bax, [2]).

G – lokal kompakt qrup, $T = \{\tau_t, t \geq 0\}$, $-G$ -də kəsilməz birparametrik qrup, $\{\mu_t, t \geq 0\}$, $-G$ -də ölçülərin kəsilməz konvolýusion ele semi – qrupu olsun ki, $\mu_0 = \omega_K$ şərti ödənilsə, ω_K , $-G$ qrupunun kompakt K altqrupunda Haar ölçüsüdür. $\{\mu_t, t \geq 0\}$, $-T$ – dayanıqlı, K isə T – invariant olsun. Əgər

$$C_K(T) = \{x \in G: \tau_t(x)K \rightarrow K, t \rightarrow 0\},$$

$$C(T) = \{x \in G: \tau_t(x) \rightarrow e, t \rightarrow 0\}$$

işarələmələri qəbul edilərsə, onda: a) $C_K(T)$ G -də qapalı altqrupdur və $C(T)$ ilə K -nin yarımdüz hasilə izomorfdur; b) $C(T)$ G -də qapalı altqrupdur və birləqəli nilpotent Li qrupuna izomorfdur; c) ixtiyari $t \geq 0$ üçün $\mu_t(G \setminus C_K(T)) = 0$; ç) $C(T)$ qrupunda ele T – dayanıqlı, ölçülərin kəsilməz konvolýusion semi – qrupu $\{\nu_t, t \geq 0\}$ vardır ki, ixtiyari $t \geq 0$ üçün $\mu_t = \nu_t \otimes \omega_K$ (bax, [6]).

Bu nəticədən aydındır ki, T – dayanıqlı kəsilməz konvolýusion ölçülər semi – qrupunun öyrənilməsində birləqəli nilpotent Li qrupları sinfi ilə kifayətlənmək olar. Analoji müddəə semidayanıqlı kəsilməz konvolýusion ölçülər semi – qrupu üçün də doğrudur (bax, [7]).

Əd.: [1] Hazod W., «Lect. Notes in Math.», 1982, v. 928, p. 183–208; [2] Hazod W., «Lect. Notes in Math.», 1986, v. 1210, p. 304–32; [3] Baldi P., «Lect. Notes in Math.», 1979, v. 706, p. 1–9; [4] Drisch T., Gallardo L., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1064, p. 56–80; [5] Hazod W., Nobel S., «Lect. Notes in Math.», 1988, v. 1379, p. 90–106; [6] Hazod W., Siebert E., «Semi-group Forum», 1986, v. 33, p. 111–43; [7] Hazod W., Siebert E., «J. Theor. Probab.», 1988, v. 1, p. 211–26.

DAYANIQLI PAYLANMA; sıralarla ifadə «устойчивое распределение; представление рядами; serie representation of a stable distribution» – dayanıqlı paylanma sıxlığının yığılan və asimptotik sıralarla aşkar analitik ifadələridir.

$$\psi(z) = \begin{cases} g(z, \alpha, \beta), & \text{əgər } 1 \leq \alpha \leq 2, \\ z^{-1/\alpha} g(z^{-1/\alpha}, \alpha, \beta), & \text{əgər } 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

olsun, g – standartlandırılmış D. p.-nin sıxlığıdır. $\psi(z)$ funksiyası bütün kompleks müstəviyə analitik davam oluna bilinir və $\alpha=1$, $\beta=0$ olduğu halda $\psi(z)$ funksiyası $z = \pm 1$ nöqtələrində iki sadə polyuslarla meromorf, digər hallarda tam funksiyadır. Ciddi dayanıqlı paylanmalar üçün Makloren

ayrılışında özünün parametrizasiya formaları (α, θ) olduğu halda

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1};$$

a_k əmsalları $0 < \alpha \leq 1$ halında

$$a_k = \frac{1}{\pi} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(1 + \alpha k)}{\Gamma(1 + k)} \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha (1 + \theta) n\right)$$

düsturu ilə təyin olunur. $1 \leq \alpha \leq 2$ halı üçün a əmsallarının analogi ifadələrini almaq olur.

$g(x, \alpha, \beta)$ sıxlıqları üçün asimptotik ayrılışlar o hallarda məlumdur ki, x D. p.-nin daşıyıcısının hər hansı sərhədinə yaxınlaşır (bu sərhəd $-\infty, 0, \infty$ ola bilər), etrafı bax, [1]-ə.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA; təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası «устойчивое распределение; генерирование случайных величин; stable distribution; simulation of random variables» – *dayanıqlı paylanmalar nəzəriyyəsinin bölməsidir, dayanıqlı paylanmaları ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalannın alınması üçün alqoritmlərə həsr olunmuşdur.*

Məs., parametrləri $0 < \alpha < 1, \beta = 1, \gamma = 0$ və $\lambda = 1$ olan D. p.-ya malik $Y(\alpha)$ təsadüfi kəmiyyəti asılı olmayan, $(0, 1)$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış ω_1, ω_2 təsadüfi kəmiyyətləri ilə yaranan

$$\left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi\omega_1}{\sin\pi\alpha\omega_1} \left(\frac{\sin\pi\alpha\omega_1}{\sin\pi\omega_1} \right)^{1/(1-\alpha)} / \left| \log(1-\omega_2) \right| \right]^{(1-\alpha)/\alpha}$$

təsadüfi kəmiyyəti ilə paylanma üzrə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1976, v. 71, p. 340–44; [2] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA FUNKSIYASI «устойчивая функция распределения; stable function of distribution» – bax, *Dayanıqlı paylanma*.

DAYANIQLI PAYLANMA GÖSTƏRİCİSİ «устойчивого распределения показатель; index of stable distribution» – *dayanıqlı paylanmanın əsas parametrlərindən biridir (bax, Dayanıqlı paylanma).*

Dayanıqlı paylanmanın xarakteristik funksiyası $\varphi(t)$ -nin lqa-rıfmi –

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\} \quad (1)$$

funksiyasının ifadəsində α parametri *dayanıqlı paylanma göstəricisi* (*dayanıqlılıq parametri* və ya *xarakteristik göstərici* kimi də adlandırılır) adlanır, burada α, β, γ, c sabitlərdir, $-1 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2, c \geq 0$ və

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} i\gamma \frac{\pi}{2} \alpha, & \alpha \neq 1 \text{ olduqda,} \\ \frac{2}{\pi} \ln|t|, & \alpha = 1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Dayanıqlılıq göstəricisi $\alpha > 0$ olan bütün dayanıqlı paylanmalar kəsilməzdir və belə paylanmaların sıxlıq funksiyalarının hər bir nöqtədə bütün tərtiblərdən törəmələri vardır.

(1)-dən aydındır ki, dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \exp \{ i\gamma t - c|t|^\alpha \times \\ \times (1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)) \} dt$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Dayanıqlı paylanmaların sıxlıq funksiyaları aşağıdakı hallar istisna olunmaqla elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə olunmur.

- 1) xarakteristik göstəricisi $\alpha = 2$ olan normal paylanma dayanıqlıdır;
- 2) xarakteristik göstəricisi $\alpha = 1$ olan Koşi paylanması dayanıqlıdır;
- 3) paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-1/2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

düsturu ilə ifadə olunan paylanma xarakteristik göstəricisi $\alpha = 1/2$ olan dayanıqlı paylanmadır;

4) cırlaşmış paylanma xarakteristik göstəricisi $\alpha = 0$ olan dayanıqlı paylanmadır.

Dayanıqlılıq göstəricisi $\alpha > 0$ olan dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası $f(x; \alpha, \beta, \gamma, c)$ üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, c) = \begin{cases} c^{-1/\alpha} f((x-y)c^{-1/\alpha}; \alpha, \beta, 0, 1), & \alpha \neq 1 \\ = c^{-1} \left(f\left(\frac{x-y}{c}\right) - \beta \frac{2}{\pi} \ln c; 1, \beta, 0, 1 \right), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Ümumiliyi pozmadan $\gamma = 0, c = 1$ qəbul etmək olar. Əgər

$$f(x; \alpha, \beta) = f(x; \alpha, \beta, 0, 1)$$

olarsa, onda

$$f(x; \alpha, \beta) = f(-x; \alpha, -\beta).$$

Xarakteristik göstəricisi α ($0 < \alpha < 2$) olan hər bir dayanıqlı paylanmanın bütün p tərtib ($0 < p < \alpha$) mütəq momentləri vardır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985.

DAYANIQLI PROSES «устойчивый процесс; stable process» – zamana görə biricins, asılı olmayan artımları, hər bir intervalda artımının paylanması *dayanıqlı paylanma* olan *təsadüfi prosesdir*. D. p.-lər ailəsi dayanıqlı paylanmalar ailəsi kimi dörd parametrlidir: hər bir D. p. $\zeta(t), \zeta(0) = 0$ üçün

ele həqiqi $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $C > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ və $\beta \in [-1, 1]$ ededləri vardır ki,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \exp \{ i \lambda \zeta(t) \} &= \\ &= \exp \left\{ t \left[i \gamma \lambda - C |\lambda|^\alpha \left[1 - i \beta \frac{\lambda}{|\lambda|} \omega(\lambda, \alpha) \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

düsturu doğrudur, burada

$$\begin{aligned} \omega(\lambda, \alpha) &= t g \frac{\pi \alpha}{2}, \\ \alpha \neq 1, \quad \omega(\lambda, 1) &= \frac{2}{\pi} \ln |\lambda|. \end{aligned}$$

γ parametri $\zeta(t)$ prosesinin *apansına* uyğundur. α parametri $\mathbf{M} |\zeta(t)|^s < \infty$, $s \in (0, \alpha)$, $\mathbf{M} |\zeta(t)|^\alpha = \infty$, $t > 0$ momentlərinin varlığına uyğundur; $\beta = \gamma = 0$ olduqda $\zeta(t)$ -nin paylanması *simmetrik paylanmadır* və $\mathbf{M} \exp \{ i \lambda \zeta(t) \} = \exp \{ -t C |\lambda|^\alpha \}$. $|\beta| = 1$ olduqda isə prosesin trayektoriyalarının sıçrayışlarının işarəsi β -nin işarəsi ilə eyni olur. $\gamma = 0$ və $\alpha \neq 1$ olduğu halda $\zeta(kt)$ prosesinin paylanması $k^{1/\alpha} \zeta(t)$ prosesinin paylanması ilə eynidir. $\alpha = 0$ və $\alpha = 2$ limit halları determinik $\zeta(t) = \gamma t$ prosesi və Viner prosesinə uyğundur.

Bax, *Dayanıqlı paylanma*.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964.

DAYANIQLI SEMİ – QRUP « устойчивая полугруппа; stable semigroup » – uyğun paylanmaları

$$Q_t(x) = G(\lambda_t(x - \beta_t))$$

şəklində ifadə olunan $\{Q_t\}$ semi – qruplarına deyilir, burada $\lambda_t > 0$, β_t t -dən kəsilməz asılı olan sabitlər, G qeyd olunmuş paylanmadır. Burada G aşağıda verilən mənada *dayanıqlı paylanmadır* (bax, fə. VI, §1): $X, X_1, X_2, \dots$ qarşılıqlı asılı olmayan, eyni G paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir və $S_n = X_1 + \dots + X_n$. G paylanması sıfırda toplanmayandırsa və hər bir n üçün $c_n > 0$ və γ sabitləri varsa ki,

$$S_n \stackrel{d}{=} c_n X + \gamma_n \quad (*)$$

münasibəti ödənilir, onda G paylanmasına *geniş mənada dayanıqlı paylanma* deyilir.

Əgər G paylanması üçün $(*)$ münasibəti $\gamma_n = 0$ şərtlə ödənilirsə, G paylanması *dar mənada dayanıqlı paylanma* və ya *ciddi mənada dayanıqlı paylanma* adlanır. λ_t və β_t -nin kəsilməzliyi fərz olduğundan semi – qrup (əgər o mövcuddursa) kəsilməzdir. $t \rightarrow 0$ olduqda Q_t paylanması sıfırda toplanmış paylanmaya yaxınlaşır və deməli, $\lambda_t \rightarrow \infty$, $\beta_t \rightarrow 0$ olur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

154 DAYANIQLI

DAYANIQLI STATİSTİK QIYMƏT « устойчивая оценка; robust estimator » – bax, *Robust statistik qiymet*.

DAYANIQLI TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « устойчивое случайное множество; stable random set » – aşağıdakı xassəyə malik $A \subset \mathbb{R}^n$ təsadüfi çoxluğudur: ixtiyari natural n ədədi üçün n müsbət λ_n ədədi və asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi $A_1, \dots, A_n$ çoxluqları vardır ki, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ çoxluğunun paylanması $\lambda_n A$ çoxluğunun paylanması ilə üst-üstə düşür. D. t. ç. anlayışı *sonsuz bölünən təsadüfi çoxluq* anlayışının xüsusi halıdır.

DAYANIQLI TİPİ, PAYLANMANIN « устойчивый тип распределения; stable distribution type » – bax, *Paylanmalar tipi*.

DAYANIQLI VƏZİYYƏT « устойчивое состояние; stable state », ləngidici vəziyyət – birinci Markov prosesinin *ele vəziyyəti*dir ki, x vəziyyətindən çıxış ehtimalının sıxlıq funksiyası sonludur:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} p(t, x, x) &= 1, \\ q_x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p(t, x, x)}{t} < \infty, \end{aligned}$$

burada $p(t, x, x)$, – x vəziyyətindən t müddəti ərzində x -ə keçid ehtimalıdır. Əgər ζ separabel prosesdirsə və D. v. olan x -dən başlayırsa, onda $\tau = \inf \{ t : t \geq 0, \zeta_t \neq x \}$, – x -dən ilk çıxış zamanının paylanması $\mathbf{P} \{ \tau > t \} = \exp(-q_x t)$, $t \geq 0$ olur. $q_x = 0$ olduqda D. v. – uducu vəziyyətdir ($\tau = \infty$ sanki yəqin olur). Əgər vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{E}$ sonlu olarsa və proses stoxastik kəsilməz olarsa, onda bütün vəziyyətlər dayanıqlıdır; $\mathcal{E}$ hesabi çoxluq olduqda bunun olması zəruri deyildir (bax, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabı*).

DAYANIQLILIQ (ğı), ehtimal paylanmalarının kompozisiyaya ayrılışlarının « *устойчивость разложений вероятностных распределений в композицию; stability of decompositions of probability distributions* » – paylanmaların xarakterizasiyasının *dayanıqlılığının* xüsusi halıdır. Ehtimal paylanmalarının ayrılışlarının D. müntəzəm sonsuz kiçiklik şərtindən istifadə olunmayan limit teoremlərinin əsasını təşkil edir. $\mathfrak{F}$, – $\mathbb{R}^1$ -də təyin olunan paylanma funksiyaları çoxluğu və

$$\mathfrak{M} = \{ w = (F_1, F_2, \dots) : F_j \in \mathfrak{F}, \mathcal{J} w = F_1 * F_2 * \dots \in \mathfrak{F} \}$$

olsun. Qeyd olunmuş $G \in \mathfrak{F}$ üçün $\mathfrak{M}$ -nin altçoxluğu $\mathfrak{M}(G) = \{ w : \mathcal{J} w = G \}$ və $\mathfrak{F}$ -in altçoxluğu $\mathfrak{F}(\varepsilon, G) = \{ F : L(F, G) \leq \varepsilon \}$ seçilir, burada L – *Levi metriki*sidir.

$$\alpha(\varepsilon, G) = \sup \{ \Delta(F, G) : F \in \mathfrak{F}(\varepsilon, G) \},$$

burada

$$\Delta(F, G) = \sup \{ \mu(w, \mathfrak{M}(G)) : w \in \mathfrak{M}(F) \},$$

$$\mu(w, w') = \sup \{L(F_j, F'_j): j \geq 1\},$$

$$\mu(w, \mathfrak{Y}(G)) = \inf \{ \mu(w, w'): w' \in \mathfrak{Y}(G) \}$$

olsun. Aynılışların dayanıqlılığı onu ifadə edir ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda

$$\alpha(\varepsilon, G) \rightarrow 0 \quad (*)$$

münasibəti doğrudur. Heç bir əlavə məhdudiyyətlər qoyulmayan bu münasibətdə L metrikasını $\mathfrak{F}$ -da zəif topologiya yaradan ixtiyari metrika ilə əvəz etmək olar. (*) xassəsinə əsasən, sonsuz kiçiklik şərtini (bax, [2] və Lindeberg – Feller teoremi meq.-ne) əvəz edən – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının zəif yığılması üçün zəruri şərt yaranır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin vurulması sxeminə, təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumu sxeminə və digər sxemlərdə analogi fenomenlər məlumdur. Yu. V. Linnik, [1]-də $F = F_1 * F_2$, $F_i \in \mathfrak{F}$ aynılışının iki komponentindən w -nin seçilməsi ilə bağlı oxşar fenomenin olduğunu qeyd etmişdir.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., Разложение вероятностных законов, Л., 1960; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирование независимых случайных величин, М., 1986.

DAYANIQLILIQ ehtimala görə zəif və güclü mənada «устойчивость по вероятности в сильном и слабом смысле; stability in probability» – bax, *Dayanıqlılıq* (qı) təsadüfi təyinedici elementləri differensial tənliklərin.

DAYANIQLILIQ (qı) xidmət sistemlərinin «устойчивость систем обслуживания; stability of queueing systems» – təyinedici parametrlərin kiçik dəyişikliklərindən xidmət sistemlərinin özünün bəzi ehtimal xassələrini azacıq dəyişməsi xassəsidir. Xidmət sistemləri üçün «dayanıqlılıq» termini əvəzinə bəzən xidmət sistemlərinin «kesilməzliyi» termini istifadə olunur.

Xidmət sistemlərinin D.-nin analizində əksər hallarda (u, f, v) üçlüyünə baxmaq məqsəduyğundur, burada u – sistemin «giriş» verilənlərini xarakterizə edir (adətən, bunlar idarəedici təsadüfi ardıcılıqlar, sifarişlərin daxil olunmasını təyinedici proseslər, onların xidməti və s.), v – sistemin öyrənilən xarakteristikalarıdır (gözləmə müddəti prosesləri, növbənin uzunluqları və s.). Xidmət sisteminin verilməsi $U = \{u\}$ fazasının $V = \{v\}$ fazasına $v = f(u)$ inikasını təyin edir. u və v təsadüfi elementlər olduğundan, U və V fəzalarında $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmalarının verildiyi və $\mathbf{Q} = \mathcal{F}(\mathbf{P})$ münasibətini ödəyən f -i doğuran $\mathcal{F}$ inikasının təyin olunduğu nəticəsi alınır. $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$ və $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q}\}$ ehtimallar fəzalarında $\xrightarrow{\mathcal{P}}, \xrightarrow{\mathcal{Q}}$ yığılma anlayışları daxil olunur (əksər hallarda bu u və v lokal xarakteristikalarının zəif yığılmasıdır, məs., koordinatların paylanmalarının yığılması, eyni zamanda v -nin stasionar xarakteristikalarına baxılırsa, sonsuz uzaqlaşmış koordinatların paylanmalarının yığılması).

Xidmət sistemlərində D., bir qayda olaraq, $\mathcal{F}$ inikasının kesilməzliyidir, yəni $r \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{(r)} = \mathcal{F}(\mathbf{P}^{(r)}) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{F}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$$

münasibətinin ödənilməsidir.

Əgər $\xrightarrow{\mathcal{P}}$ və $\xrightarrow{\mathcal{Q}}$ yığılmaları metrikənlirsə, onda $\mathcal{F}$ inikasının kesilməzliyinin (ε, δ) – statistik qiymətləri də – yarıqlılığın kəmiyyəti statistik qiymətləri adlanır. Əgər d və ρ uyğun metrikaladırsa, onda kəmiyyət statistik qiymətləri aşağıdakı formaları ala bilər: $x \rightarrow 0$ olduqda $\varphi(x) \rightarrow 0$ olarsa,

$$\rho(\mathbf{Q}^{(r)}, \mathbf{Q}) \leq \varphi(d(\mathbf{P}^{(r)}, \mathbf{P})).$$

Xidmət sistemləri üçün tipik hal: $u = (u_1, u_2, \dots)$, $v = (v_1, v_2, \dots)$ – koordinatları uyğun olaraq, $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$ -dən olan təsadüfi ardıcılıqlar olduğu halda, bu zaman U_k -lərin eyni qanunla paylanmış təsadüfi koordinatları olduğu və $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{v_k \in B\} = F_v(B)$ limitinin varlığı fərz olunur. Bu halda

sistemin D. onu ifadə edir ki, u_k və $u_k^{(r)}$ koordinatlarının paylanmalarının yaxınlığı $F_v(B)$ və $F_{v^{(r)}}(B)$ -nin yaxınlığını doğurur.

D. şərtləri araşdırılan proseslərin xassələri ilə təyin olunur və müxtəlif metodlarla tapılır (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; *yeni-ləşmələr metodu*, *Dayanıqlılıq teoremi*; *sınaq funksiyaları metodu*, *Dayanıqlılıq teoremi*; *metrik yanaşma*). Xidmət sisteminin konkret sinifləri üçün D. analizinin nəticələri aşağıda verilir. Əsas işarələmələrə *Xidmət sistemi* meq.-də bax, məs., τ_k^e , – k və $(k+1)$ -ci tələblərin daxil olduğu anlar arasında intervalın uzunluğu, τ_k^s k -ci tələbin xidmət müddəti, $x^+ = \max(0, x)$.

Birkeanlı sistemlər. $u = (u_1, u_2, \dots)$, $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)$, $X_k = \tau_k^s - \tau_k^e$, $v = (v_1, v_2, \dots)$, v_k k -ci tələbin xidmət başlanılan ana qədər gözləmə müddəti olsun $[\{v_k\}, -k \geq 1]$ olduqda $v_{k+1} = (v_k + \zeta_k)^+$ rekurrent münasibətilə bağlı ardıcılıqdır, $w = (w_1, w_2, \dots)$, – $\{v_k\}$ ardıcılığına uyğun stasionar ardıcılıqdır və

$$\mathbf{P}\{w_1 \in B\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{v_k \in B\},$$

$$w_k = \left(\sup_{j \geq 1} \sum_{i=k-j+1}^k X_i \right)^+.$$

$\{(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s})\}$, $r \geq 1$ ardıcılığı ilə idarəolunan xidmət sistemlərinin xarakteristikaları üçün yuxarı indeksli (r) ilə işarələnən eyni işarələmələrdən istifadə olunur.

Fərz olunur ki, $X = \{X_k\}_{k \geq 1}$ erqodik ardıcılıqdır, $\mathbf{M}X_1 < \infty$; $X^{(r)}$ ardıcılığının sonluölçülülüyü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda X -in sonluölçülülüyü paylanmalarına zəif yığılır; $r \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{M}(X_1^{(r)})^+ \rightarrow \mathbf{M}(X_1)^+ < \infty$; $x \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{P}\{v_1^{(r)} > x\} \rightarrow 0$ yığılması r üzrə müntəzəm yığılmadır. Onda $\{w_k^{(r)}\}$, $\{v_{n+k}^{(r)}\}_{k \geq 1}$ ardıcılıqlarının sonluölçülülüyü paylanmaları $r \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ olduqda uyğun w paylanmalarına zəif yığılır.

$$d(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)| - \text{müntəzəm metrikada}$$

məsafə. $\rho(F_1, F_2) = \int d |(F_1 - F_2)(x)|$, - F_1 və F_2 paylanma funksiyaları arasında variasiya üzrə məsafə;

$$F(x) = \mathbf{P}\{X_1 < x\};$$

$$Q(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt;$$

$$W(x) = \mathbf{P}\{w_1 < x\}$$

olsun.

Birkanallı sistemlər üçün D.-in kəmiyyətə qiymətlərinin tapılmasının iki yolu vardır. Birinci yol X_j' və X_j -nin paylanmalarının yığılmasının «hamarlılığı» ilə bağlıdır (məs., paylanmaların variasiyaya görə yığılması) və bu faktorizasiya eyniliklərə əsaslanır. Məs., aşağıdakı nəticə doğrudur: eger X və $X^{(r)}$ ardıcılıqları asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarətdirlərsə, $F(x)$ və $F^{(r)}(x)$ mütləq kəsilməz komponentlərə malikdirsə və $-\infty < \mathbf{M}X_1 < 0$ şərti ödənilərsə, onda

$$\rho(W^{(r)}, W) \leq C(\rho(F^{(r)}, F) + \rho(Q^{(r)}, Q))$$

münasibəti doğrudur.

İkinci yol $\alpha > 1$ tərtib $\mathbf{M}(X_j^{(r)})^\alpha$ momentlərinin məhdudluğu ilə bağlıdır ($X_j^{(r)}$ və X_j zəif yığıldığı halda). Belə bir hökm doğrudur: eger X və $X^{(r)}$ asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət ardıcılıqlarsa, r -in bütün qiymətlərində $\mathbf{M}X_1 < 0$, $\mathbf{M}(X_1^{(r)})^\alpha \leq C < \infty$ şərtləri hər hansı $\alpha > 1$ qiymətində ödənilərsə, onda

$$d(W^{(r)}, W) \leq C_1[d(F^{(r)}, F)]^{1-1/\alpha}$$

berəbersizliyi doğrudur. Əgər momentlərin məhdudluğu şərti əvəzinə bütün r -lər üçün və hər hansı $\beta > 0$ qiymətində

$$\mathbf{M} \exp \{ \beta X_1^{(r)} \} \leq C < \infty$$

şərtinin ödənilməsi tələbi qoyularsa, onda

$$d(W^{(r)}, W) \leq C_2 d(F^{(r)}, F) \left| \ln d(F^{(r)}, F) \right|$$

münasibəti doğrudur. Sonuncu berəbersizliklər (d metrikasından istifadə olunduqda) digər bir sıra metrikalar üçün, o cümlədən, Levi, Levi-Proxorov, Ki Fan metrikaları üçün də doğrudur (eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi halda). X və $X^{(r)}$ ardıcılıqlarında təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamalılığı fərziyyəindən imtina olunduğu halda və müxtəlif məhdudiyyətləri birkanallı sistemlər üçün, o cümlədən, imtinalarlı sistemlər, növbə uzunluğu məhdud sistemlər, gözlemə müddəti məhdud sistemlər üçün analogi qiymətləndirmələr alınmışdır.

Çoxkanallı sistemlər. Xidmət kanallarının sayı m -ə bərabər sistem üçün $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)$ giriş (idarəedici) ardıcılığı birkanallı sistemdə olduğu kimidir. Bu halda əsas öyrənilən obyekt $\{v_1, v_2, \dots\}$ ardıcılığıdır, burada $v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,m})$ - gözlemə müddəti vektorları olub,

$$v_{k+1} = R((v_k + e\tau_k^s - i\tau_k^e)^+), \quad k \geq 1$$

rekurrent münasibətlərini ödəyir, $i = (1, 1, \dots, 1)$ və $e = (1, 0, \dots, 0)$ - məhz m - ölçülü vektorlardır; $x = (x_1, \dots, x_m)$ vektoru üçün x^+ ilə $x^+ = (x_1^+, \dots, x_m^+)$ vektoru işarə olunmuşdur; $R(x)$, - x vektorundan koordinatların azalan qaydada yer dəyişməsindən alınmış vektordur. $w = (w_1, w_2, \dots)$ ilə $\{v_k\}$ -ya uyğun stasionar ardıcılığı işarə olunmuşdur.

Çoxkanallı sistemlər üçün D. teoremlərində müəyyən əlavə (birkanallı sistemlərlə müqayisədə) fərziyyələrin (məs., yeniləşmələrin varlığı, bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; yeniləşmələrin metodu) ödənilməsi tələb olunur.

Birkanallı sistemlər üçün əvvəllərdə verilmiş D.-in kəmiyyət statistik qiymətləri ($\alpha > 1$ tərtib momentlərin məhdudluğunu istifadə edən), bir qayda olaraq, çoxkanallı sistemlər üçün də doğrudur. Məs., eger $\{(\tau_k^e, \tau_k^s)\}$ və $\{(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s})\}$ ardıcılıqları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olarsa, bütün r -lər üçün və hər hansı $\alpha > 1$ qiymətində $\mathbf{M}(\tau_j^s - m\tau_j^e) < 0$; $\mathbf{M}_j(\tau_j^{(r)s}) \leq C < \infty$ şərtləri ödənilərsə, onda

$$\pi(W, W^{(r)}) \leq C_1[\pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s}))]^{1-1/\alpha}$$

münasibəti doğrudur, burada π , - Levi-Proxorov metrikasıdır, $W(x) = \mathbf{P}\{w_1 < x\}$.

Əgər momentlərin məhdudluq şərti əvəzinə bütün r -lər üçün və hər hansı $\beta > 0$ qiymətində $\mathbf{M} \exp(\beta \tau_j^{(r)s}) \leq C < \infty$ olarsa, onda

$$\pi(W, W^{(r)}) \leq C_2 \pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s})) \times \\ \times |\ln \pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s}))|$$

münasibəti doğrudur.

Analogi berəbersizliklər imtinalarlı çoxkanallı sistemlər üçün də alınmışdır. Yeniləşmələr metodu da $\{(\tau_j^e, \tau_j^s)\}$ ardıcılıqlarının asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olduğu halda xidmət sistemlərinin D. şərtlərini almağa imkan verir.

Kanallar sayı sonsuz sistemlər. Bu halda da idarəedici ardıcılığın $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)_{k=-\infty}^\infty$ stasionar (dar mənada) ardıcılığı olduğu fərz olunur. Belə sistemlərin əsas xarakteristikası n -ci tələb daxil olan anda məşğul kanallar sayını ifadə edən q_n ədədidir. $v = (q^1, q^2, \dots)$, - $n \rightarrow \infty$ olduqda $\{q_{n+k}\}_{k \geq 1}$ ardıcılığının limit stasionar ardıcılığı olsun. Əgər $\mathbf{M}\tau_1^s < \infty$ olarsa, onda belə ardıcılığı vardır və

$$q^k = I\{\tau_k^s > \tau_k^e\} + I\{\tau_{k-1}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\} + \\ + I\{\tau_{k-2}^s > \tau_{k-2}^e + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\} + \dots$$

münasibəti doğrudur. $I(B)$, - B hadisəsinin indikatorudur.

$q_n^{(r)}$, $q^{(r)n}$, v^r ilə sistemin $\{(\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s})\}$ ardıcılığı ilə idarəolunan xarakteristikaları işarə olunmuşdur.

Aşağıdakı müddəə doğrudur. Fərz olunur ki, $\{\tau_j^e\}$ və $\{\tau_j^{(r)e}\}$ ardıcılıqları metrik tranzitivdirlər; $\{(\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s})\}$ ardıcılıqlarının

sonluölçülü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda $\{(\tau_j^e, \tau_j^s)\}$ ardıcılıqlarının uyğun paylanmalarına zəif yığılır; $r \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{M}\tau_1^{(r)s} \rightarrow \mathbf{M}\tau_1^s < \infty$; tam, ixtiyari $j \geq 0$ qiymətində

$$\mathbf{P} \left\{ \tau_0^s - \sum_{k=0}^j \tau_k^s = 0 \right\} = 0.$$

Onda $v^{(r)}$ ardıcılıqlarının sonluölçülü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda v ardıcılıqlarının uyğun paylanmalarına zəif yığılır. Bu müddə ümumi halda da, sifarişlər sisteme v_k^s həcmli partiyalarla daxil olduqda və $\{(\tau_k^e, v_k^s, \tau_k^s)\}$ ardıcılığı da stasionar olduğu halda öz qüvvəsində qalır.

Avtonom xidmətli sistemlər. Fərz olunur ki, sifarişlər sisteme v_k^s həcmli qruplarla daxil olunur və v_k^s həcmli qruplarla ele xidmət olunur ki, sistem $u = (u_1, u_2, \dots)$ ardıcılığı ilə ifadə olunur, burada $u_k = (\tau_k^e, v_k^s, \tau_k^s, v_k^s)$, $k \geq 1$. Bu sistemlərin adı sistemlərdən fərqi ondadır ki, sifarişlərə xidmət yalnız $0, \tau_1^s, \tau_1^e + \tau_2^s, \dots$ anlarında giriş axınından asılı olmadan və növbənin olmasından asılı olmayaraq başlanır.

$e(t)$, $-t$ anına qədər sisteme daxil olan sifarişlər sayı, $s(t) = v_1^s + \dots + v_{\eta(t)-1}^s$ olsun, $\eta(t)$ – sıçrayışları $\tau_1^s, \tau_2^s, \dots$ olan dolaşmanın t səddini ilk keçmə anı olsun; $q(t)$, $-t$ anında növbənin uzunluğudur (xidmətdə olan sifarişlər hesaba alınmadan), $\bar{q}(0) = 0$; $\{q(x), x \geq 0\}$ – növbə uzunluğunun dəyişməsinin stasionar prosesidir və $t \rightarrow \infty$ olduqda $\{q(t+x); x \geq 0\}$ prosesi bu prosese yığılır. Belə işarələmələr (yuxarıda indeksləri $r \geq 1$ olan), $(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}, v_k^{(r)e}, v_k^{(r)s})$ ardıcılıqları ilə idarəolunan sistemlər üçün də saxlanılır.

Avtonom xidmətli sistemlər üçün aşağıdakı müddəə doğrudur: eger

$$\{ \xi^k = e(x) - s(k) - e(k-1) + s(k-1); k \geq 1 \}$$

erqodik ardıcılıq, $\mathbf{M}\xi^r < 0$ olarsa: $\{e^{(r)}(t); s^{(r)}(t)\}$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda

$$\{e(t); s(t)\}; \mathbf{M}[e^{(r)}(1) - e^{(r)}(0)] \rightarrow \mathbf{M}[e(1) - e(0)]$$

proseslərinin uyğun paylanmalarına zəif yığılarsa və $r \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}[s^{(r)}(1) - s^{(r)}(0)] \rightarrow \mathbf{M}[s(1) - s(0)]$$

olarsa, onda $\{\bar{q}(x)\}$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda $\{\bar{q}(x)\}$ proseslərinin uyğun paylanmalarına yığılır.

Əd. [1] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd1, B., 1983; [2] Б о р о в к о в А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [3] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

DAYANIQLILIQ(ğı) Markov proseslərinin « **устойчивость** марковских процессов; **stability** of Markov processes » – Markov proseslərinin parametrlərinin kiçik dəyişikliklərində onların ehtimal xarakteristikalarının kiçik dəyişikliyinə səbəb olması xassəsidir. Markov pro-

seslərinin D.-nin analizinə aid bir sıra məsələlər (əsas etibarilə diffuzion proseslər üçün) adı differensial tənliklər üçün uyğun məsələlərin ehtimali analoqlarıdır (bax, [1], [2]). Məs., Markov prosesi $X(\cdot)$ -in

$$dX(t) = b(t, X)dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, X) dw_r(t) \quad (1)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli olduğu fərz olunur, burada $X, b, \sigma_r, -\mathbb{R}^l$ -dən vektorlar, w_r – asılı olmayan Viner prosesləridir. Əgər $b(t, x)$ və $\sigma_r(t, x)$ funksiyaları t -yə görə kəsilməz və x -ə görə hər bir məhdud $b(t, 0) = 0$, $\sigma_r(t, 0) = 0$ oblastında x üzrə Lipşits şərtini ödəyirlərsə, (1) sisteminin D. geniş məsələlər sinfi üçün xətti yaxınlaşma sinfinin D.-ndan alınır (bax, [1]):

$$dX(t) = \text{grad}_x b(t, 0) X dt + \sum_{r=1}^k \text{grad}_x \sigma_r(t, 0) X dw_r(t); \quad (2)$$

burada D. – $|X(0)| \rightarrow 0$ olduqda $\sup_{t>0} |X(t)|$ kəmiyyətinin

ehtimala görə sıfıra yaxınlaşması kimi anlaşılr. Belə növ Markov proseslərinin D.-ni tədqiq etmək üçün Lyapunov düz metodunun analoqları və ümumiləşmələri olan metodlardan istifadə olunur (bax, [1], [2]).

Digər növ Markov proseslərinin D. vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, 2, \dots\}$ olan ayrılmayan hesabi periodik Markov zəncirləri üçün izah olunur. $P = \{p_{ij}\}$ – belə zəncirin keçid matrisi, τ – qeyd olunmuş bir vəziyyətə qayıdış müddəti (məs., 0 vəziyyətinə), $q_n = (q_n(k))_{k \geq 0}$, $-n$ anında zəncirin vəziyyətinin paylanması olsun. Belə bir hökm doğrudur: eger keçid matrisləri $P^{(r)}$, $r \geq 1$ olan Markov zəncirləri ardıcılığı ilə olarsa ki, $\{\tau, \tau^{(r)}, r \geq 1\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi müntəzəm inteqrallanan olsun, onda $r \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |q_n(k) - q_n^{(r)}(k)| \rightarrow 0$$

münasibətinin ödənilməsi üçün ixtiyari $i, j \geq 0$ qiymətlərində

$$p_{ij}^{(r)} \rightarrow p_{ij} \quad \text{və} \quad q_0^{(r)}(i) \rightarrow q_0(i)$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruridir. İxtiyari vəziyyətlər fəzası ilə verilən Harris qayıdışlı Markov zənciri üçün analoji nəticə doğrudur.

Əd. [1] Х а с ь м и н с к и й Р. З., Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [2] К у ш н е р Г. Д ж., Стохастическая устойчивость в управление, пер. с англ., М., 1969; [3] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [4] А в н и к и н С. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, М., 1984, с. 22–27.

DAYANIQLILIQ(ğı) paylanmaların xarakterizasiyalarının « **устойчивость** характеристик распределений; **stability** of characterization of distributions » – paylanmaların xarakterizasiyası modeli ilə bağlı stoxastik modellərin dayanıqlılığının bir

tezahürüdür. Paylanmaların xarakterizasiyalarının D. xarakterizasiyanın keyfiyyətə və kəmiyyətə tezahüründə öyrənilir. Sonuncu üçün ehtimal metrikası anlayışından və ya heç olmasa ehtimali məsafədən istifadə olunur. Paylanmaların xarakterizasiyalarının D.-nin bir effekt kimi anlamı baxımından ilk mülahizələr P. Levinin [1] kitabında verilmişdir (teorem 38) ki, burada paylanmaların kompozisiyasının normal qanuna yaxın olması üçün kompozisiyanın komponentlərinin uyğun normal qanunlara yaxınlığı tələb olunur və şərt kimi qoyulur. Bu mülahizələr (hökmün dəqiq ifadəsi və inandırıcı isbatı olmayan) Kramer teoremi ilə sıx bağlıdır; bu teoreme görə, normal qanunun paylanma funksiyası Φ yalnız $\Phi = F_1 * F_2$ kompozisiyası kimi normal qanunlu (o cümleden, həm də cırlaşmış) paylanma funksiyaları ilə ifadə olunan ayrılış kimi göstərilə bilər.

N. A. Sapov P. Levinin mülahizələrini dəqiqləşdirərək, paylanmaların xarakterizasiyalarının D. mövzusunda ilk nəticəni teorem şəklində ifadə etmişdir (bax, [2]). Bu teorem həm də paylanmaların xarakterizasiyalarının D. məsələsində ilk kəmiyyət statistik qiymət olmuşdur. Bərabərsizlik formasında Sapov teoreminde hökm olunur ki, ρ – müntəzəm metrika olduqda, kiçik $\varepsilon = \rho(F_1 * F_2, \Phi)$ üçün həmişə ehtimal Φ_1, Φ_2 normal paylanma funksiyaları tapmaq olar ki, $\rho(F_k, \Phi_k) = O(1/\sqrt{\log 1/\varepsilon})$ olsun.

P. Levi və N. A. Sapovun ideyaları Yu. V. Linnikin (bax, [3]) işlərində və onun ardıcıllarının işlərində (bax, [4], [5]) istifadə olunmuş və davam etdirilmişdir. Ehtimali məsafələrdən istifadəyə əsaslanan ümumi yanaşma [6]-da verilmişdir, burada xarakterizasiyaların dayanıqlılığı şərtləri şərh olunmuşdur. Əgər $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – uyğun olaraq bunlarda μ və ν məsafələri verilmiş hər hansı paylanmalar fəzası, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}$ – bu fəzalarda ayrılmış altçoxluqlar və $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – hər hansı inikasırsa, onda $\mathcal{D} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup J^{-1}(\mathcal{B})$ və $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap J^{-1}(\mathcal{B})$ çoxluqları $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ modeli çərçivəsində $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ çoxluqları ilə xarakterizə olunan çoxluqlardır. Bu çoxluqların xarakterizasiyasının dayanıqlılığı μ və ν məsafələrinin və müəyyən μ – kompakt $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ çoxluğunun daxil olunması ilə bağlıdır. $\mathcal{C}$ çoxluğu üçün bu onu ifadə edir ki, ixtiyari $x \in \mathcal{X}'$ üçün

$$\mu(x, \mathcal{A}) + \nu(Jx', \mathcal{B}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mu(x', \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilir. $\mathcal{D}$ -nin (μ, ν) – dayanıqlıqlı xarakterizasiyası üçün kafi şərtlər aşağıdakılardır:

- 1) $\mathcal{A}$ çoxluğu μ -yə nəzərən qapalıdır;
- 2) $\mathcal{B}$ çoxluğu ν -yə nəzərən qapalıdır;
- 3) J inikası μ, ν məsafələri cütünə nəzərən $\mathcal{A}$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində kəsilməzdir.

Yuxarıda qeyd olunan Kramer teoreminde bu kafi şərtləri tətbiq etmək üçün $\mathcal{X} = \{(F_1, F_2)\}$, $F_k \in \mathcal{F}$ (burada $\mathcal{F} = \mathbb{R}^1$ -də paylanma funksiyaları çoxluğu), $\mathcal{Y} = \mathcal{F}$, $J(F_1, F_2) = F_1 * F_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{X}$, $\mathcal{B} = \{\Phi\}$ götürmək olar, μ və ν -nün məsafələri kimi isə

$$\mu((F_1, F_2)(F'_1, F'_2)) = L(F_1, F'_1) + L(F_2, F'_2), \quad \nu = L$$

metrikasını götürmək olar, burada L – Levi metrikasıdır.

Əd.: [1] L é v y P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [2] Сапов Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.».

158 DAYANIQLILIQ

1951, т. 15, № 3, с. 205–18; [3] Л ин н и к Ю. В., Разложения вероятностных законов, Л., 1960; [4] Ч и с т я к о в Г. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50; [5] Каган А. М., Л ин н и к Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [6] З о л о т а р е в В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54.

DAYANIQLILIQ (ğı) regenerativ proseslərin «устойчивость регенерирующих процессов; stability of regenerative processes» – regenerativ proseslərin parametrlərinin kiçik dəyişmələrindən onların ehtimal xarakteristikalarının kiçik dəyişikliyinə səbəb olması xassələridir. $V = (V_1, V_2, \dots)$ – diskret zamanlı regenerativ proses, $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$ – bu prosesin ardıcıl regenerasiya anları, $\theta_j = S_j - S_{j-1}, j \geq 1, P\{\theta_1 \geq 1\} = 1$ və $a(k) = P\{\theta_1 = k\}, k \geq 1$ olsun. Natural N və $0 < \alpha < 1$ ədədləri üçün əgər $\{k: a(k) \geq \alpha, 1 \leq k \leq N\} = 1$ ən böyük ortaqlar bölən olarsa, onda $\{a(\cdot)\}$ paylanmaları $\mathfrak{N}(N, \alpha)$ sinfindəndir. V və V' – regenerativ proseslər, periodların regenerasiyasının uyğun paylanmaları – a və a' , $\mathfrak{N}(N, \alpha)$ sinfindən olsun; onda:

a) əgər hər hansı $\gamma > 1$ və $0 < g < \infty$ üçün

$$M\theta_1^\gamma \leq g, \quad M(\theta'_1)^\gamma \leq g$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda

$$\sup_{n \geq 1} d(V_n, V'_n) \leq \inf_T \{ \max_{n \leq T} d(V_n, V'_n) + cT^{1-\gamma} \}$$

münasibəti doğrudur, burada d – vahidlə məhdud və tam variasiya metrikasından güdü olmayan metrikadır, c sabiti isə yalnız g, γ, N, α -dan asılıdır;

b) əgər hər hansı $\mu > 0$ və $0 < g_1 < \infty$ üçün

$$M \exp(\mu \theta_1) \leq g_1, \quad M \exp(\mu \theta'_1) \leq g_1$$

olarsa, onda ehtimal $0 < \mu_0 \leq \mu$ və $c_1 = c_1(g_1, \mu, N, \alpha)$ sabitləri vardır ki,

$$\sup_{n \geq 1} d(V_n, V'_n) \leq \inf_T \{ \max_{n \leq T} d(V_n, V'_n) + c_1 \exp(-\mu_0 T) \}$$

münasibəti doğrudur, burada μ_0 və c_1 sabitləri aşkar surətdə yazılır.

Regenerativ proseslərin ən zəif D. şərtləri aşağıdakılardır: V' ardıcılığının V -yə zəif yığılması; V və V' proseslərinin regenerasiya periodlarının qeyri – periodikliyi və müntəzəm integrallanılıq.

Qeyd olunan nəticələr hesabi Markov zəncirlərinin bixətli, çoxxətli, çoxfazlı və digər xidmət sistemlərinin D.-ni analiz edərkən istifadə olunmuşdur.

Əd.: [1] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функции, М., 1978.

DAYANIQLILIQ (ğı) statistik prosedurun «устойчивость статистической процедуры; stability of a statistical procedure» – ilkin modeldən X' yayınmaları olduğu halda statistik prosedurun nominal xarakteristikaları az dəyişdirməsi xassəsidir. Əgər prosedurun bu və ya digər xassələri olduqca xüsusi model çərçivəsində müəyyən olunmuşdursa (məs., seçimi verilənlərin

paylanması bir və ya bir neçə parametrlə dəqiqliyi ilə qeyd edən model), onda statistik prosedurun D. (ilk modeldən real mümkün olan yayınmalara nəzərən) statistik praktikada prosedurun istifadə olunması üçün zəruri olan ilkin şərtir. Bir çox hallarda statistik prosedurun D.-nin araşdırılmasında statistik modeləşdirmə metodu və ya digər ədədi metodlarla kifayətlənir, çünki analitik metodların tətbiq olunma oblası məhduddur; məs., böyük həcmli seçimlər üçün alınmış nəticələrin kiçik və bir qədər ondan fərqli həcmli seçimlər üçün istifadə olunma bilinməsinə aydınlasdırdıqda.

Bezi klassik statistik prosedurlar üçün aşağıdakı vəziyyət alınır (bax, [1]). $\bar{x}$ və s^2 – uyğun olaraq, seçimi orta və seçimi dispersiya olarsa, $t_n = \sqrt{n-1} \bar{x}/s$ Student statistikasi normal paylanmalı çoxluğun orta qiyməti haqqında statistik nəticələr üçün istifadə olunur. t_n statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. – sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Student paylanmasının normal paylanmadan fərqli paylanmalı çoxluqdan olan seçim nəticəsində yaranan t_n statistikasının paylanmasına yaxınlığını ifadə edir. $n \rightarrow \infty$ olduqda, sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Student paylanması və t_n -in paylanması eyni bir normal paylanmaya yığılır və buna görə də, böyük həcmli seçimlərdə t_n statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. haqqında mülahizə aparmaq olar. Kiçik həcmli seçimlərdə t_n -ə əsaslanan statistik prosedurun D. eksess yayınmalan ilə müqayisədə asimmetriya yayınmalanına nəzərən kiçik olur.

Normal paylanmalı çoxluğun dispersiyası haqqında statistik nəticələrin alınmasında $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ statistikasından

istifadə olunur. χ_n^2 statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. asimmetriyanın yayınmalan ilə müqayisədə eksess yayınmalanına nəzərən kiçik olur və bu halda asimptotik mülahizələr köməyə gəlir. Belə ki, sıfırdan fərqli eksess olduğu halda, $n \rightarrow \infty$ olduqda χ_n^2 statistikasının limit paylanması Qauss paylanması olsa da, bu paylanma sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ -ə bərabər χ^2 – kvadrat paylanması üçün limit paylanması olan Qauss paylanmasından fərqlidir. Beləliklə, seçimi dispersiyaya əsaslanan statistik prosedur D. xassəsinə malik deyildir.

Parametrin qiymətləndirilmə məsələsinə keçdikdə, spektral prosedurun D.-nin yoxluğuna misal: $\Phi(x - \theta)$ paylanmalı normal çoxluqdan seçim üzrə kvadratik itki funksiyasına nəzərən θ parametrinin statistik qiyməti $\bar{x}$ seçimi ortasıdır. $F(x)$ -in $\Phi(x)$ -dən olduqca kiçik ele yayınmalan vardır ki, onların ikinci momentləri olduqca böyükdür, odur ki, $F(x - \theta)$ paylanmalı çoxluqdan seçim üzrə təyin edilmiş $\bar{x}$ seçimi ortası θ üçün statistik qiymət kimi məqbul deyildir. Bu modeldə statistik prosedurun D.-na nail olmaq üçün metodlardan biri ondan ibarətdir ki, statistik qiymət qurularken kənar müşahidələr eliminasiya olunmalıdır. Bu halda təbii olaraq, kəsik orta tipli statistik qiymətlər sinfi yaranır və belə kəsik orta seçimin $X_1 \leq \dots \leq X_n$ qaydalı statistikaları üzrə

$$\bar{Y}_\alpha = (X_{(k+1)} + \dots + X_{(n-k)}) / (n-2k),$$

$$k = [n\alpha], \quad \alpha < 1/2$$

münasibətlə təyin olunur, burada α – ilkin normal modeldən mümkün ola bilən yayınmalardan asılı olaraq seçilir. α seçilərkən statistik prosedurun D. və onun effektivliyi arasında

kompromiss nəzərə alınmalıdır (bax, *Effektivlik* (yi) statistik prosedurun), belə ki, effektiv statistik prosedurun qurulması maksimal dərəcədə modelin spesifikasiyasına əsaslanır.

Hal-hazırda çox məşhur olan *statistik prosedurun robastlığı* konsepsiyası bu kompromissin realizasiyalarından biri sayılır. Digər bir mümkün yol paylanmadan asılı olmayan statistik prosedurun istifadə olunmasıdır.

Statistik prosedurun D.-nin öyrənilməsinə eksperimental araşdırmalarda başlanılmışdır. 20-ci əsrin 1-ci yarısında ayrı-ayrı nəzəri nəticələr alınmışdır, bunlar arasında $\bar{X}_\alpha$ -dan fərqlənən unizorlandırılmış ortalan qeyd etmək olar ki, bunlar $X_{(1)}, \dots, X_{(k)}$ statistikalarının eliminasiya olunması (atılması) əvəzinə (uyğun olaraq, $X_{(n-k+1)}, \dots, X_{(n)}$ -lərin) $X_{(k+1)}$ -lə (uyğun olaraq, $X_{(n-1)}$ -lə) əvəz olunur.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Леман Э., Теория статистических оценок, пер. с англ., М., 1991.

DAYANIQLILIQ (ğı) stoxastik modelin «устойчивость» стохастической модели; stability of a stochastic model – stoxastik modelin hər hansı ilkin vəziyyətlərinin kiçik dəyişikliyi sayəsində bu model çərçivəsində nəticənin müəyyən mənada kiçik dəyişməsi xassəsidir. Ciddi təbii əhəmiyyəti olan stoxastik modelin D. ilə bağlı məsələlərə ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox bölmələrində baxılır (bax, *Dayanıqlılıq* (ğı), təsadüfi təyindədi elementləri differensial tənliklərin, *Dayanıqlılıq* (ğı), xidmət sistemlərinin, *Dayanıqlılıq* (ğı), paylanmaların xarakterizasiyalarının, *Limit teoremləri*). Stoxastik modelin D. effektiv ehtimal metrikalarından istifadə olunmaqla öyrənilədiyi kimi, paylanmaların bu və ya digər yığılmaları terminlərlə də öyrənilir. Birinci yol daha münasibdir, çünki, bu halda kəmiyyətce statistik qiymətlər haqqında məsələləri araşdırmaq olur (bax, *Dayanıqlılıq* (ğı) stoxastik modelin; kəmiyyəti statistik qiymətlər).

DAYANIQLILIQ (ğı) stoxastik modelin; kəmiyyəti statistik qiymətlər «устойчивость» стохастической модели; количественные оценки; stability of a stochastic model; quantitative estimates – giriş verirlərini çıxış verirlərinə çevirmə şəklində verən stoxastik modelin inikasının kəsilməzlik xassəsidir və bu çevirmədə həm giriş, həm də çıxış verirləri haqqında məlum, əlavə aprior informasiya nəzərə alınır.

D.-in ümumi məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur. Stoxastik modelin X giriş verirləri və Y çıxış verirlərinin abstrakt metrik fəzaları uyğun olaraq $(\mathcal{X}, \mu)$ və $(\mathcal{Y}, \nu)$, $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – hər hansı inikas olsun (qarşılıqlı birqiymətli olması şərt deyil). $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ və $\mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$ – aprior informasiyanı verən, qeyd olunmuş altçoxluqlar olsun. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, F)$ üçlüyü ilə müxtəlif «təmiz» (və ya kükrəntisiz) modelləri əlaqələndirmək olar. Düz modellər ən tipik modellərdir və bu modellərdə $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$ və $\mathcal{B} = \mathcal{Y}$ münasibətinin ödənilməsi hesab olunur; məsələ məqbul sayılan çıxış verirlərinin çoxluğu $F\mathcal{A}$ -nin tapılmasından, həmçinin verilmiş $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ və $\mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$ çoxluqları üzrə $C = \mathcal{A} \cap F^{-1}(\mathcal{B})$, $C \subset \mathcal{X}$ çoxluğunun tapılması üçün zəruri olan ters modellərin (və ya xarakterizasiya modelinin) tapılmasından ibarət olur. D. məsələlərinin bu modellərdə yaranması $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ -nin «kiçik» dəyişikliklərinin hansı effekti verəcəyinin araşdırmaq arzusu ilə bağlı olmuşdur.

Tərif 1. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sabiti varsa ki,

$$\theta(X') \equiv \mu(X', \mathcal{A}) + \nu(FX', \mathcal{B}) < \delta(\varepsilon), X' \in \mathcal{X}$$

olduqda

$$\nu(FX', \mathcal{B}) < \varepsilon$$

berəbersizliyi ödənilsin, onda düz model – verilən $\mathcal{B}$ məhdudiyyətində $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ çoxluğunda dayanıqlı model adlanır.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sabiti varsa ki,

$$\theta(X') = \mu(X', \mathcal{A}) + \nu(FX', \mathcal{B}) < \delta(\varepsilon)$$

olduqda

$$\mu(X', \mathcal{C}) < \varepsilon$$

berəbersizliyi ödənilsin və əksinə, yeni ixtiyari $\delta > 0$ üçün $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ varsa ki, $\mu(X', \mathcal{C}) < \varepsilon$ olduqda $\theta(X') < \delta$ ödənilsin, onda xarakterizasiya modeli $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ çoxluğunda dayanıqlı model adlanır.

Stoxastik modellər onunla seçiyevədir ki, bu modellərdə $\mathcal{X}$ və $\mathcal{Y}$ fəzalarına ya hər hansı təsadüfi obyektlərin (kəmiyyətlərin, funksiyaların, meydanların) fəzaları kimi, ya da ehtimal paylanmalarının fəzaları kimi baxılır. Bu halda μ və ν rolunu ehtimali metrikalar ifadə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilən bir çox sxemlər düz model şəklində izah olunur. Məs., təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarına üzrə və ola bilər ki, müəyyən məhdudiyyətlərlə (məs., asılı olma, eyni qanunla paylanılma) onların cəminin paylanmasının təyin olunmasını ifadə edən təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə sxemi; «təyinedici» təsadüfi kəmiyyətlərin (xidmət müddətləri, tələblər arasında intervallar) paylanmalarına üzrə növbələrin uzunluğunun, gözləmə müddətinin paylanmalarının tapılmasını ifadə edən kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin düz məsələləri.

Ehtimal nəzəriyyəsində xarakterizasiya modelləri paylanmaların xassələri üzərinə qoyulan bezi aprior məhdudiyyətlərə görə, paylanmaların şəklinin müəyyən olunmasında istifadə edilir (məs., kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin tərs məsələlərində çıxış axını üzrə xidmət müddətinin paylanmasını təyin etmək tələb olunduqda).

D. məsələlərinin müxtəlif məzmunlu interpretasiyaları ola bilər. Məs., limit teoremləri (məs., *Mərkəzi limit teoremi*, *Puasson teoremi*) müxtəlif cəmləmə sxemlərində D. teoremləri hesab oluna bilər. Xidmət modellərinin və stoxastik differensial tənliklərin D.-nin əsas xassələri də tərif 1-ə gətirilir. Tərif 2 şəklində ehtimal paylanmalarının xarakterizasiyasının D. məsələləri ifadə oluna bilər.

D. teoreminin (bu xassənin varlığını ifadə edən hökm şəklində) isbat olunma faktının özü bu modelin xüsusi keyfiyyətlərinin olmasına sübutdur ki, bunlar fərziyyələrin kiçik dəyişikliklərinin nəticələrində böyük yayınmalara səbəb olmayacağına zəmanət verir (bax, *Keyfiyyətə dayanıqlılıq* (ğ)) stoxastik modellərin). Keyfiyyətə D., əlbəttə ki, modelin iş qabiliyyətliliyinə zəmanət verən fundamental faktıdır. Keyfiyyətə D.-in özü üçün, ümumiyyətlə, $\mathcal{X}$ və $\mathcal{Y}$ fəzalarına metrika daxil etmək tələb olunmur, kifayətdir ki, bunlarda topologiya verilsin.

Tərif 1 və 2-də $\delta(\varepsilon)$ və $\varepsilon(\delta)$ kəmiyyətlərinin qiymətləndirilməsi yalnız D.-in isbat olunması halında deyil, həm də ilkin verilənlərin variasiyalarının mümkün nəticələri də qiymətləndirildiyi halda kəmiyyətə dayanıqlılıq anlayışına gətirir.

D. xassələri öyrənilərkən, öyrənilən modellərin tiplerindən asılı olaraq, müxtəlif riyazi texnikadan istifadə olunur. Modellərin keyfiyyətə D. haqqında və uyğun kəmiyyətə D. haqqında müddəalar üçün ehtimali metrikalar nəzəriyyəsi güclü bir texniki alət sayılır.

D. kəmiyyətə statistik qiymətlərin alınmasında bir sıra bir-biri ilə əlaqəli problemlər yaranır. Birincisi $\delta(\varepsilon)$ kəmiyyətinin (və ya $\varepsilon(\delta)$ -nin) məsələnin məzmunlu qoyuluşu ilə dikteolunan μ və ν terminləri ilə qiymətləndirilməsidir. İkincisi μ və ν metrikalarının ələ seçilməsi problemidir ki, $\delta(\varepsilon)$ -nin qiymətləndirilmə məsələsi [uyğun olaraq, $\varepsilon(\delta)$ -nin] riyazi nöqtəyi – nəzərdən daha təbii həll olunsun. Müəyyən situasiyalarda bu iki problem bir-birinə zidd ola bilər və bu halda üçüncü problem yaranır – «təbii» metrikalarla alınmış statistik qiymətlərdən məzmunlu dikteolunan məsələ üçün statistik qiymətlərə keçid. Dördüncü problem həmişə kəmiyyətə araşdırmalarda yaranır, bu statistik qiymətlərin «keyfiyyət» problemidir, yəni onların bu və ya digər mənada yaxşılaşdırılmayan olmaları problemidir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Bull. Inst. Statist. Inst.», 1977, v. 47, № 2, p. 382–401; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [3] Калашников В. В., Рачев С. Т., Математические методы построения стохастических моделей обслуживания, М., 1983.

DAYANIQLILIQ (ğ) təsadüfi təyinedici elementləri differensial tənliklərin «устойчивость» дифференциальных уравнений со случайными определяющими элементами **stability** of differential equations with random parameters – hərəkətin dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin ələ bir bölməsidir ki, burada sağ tərəfi təsadüfi olan differensial tənliklər sistemi üçün bu və digər ehtimal mənasında invariant çoxluqların dayanıqlılığı araşdırılır. Dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin ən çox inkişaf etdiyi hal – invariant çoxluğun nöqtə olduğu haldır.

$F(x, t, \omega)$; $x, F \in \mathbb{R}^n$, – x qeyd olunduqda təsadüfi proses olsun və bu proses $x=0$ görə ələ müəyyən hamarlıq xassələrinə malik olsun ki, bu xassələr

$$x'_t = F(x, t, \omega), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

məsələsi üçün yeganə həlli təmin etsin. $X^{(x_0, t_0)}(t, \omega)$, – (1) məsələsinin həlli və $F(0, t, \omega) \equiv 0$ olsun, deməli, $x=0$ (1) tənliyinin həllidir. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\delta > 0$ olarsa ki, $|x_0| \leq \delta$ olduqda

$$\sup_{t \geq t_0} \mathbf{P} \{ |X^{(x_0, t_0)}(t, \omega)| \geq \varepsilon \} \leq \varepsilon$$

münasibəti ödənilsin, onda bu həll – zəif mənada ehtimala görə dayanıqlı həll adlanır. Əgər bundan başqa, $t \rightarrow \infty$ olduqda, $X^{(x_0, t_0)}(t, \omega) \rightarrow 0$ olarsa, $x=0$ həlli zəif mənada ehtimala görə asimptotik dayanıqlı həll adlanır.

Əgər bütün $|x_0| \leq \delta$ üçün (2) əvəzinə

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \geq t_0} |X^{(x_0, t_0)}(t, \omega)| \geq \varepsilon \right\} \leq \varepsilon$$

berəbersizliyi ödənilsə, $x=0$ həlli – güclü mənada ehtimala görə dayanıqlı həll adlanır.

Tətbiqi məsələlərdə vahid ehtimalla D. və həllin hər hansı p tərtib momentlərinin D. (p – dayanıqlılıq adlandırılan) öyrənilir. Differensial tənliklərin determinik halında olduğu kimi, müxtəlif mənalarda ehtimalla görə dayanıqlılıq şərtlərini Lyapunov funksiyalarının analoqları terminləri – Lyapunov stoxastik funksiyaları adlandırılan terminlərlə də vermək olar. Xüsusilə də, stoxastik differensial tənliklərin dayanıqlılığı araşdırılan halda tətbiq üçün sadə və rahat şərtlər alınır (bax, [1], [2]). Xətti stoxastik differensial tənliklərin D. olduğu ətraflı surətdə araşdırılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, sabit əmsallı xətti sistemin ehtimalla görə asimptotik D. p kiçik olduğu halda onun eksponensial p – dayanıqlılığını təmin edir. Əksinə, hər hansı p qiymətində xətti sistemin eksponensial p – dayanıqlılığı (yəni hər hansı $A > 0$, $\alpha > 0$ üçün $M |X^{(x_0, t_0)}(t)|^p \leq A |x_0|^p e^{-\alpha t}$

bərabərsizliyinin ödənilməsi) sistemin ehtimalla görə asimptotik D.-na zəmanət verir. Stoxastik differensial tənliklər üçün birinci yaxınlaşma üzrə dayanıqlılıq və qeyri – dayanıqlılıq haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

Tam olan $p > 0$ qiymətləri halında eksponensial p – dayanıqlılıq üçün zəruri və kafi cəbri şərtlər alınmışdır.

$$dx/dt = F(x(t, \omega), x) \quad (F(x, 0) \equiv 0)$$

şəklində sistemlərin $x=0$ həllərinin D. ikiözlü ($X(t), Y(t)$) Markov prosesi üçün $x=0$ hipermüstəvisinin D.-na gətirilir və bu da Lyapunov stoxastik funksiyalar metodu ilə analiz oluna bilər.

Əd.: [1] Кушнер Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Хасминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969.

DAYANIQLILIQ PARAMETRİ « уСТОЙЧИВОСТИ параметр; parameter of stable », xarakteristik parametr. – bax, Dayanıqlı paylanma göstəricisi.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ xidmət sistemi nəzəriyyəsində « уСТОЙЧИВОСТИ теорема в теории систем обслуживания; stability theorem in the queueing theory » – «idarəedici» təsadüfi proseslər və ya parametrlərin kiçik dəyişikliklərində xidmət sistemlərindəki dəyişmələri təsvir edən təsadüfi proseslərin dayanıqlılıq şərtlərini və dayanıqlılıq qiymətlərini (kəsilməzliyinin) verən teoremdir (bax, Dayanıqlılıq (ğ)) xidmət sistemlərinin).

Ən çox öyrənilmiş hal – sistemin işini təsvir edən $v = \{v_n\}$ prosesinin (ardıcılığının) stasionar «idarəedici» $u = \{u_n\}$ ardıcılığı ilə $v_{n+1} = f(v_n, u_n)$, $n \geq 1$ münasibətlərlə əlaqələndiyi haldır. u_n və v_n vektorları uyğun olaraq $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$ fəzalarından qiymətlər alır, $k \geq 1$, $l \geq 1$.

Proseslər üçün D. t.-nin alınması üçün bir neçə yanaşma məlumdur.

I. Yeniləşmələr metodu – v prosesinin dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərini almaq üçün metod, bu metod prosesin öz keçmişini qismən «unutqanlıq» xassəsindən istifadə edir (bax, Dayanıqlılıq teoremi; yeniləşmələr metodu). Əgər v prosesi regeneratör proses olarsa, dayanıqlılıq şərtləri daha sadə şəkil alır (bax, Dayanıqlılıq (ğ)) regenerativ proseslərin).

II. Metrik yanaşma – dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərinin alınması üçün ehtimali metrikaların müxtəlif struktur xas-

sələrini istifadə edən yanaşmadır (bax, Dayanıqlılıq teoremi; metrik yanaşma).

III. Sınaq funksiyaları metodu (rus. метод пробных функций) – dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərinin Lyapunov tipli köməkçi funksiyaların qurulması vasitəsilə alınması metodudur (bax, Dayanıqlılıq teoremi; sınaq funksiyaları metodu).

Xidmət sistemlərinin dayanıqlılığının müxtəlif metodlarla analiz edilməsinə baxmayaraq, bu metodlarda ümumi cəhətlər çoxdur və bunlar müəyyən mənada bir-birini tamamlayır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 834–47; [3] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [4] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [5] Калашников В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 571–83; [6] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 1, B., 1983.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; metrik yanaşma « уСТОЙЧИВОСТИ теорема; метрический подход; stability theorem; metric approach » – xidmət sistemlərinin dayanıqlılıq şərtləri və statistik qiymətlərinin alınması üçün ehtimal metrikalarının müxtəlif struktur xassələrindən istifadə edən yanaşmadır. $\{v_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^l$ -dən olan v_i təsadüfi kəmiyyəti ilə təyin olunan və

$$v_{n+1} = f(v_n, u_n), \quad n \geq 1 \quad (1)$$

rekurrent münasibətlərlə təyin olunan ardıcılıq olsun, burada $\{u_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^k$ -dən olan verilmiş təsadüfi ardıcılıqdır. $d(X, Y) \equiv d(F_X, F_Y)$ ilə F_X və F_Y paylanma funksiyaları arasında müntəzəm metrikada məsafə işarə olunmuşdur. Aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər f funksiyası

$$\rho_l(f(u, v), f(u', v')) \leq \rho_l(v, v') + \rho_k(u, u')$$

– Lipsits şərtini ödəyirsə, onda $\{u'_n\}$ ardıcılığı üzrə (1)-in köməyi ilə və v'_i üzrə qurulmuş $\{v'_n\}$ ardıcılığı üçün

$$d(v_j, v'_j) \leq d(v_1, v'_1) + \sum_{i=1}^{j-1} d(u_i, u'_i), \quad j = 2, 3, \dots \quad (2)$$

bərabərsizlikləri ödənilir, burada ρ_l, ρ_k – uyğun olaraq $\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k$ -da məsafələrdir. Əgər təsadüfi kəmiyyətlərin hamısı eyni ehtimal fəzasında verilsə, d metrikası evezinə Ki Fan metrikasından istifadə etdikdə, (2) bərabərsizliklər bu halda da doğrudur. Əgər $\{u_n\}$ və $\{u'_n\}$ ardıcılıqlarındakı təsadüfi kəmiyyətlər küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, (2) bərabərsizlikləri Levi – Proxorov, Dadlı, tam variasiya metrikaları üçün də doğrudur.

Metrikaların xassələri məsələnin strukturunu yaxşı «izləyən» bilir (məs., f funksiyası üçün Lipsits şərtinin ödənilməsinə). Bu əsas etibarilə zamanın sonlu intervallarında dayanıqlılığın analiz olunmasında aşkar olunur.

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 1, B., 1983; [2] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [3] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986, с. 416.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; sınaq funksiyaları metodu « **устойчивости теорема; метод пробных функций; stability theorem; test functions method** » – xidmət sistemlərinin *dayanıqlılıq* şərtləri və statistik qiymətlərinin Lyapunov funksiyaları tipli köməkçi funksiyaların qurulması ilə alınması metodudur.

Sınaq funksiyaları metodunun əsas nəticələri xidmət sistemini təsvir edən $v = f(u)$ prosesi Markov ardıcılığı olduğu haldadır, amma daha ümumi fərziyyələrə də baxılmışdır.

$\{v_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^l$ -dən olan ardıcılıqdır, bu ardıcılıq u_l təsadüfi kəmiyyəti və

$$v_{n+1} = f(v_n, u_n), \quad n \geq 1 \quad (*)$$

rekurrent münasibətləri ilə təyin olunur, burada $\{u_n\}$ – eyni qanunla paylanmış, qiymətləri $\mathbb{R}^k$ -dən olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. $\{v_n^{(r)}\}$ ardıcılıqları hər bir $r=1, 2, \dots$ qiymətlərində $u_l^{(r)}$ təsadüfi kəmiyyəti üzrə qurulur və $\{u_n^{(r)}\}$ ardıcılığı isə $(*)$ -nın vasitəsilə qurulur. ρ_k, ρ_l ilə uyğun olaraq, $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$ -də məsafələr işarə olunmuşdur:

$$\kappa(X, Y) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mathbf{P} \{ \rho_j(X, Y) > \varepsilon \} < \varepsilon \}$$

– qiymətləri $\mathbb{R}^j$ -dən olan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında Ki-Fan metrikasında məsafədir; $j = k, l$; $G(x), x \geq 0$ –

elə artan müsbət funksiyadır ki, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/G(n) < \infty$.

Fərz olunur ki, hər bir $N \geq 0$ üçün elə $\delta = \delta(N)$ ədədi və $W_N(x, y), x, y \in \mathbb{R}^l$ funksiyası vardır ki, birincisi, bütün $x, y \in \mathbb{R}^l$ üçün $W_N(x, y) \geq N_{\rho_l}(x, y)$ və ikincisi, $\kappa(u_1, u_1^{(r)}) \leq \delta$ olduqda

$$W_N(f(x, u_1), f(y, u_1^{(r)})) - W_N(x, y) \leq \Delta_N(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^l$$

bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilir, burada Δ_N təsadüfi kəmiyyətləri $W_N(x, y) \geq 1$ olduqda

$$\mathbf{M} \Delta_N(x, y) \leq -1$$

və

$$\sup_{x, y} \mathbf{M} G(|\Delta_N(x, y)|) \leq C < \infty$$

münasibətlərini ödəyirlər. Belə bir hökm doğrudur: $r \rightarrow \infty$ olduqda $\kappa(u_1, u_1^{(r)}) \rightarrow 0$ və $\kappa(v_1, v_1^{(r)}) \rightarrow 0$ olsun; onda $r \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_{n \geq 1} \kappa(v_n, v_n^{(r)}) \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilir. Levi – Proxorov metrikası və bezi digər metrikalar üçün analogi münasibətlər ödənilir.

Bu hökmün şərtlərində dayanıqlılıq üçün aşağıdakı kəmiyyəti statistik qiymət doğrudur: $\kappa(u_1, u_1^{(r)}) < \delta_1(\varepsilon)$ olduqda

$$\sup_{n \geq 1} \kappa(v_n, v_n^{(r)}) < \varepsilon,$$

burada $\delta_1(\varepsilon) = \delta(N(\varepsilon)), N(\varepsilon), -$

$$\inf_T \{ T\sqrt{C/N} + C_1 \sum_{n \geq T} 1/G(n) \} = \varepsilon$$

tənliyinin həlli, C_1 isə yalnız C və G -dən asılıdır.

Sınaq funksiyalarının effektiv surətdə tətbiq olunması üçün mühüm addım bu funksiyaların qurulmasıdır. Hissevi xətti çevirmələrin doğruluqları və xidmət sistemləri nezeriyyəsində mühüm rolə malik olan Markov zəncirləri sinfi üçün sınaq funksiyalarının qurulmasının rəqulyar metodu vardır. Sınaq funksiyaları metodundan kütləvi xidmət proseslərinin məhdudluğu, çatım anlarının və digər xassələrin qiymətləndirilməsində istifadə etmək olar.

Əd.: [1] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [2] К а л а ш н и к о в В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 571–83.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; yeniləşmələr metodu « **устойчивости теорема; метод обновлений; stability theorem; renovations method** » – «idarəedici» ardıcılıqların dəyişmələrinə nəzərən təsadüfi prosesin *dayanıqlılıq* şərtləri və qiymətlərini almaq üçün metoddur və təsadüfi prosesin öz keçmişini qismən «unutqanlıq» xassəsindən istifadə edir (yeni təsadüfi proses müəyyən bir çoxluğa daxil olduqda öz keçmişindən asılı olmur).

Fərz olunur ki, $v = \{v_n\}$ prosesi (ardıcılığı) stasionar «idarəedici» $u = \{u_n\}$ ardıcılığı ilə

$$v_{n+1} = f(v_n, u_n), \quad n \geq 1 \quad (*)$$

münasibətlərlə əlaqəlidir.

$A_n, - [n-L, n]$ parçasında v ardıcılığı üçün *yeniləşdirici hadisə* olsun. Belə bir hökm doğrudur: əgər indikatorlar ardıcılığı $\{I(A_n)\}$ stasionardırsa, $\mathbf{P}(A_0) > 0$ olarsa, onda $w_{k+1} = f(w_k, u_k)$ bərabərliklərini ödəyən elə $w = \{w_n\}$ ardıcılığı vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P} \{ \{v_{n+k}\} \in B \} \rightarrow \mathbf{P} \{ \{w_k\} \in B \}$$

münasibəti ödənilir.

Daha sonra, fərz olunur ki, $\{u^{(r)}\}$ – məlum menada (məs., sonluölçülü paylanmaların zəif yığılması menada) u prosesinə yığılan stasionar idarəedici proseslər ardıcılığı; $\{v^{(r)}\}$ $(*)$ münasibətilə $u^{(r)}$ idarəedici prosesləri üzrə təyin olunan proseslər ardıcılığı; $\{A_n^{(r)}\}$ $\{v^{(r)}\}$ prosesləri üçün yeniləşdirici proseslər ardıcılığı; $\{w^{(r)}\}$ $\{v^{(r)}\}$ üçün limit stasionar proseslər ardıcılığıdır. Onda, əgər indikatorlar ardıcılığı $\{I(A_n)\}$ stasionar və $\mathbf{P}(A_0) > 0$ olarsa,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{j=0}^k A_j^{(r)} \right\} \geq \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{j=0}^k A_j \right\}$$

münasibəti ixtiyari $k > 0$ qiymətində ödənilərsə və yeniləşdirici hadisələrin tərifindəki φ_j funksiyaları $(u_1, \dots, u_{L+j})$ -nin paylanmasına nəzərən sanki yəqin kəsilməz olarlarsa, onda $w^{(r)}$ -in

sonluölçülüyü paylanmaları $r \rightarrow \infty$ olduqda w -nin paylanmalarına zəif yığılır.

D. t.-də kəmiyyətce qiymətləndirilmələr də mümkündür, məs.,

$$\sup_{n \geq 1} d(v_n, v_n^{(r)}) \leq \min_T \max \left\{ \sup_{j \leq T+L} d(v_j, v_j^{(r)}), \right. \\ \left. \sup_{n \geq T+L} d(\varphi_T(u_{n-T-L}, \dots, u_{n-1}), \varphi_T(u_{n-T-L}^{(r)}, \dots, u_{n-1}^{(r)})) + \right. \\ \left. + 2 \sup_{n \geq 1} \left[P \left\{ \bigcup_{j=n-T}^{n-1} A_j \right\} + P \left\{ \bigcup_{j=n-T}^{n-1} A_j^{(r)} \right\} \right] \right\},$$

burada d – Dadli metrikaçıdır. Bu qiymət $d(w_1, w_1^r)$ məsafəsi üçün də doğrudur. Digər metrikalarda da analogi qiymətlər almaq mümkündür. $\{u_n\}$ və $\{I(A_n)\}$ ardıcılıqları stasionar olmadıqları hallarda da oxşar növ qiymətlər almaq olur.

Yuxarıda verilən qiymətlərin birinci iki həddi, öz növbəsində, ehtimal metrikalarının xassələrinin köməyiylə qiymətləndirilməyə rahat və münasibdir, lakin sonuncu hədd v və v^r proseslərinin cəlasdınması metodu (bax, *Cəlasdınma (l)ma(sı) təsadüfi proseslərinin*), çatım müddətlərinin qiymətləndirilməsi metodu ilə qiymətləndirilir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Калашников В. В., в об.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1980, с. 52–57.

DAYANMA ANI « ОСТАНОВКИ МОМЕНТ; stopping time » Markov anı, – t -nin bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ şərtini ödəyən, σ – cəbrlər axını $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ olan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş mənfi olmayan $\tau = \tau(\omega)$ (sonlu və sonlu olmayan) təsadüfi kəmiyyətdir. Əgər $t \geq 0$ şərtini ödəyən bütün t -lər üçün $\{\omega: \tau'(\omega) < t\} \in \mathcal{A}_t$ münasibətini ödəyən mənfi olmayan τ' təsadüfi kəmiyyəti varsa, onda τ' təsadüfi kəmiyyəti $\{\mathcal{A}_{t+}, t \geq 0\}$ axınına nəzərən D. a.-dır, burada $\mathcal{A}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$. Sağ-

dan kəsilməz $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ tam σ – cəbrlər axınına nəzərən D. a.-na misal –

$$\tau_T(\omega) = \inf \{t \geq 0: \zeta(t; \omega) \in \Gamma\}$$

kəmiyyətdir, burada $\zeta(t; \omega)$ təsadüfi prosesi $(M, \mathfrak{B})$ fəza fəzasında $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ axınına nəzərən progressiv ölçüləndir və $\Gamma \in \mathfrak{B}$ (adətən, $\inf \{\emptyset\} = +\infty$ olduğu fərz olunur).

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости в случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

*** DAYANMA ANI** axına nəzərən « **ОСТАНОВКИ МОМЕНТ** относительно потока; **stopping time** relatively to flow » – təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin anlayışlarından biridir: τ – mənfi olmayan, $+\infty$ qiymətini ala bilən, $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət olarsa və bütün $t \geq 0$ üçün $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ olarsa, $\tau, -\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ axınına nəzərən D. a. adlanır. D. a.-ları

Markov anları və ya gələcəkdən asılı olmayan momentlər də adlandırılır.

$(0, \infty)$ -da təyin olunmuş hər bir $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ilə bağlı onunla uzlaşan axın təyin etmək olur. Fərz olunur ki, t anına qədər prosesin trayektoriyaları yalnız $[0, t]$ müddətində müşahidə olunur. Onda təbii olaraq $\mathfrak{F}_t, \sigma$ – cəbri kimi $\{\zeta(s) \in B\}, s \leq t, B \in \mathfrak{B}$ hadisələrinin doğurduğu σ – cəbr götürülür, burada $(X, \mathfrak{B}), -\zeta(t)$ prosesinin fəza fəzasıdır. $t \geq 0$ qiymətləri üçün təyin olunmuş $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \sigma$ – cəbrlər toplusu

a) $\mathfrak{F}, \sigma$ – cəbri P ölçüsünə görə tam σ – cəbrdir (yəni, əgər $A \in \mathfrak{F}, P(A) = 0$ və $B \subset A$ münasibətindən $B \in \mathfrak{F}$ münasibəti ödənilirsə, $\mathfrak{F}, \sigma$ – cəbri P ölçüsünə görə tam σ – cəbrdir) və ehtimalı sıfır bərabər bütün hadisələr $\mathfrak{F}_0, \sigma$ – cəbrindədir;

b) $0 \leq s < t$ şərtini ödəyən bütün s və t qiymətlərində $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ münasibəti ödənilir ($\mathfrak{F}_t, t$ -nin artması ilə monoton artır);

c) bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$ ($\mathfrak{F}_t, -t$ üzrə sağdan kəsilməzdir) şərtlərini ödəyirsə, $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ çoxluğu σ – cəbrlər axını adlanır.

Əgər $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ axını hər hansı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin doğurduğu axındırsa, onda D. a.-ları $\zeta(t)$ prosesinin $[0, \tau]$ parçasında vəziyyəti ilə təyin olunur. Məs., $\zeta(t)$ – kəsilməz təsadüfi proses olarsa, D. a.-ları prosesin hər hansı qapalı çoxluğa çatma anları olur.

$\tau, -\{\mathfrak{F}_t\}$ axınına nəzərən D. a. olsun. τ ilə bağlı σ – cəbr, bütün $t \geq 0$ üçün $\{\tau \leq t\} \cap A \in \mathfrak{F}_t$ şərtini ödəyən $A \in \mathfrak{F}$ çoxluqlarının σ – cəbri $\mathfrak{F}$ olsun; $\mathfrak{F}_\tau, \sigma$ – cəbri τ anına qədər (τ anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğudur. $\mathfrak{F}_{\tau-}, \sigma$ – cəbri $A_t \in \mathfrak{F}_t, A_t \cap \{\tau > t\}$ tipli hadisələrin doğurduğu σ – cəbr olsun, onda $\mathfrak{F}_\tau, \sigma$ – cəbri τ anından əvvəlki bütün anlarda baş verən hadisələr σ – cəbridir.

Axına görə D. a.-ları və onlarla bağlı σ – cəbrlərə aid bəzi xassələr aşağıda qeyd olunur.

1) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa, onda $\tau_1 \vee \tau_2$ və $\tau_1 \wedge \tau_2$ təsadüfi kəmiyyətləri də D. a.-larıdır.

2) əgər τ_n ($n = 1, 2, \dots$) – D. a.-larıdırsa, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ kəmiyyətləri də D. a.-larıdır.

3) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa, $\tau_2 < \infty$ olduqda $\tau_1 \leq \tau_2$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau_1-} \subset \mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau_2-} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$ münasibəti doğrudur.

4) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa və $\tau_1 \leq \tau_2$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau_1-} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2-}, \mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$ münasibəti doğrudur.

5) eger τ_n D. a.-dırsa və $\tau_n \downarrow \tau$ münasibəti ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_\tau = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$; eger $\tau_n \uparrow \tau$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau-} = \bigcup_n \mathfrak{F}_{\tau_n-}$ münasibətləri doğrudur.

6) eger τ_n D. a.-dırsa və $\tau_n \downarrow \tau$, $\tau_n > \tau$ münasibətləri $\tau < \infty$ olduqda ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_\tau = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n-}$; eger $\tau_n \uparrow \tau$, $\tau_n < \tau$ münasibətləri $\tau < \infty$ olduqda ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_{\tau-} = \bigcup_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$ münasibətləri doğrudur.

7) eger τ_1 və τ_2 D. a.-landırsa, onda $A \in \mathfrak{F}_{\tau_2}$ üçün

$$A \cap \{\tau_2 \leq \tau_1\} \in \mathfrak{F}_{\tau_1}, \quad A \cap \{\tau_2 < \tau_1\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}$$

münasibətləri doğrudur.

Bu xassələrdən aydındır ki, D. a. ilə bağlı σ – cəbrlər τ -nin təsadüfi olmadığı haldakı $\mathfrak{F}_\tau$ σ – cəbrləri kimi olur (bu halda $\mathfrak{F}_{\tau-} = \bigcup_{s < \tau} \mathfrak{F}_s$).

Əgər ehtimal τ_n D. a.-ları ardıcılığı varsa ki, bu ardıcılıq üçün $\tau_n < \tau$ və $\tau_n \rightarrow \tau$ münasibətləri ödənilir, onda τ -yə öngörül dayanma anı deyilir. Öngörül D. a. olmayan hər bir dayanma anı öngörülmez D. a. adlanır.

Misal. $\{\mathfrak{F}_t\}$, $-\{\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_+, \mathbf{P}\}$ ehtimal fəzasında verilmiş $\zeta(\omega, t) = \mathbf{I}_{(t > \omega)}$ təsadüfi prosesinin doğurduğu axın olsun, burada $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathfrak{B}_+$ $\mathbb{R}_+$ -in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbri, $\mathbf{P}$, $-\mathfrak{B}_+$ -də təyin olunmuş, atomları olmayan hər hansı ehtimal ölçüsüdür. Onda $\tau(\omega) = \omega$ dayanma anıdır, lakin öngörülmez D. a.-dır.

Öngörül D. a.-nın xassələri aşağıdakılardır:

8) eger τ^* öngörül D. a. və τ D. a.-dırsa, onda $A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ olduqda

$$A \cap \{\tau^* \leq \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}, \quad \{\tau^* \leq \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}, \\ \{\tau^* = \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}$$

münasibətləri doğrudur.

9) τ_n öngörül D. a. və $\tau_n \uparrow \tau$ olarsa, onda τ öngörül D. a.-dır; eger $\tau_n \downarrow \tau$ olarsa və $\tau_n = \tau$ bərabərliyi kifayət qədər böyük n -lər üçün ödənilərsə (belə n , ümumiyyətlə, təsadüfidir), onda τ – öngörül D. a.-dır.

τ – hər hansı D. a., $A \in \mathfrak{F}$ olsun.

$$\tau_A = \begin{cases} \tau, & \omega \in A, \\ +\infty, & \omega \notin A \end{cases}$$

olduğu fərz olunur.

10) τ öngörül D. a.-dırsa, onda τ_A öngörül D. a., yalnız və yalnız, o halda olur ki, $A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ olsun.

Əgər öngörül D. a. τ üçün $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_{\tau-}$ olarsa, onda σ – cəbrlər axını soldan kvazikesilməz axın adlanır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. второе, М., 1985.

DAYSON PAYLANMASI « Дайсона распределение; Dyson distribution » – *Viqner paylanması* ümumiləşməsidir; ortoqonal invariant Viqner ansamblından (unitar ansambl və b.) fərqli digər invariantlıq xassələrinə malik matrislərin təsadüfi ansambllarında paylanmanın limit spektral sıxlığını xarakterizə edən Viqner paylanmasının ümumiləşməsidir. D. p. üçün seçiyəvi olan keyfiyyət effekti spektral səviyyələrin kənarlaşdırılmasıdır. D. p. Viqner paylanması kimi ağır nüvələrin spektrlərinin təsviri ilə bağlı yaranır.

DEBÜTÜ, ÇOXLUĞUN « дебют множества; debut of a set », $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının ixtiyari altçoxluğu A -nın debütü, –

$\omega \in \Omega$ olduqda $D_A(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$ bərabərliyi ilə verilən D_A funksiyasıdır, bu şərtlə ki, $\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$ boş çoxluq olmasın (yeni eger verilmiş ω üçün ehtimal $t \in \mathbb{R}_+$ vardır ki, $(t, \omega) \in A$); eger verilmiş ω üçün bu çoxluq boş çoxluq olarsa, onda $D_A(\omega) = +\infty$ hesab olunur. D. haqqında əsas nəticə ondan ibarətdir ki, eger $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlər axını sağdan kəsilməzdirsə və $\mathcal{A}_t$ -yə daxil olan hər bir σ – cəbr $\mathbf{P}$ ölçüsünə görə tam σ – cəbrdirsə, onda $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının ixtiyari progressiv ölçülən altçoxluğunun debütü $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən Markov anıdır. Bax, *Progressiv ölçülən proses*.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с англ., М., 1975.

DEFEKT « недоскок; defect », çatım müddəti $\eta(t)$ – semi – Markov prosesi $\zeta(t)$ -nin t anından əvvəlki sonuncu bərpə anından sonra keçən müddətdir:

$$\eta(t) = t - \sup \{s \leq t : \zeta(s) \neq \zeta(t)\}.$$

D. semi – Markov prosesi ilə birlikdə $(\zeta(t), \eta(t); t \geq 0)$ xətti Markov prosesini əmələ gətirir. Xüsusi halda, paylanma funksiyası $G(t) = \mathbf{P}\{\theta_k \leq t\}$, riyazi gözləməsi sonlu $\mathbf{M}\theta_k = m$ olan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 1$$

bərpə prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s)) ds / m$$

olan stasionar D. mövcuddur.

DEFEKT asimptotik «дефект асимптотический; asymptotic deficiency» – bax, *Defekt(i) kri-terinin*.

DEFEKT(i) dolaşmanın, çatım «дефект блуждания, недоскок; defect of a random walk/spent waiting time» – dolaşma prosesindəki hissəciyin sərhədi ilk keçmə anındakı vəziyyətindən əvvəlki vəziyyəti ilə sərhəd arasında məsafəsidir. S_n , $n = 0, 1, \dots$ – birölçülü təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası, $g(n)$ – verilmiş sərhəd olsun.

$$\gamma_d = g(\eta_d) - S_{\eta_d-1}$$

kemiyetli dolaşma defekti (çatım müddəti) adlanır, burada $\eta_g = \inf \{k \geq 1: S_k \geq g(k)\}$ – sərhədi ilk keçmə anıdır.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kemiyetlərinin sonlu cəmlərinin doğurduğu $S_0 = 0, S_1 = \xi_1, S_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots, S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ təsadüfi dolaşması və düzxətli sərhədlər üçün γ_g D. ətrafı sürətdə araşdırılmışdır [$\chi_g = S_{\eta_g} - g(\eta_g)$ – təsadüfi dolaşmanın e k s s e s i (ö t ü m m ü d d e t i) d e]. Düzxətli sərhədlər halında $g(t) = x = \text{const}$ olduqda γ_g, χ_g, η_g funksionalları $\gamma(x), \chi(x), \eta(x)$ ilə işarə olunur. ξ_k toplananları mənfi olmayan təsadüfi kemiyetlər olduğu halda, $\gamma(x) = \gamma_g, \chi(x) = \chi_g$ təsadüfi kemiyetlərinin birgə paylanması araşdırılması –

$$\{\gamma(x) \geq u, \chi(x) > v\} = \{\chi(x-u) > u+v\}$$

münasibətinə əsasən $\chi(x)$ -in, yeni təsadüfi dolaşmanın eks-sesinin öyrənilməsinə gətirir. Qeyd olunan münasibət $P\{\gamma(x) > u, \chi(x) > v\}$ ehtimalını $x \rightarrow \infty$ olduqda hesablaşmağa imkan verir (bax, [1] – [3]).

Əgər $a = M\xi_k < \infty, 0 < \sigma^2 = D\xi_k < \infty, \xi_k \geq 0$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə isbat olunur ki, $n \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\eta(x) = n, \gamma(x) \geq u, \chi(x) \geq v\} = \frac{1}{\sqrt{x\sigma^2 a^{-3}}} \varphi\left(\frac{n - x/a}{\sqrt{x\sigma^2 a^{-3}}}\right) \frac{1}{a} \int_{u+v}^{\infty} P\{\xi_1^* \geq t\} dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

münasibəti doğrudur, burada $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$,

ξ_1^* – normalanmış təsadüfi kemiyətdir (bax, [4]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Дынкин Е. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1955, т. 19, с. 247–66; [4] Гагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410–11.

ДЕФЕКТ(i) критерийн «**дефект критерия; deficiency of a test**» – статистик критерийн (дaha dəqiq, критерийlər ardıcılığıнын) digər kriteriyə görə müqayisə xarakteristikası olub, 1-ci və 2-ci növ səhvlərin eyni α və ω ehtimalları ilə alınmasını təmin edən birinci və ikinci kriteriyələr üçün zəruri olan seçim həcmlərinin fərqi – $d_n = k_n - n$ ilə təyin olunur, burada k_n – birinci kriteri üçün, n – ikinci kriteri üçün seçimin həcmidir. Adətən, ele məsələlər ardıcılığına baxılır ki, bunlarda α və ω qeyd olunduqda, seçim həcmi n və k_n qeyri – məhdud artır; eger bu halda d_n D.-nin limiti $d = \lim d_n$ olarsa, onda d asimptotik defekt adlanır. d_n və d -nin qiymətləri, ümumiyyətlə, tam olmur; seçim həcmi k_n -in tam olmayan qiymətinə «stoxastik interpolasiya» ilə mənə verilir: kriteri 1– γ və γ ehtimalları ilə $[k_n]$ və ya $[k_n] + 1$ sayda müşahidədən istifadə edir, $\gamma = k_n - [k_n]$. İki kriteriinin Pitmen asimptotik nisbi

effektivliyi 1-ə bərabər olduqda, D.-in asimptotikası daha nümunəvi olur, yeni $k_n/n \rightarrow 1$ olur (bax, *Asimptotik effektivlik* (y i) kriteriinin). Seçim həcmlərinin nisbətindən fərqlə keçmək kriteriinin xassələrindəki fərqləri bu halda aşkar etməyə imkan yaradır.

İkinci hipotezə yaxınlaşan alternativ hipotezlərdə, ən güclü kriteriyələr ardıcılığına nəzərən asimptotik effektivliyi 1-ə bərabər asimptotik effektiv kriteriyələrin D.-nin öyrənilməsi xüsusi maraq doğurur. Bu xassə onu ifadə edir ki, $d_n = o(n)$, lakin, aydın olmuşdur ki, asimptotik effektiv kriteriyələrin bir çoxunun D. sonludur.

Asimptotik D.-in tapılması asimptotik nisbi effektivliyin tapılmasına deyil, kriteri gücünün daha incə asimptotikasına əsaslanır. Məs., ümumi paylanmaya malik asılı olmayan müşahidələr üzrə $\theta > \theta_0$ alternativinə qarşı $\theta = \theta_0$ hipotezi yoxlanılır və müşahidələrin ümumi paylanmalarının θ -dan ($\theta \in \mathbb{R}$) kifayət qədər asılı $p(x, \theta)$ sıxlığının varlığı fərz olunur. Müşahidələrin sayı n və alternativ hipotez $\theta = \theta_0 + t n^{-1/2}$, $t > 0$ olduqda, kriteriinin gücü $\beta_{n,t}$ -nin limiti bu alternativ hipotez üçün digər daha güclü kriteriinin gücü $\bar{\beta}_{n,t}$ -nin limitinə bərabər olarsa, onda kriteri asimptotik effektiv kriteri olur ($\alpha > 0$ qeyd olunduqda). Əgər bu halda $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\bar{\beta}_{n,t} - \beta_{n,t}) = r(t)$ limiti mövcuddursa, onda asimptotik D. sonludur və o,

$$d = 2r(t(\alpha, \omega)) / (u_\alpha + u_\omega) \varphi(u_\omega)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, $t(\alpha, \omega) = I^{-1/2}(\theta_0)(u_\alpha + u_\omega)$, $I(\theta) = M[\partial \ln p(X, \theta) / \partial \theta]^2$ (F i - ş e r i n f o r m a s i y a s ı). Φ və φ uyğun olaraq, standart normal qanunun paylanma funksiyası və paylanmanın sıxlıq funksiyasıdır.

$\beta_{n,t}$ və $\bar{\beta}_{n,t}$ öz ümumi limitlərindən $n^{1/2}$ tərtib hədlərlə fərqlənir. Beləliklə, D.-nin sonlu olması bu hədlərin bərabər olduğunu təxmin edir. Bu xassəli kriteriyələr 2-ci tərtib asimptotik effektiv kriteriyələr adlanır. Daha geniş ümumi şərtlərdə asimptotik effektiv kriteriyələr 2-ci tərtib asimptotik effektiv kriteriyələrdir. 3-cü tərtib asimptotik kriteriyələrə $r(t) \equiv 0$, yeni $d = 0$ olan, şərtini ödəyən kriteriyələrə yalnız ele məsələlərdə təsadüf olunur ki, bu məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriteriinin varlığı mümkün olsun.

D. anlayışı [1]-də daxil olunmuşdur. D.-in və müxtəlif kriteriyələr sinifləri üçün onunla bağlı xassələrin öyrənilməsi 20-ci əsrin 70-ci illərinə təsadüf edir (bax, [2] – [4]). [5]-də $\beta_{n,t}$ və $\bar{\beta}_{n,t}$ üçün asimptotik ayrılışın tələb olunmadığı hesablanmışdır, qaydaları təklif olunmuşdur. Asılı müşahidələr üçün (Markov zənciri) bəzi kriteriyələrin D.-ləri [6]-də alınmışdır.

Əd.: [1] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 3, p. 783–801; [2] Pfan z a g l J., в сб.: Developments in statistics, v. 3, N. Y. – [a. o.], 1980, p. 1–97; [3] Чибисов Д. М., «Изв. АН УССР. Сер. физ.-мат. наук», 1982, № 5, с. 18–26; № 6, с. 23–30; [4] Чибисов Д. М., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Warszawa. 16–24. Aug., 1983, v. 2, Warsz., 1984, p. 1063–79; [5] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 269–88; [6] Малиновский В. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 3, с. 491–504.

DEKODLAMA « декодирование; decoding » – qəbul edən tərəfindən məlumatı verilmiş formada bərpa edən, *kodlama*-ya tərs çevirmədir. D. nəzəriyyəsinin problematikasını qəbul edən təyin etdiyi tələbləri ödəyən D. metodlarının qurulması təşkil edir. Belə tələblərə, məs., *məlumatların bərpası dəqiqliyini*, D.-nin müəkkəbliyini (bax, *Müəkkəblilik(yi)*) *kodlama* və *dekodlama* nın) və D.-nin gecikməsinə aid etmək olar. Dəqiqlik tələbi məlumatın tamamilə (olduğu kimi) bərpası, *L* sayda məlumat arasında əsl məlumatı özündə saxlayan siyahının göstərilməsi (siyahı D.-si), ε -dan böyük olmayan ($\varepsilon > 0$) orta riskli məlumatın bərpası kimi ifadə oluna bilər. Məs., əgər məlumat X təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda belə tələblər: $P\{\tilde{X} \neq X\} \leq \varepsilon$ – xətanın ehtimalının ε -dan böyük olması; $M(\tilde{X} - X)^2 \leq \varepsilon$ – kvadratik orta riskin ε -dan böyük

olmaması kimi ifadə oluna bilər (burada $\tilde{X}$ – bərpa olunmuş məlumatdır).

Kodlama və D. üçün rabitə kanalı ilə informasiya ötürülməsini və ya verilmiş şərtlərlə onun bərpa dəqiqliyinin saxlanılmasını təmin edən metodların varlığı və ya mövcud olmaması Şennon teoremləri ilə müəyyən olunur. Statistik və qeyri – statistik çoxsaylı müxtəlif D. metodlarından statistik D. metodları kimi doğruya oxşarlıq maksimumu, aposterior ehtimalın maksimumu üzrə dekodlama metodlarını, *ardıcıl dekodlamayı* və s.-ni qeyd etmək olar. Bunda başqa, çoxsaylı kombinator və cəbri D. metodları: məsafənin minimumu üzrə, majoritar, hədd, Berlekamp alqoritmilə dekodlama və s. metodlar da vardır.

Dekodlamanın fundamental xarakteristikası D.-ni reallaşdıran qurğunun (dekoderin) müəkkəbliyi. Lakin konkret məsələdən asılı olaraq müəkkəblilik müxtəlif anlamda yaranır və onun ölçüsü də müxtəlif şəkildə anlaşılır. Məs., $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ hərflər ardıcılığının (kanalın çıxışında siqnalların) D.-sində $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$ bərpa olunan məlumatlar ardıcılığının alınmasında dekoderin riyazi modeli kimi, adətən, ele funksional elementlərin sxemi götürülür ki, bunların girişinə $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ simvolları daxil olur, çıxışında isə $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$ alınır; bu halda dekoderin müəkkəbliyi sxemin elementlərinin sayı ilə təyin olunur. Bu halda D.-nin müxtəlif kodlarının müəkkəbliyini qiymətləndirmək olur və nisbətən az müəkkəb olan kodları götürmək olur (məs., azsıxlıqlı kodlar). Müəkkəblilik anlayışına qurğunun yaddaşının tutumu da aiddir ki, ondan D.-də istifadə olunur.

D. nəzəriyyəsinin ideya və nəticələri tətbiqi riyaziyyatın müxtəlif məsələlərində, məs., etibarlı informasiya qurğularının sintezində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Вазенкрафт Дж. – М., Рейфен Б., Последовательное декодирование, пер. с англ., М., 1963; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Галлагер Р., Коды с малой плотностью проверок на четность, пер. с англ., М., 1966; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] Мессис Дж., Пороговое декодирование, пер. с англ., М., 1966.

DEKODLAMA ardıcıl « декодирование последовательное; sequential decoding » – bax, *Ardıcıl dekodla(n)ma*.

DEKODLAMA cəbri « декодирование алгебраическое; algebraic decoding » – bax, *Cəbri dekodlama*.

DEKODLAMA müəkkəbliyi « декодирования сложность; complexity of decoding » – bax, *Müəkkəblilik(yi)* kodlama və dekodlamanın.

DEKODLAMA siyahı ilə « декодирование списочное; list decoding » – bax, *Siyahı dekodlaması*.

DEKODLA(N)MA(sı) blok « декодирование блоковое; block decoding » – bax, *Blok dekodla(n)ması*.

DEKODLA(N)MA doğruya oxşarlıq maksimumu üzrə « декодирование по максимуму правдоподобия; maximum likelihood decoding » – *dekodlama* üçün ehtimal modelidir; əgər $\tilde{y}$ – rabitə kanalı ilə x məlumatını ötürmə nəticəsində alınan siqnal, $p(\tilde{y}|x)$ – keçid funksiyasıdırsa, onda bərpa olunan məlumat $\tilde{x} = \arg \max_x p(\tilde{y}|x)$ bərabərliyindən təyin olunur. Əgər ötürülən bütün məlumatların aprior ehtimalları bərabərdirsə, onda doğruya oxşarlıq maksimumu üzrə D. səhvinin xətası ehtimalını minimallaşdırır. Konkret blok kodlarının D.-sində doğruya oxşarlıq maksimumu üzrə yalnız az uzunluqlu blok üçün istifadə oluna bilər, çünki, belə dekodlamanın gücü blokun uzunluğunun çoxalması ilə eksponensial sürətdə artır (belə ki, doğruya oxşarlıq maksimumu üzrə D.-dan istifadə etmək üçün kod sözələrinin yoxlanılması tələb olunur).

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

DEMODYASIYA « демодуляция; demodulation » – bax, *Modulyasiya* və *demodulyasiya*.

DEMODYASIYA kompleks « демодуляция комплексная; complex demodulation » – bax, *Kompleks demodulyasiya*.

DEMOQRAFİK STATİSTİKA « демографическая статистика; demographic statistics » – əhalinin və ya onun qruplarının sayını, tərkibini, yerləşdirilməsini və artımını xarakterizə edən məlumatların toplanılması, onların üzərindən yenidən işlənilməsi, şərh və analizi üçün tətbiq olunan statistik metodlarla məşğul olan riyazi statistikanın obladıdır. «D. s.» termini əhali haqqında ədədi məlumatlar toplusu və bəzən də bu məlumatların toplanılması, onların yenidən işlənilməsi və analizi üzrə praktiki fəaliyyət də adlandırılır.

D. s. əhali haqqında iki tip məlumatlardan istifadə edir: bütün əhalinin sayı və əhalinin ayrı-ayrı demoqrafik və ictimai – iqtisadi qruplarının müxtəlif zaman anlarındakı məlumatlardan, əhalinin və ya onun ayrı-ayrı qruplarında müəyyən zaman intervallarıda demoqrafik hadisələr sayı haqqında məlumatlardan. Əhalinin əsas demoqrafik xarakteristikaları cins, yaş, evli olub-olmaması, övladlarının sayı və s. kimi əlamətlər üzrə paylanmalardır. D. s. təhsil, etnik mənsubiyyət, ixtisas kimi sosial xarakteristikalardan da istifadə edir.

Əhali haqqında məlumatların toplanılması və onların araşdırılması sxemi D. s.-nin əsasını təşkil edən demoqrafik hadisələrin xüsusi qayda ilə hesablanmış tezliklərindən ibarət demoqrafik proseslərin intensivlik göstəriciləri ilə təyin olunur. İntensivlik göstəriciləri yaşın (ömrün) və ya başqa bir demoqrafik vəziyyətin müddətinin funksiyası kimi anlaşılır, məs., nığahda olma müddəti, sonuncu uşağın doğulmasından sonra keçən müddət, müəyyən bir bölgədə yaşama müddəti. Göstəricilər ya müəyyən bir təqvim dövrü (*eninə analiz*) və ya hər hansı bir nəsil – keçmişin müəyyən bir dövründə doğulanlar toplusu və ya kohortlar (müəyyən əlamətlərinə görə birləşmiş insan qrupu) – müəyyən dövr ərzində müəyyən hər hansı bir vəziyyətə görə birləşmiş insan toplusu, məs., ailə quranlar və ya ayrılanlar üçün nəzərdə tutulur (*uzununa analiz*). İntensivlik göstəriciləri bir qayda olaraq, τ intervalları üçün hesablanır; bu intervalların uzunluqları x -lər tamqiymətli illərin sayı ilə intervalın boyuna bərabər addımla götürülür (τ , adətən, 1 və ya 5 il, nadir hallarda

4; 10; 15 il nəzərdə tutulur). Bəzi xüsusi hesablamalarda addımın boyu 1 ay götürülür. Böyük yaş intervalları üçün və ya yaşların bütün şkalası üçün nəzərdə tutulan göstəricilər də tətbiq olunur. Yaş intervallının artması ilə hesablama nəticələri əhalinin yaş tərkibindən daha çox asılı olur, bu asılılığın eliminasiyası (aradan qaldırılması) üçün *standartlaşdırma metodu* tətbiq olunur.

İntensivlik göstəricilərinin iki tipi daha çox istifadə olunur. Demografik hadisənin

$${}_t h_x = {}_t K_x / P_x \quad (1)$$

düsturu ilə verilən ehtimalı belə göstəricilərin bir tipidir, burada ${}_t K_x$ – x -dən $x + \tau$ anına qədər intervalda (məs., bu yaş götürülə bilər) əhalinin baxılan qrupu üçün hadisələr sayı, P_x – onların potensial iştirakçıların sayıdır. Məs., ölüm ehtimalını müəyyən bir real qrup üçün x -dən $x + \tau$ -ya qədər yaş üzrə hesabladığda D. s.-da bu ehtimal ${}_t q_x$ ilə işarə olunur; yaş həddi x -dən $x + \tau$ -ya qədər olan ölənlərin sayı ${}_t K_x$ ilə, x yaşına qədər yaşayanların sayı P_x ilə işarə olunur. Ananın yaşı üzrə və ya nığah müddəti üzrə uşağın doğulması analogi təyin olunur. İki və ya daha çox zaman müddətini nəzərə alan mürekkəb göstəricilərdən daha az istifadə olunur.

Daha sonra

$${}_t K_x = {}_t K_x / {}_t T_x \quad (2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan demografik prosesin əmsalı (intensivlik), məs., ölüm əmsalı, doğum əmsalı digər tip göstəricilərdəndir; burada ${}_t T_x$ – $(x, x + \tau)$ intervalında demografik hadisələri yaşamış potensial iştirakçıların toplusunun yaşadığı insan–zaman həyat sayıdır. Praktiki hesablamalarda ${}_t T_x$ kəmiyyəti təqribi hesablanılır və $(x, x + \tau)$ intervalının mərkəzi ilə üst-üstə düşən zaman anında toplusdakı iştirakçıların sayının intervalın uzunluğu τ -ya hasil ${}_t T_x$ kimi götürülür. D. s.-da intensivlik göstəricilərinin ehtimalları və əmsalları kimi göstəricilərə bölgüsü bezen pozulur. «Kiçik yaşda ölüm əmsalı» termini, adətən, ölüm ehtimalı ${}_1 q_0$ adlandırılır. «Əmsal» termini kumulyativ xarakteristikalar üçün də istifadə olunur. İki vaxt şkalası – təqvim vaxtı və vəziyyətin müddəti – müəyyən çətinliklər yaradır, belə ki, t -ci ildə, yeni $(t, t + 1)$ intervalında doğulmuş adam $t + x$ -ci ildə ölmüşdürsə, $(x \geq 1 - \text{illərin tam sayıdır})$, aydındır ki, burada $x - 1$ ilə x arasında yaşda olduğu kimi x -lə $x + 1$ arasında yaşda da ölə bilər.

Hesabat sistemində əsasən əhali haqqında məlumatlar və hadisələr sayı haqqında tam mənada müqayisə həmişə mümkün olmur; buna görə də, zaman daxilindəki demografik hadisələrin və yaş intervalllarının müntəzəm paylanmaya malik olması haqqında hipotezlərə əsaslanan təqribi düsturlardan istifadə edilir. $t, t + 1$ iki təqvim ili ərzində əhalidə ${}_t k_x^{t, t+1}$ əmsalının hesablanması üçün

$${}_t k_x^{t, t+1} = ({}_t K_x^t + {}_t K_x^{t+1}) / 2 \cdot {}_t S_x^{t+1}$$

standart düsturu məlumdur, burada ${}_t K_x^t$ – t təqvim ilində $x, x + \tau$ yaşları intervalındakı hadisələrin sayı, ${}_t S_x^{t+1}$ – $t + 1$ -ci ilin başlanğıcında uyğun qrupdakı əhalinin sayıdır.

Ehtimallar və əmsallarla əlaqələrin nəzəri əsaslandırılması və sonrakı hesablamalar üçün onlara əsaslanan yaşların sonsuz kiçik intervalları prosesin intensivlik (güc) ölçüsü kimi

$$\kappa = \lim_{\tau \rightarrow 0} {}_t k_x = \lim_{\tau \rightarrow 0} {}_t h_x / \tau$$

kəmiyyəti istifadə olunur. Məs., ölüm gücü μ_x (x -dən $x + \Delta x$ yaş intervalında ölüm ehtimalı) ən yüksək tərtibdən kiçikləndikcə $\mu_x \Delta x$ -ə bərabər olur.

$x, x + \tau$ müddətli sonlu intervalda demografik hadisələrin sayı ilkin toplusun sayını dəyişdirən, yeni tərkətmə prosesləri kimi digər demografik proseslərin intensivliyindən asılıdır. Məs., yaşları intervalında fərd ölə də bilər, verilən ərazini tərk (tərkətmə prosesi) edə də bilər; belə ki, ölüm növbəti emiqrasiyanı, emiqrasiya isə baxılan ərazidə ölümü istisna edir. Buna görə də, (1)-də hesablanan h ehtimalı digər bu tipli tərkətmə proseslərinin intensivliyinin verildiyi şərtində şərti ehtimal və ya asılı ehtimaldır. Prosesin məxsusi intensivliyinin qiymətləndirilməsi üçün tam və ya xalis ehtimaldan istifadə olunur. Bu halda, demografik hadisələrin potensial iştirakçıların toplusunun birincisliyi haqqında hipotez də daxil olunur və buna görə də, tam ehtimalları ${}^0 h^1$ və ${}^0 h^2$ olan iki tərkətmə (ölüm və ya emiqrasiya nəzərdə tutulur) prosesi üçün ümumi tərkətmə ehtimalı ${}^0 h = {}^0 h^1 + {}^0 h^2 - {}^0 h^1 {}^0 h^2 = {}^0 h^1 + {}^0 h^2$ ədədinə bərabər götürülür. Sonsuz kiçik yaş intervalları üçün göstəricilərdən istifadə edərək

$${}_t h_x^i = \int_0^\tau \kappa_{x+\zeta}^i \exp \left(- \int_0^\zeta (\kappa_{x-\eta}^1 + \kappa_{x+\eta}^2) d\eta \right) d\zeta$$

və

$${}^0 h_x^i = \int_0^\tau \kappa_{x+\zeta}^i \exp \left(- \int_0^\zeta \kappa_{x+\eta}^i d\eta \right) d\zeta \quad (3)$$

düsturları yazmaq olar. $0 < \zeta < \tau$ olduqda $\kappa_{x+\zeta}^i$ -nin sabit olması hipotezi qəbul olunarsa, onda

$${}_t h_x^i = 1 - (1 - {}_t h_x^i) {}_t K_x^i / ({}_t K_x^1 + {}_t K_x^2)$$

olur.

Bu fərziyyələrlə şərti və xalis intensivlik əmsalları üst-üstə düşür. Əmsallardan istifadə olunduqda isə bilavasitə xalis ehtimal üçün

$${}^0 h_x^i = 1 - \exp(-\tau_x k_x^i)$$

ifadəsi alınır.

$x, x + \tau$ yaşlarında hadisələrin müntəzəm paylanmaya tabe olduğu haqqında hipotezlə əmsallardan ehtimallara keçid üçün digər düsturlar –

$${}_t h_x = \tau_x k_x / (1 + (\tau/2) {}_t k_x)$$

şəklindədir.

Doğum prosesi tərkətmə prosesi deyildir; uşağın doğulması təkrarlanan hadisədir, hətta doğum ehtimalı (1) 1-dən böyük ola bilər. Bu halda (3) bərabərlikləri əvəzinə

$${}_t f_x = \int_0^\tau \phi_{x+\zeta} \exp \left(- \int_0^\zeta \kappa_{x+\eta} d\eta \right) d\zeta,$$

$${}_t f_x = \int_0^t \varphi_{x+\zeta} d\zeta$$

bərabərlikləri doğrudur, burada ${}_t f_x$ – doğum ehtimalı, φ – doğum intensivliyi, χ_x – tərkətmə proseslərinin toplam intensivliyidir. Əgər ${}_t \varphi_x$ doğum əmsali, ${}_t k_x$ isə tərkətmə proseslərinin intensivliyi əmsalındırsa, onda təqribi olaraq

$${}_t f_x = {}_t \varphi_x [1 - \exp(-{}_t k_x)] / {}_t k_x,$$

$${}_t f_x = {}_t \varphi_x$$

götürülür.

Doğuma təkrarlanmayan proses kimi də baxmaq olar ki, buna görə «doğulma növbəliyi» göstəricisi daxil edərək, i -ci uşağın doğulmasına $i-1$ sayda uşaq olan toplunu tərkətmə kimi baxmaq olar.

İntensivlik göstəricilərinin sıraları demoqrafik proseslərin – demoqrafik cədvəllərin, yenidənqurma prosesinin kumulyativ xarakteristikalarının ədədi modellərinin qurulması üçün və nəhayət, əhalinin proqnozu üçün istifadə olunur.

Demoqrafik cədvəl demoqrafik prosesi (proseslər qrupunu) yaş şkalasının bütün diapazonunda xarakterizə edir. Bu məqsədlə, bir qayda olaraq, ilkin qeyd olunmuş sayı 10^m , $m=3, 4$ və ya 5 olan model nəslə (kohorta) baxılır və intensivlik göstəriciləri sırası əsasında demoqrafik hadisələrin, nəslin (kohortun) fərdlərinin bu və ya digər demoqrafik vəziyyətdə sayının riyazi gözləmələri, vəziyyətlərdə olma müddətlərinin xarakteristikaları və s. hesablanır. Bu zaman proses Markov prosesi kimi interpretasiya olunur.

Real nəsil və ya kohort üçün qurulmuş cədvəllərə (məs., kohort cədvəllər) praktikada əz təsadüf olunur. Ən çox aparılan hesablamalar müəyyən təqvim dövründə, yalnız müxtəlif real nəsillər üçün əhalinin qeyd olunmuş yaş ehtimallarının sırasına əsaslanır. Bu halda deyilir ki, cədvəl hipotetik nəsil (kohort) üçün nəzərdə tutulmuşdur. Hipotetik nəsil metodu müəyyən bir dövr üçün əhalidə demoqrafik prosenin səviyyəsini kompleks surətdə qiymətləndirməyə imkan verir. Demoqrafik cədvəllər bir və ya bir neçə proses üçün xalis (xalis cədvəllər və ya göstəricilər) ehtimallardan istifadə edildiyi kimi şərti ehtimallardan (birləşdirilmiş cədvəllər və ya göstəricilər) istifadə olunaraq qurulur. Ən sadə cədvəllər tərkətmə (ölüm cədvəlləri və xalis evlilik cədvəlləri) modeli üçün və yalnız hadisələrin sayı qeyd olunan (ümumi cədvəllər) modeller üçün cədvəllərdir, məs., doğum cədvəlləri.

Növbəti addım özündə çox əlaməti əks etdirən hadisə cədvəllərinin: ölüm səbəblərini əks etdirən ölüm sayı üçün, ölüm nəzərə alınmaqla nigah və emiqrasiya üçün cədvəllərin – çoxəlamətli cədvəllərin tərtib olunmasıdır; ölüm nəzərə alınmaqla tərtib olunan doğum cədvəlləri də bu cədvəllərdəndir. Çoxvəziyyətli cədvəllər daha mürəkkəb quruluşa malikdir: məs., evlilik vəziyyətini və ölüm nəzərə alınmaqla boşanma vəziyyətini əks etdirən cədvəllər «nigahda deyildir» vəziyyətindən «nigahdadır» vəziyyətinə keçid də nəzərə alınmaqla tərtib olunur və əksinə. İnsanın həyatında baş verən demoqrafik hadisələrin demək olar ki, bütün spektrini özündə əks etdirən çoxstatuslu cədvəllər mövcuddur. Çoxregional ölüm cədvəlləri bu tipə aiddir və onlar açıq subəhali-lərin qapalı sistemində miqrasiya və ölümü əks etdirməklə tərtib olunur.

Çoxsaylı demoqrafik cədvəllərin statistik surətdə yenidən işlənilməsi doğum və ölümün yaş göstəricilərinin universal və tipik asılılığının analitik və ya ədədi formada təsvir edilməsi üçün çoxsaylı səylər üçün əsas olmuşdur. Əhali qrupları üçün tipik

cədvəllər (BMF, 1988) daha universal, lakin az dəqiq tipik cədvəllər də mövcuddur (BMF, 1955).

Müasir D. s.-da bir qayda olaraq demoqrafik hadisələrin tezliklərinin uyğun ehtimallardan yayınması nəzərə alınmır. ${}_t K_x$ kəmiyyətlərinin binomial paylanma qanununa tabe olduğu haqqında hipotezə əsaslanaraq demoqrafik göstəricilərin doğruluğunu qiymətləndirmək üçün səylər edilmişdir. Belə qiymətləndirmələr onu göstərir ki, əhalisi az olan bir sıra ölkələr və regionlar üçün göstəricilərin çoxu o qədər də doğru olmur. Belə göstəricilərin dinamik sıraları isə fərqli olaraq az dəyişkənliyi ilə səciyyəvidir və bu da binomial paylanma haqqında hipotezi şübhə altına alır. Yaş göstəricilərinin təsadüfi dəyişmələrini müəyyən dərəcədə aradan qaldırmaq məqsədilə D. s.-da yaş sıralarını çəkili ortalar metodu ilə nizamlama geniş surətdə tətbiq olunur; bundan başqa polinomlarla approksimasiya, splayn funksiya və ya xüsusi tip funksiyalarla approksimasiyadan da istifadə olunur.

Demoqrafik cədvəllər hesablanılarkən demoqrafik hadisələrin potensial iştirakçıları toplusunun birinsiliyi hipotezi aşkar və ya qeyri – aşkar surətdə qəbul olunur, lakin, bir qayda olaraq, bu həqiqətdə belə olmur. Topluların birinsin olmasına nail olunma onların sayının olduqca azalmasına gətirir və bununla da, göstəricilərin stoxastik xətalrı artır. Bir sıra latent (məs., genetik) strukturların təsirini aradan qaldırmaq, ümumiyyətlə, mümkün olmur.

Əd.: [1] Б о я р с к и й А. Я., Курс демографической статистики, М., 1945; [2] В е н е ц к и й И. Г., Математические методы в демографии, М., 1971; [3] Курс демографии, 3 изд., М., 1985; [4] Демографический энциклопедический словарь, М., 1985; [5] S h r y - o c k H. S., S i e g e l J. S., The methods and materials of demography, 4 ed., v. 1–2, Wash., 1980; [6] Model life tables for developing countries, N. Y., 1982.

DENDOGRAM « дендограмма; dendogram » – *təsnifatın iyerarx prosedurlarında* obyektlərin birləşmələrinin və ya bölgülərinin, yaxud obyektlər qruplarının ardıcılığını təsvir edən qrafıdır.

DESİL « дециль; decile » – *kvantilin* xüsusi halı olub, $\alpha = m/10$ tərtib K_α kvantilidir; $m = 1, 2, \dots, 9$. Əgər D. yeganə olarsa, o, paylanma funksiyasının növü haqqında mülahizə yürütmək üçün yaxşı xarakteristikalardan biri sayılır. $K_{9/10} - K_{1/10}$ kəmiyyəti *interdesil genişlik* adlanır və səpələnmə dərəcəsini xarakterizə edir.

DESİMASİYA « децимация; decimation », *seyrəklənmə, zaman sırasının* $p > 1$ tərtib seyrəklənməsi, – $X(t\Delta)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$ ardıcılığının Δ addımlı seçiminin

$$Y(t\Delta) = X(tp\Delta), \quad t = 0, 1, \dots, [(N-1)/p], \quad p > 1$$

kimi ifadə olunan dəyişilmiş şəkildir, burada $[\cdot]$ – ədədin tam hissəsini ifadə edir. $Y(t\Delta)$ sırasının Naykvist tezliyi (bax, *Diskretizasiya problemi*) $(2p\Delta)^{-1}$ -ə bərabərdir. Tezliklərin bir-biri üzərinə yığılmamasının qarşısını almaq üçün D. $\lambda \geq (2p\Delta)^{-1}$ üçün $\varphi(\lambda) = 0$ ötürücü funksiyalı filtdən və digər tezliklər üçün $\varphi(\lambda) \neq 0$ olan ötürücü funksiyalı filtdən keçməzdən əvvəl yerinə yetirilməlidir (bax, *Xətti filtr*). D.-ni bir neçə mərhələ ilə aparmaq olar (*kaskad desimasiya*).

p tərtib *tərs desimasiya* ilkin $X(t)$ sırasından

$$pX(0), 0, \dots, 0, pX(\Delta), 0, \dots, 0, pX(t\Delta), \dots;$$

$$t = 0, 1, \dots, N-1$$

şəklində alınan ardıcılıqdır.

Ters D. müxtəlif ardıcılıqların zaman hesablamalarının uzlaşdırılması məqsədilə tətbiq olunur. Tezliklərin bir-birinin üzərinə yığılması üçün ters D.-dan əvvəl $X(t\Delta)$ sırası $\lambda \geq (2\Delta)^{-1}$ olduqda $\varphi(\lambda)=0$ ötürücü funksiyalı filtdən, digər hallarda isə $\varphi(\lambda) \neq 0$ ötürücü funksiyalı filtdən keçirilir.

Sürətli Furiye çevirməsinin alqoritmlərinin müxtəlif variantları zaman üzrə D. və tezlik üzrə D.-dır.

Əd.: [1] Отнес Р., Эпоксеп Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982.

DETERMINİK XAOS NƏZƏRİYYƏSİ « детерминированного хаоса теория; deterministic chaos theory » – bax, *Ergodik nəzəriyyə*.

DETERMINİK KANAL « детерминированный канал; deterministic channel » – çıxış signalı giriş signalı ilə bir qiymətli təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Xüsusi halda, diskret stasionar yaddaşsız D. k. giriş simvolları çoxluğu Y -in çıxış simvolları çoxluğu $\tilde{Y}$ -də φ inikası ilə verilir ki, girişdə $(y) \in Y$ signalı çıxışda $\varphi(y) \in \tilde{Y}$ signalına ötürülür. Belə kanalın ötürücülük qabiliyyəti $C = \log_2 M$ düsturu ilə təyin olunur, M φ funksiyasının qiymətləri sayıdır. Çoxkomponentli *determinik kanallar* analoji təyin olunur. Toplayıcı *çoxgirişli kanal* ətraflı tədqiq olunmuşdur.

DETERMINİK – TAKTLI İNTERVAL « детерминированный тактовый интервал; deterministic tact interval » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

DEVİS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Дэвиса неравенства; Davis inequalities » – bax, *Burkholder – Qandi – Davis bərabərsizlikləri*.

DƏQİQ AŞAĞI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələrin « точная нижняя грань случайных событий; greatest lower bound of random events » – bax, *Kəsişmə(si) / hasil(i) təsadüfi hadisələrin*.

DƏQİQ ENDOMORFİZM « точный эндоморфизм; exact endomorphism » – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal

fəzasının $\bigcap T^{-n} \mathcal{A} = \mathfrak{N}$ şərtini ödəyən T endomorfizmdir, burada $T^{-n} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ σ – cəbrinin T^n inikasında $A \in \mathcal{A}$ çoxluğunun tam proobrazlarından ibarət σ – altcəbridir, $\mathfrak{N}$, $-\emptyset$ və I ölçülü çoxluqların σ – cəbridir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Lebeq fəzası olarsa, onda D. e.-in tərifini ölçülən bölgülər terminləri ilə ifadə etmək olar; buna görə $\mathcal{A}$ σ – cəbrini Ω fəzasının ayrı-ayrı nöqtlərə bölgüsü ilə, $\mathfrak{N}$ σ – cəbrini isə ona uyğun trivial bölgü ilə əvəz etmək lazımdır. Dar mənada stasionar, Kolmoqorovun sıfır – vahid qanununa tabe olan X_n , $n \geq 0$ təsadüfi ardıcılığının realizasiyalari fəzasında yerindəyişmə D. e.-dir. Bu növ ən sadə D. e. birtərəfli *Bernulli yerindəyişməsidir*. D. e. termini [1]-də K – avtomorfizm (bax, K – sistem) anlayışı ilə analoji daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Рохлин В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 4, с. 499–530; [2] Корнфельд И. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

DƏQİQ PLAN « точный план; exact design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

DƏQİQ YUXARI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələrin « точная верхняя грань случайных событий; least upper bound of random events » – bax, *Birləşmə(si) / cəm(i) təsadüfi hadisələrin*.

DƏQİQ ZOLAQ « точная полоса; exact band » – bax, *Etibarlı zolaq*.

DƏSTƏSİZ ÖLÇÜ « беспучковая мера; bundleless measure » – bax, *İntegral həndəsə*.

DƏYƏR « цена; value » – bax, *İdareolunan sıçrayışvari proses, İdareolunan diffuzion proses*.

DƏYƏR(i) modelin « цена модели; value of a model » – bax, *İdareolunan Markov zənciri, İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

DƏYƏR(i) oyunun « цена игры; value of a game » – bax, *Oyunu, iki şəxsin*.

DƏYƏR FUNKSİYASI « ценности функция; value function » – $(f, \psi) = \int f(x) \psi(x) dx$ skalyar hasilinə nəzərən $Af = g$ stasionar xətti *kinetik köçürmə tənliyinə* qoşma $A * \varphi = \psi$ tənliyi üçün *qoşma köçürmə məsələsinin* həllidir. $(g, \varphi) = (f, \psi) = I_\psi(f)$ eyniliyindən alınır ki, $g(x) = \delta(x - x_0)$ olduqda kinetik tənliyin həlli f_0 üçün $\varphi(x_0)$ -in qiyməti $I_\psi(f_0)$ -a bərabərdir. Mənbələrin sıxlığı $g(\cdot)$ ixtiyari olduqda, kinetik tənliyin xəttiliyi üzrə $\varphi(x)$ -lər x nöqtəsi ətrafında $I_\psi(\cdot)$ funksionalına əlavəni təyin edir, yəni x nöqtəsində $[I_\psi(\cdot)]$ -yə nəzərən $[$ hissəciyin dəyərini təyin edirlər.

D. f. kükrəntilər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır, bunlardan hesablanmaların sürətlə aparılması üçün, o cümlədən, Monte – Karlo metodunda dəyərlik üzrə modeləşdirmə üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] Спанье Дж., Гелбард Э., Метод Монте – Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [3] Марчук Г. И. [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосибир., 1976.

DƏYİŞƏN FƏRQLƏR METODU « переменных разностей метод; variate-difference method » – ilk dəfə $Y_t = f(t) + X_t$, $t = 0, \pm 1, \dots$ zaman sırası modelinin, $f(t)$ *trendinin* hamar xarakterli olduğu halında, X_t təsadüfi həddinin dispersiyasını qiymətləndirmək məqsədilə təklif edilmiş metoddur, burada X_t – qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$MX_t = 0$, $DX_t = \sigma^2$. Sonralar bu metod trendin hamarlılıq dərəcəsinə təyin etmək məsələsi ilə bağlı istifadə olunmuşdur. D. f. m.-nin tətbiq olunması o fakta əsaslanır ki, əgər $f(t)$ dərəcəsi r -dən kiçik t olan çoxhədli olarsa, onda $\Delta^r f(t) = 0$ olur, burada $[\Delta f(t) = f(t) - f(t-1), \Delta^r f(t) = \Delta(\Delta^{r-1} f(t))]$ və $M \Delta^r Y_t = 0$. Bununla yanaşı, σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət

$$V_r = \sum_{t=1}^{T-r} (\Delta^r Y_t)^2 / (T-r) C_r^r$$

düsturu ilə təyin olunur, burada T – zaman sırasının uzunluğudur. İxtiyari trend üçün

$$\mathbf{M} V_r = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{T-r} (\Delta^r f(t))^2 / (T-r) C_r^r$$

düsturu doğrudur ($\mathbf{D} V_r$ -in hesablanması haqqında bax, məs., [1]-ə). V_r tutarlı statistik qiymətdir və geniş fərziyyələrlə $(0, 1)$ parametrləri asimptotik olaraq normal qanunla paylanır.

Hamarlama yolu ilə trendin seçilməsi üçün çoxhədlinin münasib dərəcəsinin seçilməsi haqqında məsələ [fərz olunur ki, bu r dərəcəsi hər hansı əgərlə (m, q) intervalında dəyişir, $0 \leq m < q$] aşağıdakı hipotezlərdən birinin seçilməsi məsələsinə gətirilir:

$$H_q: \Delta^q f(t) \neq 0;$$

$$H_{q-1}: \Delta^q f(t) = 0, \Delta^{q-1} f(t) \neq 0;$$

$$H_{m+1}: \Delta^{m+2} f(t) = 0, \Delta^{m+1} f(t) \neq 0;$$

$$H_m: \Delta^{m+1} f(t) = 0.$$

Bu məsələnin həlli üçün kriteri $(V_r - V_{r+1})/V_{r+1}$ kimi statistikaya əsaslanır.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Кендалл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

DƏYİŞƏN KOD, ZAMAN ÜZRƏ « переменный во времени код; time-varying code » – bax, *Konvolusion kod*.

DƏYİŞƏNİŞARƏLİ ÖLÇÜ « знакпеременная мера; signed measure » – bax, *Yük*.

DINKİN DÜSTURU « Дынкина формула; Dynkin's formula » – bax, *Markov prosesi; rezolvent, infinitezimal operator*.

DİAQNOSTİK YOXLAMA Boks və Cenkinse görə « диагностическая проверка по Боксу и Дженкинсу; Box-Jenkins diagnostic checking » – *qanşiq avtoregressiv – sürüşən orta proses modelinin (ARSO – modelləri) keyfiyyətini yoxlamadır və bu yoxlama ARSO – modelinin müşahidələrdən alınmış məlum x_t , $t = 1, 2, \dots, n$ zaman sırası şəklində salınmasında son mərhələdən ibarətdir. Yoxlamanın məqsədi yeni şəklə salınmış modelin yararlılığını onun tərtibi seçildikdən və parametrləri qiymətləndirildikdən sonra təyin etməkdən ibarətdir (bax, *Parametrik model; spektral sıxlığın identifikasiyası*). Boks və Cenkinse görə D. y.-dan parametrik modelin tərtibinin seçilməsində də, (bax, [4], [5]), xüsusilə, sürüşən orta operator olduğu halda istifadə olunur.*

Boks və Cenkinse görə D. y. (bax, [1]) əsas etibarilə qalıq prosesi

$$\hat{a}_t = (x_t - \bar{x}) - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j (x_{t-j} - \bar{x}) - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{a}_{t-j}, \quad t = 1, \dots, n$$

üçün tətbiq olunur, burada $\hat{\phi}_t, \hat{\theta}_j$ yeni şəklə salınan modelin parametrlərinin statistik qiymətləri, $\bar{x}$ – bütün müşahidələrin ortalığıdır; $\bar{x}_t = x_t$ sırasının sabit olan $\mathbf{M} x_t$ orta qiymətinin statistik qiyməti kimi götürülür. Bu yoxlamanın məqsədi – $\hat{a}_t$ -nin xassələrinin qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının xassələrindən fərqlilik dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir. $t < 1, t \leq q$ olduqda $x_t, \hat{a}_t$ qiymətləri xüsusi bir üsulla təyin olunur. Əgər qalıq sırası $\hat{a}_t$ -nin seçimi korrelyasion funksiyası $r_{aa}(k)$ bütün $|k| > 0$ qiymətlərində sıfırdan olduqca fərqlənmirsə, onda model yararlı sayılır. Bu halda modelin yararlılıq kriterisi

$$\chi^2 = n(n+2) \left[\sum_{k=1}^K r_{aa}^2(k) / (n-k) \right]$$

kəmiyyəti ola bilər ki, o, təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı $K - p - q$ olan χ^2 – paylanmasına malik olmalıdır (bax, [2]).

Boks və Cenkinse görə D. y.-da ikinci mərhələ $\hat{a}_t$ qalıq sırasının spektral funksiyasının statistik qiymətinin dispersiyaya görə normalanmış $\hat{a}_t$ ardıcılığının analizindən ibarətdir. $\hat{a}_t$ – bəyaz küy olduğu halda, bu funksiyanın qiymətləri $(1 - \varepsilon)$ ehtimalı ilə

$K_\varepsilon / \sqrt{Q}$ enli zolağın içərisində olur ($Q = (n-2)/2$ və $Q = (n-1)/2$ – uyğun olaraq, cüt və tək n -lər üçün).

$\varepsilon = 0,01; 0,05$ və $0,10$ qiymətlərinə $K_\varepsilon = 1,63; 1,36$ və $1,22$ qiymətləri uyğun olur.

$q \neq 0$ və (və ya) analiz olunan sıranın spektrində şiş uclu maksimum olduqda Boks və Cenkinse görə D. y.-ya parametrlərin statistik qiymətlərinin korrelyasion matrisinin analizini də daxil etmək məqsəduyğundur, çünki o, yalnız parametrik modelin tərtibinin seçilmə kriterilərinin əsasında seçilmiş modelin yarasızlığını müəyyən edə bilər (bax, [3]).

Boks və Cenkinse görə D. y. qaydalarından biri kimi, baxılan mərhələdə yeni şəklə salınan modelin tərtibindən böyük tərtibə malik yenidən təyin olunmuş modelin bir sıra məlum müşahidələrinə gətirilmə də ola bilər. Boks və Cenkinse görə D. y.-nı iqlim dəyişmələrini özümdə əks etdirən modellərin keyfiyyətini yoxlamaq məqsədilə istifadə etmək olar (bax, [1]).

m – ölçülü zaman sırası halında diaqnostik yoxlamaya $\hat{a}_t = [\hat{a}_{1t}, \dots, \hat{a}_{mt}]$ qalıq vektorunun korrelyasion matrislərinin və matrisin xüsusi korrelyasion funksiyasının qurulması və analizi daxildir (bax, [4]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Кендалл М., Стюарт А., The advanced theory of statistics, 4 ed., v. 3, L., 1983; [3] П р и в а л ь с к и й В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), М., 1985; [4] Л у т к е о б л ь Н., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 1, p. 35–52; [5] Т s a y R., Т i a o G., «Биометрика», 1985, v. 72, № 2, p. 299–315.

DİAQRAM METODU « диаграмм метод; diagram method » turbulentlik nəzəriyyəsinə – hidrodinamika tənliklərinin həllərinin kükrəntilər nəzəriyyəsinin formal sırasına qarşılıqlı təsir konstantlarının qüvvət üstləri üzrə – Reynolds ədədi üzrə ayrılışının ayrı-ayrı hədlərinin Feynman diaqramı şəklində qrafik təsvirinə əsaslanan metoddur. Diaqramın xassələri turbulent axının axtarılan kəmiyyətlərini

namelumlur kimi özündə saxlayan qapalı integral tənliklərin alınması məqsədilə, sıranın hissevi cəmlənməsinə imkan yaradır.

Əd.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967; [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 111–59.

DİAQRAM TEXNİKASI « диаграммная техника; diagram expansion techniques » – Gauss vektorlarının funksionallannın momentləri və semiinvariantlarının qraflar üzrə cəmlər şəklində təsviridir. Əsas etibarilə Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində istifadə olunur. Obrazlı təfəkkür və hesablamaların əsas elementidir və aşağıdakı düstura əsaslanır. $\zeta(x)$, – $\mathbb{R}^d$ -də verilmiş, riyazi gözleməsi sıfır bərabər kəsilməz Gauss meydanı olsun. Onda ixtiyari $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ məhdud oblastı üçün

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \int_{\Lambda} \zeta^{n_1}(x_1) \dots \zeta^{n_k}(x_k) dx_1 \dots dx_k = \\ & = \sum_G \int \prod_i \mathbf{M}[\zeta(x_{i(l)}) \zeta(x_{j(l)})] dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

bərabərliyi doğrudur, burada cəmləmə təpələri $x_1, \dots, x_k$, tilləri sayı $(n_1 + \dots + n_k)/2$ sayda olan düyünlü bütün qraflar (diqramlar) üzrə aparılır, hər bir i -ci təpədən isə n_i sayda til çıxır; $x_i(l)$, $x_j(l)$, – l tilinin təpələridir. D. t.-nin ehtimali aspektləri [1]–[3]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [2] Малышев В. А., Милос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [3] Малышев В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 111–86.

DIFFERENSİAL ENTROPİYA « дифференциальная энтропия; differential entropy » – paylanması sıxlıq funksiyası olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün entropiya anlayışının formal analoqudur. D. e. nisbi entropiya və ya kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin entropiyası kimi də adlandırılır. Paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan, $x \in \mathbb{R}^n$, n – ölçülü ξ təsadüfi kəmiyyətinin D. e.-si

$$h(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x) dx$$

düsturu ilə təyin olunur.

D. e. diskret təsadüfi kəmiyyətlərin entropiyasının xassələrindən çoxuna malikdir, lakin o. mənfi qiymətlər də ala bilər və koordinat sisteminin dəyişməsinə nəzərən invariant deyildir. D. e. anlayışı müxtəlif nəzəri – informasiya xarakteristikalarının ilk növbədə, informasiya miqdarının hesablanmasında səmərəlidir.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., «Тр. 3-го Всесоюз. Матем. съезда», 1958, т. 3, с. 300–20; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

DIFFERENSİAL OPERATOR, TƏSADÜFİ ƏMSALLARLI; spektral nəzəriyyə « дифференциальный оператор со случайными коэффициентами; спектральная теория; differential operator with random coefficients / random differential operator; spectral theory of » – $\mathbb{R}^n$ -də

$$A = A_\omega = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, \omega) D_x^\alpha, \quad (1)$$

şəklində təsadüfi operatorudur, burada $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x = c^{-1} \partial / \partial x$, α – multiindeks [yəni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_j – tam ədədlərdir, $\alpha_j \geq 0$], $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, ω , – Ω ehtimal fəzasının nöqtəsidir, Ω -da n – ölçülü T_x zamanı ilə hər hansı dinamik sistem verilmişdir, $\Omega \rightarrow \Omega$, belə ki, $a_\alpha(x+z, \omega) = a_\alpha(x, T_z(\omega))$, $x, z \in \mathbb{R}^n$) bütün ω -lar üçün ödənilir, yeni a_α əmsalları təsadüfi bircins meydan əmələ gətirir (bax, [1], [2], [6], [8], [9], [13]–[15], [17]). Bu sonuncu müddəə

$$U_z A_\omega U_{-z} = A_{T_z(\omega)} \quad (2)$$

operator münasibətilə eynigüclüdür və A operatorunun bütün funksiyaları üçün də ödənilir, məs., A özü-özünə qoşma operatorursa, onun spektral proyektorları üçün $\omega \in \Omega$ təsadüfi parametrlərdən asılı ixtiyari B_ω operatorunun nüvəsi (ümumiləşmiş) $K_B = K_B(x, y, \omega)$ terminləri ilə (2) şəklində münasibət aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\begin{aligned} K_B(x+z, y+z, \omega) &= K_B(x, y, T_z \omega), \\ x, y, z &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2')$$

Əgər B_ω (2') düsturunu və $K_B(0, 0, \cdot) \in L'(\Omega)$ münasibətini ödəyən, K_B nüvəsinə malik təsadüfi integral operatoru olarsa, onda Birkhofun ergodik teoreminə görə

$$\begin{aligned} \text{tr}_R B &= \mathbf{M}_x \{ K_B(x, x, \omega) \} = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^n} \int_{|x| \leq L/2} K_B(x, x, \omega) dx \end{aligned} \quad (3)$$

təsadüfi izi təyin olunmuşdur. Ergodik halda ($\{T_x\}$ sistemi ergodik olduqda) $\text{tr}_R B$ təsadüfi olmur (bütün ω -lar üçün ω -dan asılı olmur). Fərz olunur ki, (1) operatorunun əmsalları a_α -lar öz törəmələri ilə demək olar ki, bütün ω -lar üçün məhduddurlar və A müntəzəm elliptik operatorudur. Onda ergodik halda A_ω təsadüfi operatorunun spektri $\sigma(A_\omega)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ -də təsadüfi olmur. $L^2(\Omega)$ -da A operatorunun təsirini təyin etmək olar, buna görə differensiallama dinamik sistemin generatorları ilə əvəz olunmalıdır, yeni

$$A u(\omega) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, \omega) D_x^\alpha \right) u \quad \text{və} \quad (T_x \omega)|_{x=0}.$$

Əgər $\sigma_\Omega(A)$ bu operatorun spektri olarsa, onda o, demək olar ki, bütün ω -lar üçün $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ -də A_ω spektri ilə üst-üstə düşür, burada Γ , – $\{T_x\}$ dinamik sisteminin periodlarının şəbəkəsidir (bax, [4]).

Fərz olunur ki, bundan başqa A_ω operatoru formal olaraq özü-özünə qoşma operatorudur. Onda spektri

$$N(\lambda) = \lim_{V \rightarrow \infty} N_V(\lambda)/|V| \quad (4)$$

normalanmış paylanma funksiyası ilə xarakterizə etmək olar, burada V , $\mathbb{R}^n$ -də hamar sərhədi olan məhdud obladır. $N_V(\lambda)$, V -də, hansısa özü-özünə qoşma sərhəd şərtlərilə, A_ω operatorunun məxsusi qiymətlərinin adi paylanma funksiyasıdır. $|V|$, V oblastının həcmidir, $V \rightarrow \infty$ isə onu ifadə edir ki, V oblastı homotetik böyüyərək, bütün fəzanı doldurur. Erqodik halda $N(\lambda)$ funksiyası təsadüfi olur. $\sigma(A_\omega)$ spektri $N(\lambda)$ funksiyasının artım nöqtələrinin çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Bundan başqa, $N(\lambda) = \text{tr}_R E_\lambda$, burada E_λ , A_ω operatorunun spektral proyektorudur. $N(\lambda)$ funksiyası üçün diskret spektrin adi məxsusi qiymətləri üçün Kurant prinsipinə analogi variasiyon prinsip mövcuddur (bax. [1]).

$\lambda \rightarrow +\infty$ olduqda $N(\lambda)$ funksiyasında asimptotika tapılır. Bu asimptotika adi spektral nəzəriyyədə Veyl düsturu ilə verilir:

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= (2\pi)^{-n} M_x \text{mes} \{ \xi: \xi \in \mathbb{R}^n, \\ &\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \omega) \xi^\alpha < \lambda \} + O(\lambda^{(n-1)/m}) = \\ &= c \lambda n/m + O(\lambda^{(n-1)/m}) \end{aligned}$$

(bax. [1], [6], [11]). Bir sıra modeller hallarında spektrin aşağı sərhədində $N(\lambda)$ -nin asimptotikasını tapmaq mümkün olur, bu sərhəd əksər hallarda fluktuasiya sərhəd adlanır; bu asimptotika artıq modelin seçilməsindən olduqca asılı olur (bax, məs., [10], [12]–[14], [16]–[18]).

(4) tipli limite keçiddən bir sıra mühüm spektral invariantların alınmasında istifadə etmək olar (bax, [1], [2]).

Bezi hallarda daha ümumi, eyni zamanda $V \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ (və ya $\lambda \rightarrow 0$) limit keçidini ifadə edən və ortalanma nəzəriyyəsi ilə sıx bağlı asimptotikalar da tapmaq olur (bax, [3]).

Ümumi özü-özünə qoşma olmayan, təsadüfi elliptik differensial matris (yəni vektor – funksiyalar fəzasında təsir edən) operatorlar üçün indeks nəzəriyyəsinə qurmaq olur, erqodik halda bu indeks heqiqi ədəd olub, $\text{ind}_R A = \text{tr}_R N_A - \text{tr}_R N_{A^*}$ düsturu ilə

verilir, burada A^* , A operatoruna formal qoşma operatorudur, N_A və N_{A^*} , $\ker A$ və $\ker A^*$ -də uyğun olaraq ortoqonal proyeksiyalama operatorlarıdır (matris operatoru halında tr_R izi (3)-ə analogi düsturla, lakin matris izinin götürülməsi əlavə olunmaqla alınır).

Təsadüfi potensiallı Şrödinger operatoru (bax, *Şrödinger tənliyi təsadüfi potensiallı*) təsadüfi əmsallı D. o.-un mühüm xüsusi bir halıdır, bu zaman bir sıra hallarda (xüsusilə də, birölçülü halda) olduqca dəqiq və incə nəticələr alınmışdır (bax, [5], [6], [8], [9]).

Əd.: [1] Гусев А. И., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 2, с. 207–26; [2] Гусев А. И., Шубин М. А., в сб.: Предельные теоремы для случайных процессов, К., 1977, с. 93–107; [3] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 5, с. 185–86; [4] Козлов С. М., Шубин М. А., «Матем. сб.», 1984, т. 123, № 4, с. 460–76; [5] Молчанов С. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, № 1, с. 70–103; [6] Пастур Л. А., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 1, с. 3–64; [7] Федосов Б. В.,

Шубин М. А., «Матем. сб.», 1978, т. 106, с. 108–40, 455–83; [8] Кармона Р., «Acta Applicandae Math.», 1985, v. 4, № 1, p. 65–91; [9] Кармона Р., Random Schrödinger operators, École d'été de probabilités XIV, Saint Flour, 1984, p. 123; [10] Донскер М. Д., Варadhan С. Р. С., «Communs Pure and Appl. Math.», 1975, v. 28, № 4, p. 525–65; [11] Богородская Т. Е., Шубин М. А., «Труды семинара им. И. Г. Петровского», 1986, в. 11, с. 98–117; [12] Гренкова Л. Н., Молчанов С. А., «Функциональный анализ и его прилож.», 1988, т. 22, № 2, с. 73–74; [13] Пастур Л. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 25, М., 1987, с. 3–67; [14] Pastur L. A., «Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.», 1987, v. 6, p. 1–112; [15] Cuseon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B., Schrödinger operators: with applications to quantum mechanics and global geometry, B. – [a. o.], 1987, p. 319; [16] Kirsch W., Martinelli F., «Communs. Math. Phys.», 1983, v. 89, p. 27–40; [17] Martinelli F., Scoppola E., Introduction to the mathematical theory of Anderson localization, Bologna, 1987; [18] Simon B., «J. Stat. Phys.», 1987, v. 46, № 5/6, p. 911–18.

DIFFERENSİALLANMASI, SİSTEMİN « дифференцирование системы; differentiation system » –

ele çoxluqlar sistemidir ki, bunlar üzrə mütləq kəsilməz hesabı – additiv çoxluq funksiyalarının differensiallanması mümkündür; bu differensiallama nəticəsində bu funksiyaların Radon – Nikodim törəmələri alınır. Daha dəqiq, $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ – ölçülü fəza,

P , Ω -da μ – ölçülü çoxluqların hər hansı sistemi olsun. Əgər hər hansı mütləq kəsilməz (μ ölçüsünə nəzərən) hesabı – additiv Φ funksionalı üçün

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(Z_n)}{\mu(Z_n)} = \Phi'_P(x)$$

bərabərliyi sanki hər yerdə ödənilərsə, P , Ω -da differensiallama sistemidir, deyilir, burada x , Ω -nın ixtiyari nöqtəsi, f , Φ funksionalının Radon – Nikodim törəməsi (yəni

$$f = \frac{d\Phi}{d\mu}), (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ailəsi isə } x \text{ nöqtəsinə topalaşan } (\mu \text{ ölçü-}$$

sü menada), P sistemindən olan çoxluqların ixtiyari ardıcılığıdır.

P çoxluqlar sisteminin Ω -da differensiallama sistemi olması üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruri və kafidir:

- 1) $Y \in \mathcal{S}$ ixtiyari çoxluq olduqda, Y -in demək olar ki, hər bir nöqtəsi Y üçün (P sistemine nəzərən) sıxlıq nöqtəsidir;
- 2) ixtiyari mütləq kəsilməz (μ ölçüsünə nəzərən) hesabı – additiv Φ funksionalı üçün

$$\overline{\Phi}'_P(x) < +\infty, \quad x \in \Omega$$

bərabərsizliyi Ω -da sanki hər yerdə doğrudur; Φ'_P , Φ funksionalının P sistemine nəzərən yuxarı törəməsidir.

Differensiallama sistemlərinin mühüm xüsusi halı 1) şərtini ödəyən Vitali sistemləridir. 1) şərtinin özü çox vaxt sıxlıq nöqtələri haqqında teoremlərləndir.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Шолов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [3] Харазисвили А. Б., Топологические аспекты теории меры, К., 1984.

DIFFERENSİALLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESİN « дифференцирование случайного процесса; differentiation of a random process » – bax. Təsadüfi proses.

DIFFUZ ÖLÇÜ « диффузная мера; diffuse measure » – bax, *Təsadüfi ölçü*.

DIFFUZION PROSES « диффузионный процесс; diffusion process » – realizasiyalan kəsilməz, doğuran operatoru differensial operator olan *ciddi Markov prosesidir*. Bu, tərifi ümumi ideyasıdır və bu tərifdən digər konkret təriflər doğuran operatorun güclü *infinitesimal operator* və ya klassik differensial operator və ya bircins sərhəd şərtləri bu və ya digər mənada xətti differensial operator kimi qəbul olunmasından və proses oblastın xaricinə çıxdığı ana qəder və ya onun kəsildiyi ana qəder bütün realizasiyaların kəsilməz olmaları tələbindən asılı olaraq alınır. Xüsusi halda, $\mathbb{R}^r$ fəzasında klassik D. p. realizasiyaları kəsilməz, infinitesimal operatoru

$$A_t f(x) = \sum_{i=1}^r b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

düsturu ilə verilən Markov prosesi kimi təyin olunur. $b_i(t, x)$ a p a r i ə m s a l l a r ı, $a_{ij}(t, x)$ (müsbət müəyyən matrisi təşkil edən) – diffuziya əmsalları adlanır.

Diffuzion proseslərin keçid ehtimalları və sıxlıq funksiyaları üçün Kolmoqorov düz (Fokker – Plank tənliyi də adlandırılan) və tərs tənlikləri ödənilir. Keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası $p(s, x, t, y)$ -in Lebeq ölçüsünə nəzərən varlığı fərz olunduqda klassik D. p. aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x} + \sum_{i=1}^r b_i(s, x) \frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r a_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Kolmoqorov tərs tənliyi;

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(t, y) p(s, x, t, y)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (a_{ij}(t, y) p(s, x, t, y))$$

Kolmoqorov düz tənliyi.

Düz tənlik $t=s$ olduqda $\delta(y-x)$ başlanğıc şərtlə, tərs tənlik $s < t$ olduqda sonuncu $\delta(x-y)$ şərtlə həll olunur.

[1], [2]-də tərifi digər variantları da şərh olunmuşdur – birölcülü halda zamana görə bircins, kəsilməz realizasiyaları ciddi Markov prosesləri araşdırılır ki, bu zaman bunların infinitesimal operatorları ümumiləşmiş differensial operatorlar olur.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Ито К., Маккин Г. П., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, К., 1968.

DIFFUZION PROSES əksəddici sərhəddli « диффузионный процесс с отражением на границе; diffusion process with form reflection the boundary » – bax, *Markov prosesi; sərhəd şərti*.

DIFFUZION PROSES idarəolunan « диффузионный процесс управляемый; controlled diffusion process » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses*.

DIFFUZION PROSES qrupda « диффузионный процесс на группе; diffusion process on a group » – qiymətləri proyektiv və ya sonluölçülü Li qrupundan olan kəsilməz Markov prosesi $\zeta = \zeta(t)$ -dir, bu prosesin $G \times \mathcal{B}$ fəzasında ($\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$ G -də Borel σ – cəbridir) təyin olunmuş keçid ehtimal ölçülərinin ailəsi $\{\mu_{s,t} | 0 \leq s \leq t, (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ güclü $\tau(C)$ operator topologiyasında (G -də kəsilməz finit funksiyalar fəzası C -yə görə) differensiallanan, G -də təsir edən infinitesimal operatoru A

$$A \equiv \frac{\partial^-}{\partial s} T(s, t) \Big|_{t=s} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} [T(s-h, s) - E]$$

münasibətilə ifadə olunan, ehtimal operatorları $T(s, t) = T_{\mu_{s,t}}$ ikiparametrik

$$T(s, t) f(g) = \mu_{s,t}(g, f) = \int_G f(h) \mu_{s,t}(g, dh);$$

semi – qrupunu (xemiqrupunu) doğurur. A operatorunun təyin olunma oblastı, $s \geq 0$ olduğu halda, G -də kompakt daşıyıcıları və iki dəfə kəsilməz differensiallanan funksiyaların C_0^2 fəzasını özündə saxlayır.

$T(s, t)$ xemiqrupu

$$\frac{\partial^-}{\partial s} u + Au = 0 \quad (1)$$

evolyusion tənliyini ödəyir, burada $u \equiv u(s, g; t) = T(s, t)f(g)$ və $\lim_{s \uparrow t} u(s, g, t) = f(g)$ bütün $f \in C$ üçün ödənilir, (1)-in həlli

D. p.-in infinitesimal operatoru A verildiyi halda $T(s, t)$ -ni bərpə etməyə imkan verir.

(1) tənliyinin həlli aşağıdakı metodlarla:

1) Banax fəzalarında ümumi şəkilli xemiqrupların evolyusion tənlikləri üçün işlənmiş, texnikaya əsaslanmış nəzəri-operator metodu; 2) A operatorunun C -də sıx C_0^2 altfəzasına daralmasından istifadə edən analitik metod; 3) ζ üçün stoxastik differensial tənliyin həllini C^∞ çoxoxbəzlisində nəzərdə tutan və ya g Li cəbrində lokal D. p.-lərin bu cəbrin Li qrupuna eksponensial inikasının köməyi ilə ζ -nin multiplikativ stoxastik integral kimi qurulmasını birbaşa nəzərdə tutan ehtimal metodu ilə həyata keçirilir.

Klassik metodlara əsaslanan analitik metodlar belə bir faktıdan istifadə edir: infinitesimal A operatorunun C_0^2 altfəzasına daralması A^d (ζ prosesinin doğuran operatoru adlandırılan) 2-ci tərtib elliptik differensial operatorudur.

$$A_m^{\partial} \equiv \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{[m]}(s, g) D_g^i D_g^j + \sum_{i=1}^m b_i^{[m]}(s, g) D_g^i + c(s, g). \quad (2)$$

Burada $A_m^{\partial} = \hat{p}_m(A^{\partial})$, $\hat{p}_m$, - G -də solinvariant differensial $\mathcal{D}(G)$ operatorlarının cəbrinin Li qrupunda m - dim. - ölçülü differensial $\mathcal{D}(G_m)$ operatorlarının cəbrinə kanonik proyeksiyasıdır.

$$G = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} G_m, \quad \mathfrak{g} = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_m, \\ C_0^k(G) = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} C_0^k(G_m) \\ \mathcal{D}(G) = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(G_m)$$

- uyğun obyektlərin sonluölçülü $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Li qrupunun və $(\mathfrak{g}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Li cəbrinin proyektiv limitləridir, $C_0^k(G_m)$ - kompakt daşıyıcıları k dəfə kəsilməz differensiallanan funksiyaların fəzasıdır, $(D^i)_{1 \leq i \leq m}$, - $G_m = p_m(G)$ Li qrupunun $\mathfrak{g}_m = d p_m(\mathfrak{g})$ Li cəbrinin bazisi, $\mathbb{N}$ - müsbət tam ədədlər çoxluğudur. ζ prosesinin infinitezimal

$$(a_{ij}^{[m]}, B_i^{[m]}, c)_{1 \leq i, j \leq m, m \in \mathbb{N}}$$

xarakteristikaları onun doğuran A^{∂} operatorunu birqiymətli təyin edir və uyğun olaraq diffuziya əmsalı, aparı əmsalı və qırıqla ehtimalının sıxlığıdır; aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$a_{ij}^{[m]} = A_m^{\partial}(\Delta_i, \Delta_j), \quad B_i^{[m]} = A_m^{\partial}(\Delta_i), \quad c = A_m^{\partial},$$

burada $\Delta_i(g, h) = x^i(h) - x^i(g)$, $(x^i(h))_{1 \leq i \leq m}$, - $g \in G$ elementinin N_g ətrafında $p_m(h) \in G_m$ elementinin lokal koordinatlarıdır, $p_m: G \rightarrow G_m$, -

$$G = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} G_m$$

qrupunun proyektiv sisteminin kanonik proyeksiyasıdır.

Hölder və infinitezimal xarakteristikaların İto mənada lokal məhdudluğu və bütün $m \in \mathbb{N}$ qiymətlərində $\|a_{ij}^{[m]}(s, t)\|$ matrislərinin ciddi müsbət müəyyənliyi şərtlərində $H = [0, \infty) \times G$ layında

$$\frac{\partial}{\partial s} u^{[m]} + A_m^{\partial} u^{[m]} = 0 \quad (3)$$

parabolik tənliyinin (Kolmoqorov tərs tənliyinin) yeganə fundamental $u^{[m]}(s, g, t, h)$ həlli vardır ki,

$$u^{[m]}(s, g, t) = \int_{G_m} u^{[m]}(s, g, t, h) f(h) d_0^{[m]}h,$$

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, g, t) = f(g),$$

bütün $f \in C$ üçün $(s, g) \in H$ üzrə hamar həldir, burada $d_0^{[m]}h$ - hər hansı $s_0 \geq 0$ üçün G -də $a_{ij}(s_0, h)$ ilə doğurulmuş $d_0^{[m]}r(h)$ Riman metrikasına nəzərən G_m -də həcm elementidir. (3) tənliyinin fundamental həlli standart tərzdə $G = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} G_m: u^{[m]} = \hat{p}_m(u) = u \circ p_m$ qrupuna bütün $m \in \mathbb{N}$ üçün köçürülür və bu həll G -də ζ prosesinin $\mu_{s,t}(g, \Gamma) = \int_{\Gamma} u(s, t, h) d_0 h$ keçid ehtimal ölçüsünün sıxlığıdır. Li qruplarında və hamar çoxoxobrazlılarda 2-ci növ kəsilməsi olmayan stoxastik kəsilməz Markov proseslərinə alternativ metodları tətbiq etdikdə

$$L(u) = 0, \quad L \equiv A^{\partial} + A^{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial s} \quad (4)$$

inteqro - differensial tənliyinin fundamental həllinin varlığı və yeganəliyini isbat etmək olur, burada A^{Σ} operatoru prosesin sıçrayışlarını ifadə edir və

$$A_m^{\Sigma} f(g) = \int_{G_m \setminus \{g\}} \left\{ f(h) - f(g) - \frac{\rho(g, h)}{1 + \varphi(g, h)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^m \Delta_i(h) D^i h(g) \right\} \frac{1 + \varphi(g, h)}{\varphi(g, h)} \eta(s, g, dh). \quad (5)$$

$A^{\partial} + A^{\Sigma}$ operatoru qiymətləri hamar çoxoxobrazlılar və Li qruplarından olan proseslərə sonsuz bölünən qanunlar üçün kanonik Levi - Xinqin ifadəsini ümumiləşdirir, bu halda (4) tənliyinin fundamental həlli ζ prosesinin $\mu_{s,t}$ keçid ehtimal ölçülərinin sıxlığıdır.

Li qrupunda D. p.-nin təsnifatı uyğun doğuran operatorların xassələrinə əsaslanır.

Əgər ζ D. p.-nin xemiqrupunun operatorları $T(s, t)$, G -nin elementlərinə bütün sol l_g yerindəyişmələri ilə kommutasiya olunurlarsa, ζ D. p. asılı olmayan (sağ invariant) artımlı (və ya sol invariant) proses adlanır. ζ D. p., yalnız və yalnız, onun doğuran operatoru A^{∂} , $\mathcal{D}(G)$ -də yerləşdiyi halda solinvariantdır. Solinvariant ζ D. p.-nin xemiqrupunun $T(s, t)$ operatorları ilə G qrupunun kompakt altqrupu K -nin elementlərinə bütün r_g - sağ yerindəyişmələri kommutasiya olunurlarsa, solinvariant ζ D. p., - kompakt invariant (və ya K -sağ invariant) proses adlanır. Solinvariant D. p., yalnız və yalnız, onun doğuran operatoru $\mathcal{Q}_k(G)$ -də yerləşdiyi halda K - sağinvariantdır, burada $\mathcal{Q}_k(G)$, - $\mathcal{D}(G)$ -dən olan bütün K - sağinvariant operatorların altcəbridir və $\mathcal{Q}_k(G)$ isə $\mathcal{D}(G/K)$ -ya izomorfdur, burada G/K , - G fəzasının K üzrə əlaqəli sol siniflərinin bircins G -fəzasıdır.

Solinvariant və K - sağinvariant D. p.-lər, seriyalar sxeminde asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin klassik

nezeriyyesini ümumiləşdirən. Li qruplarında ehtimal ölçülərinin üçbucaq sistemləri üçün limit teoremləri ilə bilavasitə əlaqəlidir. $(G, \mathcal{B})$ -də ehtimal ölçülərinin

$$(\mu_{nk})_{1 \leq k \leq k_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

üçbucaq sisteminin verildiyi fərz olunur. $T_n(s, t)$, – (6) infinitezimal sisteminin doğurduğu xemiqrup. $T(s, t)$ – doğuran operatoru A_m^∂ və ya $A_m^\partial + A_m^\Sigma$ olan xemiqrup olsun; $T_n(s, t)$ xemiqruplar ardıcılığının ixtiyari sonluölçülü G_m Li qrupunda differensiallanan yeganə $T(s, t)$ xemiqrupuna $\tau(C)$ topologiyasında yığılması haqqında limit teoremləri alınmışdır, burada

$$T_n(s, t)f(g) = \int_G f(g^h) \mu_{s,t}^{(n)}(dh), \quad (7)$$

$\mu_{s,t}^{(n)} = \mu_{n_k} * \dots * \mu_{n_l}, \quad 0 \leq s < t \leq 1, \quad t_{n_k} \leq s < t_{n_{k+1}}, \quad t_{n_l} \leq t < t_{n_{l+1}}, \quad 1 \leq k < l \leq k_n \text{ və } 0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{k_n}} = 1, \quad - [0, 1]$ parçasının ixtiyari Δ_n bölgüsüdür,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \Delta t_{nk} = 0,$$

bütün s -lər üçün $\mu_{s,s}^{(n)} = \varepsilon_e$,

$$\varepsilon_e(r) = \begin{cases} 1, & e \in \Gamma, \\ 0, & e \notin \Gamma. \end{cases}$$

$T(s, t)$ xemiqrupu sıxlığı u olan $\mu_{s,t}$ ölçülərinin ailəsi ilə təyin olunur və u müvafiq (3) və ya (4) tənliklərinin fundamental həllidir. Qeyd olunan teoremlərdə (6) sisteminin infinitezimal xarakteristikaları $(a_{ij}^{(n)}, b_i^{(n)}, \eta^{(n)})_{1 \leq i, j \leq m, n \in \mathbb{N}}$ üzərinə qoyulan tələblər klassik tələblərə uyğundur. Burada (6) sisteminin doğuran operatoru A^∂ olan solinvariant D. p.-ə yığılması halında

$$a_{ij}^{(n)}(t_{nk}) = \frac{1}{2\Delta t_{nk}} \int_{\mathbb{N}_e} x^i(g) x^j(g) \mu_{nk}(dg),$$

$$b_i^{(n)}(t_{nk}) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} \int_{\mathbb{N}_e} x^i(g) \mu_{nk}(dg),$$

$$\eta^{(n)}(t_{nk}) = \int_{G \setminus \mathbb{N}_e} \mu_{nk}(dg)$$

və (6) sisteminin doğuran operatoru $A^\partial + A^\Sigma$ olan 2-ci növ kəsilməsi olmayan stoxastik kəsilməz Markov prosesinə yığılması halında

$$\eta^{(n)}(t_{nk}) = \frac{1}{\Delta t_{nk}} \int \frac{\varphi(e, g)}{1 + \varphi(e, g)} \mu_{nk}(dg),$$

$$b_i^{(n)}(t_{nk}) = \int_G \frac{\rho(e, g)}{\varphi(e, g)} x^i(g) \eta^{(n)}(t_{nk}, dg),$$

bu halda (5) və (2)-də A^Σ və A^∂ operatorları üçün $g = e$ götürülməlidir.

Ölçülərin kompaktozimal üçbucaq sistemi üçün (bax, [6]) $T_n(s, t)$ xemiqruplarının ardıcılıqlarının $T(s, t) = T_{\mathcal{B}}(s, t) \times \times T_K(s, t)$ şəklində $T(s, t)$ xemiqrupuna yığılması isbat olunmuşdur, burada $T_{\mathcal{B}}$, – $\mathcal{B}$ -in G/K -ya homeomorf C^∞ çoxobrazlısında G – solinvariant və K – sağinvariant diffuzion $\zeta_{\mathcal{B}}$ prosesinin xemiqrupudur, T_K , – K -də ω_K Haar ölçüsü ilə doğurulmuş. K üzərində xemiqrupdur. Beləliklə, (7) sistemi üçün ixtiyari (s, t) , $0 \leq s \leq t \leq 1$ qiymətlərində $\mu_{s,t}^{(n)} = \mu_{n_k} * \dots * \mu_{n_l}, C(G)$ -yə nəzərən $\mu_{s,t} = \mu_{s,t}^{\mathcal{B}} * \omega_K$ ölçüsünə zəif yığılır, burada $\mu_{s,t}^{\mathcal{B}}$, – $T_{\mathcal{B}}$ xemiqrupunu doğuran, $\mathcal{B}$ -də $\zeta_{\mathcal{B}}$ prosesinin keçid ehtimalı ölçüsüdür və bu ölçü limit prosesi ζ -nin «radial» $\zeta_{\mathcal{B}} = F(\zeta)$ komponentinin ehtimal paylanması təsvir edir. ω_K , – ζ prosesinin individual polyar $g = = F(g) \bar{k}(g)$ ayrılışında $\zeta_K = \bar{k}(\zeta)$ «bucaq» komponentinin ehtimal paylanmasıdır, burada $\bar{F}: C \rightarrow \mathcal{B}$, $\bar{k}: G \rightarrow K$, – C^∞ sinfinin funksiyalarıdır və bu funksiyalar G Li qrupunun $G = \mathcal{B}K$ lvasava ayrılışını reallaşdırır. $\zeta_K^{(n)} \bar{k} = (\zeta^{(n)})$ paylanmasının ω_K -ya yığılmasının isbatı kompakt qruplarda harmonik analizin metodları ilə həyata keçirilir (bax, [6]).

Əd.: [1] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Компактные группы Ли, пер. с франц., М., 1986; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [3] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] С о б к о Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 549–57; [5] С о б к о Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 302–04; [6] С о б к о Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 44–55.

DIFFUZION PROSES şaxələnen « диффузионный процесс ветвящийся diffusion branching process » – hər bir hissəciyi yerini digərlərindən asılı olmadan verilmiş G oblastında diffuzion prosesin qanunauyğunluqlarına tabe olaraq dəyişərək evolyusiya edən şaxələnen prosesdir. Bir qayda olaraq fərz olunur ki, hər bir hissəciyin yaşama müddəti üstlü qanunla paylanır və hissəcik ömrünün sonunda təsadüfi sayda varislər törədir və bu varislər yarandığı nöqtədən hərəkətini başlayaraq yerlərini dəyişirlər. G oblastının sərhədinə çatan hissəciklər yox olur (itir).

$G \subset \mathbb{R}^r$ – açıq məhdud çoxluq, $\lambda > 0$ – hissəciyin məhv olma intensivliyi, $F(s)$ – bilavasitə varislər sayının doğuran funksiyası olsun; proses $t=0$ anında bir hissəciklə $x \in G$ nöqtəsindən başlayır, $\zeta_{x,1}(t), \dots, \zeta_{x,Z_x(t)}(t)$, – t anındakı bütün $Z_x(t)$ hissəciklərinin vəziyyətləri olsun; hissəciklər diffuziya əmsallarının vahidi matrisli ilə r – ölçülü Braun hərəkəti edir.

$$H(t, x, s(\cdot)) = \mathbf{M} \prod_{i=1}^{Z_x(t)} s(\zeta_{x,i}(t))$$

doğuran funksionalı (bir neçə tip hissəcikli şaxələnen prosesdə hissəciklər sayının birgə paylanmasının doğuran funksiyasının analoqu) başlanğıc şərti $H(0, x, s(\cdot)) = s(x)$ və sərhəd şərtləri $\lim_{x \rightarrow \partial G} H(t, x, s(\cdot)) = 0$ olan

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} + \lambda(F(H) - H)$$

parabolik tənliyini ödəyir.

$MZ_x(t)$ üçün analoji düstur

$$MZ_x(t) \sim K e^{(\lambda(m-1) - \alpha_1)t} \varphi_1(x), \quad x \in G, \quad t \rightarrow \infty, \quad (*)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $K > 0$ – sabit, $m = F'(1)$ – bir hissəciyin bilavasitə varisleri sayının orta qiymətidir, $\alpha_1 > 0$ – minimal məxsusi qiymət, $\varphi_1(x) > 0$.

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + d\varphi = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \partial G} \varphi(x) = 0$$

məsələsinin α_1 -ə uyğun məxsusi funksiyasıdır.

(*) münasibətinin sağ tərəfindəki $\lambda(m-1) - \alpha_1$ kəmiyyətinin mənfi, sıfıra bərabər və müsbət olmasından asılı olaraq D. ş. p. uyğun olaraq kritikaltı, kritik və ya kritiküstü şəxələnən proses adlanır.

Əgər G məhdud oblast olarsa, onda hissəciklər toplusunun G oblastı üzrə yayılması ilə əlaqədar yeni effektlər yaranır (bax, *Şəxələnən təsadüfi dolaşma*).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Ivanoff B. G., «J. Multivar. Anal.», 1981, v. 11, № 3, p. 289–318.

DIFFUZIYA ƏMSALLARI « диффузии коэффициенты; diffusion coefficients » – diffuzion prosesin *doğuran operatorunun* ikinci tərtib ikiindeksli əmsallarıdır (bax, *Doğuran operator(u)* diffuzion prosesin). Əgər diffuzion (və ya kvazidiffuzion) proses

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə, onda belə prosesin (hər hansı ortonormal bazisdə) D. ə. $b(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^*(t, x)$ opeatorunun matrisinin (burada $*$ – qoşma operator işarəsidir) elementləri ilə (bu bazisdə) üst-üstə düşür, burada $w(t)$, – d_1 -ölçülü $\mathbb{R}^{d_1}$ Evklid fəzasında Viner prosesi, $a(t, x)$ və $\sigma(t, x)$ – uyğun olaraq $(\mathbb{R}^d - d\theta)$ vektorqiymətli və $(\mathbb{R}^{d_1} - d\theta)$ operatorqiymətli funksiyalardır.

D. ə.-nin fiziki mənası aşağıdakı kimidir: $\Delta t \downarrow 0$ olduqda t -dən $t + \Delta t$ -yə qədər müddətdə diffuzion prosesin $x(t + \Delta t) - x(t)$ artımının $\theta \in \mathbb{R}^d$ istiqamətinə proyeksiyasının kvadratının ortası $x(t) = x$ olduqda (eğer qeyd olunan artımın ikinci momenti yoxdursa, onda kesik artım götürülür), $o(\Delta t)$ tərtib kəmiyyət dəqiqliyi ilə $(b(t, x)\theta, \theta)\Delta t$ kvadratik forması ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Kolmoqorov tənlikləri, Riçardson üçdə dörd qanunu, Diffuzion proses*.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

176 DIFFUZIYA

DIFFUZIYA VEKTORU « диффузии вектор; diffusion vector » – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

DİXOTOMİK TƏSADÜFİ PROSES « дихотомический случайный процесс; binary random process » – bax, *Binar təsadüfi proses*.

DİK YÜKSƏLİŞ METODU « крутого восхождения метод; steepest ascent » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

DİLATAZIYA « дилатация; dilatation » – bax, *Minkovski əməlləri*.

DİNAMİK PROQNOZ « динамический прогноз; dynamical forecasting » – bax, *Statistik proqnozu, havanın*.

DİNAMİK PROQRAMLAMA; həssas kriterilər « динамическое программирование; чувствительные критерии; dynamic programming; sensitive criteria » – diskontlanmış gəlirləri öz aralarında çəki ilə müqayisələndirilən gəlirlərlə idarəolunan Markov zəncirlərində optimalıq kriteriləridir, diskontlama əmsal $1-\beta$ yaxınlaşdıqda çəkiler sonsuzluğa yaxınlaşır. İdarələrinin sonlu çoxluqları $A(x)$, keçid ehtimalları $p(y|x, a)$, cari gelir funksiyası $a \in A(x)$, $x \in X$ ilə verilən, vəziyyətləri çoxluğu X sonlu olan bircins idarəolunan Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Başlanğıc vəziyyəti x və strategiyası π olan diskontlanmış gelir

$$v_{\beta}^{\pi}(x) = M_x^{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} r(x_{i-1}, a_i), \quad 0 < \beta < 1 \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, M_x^{π} , – P_x^{π} ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir, $x \in X$.

İxtiyari σ strategiyası üçün

$$\lim_{\beta \uparrow 1} \frac{v_{\beta}^{\pi}(x) - v_{\beta}^{\sigma}(x)}{(1 - \beta)^n} \geq 0, \quad x \in X$$

münasibəti ödəniləndiyi halda π strategiyası n – optimal strategiya adlanır, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ (bax, [2]).

$$g_0^{\pi}(x, N) = M_x^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r(x_{i-1}, a_i), \quad x \in X, \quad N = 1, 2, \dots$$

$$g_{n+1}^{\pi}(x, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_n^{\pi}(x, t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

olsun, odur ki,

$$g_n^{\pi}(x, N) = M_x^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{N+n-i}^n r(x_{i-1}, a_i).$$

İsbat olunur ki (bax, [3]). π strategiyasının n – optimallığı, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [g_{n+1}^{\pi}(x, N) - g_n^{\sigma}(x, N)] \geq 0, \quad x \in X$$

şərtinə ekvivalentdir (σ ixtiyari strategiyadır). Xüsusi halda (-1) optimalıq bir addıma orta gelir kriterisinə görə optimalıq

ile üst-üstə düşür. Stasionar φ strategiyası üçün (1) funksiyasının analitik davamı $\beta=1$ nöqtəsi ətrafında Loran sırasına ayrılır:

$$v_{\beta}^{\varphi} = h_{-1}^{\varphi}(x)/(1-\beta) + h_0^{\varphi}(x) + h_1^{\varphi}(x)(1-\beta) + \\ + h_2^{\varphi}(x)(1-\beta)^2 + \dots, \quad x \in X, \\ v_{\beta}(x) = \sup_{\pi} v_{\beta}^{\pi}(x), \quad x \in X$$

deyəri üçün

$$v_{\beta}(x) = h_{-1}(x)/(1-\beta) + h_0(x) + h_1(x)(1-\beta) + \\ + h_2(x)(1-\beta)^2 + \dots$$

analoji ayrılışı doğrudur.

$\{h_{-1}, h_0, h_1, \dots\}$ vektorlar ardıcılığı bütün φ -lər üzrə $\{h_{-1}^{\varphi}, h_0^{\varphi}, \dots\}$ ardıcılığının leksikoqrafik supremumudur və φ yalnız və yalnız $h_m^{\varphi} = h_m$ olduğu halda n -optimaldır, $m = -1, 0, 1, \dots, n$. 1-ə kifayət qədər yaxın bütün β -lər üçün eyni zamanda optimal stasionar φ strategiyası vardır (bax, [1]); bu strategiya ixtiyari $n \geq -1$ üçün n -optimaldır. İxtiyari $n \geq 0$ qiymətində $h_{-1}, h_0, \dots, h_n$ vektorları $n+1$ tənlikdən ibarət aşağıdakı sistemi ödəyir:

$$\left. \begin{aligned} h_{-1}(x) &= \sup_{a \in A_{-1}(x)} P^a h_{-1}(x), \\ h_0(x) &= \sup_{a \in A_0(x)} [r(x, a) + P^a(h_0 - h_{-1})(x)], \\ h_m(x) &= \sup_{a \in A_m(x)} P^a(h_m - h_{m-1})(x), \quad m = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

burada $x \in X$,

$$P^a f(x) = \sum_{y \in X} f(y) p(y|x, a),$$

$A_{-1}(x) = A(x)$, $A_m(x)$, $-A_{m-1}(x)$ çoxluğunun ələ altı çoxluğu-
dur ki, $h_{m-1}(x)$ üçün tənlikdə bu çoxluqda supremum alınır.

(2) sistemi $h_{-1}, h_0, \dots, h_{n-2}$ vektorlarını birqiymətli təyin edir (bax, [5]).

Həssas kriterilərə hesabi və semi-Markov modelləri üçün də baxılır.

M i s a l. $X = \{x, y\}$, $A(x) = \{a, b\}$, $A(y) = \{c\}$, $p(y|\cdot, \cdot) = 1$, $p(x|\cdot, \cdot) = 0$, $r(x, a) = r(y, c) = 1$, $r(x, b) = 0$ olsun. Bu halda randomlanılmayan iki stasionar strategiya vardır: $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = c$ və $\psi(x) = b$, $\psi(y) = c$. Onda

$$v_{\beta}(x) = v_{\beta}^{\varphi}(x) = 1 + \beta + \beta^2 + \dots = (1 - \beta)^{-1},$$

$$v^{\psi}(x) = \beta + \beta^2 + \dots = (1 - \beta)^{-1} - 1.$$

φ və ψ strategiyalarının hər ikisi bir addıma orta gəlir kriterisinə görə optimaldır, lakin aydındır ki, sonlu zaman parçasında φ üstün strategiya olmur. Bu da özünü onda əks

etdirir ki, φ ixtiyari $n \geq -1$ qiymətlərində n -optimal, ψ isə yalnız (-1) -optimal strategiyadır.

Əd. [1] Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 719-26; [2] Veinott A. F., «Ann. Math. Statist.», 1969, v. 40, p. 1635-60; [3] Sładky K., «Kybernetika», 1974, v. 10, p. 350-67; [4] Юшкевич А. А., Читаев Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213-42; [5] Dekker R., Hordijk A., «Math. Operation Research», 1988, v. 13, p. 395-420.

DİNAMİK PROGRAMLAMA стохастик «динамическое программирование стохастическое; stochastic dynamic programming» – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma*.

DİNAMİK RİÇARDSON ƏDƏDİ «динамическое число Ричардсона; Richardson dynamical number» – bax, *Riçardson ədədi*.

DİNAMİK SİSTEM «динамическая система; dynamical system» – bax, *Erqodik nəzəriyyə*.

DİNAMİK SİSTEM xalis nöqtəvi spektrli «динамическая система с чисто точечным спектром; dynamical system with pure point spectrum» – *erqodik nəzəriyyə* üçün mühüm dinamik sistemlər sinfidir. $\{S^t\}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının erqodik

(bax, *Erqodiklik*) birparametrik çevirmələr qrupu və $\{U^t\}$ – bu qrupa qoşma unitar operatorlar qrupu olsun. Xalis nöqtəvi spektrli dinamik sistem onunla təyin olunur ki, $\{U^t\}$ qrupu məxsusi funksiyaların tam sistemində malikdir. Bu halda hər bir məxsusi qiymət 1-ə bölünəndir və bunların çoxluğu Abel qrupu əmələ gətirir. Belə D. s. inteqrallanan D. s. nəzəriyyəsinə mühüm rol oynayır. Hamilton sisteminin Arnold – Liuvill mənaada inteqrallanmazlığı halında xalis nöqtəvi spektrli D. s. demək olar ki, hər bir erqodik komponentdə yaranır. Baxılan D. s. üçün spektr metrik invariantları tam sistemini əmələ gətirir (bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*).

Xalis nöqtəvi spektrli D. s. doğuran stasionar təsadüfi proses

$$\zeta(t) = \sum a_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \sum b_s \sin(\omega_s t + \varphi_s)$$

şəklində ifadə olunur, burada a_s , b_s – sabitlərdir, φ_s fazaları isə təsadüfidir. Stasionarlıq və erqodiklik şərti fazaların birgə paylanması üzərinə ağır məhdudiyyətlər qoyur (bax, [2]).

Əd. [1] Корнфельд И. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

DİNAMİK SİSTEM; kiçik stoxastik kükrəntilər «динамическая система; малые стохастические возмущения; dynamical system; small stochastic perturbations of» – kiçik təsadüfi kükrəntilərin təsirinə məruz qalan aşağıdakı dinamik sistem modelləri öyrənilir:

1) $\dot{\zeta}_t^{\varepsilon} = b(\zeta_t^{\varepsilon}, \varepsilon \psi_t)$, ψ_t – qeyd olunmuş təsadüfi prosesdir;

2) $\dot{\zeta}_t^{\varepsilon} = b(\zeta_t^{\varepsilon}) + \varepsilon \dot{\psi}_t$;

3) Ümumi dinamik sistemlər.

1)–2) sistemləri üçün böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi, böyük yayınmaların inteqral və lokal asimptotikaları tipli limit teoremləri müəyyən olunur (bax, [1], [2], [4], [5]). 2) sistemi

üçün, bəzi hallarda $\zeta_t = b(\zeta_t)$, $\zeta_0 = x$ limit tənliyinin həllinin yeganə olmadığı hal üçün, limit sistemini dəqiq ifadə etmək mümkün olur (bax, [3]).

Əd. [1] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуация в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [2] Вентцель А. Д., Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов, М., 1986; [3] Веретенников А. Ю., «Матем. заметки», 1983, т. 33, № 6, с. 929–31; [4] Скороход А. В., Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, К., 1987; [5] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969.

DİNAMİK SİSTEM(i) statistik mexanikanın « динамическая система статистической механики; **dynamical system** of statistical mechanics » – Nyuton tənlikləri tipli hərəkət tənlikləri üçün Koşi məsələsinin həlli boyunca zaman yerindəyişmələri ilə verilən hissəciklər sayı sonsuz (sərbəstlik dərəcəsi) sistemin faza fəzası M -də $\{S_t\}$ çevirmələrinin birparametrik qrupuna verilən addır.

Tənliklər sistemi sonsuz olduğundan bütün M -də birqiymətli həll, ümumiyyətlə, olmur. Başlanğıc verilənlərin «massiv» çoxluğu M' -də ($M' \subset M$) Koşi məsələsinin birqiymətli həllinin varlığı

haqqında qeyri – trivial sual yaranır və bu halda M -də (hissəciklərin vəziyyətləri sistemi) ehtimal ölçülərinin «geniş» sinfi üçün $\mu(M') = 1$ olduğu nəzərdə tutulur. Ümumi halda ossilyator sistemləri (harmonik və qeyri – harmonik) adlanan sistemlərdə belə M' çoxluğu (olduqca müəkkəb şərtlərilə seçilən) qurulmuşdur. (bax, [1], [2]). $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında qarşılıqlı təsirin cüt potensialı U -nun təsiri altında hərəkət edən hissəciklərin «kəsilməz» sistemləri üçün belə çoxluq, yalnız $d=1, 2$ qiymətlərində qurulmuşdur (U üzərində müəyyən şərtlərlə) (bax, [2] – [6]).

M -də toplanmış ehtimal ölçüləri sinfinə *Gibbs təsadüfi meydanlarının* geniş sinfinə müvafiq Gibbs ölçüləri daxildir.

D. s.-in invariant ölçüləri haqqında məsələ mühüm rol oynayır. Burada «təbii» namizədlər qarşılıqlı təsir potensialı U -ya müvafiq olan bərabərçəkili paylanmalar adlandırılan Gibbs təsadüfi meydanlarıdır. Potensialı U olan ixtiyari Gibbs paylanması üçün $\mu(M')=1$ xassəsinə malik $M' \subset M$ çoxluğunu ixtiyari $d \geq 1$ üçün qurmaq olur (bax, [7], [8]). Potensialı U olan hər bir bərabərçəkili Gibbs paylanması invariant olur. Bu halda konkret bərabərçəkili paylanma nəzərdə tutularaq, statistik mexanikanın bərabərçəkili dinamik sistemindən söhbət gedir.

Statistik mexanikanın D. s.-nin bütün invariant ölçüləri çoxluğunun təsviri məsələsinə hər hansı aprior sinifdə baxmaq təbii olardı. Belə bir sinif kimi bir sıra məhdudiyyətləri ödəyən və Gibbs təsadüfi meydanları ilə verilən, M -də μ ölçüləri sinfinə baxılmışdır. Bu sinifdə invariant ölçülər çoxluğu bərabərçəkili Gibbs paylanmaları ilə invariantdır. Burada U qarşılıqlı təsirin cırlaşmayan olması şərti mühümdür. Bərabərçəkili olmayan invariant ölçülər olan hallar vardır.

Bərabərçəkili D. s.-in ergodiklik xassələri haqqında və ya daha geniş surətdə, $t \rightarrow \pm\infty$ olduqda $\mu_t = \mu_0 S_t$ ölçüsünün eyniləşməsi Gibbs paylanmasına yığılması haqqında məsələ ümumi halda çox çətinidir. Hal-hazırda bu məsələ yalnız ideal qaz və ona yaxın sistemlər üçün araşdırılmışdır.

178 DİNAMİK

Əd. [1] Lanford O., Lebowitz J., Lieb E., «J. Stat. Phys.», 1977, v. 16, № 6, p. 453–61; [2] Fritz J., «J. Stat. Phys.», 1983, v. 33, № 4, p. 397–412; [3] Lanford O., «Comm. Math. Phys.», 1968, v. 9, № 3, p. 176–91; 1969, v. 11, № 4, p. 257–92; [4] Dobrushin R. L., Fritz J., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 55, № 3, p. 275–92; [5] Dobrushin R. L., Fritz J., «Comm. Math. Phys.», v. 57, № 1, p. 67–81; [6] Marchioro C., Pellegrinotti A., Pulvirenti M., Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, v. 2, Amst. – Oxf. – N. Y., 1981, p. 733–46; [7] Синай Я. Г., «Вестн. МГУ. Матем., мех.», 1974, т. 29, № 1, с. 152–58; [8] Presutti E., Pulvirenti M., Tigorri B., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 47, № 1, p. 81–95; [9] Гуревич Б. М., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 5, с. 45–82; [10] Gurevich B. M., Suho v Yu. M., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 49, № 1, p. 63–96; 1977, v. 54, № 1, p. 81–96; v. 56, № 3, p. 225–36; 1982, v. 84, № 3, p. 333–76.

DİOFANT YAXINLAŞMALARI; ergodik məsələlər « Диофантовы приближения; эргодические задачи; **Diophantine approximation**; ergodic problems » – bax, *Ergodik məsələlər(i)* Diofant yaxınlaşmalarının.

DİRAK ÖLÇÜSÜ « Дирака мера; **Dirac measure** » – bax, *Atomik ölçü, Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası*.

DİRİXLƏ FƏZASI « Дирихле пространство; **Dirichlet space** » – bax, *Markov prosesi Dirixlə forması*.

DİRİXLƏ FORMASI « Дирихле форма; **Dirichlet form** » – bax, *Markov prosesi Dirixlə forması*.

DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİ стохастик « Дирихле задача стохастическая; stochastic **Dirichlet problem** » – bax, *Potensial nəzəriyyə Markov prosesi üçün*.

DİRİXLƏ PAYLANMASI « Дирихле распределение; **Dirichlet distribution** » –

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 + \dots + x_k = 1, x_i > 0\}$$

çoxluğunda toplanmış, birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1-1} \dots x_k^{\alpha_k-1},$$

$$\alpha_i > 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

olan $X_1, \dots, X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kəsilməz birgə ehtimal paylanmasıdır. D. p. bəzən çoxölçümlü beta – paylanma da adlandırılır, belə ki, Dirixlə paylanmalı X vektorunun hər bir X_i komponentinin marginal paylanması parametrləri α_j və

$$\alpha_0 - \alpha_j \text{ olan } \textit{beta - paylanma} \text{ ilə üst-üstə düşür, } \alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

$r_1, \dots, r_k$ – mənfi olmayan tam ədədlər olduqda D. p.-nin

$M(X_1^{r_1} \dots X_k^{r_k})$ şəkilli momentləri

$$\frac{\Gamma(\alpha_0) \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i + r_i)}{\Gamma(\alpha_0 + r_0) \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}$$

nisbətine bərabərdir, burada $r_0 = \sum_{i=1}^k r_i$. Xüsusi halda X_i

tesadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, α_i/α_0 və $\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)/\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)$ nisbətine, X_i və X_j -nin kovariasiyası isə $i \neq j$ olduqda, $\text{cov}(X_i, X_j) = -\alpha_i \alpha_j / \alpha_0^2(\alpha_0 + 1)$ nisbətine bərabərdir.

Əd.: [1] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

DİSKONTLAMA « дисконтирование; discounting » – dəyərsizlənmə, qiymətdən düşmə kimi anlaşılan anlayışdır (bax, *Variation bərabərsizliklər stoxastik idarəetmədə*).

DİSKONTLAMA ƏMSALI « дисконтирования коэффициент; discount rate » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

DİSKRET ANSAMBL « дискретный ансамбль; discrete ensemble », diskret ehtimal paylanması – sonlu m elementli $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ çoxluğu ilə bu çoxluqda verilmiş ehtimal paylanması $p(x)$ -dən ibarət $\{X, p(x)\}$ cütünə deyilir; $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, m$ xəbər (məlumat) kimi anlaşılr və bunlar bəzən elementar hadisələr kimi də adlandırılır. $p(x_i)$ – elementar hadisənin ehtimalı, $P(A)$ isə A , $A \subseteq X$ hadisəsinin ehtimalıdır.

Aydındır ki, $p(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^m p(x_i) = 1$, $\Pr(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

ədədi p ehtimalı ilə verilmiş X çoxluğundan təsadüfi qaydada

A çoxluğundan məlumatın seçilməsi ehtimalıdır. Δ = simvolu sol və sağ tərəflərin tərəfə görə bərabər olmasını ifadə edir. $\Pr(A)$ ədədi A çoxluğunun ehtimalı kimi də adlandırılır.

Ehtimal paylanması haqqında informasiya olduğu halda və ya paylanmanın dəqiq təsviri rol oynamadığı halda ansambl sadəcə X ilə işarə olunur.

$X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – iki sonlu çoxluq olsun.

Elementləri bütün nizamlanmış, mümkün (x_i, y_j) cütlerinden ibarət çoxluq X və Y çoxluqlarının hasilı adlanır və XY kimi işarə olunur; $x_i \in X$, $y_j \in Y$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Bu tərəfə əsasən XY və YX tamamilə müxtəlif çoxluqlardır.

$X = Y$ olduqda, hasil X^2 kimi işarə olunur. İkiden artıq çoxluğun hasilı analogi təyin olunur. $X_1 X_2 \dots X_n$ hasilinin elementləri bütün n uzunluqlu elə $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ ardıcılıqlardır ki, birinci $x^{(1)}$ elementi X_1 çoxluğuna, ikinci $x^{(2)}$ elementi X_2 çoxluğuna və s. daxildir. Əgər bütün çoxluqlar X çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə, belə hasil X^n kimi işarə olunur.

XY – iki sonlu X və Y çoxluqlarının hasilı olsun. Bu çoxluqda hər bir (x_i, y_j) cütünə qarşı $p(x_i, y_j)$ ehtimalı qoyulmuşdur və XY -də $p(x, y)$ birgə ehtimal paylanması verilmişdir; $x_i \in X$, $y_j \in Y$. Aydındır ki,

$$p_1(x_i) = \sum_{y_j \in Y} p(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$p_2(y_j) = \sum_{x_i \in X} p(x_i, y_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

münasibətləri ilə X və Y çoxluqlarında uyğun olaraq $p_1(x)$ və $p_2(y)$ ehtimal paylanmaları təyin olunur. Beləliklə, $\{XY, p(x, y)\}$ ansamblının verilməsi, iki X və Y ansamblının birgə verilməsi kimi anlaşılr.

Əgər XY çoxluğunda ehtimal paylanması $p(x, y)$ bütün $x_i \in X$ və $y_j \in Y$ elementləri üçün

$$p(x_i, y_j) = p_1(x_i) p_2(y_j) \quad (3)$$

şərtini ödəyirsə, X və Y statistik asılı olmayan ansamblar adlanır. Əks halda, ansamblar statistik asılıdır, deyilir.

Diskret mənbə. *Diskret mənbə* elə bir qurğudur ki, o, hər bir vahid zaman (məs., hər bir dəqiqə) ərzində X diskret çoxluğundan bir xəbər (məlumat) seçir. Bir qayda olaraq, X çoxluğu hər bir zaman anı üçün eyni götürülür, lakin bəzi hallarda hər bir an üçün özünün xəbərlər çoxluğu da ola bilər.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1928.

DİSKRET AYRILIŞ (1) Karunen–Loève « дискретное разложение Карунена–Лоэва; Karhunen–Loève discrete decomposition » – bax, *Karunen–Loève ayrılığı diskret*.

DİSKRET BƏYAZ KÜY « дискретный белый шум; discrete white noise », tamamilə təsadüfi ardıcılıq, – qarşılıqlı asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış (və ya stasionar təsadüfi ardıcılıqların korrelyasiya nezeriyyəsi baxımından cüt-cüt qeyri – korrelyar və eyni σ^2 dispersiyalı), orta qiymətləri sıfır bərabər $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət $\zeta(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$ stasionar ardıcılığıdır.

D. b. k. – korrelyasiya funksiyası: $\tau = 0$ olduqda $B(\tau) = \mathbf{M} \zeta(t + \tau) \zeta(t) = \sigma^2$ və $|\tau| > 0$ olduqda $B(\tau) = 0$ spektral sıxlığı $f(\lambda) = \sigma^2 / 2\pi$ isə sabit olan stasionar təsadüfi ardıcılıqdır; $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

DİSKRET BÖLÜNƏNLİK XASSƏSİ, VERİLƏNLƏRİN HİSSƏSİNİN « дискретной разделмости свойство порции данных; the property of discrete separability of data portion » – bax, *Etibarlılığın riyazi nezeriyyəsi*.

DİSKRET EHTİMAL PAYLANMASI « дискретное вероятностное распределение; discrete probability distribution » – bax, *Diskret ansambl*.

*** DİSKRET FURYE ÇEVİRMƏSİ « дискретное преобразование Фурье; discrete Fourier transform »** – aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunan çevirmədir:

$$a(n_1, \dots, n_k) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{N_k-1} x(j_1, \dots, j_k) W_{N_1}^{n_1 j_1} \dots W_{N_k}^{n_k j_k}$$

(düz çevirmə) və

$$x(j_1, \dots, j_k) = \frac{1}{N_1 \dots N_k} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_k=0}^{N_k-1} a(n_1, \dots, n_k) W_{N_1}^{-n_1 j_1} \dots W_{N_k}^{-n_k j_k}$$

(ters çevirmə), burada $j_l = 0, \dots, N_l - 1$, $n_l = 0, \dots, N_l - 1$, $l = 1, \dots, k$, $W_n = \exp \{-2\pi i / N\}$; $k > 1$ olduqda çevirmə çoxölçülü, $k = 1$ olduqda isə birölçülü D. F. ç., x və a kompleks olduqda kompleks, x həqiqi olduqda isə həqiqi D. F. ç. adlanır.

Birölçülü halda yuxarıdakı münasibətləri $A = W_{N \times N}$ vektor formasında yazmaq olar, burada $A_n = (a(1), \dots, a(N-1))^T$, $x_N = (x(1), \dots, x(N-1))^T$, W_N , $(n+1)$ -ci sətir və $(j+1)$ -ci sütundakı elementləri W_N^{nj} olan, $n, j = 0, \dots, N-1$, $(N \times N)$ -matrisdir. D. F. ç.-ni hesablamaq üçün effektiv alqoritmlərdən istifadə etmək olar (bax, *Süretli Furiye çevirməsi, Vinqrad metodu*).

*** DİSKRET MƏNBƏ « дискретный источник; discrete source »** – bax, *Diskret ansambl*.

DİSKRET MODULYASIYA « дискретная модуляция; digital modulation » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya*.

DİSKRET ÖLÇÜ « дискретная мера; discrete measure » – bax, *Atomik ölçü*.

DİSKRET PAYLANMA « дискретное распределение; discrete distribution » – sonlu və ya hesabi sayda birməqtevi $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots \in \mathcal{A}$ çoxluqlarında toplanmış, $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmasıdır. D. p.

$p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ şərtlərini ödəyən p_i ədədləri toplusu ilə tam mənası ilə təyin olunur; bu halda $A \in \mathcal{A}$ hadisəsinin ehtimalı

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

D. p. atomik paylanmanın xüsusi halıdır, bu halda atomlar birməqtevi çoxluqlardır.

Əgər $i \neq j$, $A_i A_j = \emptyset$ şərtlərini ödəyən sonlu və ya hesabi sayda $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ hadisələri varsa ki, $p_i = \mathbf{P}(A_i) \geq 0$,

$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = 1$ olsun və $X(\omega)$ A_i çoxluğunda sabit olsun, yeni

$X(\omega) = x_i$, $\omega \in A_i$ olsun. Onda $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən $X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti diskret təsadüfi kəmiyyət adlanır. D. p.-ya malik təsadüfi kəmiyyət diskret təsadüfi kəmiyyət adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin D. p.-nın xüsusi halı *şəbəkəvari paylanmadır*.

Ən çox yayılmış D. p.-lardan – *binomial paylanma, həndəsi paylanma, hiperhəndəsi paylanma, polinomial paylanma, Puasson paylanması* kimi paylanmaları qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

DİSKRET PAYLANMA FUNKSİYASI « дискретная функция распределения; discrete distribution function » – bax, *Lebəq ayrılığı*.

DİSKRET RENORMQRUP « дискретная ренорм-группа; discrete renormalization group » – bax, *Renormalizasion qrup*.

DİSKRET SEÇİMİ, PROSESİN « дискретная выборка процесса; discrete sample of a process » – bax, *Diskretizasiya problemi*.

*** DİSKRET TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « дискретная случайная величина; discrete random variable »** – diskret paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən sonlu və ya hesabi sayda qiymətlər alan $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir. $\xi(\omega)$ sonlu və ya hesabi sayda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətlərini alan ξ funksiyası olsun ki, $\xi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$. Onda $\xi(\omega)$, yalnız və yalnız, hər bir n qiymətində

$$\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} \in \mathcal{F} \quad (1)$$

münasibəti ödənilirdi halda $\mathcal{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən funksiyadır.

Doğrudan da, $\xi(\omega)$ funksiyası (1) münasibətini ödəyirsə,

$\xi(\omega)$ $\mathcal{F}$ – ölçülən funksiyadır, çünki hər bir həqiqi $x \in \mathbb{R}^1$ üçün

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{x_i < x} \{\omega: \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}.$$

Digər tərəfdən, əgər $\xi(\omega)$ $\mathcal{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən funksiyadırsa, onda məlumdur ki (bax, [1], teorem 1, səh. 54), hər bir həqiqi x üçün $\{\omega: \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$.

Beləliklə, əgər $\xi(\omega)$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $x_1, \dots, x_n, \dots$ həqiqi qiymətlərini alan diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda n -in hər bir qiymətində

$$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} = p_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

ehtimalı təyin olunmuşdur. (2) ehtimallar toplusu diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması adlanır.

$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} = p_n$, $n = 1, 2, \dots$ ehtimallarını təyin etmək üçün verilən ixtiyari bir qayda diskret $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu adlanır.

Paylanma qanunu hər hansı bir düstur vasitəsilə verilə bilər (bax, *Binomial paylanma, Həndəsi paylanma, Mənfə binomial paylanma, Polinomial paylanma* və s.).

Bu halda p_n ehtimalları $\xi(\omega)$ -nın x_n qiymətini alması üçün müəyyən olunmuş bir düstur vasitəsilə ifadə olunur. $\xi(\omega)$ -nın ala biləcəyi bütün müxtəlif qiymətləri və uyğun olaraq hər bir qiyməti alması ehtimalı cədvəl şəklində də verilə bilər:

$\xi(\omega)$ -nin mümkün qiymətləri	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$P\{\xi(\omega) = x_i\}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Bu cədvəl $\xi(\omega)$ D.t.k.-nin ehtimallarının paylanması cədvəli adlanır.

$\xi(\omega)$ D.t.k. üçün

$$p_n \geq 0, \quad \sum p_n = 1$$

münasibəti həmişə doğrudur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей в математической статистике, К., 1979.

DISKRETİZASIYA PROBLEMİ « дискретизации проблема; discretization problem » – funksiyanın zaman və amplitud üzrə kvantlanması problemi. Kesilməz zamanlı $\{\zeta(t), t \in (-\infty; +\infty)\}$ stasionar təsadüfi prosesinin bir-birindən eyni zaman intervallarndakı $k\Delta$, $k = 0, \pm 1, \dots$ zaman anlarında hesablanan qiymətlər ardıcılığı $\{\zeta_\Delta(k) = \zeta(k\Delta)\}$, $-\zeta(t)$ prosesinin Δ diskretizasiya addımlı diskret seçimi adlanır. Bu seçim riyazi gözleməsi $M\zeta(t) = M\zeta_\Delta(k)$ və kovariasion funksiyası $B_\Delta(\tau) = B(\tau\Delta)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ olan stasionar təsadüfi ardıcılıqdır, burada $B(\tau)$, $-\zeta(t)$ prosesinin kovariasion funksiyasıdır. $\zeta(t)$ stasionar prosesinin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ ilə $\zeta_\Delta(k)$ ardıcılığının spektral sıxlığı

$$f_\Delta(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi j/\Delta)$$

münasibətlə bağlıdır və bu münasibət tezliklərin bir-biri üzərinə yığılması effektiv ifadə edir. Tezliklərin sonlu $-\pi/\Delta < \lambda < \pi/\Delta$ zolağında Furiye integralı ilə verilən, təsadüfi olmayan $\zeta(t)$ funksiyaları üçün

$$\zeta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t/\Delta - k)}{\sin \pi(t/\Delta - k)} \zeta(k\Delta) \quad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan Kotelnikov-Şennon düsturundan istifadə olunur. Stasionar təsadüfi proseslər üçün tətbiqi məsələlərdə $\zeta(t)$ prosesinin qiymətinə ən yaxşı yaxınlaşmanın

$$\zeta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \zeta(k\Delta)$$

xətti kombinasiyası vasitəsilə alınması məsələsinə 1949-da A. M. Yaqlom tərəfindən baxılmışdır. O, belə xətti kombinasiyanın bütün t -lər üçün zəruri və kafi şərtlərinin varlığını olduğunu göstərmişdir. Bu şərt

$$M|\zeta(t) - \zeta^*(t)|^2 = 0 \quad (2)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Spektri $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ zolağında toplanmış $\zeta(t)$ prosesləri üçün (1) düsturu doğrudur, bu halda, sonsuz cəm kvadratik orta limit kimi anlaşılır. Bundan başqa, (2) şərtindən aydındır ki, $\zeta(t)$ prosesinin spektrinin ehtiva etdiyi nöqtəsi yoxdur ki, bu nöqtələr arasında məsafə $2\pi/\Delta$ -ya bölünən olsun.

$[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ zolağının sərhəd tezliyi π/Δ – N a y k v i s t tezliyi adlanır.

Spektri $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ tezliklər zolağında topalaşmayan $\zeta(t)$ prosesinin diskretizasiyasında tezliklərin bu zolağa yığılması həli baş verir.

Əgər $\zeta(t)$ stasionar siqnalına asılı olmayan $\varepsilon(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\text{cov}(\varepsilon(t), \zeta(t)) = 0$ olan stasionar küyü fonunda baxılırsa, δ intervallı amplitud üzrə $\zeta(t) + \varepsilon(t)$ funksiyasının diskretizasiyası, $M\varepsilon^2(t) - (M\varepsilon(t))^2$ kəmiyyətinin δ kəmiyyəti ilə müqayisədə kiçik olması şərti ödənilərsə, $\varepsilon(t)$ engəllərinin aradan qaldırılmasına səbəb olur. Lakin bu $\zeta(t)$ -nin təhrifinə səbəb olur və bunlar diskretizasiya küyləri adlanır. Diskretizasiya küyləri $Y(t)$ ilə işarə olunur. Riyazi gözleməsi $M\zeta(t) = 0$, dispersiyası $D\zeta(t) = \sigma^2$ olan normal stasionar təsadüfi proses $\zeta(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ üçün diskretizasiya küylərinin kovariasion funksiyası

$$B_Y(t) \approx \frac{\delta^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ -\frac{4n^2\pi^2(1 - B_\zeta(t))}{(\delta/\sigma)^2} \right\}, \quad -\infty < t < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər $\delta = o(\sigma)$ olarsa, onda

$B_Y(t) \approx \sigma^2/12$ olur. Əgər $\zeta(t)$ -nin spektral sıxlığı eni $2h$ olan aşağıtezlikli zolaqda müntəzəm, digər tezliklər üçün sıfıra bərabər olarsa, onda diskretizasiya küylərinin spektral sıxlığı

$$f_h(\lambda) \approx \frac{\delta^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{3\delta^2}{2\sigma^2 h}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp \left\{ -\frac{3\delta^2 \lambda^2}{8n^2 \pi^2 h^2 \sigma^2} \right\}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur.

$Y(t)$ -nin diskretizasiya küyləri və $\zeta(t)$ prosesinin qarşılıqlı kovariasion funksiyası

$$B_{\zeta Y}(t) \approx 2B_\zeta(t) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp \left\{ -\frac{2\pi k^2}{(\delta/\sigma)^2} \right\}, \quad -\infty < t < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur. Sonuncu düsturdan aydındır ki, $(\delta/\sigma) < 1$ olduqda $B_{\zeta Y}(t) \approx 10^{-8} B_\zeta(t)$.

Əd.: [1] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, М., 1966; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [3] Яглом А. М., «Успехи матем. наук» 1949, т. 4, в. 4, с. 173–78.

DISKRETLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « дискретизируемое случайное поле; discretizable random field » – bax, Renormalization grup.

DISKRİMİNANT ANALİZ « дискриминантный анализ; discriminant analysis » – müşahidələrin (obyektlərin) verilmiş bir neçə sinifdən (qruplar, kateqoriyalar, populyasiyalar) birinə mənsubluğunu təyin edən təsnif qaydalannın müəyyən olunmasına həsr olunan, statistik analizin bölmələrindən biridir. Təsnifatlandırılması tələb olunan ilkin müşahidələrin

verilənlərin X matrisi şəklində verildiyi fərz olunur. Bu müşahidələrin k sayda $D_1, \dots, D_k$ siniflərindən olan müşahidələrin qarışığından ibarət ümumi çoxluqdan olduğu da fərz olunur, belə ki, i -ci sinfə uyğun olan ehtimal paylanmalar qanunu $P_i(X)$, $i = 1, \dots, k$ paylanmalarının toplusudur. $P_i(X)$ paylanmalarının ya məlum olduğu və ya onların müşahidəçiyə məlum olan öyrədici seçimlərdə (rus. обучающие выборки) – $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn_j}$ seçimləri ilə statistik olaraq qiymətləndirilə biləcəkləri fərz olunur. $j = 1, 2, \dots, k$, $X_{jl} \in D_j$ ($\{X_{jl}\}$, $l = 1, \dots, n$ seçiminin bütün müşahidələri eyni bir D_i ümumi çoxluğundan olarsa, $\{X_{jl}\}$, $l = 1, \dots, n$ – öyrədici seçim adlanır). X -dən olan müşahidələrin D_j siniflərindən (paylanma qruplarından) birinə aid olmasının təsnif qaydası S -i müəyyən etmək tələb olunur, bu şərtlə ki, itkilərin müəyyən mənadə minimal olsun. Öyrədici seçimlər X seçiminin hissəsi də ola bilər.

D. a.-də təsnif keyfiyyətinin funksionalının ümumi şəkl

$$Q(S) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^k c_{ij} q_j P_S(i|j)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada c_{ij} , q_j və $P_S(i|j)$ – uyğun olaraq obyektin j -ci sinifdən i -ci sinfə təsnifindən itkiləri, j -ci sinfin obyektlərinin xüsusi çəkisi (aprior ehtimal) və təsnifedici S qaydasından istifadədə obyektlərin j -ci sinifdən i -ci sinfə səhv təsnifi ehtimalıdır.

Bir çox real məsələlərdə obyektlərin düzgün təsnif olunmaması nəticəsində yaranan c_{ij} itkilərinə və bəzən də, müxtəlif siniflərə mənsub obyektlərin üzə çıxmasının aprior q_j ehtimallarını qiymətləndirmək çətin olur. Bu hallarda *Beyes yanaşmasından* istifadə etmək olar ki, bu yanaşmaya görə X müşahidəsi aposterior ehtimalı və loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyası $\ln(q_i P_i(X))$ bütün $i = 1, 2, \dots, k$ qiymətlərində maksimal olan uyğun j nömrəli sinfə aid olunmalıdır. Beləliklə, «cari» X müşahidəsinin i siniflərindən birinə aid olunması haqqında qərar $d_j(X) = \ln(q_j P_j(X))$ funksiyasının qiymətlərinə əsasən qəbul edilir. $d_j(X)$ funksiyaları və bu funksiyaların təyin etdiyi $d_j(X) = d_i(X) - d_j(X)$ səthləri – diskriminant funksiyalar adlandırılır. Beləliklə, axtarılan təsnif qaydası S , $d_j(X) = \arg \max_{1 \leq i \leq k} d_i(X)$ olduğu halda, uyğun $S: X \in D_j$

diskriminant funksiyalar sistemi ilə təyin olunur. *Beyes yanaşmasına* əsaslanan təsnif qaydası səhv təsnifin orta qiyməti –

$$Q_i(S) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^k q_j P_S(i|j)$$

kəmiyyətini minimallaşdırır.

Diskriminant funksiyaların qurulmasında *Beyes yanaşmasından* başqa loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyalarının nisbəti ideyasına bilavasitə əsaslanmayan yanaşma da tətbiq olunur. Bu halda $\{d(X; \theta)\}$ parametrik ailəsindən ələ $d_i(X) = d_i(X; \theta)$ funksiyalar sistemini seçməyə cəhd edilir ki, bu sistemdə analiz olunan siniflər arasındakı bu və ya digər ölçü maksimallaşsın, məs.:

$$\tilde{Q}_S(\theta) =$$

$$= \sum w_{ij} \frac{[\hat{M}_i\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\} - \hat{M}_j\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\}]^2}{\hat{q}_i \hat{D}_i\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\} + \hat{q}_j \hat{D}_j\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\}}$$

burada $\theta \in \Theta$, $d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j) = d_i(X; \theta_i) - d_j(X; \theta_j)$, $\hat{q}_i$ – aprior q_i ehtimalının statistik qiymətidir, məs., $\hat{q}_i = n_i/n$. Bu münasibətdə w_{ij} «çəkili» bütün mümkün sinif cütləri arasında i və j nömrəli siniflərin fərqlənilməsinin düzgünlüyünün nisbi mühümlüyünü nəzərə alır, yeni w_{ij} mehz c_{ij} kəmiyyətlərinin analoqlarıdır, $\hat{M}_i\{\xi(X)\}$ və $\hat{D}_i\{\xi(X)\}$ uyğun olaraq $\xi(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləmə və dispersiyasının uyğun statistik qiymətləridir və bu kəmiyyətlər hesablanılarkən fərz olunur ki, X -in argumenti i -ci sinfə aiddir, yəni bu statistik qiymətlər uyğun öyrədici seçim üzrə qiymətləndirilmişdir. Xüsusi halda, məlum *Fişer xətti diskriminant funksiyası*, $k=2$ halı üçün, təsvir olunan sxemin həlledir.

A. Vald (A. Wald) *Fişer diskriminant funksiyasının* optimallığını göstərmişdir. O, *Beyes* mənadə, $P_1(X)$ və $P_2(X)$ bir-birindən yalnız orta qiymətlər vektoru ilə fərqlənən çoxölçülü normal paylanmalar olduğu halda da diskriminant funksiyasının optimallığını göstərmişdir.

Əd.: [1] Fisher R. A., «Ann. of Eugenics», 1936, v. 7, p. 179–88; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

DISKRIMINANT FUNKSIYA «дискриминантная функция; discriminant function» – statistik təsnifat və obrazların müəyyən edilməsi məsələlərində *həllədiçi qaydanın* verilə formalarından biridir. $X = (x_1, \dots, x_p)^T$ çoxölçülü müşahidəsinin verildiyi fərz olunur və onun k sayda verilmiş $H_1, \dots, H_k$ siniflərindən birinə aid edilməsi tələb olunur. k sayda $g_i(X)$ D. f.-lərinin daxil edildiyi fərz olunur, $i = 1, \dots, k$ və həllədiçi qayda müəyyən edilmişdir: əgər $l = \arg \max_{1 \leq i \leq k} g_i(X)$ olarsa, onda $X \in H_l$.

Əgər $\phi_i(X) = a(X) g_i(X) + b(X)$ şəklində D. f.-lər toplusundan $g_i(X)$ D. f. əvəzinə istifadə edilərsə, həllədiçi qayda dəyişmir, burada $a(X) > 0$ və $b(X)$, – X -in ixtiyari funksiyasıdır. Buna görə də, ümumiyyətlə, məs., $b(X) = -g_k(X)$, $a(X) \equiv 1$ qəbul edərək $k-1$ sayda D. f. təyin etmək kifayətdir.

Xüsusi halda, $k=2$ olduqda, yalnız $g(X) = g_1(X) - g_2(X)$ D. f.-ndan istifadə edərək, $X \in H_1$ olduğunu qəbul etmək olar, bu şərtlə ki, $g(X) > 0$ olsun. $g(H) \leq 0$ olduqda isə $X \in H_2$ olduğunu qəbul etmək olar. $g(X)$ D. f.-sının hündəsi mənası ondan ibarətdir ki, bu funksiya H_2 sinfinə uyğun oblastdan H_1 sinfinə uyğun p -ölçülü fəza oblastını ayıran səthin tənliyini təyin edir. Bu və ya digər mənadə optimal D. f.-lərin qurulması (qiymətləndirilməsi) *diskriminant analiz*in məsələlərindən biridir.

Tarixi olaraq, D. f.-ya aid ilk misal 1936-da *Fişer* tərəfindən xətli D. f. kimi iki sinfin ayrılması üçün təklif olunmuşdur və bu siniflər

öyredici seçimlərlə (bax, *Diskriminant analiz*) verilir və bu funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$g(X) = X^T S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \frac{1}{2} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T S^{-1} (\bar{X}_1 + \bar{X}_2) + c,$$

burada S^{-1} – kovariasion matrisin seçimi statistik qiymətidir və fərz olunur ki, o, hər iki sinif üçün eynidir; $\bar{X}_i$, – H_i sinfi üçün orta qiymətlər vektorunun statistik qiyməti; c – siniflərin aprior ehtimallarıdan asılı olaraq seçilən sabitdir.

Əd.: [1] Fisher R. A., «Ann. Eugenics», 1936, v. 7, 179–88; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

DISKRİMİNANT MODEL « дискриминантная модель; discriminant model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

DISKRİMİNƏDİCİ EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « дискриминирующих экспериментов планирование; design of discriminating experiments », hipotezləri yoxlama üçün, modeli seçmə üçün eksperimentin planlaşdırılması – paylanmanın növü haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında kriterilərin gücünün funksionallarının maksimizasiyası üçün *eksperimentlərin planlaşdırılması* metodlarıdır. Aşağıda *regression eksperiment* modellərindən birinin seçilməsi və xətti hipotezlərin lokal gücünün maksimizasiyası üçün alınan nəticələr şərh olunmuşdur. Planlaşdırılan $y_1, \dots, y_N$ ölçmələrinin

$$H_i: y_j = \eta_i(x_j, \theta^i) + \varepsilon_j, \quad j=1, \dots, N \quad (*)$$

modellərindən biri ilə təsvir olunduğu fərz olunur, $i=0, 1$ (sadəlik naminə), $\theta^i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^m$, ε_j – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $M\varepsilon_j = 0$, $D\varepsilon_j = \sigma^2$, $\xi = (x_1, \dots, x_N)$ – regression eksperimentin planıdır. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin normal qanunla paylandığı da fərz olunarsa, ξ planı üçün

$$\sigma^{-2} T_i(\xi, \theta^i) = \sum_{j=1}^N (\eta_i(x_j, \theta^i) - \eta_{1-i}(x_j, \theta^{1-i}))^2$$

kəmiyyəti H_i modeli doğru olduğu halda H_{1-i} -yə adekvat F – kriterinin (və ya χ^2 – kriterinin, σ^2 məlum olduğu halda) qeyri – mərkəzlik parametridir. Burada θ^{1-i} , – H_{1-i} modeli ilə $L^2(\xi)$ -də ən yaxşı $\eta_i(\cdot, \theta^i)$ yaxınlaşmasını təyin edir. H_i modelində diskriminasiyanın gücü artan T_i funksiyasıdır ki, bu $T_i(\xi, \theta^i)$ -ni maksimallaşdıran planın axtarılmasının zəruriliyini sübut edir.

Eksperimentin ardıcıl planlaşdırılmasına baxılır və fərz olunur ki, H_i modelində onun statistik proyeksiyası ξ^* planına zəif yığılır və bu plan isə T_i -dən daha ümumi olan və robust qiymətləndirmə və xətlərin ümumi paylanmalarında istifadə olunan

$$\Gamma_i(\xi, \theta^i) =$$

$$= \min_{\theta^i \in \Omega_i} \int F \left(\sum_{j=1}^N (\eta_i(x_j, \theta^i) - \eta_{1-i}(x_j, \theta^i)) \right) \xi(dx)$$

funksionalının maksimumunu təmin edir.

Belə planların asimptotik optimallığı haqqında nəticələr «*Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentin*» məqaləsində verilmiş nəticələrə analojidir. Alqoritm induktiv verilir. Ölçmələrin $x_1, \dots, x_n$ nöqtələrində aparıldığı və yeganə

$$\hat{\theta}_{in} = \arg \min_{\theta^i \in \Omega_i} \sum_{j=1}^n F(y_j - \eta_i(x_j, \theta^i)), \quad i=0, 1$$

statistik qiymətlərinin tapıldığı fərz olunur.

$$x_{n+1} = \arg \max_{x \in X} F(\eta_0(x, \hat{\theta}_{0n}) - \eta_1(x, \hat{\theta}_{1n}))$$

tapılır və x_{n+1} nöqtəsində $(n+1)$ -ci ölçmə aparılır. Bu prosedurun aparılması ekvivalentlik teoreminə əsaslanır (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*). Bəzi fərziyyələr ödənilmədiyi halda prosedurun modifikasiyalı tətbiq olunur.

Ölçmələrin ilkin seriyasında

$$\min_{\theta \in \Omega_i} \int F(\eta_1(x, \theta^1) - \eta_0(x, \theta^0)) \xi(dx), \quad i=0, 1$$

funksionalını maksimizasiyalayan ξ^* planını götürmək məqsədə uyğundur.

ξ^* -nin maksimum plan olması üçün zəruri və kafi lokal şərtlər alınmışdır və bu şərtlər $\eta_0(\cdot) - \eta_1(\cdot)$ tipli funksiyalarla sıfırın müntəzəm yaxınlaşması nəzəriyyəsinə əsaslanır.

M i s a l: $\eta_0(\cdot)$ və $\eta_1(\cdot)$ k və $k+d$ dərəcəli $[-1, 1]$

parçasında birölçülü çoxhədlilərdir, $\eta_1(x) = \sum_{m=0}^{k+d} \theta_m x^m$,

$$F(y) = y^2, \quad \Omega_1 = \left\{ \theta: \sum_{m=1}^d \theta_{n+m}^2 \geq 1 \right\}. \text{ İsbat olunmuşdur ki, } \xi_j$$

planı $T_{k+d}(x)$ Çebışev çoxhədlisinin ekstremum nöqtələrində yeganə maksimum plandır və ξ^* -nin sərhəd nöqtələrinin eyni çəkili ξ^* -nin daxili nöqtələrinin çəkiliyindən iki dəfə azdır (bax, [2]). k və $k+d$ dərəcəli r – ölçülü çoxhədlilərin diskriminasiyası üçün maksimum plan uyğun birölçülü planların düz hasilidir, $d=1, 2$. Daşıyıcısı kiçik çoxölçülü maksimum planlar (bax, [2]) digər Ω_1 və regressiya funksiyaları (məs., triqonometrik polinom üçün) üçün də tapılmışdır.

Əgər H_i modeli üçün π_i aprior çəkili və θ^i , $i=1, \dots, m$ üçün F_0 , paylanmaları varsa, belə ki,

$$\eta_i(x, \theta^i) = f_i^T(x) \theta^i$$

olduğu da nəzərə alınırsa, onda $\eta(\cdot) = \sum \theta^i f_i(\cdot)$ modeli üçün bloklu informasiya M matrisi təşkil olunur və θ^i üçün ən

kiçik kvadratlara statistik qiymetlerin kovariasiyalan matrisinin alt matrisi $M_{(j)}$ və

$$\theta'_0 = \int \theta' F(d\theta'), \quad D'_0 = \int (\theta' - \theta'_0)(\theta' - \theta'_0)^T F(d\theta')$$

aprior momentləri tapılır. Onda (*) kriterisinin Bayes variantı

$$\sum \pi_{\theta_i} \operatorname{tr} [M_{(j)}(\xi)(D'_0 + \theta'_0(\theta'_0)^T)]$$

ifadəsile təyin olunur.

Maksimum və Bayes planlarının axtarışı üçün müxtəlif iterasiya prosedurları tapılmışdır (bax, məs., [1]).

Plan və regressiya funksiyaları üzərinə qoyulan təbii şərtlər və xətlərin paylanma sıxlıqlarının quyulmuşluğu halında regressiya eksperimenti lokal asimptotik normallıq xassəsinə malik olur, odur ki, normallıq halında optimal kriterilər böyük seçimlər üçün asimptotik optimal olur (bax, [3]). (*) Gauss xətti regressiya eksperimenti üçün $0 < \alpha < 1$, α səviyyəli H_0 hipotezinin ψ meylsiz

kriterisi gücünün ikinci tərtib törəmələri matrisi $D_\Phi(\xi)$ -yə baxılır. F -kriteri meylsiz olduğundan, onun gücü H_0 hipotezində

sabitdir və H_0 hipotezində onun qradienti sıfır bərabərdir. Əgər

$\Phi(\cdot)$ «Regressiya eksperimentlərin planlaşdırılması» məqaləsindəki şərtləri ödəyərsə, ξ^* isə $\Phi(D_\Phi(\xi))$ -ni minimallaşdırarsa, onda ξ^* (Φ, Φ) - plan adlanır. (Φ, Φ) - planların və

Φ -ə müəyyən mənada qoşma, H_0 hipotezində sıfır bərabər

olan, θ^1 parametrlərinin ən kiçik kvadratlara statistik qiymetlərinin kovariasiyalan matrisinin funksiyasını minimallaşdırıcı planların ikilik xassəli olduğu isbat olunmuşdur (bax, [4]). Əgər $\operatorname{tr} D_F(\xi^*)$ maksimaldırsa və D_F vahid matrisə bölünəndirsə,

onda ξ^* və F -kriteridən təşkil olunmuş prosedura bütün planlar və H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün meylsiz kriterilər arasında

$D(\cdot)$ matrisinin Şuruya görə maksimumunu təmin edir. Əgər θ^1 növ effektlərinin ziddiyyətlər bazisidirsə, balanslanmış bloklu planlar belə planlardır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента. М., 1983, гл.16; [2] Малютов М. Б., в кн.: Планирование оптимальных экспериментов, М., 1975; [3] Русас Дж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [4] Muller-Funk U., Pukelsheim F., Witting H., «Linear Algebra Appl.», 1985, v. 67, p. 190-34.

DISPERSION ANALİZ « дисперсионный анализ; analysis of variance » – eksperimentin nəticələrinə müxtəlif faktorların təsirinin öyrənilməsi üçün statistik metoddur. D. a. ilk dəfə R. Fişer tərəfindən [1]-də aqronomik təcrübələrdən alınan nəticələrin araşdırılması üçün təklif olunmuşdur. O, D. a.-i müxtəlif qruplara aid dispersiyanı ayırmaq metodu kimi təyin etmişdir. Sonralar bu metod ümumi xətti model terminologiyasında ifadə olunmuşdur və buna əsasən də, D. a.-in bir çox məsələlərinə, qiymətləndirmə və regressiya modellərində hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinə eyni bir nöqtəyi – nəzərdən baxılmışdır. Ətraflı tarixi xülasə [2]-də verilmişdir. D. a. müxtəlif sahələrdə – iqtisadiyyat, biologiya və texnikanın bir çox məsələlərinin həllində müasir baxımla tətbiq olunur.

D. a.-in hər bir məsələsinin əsasını eksperimentin planı, yeni aparılan ölçmələrin baxılan faktorların müəyyən kombinasiyaları ilə uzlaşdırılması qaydası, D. a.-in modeli, yeni hər bir faktorun və faktorların hər bir kombinasiyasının effektlərinin və təsadüfi

xətlərin cəminə bərabər riyazi münasibəti ifadə edən model təşkil edir. Qarşıya çıxan məsələlər bu effektlərin qiymətləndirilməsi və bunlar üçün irəli sürülmüş statistik hipotezlərin yoxlanılması ilə bağlı olur.

Qeyd olunmalıdır ki, D. a.-in planlaşdırılan eksperimentlərin üzərində yenidən işlənilməsi üçün və məhz bu hallar üçün daha effektiv istifadə olunmasına baxmayaraq, onun standart prosedurları öncədən planlaşdırılması nəzərdə tutulmayan eksperimentlərin də üzərində yenidən işlənilməsi üçün, məs., seçimlərlə bağlı araşdırma məsələlərində geniş tətbiq olunur. Bu halda modellərin formalaşdırılması və yenidən işlənmədən alınan nəticələri interpretasiya məsələləri olduqca mürəkkəbləşir.

D. a. məsələlərinin təsnifatı ən əvvəl analiz olunacaq faktorların xüsusiyyətlərinə əsaslanır: müxtəlif modellər, o cümlədən, sabit faktorlu model (I model), təsadüfi faktorlu model (II model və ya komponent analiz modeli) və qarışıq modellər; bundan əlavə faktorların bir hissəsi kəmiyyət (regression) dəyişənləri olan, digər hissəsi isə kəmiyyətlə xarakterizə olunan modellər də mövcuddur. Belə modellərin analizi metodları kovariasiya analizinin xüsusi bir oblastına ayrılır. Bundan başqa, D. a. məsələləri analiz olunan faktorların sayına görə (bifaktorlu, ikifaktorlu analiz və s.) və eksperimentin istifadə olunan planının növünə görə fərqlənir. Məs., fərz olunur ki, araşdırmaya p sayda faktor daxil olunmuşdur

və i -ci faktorun m_i sayda qradasiyası (səviyyəsi) vardır; onda eksperimentin şərtlərinin müxtəlif birləşmələrinin sayı $m = m_1 m_2 \dots m_p$ -yə bərabərdir. Əgər bu şərtlərdən hər birinə heç olmasa bir müşahidə uyğun olarsa, belə sxem, – t a m p – p l a n adlanır. Əgər eksperimentdə şərtlər çoxluqlarının q saydasının müqayisə olunması tələb olunursa, onda, adətən, müşahidələr nəticələri bir-birinə yaxın bloklarla qruplaşdırılır. Bu halda hər bir blokda ehtiva müşahidələr varsa ki, onlar bütün şərtlər çoxluqlarının q saydasının hamısına uyğun olur, onda belə sxem, – t a m b l o k p l a n, bir hissəsinə uyğun olduğu halda sxem, – n a t a m a m b l o k p l a n adlanır.

Nəzərə alınmayan faktorların təsirinin azaldılması məqsədilə, blokların daxilində müşahidələrin yerləşdirilməsi üçün müəyyən bir təsadüfi mexanizmdən istifadə olunur. Eksperimentlərin belə planları təsadüfi və ya rəndomlanmış planlar adlanır (bax, [3], [4]).

Misal kimi təbii mühitdə insan orqanizmində qazabənzər azotun yaranması ilə əlaqədar alınmış məlumatlara nəzər salmaq olar.

Misal 1. Y – insanın nəfəs verdiyi azotun miqdarını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət (litrlə), $\mu = MY$ nəfəsvermədəki azotun orta miqdarı olsun. y -in realizasiyaları tərkibində zülalları faizlə xarakterizə olunan dörd qidalanma rejimi (faktor A) üçün araşdırılır. Y_{ij} , $i=1, \dots, q$ (burada $q=4$), $j=1, \dots, n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, uyğun y_{ij} realizasiyası isə i -ci pəhrizli yoxlanılan şəxsin nəfəs verdiyi azotun miqdarı olsun. $MY_{ij} = \mu + \alpha_i$; burada α_i – i -ci pəhrizin effekti, n_i – i -ci

pəhrizli müşahidə olunanların sayı, $i=1, \dots, q$, $\sum_{i=1}^q n_i = n$. Bu

halda uyğun riyazi model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij}, \quad i=1, \dots, 4, \quad j=1, \dots, n_i \quad (1)$$

münasibətlə təyin olunur, burada Y_{ij} – i -ci pəhrizli j -ci müşahidə olunan üçün alınmış nəticələr, ξ_{ij} – təsadüfi xətdir. Əgər

məsələnin qoyuluşunda dəqiq olaraq dörd pəhriz qeyd olunmuşdursa, (D_1 – zülalsız, D_2 – 23% zülallı, D_3 – 32% zülallı, D_4 – 67% zülallı pəhrizlər), onda sabit effektlili (faktor) birləşikli D. a. modeli – I model alınır. Bütün differensial effektlərin sıfıra bərabər olması, yeni $\alpha_i = 0$ olması hipotezi H_0 yoxlanılır.

M i s a l 2. Misal 1-in şərtlərində pəhrizdəki zülalları miqdarının təsadüfi seçildiyi (məs., təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə edilməklə) və bu ədədlərin 0; 23; 32; 67 olduğu fərz olunur. Bu halda təsadüfi effektlili (faktor) bir faktorlu D. a. modeli, – II model alınır.

M i s a l 3. Misal 1-in şərtlərində yalnız pəhrizin deyil (4 səviyyəli faktor A), müşahidə olunan şəxsin cinsinin də (2 səviyyəli faktor B) təsirinə qiymətləndirilməsi tələb olunur.

Bu hala uyğun model

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_k + \gamma_{ik} + \xi_{ijk},$$

$$i = 1, \dots, 4, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_{ik} \quad (2)$$

münasibətlə ifadə olunur, burada n_{ik} – faktor A-nın i -ci səviyyəsində və faktor B-nin k -ci səviyyəsində müşahidə olunanların sayı, ξ_{ijk} təsadüfi xətalardır. D. a.-in ikifaktorlu modeli alınır: əgər bütün n_{ik} -lər sıfırdan fərqli olarsa, onda bu, eksperimentin tam ikifaktorlu planı olur. I model və ya II modelin seçilməsi Misal 1, 2-də olduğu kimi eksperimentin şərtləri ilə təyin olunur. Burada yoxlanılacaq hipotezlər

$$H_1: \alpha_i \equiv 0; \quad H_2: \beta_k \equiv 0; \quad H_3: \gamma_{ik} \equiv 0$$

münasibətlə təyin oluna bilər. Bu hipotezlər, uyğun olaraq, əsas effektlərin olmaması hipotezləri (H_1, H_2) və qarşılıqlı təsirin olmaması (H_3) hipotezi adlandırılır.

İrəli sürülən hipotezlərin yoxlanılması məsələsi yalnız müşahidələrdəki xətlərin ehtimal strukturu haqqında əlavə fərziyyələrin olması ilə həll oluna bilər. Adətən, fərz olunur ki, bu xətlər niyəzi gözləməsi sıfır, dispersiyası sabit σ^2 -na bərabər normal qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və buna görə hesablamalarda ən kiçik kvadratlar metodu nəzəriyyəsi istifadə etmək olar. Bir qədər yüngül fərziyyələr uyğun olaraq aparılan müşahidələrin sayının kifayət qədər çox olmasını zəruri edir, bu halda asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə özünü doğruldur.

Baxılan fərziyyələrdə irəli sürülmüş hipotezlərin yoxlanılması üçün kriterilərin statistikaları daxil olmuş model çərçivəsində nəzəri olaraq asılı olmamazlıq şərti və yoxlanılan hipotezin doğru olduğu halda qeyri – mərkəzilik parametrlərinin sıfıra bərabər olması şərti ödənilən müşahidələrin kvadratik formalarının münasibətləri şəklində ifadə olunur. Müləhizələrin bu mərhələsində istifadə olunan ən mühüm riyazi nəticələrdən biri **K o k r e n t e o r e m i d i r** (bax, [5], [7], [8]); bu teoremə görə: ümumi xətti model şərtlərində əgər müşahidələrin kvadratik formaları – $S_1, \dots, S_q$ uyğun olaraq, $\nu_1, \dots, \nu_q$ rəqəblərinə malik olarsa və

$$S = \sum_{i=1}^q S_i \text{ kəmiyyətinin paylanması } \sigma^2 \chi^2(\nu) \text{ kəmiyyətinin}$$

paylanması ilə eyni olarsa, onda $S_1, \dots, S_q$ formaları asılı olmayandır və onlar $\sigma^2 \chi^2(\nu_i)$ kəmiyyəti paylandığı qanunla pay-

lanmışlar, burada $\nu = \sum_{i=1}^q \nu_i$. Beləliklə, $F = (S_i/\nu_i) / (S_j/\nu_j)$

tipi statistika – $F(\nu_i, \nu_j)$ Fişer paylanmasına tabedir.

Misal 1-in modeli üçün məsələ

$$S = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

kvadratların cəminin μ və $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$ dəyişənləri üzrə minimizasiyasına gətirilir və bu halda əlavə məhdudiyyət – effektlərin çekili cəminin sıfıra bərabər, yeni

$$\sum_{i=1}^4 n_i \alpha_i = 0$$

olması məhdudiyyəti də qoyulur ki, bu da statistik qiymətin yeganəliyini təmin edir. Ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlər aşağıdakı kimidir:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^4 n_i, \\ \hat{\alpha}_i &= \bar{y}_i - \bar{y} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \bar{y}, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Birləşikli D. a.-in tipik proqramı $\hat{\mu}$ və $\hat{\alpha}_i$ (və ya $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i$) statistik qiymətlərini, SS kvadratik formaların qiymətlərini, onların rəqəbləri ν -nü, dispersiya mənbələrindən hər biri üçün MS kvadrat ortalamaları səviyyələrarası (və ya qruplararası) və səviyyə daxili (qrup daxili) MS – kvadratların ortalamaları hesablamaya imkan verir.

Səviyyələrarası dispersiya üçün

$$SS_B = \sum_{i=1}^4 n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2; \quad \nu_B = 3, \quad MS_B = SS_B / \nu_B, \quad (4)$$

səviyyə daxili dispersiya üçün

$$SS_R = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2;$$

$$\nu_R = n - 4; \quad MS_R = SS_R / \nu_R \quad (5)$$

olduğu alınır. MS_R kəmiyyəti σ^2 dispersiyasının adi meyilsiz statistik qiymətini təyin edir: $\sigma^2 : MS_R = S^2$. (4) və (5) formalarının asılı olmamazlığı Kokren teoremi vasitəsilə təyin olunur.

Bəzən bütün kvadratların cəmi

$$SS_T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2; \quad \nu_T = n - 1 \quad (6)$$

hesablanır. $H_0: \alpha_i \equiv 0$ hipotezinin yoxlanılması kriterisinin statistikasi da F – nisbət statistikasi adlanır; bu statistika üçün eksperiment nəticəsində alınan realizasiya da F – nisbət adlanır və o,

$$F = MS_B / MS_R \quad (7)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Kritik zona adı qaydalarla $F(v_B, v_R)$ Fişer paylanması üçün cədvəllərin köməyi ilə təyin olunur.

M i s a l 4. Misal 1-in şərtlərilə $n_1 = \dots = n_4 = 9$ olduğu halda alınmış eksperimental məlumatlar aşağıda verilmişdir (bax, [6], [5]):

I modelinin parametrlərinin statistik qiymətləri ən kiçik kvadratlər metodu ilə (3) düsturu vasitəsilə tapılır:

$$\hat{\mu} = 4,6284; \hat{\alpha}_1 = -0,5321; \hat{\alpha}_2 = -0,0032; \\ \hat{\alpha}_3 = 0,1193; \hat{\alpha}_4 = 0,4158.$$

(5) və (6) kvadratik formalar

$$SS_B = 4,2321; v_B = 3; MS_B = 1,4107; \\ SS_R = 14,0569; v_R = 32; MS_R = 0,4393; \\ SS_T = 18,2890; v_T = 35$$

qiymətlərini alır; odur ki F – nisbət $F = 3,21$ qiymətini alır və $F(3; 32)$ üçün Fişer paylanması cədvəllərindən aydın olur ki, H_0 hipotezi $\alpha < 0,05$ olan 1-ci növ səhv ehtimalı ilə inkar olunur. Analiz olunan pəhrizlərin sonrakı müqayisələrini çoxluqların müqayisəsi metodunu tətbiq etməklə aparmaq olar.

n_1	n_2	n_3	n_4
4,079	4,368	4,169	4,928
4,859	5,668	4,709	5,608
3,540	3,752	4,416	4,940
5,047	5,848	5,666	5,291
3,298	3,802	4,123	4,674
4,679	4,844	5,059	5,038
4,870	3,578	4,403	4,905
4,648	5,393	4,496	5,208
3,847	4,374	4,688	4,806
ortalər			
4,0963	4,6252	4,7477	5,0442

Misal 2 halında fərz olunur ki, faktorların istifadə olunan səviyyələri riyazi gözləməsi μ , dispersiyası σ_a^2 olan normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda model kimi (1) münasibəti götürülür, lakin α_i effektlərinə regressiyanın qeyri – parametrik statistik qiymətləri kimi – riyazi gözləmələri sıfıra bərabər, ξ_{ij} xətlərindən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılır. Burada α_i kəmiyyətlərinin statistik qiymətləri əvəzinə σ_a^2 dispersiyasının statistik qiymətinə baxılır, odur ki, ən kiçik kvadratlər metodu əsasında μ , dispersiyanın komponentləri σ^2 və σ_a^2 kəmiyyətləri qiymətləndirilməlidir (buradan da uyğun texnikanın digər komponent analiz adı alınmışdır), H_0 hipotezi isə $\sigma_a^2 = 0$ münasibətinə gətirilir ki, bu da araşdırılan faktorun (pəhrizin) dispersiyaya heç bir təsir etməməsinə ifadə edir. Bifaktorlu komponent analiz halında σ_a^2 statistik qiyməti

$$\sigma_a^2 = (MS_B - MS_R)/k,$$

$$k = \frac{1}{q-1} \left[\sum_{i=1}^q n_i - \sum_{i=1}^q n_i^2 / \sum_{i=1}^q n_i \right]$$

münasibətləri ilə təyin olunur, burada q – araşdırılan faktorun səviyyələrinin sayıdır (qeyd olunan misalda $q = 4$), H_0 hipotezini yoxlamaq üçün isə sabit faktorları modeldə olduğu kimi (7) düsturu ilə verilən F – nisbət statistikasından istifadə olunur. Faktorların sayı çox olduqda hesablama düsturları olduqca mürəkkəb olur (bax, [5], [7]).

D. a.-in müxtəlif sxemləri ilə ətraflı şərh [7]-də verilmişdir. Tətbiqi proqramlar paketinin xüsusi araşdırmanın ilə [5]-ə müraciət etmək olar.

D. a.-in müasir modelləri real eksperimental sxemlərin geniş sahəsini əhatə edir, lakin bir çox nəzəri problemlər hələ də həllini tapmamışdır.

D. a.-in qeyri – parametrik və robust prosedurlarının yenidən işlənilməsinə böyük diqqət yetirilir (bax, [8], [9]).

Əd.: [1] F i s h e r R. A., Statistical methods for research workers, 13 ed., L., 1958; [2] S c h e f f e H., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, p. 251–71; [3] Ф и ш е р Р. А., Математика дамы, дегустирующей чай, пер. с англ., в сб.: Современные проблемы математики, М., 1981, с. 46–58; [4] Н а л и м о в В. В., Теория эксперимента, М., 1971; [5] А ф и ф и А., Эйзен С., Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ, пер. с англ., М., 1982; [6] С и с с и к J. H., Johnson R. E., Rokosch D. K., «J. Appl. Physiology», 1972, v. 32, p. 155–59; [7] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [8] Х о л л е н д е р М., В у л ф Д. А., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [9] S c h r a d e r R. M., M c K e a n J. M., «Commun. Statist.», 1977, v. A6, № 9, p. 879–94.

DISPERSION ANALİZ; qarışıq model «дисперсионный анализ; смешанная модель; mixed model analysis of variance», II növ dispersion analiz. – ölçmə xətlərinin kovariasion matrisi qiymətləndiriləcək əmsalları (dispersiyanın komponentləri olan) matrislərin xətti forması olduğu halda regressiyanın eksperimentin sxemidir. Bu sxem R. Fişer tərəfindən (bax, [1]) dispersiyanın qiymətləndirilməsi məqsədilə balanslanmış planda dispersion analizinin statistik qiyməti (ANOVA) üçün təklif olunmuşdur. Balanslaşmayan planda bu statistik qiymətlər, ümumiyyətlə, tutarlı statistik qiymətlər olmur.

Adətən, ölçmələrin N – vektor modeli –

$$y = X\beta + \sum_{i=1}^l \sigma_i U_i \Phi_i \quad (*)$$

modelinə baxılır.

Burada X , U_i – məlum matrislərdir, $\beta \in \mathbb{R}^d$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$ – məlum parametrlər, Φ_i – asılı olmayan m_i – vektorlar, $\text{cov} \Phi_i = I_{m_i}$ – vahidi matrislərdir, $i = 1, \dots, l$. Bu modeldə

$$M.y = X\beta, \quad \text{cov} y = \sum_{i=1}^l d_i G_i$$

götürülür, burada $G_i = U_i U_i^T$, $d_i = \sigma_i^2$ – dispersiyanın əmsallarıdır.

Φ_i üçün əlavə rəqulyarlıq və normallıq şərtlərində (*) ölçmələrinə uyğun ölçülər ailəsinin lokal asimptotik normallığı, böyük həcmli seçimlər və xüsusi tip normalanma olduğu halda (β , $d_1, \dots, d_l$) üçün maksimal doğruxoxşarlıq statistik

qiymetlerinin lokal asimptotik minimaksılığı doğrudur. Daha ümumi paylanmalar ailəsi və onların asimptotik normallığı üçün maksimal doğruxaoxşarlıq tipli ədədi statistik qiymetlərin təyin olunmasının iterasion prosedurlarının yığılması araşdırılmışdır.

Ən geniş yayılmış statistik qiymetlər orta ölçmələrə nəzərən invariant (MINQUE və bunların Bayes analoqları), y vektoru üzrə biraddımlı kvadratik meyilsiz statistik qiymetlərdir, bu şərtlə ki, belə statistik qiymetlər mövcud olsun. Xüsusi hallar üçün orta qiymetlərin statistik qiymetlərinin və dispersiya əmsallının kovariasion matrisinin funksiyasını optimallaşdıraraq qanışq model-lərin optimal planlar nəzəriyyəsi inkifaş etdirilmişdir.

Əd.: [1] Fisher R., «Trans. Roy. Soc. Edinburgh», 1918, v. 52, p. 399-433; [2] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [3] Rao C. R., Kleeffe J., Estimation of variance components and applications, Amst., 1988.

DISPERSION METOD ədədlər nəzəriyyə-sində « дисперсионный метод в теории чисел; dispersion method in the number theory » –

$$\alpha + \beta = n \quad (1)$$

şəklində bəzi binar tənliklərin (binar additiv məsələlərin) həlli üçün metoddur, burada α və β – ədədi silsilələrdə olduqca sıx və yaxşı paylanmış natural ədədlər ardıcılıqlarına aiddirlər.

D. m. Yu. V. Linnik tərəfindən 1958–61-ci illərdə işlənilmişdir və buna görə də, Linnik dispersion metodu da adlandırılan bu metod elementar nəzəri – ehtimali anlayışları (xüsusi halda, dispersiya anlayışı və Çebışev tipli bərabərsizlikləri) İ. M. Vinogradov və A. Veylin (A. Weil) analitik və cəbri ideyalarla özündə birləşdirir.

(1) tənliyi

$$vD' + \beta = n \quad (2)$$

şəklində tənliklərə getirilir, burada v , D' – bir-birindən asılı ol-madan $v \in (v)$, $D' \in (D)$ düzbucaqlı oblastından bəzi qiymet-ləri alırlar, burada (v) və (D) – bəzi intervallardır, v – sadə ədədlərdir. D' üzərinə müxtəlif əlavə şərtlər qoyula bilər. F – bu tənliyin həlləri sayının işarə olunduğu fərz olunur.

İxtiyari $D \in (D)$ üçün

$$vD + \beta = n$$

tənliyinin varlığı fərz olunur, $A(n, D)$ ilə bu tənliyin hansısa evristik mülahizələrə görə tapılmış həllərinin sayı işarə olunmuşdur. Onda (2) tənliyinin gözənilən həllərinin (hipotetik) sayı

$$S = \sum_{D' \in (D)} A(n, D')$$

düsturu ilə ifadə olunur. $F - S = V$ fərqlərin statistik qiyməti

$$V = \sum_{D' \in (D)} \left(\sum_{vD' + \beta = n} 1 - A(n, D') \right) \quad (3)$$

cəmi ilə ifadə olunur. (3)-ə Koşi bərabərsizliyini tətbiq et-dikdə

$$V^2 \leq D_0 V' \quad (4)$$

bərabərsizliyi alınır, burada D_0 , – (D) intervalının uzunluğu,

$$V' = \sum_{D' \in (D)} \left(\sum_{vD' + \beta = n} 1 - A(n, D') \right)^2 \quad (5)$$

isə (2) tənliyinin həlləri sayının dispersiyasıdır.

(5)-in sağ tərəfindəki cəmləmə bütün $D \in (D)$ üzrə aparılarsa, onda (2)-də D' üzərinə qoyulan bütün əlavə şərtlər götürü-lür. Bununla yanaşı bu halda dispersiya yalnız arta bilər. Buna görə də,

$$V' \leq \sum_{D \in (D)} \left(\sum_{vD + \beta = n} 1 - A(n, D) \right)^2 = \sum_1 - 2 \sum_2 + \sum_3$$

bərabərsizliyi alınır.

$\sum_1$, $\sum_2$ və $\sum_3$ cəmlərini bəzi hallarda asimptotik olaraq hesablamaq mümkün olur. Əsas çətinlik doğuran D . m.-un əsas cəmi $\sum_1$ -in hesablanmasıdır. $\sum_1$ cəminin asimptotik hesabla-nılması – bəzi funksiyaların kəsi hissələrinin verilmiş segmentdən olması sayının hesablanması üzrə Vinogradov metodunun köməyilə, həmçinin cəbri həndəsənin vasitəsilə alınmış triqonometrik cəmlərin yeni qiymetlərindən istifadə olunmaqla aparılır. $\sum_2$ və $\sum_3$ cəmlərinin asimptotikası elementar cəmləmə

yolu ilə aparılır. Nəticədə dispersiya çox böyük olmadıqda (3) və (4)-dən (2) tənliyinin həllərinin sayı üçün asimptotika alınır.

(2) şəklində bütün tənliklərin həllərinin sayının birləşdirilməsi (1) tənliyinin həllər sayı üçün asimptotik düstura getirir.

D. m.-un baxılan sxemi

$$\alpha - \beta = l$$

şəklində tənliklərin həlli üçün də tətbiq olunur, l – sıfırdan fərqli, tam, verilmiş ədəddir.

Bu metodun köməyilə Yu. V. Linnik və b.-ları (bax, [3]) bir sıra klassik binar additiv problemləri həll etmişlər. belə ki, D. m.-un ya-ranmasına qədər bunlar yalnız evristik və ya hipotetik mülahizə-lərə əsaslandırılma yolu ilə həll olunurdu. Məs., belə problemlərə aid: bölənlərin additiv problemi ($\alpha = x_1, x_2, \dots, x_k$, $k = \text{const}$,

$\beta = xy$); bölənlərin Titçmarş problemi ($\alpha = p$ sadə, $\beta = xy$); Hardi – Litlvud problemini qeyd etmək olar ($\alpha = p$ – sadə,

$\beta = x^2 + y^2$).

Əd.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89–130; [3] Бредихин Б. М., Линник Ю. В., Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 5–22.

DISPERSION NİSBƏT PAYLANMASI « диспер-сионного отношения распределение; variance ra-tio distribution » – bax, *Fişer F – paylanması*.

DISPERSİYA « дисперсия; variance », təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası – ξ təsadüfi kəmiyyətinin ikinci tertib mərkəzi momentinə deyilir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsindən yayınma ölçüsü $D\xi$ -ni ifadə edir (aydındır ki, riyazi gözləmənin varlığı fərz olunur). D. təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarından biridir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin dis-persiyası

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2;$$

əgər c həqiqi ədəddirsə, onda

$$D(c\xi) = c^2 D\xi,$$

məs., $D(-\xi) = D\xi$, D -nin əsas xassələrindən biridir.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası anlayışı yalnız $M\xi$ riyazi gözləməsinin varlığı halında mənə kəsib edir ($M|\xi| < \infty$); bu halda $D\xi$ sonlu, ya da sonsuz (yeni dispersiya mövcud deyil) ola bilər. Müasir ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi elementar hadisələr fəzası üzrə Lebeq inteqralı kimi təyin olunur. Lakin ξ təsadüfi kəmiyyətinin müxtəlif funksiyalarının riyazi gözləmələrini həqiqi ədədlər çoxluğunda bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması vasitəsilə ifadə edən düsturlar mövcuddur və bunlar ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiq olunduğu sahələrdə mühüm rol oynayır.

a) ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərini uyğun olaraq $P\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$ ehtimalları ilə alırsa ($\sum_k p_k = 1$), onun dispersiyası

$$D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p_k$$

düsturu;

b) paylanma funksiyası $F(x)$ olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası, ümumi halda

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x)$$

düsturu (burada inteqral Lebeq – Stilyes və ya Riman – Stilyes mənada anlaşılır);

c) paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx$$

düsturu ilə hesablanır.

D təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən yayınma ölçüsünü ifadə edən yeganə ölçü deyildir. Bu prinsipə digər yayınma ölçülərini də təyin etmək olar. Məs., $M|\xi - M\xi|$, $M(\xi - M\xi)^4$ və s., həmçinin *kvantillərə* əsaslanan yayınma ölçüləri bu prinsipə təyin olunur. D anlayışının əsas mühüm rolu onun limit teoremləri üçün istifadəsi ilə izah olunur. Əgər çoxlu sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin riyazi gözləmə və dispersiyası məlum olarsa, onda bu cəmin paylanma qanunu uyğun parametrlərlə normal qanuna yaxın olur. Beləliklə, D -nin ən mühüm xassələri $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin D -sı $D(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ üçün aşağıdakı ifadə ilə bağlıdır:

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

burada

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = M\{(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)\}$$

– ξ_i və ξ_j təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyasıdır. Əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ cüt-cüt asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ olur. Buna görə də, cüt-cüt asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n \quad (2)$$

olur. Lakin (2) bərabərliyi ödənilərsə, $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu hökm etmək olmaz. Lakin, bir qayda olaraq, (2) düsturu təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamalarına əsaslanır. Başqa sözlə, (2)-nin doğru olması üçün $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, yəni $\xi_1, \dots, \xi_n$ -lərin cüt-cüt korrelyar olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olması kifayətdir.

D anlayışı iki istiqamətdə tətbiq olunur. Birincisi, ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri ilə əlaqədar sahələrdə tətbiqdır ki, burada təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimalla görə yığılması müəyyən olunur. Əgər $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ ilə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $D\xi_n \rightarrow 0$ şərtini ödəsələr, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\xi_n - M\xi_n| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

münasibəti (ehtimalla görə yığılma) doğrudur (bax, Çebişev bərabərsizliyi). Yeni n -in böyük qiymətlərində ξ_n təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi olmayan $M\xi_n$ kəmiyyəti ilə üst-üstə düşür. Bu mülahizələr əsasında böyük ədədlər qanunu ilə riyazi statistikada tutarlı statistik qiymətlərin varlığı isbat olunur və təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimalla görə yığılması müəyyən edilir. D anlayışının limit teoremlərində digər tətbiqi normalanma anlayışı ilə bağlı limit teoremləri oblastında istifadə olunur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin normalanması üçün ξ ilə onun riyazi gözləməsinin fərqi ξ -nin kvadratik orta yayınması $\sqrt{D\xi}$ -yə bölünür,

yeni $\tilde{\xi} = (\xi - M\xi)/\sqrt{D\xi}$ kəmiyyəti götürülür. Təsadüfi kəmiyyətlərin normalanması yığılan paylanma qanunları ardıcılığının alınması üçün zəruridir, xüsusi halda, 0 və 1 parametrləri normal qanuna yığılma üçün, ikincisi, D anlayışının riyazi statistikada seçimlər üzərində yenidən işlənilmə üçün də zəruri şərtlərdən biri kimi sayılır. Təsadüfi kəmiyyətə stoxastik eksperimentin realizasiyası kimi baxdıqda hesablama şkalasının ixtiyari dəyişikliyi ξ təsadüfi kəmiyyətinin $\tilde{\xi} = \sigma\xi + a$ təsadüfi kəmiyyətinə çevrilməsinə səbəb olur, a – ixtiyari həqiqi ədəd, σ – müsbət ədəddir. Buna görə də, ξ təsadüfi kəmiyyətinin yalnız yeganə nezeri paylanma qanunu $F(x)$ -in deyil, qanunlar tipinin, yəni $F((x-a)/\sigma)$ tipli heç olmasa iki a və σ parametrlərindən asılı paylanma qanunları ailəsinin araşdırılması məqsəduyğun sayılır.

Əgər $M\xi = 0$, $D\xi = 1$ olarsa, onda $M\tilde{\xi} = a$, $D\tilde{\xi} = \sigma^2$ olur. Beləliklə, nezeri qanunun parametrlərinin mənası odur ki, $a = M\tilde{\xi}$, $\sigma = \sqrt{D\tilde{\xi}}$. Bu parametrlərin seçim üzrə təyin olunma qaydası da bununla izah olunur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

DISPERSİYA(sı) empirik paylanmanın « дисперсия эмпирического распределения; sample variance / variance of empirical distribution » – bax, *Seçimi dispersiya*.

DISPERSİYA; statistik qiymət « дисперсия; оценка; estimator of variance » – ümumi çoxluğun dispersiyasının statistik qiymətidir. $x_1, \dots, x_n$ dispersiyası σ^2 olan, dördüncü momentə malik ümumi çoxluqdan seçildirsə, onda

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

σ^2 parametri üçün kvadratik statistik qiymətlər sinfində ən yaxşı, yeni ikinci dərəcəli çoxhədlilər olan statistika olub, meylsiz

statistik qiymətdir. Burada, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

DISPERSİYA(sı) təsadüfi çoxluğun « дисперсия случайного множества; variance of random set » – metrikası ρ olan vektor fəzanın təsadüfi altçoxluğu A -nın qiymətlərinin «səpələnmə» dərəcəsinin xarakteristikasıdır,

$$D_\rho A = M\rho^2(A, MA)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada MA , – A təsadüfi çoxluğunun riyazi gözləməsidir.

Əd.: [1] Ляшенко Н. Н., «Зап. научн. семина. Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 85, с. 113–28.

DISSIPASIYA(sı) turbuləntlik enerjisinin « диссипация энергии турбулентности; turbulent energy dissipation » – kinetik turbuləntlik enerjisinin səpələnməsi prosesidir, yeni mayədə daxil (özlü) sürtünmə nəticəsində enerjinin istiliyə keçməsi prosesidir. Mayenin vahid kütləsində vahid zaman ərzində istiliyə keçən enerji miqdarına bərabər, bu prosesin sürətinin ölçüsü də dissipasiya adlanır.

Əd.: [1] Математическая физика. Энциклопедия, М., 1998, с. 188.

DISSIPATİV MARKOV ZƏNCİRİ « диссипативная цепь Маркова; dissipative Markov chain » – bütün vəziyyətləri ya qayıdsız və ya sıfır qayıdışlı hesabi Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı).

Əd.: [1] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

DİZYUNKT SPEKTRAL TİPİ, ÖLÇÜLƏRİN « дизъюнктный спектральный тип мер; disjoint spectral type of measure » – bax, *Sinqulyarlıq, ölçülərin*.

DİZYUNKT TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « дизъюнкты случайных событий последовательность; sequence of disjoint random variables » – bax, *Uyuşmayan / dızyunkt təsadüfi hadisələr*.

DLR – ŞƏRTİ « ДЛР – условие; DLR – condition » – Gibbs təsadüfi meydanların sinfini uyğun potensial vasitəsilə müəyyən edən şərtidir. Asılı olmayaraq [1] və [2]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, № 4, с. 31–43; [2] Lanford O., Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1969, v. 13, № 3, p. 194–215; [3] Preston C. H., Random Fields, B. – [a. o.], 1976; [4] Ruelle D., Thermodynamic formalism. Reading (Mass.), 1978.

DOC PLANI « Доджа план; Dodge plan » – bax, *Statistik nəzarət, keyfiyyətə*.

DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSIYASI « правдоподобия функция; likelihood function » – X təsadüfi seçiminin hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası $p(x, \theta)$ -dir (θ parametrinin funksiyası kimi baxılan); x arqumenti X -in müşahidəsində stoxastik eksperimentin nəticəsi olub, qeyd olunmuş fərz olunur. In $p(x, \theta)$ funksiyası loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyası adlanır. μ ölçüsünü ona ekvivalent digər σ – sonlu ölçü ilə əvəz etdikdə, D. f. (loqarifmik D. f.) θ -dan asılı olmayan vuruq qədr (toplanan qədr) dəyişir. μ ölçüsü əvəzinə θ parametrinin hər hansı qeyd olunmuş θ_0 qiymətinə müvafiq olan, X təsadüfi seçiminin paylanması P_{θ_0} götürülərsə, statistik nəticələrdə bu xüsusi hal kimi mühüm rol oynayır: bu halda $\frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}}(x)$ doğruxaoxşarlıq nisbəti adlanır.

Əgər X təsadüfi seçimi iki komponentə ayrılarsa, yeni $X = (Y, Z)$ olarsa, onda Z altseçiminin marginal paylanması vasitəsilə alınan D. f. marginal doğruxaoxşarlıq funksiyası adlanır, Z komponentinin qeyd olunmuş z qiymətində Y -in şərti paylanması vasitəsilə alınan D. f. – şərti doğruxaoxşarlıq funksiyası adlanır.

«D. f.» anlayışını R. Fişer [1]-də daxil etmişdir.

Bax, *Statistik məsələlər(i)* təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ « отношение правдоподобия; likelihood ratio » – statistik qərarlar

(həllər) nəzəriyyəsində istifadə olunan $Y_n = \frac{q_n}{p_n}$ statis-

tika sıdır ki, bu statistikanın asimptotikası əsasında $(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun əsl sıxlıq funksiyasını təyin etmək olur, burada fərz olunur ki, $X_1, \dots, X_n, \dots$ hər hansı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $p_n = p_n(X_1, \dots, X_n)$ və $q_n = q_n(X_1, \dots, X_n)$, – $(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyalarıdır. Lakin bu funksiyalardan hansı birinin əsl sıxlıq funksiyası olduğu məlum deyildir. Bu məsələnin həlli üçün

$$Y_n = \frac{q_n(X_1, \dots, X_n)}{p_n(X_1, \dots, X_n)}$$

statistikalarına baxılır. Aydındır ki, kifayət qədər güclü requlyarlıq şərtləri ödənilərsə və əsl sıxlıq funksiyaları p_n -lərdirsə, onda $X_1, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin müşahidə olunan qiymətləri orta mənada p_n -lərin nisbətən böyük qiymətlər aldığı nöqtələr ətrafında qruplaşacaqdır. Bu halda, aydındır ki, Y_n kəmiyyəti p_n -in, yaxud q_n -in əsl sıxlıq funksiyası olmasından asılı olaraq,

ya kiçik və ya böyük olacaqdır. Beləliklə, Y_n -in asimptotikası bu halda qərar qəbul etməyə imkan yaradır.

p_n -lərin ciddi müsbət və kəsilməz olduğu fərz olunur. Əgər əsl sıxlıq funksiyaları p_n -lərdirsə, onda X_{n+1} təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinə nəzərən şərti paylanma sıxlığı p_{n+1}/p_n nisbətinə bərabərdir və deməli,

$$\begin{aligned} M(Y_{n+1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)}{p_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)} \frac{p_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y)}{p_n(x_1, \dots, x_n)} dy. \quad (*) \end{aligned}$$

Burada integralaltı ifadədə p_{n+1} funksiyaları ixtisar olunur; ikinci kəsrin məxrəci isə y -dən asılı deyildir. q_{n+1} -in integralı isə q_n sıxlığını verir. Beləliklə, (*)-dakı integral q_n/p_n nisbətinə bərabər olur və buna görə də,

$$M(Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = Y_n$$

olduğundan D. n. Y_n martinqal əmələ gətirir.

Bax, *Doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi, Monoton doğruyaoxşarlıq nisbəti*.

Әд.: [1] Феллер В. Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ *monoton « правдоподобия отношение монотонное; monoton likelihood ratio »* – bax, *Monoton doğruyaoxşarlıq nisbəti*.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ *təsadüfi proseslər üçün « правдоподобия отношение для случайных процессов; likelihood ratio for random processes »* – bax, *Statistik məsələlər(i)* təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ KRİTERİSİ *« отношения правдоподобия критерий; likelihood ratio test, LRT »*, D. n. k. – evristik *maksimal doğruyaoxşarlıq prinsipindən* istifadə edilməklə qurulmuş *statistik kriteridir*; bu kriteri doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasına əsaslanır və bu statistika – ilkin hipotezi təşkil edən paylanmalar çoxluğunda *doğruyaoxşarlıq funksiyalarının* supremumunun bütün baxılan paylanmalar çoxluğunda doğruyaoxşarlıq funksiyalarının supremumuna nisbətinə bərabərdir. D. n. k. Yu. Neyman və E. Piron tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]).

X paylanması P_θ naməlum $\theta \in \Theta$ parametrindən asılı və hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən sıxlıq funksiyasına malik olan təsadüfi seçim olsun. X üzərində müşahidə nəticəsi x üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1 – Θ -nın boş olmayan kəsişməyən, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ şərtinin ödəyən altçoxluqlardır. D. n. k. $\varphi(\cdot)$

$$\lambda(x) = \sup_{\theta \in \Theta_1} p(x, \theta) / \sup_{\theta \in \Theta_0} p(x, \theta) \quad (1)$$

doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasına əsaslanır və ümumi qəbul edilmiş (1) statistikasının kiçik

qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etmir. D. n. k. (1)-dəki işarələmə ilə əlaqədar bəzən λ – *kriteri* də adlanır. $\Theta_i = \{\theta_i\}$, $i = 0, 1$ olduğu iki hipotezin müqayisəsi (yoxlanılması) halında (1) statistikası

$$\begin{aligned} p(x, \theta_0) / \max\{p(x, \theta_0); p(x, \theta_1)\} = \\ = \min\{1; p(x, \theta_0)/p(x, \theta_1)\} \end{aligned}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və D. n. k. bu məsələdə ən güclü Neyman – Piron kriterisi ilə üst-üstə düşür.

Mühümlük ölçüsü α -ya bərabər $\varphi(x)$ D. n. k. üçün $\{x: \lambda(x) < \lambda_\alpha\}$ kritik oblastının səddi λ_α -nı təyin etməkdən ötrü və $\beta(\theta; \varphi) = M\varphi(X)$ güc funksiyasını hesablamaq üçün (1) doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasının paylanmasını hesablamağı bacarmaq zəruridir. Əsas etibarilə normal paylanma ilə bağlı bezi konkret $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ ailələri üçün doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasını aşkar şəkildə almaq olur, λ_α səddləri və güc funksiyasının qiymətləri üçün isə cədvəllər tərtib olunmuşdur. Lakin ümumi halda bu istiqamətdə yalnız asimptotik nəticələr alınmışdır.

X ümumi paylanması P_θ , $\theta \in \Theta$ olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin toplusu $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ olan n – həcmli seçim olsun. $X^{(n)}$ seçiminin paylanması – nın sıxlıq funksiyası

$$p_n(x^{(n)}; \theta) = \prod_{1 \leq i \leq n} p(x_i, \theta),$$

(1) statistikası isə

$$\lambda_n(x^{(n)}) = \sup_{\theta \in \Theta_1} p_n(x^{(n)}, \theta) / \sup_{\theta \in \Theta_0} p_n(x^{(n)}, \theta) \quad (2)$$

düsturları ilə ifadə olunur. Əgər Θ_0 çoxluğu $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $r = k - m > 0$ parametrik çoxluğunun m – ölçülü altçoxluğundursa, onda $L_n = -2 \ln \lambda_n(X^{(n)})$ təsadüfi kəmiyyəti H_0 hipotezi şərtlə ($\theta \in \Theta_0$ üçün) $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı r -ə bərabər mərkəzi χ^2 paylanmasına malikdir və buna görə də, D. n. k. asimptotik *oxşar kriteridir*. D. n. k.-nin güc funksiyasını hesabladıqda, adətən, bir-birinə yaxınlaşan H_{1n} alternativlərinə baxılır:

$$\theta \in \Theta_{1n} = \{\theta = \theta_0 + \lambda/\sqrt{n}; \theta_0 \in \Theta_0, \lambda \in \mathbb{R}^k \setminus \Theta_0\}$$

burada, əvvəldəki kimi, Θ_0 – $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ çoxluğunun altçoxluğudur. Onda L_n statistikası asimptotik olaraq mərkəzi olmayan, sərbəstlik dərəcəsi sayı r -ə bərabər χ^2 paylanmasına malik olur və bu halda qeyri – mərkəzilik parametri hər hansı aşkar şəkildə yazılan, λ parametrinin kvadratik forması olur; bu kvadratik formanın əmsalları $\theta_0 \in \Theta_0$ -dan asılıdır. Bu nəticə A. Vald tərəfindən alınmışdır və bu nəticənin xüsusi halları və onların dəqiqləşdirilmələri, ümumiləşmələri də ona məxsusdur (bax, [3] – [6]). Doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasının asimptotikasının araşdırılmasında və D. n. k. haqqında uyğun nəticələrin alınmasında böyük irəliləyiş statistik məsələlərə asimptotik

yanaşma ilə bağlıdır (bax, [6] – [9]); bundan başqa, (2) statistikasının paylanması üçün asimptotik ayrılış alınmışdır (bax, [10] – [11]).

(1) statistikasını [və uyğun olaraq (2)] aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\lambda(x) = p(x, \hat{\theta}_0) / p(x, \hat{\theta}),$$

burada $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$, – $\{\mathbf{P}_{\theta}; \theta \in \Theta\}$ ailəsi üçün θ parametrinin maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətidir, $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_0(x)$, – $\{\mathbf{P}_{\theta}; \theta \in \Theta_0\}$ ailəsi üçün ilkin hipotez şərtində θ parametrinin maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətidir. Beləliklə də, D. n. k. statistikasının qurulması $\hat{\theta}_0$ və $\hat{\theta}$ maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətlərinin hesablanması ilə bağlı olur. Lakin D. n. k.-nə asimptotik ekvivalent bir sıra kriterilər vardır ki, hesablanma baxımından daha sadədir, məs., *Vald kriterisi*, *Rao kriterisi*, *C(α) statistik kriterisi* və s. (bax, [6]).

Statistik nəticənin alınması üçün əsas olan maksimal doğruxoxşarlıq prinsipi özü-özlüyündə elə ciddi formal üstünlüklərə malik olmasa da, bununla belə, onun əsasında alınan D. n. k. bir sıra hallarda, əsas etibarilə, asimptotik xassələrə malik olur (bununla yanaşı elə misallar vardır ki, D. n. k. hətta məqbul kriteri belə olmur). Məsələlərin geniş sinfi üçün D. n. k.-nin ümumi xassələri – meylsizlik, invariantlıq (nisbətən münasib çevirmələr qrupuna nəzərən), tutarlılıq kimi xassələr müəyyən olunmuşdur. D. n. k. – asimptotik ən orta güclü kriteridir (informasiya matrisin doğruduğu ellipsoidlərdə güc funksiyasının ortalanması şərtində) (bax, [3]); asimptotik müntəzəm ən güclü invariant kriteridir (nisbətən münasib xətti çevirmələr qrupuna nəzərən). D. n. k. Bahadur asimptotik optimal kriterisidir (bax, [12]), *asimptotik minimaks kriteri* və *asimptotik Beyes kriterisidir* (hamar aprior paylanmaların geniş sinfi üçün) (bax, [13]).

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1933, v. A 231, p. 289–337; [3] Wald A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, № 3, p. 426–82; [4] Wilks S. S., «Ann. Math. Statist.», 1938, v. 9, № 1, p. 60–62; [5] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [6] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56; [7] Le Cam L., в кн.: Proceedings of the 3-ed Berkeley symposium mathematical statistics and probability, v. 1, Berk. – Los. Ang., 1956, p. 129–56; [8] Le Cam L., «Univ. Calif. Publ. Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 37–98; [9] Пусас Дж., Континуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [10] Чибисов Д. М., van Zwet W. R., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 3, с. 417–39; [11] Pfan z a g l J., в кн.: Developments in statistics, N. Y., 1980, v. 3, p. 1–97; [12] Bahadur R. R., Some limit theorems in statistics, Phil., 1971 (SIAM); [13] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [14] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ gücləndirilmiş « **правдоподобия принцип** усиленный; **strong likelihood principle** » – bax, *Ən böyük doğruxoxşarlıq prinsipi*.

DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ zəif « **правдоподобия принцип** слабый; **weak likelihood principle** » – bax, *Ən böyük doğruxoxşarlıq prinsipi*.

DOĞRUYAOXŞARLIQ TƏNLİYİ « **правдоподобия уравнение; likelihood equation** » – *maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətinin* tapılması üçün tənlikdir.

DOĞUM ANI « **рождения момент; birth time** » – bax, *Qırılma anı*.

DOĞUM VƏ ÖLÜM PROSESİ « **рождения и гибели процесс; birth-and-death process** » – vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, 2, \dots\}$ olan *Markov prosesidir* və $h \rightarrow 0$ şərtində, h müddəti ərzində n vəziyyətdən $n+1$ və $n-1$ vəziyyətlərinə uyğun olaraq, $\lambda_n h + o(h)$ və $\mu_n h + o(h)$ ehtimalları ilə keçid mümkündür; digər keçidlərin ehtimalı $o(h)$ -a bərabərdir. Artım əmsalları λ_n -lərin və ölüm əmsalları μ_n -lərin xüsusi olaraq seçilməsindən asılı olaraq xüsusi hallar alınır və bu da müxtəlif real proseslərin: radioaktiv çevrilmələr, telefon stansiyalarının fəaliyyəti, bioloji populyasiyaların evolyusiyası və s. kimi proseslərin təsviri üçün məqbul olur. D. və ö. p.-ndən təbii sahələrdə istifadə olunmasına səbəb keçid ehtimalları üçün tənliklərin sadəliyidir və bunları əksər hallarda aşkar şəkildə tapmaq olur. D. və ö. p.-nin xüsusi halları – *sırf artım prosesi*, *Yul prosesidir*. Əgər $\lambda_n = n\lambda + \nu$,

$\mu_n = n\mu$ olarsa, onda D. və ö. p. – *immigrasiyalı şəxələnen proses* olur və bu halda n – hissəciklərin sayıdır; hər bir hissəcik $h \rightarrow 0$ müddəti ərzində $\mu h + o(h)$ ehtimalı ilə yox olur (itir); $\lambda h + o(h)$ ehtimalı ilə iki hissəyə ayrılır, bundan başqa, bir hissəcik $\nu h + o(h)$ ehtimalı ilə xaricdən immiqrasiya edir. Əgər $\nu = 0$ olarsa, *binar şəxələnen proses* olur. Əgər $\nu = 0$ olarsa, onda belə immiqrasiyalı proses xətləri sayı sonsuz telefon sisteminin təsviri məqsədilə tətbiq oluna bilər. Bu halda sistemin vəziyyəti məşğul xətlərin sayıdır. Artım əmsalı $\lambda_n = \nu$ daxil olan çağırışları, μ isə danışiq müddətini xarakterizə edir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982.

DOĞURAN FUNKSIONAL(1) ölçülərin kəsilməz konvolyusion semigrupunun « **порождающий функционал** непрерывной сверточной полугруппы мер; **generating functional of a continuous convolution of measures semigroup** » – lokal kompakt G qrupunda, kompakt daşıyıcıya malik sonsuz differensiallanan bütün f funksiyalarının fəzası $D(G)$ -də

$$Af := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_G f(x) \mu_t(dx) - f(e) \right]$$

qaydası ilə verilən xətti A funksionaldır, burada $\{\mu_t, t \geq 0\}$, – G qrupunda ölçülərin hər hansı kəsilməz konvolyusion semigrupu. A funksionalını $\mathcal{E}(G)$ regular funksiyalar [yəni elə kəsilməz məhdud g funksiyalarının ki, ixtiyari $f \in D(G)$ üçün $fg \in D(G)$ şərti ödənilsin] fəzasına birqiymətli davam etdirmək olur.

A D. f. birqiymətli olaraq, kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupunu təyin edir. Kəsilməz konvolyusion semi – qruplar sinfində yığılmanı D. f. vasitəsilə təsvir etmək olur. μ_t və $\mu_t^{(n)}$,

$t \geq 1$ D. f.-lan A və A_n olan kəsilməz konvolüsyon semi – qruplar olsun. $\mu_t^{(n)}$ ardıcılığı μ_t -yə $n \rightarrow \infty$ olduqda, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, ixtiyari $f \in \mathcal{E}(G)$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $A_n f \rightarrow A f$ münasibəti ödənilsin (bax, [1] – [3]).

Müşayiətedici sonsuz bölünən qanunlar haqqında analogi klassik nəticə aşağıdakı müddədir. ν_n – G qrupunda ehtimal ölçüləri ardıcılığı, k_n – $k_n \nearrow \infty$ şərtini ödəyən, tam müsbət ədədlər ardıcılığı, $\{\mu_t, t \geq 0\}$ – D. f. A olan kəsilməz konvolüsyon semi – qrup olsun. Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir:

- 1) $\nu_n^{[k_n]} \rightarrow \mu_t, t \geq 0$ (diskret semi – qrupların yığılması);
- 2) $\exp[tk_n(\nu_n - \delta_e)] \rightarrow \mu_t, t \geq 0$ (müşayiətedici qanunların yığılması);
- 3) $\mathcal{E}(G) \rightarrow \mu_t, t \geq 0$ (D. f.-nin yığılması). Bu nəticə qruplarda dayanıqlı paylanmaların cazibə oblastlarının təsvirində olduqca mühümdür və qruplarda ehtimal paylanmalar üçün limit teoremlərini uyğun Li cəbrlərində, yeni sonlulüclü vektor fəzalarında analogi məsələlərə gətirməyə imkan yaradır (bax, [2], [4]).

Əd.: [1] H a z o d W., «Теория вероятн. и ее примен.», 1995, т. 40, в. 4, с. 929–34; [2] Siebert E., «Adv. Math.», 1981, v. 39, p. 111–54; [3] K h o k h l o v Y u. S., in: Probability measures on groups X, N. Y., 1991, p. 239–47; [4] H a z o d W., S c h e f f l e r H.-P., «J. Theor. Probab.», 1993, v. 6, № 1, p. 175–86.

DOĞURAN FUNKSİYA ehtimali «производящая функция вероятностная; probability generating function» – bax, *Doğuran funksiya*(s) ədədi ardıcılığı.

DOĞURAN FUNKSİYA eksponensial «производящая функция экспоненциальная; exponential generating function» – bax, *Doğuran funksiya*(s) ədədi ardıcılığı.

DOĞURAN FUNKSİYA(s) ədədi ardıcılığın «производящая функция числовой последовательности; generating function of a sequence of numbers», $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ ardıcılığının doğuran funksiyası –

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

qüvvət sırasıdır, burada z – ya formal dəyişən, ya da kompleks və ya həqiqi ədəddir. z -in formal dəyişən kimi götürüldüyü hal kombinator məsələlərin hesablanması üçün xarakterikdir. $F(z)$ funksiyasının əmsalları a_n -lərin asimptotik xassələrini araşdırarkən, z simvolu kompleks və ya həqiqi ədəd kimi interpretasiya olunur. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ əmsallarının şəkildən, onların arasında əlaqədən və ola bilsin ki, kombinator interpretasiyanın varlığından asılı olaraq D. f. anlayışını sonradan konkretləşdirmək mümkündür.

M i s a l l a r. 1) $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ – bezi kombinator obyektləri hesablayan ədədlər ardıcılığı olsun:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

funksiyası eksponensial doğuran funksiya adlanır.

2) Əgər X ixtiyari tərtib mütləq momentləri sonlu olan təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} M X^n \frac{z^n}{n!}$$

sırası X təsadüfi kəmiyyətinin momentlərinin doğuran funksiyası adlanır.

3) Əgər X tam qiymətlər alan, mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$F_X(z) = M z^X = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X = n\} z^n$$

berəbərləri ilə ehtimali doğuran funksiya və ya sadəcə, X təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası təyin olunur. X təsadüfi kəmiyyətinin D. f. onun xarakteristik funksiyası $\varphi_X(t)$ ilə

$$\varphi_X(t) = F_X(e^{it})$$

münasibətilə bağlıdır.

Təsadüfi kəmiyyətin bir çox xarakteristikaları onun D. f. tərtimlərində sadə şəkildə ifadə olunur. Məs.,

$$P\{X = n\} = \frac{1}{n!} F_X^{(n)}(0), \quad M X = F_X'(1),$$

$$D X = F_X''(1) + F_X'(1) - F_X'^2(1)$$

$$M X(X-1) \dots (X-k+1) = F_X^{(k)}(1).$$

4) $X = (X_1, \dots, X_k)$ koordinatları mənfi olmayan tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor olsun.

$$F_{X_1, \dots, X_k}(z_1, \dots, z_k) = M z_1^{X_1} \dots z_k^{X_k}$$

funksiyasına X təsadüfi vektorunun doğuran funksiyası deyilir.

Doğuran funksiyalar metodu A. Muavr (A. Moivre) və P. Laplas (P. Laplace) kimi alimlərin yaşadığı dövrlərdən məlum olub, ehtimali doğuran funksiyalarla bağlıdır və tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin xassələrinin öyrənilməsi üçün əsas metodlardan biridir.

Əd.: [1] Р н о р д а н Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

DOĞURAN FUNKSİYA(s) momentlərin «производящая функция моментов; moment generating function» – bütün momentləri sonlu olan və uyğun artım şərtlərinə təbə olan X təsadüfi kəmiyyətinin funksional xarakteristikasıdır. Ümumi halda, D. f. $s=0$ qiymətini də daxilinə alan s qiymətlərinin hər hansı baxılan Δ intervalında $\varphi(s) = M \exp(sX)$ ikiterəfli Laplas – Stilyes çevirməsi ilə üst-üstə düşür. $\varphi(s)$ funksiyası $s \neq 0$ olduqda mövcud olmaya da bilər, buna görə də, momentlərin D. f. anlayışı məs $\Delta > 0$ fərziyyəsi ilə uyğunlaşdırılır. «Momentlərin

D. f.» adı $\mathbf{M}X^k = \varphi^{(k)}(0)$, $k=0,1,\dots$ bərabərlikləri ilə bağlıdır, burada təoremlər birtərəfli təoremlər kimi anlaşılır. Əgər $X \geq 0$ (və ya $X \leq 0$) şərti vahid ehtimalla ödənilsə, onda momentlərin D. f. $s \geq 0$ (uyğun olaraq, $s \leq 0$) olduqda mövcuddur.

Bax, *Moment, Doğuran funksiya(sı)* tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

DOĞURAN FUNKSIYA(sı) tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin «производящая функция целочисленной случайной величины; generating function of an intervalvalued random variables» – Laplas – Stilyes *integral çevirməsinin* xüsusi halıdır. Əgər X təsadüfi kəmiyyəti yalnız tam, mənfi olmayan qiymətlər alırsa,

$$\varphi(z, X) = \mathbf{M}z^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}\{X = k\}$$

funksiyası X -in doğuran funksiyası adlanır, burada z – kompleks ədəddir, $|z| \leq 1$.

X təsadüfi kəmiyyətinin D. f. onun xarakteristik funksiyası $f_X(t)$ ilə

$$f_X(t) = \varphi(e^{it}, X), \quad t \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyi ilə bağlıdır.

D. f. şəxələnen proseslər nəzəriyyəsində, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində və ehtimal nəzəriyyəsinin digər bölmələrində geniş surətdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

DOĞURAN FUNKSIYA(sı) təsadüfi kəmiyyətin «производящая функция случайной величины; generating function of a random variable» – bax, *Doğuran funksiya(sı)* ədədi ardıcılığı.

DOĞURAN FUNKSIYA(sı) təsadüfi vektorun «производящая функция случайного вектора; generating function of a random vector» – bax, *Doğuran funksiya(sı)* ədədi ardıcılığı.

DOĞURAN OPERATOR «производящий / инфинитезимальный оператор, генератор; generator / infinitesimal operator» – operatorların birparametrik semi – qrupunun sıfırdə təməsidir. Daha dəqiq, T_t , – $X: T_t T_s = T_{t+s}$, $t, s \geq 0$ Banax fəzasında məhdud xətti operatorların semi – qrupu olsun. A doğuran operatoru

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} \quad (*)$$

münasibətilə ələ $f \in X$ olan f -lər üçün təyin olunur ki, bu f -lər üçün (*)-nın sağ tərəfindəki limit güclü yığılma mənada vardır (bunların çoxluğu D_A ilə işarə olunur). Əgər T_t semi – qrupu operator norması mənada kəsilməzdirsə, onda D. o. A –

məhduddur və $T_t = e^{tA}$ ifadəsi doğrudur. Bax, *Infinitesimal operator, Hille – İosida teoremi*.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

DOĞURAN OPERATOR(u) diffuzion prosesin «производящий оператор диффузионного процесса; generator of a diffusion process» – prosesin *infinitesimal operatorunun* C_b^2 fəzasına daralması olan

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - c(x)$$

– ikinci tərtib differensial operatorudur (bax, *Diffuzion proses*).

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

DOĞURAN OPERATOR(u) prosesin «производящий оператор процесса; generator of a process» – *infinitesimal operator* termininə bəzən sinonim kimi istifadə olunan termdir. Məs., əgər ələ φ funksiyası varsa ki,

$$f(X_t) - \int_0^t \varphi(X_s) ds$$

– $(X_t, \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin və $\mathbf{P}_x$ ehtimallarından ixtiyari birinin doğurduğu σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən martinqaldır, onda f funksiyası $(X_t, \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin doğuran operatoru A -nın təyin olunma oblastındandır, bu halda $Af = \varphi$ götürülür.

Doğuran operator belə tərfi ilə infinitesimal operatorun genişlənməsidir.

DOĞURUCU «образующая; generator» – bax, *Erqodik nəzəriyyə*.

DOLAŞMA «блуждание; random walk» – bax, *Təsadüfi dolaşma*.

DOLDURULMA «заполнение; fulling» – bax, *Minkovski əməlləri*.

DOMİNAR VEKTOR «доминирующий вектор; dominating vector» – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama*.

DOMİNAR VEKTORLAR ARDICILLIĞI «доминирующих векторов последовательность; sequence of dominating vectors» – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama*.

DOMİNARLANAN AİLƏSİ, PAYLANMALARIN «доминированное семейство распределений; dominated family of distributions» – bax, *Mütəq kəsilməz paylanma, Sıxlıq, ehtimal sıxlığı*.

DONSKER – PROXOROV İNVARİANTLIQ PRİNSİPI «Донскера – Прохорова принцип инвариантности; Donsker – Prokhorov invariance principle» – bax, *Invariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün.

DÖBLİN ŞƏRTİ «Деблина условие; Doeblin condition» – vəziyyətləri çoxluğu sonsuz Markov zəncirinin keçid ehtimalları üzərinə qoyulan şərt ki, bu şərt ödənildikdə

zəncirin evolyusiyası sonlu Markov zəncirlərinin evolyusiyasına olduqca oxşar olur (bax, *Erqodik teoremlər* Markov prosesləri üçün). Şərt 1937-də V. Döblin (W. Doeblin) tərəfindən daxil olunmuşdur. Özünün müasir formasında ($\mathcal{E}, \mathcal{B}$) ölçülən fəzasında verilmiş hər hansı bir cins Markov zəncirinin keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$ -larn aşağıdakı tələbi ödədiyi fərz olunur: $\nu(\Gamma) \leq \gamma$ bərabərsizliyinin ödənilməsi hər bir halda $\mathcal{B}$ -də ele sonlu ν ölçüsü və ele natural m və ε , $\gamma > 0$ vardır ki, $p(m, \cdot, \Gamma) \leq 1 - \varepsilon$ münasibəti ödənilir.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Нев Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997.

DÖBLİN TEOREMİ « Деблина теорема; Doebelin theorem » – bax. *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətler üçün.

DÖBLİN UNIVERSAL QANUNU « Деблина универсальный закон; Doebelin universal law » – bax, *Natamam cazibə oblastı*.

DUAL MARKOV PROSESİ « дуальный марковский процесс; двойственный марковский процесс; dual Markov process », ikili Markov prosesi – digər (ilkin) Markov prosesi ilə ikilik şərtlərlə bağlı Markov prosesidir. $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ və $\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_t, \hat{\mathcal{A}}_t, \hat{P}_x)$ – eyni vəziyyətlər fəzası ($\mathcal{E}, \mathcal{A}$)-də iki bir cins Markov prosesi, ν isə $\mathcal{E}$ -də σ – sonlu hər hansı ölçü olsun.

Əgər ζ və $\hat{\zeta}$ proseslərinin keçid funksiyaları

$$\nu(dx) p(t, x; dy) = \nu(dy) \hat{p}(t, y; dx) \quad (*)$$

münasibətini ödəyirlərsə, onda ζ və $\hat{\zeta}$ prosesləri ν ölçüsünə nəzərən *dual proseslər* adlanır (və ya $\hat{\zeta}$ prosesi ζ prosesi üçün ν ölçüsünə nəzərən *dual Markov prosesi* adlanır).

Əgər (*) münasibəti ödənilərsə və ζ ilə $\hat{\zeta}$ proseslərinin rezolventləri r_λ və $\hat{r}_\lambda$ ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirsə (yeni $r_\lambda(x, \cdot) < \nu(\cdot)$ və $\hat{r}_\lambda(x, \cdot) < \nu(\cdot)$ münasibətləri bütün $\lambda > 0$, $x \in \mathcal{E}$ qiymətlərində ödənilərsə), ζ ilə $\hat{\zeta}$ prosesləri ν ölçüsünə nəzərən güclü dual proseslər adlanır. D. M. p. anlayışı ehtimali potensial nəzəriyyəsinin (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) bazis anlayışlarından biridir. D. M. p.-nin tədqiqi ilkin Markov prosesinin çevrilmiş zaman ərzində ne qaydada cərəyan etməsinin araşdırılması ilə ekvivalentdir. Xüsusi halda, bəzi fərziyyələr əsasında ilkin Markov prosesində zamanı çevirmə eməlinə istinadən D. M. p. qurmaq mümkündür. Hətta, əgər $\hat{\zeta}$ prosesi ζ prosesi üçün ν ölçüsünə nəzərən D. M. p.-dirsə, onda kifayət qədər geniş şərtlərlə ümumi $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ fəzasında ζ və $\hat{\zeta}$ proseslərini yeganə bir proses kimi ele reallaşdırmaq mümkündür ki, P_x ölçüləri prosesin gələcəyinin, $\hat{P}_x$ ölçüləri isə prosesin keçmiş hərəkətinin cərəyanlarını ifadə etmiş olsun; bu halda $\tilde{\Omega}$ fəzasında prosesi təyin edən ölçü, ümumiyyətlə, yalnız σ – sonlu ölçü olur.

194 DUAL

Əd.: [1] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov process and potential theory. N. Y. – L., 1968; [3] Smyth R. T., Walsh J. B., «Invent. Math.», 1973, v. 19, p. 113–48; [4] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 264–78; [5] Mitro J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H. 2, S. 139–56, Bd 48, H. 1, S. 97–114; [6] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

DUAL ÖNGÖRÜL PROYEKSİYA « дуальная предсказуемая проекция; dual predictable projection » – kompensator mənasında anlaşılr.

Bax, *Kompensator*.

DUB BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Дуба неравенства; Doob inequalities » – $\zeta^* = \{\zeta_t^*, t \geq 0\}$ təsadüfi prosesi üçün

$$P\{\zeta_T^* \geq a\} \leq \frac{1}{a^2} M|\zeta_t|, \quad a > 0,$$

$M|\zeta_T|^p < \infty$ olduqda

$$M(\zeta_T^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M|\zeta_t|^p, \quad p > 1$$

bərabərsizlikləridir, burada $\zeta_t^* = \sup_{s \leq t} |\zeta_s|$, $\zeta = (\zeta_t, t \geq 0)$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalara malik müntəzəm inteqrallanan martinqal, T – Markov anıdır və $T < \infty$.

Əgər ζ ($\zeta_0 = 0$) martinqalı, kvadratik variasiyası $[\zeta, \zeta] = ([\zeta, \zeta]_t, t \geq 0)$ və kvadratik xarakteristikası $\langle \zeta \rangle = (\langle \zeta \rangle_t, t \geq 0)$ olan lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olarsa, bu halda

$$P\{\zeta_T^* \geq a\} < \frac{1}{a^2} M[\zeta, \zeta]_T \frac{1}{a^2} M\langle \zeta \rangle_T$$

Kolmoqorov – Dub bərabərsizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

DUB MƏRKƏZLƏNDİRİCİ FUNKSİYASI « Дуба центрирующая функция; Doob centering function » – bax. *Dub mərkəzləndirici sabitləri*.

DUB MƏRKƏZLƏNDİRİCİ SABİTLƏRİ « Дуба центрирующие константы; Doob centering constants » – $\{\xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün

$$M \arctg(\xi_n - c_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

qaydası ilə təyin olunan c_n sabitləridir. D. m. s.-lərindən təsadüfi sıraların mahiyyət etibarilə yığılmasının araşdırılmasında və asılı olmayan artımları təsadüfi proseslərin qurulmasında istifadə olunur. D. m. s.-nin mühüm xassəsi ondan ibarətdir ki, əgər $\{\xi_n - a_n\}$ ardıcılığı a_n ədədlərinin müəyyən seçiminə sanki hər yerdə yığılırsa, onda $a_n = c_n$ götürmək olar. Əgər $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi prosesdirsə, onda

$$M \arctg(\zeta(t) - f(t)) = 0$$

qaydası ilə təyin olunan $f(t)$ funksiyası – Dub mərkəz – ləndirici funksiyası adlanır.

Əd.: [1] Дуб Д. Ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., в. 1, М., 1960.

DUB – MEYER AYRILIŞI « Дуба – Мейера разложение; Doob – Meyer decomposition » – X submartinqalı üçün $X = M + A$ ayrılışdır, burada M – lokal martinqal, A – sıfırdan başlayan artan öngörül prosesdir. Ayrılış vardır və yeganədir. Məs., əgər Y kvadratik integrallanan martinqaldırsa, onda Y^2 submartinqaldır və $Y^2 = M + A$ (bu halda A prosesi martinqalın kvadratik variyasiyası adlanır və o, $\langle Y \rangle$ kimi işarə olunur). Stoxastik integralın martinqal üzrə tərifində D. – M. a.-nın tətbiqi bu bərabərliyə əsaslanır. Diskret zaman halı üçün D. – M. a. C. Dub tərəfindən [1]-də alınmışdır; «adi» şərtlərdə (baxılan proseslərin trayektoriyaları sağdan kəsilməzdir, soldan limitləri vardır; submartinqalla bağlı azalmayan σ – cəbrlər ailəsi sağdan kəsilməz və tamamlanmışdır) kəsilməz zaman halı üçün P. A. Meyer tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur. D. – M. a. «adi» şərtlərsiz belə doğrudur (bax, [3] – [4]).

Əd.: [1] Дуб Д. Ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Мейер П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Гальчук Л. И., «Матем. сб.», 1981, т. 115, № 2, с. 163–78; [4] Lenglart E., «Lect. Notes Math.», 1980, v. 784, p. 500–46.

DUBLLAMA / BİRDƏFƏLİK EHTİYATDA SAX-LAMA « дублирование / однократное резервирование; doubling / single redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

DUBLLAŞDIRMA texnikada « дублирование в технике; doubling in engineering » – əsas elementlə yanaşı bu elementin funksiyalarını onun imtina anında yerinə yetirəcək dublaşdırıcı elementin daxil olunmasıdır. Dublaşdırıcı elementin imtinaya məruz qalmasından asılı olaraq dublaşdırma – yüklənmiş və yüklənməmiş dublaşdırma kimi iki növə ayrılır. D.-li sistemin imtinası əsas və dublaşdırıcı elementlərin imtinası vəziyyətidir. D.-li sistemin xarakteristikaları semi – Markov prosesləri, daxil olunmuş Markov zəncirləri, təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri metodları ilə araşdırılır. Məs., yüklənməmiş dublaşdırılmalı bərpə olunan sistemin imtinasız işləmə müddəti ζ təsadüfi kəmiyyəti $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \dots + \zeta_\nu$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada ζ_ν – elementin imtinasız işləmə müddəti, $\nu \geq 1$ isə birinci imtinasız işləmə müddətinin nömrəsidir ki, bu müddətdə berpanın sona çatmadığı nəzərdə tutulur.

DÜYÜN / DAYAQ NÖQTƏSİ PLANIN « узел плана; supporting point of a design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

DÜYÜNLƏR MODELİ « узлов модель; site model » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*.

DÜZ TƏNLİYİ, KOLMOQOROVUN « прямое уравнение Колмогорова; forward Kolmogorov's equation », Fokker–Plank tənliyi – bax, *Diffuzion proses, Kolmoqorov tənlikləri, Stoxastik differensial həndəsə*.

DÜZBUCAQLI PAYLANMA « прямоугольное распределение; rectangular distribution » – bax, *Müntəzəm paylanma*.

DÜZƏLDİCİ STRATEGİYA « уравнивающая стратегия; equalizing strategy » – bax, *Oyunu, iki şəxsin*.

DÜZƏLİŞ, KƏSİLMƏZLİK ÜÇÜN « поправка на непрерывность; correction for continuity » – *binomial paylanmanın* normal paylanma ilə daha yaxşı approksimasiya olunması üçün istifadə olunan, $c = 0,5$ -ə bərabər sabitdir.

ξ_n – parametrləri n və p olan ($0 < p < 1$) binomial paylanma qanununa təbə təsadüfi kəmiyyət olsun. Əgər $p = \text{const}$ və $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda Muavr – Laplas teoreminə əsasən ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması normal paylanma ilə approksimasiya olunur, yəni

$$\begin{aligned} P\{\xi_n \leq x\} &= \sum_{k=0}^x C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right], \end{aligned} \quad (1)$$

burada c – ixtiyari sabitdir. $n - \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti də binomial qanunla paylanır, lakin bu təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının parametrləri n və $1-p$ -yə bərabərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları arasında

$$P\{\xi_n \leq x\} + P\{n - \xi_n \leq n - x - 1\} = 1$$

münasibəti doğrudur. Bu münasibət və (1)-dən

$$\Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + \Phi\left[-\frac{x - np + (1-c)}{\sqrt{np(1-p)}}\right] = 1 \quad (2)$$

olduğu alınır.

z -in bütün həqiqi qiymətlərində $\Phi(z) + \Phi(-z) \equiv 1$ eyniliyi doğru olduğundan təbii olaraq, c sabitini elə seçmək olur ki, (2) bərabərliyi təqribi deyil, dəqiq olsun, yəni

$$\Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{x - np + (1-c)}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \equiv 0$$

şərtindən $c = 0,5$ olduğu alınır. (1) düsturunda $c = 0,5$ sabiti riyazi statistikada Φ normal paylanmasının approksiməedici funksiyasının kəsilməzliyi üçün düzəliş, bəzən də approksiməedici paylanmanın kəsilməzliyi üçün *Yeyts düzəlişi* adlanır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Джонсон Н., Ливон Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, пер. с англ., 2 изд., т. 1–2, М., 1980–81.

DÜZGÜN DƏYİŞƏN FUNKSİYA « правильно меняющаяся функция; property (regularity) changing function » – ehtimal nəzəriyyəsində geniş surətdə tətbiq olunan Karamata (Karamata J.) tərəfindən 1930-da daxil olunmuş anlayışdır.

$U(0, \infty)$ -da elə monoton funksiya olsun ki, $t \rightarrow \infty$ olduqda x nöqtələrinin hər yerdə sıx çoxluğu A -da

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \rightarrow \psi(x) \leq \infty \quad (1)$$

münasibətini ödəsin. Onda $\psi(x) = x^\rho$ doğrudur, burada $-\infty \leq \rho \leq \infty$. Bu şərtlərdə, ρ sonlu olduqda U funksiyası sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiya adlanır.

D. d. f.-nin bu tərifı monoton olmayan funksiyalar üçün də istifadə oluna bilər.

$$U(x) = x^\rho L(x) \quad (2)$$

olsun. $U(tx)/U(t)$ nisbəti x^ρ -ya, yalnız və yalnız, $t \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari $x > 0$ üçün

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad (3)$$

münasibəti ödənildikdə yığılır. Bu xassəli funksiyalar **asta dəyişən funksiyalar** adlanır.

$(0, \infty)$ -da təyin olunmuş müsbət L funksiyası (onun monoton olması zəruri deyildir), yalnız və yalnız, (2) münasibətini ödədiyi halda sonsuzluqda **asta dəyişən funksiya** adlanır.

U funksiyası, yalnız və yalnız, o halda ρ üstlü ($-\infty < \rho < \infty$) düzgün dəyişən funksiya adlanır ki, o, (2) şəklində ifadə olunsun, bu şərtlə ki, L asta dəyişən funksiya olmalıdır.

$U(x^{-1})$, yalnız və yalnız, sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiya olarsa, U – sıfırda düzgün dəyişən funksiya adlanır.

İki asta dəyişən funksiyanın cəmi asta dəyişən funksiya

F_1 və F_2 , –

$$1 - F_i(x) = \frac{1}{x^\rho} L_i(x)$$

münasibətini ödəyən paylanma funksiyaları olsun; L_i asta dəyişən funksiyalardır. Onda $G = F_1 * F_2$ kompozisiyası düzgün dəyişən «qalığa» malikdir, belə ki,

$$1 - G(x) \sim \frac{1}{x^\rho} (L_1(x) + L_2(x)).$$

Əgər $1 - F(x) \sim x^{-\rho} L(x)$ olarsa, onda

$$1 - F^{*r}(x) \sim r x^{-\rho} L(x)$$

münasibəti doğrudur.

Asta dəyişən funksiyalara misallar:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ limiti mövcud olan və sıfıra bərabər olmayan

$U(t)$ funksiyası;

b) ixtiyari β üçün $U(t) = (\log t)^\beta$ funksiyası;

c) bütün β -lar üçün $U(t) = [\log \log(t+1)]^\beta$ funksiyası.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \alpha(z) = 0$ limitləri varsa,

$$U(t) = c(t) \exp \left\{ \int_0^t \frac{\alpha(z)}{z} dz \right\}$$

düsturu asta dəyişən funksiyanın ümumi şəkildə ifadəsidir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1984; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. второе, М., 1985.

DÜZGÜN STATİSTİK QIYMƏT « правильная оценка; proper estimator » – bax, *Equivariant statistik qiymət*.

DVORETSKI' LEMMASI « Дворецкого лемма; Dvoretzky lemma » – bax, *Banax fəzası l_p^n -ni özündə müntəzəm saxlayan*.

DVORETSKI' PROSEDURU « Дворецкого процедуры; Dvoretzky procedure » – bax, *Stoxastik approksimasiya*.

DVORETSKI' – ROCERS TEOREMI « Дворецкого – Роджерса теорема; Dvoretzky – Rodgers theorem » – bax, *Banax fəzası l_p^n -ni özündə müntəzəm saxlayan*.



EDCVORT SIRASI « Эджворта ряд; Edgeworth serie » –

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_{k,k+2} \varphi^{(k+2)}(x) + \dots + b_{k,3k} \varphi^{(3k)}(x)}{n^{k/2}} \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunan sıradır. Burada $f(x)$, – $(s_n - M s_n) / \sqrt{D s_n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sıxlığıdır ($s_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir),

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

standart normal paylanmanın sıxlığıdır və

$$\varphi^k(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}.$$

$b_{k,k+2l}$ əmsalları n -dən asılı olmayıb, $\lambda_3, \dots, \lambda_{k-l+3}$ -ə görə çoxhədlilərdir və burada $\lambda_j = \kappa_j / \sigma^j$, σ^2 – dispersiya, κ_j , – ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin j -ci tərtib semiinvariantıdır. Məs., E. s. ayrılışında ilk hədlər aşağıdakı şəkildədir:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{3!} \lambda_3 \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4!} \lambda_4 \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} \lambda_3^2 \varphi^{(6)}(x) \right] - \frac{1}{n^{3/2}} \left[\frac{1}{5!} \lambda_5 \varphi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!} \lambda_3 \lambda_4 \varphi^{(7)}(x) + \frac{280}{9!} \lambda_3^3 \varphi^{(9)}(x) \right] + \dots$$

$b_{k,k+2l}$ əmsalları mərkəzi momentlərlə də ifadə oluna bilinir. (*) sırasını F. Ecvort [1]-də daxil etmişdir. Bu sıraların asimptotik xassələri H. Kramer (H. Cramér) tərəfindən araşdırılmışdır və o, isbat etmişdir ki, olduqca geniş şərtlərlə (*) sırası vasitəsilə $f(x)$ -in, birinci atılmış qalıq həddi tərtibi ilə, asimptotik ayrılışı alınır.

Əd.: [1] Edgeworth F. Y., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

EDCVORT – KRAMER AYRILIŞI « Эджворта – Крамера разложение; Edgeworth – Kramér expansion » – riyazi gözləməsi sonlu a , dispersiyası σ^2 və mərkəzi momentləri $\alpha_k = M(Y_i - a)^k$, $3 \leq k \leq m+2$, ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ olan xətti normalanmış $(X_1 + \dots + X_n -$

$-an)/\sigma\sqrt{n}$ cəmləri ardıcılığının $F_n(x)$ paylanma funksiyalarının asimptotik sıraya ayrılışdır;

$$F_n(x) = \Phi(x) + Q_1(x) n^{-1/2} + \dots + Q_m(x) n^{-m/2} + R_m(x, n), \quad (1)$$

burada Φ – standart normal qanunun paylanma funksiyası,

$$Q_k(x) = -\Phi'(x) \sum H_{k+2s-1}(x), \prod_{r=1}^k \frac{1}{q_r!} \left(\frac{\gamma_{r+2}}{(r+2)! \sigma^{r+2}} \right)^{q_r}, \quad (2)$$

burada cəmləmə $q_1 + 2q_2 + \dots + kq_k = k$ bərabərliyi ilə əlaqələndən tam mənfə olmayan q_r -lər üzrə aparılır, H_v Hermit çoxhədliləri, γ_r , – F paylanmasının semiinvariantları və $s = q_1 + \dots + q_k$.

Məs.,

$$Q_1(x) = \Phi'(x) \frac{\alpha}{6} (1 - x^2),$$

$$Q_2(x) = \Phi'(x) \left\{ \frac{1}{24} (3 - \alpha_4) (x^3 - 3x) - \frac{\alpha_3^2}{72} (x^5 - 10x^3 - 15) \right\}.$$

Əgər hər hansı $m+2 \leq r < m+3$ üçün $M|X_j - a|^r < \infty$ və $\limsup_{l \rightarrow \infty} |M \exp(itX_l)| < 1$ olarsa, onda

$$R_m(x, n) \leq \frac{\sigma(\sqrt{n}(1+|x|))}{(1+|x|)^r} n^{-(r-2)/2} \quad (3)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $n \rightarrow 0$ olduqda $\delta(u) \rightarrow 0$ olur.

$r=3$ halında F -in şəbəkəvari olmaması şərti $|R_1(x, n)| <$

$< \delta(n) n^{-1/2}$ qiymətləndirilməsini təmin edir. $m = \infty$ halında (1) formal ayrılışı hələ P. L. Çebişevə məlum idi. F. Ecvort bu ayrılışı olduqca gec ala bilmişdi. (1) formal ayrılışının asimptotik xassəsini Q. Kramer [2]-də tədqiq etmişdir.

X_j təsadüfi toplananları eyni qanunla paylanmadıqda və $\mathbb{R}^d$ -dən qiymətlər aldıqda, $d > 1$ olduqda (bax, [4]) E. – K. ayrılışının ümumiləşmələri məlumdur (bax, [3]). F şəbəkəvari paylanma olduqda və ya əsas parametri $0 < \alpha \leq 2$ olan dayanıqlı $G_\alpha(x)$ qanununun cazibə oğlastından olduqda (bax, [5]) E. – K. a.-nın analogları vardır. E. – K. a.-nın bu analoglarında α_k momentləri əvəzinə

$$\mu_k = \int x^k d(F(x) - G_\alpha(x))$$

pseudomomentlerinden istifadə olunur.

Əd.: [1] Edgeworth F., «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [2] Gramér H., «Camb. Tracts Math. And Math. Phys.», 1937, № 36 (rus. per. – Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947); [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Шиганов И. С., в. сб: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, М., 1980, с. 116–21; [5] Золотарев В. М., в кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962, с. 49–50.

EFFEKTİV STATİSTİK QIYMƏT « эффективная оценка; efficient estimator » – meylsiz statistik qiymətdir. E. s. q.-in dispersiyası *Kramer – Rao bərabərsizliyinin* sağ tərəfi ilə eynidir (üst-üstə düşür). E. s. q. qiymətləndirilən paramet üçün kafi statistikadır.

Əgər E. s. q. vardsa, onu maksimal doğruxaşarlıq metodu ilə təyin etmək olur. Bir çox hallarda *Kramer – Rao bərabərsizliyinin* aşağı sərhəddini təyin etmək mümkün olmadığından, statistika-da ekser hallarda baxılan paramet üçün bütün meylsiz statistik qiymətlər sinfindən minimal dispersiyaya malik olan statistik qiymət E. s. q. kimi götürülür.

Bax, *Asimptotik effektiv statistik qiymət*.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Рао С., Линейные статистические методы и их применение, пер. с англ., М., 1968.

EFFEKTİVLİK (y) ikinci tərtib statistik qiymətlərin « *эффективность оценок второго порядка; second order efficiency of estimators* » – asimptotik effektiv statistik qiymətlərin risk funksiyalarının asimptotik ayrılışında ikinci həddə görə bunların və ya statistik qiymətlərin müqayisəsi üçün digər kriteriləri *asimptotik effektiv statistik qiymətlərinin* optimallıq xassəsidir. Asimptotik effektiv statistik qiymətlərin «ikinci tərtib» xassələrinə görə müqayisəsi problemi ilk dəfə [1]-də R. Fişer tərəfindən qoyulmuşdur. $\xi_1, \dots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x, \theta)$ θ -ya görə kifayət qədər hamar olan, asılı

olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $I(\theta) = M_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\xi_1, \theta) \right)^2$

f sıxlıq funksiyasının Fişer informasiya miqdarı, $I_{\theta_n}(\theta)$ isə $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ statistik qiymətinin paylanma sıxlığının informasiya miqdarı olsun. Əgər $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} I_{\theta_n}(\theta) = I(\theta)$ olarsa,

θ_n statistik qiyməti (Fişerə görə) asimptotik effektiv statistik qiymət olur, asimptotik effektiv statistik qiymətlər sinfində isə ən effektiv ikinci tərtib statistik qiymət – bütün θ qiymətlərində $\lim_{n \rightarrow \infty} (nI(\theta) - I_{\theta_n}(\theta))$ kəmiyyətinin minimal kriterisini təmin edən statistik qiymətdir.

Statistik qiymətlərin kifayətlilik kriterisi kimi müasir araşdırmalarda, adətən, risk funksiyası götürülür və hesab olunur ki, risk funksiyası qiymətləndirmə dəqiqliyi ilə sıx bağlı, həmçinin hesablama üçün ən sadə kəmiyyətdir. Statistik qiymətlərin geniş sinifləri üçün, o cümlədən, maksimal doğruxaşarlıq və Beyes statistik qiymətləri üçün risk funksiyasının asimptotik ayrılışları [2] – [6]-də tədqiq olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, statistik qiymətlərin ikinci

tərtib E.-nin təsviri üçün Fişerin nəzərdə tutduğu məsələ statistik qiymətlərin dar bir sinfi üçün həll oluna bilər. $n \rightarrow \infty$ olduqda

meyli $o(n^{-1})$ tərtibdən olan statistik qiymətlər sinfi belələrindən-dir (bax, [6]). [7] – [10]-də $f(T_1, \dots, T_p)$ şəklində statistik qiymətlərin xüsusi sinfi «əyilmiş» eksponensial paylanmalar ailəsi halında öyrənilmişdir, burada T_i seçimin kafi statistikalarıdır və bu halda 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E.-ni təsvir etmək olur (əyilməmiş eksponensial ailələr üçün belə sinif yeganə statistik qiymətə gətirir). Hər iki halda 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. riskini qeyd olunmuş statistik qiymətlər sinifləri ilə kifayətlənmədikdə ixtiyari kompakt və ya hətta bütün fəzada müntəzəm yaxşılaşdırmaq olur.

2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. probleminin məqbul həlli məqbul və minimallığın uyğun surətdə modifikasiya olunmuş Vald kriterilərindən istifadə etməkə alın bilər.

$$R_n(\theta_n, \theta) = M_\theta \left| \sqrt{n}(\theta_n - \theta) \right|^\alpha, \quad \alpha > 0$$

olsun, burada $\theta \in \Theta = (\theta_-, \theta_+)$, $-\infty \leq \theta_- \leq \theta_+ \leq \infty$. 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. nəzəriyyəsində Θ -dan olan kompaktlarda $n \rightarrow \infty$ olduqda müntəzəm olaraq

$$R_n(\theta_n, \theta) = R_0(\theta) - n^{-1}p(\theta) + o(n^{-1}) \quad (1)$$

ayrılışı mümkün olan asimptotik effektiv statistik qiymətlərlə kifayətlənir, burada

$$R_0(\theta) = \gamma_\alpha \Gamma^{-\alpha/2}(\theta),$$

$$\gamma_\alpha = 2^{\alpha/2} \pi^{-1/2} \Gamma((\alpha + 1)/2),$$

$p(\cdot)$ funksiyası lokal Hölder funksiyaları sinfi $C^\beta(\Theta)$, $0 < \beta \leq 1$ sinfindəndir. Əgər p qapalı $[\theta_-, \theta_+]$ intervalında kəsilməz funksiya olarsa, onda $\theta \in \Theta$ üzrə müntəzəm (1) ayrılışı mümkün statistik qiymətlərlə kifayətlənmək olur.

(1) münasibətini ödəyən θ_n statistik qiyməti üçün: elə θ_n^* və $\alpha > 0$ yoxdursa ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$R_n(\theta_n^*, \theta) \leq R_n(\theta_n, \theta) - n^{-1}\alpha\theta(\theta) + o(n^{-1})$$

münasibəti ödənilsin, onda θ_n ikinci tərtib q -yaxşılaşmayan statistik qiymət, $q \geq 0$, $q \neq 0$, $q \in C^\beta(\Theta)$, əgər baxılan şəkildə ixtiyari q funksiyası üçün θ_n , q -yaxşılaşmayan statistik qiymətdirsə, onda o, ikinci tərtib məqbul statistik qiymət adlanır.

2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. nöqteyi – nəzərindən

$$\theta_n = \hat{\theta}_n + n^{-1}g(\hat{\theta}_n) \chi \{ |g(\hat{\theta}_n)| < n^{1/2} \} \quad (2)$$

şəkilli ikinci tərtib statistik qiymətlərin tam sinfi ilə kifayətlənmək olur, burada $g \in C^\beta(\Theta)$, $\hat{\theta}_n$ isə asimptotik effektiv statistik qiymətdir. Əgər $\hat{\theta}_n$ maksimal doğruxaşarlıq statistik qiymətidirsə, onda (2)-də g funksiyasını

$$g(\theta) = T^{-1}(\theta) \left(2 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \omega(\theta) + \frac{(\alpha + 1)M_{3,1}(\theta)}{6I(\theta)} \right) \quad (3)$$

şəklində ifadə etmək məqsəduyğundur, burada $\omega(\theta) > 0$,

$$M_{ij}(\theta) = \mathbf{M}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(\xi_i, \theta) \right)^j. \quad (2), (3) \text{ b\text{e}rab\text{e}rl\text{e}kl\text{e}ri ile}$$

t\text{e}yin olunan statistik qiym\text{e}tl\text{e}rin qeyd olunmu\text{s} formada ifadesinde v\text{e} $\theta_{n,\omega}$ i\text{s}aral\text{e}nm\text{e}lerinde ikinci t\text{e}rtib q – yax\text{s}i\text{s}la\text{s}mayanl\text{ı}q v\text{e} m\text{e}qbulluq \text{s}ertl\text{e}ri \text{e}n sad\text{e} \text{s}\text{e}kilde ifad\text{e} olunur. $\theta_{n,\omega}$ statistik qiym\text{e}tl\text{e}rinin ayrılı\text{s}ında $p(\theta)$ funksiyası

$$\gamma_\alpha \left(2\alpha \omega^{-1}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} I^{-(2+\alpha)/2}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \omega(\theta) + p_0(\theta) \right) \quad (4)$$

\text{s}\text{e}kind\text{e} olur, burada $p_0(\theta)$ funksiyası yalnız $f(x, \theta)$ sıxlıq funksiyasından asılıdır. M\text{e}s., \text{e}g\text{e}r $f(x, \theta) = f(x - \theta)$, $f(\cdot)$ c\text{u}t funksiya olarsa, onda

$$p_0(\theta) = \frac{\alpha I^{-\alpha/2}(\theta)}{24} \left(\frac{4(\alpha + 1)M_{4,1}(\theta)}{I^2(\theta)} + (\alpha + 2) \left(\frac{M_{1,4}(\theta)}{I^2(\theta)} - 3 \right) \right)$$

olur.

$$\lambda(\theta) = \omega^2(\theta) I^{-(2+\alpha)/2}(\theta), \quad \nu(\theta) = q(\theta) \omega^2(\theta)$$

olsun. F\text{e}rz olunur ki, ixtiyari $\theta_0 \in (\theta_-, \theta_+)$ \text{u} \text{c} \text{u}n

$$\Phi_\pm(\theta) = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda^{-1}(u) du, \quad \Phi_\pm = \lim_{\theta \rightarrow \theta_\pm} \Phi_\pm(\theta),$$

$$\Psi_\pm(\theta) = \begin{cases} \int_{\theta_0}^{\theta} \nu(u) du \int_{\theta_0}^{\theta_\pm} \lambda^{-1}(v) dv, & \text{e}g\text{e}r \Phi_\pm < \infty \text{ olarsa,} \\ \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda^{-1}(u) du \int_{\theta}^{\theta_\pm} \nu(v) dv, & \text{e}g\text{e}r \Phi_\pm = \infty \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$$\Psi_\pm = \lim_{\theta \rightarrow \theta_\pm} \Psi_\pm(\theta), \quad \Phi = \min(\Phi_-, \Phi_+),$$

$$\Psi = \max(\Psi_-, \Psi_+)$$

k\text{e}miyy\text{e}tl\text{e}ri t\text{e}yin olunmu\text{s}dur. Onda: 1) $\theta_{\varepsilon,\omega}$, yalnız v\text{e} yalnız, o halda ikinci t\text{e}rtib m\text{e}qbul statistik qiym\text{e}tdir ki, $\Phi = \infty$ olsun; 2) $\theta_{\varepsilon,\omega}$, yalnız v\text{e} yalnız, o halda ikinci t\text{e}rtib q – yax\text{s}i\text{s}la\text{s}mayan statistik qiym\text{e}tdir ki, $\max(\Phi, \Psi) = \infty$ olsun. M\text{e}s., $\hat{\theta}_n$ maksimal do\text{g}ruyax\text{s}arlıq statistik qiym\text{e}ti, yalnız v\text{e} yalnız, o halda ikinci t\text{e}rtib m\text{e}qbul statistik qiym\text{e}tdir ki,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} I^{(2+\alpha)/2}(u) \exp \left\{ \frac{\alpha + 1}{6} \int_{\theta_0}^u \frac{M_{3,1}(v)}{I(v)} dv \right\} du$$

integralı $\theta_\pm$ n\text{o}qt\text{e}l\text{e}ri \text{e}trafında da\text{g}ılır (bax, [11], [12]).

M\text{e}s.\text{e}l. ξ_i niyazi g\text{o}zl\text{e}m\text{e}si $\theta \in \Theta = (-a, a)$, dispersiyası σ^2 olan Qauss t\text{e}sad\text{u}fi k\text{e}miyy\text{e}tl\text{e}ri olsun [3]-\text{e} $M_{3,1}(\theta) = p_0(\theta) = 0$ oldu\text{g}u f\text{e}rz olunur]. Θ -dan olan kompaktlarda

$$R(\theta_{n,\omega}, \theta) = \gamma_\alpha \left(\sigma^\alpha - \frac{\alpha \pi^2 \sigma^{2+\alpha}}{2n\alpha^2} + o(n^{-1}) \right)$$

m\text{u}nt\text{e}z\text{e}m ayrılı\text{s}ı m\text{u}mk\text{u}n olan, $\omega = \cos \frac{\pi \theta}{2\alpha}$, $|\theta| < \alpha$ funk-

siyasına m\text{u}vafiq $\theta_{n,\omega}$ statistik qiym\text{e}ti ikinci t\text{e}rtib m\text{e}qbul statistik qiym\text{e}tdir v\text{e} dem\text{e}li, h\text{e}m d\text{e} ikinci t\text{e}rtib minimaks statistik qiym\text{e}tdir (1 – yax\text{s}i\text{s}la\text{s}mayan, y\text{e}ni $q = 1$).

\text{C}ox\text{o}lc\text{u}ll\text{u} halda m\text{e}qbulluq v\text{e} ikinci t\text{e}rtib q – yax\text{s}i\text{s}la\text{s}mayanl\text{ı}q \text{u} \text{c} \text{u}n ox\text{s}ar \text{s}ertl\text{e}r v\text{a}rdır (bax, [12]).

\text{E}d.: [1] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1925, v. 22, p. 700–75; [2] Linnik Y. V., Mitrofanova N. M., «Sankhya, Ser. A», 1965, v. 27, № 1, p. 73–82; [3] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 4, с. 689–702; [4] Гусев С. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 16–33; [5] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 3, с. 509–59; [6] Pfanzagl J., Wefelmeyer W., «J. Multivar. Anal.», 1978, v. 8, № 1, p. 1–29; [7] Rao C., «Sankhya, Ser. A», 1963, v. 25, № 2, p. 189–206; [8] Efron B., «Ann. Statist.», 1975, v. 3, № 6, p. 1189–242; [9] Ghosh J., Subramanyam K., «Sankhya, Ser. A», 1974, v. 36, № 4, p. 325–58; [10] Eguchi S., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 3, p. 793–803; [11] Ghosh J., Sinha B., «Ann. Statist.», 1981, v. 9, № 6, p. 1334–38; [12] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 309–38.

EFFEKTİVLİK(γ_i) resursun « **ЭФФЕКТИВНОСТЬ** ресурса: resource efficiency » – bax. *Coxgirişlilik*.

EFFEKTİVLİK(γ_i) statistik prosedurun « **ЭФФЕКТИВНОСТЬ** статистической процедуры: efficiency of a statistical procedure » – verilmiş sınıf \text{u} \text{c} \text{u}n statistik prosedurların optimal prosedurla m\text{u}qayis\text{e}sinde istifad\text{e} edil\text{e}n anlayı\text{s}dır. Riyazi statistikada statistik prosedurun optimallıq anlayı\text{s}ı itki funksiyasının se\text{c}iminden bilavasit\text{e} asılı prosedur riski (risk funksiyası) terminl\text{e}ril\text{e} ifad\text{e} olunur. Buna g\text{o}r\text{e} d\text{e}, ola biler ki, \text{e}yni bir statistik prosedur h\text{e}r hansı bir m\text{e}nada oldu\text{q}ca effektiv v\text{e} ya h\text{e}r hansı m\text{e}nada h\text{e}tta optimaldır v\text{e} dig\text{e}r m\text{e}nada is\text{e} az effektivdir.

Statistik prosedurun E. o q\text{e}d\text{e}r d\text{e} d\text{e}qiq t\text{e}yin olunmu\text{s} anlayı\text{s} deyildir; onun daha d\text{e}qiq m\text{e}nası riyazi satistikanın konkret: m\text{e}s, statistik hipotezlerin yoxlanılması v\text{e} statistik qiym\text{e}tl\text{e}ndirm\text{e} kimi m\text{e}s\text{a}l\text{e}l\text{e}rinde alınır.

\text{E}d.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Voinov V. G., Nikulin M. S., Unbiased, Estimators and Their Applications, v. 1, Univariate Case, Dordrecht, 1993; [3] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to Chi-squared Testing, N. Y., 1996.

EFFEKTİVLİYİ, PROQNOZUN meteorologiyada « **полезность прогноза** в метеорологии; efficiency / utility of meteorological forecast », meteoroloji proqnozun effektivliyi, – istehlakçının (v\text{e} ya istehlakçılar toplusunun) q\text{e}bul edil\text{e}n t\text{e}s\text{e}r\text{u}fat q\text{e}rarlarının \text{e}saslandırılması hesabına m\text{u}\text{e}yy\text{e}n iqtisadi netic\text{e}ni almasını t\text{e}min ed\text{e}n meteoroloji proqnoz keyfiyy\text{e}tidir. T\text{e}k-t\text{e}k edilmiş proqnozlardan iqtisadi qiym\text{e}tl\text{e}rindən f\text{e}rqli olaraq, P. \text{e}. statistik anlayı\text{s} olub, uy\text{g}un proqnoz informasiyasının t\text{e}krar-t\text{e}krar istifad\text{e} olunmasında alınan orta «udu\text{s}u» xarakteriz\text{e} edir. \text{E}n m\text{u}h\text{u}m\text{u} potensial P. \text{e} -dir, bu halda f\text{e}rz olunur ki, proqnoz optimal sur\text{e}td\text{e} istifad\text{e} olunur (bax, [1]). Potensial P. \text{e} -nin k\text{e}miyy\text{e}t \text{o}l\text{c} \text{u}s\text{u} kimi $\lambda_0 = (R_- - R_+) / R_-$ \text{o}l\text{c} \text{u}s\text{u}z vuru\text{g}unu g\text{o}t\text{u}rm\text{e}k olar, burada R_+ v\text{e} R_- – istehlakçının orta

meteoroloji itkileridir (bax, *Meteoroloji itkiler funksiyası*); bunlar proqnoz olub-olmadığı hallarda istehlakçının uyğun olaraq optimal strategiyaya riayət etməsini ifadə edən itkilərdir.

Əgər təsadüfi proqnozlar faydalı informasiya daşıdırsa, onda λ_0 göstəricisi həmişə sıfıra bərabərdir, ideal proqnozlar üçün isə

λ_0 vahidə bərabərdir. $\lambda_0 = 0$ şərti hətta təsadüfi olmayan proqnozlar üçün də ödənilə bilər, lakin bu o hallarda olur ki, bu proqnozların metodiki uğuru konkret təsərrüfat məsələsinin xüsusiyyətləri ilə təyin olunan hər hansı sədd həduduna çatı bilmir. Beləliklə, proqnozun metodiki cəhətdən uğurlu olması onun təsərrüfat nöqtəyi – nəzərindən effektiv olması kimi anlaşılmamalıdır. P. e. və onun uğurluluğu arasında birqiymətli əlaqə olmadığından ehl hallar mümkün olur ki, iki müxtəlif uğurluluqlu meteoroloji proqnozdan istehlakçı nöqtəyi – nəzərincə, uğurluluğu formal olaraq aşağı olan proqnoz daha effektiv hesab olunur.

Əd.: [1] Жуковский Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981; [2] Омшанский М. А., «Журнал геофизики», 1933, т. 3, в. 4, с. 489–99; [3] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [4] Т h o m p s o n J. C., в кн.: Weather forecasting and weather forecasts; models, systems and users, v. 2, Boulder (Colo.), 1976, p. 325–78.

EFFEKTİVLİYİ SAXLAMA ƏMSALI « эффективность сохранения коэффициент; efficiency preservation coefficient » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin.*

EHTİMAL « вероятность; probability » – bu və ya digər müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirilməklə istənilən dəfə təkrarlana bilən eksperimentdə baş verə bilən hər hansı bir hadisənin baş verməsinin mümkünlüyü dərəcəsinin ədədi xarakteristikasıdır. «E.» anlayışı elmi idrak kateqoriyası kimi təsadüfi hadisə, təsadüfi proseslər arasında kütləvi proseslərə xas olan xüsusi tip əlaqələri əks etdirir. E. kateqoriyası ehtimali və statistik qanunauyğunluqların xüsusi sinfinə əsaslanır.

E.-in ədədi qiyməti bəzi hallarda (sonlu nəticələri olan eksperimentdə baş verə bilən hadisələr üçün) ehtimalın «klassik» tərifinə əsasən hesablanır: eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisənin ehtimalı bu hadisənin baş verməsi üçün əlverişli elementar hadisələr sayının bütün mümkün ola bilən «bərabər imkanlı» elementar hadisələr sayına nisbətinə bərabərdir.

Digər daha mürəkkəb hallarda E.-in ədədi qiymətini təyin etmək üçün statistik yanaşma tələb olunur. Statistik yanaşmada müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə təkrarən aparılan eksperimentlər seriyasında hər hansı hadisənin baş vermə sayının aparılan eksperimentlərin sayına nisbəti kimi təyin olunan, tezlik adlanan (hər hansı bir qeyd olunmuş p ədədindən n -in kifayət qədər böyük qiymətlərindən çox az fərqlənən) statistik ehtimaldan istifadə olunur. Klassik və ya statistik üsulla təyin olunmuş E.-ə əsasən ehtimal nəzəriyyəsinin qaydalarına uyğun olaraq yeni E.-lər hesablamaq olur.

Riyazi anlamda E. təsadüf və zərurət arasında keyfiyyətə özünəməxsus əlaqəni ifadə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin şərhində E.-in ələ xassələri aksiom şəklində formalaşdırılmışdır ki, bu aksiomların qəbul olunması elmin bu sahəsinin müasir inkişaf mərhələsi üçün bir zərurətə çevrilmişdi. Bununla belə bu aksiomlar, E.-ə nə klassik, nə də ki, statistik yanaşma «ehtimal» anlayışının real məzmununu tam mənasında təyin etmir; bunlar özlüyündə E.-in mahiyyətinin daha da açıqlanması üçün yalnız məlum yaxınlaşmalarlardır. Belə ki, verilmiş müəyyən şərtlər ödənilməklə baş verə biləcək ixtiyari bir hadisə birqiymətli təyin olunmasa da, bu şərtlər daxilində bu hadisənin müəyyən bir E.-ı vardır. Verilmiş şərtlər daxilində bu hadisənin E.-nin varlığı müddəası bir h i p o - t e z d i r. Eksperimentdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı

dedikdə, eksperimentlər seriyasındakı sınaqlar sayının kifayət qədər böyük qiymətlərində bu hadisənin tezliyindən çox az fərqli olan qeyd olunmuş bir ədəd (p , $0 \leq p \leq 1$) nəzərdə tutulur; bu hipotez isə hər dəfə xüsusi yoxlanılmalı və əsaslandırılmalıdır.

E. ilə tezliyin əlaqəsi haqqında mülahizələrdə nəzərə alınmalıdır ki, eksperimentlər seriyasındakı sınaqlar sayı n -in kifayət qədər böyük sonlu qiymətlərində hadisənin tezliyi $k_n(A)/n$ [$k_n(A)$, – A hadisəsinin n sınaqda baş vermə sayıdır] bir qayda olaraq, p ehtimalından çox az fərqlənir.

n -in böyük qiymətlərində $k_n(A)/n$ -in p -dən hansısa olduqca böyük fərqi demək olar ki, az müşahidə olunur. Məs., düzgün metal pulun atılması eksperimentində «gerb» və «şəbəkə» üzvləri ilə düşmə hadisələrinin E. $1/2$ -ə bərabərdir. $n = 10$ olduqda, on dəfə «gerb» və ya on dəfə «şəbəkə» üzü ilə düşmə hadisələri çox az ehtimallıdır.

Lakin bu halda «gerb» üzü ilə düşmə hallarının sayının hökmən beş dəfə olacağını hökm etməyə də kifayətedici dəlil yoxdur; hətta «gerb» üzü ilə düşmə hallarının sayının 4 və ya 5, yaxud da 6-ya bərabər olacağını da hökm etməyə heç bir əsas yoxdur. Lakin $n = 100$ olduqda risk etmədən əvvəldən hökm etmək olar ki, düşən «gerb»-lər sayı 40 – 60 arasında olacaqdır (bax, *Böyük ədədlər qanunu*).

Riyazi anlamda E. adi mənada sözlərlə ifadə olunan «mümkündür», «ehtimal olunur», «ehtimalı çoxdur» kimi «problematik» mülahizələrin dəqiqləşdirilməsinə, hadisənin E.-ni qiymətləndirilməsinə xidmət edir. Bu cür qiymətləndirilmələrdə nəzərə alınmalıdır ki, hər hansı əslində ya doğru, ya yalan mülahizəyə tətbiqi baxımdan bu mülahizənin E.-nin qiyməti yalnız müvəqqəti və ya subyektiv mənə daşıyır, yeni məsələyə subyektiv münasibəti ifadə edir.

Buna görə də, bu və ya digər mülahizələrin etibarlılıq dərəcəsinin qiyməti kimi E.-dan istifadə belə bir nəticəyə gətirməməlidir ki, E. yalnız hər hansı hadisənin baş verməsinin subyektiv inamlılığını ifadə edir. Riyazi olaraq E.-in belə anlaşılması yanlışdır. Elmi araşdırmalarda, adətən, E.-i 0,003 olan hadisə nəzərə alınmır (bu *Üç sigma qaydası* ilə təyin edilmiş normadır). Riyazi statistikada hər hansı bir araşdırmada baş verən xətalərin nəzərə alınmaması üçün *mühümlük ölçüsü* adlanan ehtimaldan istifadə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan riyazi modellər üç anlayışa: elementar hadisələr fəzası adlanan Ω , Ω -nın altçoxluqlarından (hadisələrdən) təşkil olunmuş sinif və bu sinifdə təyin olunmuş çoxluq funksiyası – *ehtimal paylanması* P anlayışlarına əsaslanır. Bu halda A hadisəsi üçün P funksiyasının qiyməti $P(A)$, A hadisəsinin ehtimalı adlanır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

EHTİMAL kvant fizikasında « вероятность в квантовой физике; probability in quantum physics » – ən ümumi və ən mühüm anlayışdır, bu anlayışın daxil olunması zəruriliyi onunla əsaslandırılmışdır ki, fiziki obyektlərin atom və subatom səviyyəsində müşahidə nəticələri statistik xarakter daşıyır. Məs., təsadüfi zaman anlarında radioaktiv parçalanma, mütləq sıfır yaxın temperaturda (yeni istilik fluktuasiyaları olmadığı halda) kristal şəbəkənin atomlarının kvant fluktuasiyaları ilə yaranan işıq səpələnməsi kimi prosesləri qeyd etmək olar. Bu nöqtəyi – nəzərdən, kvant nəzəriyyəsində mikroobyektlərlə bağlı baş verə biləcək proseslər mahiyyət etibarilə ehtimali xarakterlidir və bunlar keçid ehtimalları, orta qiymətlər, dispersiyalar, korrelyasiyalar və s. terminlərlə ifadə olunur.

Lakin prinsipial mühüm cəhət odur ki, ayrılıqda götürülmüş hər bir eksperimentin nəticəsinə adi təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar, amma bununla belə baxılan mikroobyekt üzərində bütün mümkün ola bilən eksperimentlərin statistik nəticələrinin bu mikroobyektin vəziyyətini xarakterizə edən çoxluğun «klassik» təsvirini hər hansı elementar nəticələr fəzası terminləri ilə vermək mümkün deyildir. Başqa sözlə, mikroobyektin vəziyyətini klassik statistik mexanikada olduğu kimi hər hansı «fəza fəzası» $(\Omega, \mathfrak{A})$ -da $P(d\omega)$ ehtimal paylanması ilə vermək mümkün olmur ki, bu fəza $\omega \in \Omega$ «əsl vəziyyətinin» qeyri – dəqiqliyini və ya nə cür ola biləcəyi haqqında bilginin natamamlığını əks etdirə bilsin.

Kvant statistikliyi o mənada əsl statistiklik hesab olunur ki, o, ilkin xarakter daşıyır və ölçmələrin dəqiqliyinin artırılması və olduqca ətraflı olması hesabına prinsipial surətdə aradan qaldırılır (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*). Riyazi nöqtəyi – nəzərdən bu vəziyyət onunla ifadə olunur ki, kvantmexaniki obyektin ehtimali təsviri elementar nəticələr fəzasının klassik aksiomatikasında bütünlüklə qurula bilinmir və bu halda digər analitik vasitələrin cəlb olunması tələb olunur (bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi; Cəbri, müşahidələrin*).

Kvant mexanikasına «gizli parametrlərin» daxil edilməsinin qeyri – mümkünlüyü haqqında tezis, yəni kvant ehtimallarının klassik ehtimalın təsvirinin bu və ya digər formaya gətirilə bilməsi haqqında tezis N. Bor (N. Bohr) tərəfindən irəli sürülmüşdür və 20-ci əsrin 30-cu illərində dərin fiziki – fəlsəfi müzakirə mövzusu olmuşdur (bax, [1]). Bu vəziyyətin de facto qəbul edilməsi determinizm dogmatlarından imtina və fiziki təfəkkürün statistik kateqoriyalarının daxil edilmə istiqamətində maddənin kinetik nəzəriyyəsinin qurulmasından sonra növbəti prinsipial addım olmuşdur. C. Neyman (J. Neumann) [2] əsərində «gizli parametrlər probleminə» riyazi status vermək üçün ilk cəhd göstərmişdir, lakin bu problem yalnız 20-ci əsrin 60-cı illərində əsaslı surətdə aydınlaşdırılmışdır.

Kvant mexanikasında vəziyyətlər və müşahidə olunan kəmiyyətlər H sisteminin Hilbert fəzasında $\hat{S}$, $\hat{X}$ operatorları ilə təsvir olunurlar (bax, *Sıxlıq operatoru, Müşahidələnen*); klassik statistik mexanikada vəziyyətlər $S(d\omega)$ ehtimal paylanmaları ilə, müşahidələnenlər klassik sistemin Ω fəza fəzasında $X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərlə təsvir olunurlar. Gizli parametrlər probleminə klassik və kvant vəziyyətləri və müşahidələnenləri arasında $S(d\omega) \rightarrow \hat{S}$, $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ uyğunluğunun mümkünlüyü və ya qeyri – mümkünlüyü müəyyənləşdirilir; bu uyğunluq müəyyənləşdiyi halda o, kvant mexanikasının statistik öngörmələrini saxlamış və bəzi fiziki əsaslandırılmış şərtləri ödəmiş olardı.

C. Neyman mülahizəsini tənqidi analize məruz edən C. Bell göstərmişdir ki (bax, [3]), *Qlison teoremindən* ele bir müddəə alınır ki, onu aşağıdakı formada ifadə etmək olar: hər hansı Ω fəza fəzasında klassik müşahidələrin hər hansı $X(\omega)$ çoxluğu ilə Hilbert fəzası H -da dim. – ölçüləri 2-dən böyük bütün kvant müşahidələnenlərinin çoxluğu $\hat{X}$ arasında ele qarşılıqlı birqiymətli $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ uyğunluğu yoxdur ki, bu uyğunluq müşahidələnenlərin funksional hesablanmasını saxlaya bilsin, yeni $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ münasibətindən ixtiyari çoxhədli üçün

$f(X(\omega)) \rightarrow f(\hat{X})$ münasibəti alınmış olsun. Anoloji nəticə S. Koxen (S. Kochen) və E. Şpekker (E. Specker) tərəfindən, Qlison teoremindən istifadə olunmayaraq alınmışdır. Buradan qismən müşahidələnmə sxemi üzrə gizli parametrlərin daxil edilməsinin qeyri – mümkünlüyü alınır, məsələn, bu vəziyyət «makroskopik» müşahidə olunan kəmiyyətlər və sistemin fəza fəzasının bəzi funksiyaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğun-

luq olan statistik mexanikada reallaşır. Lakin bu nəticə gizli parametrlərli daha dəqiq nəzəriyyəni istisna etmir və bu nəzəriyyədə eyni bir kvant müşahidələneni $\hat{X}$, müxtəlif çoxsaylı üsullarla ölçülə bilinir və $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ uyğunluğu, beləliklə, qarşılıqlı birqiymətli olmur. Bununla belə C. Bell göstərmişdir ki, hətta belə olduqca geniş sinifdə belə, «Eynşteyn lokallığı» adlandırılan təbii tələbi yerinə yetirmək mümkünlüyü mövcud deyildir. Aşağıda Bell şərtinin riyazi mahiyyətini əks etdirən ayrılma şərti verilir (bax, [4]). $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ və $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$

$$\hat{X}_i \hat{Y}_j = \hat{Y}_j \hat{X}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m \quad (1)$$

kommutativlik şərtini ödəyən kvant müşahidələnenlərinin iki toplusu olsun. Belə hesab etmək olar ki, $\{\hat{X}_i\}$ və $\{\hat{Y}_j\}$ topluları verilən kvant sisteminin iki müxtəlif altsistemlərinə aiddirlər. Əgər (1) şərtini ödəyən ixtiyari iki $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ və $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$ müşahidələnenləri üçün və ixtiyari kvant vəziyyəti $\hat{S}$ üçün ele $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, $Y_1(\omega), \dots, Y_m(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri və hər hansı $(\Omega, \mathfrak{A})$ ölçülən fəzasında $S(d\omega)$ ehtimal paylanması tapılsa ki,

$$\text{tr } S X_i Y_j = \int_{\Omega} X_i(\omega) Y_j(\omega) S(d\omega) \equiv \mathbf{M}_S X_i Y_j$$

münasibəti ödənilsin, onda verilən n, m qiymətləri üçün

$S(d\omega) \rightarrow \hat{S}$, $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ uyğunluğu (qarşılıqlı birqiymətli olma-ya da bilər) bölünənlik şərtini ödəyir, deyilir. Bu onu ifadə edir ki, gizli parametrlərli bölünənlik nəzəriyyəsi verilən kvant sisteminin altsistemləri arasında korrelyasiyalar toplularını yaratmalıdır. Lakin təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyasiyaları üçün ele bərabərsizliklər vardır ki, bunlar kvant nəzəriyyəsində ödənilmir. Məs., $X_1(\omega), X_2(\omega), Y_1(\omega), Y_2(\omega)$, – $[-1, 1]$ parçasında qiymətlər alan, ixtiyari $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda

$$|\mathbf{M}_P X_1 Y_1 + \mathbf{M}_P X_1 Y_2| + |\mathbf{M}_P X_2 Y_1 - \mathbf{M}_P X_2 Y_2| \leq 2 \quad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Gizli parametrlərli bölünənlik nəzəriyyəsinə (2) bərabərsizliyi $\text{tr } \hat{S} \hat{X}_i \hat{Y}_j$ kvant korrelyasiyaları üçün ödənilməlidir. Lakin spini 1/2-ə bərabər iki hissəcikin spin dəyişənlərinin korrelyasiyasının konkret misalında aydın olur ki, (2)-nin sol tərəfindəki kəmiyyətin kvant analoqu $2\sqrt{2}$ qiymətini alır. Beləliklə, kvant sisteminin altsistemləri arasında korrelyasiyalar çoxluğunun strukturunun gizli parametrlərli nəzəriyyə ilə, bölünənlik şərtini ödəməklə, yaranması mümkün deyildir.

Bell bərabərsizliyi eksperimental olaraq yoxlanılmışdır və aydın olmuşdur ki, bu yoxlama kvant nəzəriyyəsi ilə yaxşı uzlaşır.

Əd.: [1] Б о р Н., Избранные научные труды, т. 2, М., 1971; [2] Н е й м а н Д. Ж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [3] Б е л л Дж., «Rev. Mod. Phys.», 1966, v. 38, p. 447–52; [4] Х о л е в о А. С., Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры, М., 1985.

EHİTİMAL, APOSTERİORİ «вероятность а posteriori; а posteriori probability» – bax, *Aposterior ehtimal*.

EHTİMAL APRIORI « вероятность а priori; а priori probability » – bax. *Aprior ehtimal*.

EHTİMAL, ƏLAQƏLİK EHTİMALI təsadüfi qrafın « вероятность связности случайного графа; probability of connectedness of a random graph » – bax. *Təsadüfi qraf*.

EHTİMAL FƏZASI « вероятностное пространство; probability space » – boş olmayan Ω çoxluğu. Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel meydanı olan $\mathcal{A}$ sinfi (yeni hesabı sayda nəzəri – çoxluq əməllərinə görə qapalı sinfi) və $\mathcal{A}$ -da P paylanması (ehtimal ölçüsü) ibarət $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toplusudur. «E. f.» anlayışı A. N. Kolmoqorov tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. Ω -nın elementləri – elementar hadisələr. Ω çoxluğunun özü elementar hadisələr fəzası adlanır. Ω çoxluğunun $\mathcal{A}$ -ya daxil olan altçoxluqları hadisələr (təsadüfi hadisələr) adlanır. Bezantam E. f.-lan, yeni $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $P(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ münasibətlərlə təyin olunan E. f.-lan ilə kifayətlənmək olur. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ixtiyari E. f.-dirsə, onda $A \in \mathcal{A}$ və $N \subset M$, $P(M) = 0$ şərtlərlə verilən $A \cup N$ tipli çoxluqlar sinfi $\overline{\mathcal{A}}$ Borel meydanı əmələ gətirir və $\overline{\mathcal{A}}$ -da təyin olunan $\overline{P}$ funksiyası $\overline{P}(A \cup N) = P(A)$ düsturu ilə təyin olunaraq, $\overline{\mathcal{A}}$ -da paylanmadır. Onda $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, P)$ fəzası tam E. f.-sıdır və bu fəza – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fəzasının tamamlanması adlanır.

Bəzən yalnız mükəmməl E. f. ilə də kifayətlənilir və bu fəzalar belə təyin olunur: ixtiyari $\mathcal{A}$ – ölçülən f funksiyası və ədəd oxunda ixtiyari E çoxluğu üçün $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ olarsa, ele B Borel çoxluğu var ki, $B \subset E$ və $P(f^{-1}(E)) = P(f^{-1}(B))$. Mükəmməl E. f.-lan çərçivəsində ümumi sxemdə yaranan bəzi «patoloji» hallar (şərti ehtimallarla əlaqədar, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin tərfi ilə əlaqədar) olmur. Bu və ya digər tələbləri ödəyən E. f.-nin varlığı məsələsi o qədər də sadə deyildir. Bu tipli nəticələrdən biri uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında fundamental Kolmoqorov teoremi-dir: T çoxluğunun elementlərinin hər bir nizamlanmış $t_1, \dots, t_n$ toplusunda $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının Borel çoxluqlarında $P_{t_1, \dots, t_n}$ paylanmasının təyin olunduğu fərz olunur və fərz olunur ki, aşağıdakı uzlaşma şərti ödənilir:

$$1) P_{t_1, \dots, t_n}(I_{y_1, \dots, y_n}) = P_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}}(I_{y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}})$$

berəbərliliyi bütün $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ üçün və $1, \dots, n$ ədədlərinin ixtiyari yerdəyişməsi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ üçün doğrudur, burada

$$I_{y_1, \dots, y_n} = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n\};$$

$$2) P_{t_1, \dots, t_n}(I_{y_1, \dots, y_{n-1}, \infty}) = P_{t_1, \dots, t_{n-1}}(I_{y_1, \dots, y_{n-1}}).$$

Onda $\mathbb{R}^T = \{x = \{x_t\}, t \in T, x_t \in \mathbb{R}^1\}$ hasilinin altçoxluqlarının minimal Borel meydanı $\mathcal{A}$ -da ele P paylanması vardır

ki, T çoxluğunun ixtiyari sonlu $t_1, \dots, t_n$ altçoxluğu və ixtiyari n – ölçülü B Borel çoxluğu üçün

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B) = P\{t_1(x), \dots, t_n(x) \in B\}$$

berəbərliliyi doğrudur; $t(x) = x_t$ koordinat funksiyalarının $\mathcal{A}$ – ölçülən funksiyalar olduğu fərz olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

EHTİMAL FƏZASI təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu « вероятностное пространство порожденное (или индуцированное) случайной величиной; probability space, generated by random variable » – $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər aldığı fəza ilə doğurulən, $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}, P_\xi)$ ehtimal fəzasına deyilir; $\mathbb{R}^1$ – ədəd oxu, $\mathcal{B}$, – $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^1 : a < x \leq b\}$ tipli bütün mümkün ola bilən intervalllarından təşkil olunmuş ədədi çoxluqlar (Borel çoxluqları) sinfi, σ – cəbridir,

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}$$

münasibətlə təyin olunan P_ξ , – $\mathcal{B}$ σ – cəbrində təyin olunmuş mənfi olmayan çoxluq funksiyasıdır (ehtimaldır).

Əd.: [1] Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

EHTİMAL FƏZASI METODU « вероятностного пространства метод; probability space method » – bax. *Bir ehtimal fəzası metodu*.

EHTİMAL; İNTEQRAL EHTİMALI « вероятности интеграл; error function » – bax. *İntegral ehtimalı*.

EHTİMAL; KEÇİD EHTİMALI « вероятность перехода; transition probability » – fəza fəzası $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ olan Markov zənciri və ya prosesinin s anındakı x vəziyyətindən t anında hər hansı E çoxluğuna keçid ehtimalı:

$$P\{\zeta_t \in E | \zeta_s = x\} = p(s, x; t, E),$$

$$s \leq t, x \in \mathcal{E}, E \in \mathcal{B}$$

berəbərliliyi ilə ifadə olunan şərti ehtimaldır. Adətən, $p(s, x; t, E)$ keçid funksiyası da adlandırılır və K. e. bu funksiyanın qiyməti kimi anlaşılar. t diskret olduqda, $p(s, x; s+n, E)$ n addıma keçid ehtimalı, bir addıma K. e. isə sadəcə K. e. adlanır. n addıma K. e. bir addıma keçid ehtimalları vasitəsilə Kolmoqorov – Çepmen tənlikləri ilə ifadə olunur.

$\mathcal{E}$ fəzası sonlu və hesabi olduqda

$$p(s, x; t, E) = \sum_{y \in E} p(s, x; t, y)$$

olduğundan K. e.-ni nöqtəvi çoxluqlar üçün vermək kifayətdir; bu halda $p(s, i; t, j) = p_{ij}(s, t)$, $i \in \mathcal{E}$, $j \in \mathcal{E}$ işarələməsindən istifadə edilir. Əgər proses zamana görə bircins prosesdirsə, onda

K. e. yalnız zamanın artımından asılı olur, yeni $p(s, x; t, E) = p(t-s, x, E)$ və analoji olaraq $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t-s)$ olur. s və t -nin ixtiyari qiymətlərində

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^N p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Bu düstur keçid ehtimalları tenlikləri adlanır.

$(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasından $(Y, \mathcal{G})$ ölçülən fəzasına daha geniş mənada K. e. ele $p(x, E)$, $x \in X$, $E \in \mathcal{G}$ funksiyasıdır ki, 1) $p(x, E)$ hər bir E üçün x üzrə $\mathcal{A}$ – ölçüləndir; 2) $p(x, \cdot)$ – hər bir x üzrə $(Y, \mathcal{G})$ -də ehtimal ölçüsüdür.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984; [2] Ширяев А. Н., Вероятность. М., 1980.

EHTİMAL; UDUM EHTİMALI, Марков зəncи-риндə «**вероятность поглощения** в цепи Маркова; **absorbition probability** in a Markov chain» – sistemin fəza fəzasının ele altçoxluluğuna düşməsi ehtimalıdır ki, sistem bu altçoxluluqdan 1 ehtimalla çıxıb bilmir, yeni 1 ehtimalla orada qalır (udulur). $\{X_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi $\mathcal{E}$ olan Markov zənciri, C_α – bu zəncirin mühüm vəziyyətlər sinfindən biri olsun (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Xüsusi halda, C_α yalnız bir vəziyyətdən ibarət ola bilər, bu halda bu vəziyyət udum vəziyyətidir. C_α sinfindən i vəziyyətindən çıxan sistemin U. e. $\pi_{i\alpha}$, tərifə görə

$$\pi_{i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{i\alpha}^{(n)}, \quad i \in \mathcal{E}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\pi_{i\alpha}^{(n)}$, – n -ci addımda U. e.-dir;

$$\pi_{i\alpha}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } i \in C_\alpha; \\ 0, & \text{əgər } i \in \mathcal{E} \setminus C_\alpha \end{cases} \text{ olarsa,}$$

və $n \geq 1$ qiymətlərində

$$\pi_{i\alpha}^{(n)} = \mathbf{P}_i \{ X_n \in \mathcal{E} \setminus C_\alpha, 0 \leq t < n \text{ olduqda, } X_n \in C_\alpha \}.$$

R – zəncirin mühüm olmayan vəziyyətlərinin sinfi olsun. $\mathcal{E} \setminus R$ mühüm vəziyyətlər sinfi olduğundan və bu sinflər bir-birilə əlaqəli olmadıqlarından, onda

$$\pi_{i\alpha} = \begin{cases} 1, & i \in C_\alpha, \\ 0, & i \in \mathcal{E} \setminus (C_\alpha \cup R). \end{cases} \quad (1)$$

Tam ehtimal düsturundan və U. e. $\pi_{i\alpha}$ üçün $i \in R$ olduqda Markov xassəsindən

$$\pi_{i\alpha} = \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij} \pi_{j\alpha}, \quad i \in R \quad (2)$$

münasibətləri alınır. Əgər R çoxluğu ($\mathcal{E}$ çoxluğu da) sonlu olarsa, onda (2) sisteminin (1) «sərhəd şərtlərində» yeganə həlli vardır. R sonsuz olduğu halda məhdud həll, yalnız və yalnız, o halda yeganədir ki, hər bir $i \in R$ başlanğıc vəziyyətində sistemin R sinfini heç vaxt tərk etməyəcəyi ehtimalı sıfıra bərabər olsun.

İxtiyari halda U. e.-lər (1), (2) tenliklərinin mənfi olmayan minimal həllidir.

U. e. ilə yanaşı, əksər hallarda, udulma anına qədər orta müddətə baxılır, yeni i başlanğıc vəziyyətindən çıxan sistemin mühüm vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{E} \setminus R$ -ə daxil olması üçün addımlar sayının riyazi gözləməsi m_i kəmiyyətlərinə baxılır. m_i ədədləri

$$m_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij} m_j, \quad i \in R, \quad (3)$$

tenliklər sisteminin «sərhəd şərtləri»

$$m_i = 0, \quad i \in \mathcal{E} \setminus R \quad (4)$$

olduğu halda mənfi olmayan (sonlu və ya sonsuz) minimal həllidir.

(1), (2) sisteminin sonlu və ya məhdud yeganə həlli haqqında yuxarıda qeyd olunanlar (3), (4) tenlikləri üçün də doğrudur.

Misal (oyunçunun iflas olması haqqında). $\mathcal{E} = \{0, 1, \dots, n\}$, $p_{00} = p_n = 1$, $p_{i,i-1} = q$ və $p_{i,i+1} = p$, $0 < i < n$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ olsun, digər keçid ehtimallarının sıfıra bərabər olduğu fərz olunur. Burada 0 və n vəziyyətləri uducu vəziyyətlərdir, mühüm olmayan vəziyyətlər sinfi $R = \{1, 2, \dots, n-1\}$ çoxluğudur. (1), (2) sistemi 0 vəziyyətində udum ehtimalları $\pi_i = \pi_{i0}$ üçün (ilk kapitalı i -yə bərabər oyunçunun müflis olma ehtimalları) həlli

$$\pi_i = \begin{cases} (r^i - r^n) / (1 - r^n), & p \neq 1/2 \text{ olduqda,} \\ (n - i) / n, & p = 1/2 \text{ olduqda,} \end{cases} \quad (r = q/p)$$

münasibəti ilə təyin olunan

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_i = q\pi_{i-1} + p\pi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \pi_n = 0$$

sisteminə çevrilir. Udum müddətlərinin orta qiymətləri üçün (3), (4) sisteminin həlli –

$$m_i = \frac{1}{q-p} \left(i - n \frac{1-r^i}{1-r^n} \right), \quad p \neq 1/2 \text{ olarsa,}$$

$$m_i = i(n-i), \quad p = 1/2 \text{ olarsa}$$

bərabərliklərlə təyin olunur. $n \rightarrow \infty$ olduqda limitdə və bütün mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu $\mathcal{E}$ -də yeganə uducu vəziyyəti 0-a bərabər olan təsadüfi dolaşma alınır. Burada $R = \{1, 2, \dots\}$ sonsuz çoxluqdur və (1), (2) və (3), (4) sistemlərinin minimal həlləri aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunur:

$$\pi_i = \begin{cases} 1, & p \leq 1/2 \text{ olarsa,} \\ r^i, & p > 1/2 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$$m_i = \begin{cases} i/(q-p), & p < 1/2, \quad i \geq 0 \text{ olarsa,} \\ +\infty, & p \geq 1/2, \quad i \geq 1 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

U. e.-lər və ya udum müddətlərinin orta qiymətləri üçün tenliklərdən Markov zəncirində i vəziyyətindən j vəziyyətinə k

veziyyətindən əvvəl keçid ehtimalı π_{ij}^k -nin və ya i -dən j vəziyyətinə keçəne qədərki müddətlərin orta qiymətləri m_{ij} -lərin hesablanması üçün istifadə olunur və s. Bu məqsədlə i və k uyğun vəziyyətləri (və ya yalnız j) uducu vəziyyətlərlə əvəz olunmalıdır. m_{ij} -nin və sonlu zəncirlərdə bir vəziyyətdən digər vəziyyətə keçid müddətinin dispersiyasının hesablanmasında fundamental matrisdən istifadə olunur (bax. *Markov zənciri; fundamental matris*).

Kəsilməz zaman halı üçün (2) və (3) tənlərlərinin analogları «*Markov prosesi; vəziyyətləri çoxluğu sonlu*» məqaləsində verilmişdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

EHİTİMAL KOMBİNATORİKASI « вероятностная комбинаторика; probabilistic combinatorial analysis » – diskret riyaziyyatın ələ bölməsidir ki, burada ehtimal nəzəriyyəsinin metodları konfigurasiyalara xassələrinin, bunların varlığı, qurulması alqoritmlərinin araşdırılması, təsnifatı və hesablanması məsələləri də daxil olunmaqla öyrənilməsinə tətbiq olunur. Ehtimal metodları *kombinator analiz* məsələlərinin həllində ən effektiv surətdə istifadə olunur. Bu halda kombinator konfigurasiyalar çoxluğunda bir qayda olaraq, müntəzəm ehtimal paylanması verilir və təsadüfi seçilmiş kombinator konfigurasiya ilə mümkün qiymətləri təyin olunan müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının xassələri araşdırılır. Belə yanaşma kombinator analizdə asimptotik nəticələrin alınmasında olduqca səmərəli olur.

E. k.-nda alınmış asimptotik xarakterli nəticələrə aid bəzi misal-lar aşağıda şərh olunmuşdur.

1. Mənfi olmayan tamqiymətli təsadüfi matrislər.

Tamqiymətli mənfi olmayan elementlərinin cəmi N -ə bərabər $(n \times m)$ – ölçülü matrislər sinfində müntəzəm paylanma verilmişdir. Təsadüfi seçilmiş matrisdə elementləri sıfır olan sətir və sütunların sayı – $\xi(N; n, m)$ təsadüfi kəmiyyəti $n = \alpha m$, $0 < \alpha \leq 1$ və $m \rightarrow \infty$ olduqda və $N/m = \ln m \rightarrow \gamma$ limitinin varlığı halında λ parametrlili Puasson paylanmasına malikdir; eger $\alpha = 1$ olarsa, $\lambda = 2e^{-\gamma}$, $0 < \alpha < 1$ olduqda isə $\lambda = e^{-\gamma}$ olur.

Əger η_1 – təsadüfi matrisdə sıfır elementli sətirlərin sayı, η_2 isə sıfır elementli sütunların sayıdırsa, onda qeyd olunan şərtlərlə $\alpha = 1$ olduğu halda (η_1, η_2) ikiölçülü təsadüfi vektoru asimptotik olaraq $(e^{-\gamma}, e^{-\gamma})$ parametrləri, komponentləri asılı olmayan ikiölçülü Puasson paylanmasına yaxınlaşır; $0 < \alpha < 1$ olduğu halda isə birinci komponentin paylanması asimptotik olaraq cırılaşan paylanma, ikinci komponent isə $e^{-\gamma}$ parametrlili Puasson paylanması ilə paylanır. Qeyd olunmuş şərtlərdə yuxarıda göstərilən Puasson limit paylanması N vahidi olan sıfır sətirli və sıfır sütunlu $(n \times m)$ – ölçülü təsadüfi $(0, 1)$ – matrisləri üçün də mövcuddur. Əger $(n \times m)$ – matrisinin elementləri bir-birindən asılı olmayaraq bəraberehtimalla $0, 1, \dots, s-1$ qiymətlərini alırsa, onda $s > 1$, $\lambda > 0$, $m = \lambda s^n$ olduqda, sıfır elementli sətir və sütunların sayı λ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır.

2. Mənfi olmayan təsadüfi matrislərin permanentləri.

Elementləri bəraberehtimallı $(n \times m)$ – ölçülü təsadüfi $(0, 1)$ – matrisi A ilə bağlı

$$E_{nm} = \{ \text{per } A = 0 \},$$

$$H_{nm} = \{ A \text{-nin ya sıfır elementli sətiri və ya } m - n + 1 \text{ sayda sıfır elementli sütunu vardır} \}$$

hadisələr olarsa, onda $m \rightarrow \infty$ olduqda bütün $n \leq m$ qiymətlərində

$$P \{ H_{nm} | E_{nm} \} \rightarrow 1$$

münasibəti müntəzəm olaraq ödənilir, burada $\text{per } A$, – A matrisinin permanentidir.

N sayda vahidi olan elementləri bəraberehtimallı təsadüfi n tərtib $(0, 1)$ – matrisi üçün $N = N(n) > n^{2/3+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ olduqda, $\gamma > 0$ ixtiyari, $n \rightarrow \infty$ olarsa,

$$P \{ | \text{per } A / M(\text{per } A) - 1 | > \gamma \} \rightarrow 1$$

münasibəti doğrudur, burada $M(\text{per } A)$, – $\text{per } A$ -nin orta qiymətidir. Əger $N = n \ln n + cn + o(n)$ və $P(n, N) = P \{ \text{per } A > 0 \}$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $P(n, N) \rightarrow \exp \{ -2e^{-\gamma} \}$ münasibəti doğrudur. Əger

$$N = N_r = n \ln n + (r-1)n \ln \ln n + n\omega(n) + o(n)$$

olarsa və $n \rightarrow \infty$ olduqda $\omega_n \rightarrow \infty$ münasibəti ixtiyari zəif surətdə ödənilərsə və $P(n, N_r, r) = P \{ \nu(A) \geq r \}$ olarsa, onda $P(n, N_r, r) \rightarrow 1$ olur, burada $\nu(A)$, – $A(0, 1)$ -matrisinin n sayda qeyri – kollinear vahidlərindən ibarət toplularda uyğun cüt-cüt əvəzləmələrin maksimal sayıdır.

3. Təsadüfi ziddiyyətli əvəzləmələr. S_n , – $N = \{1, 2, \dots, n\}$ çoxluğunda təsir edən n dərəcəli bütün əvəzləmələrin toplusu olsun. $N(s, s') = \{i: s(i) = s'(i), 1 \leq i \leq n\}$ çoxluğuna s və s' əvəzləmələrinin ziddiyyət-sizliyi çoxluğu deyilir. $N(s, s') = \emptyset$ olduqda s və s' ziddiyyətli əvəzləmələr adlanır və bu münasibət simvolik olaraq $s \uparrow s'$ kimi yazılır. Əger Π_r , – s_i , $1 \leq i \leq k$ əvəzləməsinə uyğun əvəzləmə matrisi-dirsə, onda

$$M_n(s_1, \dots, s_k) = \left| \{ s: s \uparrow s_1, \dots, s \uparrow s_k, s \in S_n \} \right| = \text{per}(I - (\Pi_1 \vee \dots \vee \Pi_k)),$$

burada $\vee$ – matrislərin elementləri üzrə dizyunksiya əməli işarəsidir.

$s \in S_n$ təsadüfi bəraberehtimallı əvəzləmə, $s_1, \dots, s_k \in S_n$ qeyd olunmuş, cüt-cüt ziddiyyətli əvəzləmələr, $A_\nu(i) = \{s(i) = s_\nu(i)\}$ isə təsadüfi hadisə olsun, $1 \leq \nu \leq k$, $1 \leq i \leq n$. Onda

$$\xi_n(s_1, \dots, s_k) = \left| \{i: A_1(i) \cup \dots \cup A_k(i)\}, 1 \leq i \leq n \right|$$

təsadüfi kəmiyyəti $n \rightarrow \infty$ və məhdud k qiymətində $\lambda = k$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır. Onda, məs., $(k \times n)$ –

ölçülü latin düzbucaqlılarının sayı $L(k, n)$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda və məhdud k qiymətində

$$L(k, n) = (n!)^k e^{-\left(\frac{k}{2}\right)} (1 + o(1))$$

asimptotik düsturu alınır.

4. Təsədüfi əvəzləmələrin tsiklləri.

n dərəcəli əvəzləmələr çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur və ξ_n – təsadüfi seçilmiş əvəzləmədə tsikllərin sayıdır. $(\xi_n - \ln n) / \sqrt{\ln n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yaxınlaşır. l uzunluqlu tsikllərin sayına bərabər π_{nl} təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda $\lambda = 1/l$ parametrləri Puasson paylanmasına yaxınlaşır. Əgər $v^{(n)}$ və $\tilde{v}^{(n)}$, – n dərəcəli əvəzləmədə uyğun olaraq, tsikllərin minimal və maksimal uzunluqlarıdır, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{v^{(n)} = k\} = (1 - e^{-1/k}) \exp\left\{-\sum_{j=1}^{k-1} j^{-1}\right\} + o(1).$$

$(\lambda + 1)^{-1} \leq x < y < \lambda^{-1}$ münasibətini ödəyən ixtiyari qeyd olunmuş x və y ədədləri üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{x \leq \frac{\tilde{v}^{(n)}}{n} < y\right\} \rightarrow \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{(-1)^k}{k!} \{J_k(y, 1) - J_k(x, 1)\},$$

münasibəti doğrudur, burada

$$J_0(m, n) = 1,$$

$$J_k(m, n) = \int \dots \int \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n}, \quad k \geq 1,$$

$x_i \geq m, \sum_i x_i < n$ inteqrallama oblastıdır.

Əgər Q_n , – n dərəcəli təsadüfi əvəzləmənin tərtibidir, onda

$n \rightarrow \infty$ olduqda $\left(\ln Q_n - \frac{1}{2} \ln^2 n\right) \left(\frac{1}{3} \ln^3 n\right)^{-1/2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yaxınlaşır.

5. Təsədüfi ağaclar. Zirvələri $X = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$ çoxluğunun nişanlanmış elementləri olan, n^{n-2} sayda n zirvəli serbest ağacdən ibarət çoxluqda müntəzəm paylanma verilmişdir. Əgər v_n – təsadüfi ağacın zirvə uclarının sayıdır, onda $(v_n - ne^{-1}) / \sqrt{n(e-2)e^{-1}}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yaxınlaşır. Əgər θ_n qeyd olunmuş zirvə ucuna nəzərən təsadüfi seçilmiş ağacın hündürlüyüdür, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\theta_n < x\sqrt{2n}\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 x^2} (1 - 2k^2 x^2)$$

münasibəti doğrudur.

$(\eta_n + 1)$ – təsadüfi köklü ağac meşəsində $(\tilde{\eta}_n + 1)$ isə köksüz ağac meşəsində ağacların sayı olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda η_n ($\tilde{\eta}_n$) təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\lambda = 1$ parametrləri ($\lambda = 1/2$ parametrləri) Puasson paylanmasına yaxınlaşır. Əgər d_n , – köksüz ağac meşəsindəki n sayda qeyd olunmuş zirvəli təsadüfi ağacın iki qeyd olunmuş zirvə ucları arasındakı məsafədirsə, onda bütün $u = d_n / \sqrt{n} = o(n^{1/6})$ ədədləri üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{x_i + 1 = u\sqrt{n}\} = \frac{u}{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} (1 + o(1))$$

olduğu alınır.

$d(x_i)$, – i zirvə ucuna müvafiq olan şaxələrin sayı.

$\chi_i = d(x_i) - 1, 1 \leq i \leq n$ olsun; $[x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}]$ simvolu – ağacın ilkin spesifikasiyası adlanır. Ağacın hər bir ilkin $[x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}]$ spesifikasiyasına qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq kimi n müxtəlif oyuqda $n - 2$ sayda müxtəlif eşyanın yerləşməsi sxemini qarşı qoymaq olar; i -ci oyuqda x_i sayda eşyanın olması nəzərdə tutulur, $1 \leq i \leq n$. Bu şərhəndən aydındır ki, təsadüfi ağacın «şaxələnməsinin» ehtimal paylanmaları müxtəlif oyuqlarda müxtəlif eşyaların təsadüfi yerləşməsi sxemi ilə tamamilə təsvir olunur.

6. Təsədüfi qraflar. n sayda nişanlanmış tepəyə və N sayda

tile malik $\Gamma_{n,N}$ qraflar çoxluğunda hər bir qrafa $\left(\frac{n}{N}\right)^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulmaqla müntəzəm ehtimal paylanması verilir. Əgər

$N = \left\lceil \frac{1}{2} n \ln n + cn \right\rceil$, c – sabitdir, $P(n, N)$, – $\Gamma_{n,N}$ qrafının

her hansı bir k üçün $n - k$ tepədən bir ədəd əlaqəli tepəni və k sayda izola olunmuş nöqtəni özündə saxlaması ehtimalıdır, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $P(n, N) \rightarrow 1$ münasibəti ödənilir. Eyni şərtlərlə əlaqəlilik ehtimalı $P_0(n, N)$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$P_0(n, N) \rightarrow \exp\{e^{-2c}\}$ münasibəti alınır.

Əgər ζ_n , – $\Gamma_{n,N}$ təsadüfi qrafının ən böyük komponentini ifadə edən təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $n - \zeta_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda, $\lambda = e^{-2c}$ parametrləri Puasson paylanmasına yaxınlaşır. $\xi(n, N) - 1$ təsadüfi kəmiyyətinin də $n \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanması eyni paylanmadır, burada $\xi(n, N)$ təsadüfi qrafın əlaqəlilik komponentlərinin sayıdır.

7. Təsədüfi inikaslar. X n – çoxluğunun özünə bütün $n^n \sigma$ inikaslarının çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur. Tepələri X çoxluğunun nişanlanmış elementləri olan təsadüfi istiqamətləndirilmiş $\Gamma(X, \sigma)$ qrafına baxılır və $x' = \sigma(x)$, $x, x' \in X$ olduqda x və x' , (x, x') qövsü ilə birləşir. Əgər ζ_n $\Gamma(x, \sigma)$ qrafının tsiklik tepələrinin sayıdır, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda bütün $u = o(n^{1/6})$ üçün

$$P\{\xi_n/\sqrt{n} = u\} = ue^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1))$$

olur.

$\Gamma(X, \sigma)$ -nin komponentləri sayı κ_n üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$\left(\kappa_n - \frac{1}{2} \ln n\right) \left(\frac{1}{2} \ln n\right)^{-1/2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0, 1)$ parametrləri normal paylanma olur.

Əgər σ təsadüfi inikası üçün p_n , - proobrazların sayı, s_n - qeyd olunmuş $x \in X$ elementinin obrazları sayıdır, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{p_n = k\} \rightarrow \frac{k^{k-1}}{e^k k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P\{s_n/\sqrt{n} = u\} = ue^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1))$$

münasibətləri doğrudur. $\Gamma(X, \sigma)$ qrafında $x \in X$ tepəsinə daxil olan qövsələrin sayı r , - x tepəsinin tam təkrarlılıq sayı adlanır. σ təsadüfi inikası üçün $\Gamma(X, \sigma)$ qrafında tepələrin sayı $\mu_r(n)$ n müxtəlif oyuqda n müxtəlif eşyanın təsadüfi yerləşməsi sxeminde r sayda eşya yerləşən oyuqların sayına bərabərdir.

8. Çoxluğun təsadüfi bölgüləri. X n - çoxluğunun k sayda bloka bölgülərinin sayı - ikinci növ Stirlinq ədədi $\sigma(n, k)$ -ya bərabərdir. n - çoxluğun ümumi bölgülərinin sayı Bell ədədi B_n -ə bərabərdir. Bütün B_n bölgülərinin çoxluğunda müntəzəm paylanmanın təyin olunduğu fərz olunur; ξ_n təsadüfi bölgüdəki blokların sayı olsun. $n \rightarrow \infty$ olduqda $(\xi_n - n/\ln n)(\sqrt{n}/\ln n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yaxınlaşır. Əgər $\kappa_n(l)$ təsadüfi bölgüdəki l -ölçülü blokların sayıdır və r , - $re^r = m$ tənliyinin həllidir, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $(\kappa_n(l) - r^l/l!) / \sqrt{r^l/l!}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yaxınlaşır. $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ münasibətini ödəyən ixtiyari $i_1, i_2, \dots, i_k$ üçün k -ölçülü $(\kappa_n(i_1) - \lambda_{i_1})/\sqrt{\lambda_{i_1}}, \dots, (\kappa_n(i_k) - \lambda_{i_k})/\sqrt{\lambda_{i_k}}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda dispersiyaları 1-ə bərabər, asılı olmayan komponentləri lokal normal paylanmaya yaxınlaşır, burada $\lambda_l = r^l/l!$. n -in böyük qiymətləri üçün

$$P\{\kappa_n(l) > 0\} \geq 1 - l!/r^l, \quad re^r = n$$

bərabərsizliyi doğrudur. Deməli, əgər ν_n təsadüfi bölgünün ən kiçik blokunun ölçüsüdür, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $P\{\nu_n = 1\} \rightarrow 1$ münasibəti alınır. Ən böyük blokun ölçüsü μ_n üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\bar{\mu}_n < x\} = e^{-e^{-x+\delta}} \rightarrow 0$$

münasibəti bütün məhdud x -lər üçün müntəzəm ödənilir; $\bar{\mu}_n = \mu_n - [er - \ln \sqrt{2\pi er} - \ln(e-1)]$, $re^r = n$, δ isə $er - \ln \sqrt{2\pi er} - \ln(e-1)$ ədədinin kəsr hissəsidir.

9. Çoxluqların təsadüfi örtükləri. X n - çoxluğunun $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ sonlu birləşməsi örtüyü, $X_1, \dots, X_k$ - örtüyün blokları adlanır. n - çoxluğun bütün örtükləri çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur; ξ_n - təsadüfi örtükdəki blokların sayını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{(\xi_n - (2^{n-1} - 1/2))/2^{n/2-1} = x\} = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{n-1}}} e^{-x^2/2} (1 + o(1))$$

ve $\alpha 2^{-n/6} \rightarrow 0$, $\beta 2^{-n/6}$ şərtini ödəyən bütün α və β -lər üçün

$$P\{\alpha \leq (\xi_n - (2^{n-1} - 1/2))/2^{n/2-1} \leq \beta\} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

asimptotik bərabərliyi doğrudur.

Əgər $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ örtüyündən ixtiyari blok xaric olunduqdan sonra qalan digər bloklar örtük yaratmırsa, bu blok minimal blok adlanır. n - çoxluğun minimal örtükləri çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur; ξ_n - təsadüfi minimal örtüyün blokları sayı olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda:

$$a) \quad n \text{ cüt olarsa, } P\left\{\xi_n - \frac{n}{2} = \pm j\right\} \rightarrow \frac{2^{-j^2}}{1 + 2C_0},$$

$j = 0, 1, \dots$,

$$b) \quad n \text{ tək olarsa, } P\left\{\xi_n - \frac{n \pm 1}{2} = \pm j\right\} \rightarrow \frac{2^{-j(j+1)}}{2C_1},$$

$j = 0, 1, \dots$, doğrudur, burada

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j^2}}, \quad C_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(j+1)}}.$$

X n - çoxluğunun $2^n - 1$ sayda bütün boş olmayan altçoxluqları sinfində müntəzəm paylanma verildiyi fərz olunur; $X_1, X_2, \dots$ - təsadüfi çoxluqlar ardıcılığı olsun. $X = X_1 \cup \dots \cup X_{\kappa_n}$ münasibətini təmin edən minimal κ_n ədədinə X n - çoxluğunun örtük indeks deyilir. $|y| = o(\log_2 \sqrt{n})$ olan ixtiyari y -lər üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{X_n \leq [\log_2 n] + y\} = e^{-2^{-(y+1)+\delta_n}} (1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $[\log_2 n]$ və $\delta_n = \{\log_2 n\}$ - uyğun olaraq $\log_2 n$ -in tam və kəsr hissələridir.

10. Kombinator konfigurasiyaların varlığının isbatı üçün ehtimal metodu. Kombinator konfigurasiyaların varlığının isbatı üçün nəzəri - ehtimal metodları konstruktiv metodlar tətbiq olunmamaqla istifadə edilir. Belə yanaşmaya aid aşağıda bir misal şərh olunur.

n təpəli $G_n(p)$ təsadüfi qrafında təpələrin hər bir cütü p ehtimalı ilə digər cütlərdən asılı olmayaraq birləşir, q ehtimalı ilə birləşmə baş vermir, $p + q = 1$. $G_n(p)$ qrafının tamamlayıcı $\overline{G}_n(p)$ qrafında iki təpə q ilə, yalnız və yalnız, o halda birləşir ki, belə birləşmə $G_n(p)$ -də yoxdur. Əgər $v_n(p, k)$ və $v_n(q, k)$ uyğun olaraq, $G_n(p)$ və $\overline{G}_n(p)$ qraflarında k təpəli tam altqrafların sayıdırsa, onda bunların orta qiymətləri

$$M v_n(p, k) = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}, \quad M v_n(q, k) = \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

düsturları ilə təyin olunur. Onda $k > \max \left\{ \left\lceil \frac{2 \ln n}{\ln(1/p)} \right\rceil, \left\lceil \frac{2 \ln n}{\ln(1/q)} \right\rceil \right\}$ olarsa, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\left\lceil \frac{2 \ln n}{\ln(1/q)} \right\rceil \left\lceil \frac{2 \ln n}{\ln(1/p)} \right\rceil$$

$$M v_n(p, k) = o(1), \quad M v_n(q, k) = o(1)$$

olduğu alınır; $[z]$, z -in tam hissəsidir.

Bu bərabərliklərdən aşağıdakı teorem alınır.

Р е н ы і т е о р е м і (А. Реньи). $0 < p < 1$ münasibətini ödəyən hər bir qeyd olunmuş p və hər bir $n > n_0(p)$ üçün $G_n(p)$ qrafı vardır ki, bu qrafda təpələrinin sayı $2 \ln n / \ln(1/p)$ -ni aşan tam altqraf yoxdur və ehtimalı $1 - p$ olan $\overline{G}_n(p)$ qrafı vardır ki, bu qrafda təpələrinin sayı $2 \ln n / \ln(1/q)$ -ni aşan tam altqraf yoxdur ($p + q = 1$).

Əd.: [1] Эрдеш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Сачков В. Н., Введение в комбинаторные методы дискретной математики, М., 1982; [4] Колчин В. Ф., Случайные отображения, М., 1984.

EHİTİMAL METODLARI ədədlər nəzəriyyə-sində «**вероятностные методы** в теории чисел» **probabilistic methods in number theory** – ədədlər nəzəriyyəsinin bir çox sahələrində aşkar və ya qeyri – aşkar formada tətbiq olunur. Ədədlərin metrik nəzəriyyəsinin müddəalanı *sıfır – vahid qanunu* şəklində ifadə olunur və bu nəzəriyyədə diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin *limit teoremləri* isbat olunur, diofant yaxınlaşmaların *erqodik məsələləri* həll olunur. XX əsrin I yarısında ədədlərin metrik nəzəriyyəsi sahəsində E. Borel (E. Borel) və A. Ya. Xinqinin apardığı işlər ehtimal nəzəriyyəsinin özünün inkişafına səbəb olmuşdur. Ədədlərin additiv nəzəriyyəsinə natural ədədin hər hansı bir çoxluqdan olan müəyyən sayda toplananların cəmi şəklində ifadələrinin sayı, toplananların sayının çoxalması nəzərə alınmaqla, limit teoremləri ilə ifadə olunur (ədədlər nəzəriyyəsinin toplananların sayının çoxalması nəzərə alınan ədədlər üçün *additiv məsələləri*), toplananların sayı az olduğu halda Yu. V. Lini kin inkişaf etdirdiyi *erqodik metod* və *dispersion metoddan* istifadə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsinin imkanları haqqında ən tam təsəvvürə *ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin* öyrənməklə nail olmaq olar. Bununla yanaşı, *psevdotəsadüfi ədədlərin qurulması* məsələlərini, *təsadüfi proseslərin arifmetik modeləşdirilməsi*, *qrupların statistik nəzəriyyəsi* kimi sahələri də qeyd etmək lazımdır.

Əd.: [1] Кувильос Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [2] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] Линник Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] Постников А. Г., Вероятностная теория чисел, М., 1974; [5] Elliott P. D. T. A., Probabilistic number theory, v. 1–2, N. Y., – [a. o.], 1979–80.

EHİTİMAL METRİKALARININ MÜQAYİSƏSİ «**вероятностных метрик сравнение; comparison / ordering of probabilistic metrics**» – bu və ya digər topoloji mənada anlaşılan *ehtimal metrikalarının* nizamlanmasıdır. Əgər μ və ν – təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu $\mathcal{X}$ -də verilmiş metrikalıdırsa, onda $\mu \preceq \nu$ « μ metrikası ν -dən güclü deyildir» münasibəti $\mathcal{X}$ -dən olan ixtiyari $X_0, X_1, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\nu(X_n, X_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \mu(X_n, X_0) \rightarrow 0$$

münasibətinin ödənilməsi anlamını daşıyır. Əgər bununla yanaşı, $\mathcal{X}$ -dən olan $\eta_0, \eta_1, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı varsa ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mu(\eta_n, \eta_0) \rightarrow 0$, lakin $\nu(\eta_n, \eta_0) \not\rightarrow 0$ münasibətləri ödənilir, onda $\mu \prec \nu$ olur, bu simvolik yazı ilə « μ metrikası ν -dən zəifdir» hökmü işarə olunmuşdur.

$\mu \preceq \nu$ və $\nu \preceq \mu$ olduğu halda metrikalar ekvivalentdir: $\mu \sim \nu$. İxtiyari ehtimal metrikaları cütünü qeyd olunan anlamda nizamlamaq mümkün olmur. Məs., *orta metrika* κ_1 və *müntəzəm metrika* ρ bir-birilə müqayisə olunmur. Bununla belə, istifadə olunan metrikalardan bir çoxunu belə nizamlamaq mümkün olur. Məs., sadə metrikalardan – *tam variasiya metrikası* σ , *Levi metrikası* L , λ metrikası (bax, «*Ehtimal metrikası; struktur*»), *Levi – Proxorov metrikası* π , *müntəzəm metrika* ρ , *müntəzəm kvadratik metrika* ρ_0 .

$$\lambda_0(X, Y) = \sup \{ |f_X(t) - f_Y(t)| : t \in \mathbb{R}^1 \}$$

və

$$\varepsilon^2(X, Y) = \sup \left\{ \frac{1}{4r} \int_0^r |f_X(t) - f_Y(t)|^2 dt : r > 0 \right\}$$

(burada f_X , X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır) metrikaları arasında aşağıdakı əlaqələr doğrudur:

$$L \sim \lambda \sim \pi \prec \rho \sim \rho_0 \prec \varepsilon \prec \lambda_0 \prec \sigma \quad (*)$$

Təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması ilə bağlı ehtimal metrikaları arasında ciddi nizamlanma da ola bilər, yeni $\mu \prec \nu$ « μ metrikası ν -dən ciddi mənada güclü deyildir» münasibəti aşağıdakı mənada anlaşılar:

$\mathcal{X}$ -dən olan ixtiyari $X_0, X_1, \dots, \eta_0, \eta_1, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\nu(X_n, \eta_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \mu(X_n, \eta_n) \rightarrow 0$$

implikasiyası doğrudur.

Bu zaman $\mu \prec \nu$ və $\mu \sim \nu$ münasibətlərinə analogi olaraq $\mu \prec \nu$ və $\mu \approx \nu$ münasibətləri təyin olunur. (*) münasibətinə ehtimal metrikaları güclü mənada aşağıdakı kimi nizamlanmışdır:

$$L \prec \prec \pi \prec \prec \sigma, \quad L \prec \prec \rho \prec \prec \sigma, \\ \rho_0 \prec \prec \rho, \quad \rho \prec \prec \lambda_0, \quad \rho_0 \approx \varepsilon.$$

Əgər μ, ν $\mathcal{X}$ -də sadə metrikalardırsa, onda ixtiyari $\mu \prec \nu$ münasibətinin nəticəsi belə ifadə olunur: ixtiyari μ – kompakt $K \subset \mathcal{X}$ çoxluğu üçün ələ azalmayan $\psi(x, K)$ funksiyası vardır ki, $\psi(+0, K) = 0$, K -də $\mu \leq \psi(\nu, K)$ bərabərsizliyi ödənilir.

$\mu \prec \nu$ münasibətinə $\mathcal{X}'$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı çoxluğu çərçivəsində baxıldıqda, bu çoxluqda μ metrikaçı sonlu olduqda, bu münasibət $\mu \leq \psi(\nu)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür, $\psi(u)$ funksiyası isə bu çoxluqda azalmır və $\psi(+0) = 0$.

Təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən bir $\mathcal{X}'$ çoxluğunda μ metrikaçı $\mu \prec \nu$ münasibəti $\mu \leq \psi(\nu)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür: $\psi(u)$ bu çoxluqda azalmayan funksiyadır və $\psi(+0) = 0$.

Əd.: [1] Сенатов В. В. «Матем. сб.», 1977, т. 102, № 3, с. 425–34; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования случайных величин, М., 1986.

EHTİMAL METRİKASI «вероятностная метрика; probabilistic metric» – bir ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathcal{X}$ -də xüsusi şəkildə təyin olunmuş kvazimetrikadır. $\xi \in \mathcal{X}$ və $\eta \in \mathcal{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmalarını $P_{\xi\eta}$ -larn çoxluğunda təyin olunmuş,

- (1) $\mu(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow P(\xi = \eta) = 1$,
- (2) $\mu(\xi, \eta) = \mu(\eta, \xi)$,
- (3) $\mu(\xi, \eta) \leq \mu(\xi, \gamma) + \mu(\gamma, \eta)$

(üçbucaq bərabərsizliyi) xassələrini ödəyən hər bir mənfi olmayan $\mu(\xi, \eta)$ funksionalına $\mathcal{X}$ -də ehtimal metrikaçı deyilir.

Bəzən $\mathcal{X}$ -in $\mu(\xi, \eta) < \infty$ şərti ödənilən altı çoxluqlarındansa, bəzi ξ, η cütü üçün $\mu(\xi, \eta) = \infty$ qiymətini götürmək daha münasib olur, məs., (2) və (3) münasibətlərində $\mu(\xi, \eta) = \infty$ onu ifadə edir ki, onların sağ tərəfləri də sonsuzluq olmalıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində E. m. sadəlik üçün metrika kimi də adlanır. Əgər $\mu(\xi, \eta)$ -nın qiymətləri yalnız ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları P_ξ və P_η ilə təyin olunursa, E. m. sadə, digər hallarda mürəkkəb E. m. adlanır. Sadə metrikalar üçün (1) şərti

$$\mu(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow P_\xi = P_\eta$$

şəklində olur.

Sadə metrikalar üçün $\mu(\xi, \eta)$ yazılışından başqa $\mu(P_\xi, P_\eta)$ yazılışından da tez-tez istifadə olunur (bu zaman P_ξ, P_η paylanmaları əvəzinə onları birqimətli təyin edən xarakteristikalarından, məsələn, paylanma funksiyalarından istifadə etmək olar).

E. m. stoxastik modellərin dayanıqlılığının araşdırılmasında mühüm vasitə sayılır (bax, Limit teoremləri, Mərkəzi limit teoremləri və s.).

208 EHTİMAL

Ki-Fan metrikaçı, indikator metrikaçı, Levi metrikaçı, müntəzəm metrika, Forte – Murye metrikaçı, müntəzəm kvadratik metrika (bunlardan son dördü sadə E. m.-dir) E. m.-ya aid misallardır.

E. m. stoxastik modellərin dayanıqlılığının tədqiqində mühüm vasitədir (bax, Dayanıqlılıq(ğ)), ehtimal paylanmalarının kompozisiyaya ayrılışı və Dayanıqlılıq(ğ), paylanmaların xarakterizasiyalarının, Limit teoremləri, Mərkəzi limit teoremləri). Bunlar metrik məsafələr metodunun əsas elementi kimi və onu təşkil edən minimal metrikalar metodu kimi daxil olunurlar. E. m. haqqında əsas məlumatlar və müvafiq bibliografiyalı [1] və [2] (fəsl. 1)-də tapmaq olar. E. m.-nin xassələri haqqında həmçinin Ideal metrika, Ehtimal metrikalarının müqayisəsi, Minimal metrika, Kantoroviç metrikaçı, Ştrassen teoremi, Ehtimal metrikaçı: struktur məqalələrini bax.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1983, т. 28, в. 264–87; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

EHTİMAL METRİKASI; birgəlik «вероятностная метрика; однородность; probabilistic metric; homogeneity of» s tərtibli – ehtimal metrikaçının

$$\mu(T_c(X), T_c(Y)) = c^s \mu(X, Y)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan xassəsidir, burada T_c – təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətləri fəzasının ölçülən qarşılıqlı birqimətli çevirmələr qrupu olub, müsbət ədədlərin hasil üzrə qrupuna izomorfdur, yəni $a, b > 0$ üçün $T_a T_b = T_b T_a = T_{ab}$, T_c çevirmələri limit teoremlərində normalayıcı çevirmələr rolunu oynayır. Əgər U fəzasında kommutativ Ψ semi – qrup əməli təyin olunmuşdursa, onda təsadüfi kəmiyyətlərin «ümumiləşmiş cəmləməsinin» $X_1 \Psi X_2 \Psi \dots \Psi X_n$ sxeminə normalayıcı çevirmələr ələ seçilir ki, ixtiyari $x, y \in U$ üçün

$$T_c(x \Psi y) = T_c(x) \Psi T_c(y)$$

bərabərliyi ödənilir. $T_c(x) = cx$ toplama əməli, $T_c(x) = |x|^c \operatorname{sign} x$ vurma əməli və $(x \Psi y = \max(x, y))$ maksimum əməli üçün T_c rolunu birinci və ya ikinci çevirmə ifadə edə bilər.

EHTİMAL METRİKASI; rəqulyarlıq «вероятностная метрика; регулярность; probabilistic metric; regularity of» – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı Ψ binar əməlinin təyin olduğu və bu əmələ nəzərən də kommutativ semi – qrup olan $\mathcal{X}$ çoxluğunda ehtimal metrikaçının bir xassəsidir. Bu xassə ondan ibarətdir ki, ixtiyari $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\mu(X \Psi Z, Y \Psi Z) \leq \mu(X, Y) \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilir. (1) xassəsi μ ehtimal metrikaçının səmiaditivlik xassəsinə ekvivalentdir: yəni ixtiyari $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\mu(X_1 \Psi X_2, Y_1 \Psi Y_2) \leq \mu(X_1, Y_1) + \mu(X_2, Y_2) \quad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu xassə induksiya ilə ixtiyari sonlu sayda «toplananlara» şamil olunur. Yuxarıda verilmiş «geniş» anlamda rəqulyarlıqdan başqa, bu xassə «dar» anlamda da ifadə olunur, bu halda sonuncu birinciden onunla fərqlənir ki, (1) bərabərsizliyində X və Y təsadüfi kəmiyyətləri Z ilə asılı olmayan

kəmiyyətlər fərz olunur. «Dar» mənada requlyarlığa onun özünün uyğun ekvivalent semi – additivlik xassəsi (2)-dəki «cəmlərdə» toplananların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə olması ilə təyin olunur. «Dar» mənada requlyarlıq, adətən, sadə ehtimali metrikalara tətbiqdə istifadə olunur. Əgər hər hansı mürekkəb μ metrikası geniş və ya dar mənada requlyarlıq xassəsinə malik olarsa, onda ona uyğun μ minimal metrikası da həmin anlamda requlyarlıq xassəsinə malik olur.

Məs., Ki – Fan metrikası və Ki – Fan metrikasına nəzərən minimal olan Levi – Proxorov metrikası toplama əməlinə $(X \Psi Y = X + Y)$ nəzərən və maksimum əməlinə $[X \Psi Y = \max(X, Y)]$ nəzərən geniş mənada requlyar metrikadır. Levi metrikası və müntəzəm metrika bu əməllərə nəzərən dar mənada requlyar metrikalardır. İndikator metrikası və bu metrikaya nəzərən minimal – tam variasiya metrikası xüsusi yer tutur. Bu metrikaların hər ikisi $\mathcal{X}$ -də ixtiyari binar Ψ semi – qrup əməlinə nəzərən geniş mənada requlyar (və deməli, dar mənada) metrikadır.

E. m.-nin requlyarlıq xassəsi əksər hallarda ona ekvivalent yarıadditivlik xassəsi formasında istifadə olunur. Ψ əməlinin kommutativ xassəli olması tələbi (1)-dən (2)-yə keçid üçündür.

Bu şərtəndən azad olmaq üçün (1)-in «sağtərəfli requlyarlıq» şərtinə ona analoji olan

$$\mu(Z \Psi X, Z \Psi Y) \leq \mu(X, Y)$$

«sol tərəfli requlyarlıq» şərti əlavə edilir. (1) münasibətini ödəyən sadə və mürekkəb ehtimal metrikalar (1)-də bərabərsizliyin bərabərliklə əvəz olunması ilə alınır və bunlar mövcuddur.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

EHTİMAL METRİKASI; struktur «вероятностная метрика; структура; probabilistic metric; structure of» – ehtimal metrikalarını ifadə etmək üçün bu və ya digər ümumi konstruksiyadır. Ehtimal nəzəriyyəsinə istifadə olunan belə konstruksiyaların sayı çox deyildir. E. m.-nin müəyyən bir üsulla qurulması, onun digər bir üsulla qurulması mümkünlüyünü istisna etmir. Hətta eyni bir üsulla müxtəlif E. m. ifadələri də alına bilər.

Aşağıda ən çox yayılmış bezi strukturlar şərh olunmuşdur. Burada $\mathcal{X}$ – qiymətləri müəyyən (U, d) metrik fəzasından olan, eyni bir ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğudur.

I. λ – struktur. $w(X, Y; t)$, $-\mathcal{B}_2 \times (0, \infty)$ -də mənfi olmayan funksional olsun, burada $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{P}_{XY}\}$, $-\mathcal{X}$ çoxluğundan olan təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanmaları çoxluğudur. $w(X, Y; t)$ funksionalı aşağıdakı xassələrə malikdir: t, t_1, t_2 – ixtiyari müsbət ədədləri üçün,

$$a) w(X, Y; t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}\{X = Y\} = 1$$

(axırıncı şərt w funksionalının $\mathbf{P}_{XY}$ -dən deyil, marginal $\mathbf{P}_X, \mathbf{P}_Y$ paylanmalarından asılı olduğu halda $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ şərti ilə əvəz olunur);

$$b) w(X, Y; t) = w(Y, X; t);$$

$$c) w(X, Y; t_1) \leq w(X, Y; t_1 + t_2);$$

$$ç) w(X, Y; t_1 + t_2) \leq w(X, Z; t_1) + w(Z, Y; t_2).$$

Onda

$$\mu_1(X, Y) = \inf \{ \max(w(X, Y; t), t) : t > 0 \} \geq \mu_2(X, Y) = \sup \{ \min(w(X, Y; t), t) : t > 0 \} \quad (1)$$

funksionalları $\mathcal{X}$ -də E. m.-lərdir. Əgər ixtiyari (X, Y) cütü üçün $w(X, Y; t)$ t -nin kəsilməz funksiyası olarsa, bu funksionallar üst-üstə düşür. Hər bir ehtimal metrikası μ w -nin rolunda götürülərsə, onda onun köməyiylə (1) funksionallarını qurmaq olar, bu halda $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

(1) şəklində E. m.-lərinin qeyri – trivial ifadələrinə misallər: $\lambda(X, Y) (U = \mathbb{R}')$ metrikası, uyğun funksionalı

$$w(X, Y; t) = (1/2) \max(|f_X(u) - f_Y(u)| : |u| \leq 1/t),$$

burada f_X , $-X$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır;

Ki -Fan metrikası, uyğun funksionalı

$$w(X, Y; t) = \mathbf{P}\{d(X, Y) \geq t\};$$

Levi – Proxorov metrikasıdır ki, uyğun funksionalı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$w(X, Y; t) = \sup \{ \mathbf{P}\{X \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A'\} : A \in \mathcal{B} \}$$

burada $\mathcal{B}$, $-U$ -nun Borel çoxluqları sistemidir və

$$A' = \{x : d(x, y) < t, y \in A\}.$$

II. ζ – struktur. $\mathfrak{Y} = \{g\}$, $-(U, g)$ -də kəsilməz və məhdud həqiqi və ya kompleks funksiyalar çoxluğu olsun.

$$\zeta(X, Y; \mathfrak{Y}) = \sup \{ |\mathbf{M}(g(X) - g(Y))| : g \in \mathfrak{Y} \} \quad (2)$$

$-\mathcal{X}$ -də sadə E. m.-dir. Tam variasiya metrikası, ζ , ideal metrikalar (xüsusi halda orta metrika), müntəzəm metrika, Forte – Murve metrikası, Kantoroviç metrikası, Dadli metrikası ζ strukturlu E. m.-lərdir. Dadli metrikası üçün $\mathfrak{Y} (U, d)$ -də həqiqi funksiyalar çoxluğudur ki, bu funksiyalar üçün

$$\sup \{ |g(x) - g(y)| / \min(1, d(x, y)) : x, y \in U \} \leq 1$$

şərti ödənilir.

III. İntegral strukturu aşağıdakı kimi, ümumiyyətlə, bir-birinə daxil olmayan konstruksiyaların bir neçəsini birləşdirir:

$$1. \mu(X, Y) = \mathbf{M}d^p(X, Y)^{\min(1, 1/p)}, \quad p > 0,$$

$\mathcal{B}_2$ -də funksionaldır və mürekkəb E. m.-dir.

$$2. \mu(X, Y) = \int_U g(x) |\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y| (dx) \quad (3)$$

integralı sadə E. m.-dir və o, g çəkili tam variasiyalı metrika adlanır, burada $g(x) \geq 0$, $-U$ -da hər hansı ölçülən funksiyadır. Belə metrikaya misal, $g(x) = \|x\|^p$ halına uyğun s tertib mütləq psevdomentdir, burada $\|\cdot\|$, $-U$ Banax fəzasında normadır.

$$3. \mu(X, Y) = \sup \left\{ \left| \int g(x, A) (\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y)(dx) \right| : A \in \mathfrak{A} \right\}, \quad (4)$$

funksionalı sadə E. m.-dir, burada $\mathfrak{A}$, U -nin Borel çoxluqlarının hər hansı sistemidir. $g(x, A) = I(x \in A) g(A)$ olduqda mühüm xüsusi hal alınır, yəni bu halda

$$\mu(X, Y) = \sup \{ |g(A)| |P_X(A) - P_Y(A)| : A \in \mathfrak{A} \}$$

olur, burada $g(A)$, $\mathfrak{A}$ -da hər hansı funksiyadır.

Bu metrika (3)-də təyin olunan metrika kimi tam variasiya metrikasının ümumiləşməsidir.

4. **Müntəzəm kvadratik metrika** (4)-ə oxşar, lakin onunla üst-üstə düşməyən struktura malikdir.

5. Sadə E. m.-lər

$$\mu^2(X, Y) = -\iint v(x, y) (P_X - P_Y)(dx) (P_X - P_Y)(dy)$$

şəkili funksionallarla ifadə oluna bilər, burada v , $U \times U$ -da həqiqi funksiya olub, aşağıdakı xassələrə malikdir: ixtiyari $x_j \in U$,

$\xi_j \in \mathbb{R}^1$ üçün

$$v(x, x) = 0, \quad v(x, y) = v(y, x),$$

$$\sum_{i < j} v(x_i, x_j) \xi_i \xi_j \leq 0, \quad \xi_1 + \dots + \xi_n = 0.$$

Sadə E. m.-lərinin bu sinfində

$$\mu(X, Y) = 0 \Leftrightarrow P_X = P_Y$$

xassəsi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki,

$$\mathbf{M} v(X, Y) h(X) h(Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} h(X) = 0$$

münasibəti ödənilsin.

IV. **Hausdorf strukturu.** $S_{\mathfrak{A}}(A, B)$ $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ -da təyin olunmuş, məni olmayan funksiya olsun, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ -nin hər hansı altçoxluğu. Onda

$$\tau(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right\}$$

$\mathfrak{A}$ -da Hausdorf psevdometrikası adlanır. Əgər

$$\mu(X, Y) = \max \{ \Delta(S_{XY}) \Delta(S_{YX}) \}$$

olarsa, E. m. μ Hausdorf strukturuna malikdir, deyilir, burada

$$\Delta(S_{XY}) = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \inf_{B \in \mathfrak{A}} \{ \tau(A, B), S_{XY}(A, B) \}.$$

Levi – Proxorov metrikası belə metrikadır; bu metrika üçün $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ və

$$S_{XY}(A, B) = P(X \in A) - P(Y \in B) \quad (5)$$

və $S_{XY}(A, B)$ (5) bərabərliyi ilə verildikdə Levi metrikasıdır və

$\mathfrak{A} \in \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}^1\}$.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101 (143), № 3, с. 416–54; [2] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87; [4] Рачев С. Т., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 625–53; [5] Рачев С. Т., «Lect. Notes Math.», 1983, Bd 982, S. 172–90.

210 EHTİMAL

EHTİMAL MƏSAFƏSİ « вероятностное расстояние; probabilistic distance » – ehtimal metrikası anlayışının genişlənmiş ifadəsidir. E. m. $d(X, Y)$ ehtimal metrikası tipli funksionaldır. Lakin E. m.-nin ehtimal metrikasından fərqi ondan ibarətdir ki, E. m. üçün yalnız bir xassənin:

$$P\{X=Y\} = 1 \text{ olduqda, } d(X, Y) = 0 \quad (*)$$

şərtinin ödənilməsi tələb olunur. Ehtimal metrikaları halında olduğu kimi E. m.-ləri X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları P_X, P_Y cütü ilə təyin olunan sadə ehtimal məsafələri $d(X, Y)$ və müəkkəb ehtimal məsafələri adlanan digər E. m.-lərinə ayrılır. Sadə E. m.-ləri üçün (*) münasibəti $P_X = P_Y$ olduqda

$$d(X, Y) = 0$$

şəkildə ifadə olunur. Sadə E. m.-inə misal *informasiya məsafəsi*, *Hellinger məsafəsi*dir.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « вероятностей теория; probability theory » – təsadüfi hadisə və proseslərin niyazi modellərini öyrənən niyazi elmdir. E. n. stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən hadisələrin ehtimallarına əsasən bu hadisələrlə müəyyən surətdə bağlı digər təsadüfi hadisələrin ehtimallarını təyin etməyə imkan verir. Təsadüfi hadisə və proseslərin öyrənilməsi stasionar şəraitdə kütləvi təsadüfi hadisə və proseslərin *tezliklərinin statistik dayanıqlılığı* adlanan qanunauyğunluğa malik olmasına əsaslanır. Bu qanunauyğunluq eksperimental olaraq təsdiq olunmuş bir faktır və onun mahiyyəti aşağıdakı mülahizələrə əsaslanır. Müəyyən şərtlər kompleksi S ödənilməklə təkrarən aparılması mümkün olan stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi A hadisəsi baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Əgər S şərtlər kompleksi n dəfə ödənilməklə eksperimentlər aparılırsa, onda n sayda s n sınaq aparılmışdır, deyilir. $k_n(A)$, A hadisəsinin n sınaqda baş verməsi sayı olsun. $k_n(A)/n$ nisbətinə A hadisəsinin *tezliyi* deyilir (bəzi ədəbiyyatda bu nisbət nisbi tezlik də adlanır). Sınaqların sayı n kifayət qədər böyük olduqca hadisənin tezliyi $k_n(A)/n$ müəyyən bir p ($0 \leq p \leq 1$) ədədindən çox az fərqlənir.

Bu ədəd A hadisəsinin *statistik ehtimalı* adlanır və $P(A)$ ilə işarə olunur. Hadisənin tezliyinin qeyd olunmuş xassəsi *dayanıqlılıq xassəsi*, bu xassəli A hadisəsi stoxastik dayanıqlı hadisə adlanır. Məs., düzgün metal pulu n dəfə atdıqda «gerb» üzü sınaqların texminən yansında düşür və buna görə də, «gerb» üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalının $1/2$ -ə bərabər olduğu qəbul oluna bilər. Statistika göstərir ki, doğulan oğlan uşaqlarının sayı qızların sayından çoxdur və oğlan doğulması doğulan uşaqların $51-52$ faizini təşkil edir; deməli, oğlan doğulması ehtimalı $1/2$ -dən çoxdur.

Hər bir sınaqda müşahidə oluna bilən (mümkün hadisələr) hadisələrdən Ω – yəqin hadisəsinə və $\emptyset$ – qeyri – mümkün hadisəsinə qeyd etmək lazımdır: Ω hər bir sınaqda hökmən baş verən hadisə, $\emptyset$ heç bir sınaqda baş verməyən hadisədir. Müşahidə oluna bilən $A_1, \dots, A_r$ hadisələrinə əsaslanaraq yeni hadisələr təyin etmək olur: bu hadisələrin birləşməsi və kəsişməsi hadisələri. Yalnız və yalnız $A_1, \dots, A_r$ hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən B hadisəsinə $A_1, \dots, A_r$ hadisələrinin *birləşməsi* deyilir. Yalnız və yalnız $A_1, \dots, A_r$

hadisələrindən hamısı baş verdikdə baş verən C hadisəsinə $A_1, \dots, A_r$ hadisələrinin kəsişməsi deyilir.

Hadisələrin birləşməsi simvolik olaraq

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \bigcup_{i=1}^r A_i$$

kimi, kəsişməsi isə

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r = \bigcap_{i=1}^r A_i$$

kimi işarə olunur.

A verilmiş eksperimentdə müşahidə olunan ixtiyari hadisə olsun. Hər bir ω elementar hadisəsi eksperimentin nəticəsi haqqında tam informasiya verdiyindən, ω -nın baş verib-verməsinə əsasən A hadisəsinin baş verib-verməməsinə həmişə söyləmək olur: əgər $\omega \in A$ olarsa, onda A hadisəsi baş vermişdir, deyilir. A , Ω -nın qeyd olunmuş altçoxluğudur. Beləliklə, bütün Ω çoxluğu yaqin hadisəyə uyğundur ($\omega \in \Omega$ həmişə ödənilir), $\emptyset$ boş çoxluğu isə qeyri – mümkün hadisəyə uyğundur ($\omega \notin \emptyset$ həmişə doğrudur).

E. n.-də öyrənilən riyazi modellərdə $P(A)$ ehtimalı aksiomatik olaraq daxil olunur. Fərz olunur ki, A hadisələri hər hansı $\Omega = \{\omega\}$ elementar hadisələr fəzasının σ – cəbr təşkil edən altçoxluqlar sinfi $\mathcal{A}$ -nin elementləridir ($\mathcal{A}$ sinfi $\emptyset$ və Ω -ni özündə saxlayan, inkar emeli və sonlu və ya hesabı sayda birləşmə, kəsişmə, iki hadisənin fərqi əməlinə görə qapalı sinfidir; bax, *Cəbri hadisələr*). P ehtimalı $A \in \mathcal{A}$ münasibətini ödəyən bütün hadisələr üçün təyin olunmuşdur və üç aksiomu (Kolmoqorov aksiomları) ödəyir:

A1. $P(A) \geq 0$ (P -nin müsbət olması),

A2. $P(\Omega) = 1$ (P -nin normalanmış olması),

A3. $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ olarsa,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(P -nin hesabı – additivliyi).

$\mathcal{A}$ -da təyin olunmuş P ehtimalı A1, A2, A3 aksiomlarını ödəyirsə, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüyü *ehtimal fəzası* adlanır.

Bu aksiomatika 1933-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur və hal-hazırda E. n.-nin məntiqi əsaslandırılması üçün ən geniş yayılmış məntiqi sxem sayılır. Real təsadüfi hadisələrin tezlikləri (nisbi tezlikləri) müsbətlik, normalanmış olma və hesabı additivlik xassələrini ödədiyindən və hadisənin tezliyi ehtimalla yaxın olduğundan $P(A)$ ehtimalının da bu xassələri ödəməsi tələbi təbii. Hesabi additivlik xassəsinin ödənilməsi tələbi tam riyazi nəzəriyyənin yaradılması üçün zəruridir. Ehtimal fəzası qurularkən P ehtimalını müxtəlif üsullarla vermək olar. Məs., Ω sonlu fəza olarsa, ehtimal fəzası da sonlu olur; onda $\mathcal{A}$ cəbrdir. Bu halda P ehtimalı aşağıdakı şərtləri ödəyən elementar ehtimallar – $p(\omega)$, $\omega \in \Omega$ vasitəsilə təyin olunur:

$$p(\omega) \geq 0, \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

$\mathcal{A}$, Ω -nın bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş sinif olsun; $A \in \mathcal{A}$ hadisəsinin ehtimalı cəm ilə təyin edilir:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad (1)$$

Elementar ehtimallar uyğun real təsadüfi hadisələrin statistik hesablanan tezliklərinə əsasən təyin olunur (məs., demografiya məsələlərində ölüm həddi cədvəlinin tərtibində olduğu kimi). Bir çox hallarda ω elementar hadisələri müəyyən simmetriklik şərtini ödəyir. Bu halda bütün $p(\omega)$ -lar bir-birinə bərabər götürülür və (1) ifadəsinin xüsusi halı olaraq ehtimalın klassik tərifı alınır:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

burada $N(A)$, $A \subset \Omega$ çoxluğunun elementləri (A hadisəsi üçün əlverişli elementar hadisələrin) sayıdır.

P ehtimalı digər mühüm üsulla da verilir. Ω hər hansı məhdud Evklid fəzası, $m(\Omega)$ bu oblastın Lebeq ölçüsü olarsa (birölçülü və ikiölçülü fəzalarda bu ölçü uyğun olaraq uzunluq və sahədir) və ixtiyari $\omega \in \Omega$ nöqtələrinin hamısı «eyniimkanlı» olarsa, onda hər bir $A \in \mathcal{A}$ çoxluğuna

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (2)$$

ehtimalı qarşı qoyulur. Bu halda (2) düsturu ilə təyin edilən ehtimal – *həndəsi ehtimal* adlanır.

A1 – A3 aksiomları ilə təyin olunan P ehtimalı Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ – cəbrində normalanmış ölçüdür. Beləliklə, formal baxımdan E. n.-ne ölçü nəzəriyyəsinin hissəsi kimi baxmaq olardı. Lakin E. n. və ölçü nəzəriyyəsinin əsas problemləri müxtəlifdir. E. n.-də əsas spesifik anlayış – *asılı olmama* asılılıq anlayışı bu nəzəriyyənin yalnız özünəməxsus anlayışıdır.

A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən *şərti ehtimalı* $P(A|B)$

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B), \quad P(B) > 0 \quad (3)$$

düsturu ilə təyin olunur. Bu ehtimal tezliklərə xas olan bütün xassələri ödəyir. Əgər

$$P(A|B) = P(A) \quad (4)$$

olarsa, onda A hadisəsi B hadisəsindən *asılı olmayan* (və ya *ehtimali asılı olmayan*) hadisə adlanır (bax, *Asılı olmama*). (3) və (4)-dən A və B hadisələrinin *asılı olmama* şərti (simmetriklik) alınır:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad (5)$$

(5) asılı olmama şərtindən A və B hadisələrinin asılı olub-olmadıqlarını yoxlamaqdan daha çox bu hadisələr asılı olmayan hadisələr olduğu hallarda $P(A \cap B)$ ehtimalını hesablamaq məqsədilə istifadə edilir. A və B -nin asılı olmaması postulat kimi qəbul etmək üçün, adətən, bir-birindən səbəbli asılı olmayan real təsadüfi hadisələrin tezliklərinin

$$\frac{k_n(A \cap B)}{n} \approx \frac{k_n(A)}{n} \frac{k_n(B)}{n}$$

n -in böyük qiymətləri üçün təqribi bərabərliyini ödəməsi xassəsindən istifadə olunur. Buna görə də, uyğun A və B hadisələri ehtimali riyazi modeldə ehtimali asılı olmayan hadisələr sayılır. Daha ümumi halda, eger ixtiyari $A_i \in \mathcal{A}_i$ hadisələri üçün

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_r) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_r)$$

şərti ödənilərsə, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ hadisələr σ -cəbrləri asılı olmayan σ -cəbrlər adlanır; uyğun $A_1, \dots, A_r$ hadisələri də asılı olmayan hadisələr adlanır.

Asılı olmamazlıq anlayışı və şərti ehtimallar sınaqlarla əlaqədar hallara baxılarkən xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Sadə hallarda sınaq müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə eksperimentdə, yalnız və yalnız, biri baş verəcək və ya baş verməyəcək bütün mümkün ola bilən cüt-cüt uyuşmayan $\{A_i\}$ hadisələr çoxluğudur (bax, *Monoqrafiyalar*, [1]; [2]; [3]). A_i sınağın nəticəsi adlanır. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında sınağa $\Omega = \sum_i A_i$,

$i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ (cüt-cüt uyuşmazlıq) şərtlərlə təyin olunan bölgü uyğun götürülür. Belə ki, sınağın nəticəsi bir-birilə uyuşmayan və heç olmazsa biri hökmən baş verən A_i hadisəsidir.

Əgər S sınağının hər bir nəticəsi $S_1, S_2, \dots, S_n$ sınaqlarının uyğun $A_{k_1}^{(1)}, A_{k_2}^{(2)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}$ nəticələrinin birgə baş verməsi kimi ifadə olunursa, yəni

$$C = A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{k_n}^{(n)} \quad (6)$$

olarsa, onda S sınağı $S_1, S_2, \dots, S_n$ sınaqlarından təşkil olunmuşdur, deyilir, C — S sınağının nəticəsidir. Bezen

$$P(A_{k_1}^{(1)}), P(A_{k_2}^{(2)} | A_{k_1}^{(1)}), \dots, P(A_{k_n}^{(n)} | A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{k_{n-1}}^{(n-1)}) \quad (7)$$

ehtimalları müəyyən mülahizələrə görə məlum olur və (7) ehtimalları ilə (3) düsturuna əsasən (6) münasibətilə təyin olunan ixtiyari C hadisəsinin ehtimalını təyin etmək olur.

Mürekkeb sınaqlar praktik baxımdan iki mühüm növə ayrılır: a) mürekkeb sınağı təşkil edən sınaqlar asılı olmayan sınaqlardır, yəni (7) ehtimalları uyğun olaraq, $P(A_{k_1}^{(1)}), P(A_{k_2}^{(2)}), \dots, P(A_{k_n}^{(n)})$ şərtsiz ehtimallarına bərabərdir; b) ixtiyari S sınağının nəticəsinin ehtimalı yalnız S_{i-1} (özündən əvvəlki) sınağının nəticəsindən asılı ifadə olunur, yəni (7) ehtimalları uyğun olaraq

$$P(A_{k_1}^{(1)}), P(A_{k_2}^{(2)} | A_{k_1}^{(1)}), P(A_{k_3}^{(3)} | A_{k_2}^{(2)}), \dots, P(A_{k_n}^{(n)} | A_{k_{n-1}}^{(n-1)})$$

şərti ehtimallarına bərabərdir. Bu halda sınaqlar *Markov zənciri* ilə bağlı sınaqlardır, deyilir. Belə mürekkeb sınaqla bağlı bütün hadisələrin ehtimalları başlanğıc ehtimallar adlanan $P(A_{k_1}^{(1)})$ və keçid ehtimalları adlanan

$$P(A_{k_2}^{(2)} | A_{k_1}^{(1)}), P(A_{k_3}^{(3)} | A_{k_2}^{(2)}), \dots, P(A_{k_n}^{(n)} | A_{k_{n-1}}^{(n-1)})$$

ehtimalları ilə tam mənası ilə təyin olunur.

Bir çox hallarda sınaqların nəticələri hər hansı ədədi qiymətlərlə ifadə olunur; bu halda *tesadüfi kəmiyyət*dən

söhbət gedir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası verilmişdirsə, onda $\xi = \xi(\omega)$ *tesadüfi kəmiyyət* ω elementar hadisəsinin ölçülən funksiyasıdır, yəni $\xi(\omega)$ *elə* funksiyadır ki, əgər B ixtiyari Borel funksiyası olarsa, onda $\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$, yəni $\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ *tesadüfi hadisə*dir, $B \subset \mathbb{R}^1$. $\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ *tesadüfi kəmiyyətinin ehtimalı* (B -nin funksiyası) $P_\xi(B)$ $\xi(\omega)$ *tesadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu* adlanır.

Paylanma qanunu $P_\xi(B)$ -ni *paylanma funksiyası* $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$, $x \in (-\infty, \infty)$ vasitəsilə həmişə təyin etmək olur.

Paylanmaların mühüm sinfi — *mütləq kəsilməz paylanmalar* sinfidir. Mütləq kəsilməz paylanmalar ehtimal sıxlığı (paylanmanın sıxlıq funksiyası) $p_\xi(x)$ vasitəsilə verilir: $B \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari Borel çoxluğu olarsa,

$$P_\xi(B) = \int_B p_\xi(x) dx;$$

$$p_\xi(x) \geq 0 \quad \text{və} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) dx = 1.$$

Paylanmaların digər sinfi *diskret paylanmalar* sinfidir, bu paylanmalar *tesadüfi kəmiyyətin aldığı sonlu və ya hesabi sayda* *həqiqi qiymətlər* — $x_1, \dots, x_n, \dots$ və $P\{\omega: \xi(\omega) = x_k\} = p_k$ ehtimallar toplusu ilə verilir; bu halda

$$P_\xi(B) = \sum_{x_k \in B} P_k\{\xi = x_k\}.$$

Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (8)$$

olan, limit teoremlərində yaranan *normal paylanma* və paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \alpha > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

olan *üstkü paylanma* mütləq kəsilməz paylanmalara misaldır.

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (9)$$

düsturu ilə ifadə olunan *binomial paylanma* — diskret paylanmadır, burada ξ — n sayda asılı olmayan Bernulli sınaqlarında müsbət nəticələr sayı, p — bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalıdır və $0 \leq p \leq 1$, $p + q = 1$.

Bir çox hallarda *tesadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanması* əvəzinə onun ədədi xarakteristikaları ilə kifayətlənmək olur. Bunlardan ən çox istifadə olunan riyazi gözləmə və dispersiya kimi ədədi xarakteristikalardır (bax, *Momentlər*, *Semi-invariant*).

İki və ya ikidən çox *tesadüfi kəmiyyətlər* eyni zamanda öyrənildikdə *birgə paylanma* anlayışından istifadə olunur. Bu paylanma $\xi_1, \dots, \xi_n$ *tesadüfi kəmiyyətləri üçün* $P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in B)$

ehtimalları ilə verilir, burada B — $\mathbb{R}^1$ -in Borel çoxluğudur.

$B \subseteq \mathbb{R}^n$. İxtiyari seçilmiş $B \in \mathbb{R}^1$ Borel çoxluqları üçün

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i \in B_i\}$$

bərabərliyi ödənilərsə, $\xi_1, \dots, \xi_n$, – *asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər* adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanması məlum olduqda, bu təsadüfi kəmiyyətlərlə təyin olunan ixtiyari təsadüfi hadisənin ehtimalını, məs., $\{a < \xi_1 + \dots + \xi_n < b\}$ hadisənin ehtimalını, bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin birözlü paylanmasını (*marginal paylanmanı*) hesablamaq, təyin etmək olur.

E. n.-nin ilkin limit teoremlərinə misal binomial paylanmanın (9) düsturu ilə verilən ehtimalının qiymətinin n -in böyük qiymətləri üçün hesablanmış

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-x^2/2}$$

təqribi qiyməti ilə əvəz olunmasıdır, burada $x = (m - np)/\sqrt{np(1-p)}$.

Qeyd etmək lazımdır ki, yalnız limit teoremlərini əhatə edən biliyə malik olduqda E. n.-nin mahiyyəti dərinəndə dərk olunur. Məs., *Bernulli teoremi* onu ifadə edir ki, asılı olmayan sınaqlarda müşahidə oluna bilən hər hansı təsadüfi hadisənin tezliyi bir qayda olaraq, bu hadisənin ehtimalından az fərqlənir, *Muavr – Laplas teoremi* isə bu və ya digər yayınmaların ehtimallarını qiymətləndirmək üçün istifadə edilir. Analoji olaraq, təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyası kimi ədədi xarakteristikalarının məzhi böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi ilə aydın olur (bax, *Böyük ədədlər qanunu*, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu*, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremi*).

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ riyazi gözləməsi $M\xi_k = a$, dispersiyaları

$D\xi_k = \sigma^2$ olan eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər;

$$S_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$$

olsun. Böyük ədədlər qanununa görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $\{|S_n - a| \leq \varepsilon\}$ hadisəsinin ehtimalının limiti $n \rightarrow \infty$ olduqda 1-ə bərabərdir və beləliklə, bir qayda olaraq S_n orta qiymət a -dan az fərqlənir. Mərkəzi limit teoremi bu nəticəni dəqiqləşdirir və onu ifadə edir ki, S_n -in a -dan yayınmaları təqribi olaraq riyazi gözləməsi 0, dispersiyası σ^2/n olan normal paylanmaya tabedir. Beləliklə, S_n -in a -dan bu və ya digər yayınmalarının n -in böyük qiymətlərində ehtimallarını hesablamaq üçün (birinci yaxınlaşmada) ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasına xas olan bütün məlumatlar olmadan belə keçmək olar; yalnız dispersiyanın məlum olması kifayətdir. Yaxınlaşmanın dəqiqliyini artırmaq istədikdə daha yüksək tərtib momentlərdən istifadə olunur.

Bu mühakimələr müəyyən dəyişikliklərlə müxtəlif qanunlarla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər (toplananlar *Lyapunov teoremi*), sonluölçülülük və bəzi sonsuzölçülülük vektor fəzalarında verilmiş *təsadüfi vektorlar* üçün də tətbiq olunur. Asılı olmamazlıq şərti ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin bu və ya digər mənada zəif «asililik» şərtinə əvəz oluna bilər.

Qruplarda paylanmalar, arifmetik funksiyaların qiymətlərinin paylanmaları və s. üçün limit teoremləri məlumdur.

Riyazi statistikada və statistik fizikada təbii hadisələrdə kiçik ehtimallı $\{|S_n - a| > \varepsilon\}$ tipli hadisələrin ehtimallarını nisbətən böyük dəqiqliklə təqribə etmək zərurəti yarandıqda normal qanunla təqribəsinə böyük düzəlişlər edilməsinə gətirir (bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*).

XX əsrin 20-ci illərində aşkar olunmuşdu ki, hətta eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı sxemində belə təbii olaraq limit paylanmaları normal paylanmadan fərqli ola bilər. Məs., əgər ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti hər hansı təsadüfi dəyişənlər sistemin ilkin vəziyyətə qayıtma müddəti, ξ_2 – ilkin və ikinci qayıtma anları arasındakı müddət və s. olarsa, onda olduqca ümumi şərtlərlə $\xi_1 + \dots + \xi_n$ cəminin, yəni n -ci qayıtma anına

qədər müddətin paylanmasının $n^{-1/\alpha}$ (α 1-dən kiçik sabitdir) vuruğuna hasili müəyyən limit paylanmasına yığılır. Beləliklə, n -ci qayıtma anına qədərki müddət kobud mənada dedikdə, $n^{1/\alpha}$ kimi artır, yəni n -dən sürətlə artır (böyük ədədlər qanununun tətbiq olunması mümkün olduqda bu artma n tərtiblə olardı). Bu mülahizənin doğruluğu *Bernulli dolaşmasında* aydın görünür (bu halda digər paradoksal qanun – *Arksinus qanunu* da təbii olaraq isbat olunur).

Limit teoremlərinin isbatında əsas etibarilə *xarakteristik funksiyalar* metodu, Laplas çevirmələri metodu, doğuran funksiyalar metodu kimi metodlardan istifadə olunur. Bəzi hallarda kompleks dəyişənlər funksiyalar nəzəriyyəsi metodlarından da istifadə etmək zəruri olur.

Limit teoremlərinin əksəriyyətinin yaranması mexanizmi yalnız təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi ilə bağlı tam mənada dərk olunur.

XX əsrin ortalarında bir sıra fiziki və kimyəvi tədqiqatlarla bağlı birözlülük və çoxölçülülük təsadüfi kəmiyyətlərlə yanaşı *təsadüfi proseslər* – zaman etibarilə cərəyan edən və ehtimal qanunları ilə idarə olunan (C. Dub) ixtiyari proseslər öyrənilməyə başlandı. Təsadüfi prosesə misal hissəciyin Braun hərəkətidir. E. n.-də təsadüfi prosesə, adətən, birparametrlili $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi kimi baxılır. Əksər hallarda t parametri zamanı ifadə edir, lakin prosesin parametri, məs., ixtiyari dəyişən olduğu halda, adətən, təsadüfi proses (stoxastik proses) əvəzinə *təsadüfi funksiya*, əgər t feza nöqtəsidirsə, *təsadüfi meydan* termini işlədilir. t tamqiymətli olarsa, təsadüfi funksiya *təsadüfi ardıcılıq* (və ya *zaman sırası*) adlanır. Təsadüfi kəmiyyət paylanma qanunu ilə xarakterizə olunduğu kimi təsadüfi proses s o n l u ç ü l ü p a y l a n m a l a r ı ilə $\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmaları toplusu ilə xarakterizə oluna bilər; $t_1, t_2, \dots, t_n$ n -in ixtiyari qiyməti üçün mümkün zaman anlarıdır. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin iki xüsusi istiqamətində: *Markov prosesləri* və *stasionar təsadüfi proseslər*ə bağlı sahələrinde ən maraqlı konkret nəticələr alınmışdır; bununla yanaşı *martinqalların* da xüsusi sayılaraq araşdırılmasına başlanıldı.

Tarixi baxımdan əvvəlcə Markov prosesləri tədqiq olunmağa başlanmışdı. Əgər ixtiyari t_0 və t_1 ($t_0 < t_1$) zaman anlarında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $t \leq t_0$ şərtini ödəyən bütün t -lər üçün qiymətləri məlum olarsa, $\zeta(t_1)$ təsadüfi kəmiyyətinin şərti ehtimalı yalnız $\zeta(t_0)$ -dan asılı olaraq təyin olunur (bu *Markov xassəli* təsadüfi proseslər bəzən *keçmişsi təsirsiz proseslər* adlanır). Markov prosesləri klassik fizikada baxılan deterministik proseslərin təbii ümumiləşmiş halıdır. Deterministik proseslərdə sistemin t_0 anındakı vəziyyəti prosesin gələcək vəziyyətini birqiymətli təyin edir; Markov proseslərində

isə sistemin t_0 anındakı vəziyyəti prosesin gələcək (sonrakı) vəziyyətinin paylanma ehtimalını $t > t_0$ olduqda birqıymətli təyin edir və t_0 anına qədər prosesin nə cür cərəyan etməsinin bu paylanmaya heç bir təsiri olmur.

Kəsilməz deterministik proseslərin öyrənilməsi sistemin vəziyyətini təsvir edən funksiyalar üzrə diferensial tənliklərə gətirdiyi kimi, kəsilməz Markov proseslərinin öyrənilməsi prosesin ehtimal paylanması üzrə differensial və ya inteqro – differensial tənliklərə gətirir.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin ikinci geniş bir istiqaməti stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsidir. Təsadüfi prosesin stasionarlığı – onun ehtimal qanunauyğunluqlarının zaman etibarilə dəyişməz olmasıdır; bu xassə proses üzərinə ciddi məhdudiyyətdir və yalnız bu şərt bir sıra mühüm nəticələr almağa imkan yaradır. Bu nəzəriyyənin böyük bir sahəsində geniş mənada stasionarlığı fərz etməklə kifayətlənmək olur; geniş mənada stasionarlıq $M\zeta(t)$ və $M\zeta(t)\zeta(t+\tau)$ riyazi gözləmələrinin t -dən asılı olmamazlığıdır. Bu fərziyyədən $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$$

spektral ayrılışının mümkünlüyü nəticəsi alınır, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlı təsadüfi funksiyadır. Stasionar proseslər üçün ən yaxşı xətti interpolasiya (kvadratik orta anlamda), ekstrapolyasiya və filtrasiya üsulları inkişaf etdirilmişdir.

Son zamanlar təsadüfi proseslərin kifayət qədər geniş bir sinfi üçün effektiv həll olunan ən yaxşı qeyri – xətti filtrasiya məsələləri, interpolasiya və ekstrapolyasiya məsələləri araşdırılmışdır (bax, *Təsadüfi proses; proqnozlaşdırma, Təsadüfi proses; filtrasiya*). Uyğun analitik aparatın əsas hissəsini *stoxastik differensial tənliklər, stoxastik integral və martinqallar* təşkil edir. $\zeta(t)$ martinqalının səciyyəvi xassəsi – prosesin $s < t$ anına qədər vəziyyəti məlum olduqda $\zeta(t)$ -nin şərti riyazi gözləməsinin $\zeta(s)$ -ə bərabər olmasıdır.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün limit teoremlərinin klassik problemlərlə sıx bağlıdır. Təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanma qanunları araşdırıldıqda alınan limit paylanmaları təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində uyğun xarakteristikaların dəqiq paylanma qanunlarıdır. Bu fakt bir çox limit teoremlərini uyğun təsadüfi proseslərin köməyi ilə isbat etməyə imkan yaradır.

Sonda qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda göstərilmiş aksiomatik çərçivəsində təsadüfi proseslərlə bağlı anlayışların məntiqi cəhətdən qüsursuz tərifləri nəzəri – çoxluq xarakterli çoxlu çətinliklər yaradır (məs., təsadüfi proseslərin kəsilməzliyinin, differensiallanırlığının və s. ehtimallarnın təyin olunması ilə bağlı olan; bax, *Separabel proses*). Buna görə də, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi üzrə monoqrafiyalarda işin çox hissəsi nəzəri – çoxluq konstruksiyaların inkişafının analizinə həsr olunur.

Tarixi məlumat. E. n. 17-ci əsrin ortalarında yaranmışdır. E. n.-ə aid ilk tədqiqatlar B. Paskal (B. Pascal), P. Ferma (P. Fermat), X. Huygens (Ch. Huygens) tərəfindən qumarda müxtəlif təsadüfi hadisələrin ehtimallarının hesablanması ilə bağlı aparılmışdır. Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) iki nəticəsi olan asılı olmayan sınaqlar sxemi üçün böyük ədədlər qanununu isbat etməsi E. n.-də mühüm əhəmiyyət kəsb etmiş oldu (1713-də çap olunmuşdur).

E. n. tarixinin sonrakı (ikinci) mərhələsi (18-ci əsr və 19-cu əsrin başlanğıcı) A. Muavr (A. Moivre), P. Laplas (P. Laplace), K. Qauss (C. Gauss) və S. Puasson (S. Poisson) kimi alimlərin adları ilə bağlıdır. Bu dövrdə E. n. təbiətşünaslıq və texnikada (əsasən müşahidələrin xətalara nəzəriyyəsində geodeziya və astronomiya, atıcılıq nəzəriyyələrində) xüsusilə aktual tətbiqləri ilə səciyyəvidir.

Hal-hazırda Laplas (1812) və Puasson (1837) teoremləri kimi məlum olan ilkin limit teoremləri bu dövrə aiddir; elə bu ərəfədə A. Lejandr (A. Legendre, 1806) və K. Qauss (1808) ən kiçik kvadratlar metodunu işləmişlər.

E. n.-nin üçüncü mərhələsi (19-cu əsrin 2-ci yarısı) əsas etibarilə P. L. Çebişev, A. M. Lyapunov və A. A. Markov kimi alimlərin adları ilə bağlıdır. E. n. Rusiyada (18-ci əsr) da inkişaf mərhələsi keçmişdir; bu ərəfədə Rusiyada çalışan L. Eyler (L. Euler), N. Bernulli (N. Bernoulli) və D. Bernulli (D. Bernoulli) kimi alimlər bir sıra əsərlər yazmışlar.

E. n.-nin inkişafının ikinci mərhələsində E. n.-nin riyazi statistika məsələlərinin araşdırılmasında M. V. Ostrogradskinin işlərini, E. n.-nin siğorta məsələlərinə, statistika və demografiyaya tətbiqi ilə bağlı V. Ya. Bunyakovskinin işlərini qeyd etmək lazımdır. 19-cu əsrin ikinci yarısından Rusiyada E. n. sahəsindəki araşdırmalar dünyada aparıcı yer tutur. P. L. Çebişev və onun davamçıları A. M. Lyapunov və A. A. Markov E. n.-də bir sıra ümumi məsələləri qoymuş və onları həll etmişlər; bu məsələlər Bernulli və Laplas teoremlərinin ümumiləşdirilmiş hallarıdır. P. L. Çebişev olduqca sadə üsulla, kifayət dərəcədə ümumi fərziyyələrlə böyük ədədlər qanununu isbat etmişdir (1867). O, ilk dəfə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün mərkəzi limit teoremini ifadə etmiş və bu teoremin isbat metodlarından birini vermişdir. A. M. Lyapunov bu teoremi digər metodla isbat etmişdir (1901).

1907-ci ildə A. A. Markov ilk dəfə asılı sınaqların bir növünü araşdırmışdır (*Markov zəncirləri*).

19-cu əsrin ikinci yarısında Qərbi Avropada riyazi statistika sahəsində [Belçikada – A. Kettle (A. Quételet), İngiltərədə – F. Qalton (F. Galton)] və statistik fizikada [Avstriyada – L. Boltzmann (L. Boltzmann)] araşdırmalar geniş sürətdə inkişaf etmişdi və bu araşdırmalar P. L. Çebişev, A. M. Lyapunov və A. A. Markovun əsas nəzəri işləri ilə yanaşı E. n.-nin problemlərinin əsaslı tədqiqatı üçün dördüncü (müasir) inkişaf mərhələsinin əsasını qoymuş oldu. Bu mərhələ E. n.-nin geniş tətbiqi ilə səciyyəvidir. Bu mərhələdə Fransada E. Borel (E. Borel), P. Levi (P. Lévy), M. Freşe (M. Fréchet), Almaniyada – R. Mizes (R. Mises), ABŞ-da – N. Viner (N. Wiener), V. Feller (W. Feller), C. Dub (J. Doob), İsveçdə – Q. Kramer (H. Cramér) kimi alimlərin faydalı araşdırmaları ilə yanaşı S. N. Bernşteynin bu sahədəki fəaliyyəti xüsusilə qeyd olunmalıdır; S. N. Bernşteynin fəaliyyəti ilə E. n.-nin yeni mərhələsinin təməli qoyulur, o, Çebişev, Lyapunov və Markovun klassik limit teoremlərini olduqca ümumiləşdirmiş və E. n.-nin təbiət elmlərinə geniş tətbiqi məsələlərini qoymuşdu. [A. Ya. Xinçin və A. N. Kolmoqorov E. n. məsələlərinə həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin metodlarını tətbiq etməyə başladılar]. Sonralar (30-cu illər) onlar (və Ye. Ye. Slutski) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin əsaslarını qoymuşlar. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi sahəsində A. V. Skoroxodun xidmətinə də qeyd etmək lazımdır. V. İ. Romanovski, N. V. Smirnov, Yu. V. Linnik və L. N. Bolşev E. n.-nin riyazi statistikada tətbiqinin xüsusi inkişafına nail oldular.

Əd: Ehtimal nəzəriyyəsinin tarixi. История математики, т. 2-3, М., 1970-72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

Elmin klassikləri. Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер. – Бернулли Я., О законе больших чисел, М., 1986); Moivre A. de, Doctrine

of Chances, 3 ed., L., 1756 (переизд. – N. Y., 1967); Laplace [P. S.], Théorie analytique des probabilités, 3 éd., P., 1886; Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2–3, М. – Л., 1947–48; Liapounoff A., Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, СПб, 1901; Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946.

Dərsliklər və məlumat kitabları. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, М., 1985; Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; Ширяев А. Н., Вероятность, 2 изд., М., 1989; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

Monoqrafıyalar. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ cəbri strukturlarda « вероятностей теория на алгебраических структурах; **probability theory on algebraic structures** » – ehtimal nəzəriyyəsinin yeni, intensiv inkişaf edən bölməsidir; burada bəzi cəbri əməllər verilmiş strukturlardan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması öyrənilir. E. n.-nin cəbri strukturlara yayılmasına riyaziyyatçıların ehtimal qanunauyğunluqlarının tətbiqinin təbii sərhədlərini müəyyən etmək arzusu ilə yanaşı, hesablama riyaziyyatı sahəsində, rabitə nəzəriyyəsi, astronomiya, kvant mexanikası və s. sahələrdəki qoyulan məsələlərin artması ilə bağlı məsələlərin həlli də qruplarda, xətti fəzalarda və digər cəbri strukturlarda ehtimal münasibətlərinə baxılması da səbəb olmuşdur. Həqiqi oxla müqayisədə xassələrinə görə heç də zəngin olmayan cəbri strukturlara keçid yalnız yeni riyazi aparatın olmasını deyil, həmçinin yeni ideyaları da tələb edir. Bu sahədə araşdırmalarda ən effektiv metodlardan biri – təsvirlər nəzəriyyəsinə əsaslanan Furry analizi sayılır (bax, *Furry çevirməsi* qrupda ehtimal paylanmalarının).

Ehtimal ölçüsünün bu və ya digər cəbri strukturda verildiyini qeyd etmək üçün strukturun adına «stoxastik» sözü əlavə olunur (məs., stoxastik qrup, stoxastik xətti cəbr, stoxastik semi – qrup və s.).

Klassik ehtimal nəzəriyyəsinin əsas bölmələrindən biri limit teoremləri nəzəriyyəsidir. Cəbri strukturlarda (məs., qruplarda) analoji nəzəriyyənin qurulması üçün, qrupda *sonsuz bölünən paylanma* kimi fundamental anlayış, bununla sıx bağlı olan ölçülərin *konvolyusion semi – qrupu* anlayışının daxil olunması və bunlar arasında əlaqəni öyrənmək zəruriliyi yaranmışdır (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; qrupda; daxilolma problemi). Seriyalar sxemi üçün, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin

$\mathbb{R}^1$ -də paylanmalarının yığılmasının isbatında mühüm nəticə sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyası üçün *Levi – Xinqin kanonik ifadəsidir*. Lokal kompakt qruplarda limit teoremləri nəzəriyyəsində bu nəticəyə analoq ölçülərin konvolyusion semi – qruplarının kanonik ifadəsi, daha dəqiq, onları *doğuran funksionalların* kanonik ifadəsidir. Bu kanonik ifadə üçün (ψ_1, ψ_2, η) üçlüyünü ifadə edən elementlər terminləri *ölçülərin infinitezimal sistemindən* olan ehtimal paylanmalarının kompozisiyaları ardıcılığının verilmiş sonsuz bölünən paylanmaya yığılma şərtlərini yazmaq olur (məs., *Mərkəzi limit teoremi*, qruplarda). Kompakt qruplarda *limit teoremləri* nəzəriyyəsində bir çox nəticələr alınmışdır. Burada əsas anlayışlardan biri *idempotent ölçü* anlayışdır. Ölçülərin infinitezimal sistemi həmişə verilmir. Əksər hallarda ehtimal paylanmaları eyni olan paylanmaların ardıcıl kompozisiyaları hallarına baxılır. Bu da $\mathbb{R}^1$ -də *operator dayanıqlı paylanma* anlayışına,

daha ümumi, qrupda *dayanıqlı paylanma* anlayışına gətirir. Burada əsas məsələlərdən biri operator dayanıqlı paylanma və qrupda dayanıqlı paylanmanın *cazibə oblastının* təsviri problemdir.

$\mathbb{R}^1$ halında olduğu kimi, lokal kompakt qrupda *Qauss paylanması və Puasson paylanması* kimi bəzi mühüm ehtimal paylanmaları bir sıra xüsusi xassələrə malikdir. Bu ehtimal paylanmalarının onlara xas bəzi xüsusiyyətlərinə görə fərqləndirilməsi qruplarda *xarakterizasion teoremlər* nəzəriyyəsinə gətirir (bax, *Ehtimal paylanmalarının arifmetikası* A b e l qruplarında).

Klassik ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışların hamısı ixtiyari qruplar üçün yaranır. Buna görə də, bu anlayışlara analoji anlayışların təyin olunduğu qruplar siniflərini xarakterizə etmək mühüm əhəmiyyət kəsb edir (bax, *Ehtimali xarakterizasiya*(sı), qrupların).

Qrupda yaxşı xassələrli bütün Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu kompozisiya əməlinə görə topoloji semi – qrup əmələ gətirir. Bircins fəzalarda da ehtimal paylanmaları üçün analoji nəticə doğrudur. Digər tərəfdən, funksiyalar nəzəriyyəsinin bir sıra məsələlərində mahiyyətə ehtimal məsələləri yaranan funksiyaların bəzi topoloji semi – qrupları əmələ gəlmişdir. Bu da ehtimal ölçülərinin

$\mathbb{R}^1$ -də semi – qrupu anlayışını ifadə edən bəzi ümumi konstruksiyaların baxılmasına səbəb olmuşdur (bax, *Ümumiləşmiş stoxastik konvolyusiya, Hiperqrup, Xüsusi semi – qrupların hesabı / arifmetikası*).

Fizika, astronomiya, kvant fizikası, çoxölçülü statistik analizin bəzi məsələləri qruplarda və bircins fəzalarda statistik məsələlərə baxılması zərurətinə gətirir, bu məsələnin həlli üçün klassik riyazi statistikanın analoji nəticələrini inkişaf etdirən yeni ideyalar və metodların daxil olunması tələb olunur.

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ruzsa I. Z., Szekeli G. J., Algebraic Probability Theory, N. Y., 1988; [5] Bloom W. R., Heyer H., Harmonic analysis of probability measures on hypergroups, B., 1955.

EHTİMAL OLUNAN YAYINMA « вероятное отклонение; semiinterquartile range / probable / deviation error », orta yayınma, – ehtimal paylanmasının səpələnmə xarakteristikasıdır. Kəsilməz paylanmaya malik simmetrik ξ təsadüfi kəmiyyətinin E. o. y.-sı B

$$P\{|\xi - m| < B\} = P\{|\xi - m| > B\} = 1/2$$

şərti ilə təyin olunur, burada m , – ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır (bu halda ξ -nin riyazi gözləməsi vardırsa, $m = M\xi$ olur). Normal paylanma üçün E. o. y. ilə kvadratik yayınma σ (yeni standart səpələnmə ölçüsü) arasında sadə əlaqə vardır:

$$\Phi(B/\sigma) = 3/4,$$

$\Phi(x)$, – (0,1) parametrlərli normal paylanma funksiyasıdır. Təqribi olaraq, $B = 0,674496\sigma$.

EHTİMAL ÖLÇÜSÜ « вероятностная мера; probability measure », ehtimal paylanması, paylanma, ehtimal, – boş olmayan Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş, hesabi sayda nəzəriçoxluq əməllərinə görə qapalı $\mathcal{A}$ sinfində (Borel meydanı olan) təyin olunan, mənfi olmayan həqiqi qiymətli $\mathbb{P}$ funksiyasına deyilir ki,

$P(\Omega) = 1$ və $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \emptyset$ olarsa,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{hesabi additivlik}).$$

Misallar.

1) $\Omega = \{G, \mathcal{S}\}$, $\mathcal{A} = \{\{G\}, \{\mathcal{S}\}, \emptyset, \Omega\}$, $P(\{G\}) = P(\{\mathcal{S}\}) = 1/2$. Bu ölçü bir düzgün metal pulun bir dəfə atılması eksperimentinə uyğun təyin edilmişdir;

2) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{A}$ – Ω -nin bütün altçoxluqlarından ibarət sinifdir.

$$P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \quad (\text{Puasson paylanması}).$$

3) $\Omega = \mathbb{R}^1$; $\mathcal{A}$ – $\mathbb{R}^1$ -in Borel altçoxluqlarından ibarət sinifdir, $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx \quad (\text{normal paylanma}).$$

4) $\Omega = C_0[0, 1]$, – sıfırda sıfıra bərabər, $[0, 1]$ -də kəsilməz həqiqi $x(t)$ funksiyalarının fəzası, $\mathcal{A}$ – müntəzəm yığılma topologiyasına nəzərən Ω -nin Borel altçoxluqlarının sinfi, P – aşağıdakı düsturla birqiymətli təyin olunan ölçüdür:

$$\begin{aligned} P\{x: a_i < x(t_i) < b_i, \quad i = 1, \dots, n\} = \\ = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1/2} \times \\ \times \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}\right\} dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

burada n – ixtiyari natural ədəd və $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ (Viner ölçüsü).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд. М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988.

EHTİMAL ÖLÇÜSÜ q r u p d a « в е р о я т н о с т н а я м е р а н а г р u p п е ; p r o b a b i l i t y m e a s u r e o n a g r o u p » – verilmiş G qrupunun altçoxluqlarının hər hansı bir $\mathcal{B} \sigma$ – cəbrində verilmiş *ehtimal ölçüsüdür*. Adətən, fərz olunur ki, $\mathcal{B} \sigma$ – cəbri ələdir ki, $(G, \mathcal{B})$ *ölçülən qrupdur*. Əgər G topoloji qrupdursa, $\mathcal{B}$ kimi Borel σ – cəbri götürülür. Əgər μ_1 və μ_2 , G ölçülən qrupunda ehtimal ölçüləridirsə, onda

$$\begin{aligned} \mu_1 * \mu_2(B) &= \int_G \mu_1(Bx^{-1}) d\mu_2(x) = \\ &= \int_G \mu_2(x^{-1}B) d\mu_1(x), \quad B \in \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (*)$$

bərabərliyi μ_1 və μ_2 *ehtimal ölçülərinin kompozisiyası* adlanan, G -də ehtimal ölçüsü $\mu_1 * \mu_2$ -ni təyin edir. Əgər μ_1 və

μ_2 G topoloji qrupunda τ – hamar E. ö.-ləri (Radon ölçüləri) olarsa, $\mu_1 * \mu_2$ kompozisiyası (*) bərabərliyi ilə təyin olunur; τ – hamar ölçüdür (Radon ölçüsü). Əgər μ_1 və μ_2 E. ö.-ləri lokal kompakt G qrupunda λ Haar ölçüsünə görə mütləq kəsilməzdirsə (sağinvariant), onda $\mu_1 * \mu_2$ kompozisiyası da λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir və onun paylanması sıklıq funksiyası bütün λ – sanki $y \in G$ -lər üçün

$$f(y) = \int_G f_1(yx^{-1}) f_2(x) d\lambda(x)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada f_1 və f_2 – uyğun olaraq μ_1 və μ_2 ehtimal ölçülərinin sıklıq funksiyalarıdır.

Topoloji qrupda τ – hamar E. ö.-lərinin çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -də kompozisiya əməli – ölçülər fəzasının zəif topologiyasında kəsilməz əməldir. τ – hamar μ_1 və μ_2 ölçülərinin kompozisiyasının daşıyıcısı $S_{\mu_1 * \mu_2}$ – S_{μ_1} və S_{μ_2} daşıyıcılarının qrup hasilinin qapanmasıdır, yəni $S_{\mu_1 * \mu_2} = S_{\mu_1} S_{\mu_2}$. $\mathcal{M}^1(G)$ çoxluğu – vahidi δ_e olan topoloji semi – qrupdur, burada δ_e – G qrupunun vahidində cırlaşan paylanmasıdır.

Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası və $X_1, X_2: \Omega \rightarrow G$ ($G, \mathcal{B}$) – ölçülən qrupunda asılı olmayan təsadüfi elementlədirsə (və ya metrikləşə bilən G topoloji qrupunda asılı olmayan separabelqiymətli təsadüfi elementlədirsə), onda X_1, X_2 hasilinin paylanması $P_{X_1 X_2}$ – P_{X_1} və P_{X_2} paylanmalarının kompozisiyasıdır, yəni $P_{X_1 X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$.

E. ö. üçün ədəd oxunda və ya sonluölçülü Evklid fəzasında məlum nəticələrin məzmunlu ümumiləşməsi, əsasən, lokal kompakt qruplar və sonsuzölçülü Banax fəzaları üçün alınmışdır (hətta bəzi daha ümumi lokal qabanq fəzalar üçün də). Lokal kompakt qruplar halı üçün (kommutativ və qeyri – kommutativ) *sonsuz bölünən ehtimal paylanmaları, ehtimal ölçülərinin konvolusion semi – qrupları* öyrənilmişdir.

Ümumi qruplarda E. ö.-nə baxıldıqda topoloji vektor fəzalarında olmayan effektlər yaranır. Topoloji qrupların geniş sinfində idempotent ölçülərin, o cümlədən, Haar ölçülərinin varlığı ilə bağlı xüsusi misallar mövcuddur. Topoloji G qrupunda μ Radon E. ö. əgər $\mu = \mu * \mu$ şərtini ödəyirsə, o, *i d e m p o t e n t* ölçü adlanır. Əgər idempotent μ E. ö. üçün S_μ daşıyıcısı S_μ -də kompakt altqrupdursa və μ -nün S_μ -yə daralması S_μ kompakt qrupunun Haar ölçüsüdür.

Qruplarda idempotent ölçülərin araşdırılmasına gətirən tipik müddəə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin müxtəlif yığılma növlərinin ekvivalentliyi haqqında Levi teoreminin ümumiləşməsidir. G metrikləşə bilən topoloji qrup, (X_k) , – G -də separabelqiymətli asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcılığı və $S_n = X_1 \dots X_n$ olsun. S_n ardıcılığı G -də hər hansı S təsadüfi elementinə, yalnız və yalnız, S -ə ehtimalla görə yığıldığı halda sanki yəqin (vahid ehtimalla) yığılır, əgər P_S Radon paylanmasıdır və idempotent bölünənlərə malik deyildirsə, onda $S_n \rightarrow S$ yığılması $P_{S_n} \Rightarrow P_S$ zəif yığılmasına sanki yəqin ekvivalentdir. Əgər P_S -in idempotent böləni varsa, o,

onda sonuncu müddəə ödənmir. Aşağıdakı misalda bu aydın olur.

M i s a l. G metriklənə bilən kompakt, heç olmasa iki elementi olan qrup. $X_1, X_2, \dots$ G -də asılı olmayan ele təsadüfi elementlər ardıcılığıdır ki, X_1 -in paylanması Haar ölçüsüdür və

$\prod_{k=2}^{\infty} X_k$ sanki yəqin yığılmır. Onda $P_{S_n} = \lambda$, lakin S_n – sanki

yəqin yığılmır.

Əd. [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локальных компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [3] Parthasarathy K. R., Probability measure on metric spaces, N. Y., 1967.

EHİTİMAL PAYLANMALARININ ARİFMETİKASI

« вероятностных распределений арифметика; arithmetic of probability distributions » – ehtimal paylanmalarının konvolusion semi – qrupunda ayrılışları (faktorizasiyanı) öyrənən ehtimal nəzəriyyəsi bölməsidir.

E. p. a.-nın əsas teoremlərindən biri paylanmaların ayrılışı (faktorizasiyası) haqqında Xinqin teoremidir, I_0 sinfinin (bax, Sonsuz bölünən paylanma; a y r ı l ı ş) və ayrılmayan paylanmaların təsviri problemləri bu teoremlə bağlıdır.

E. p. a.-da araşdırılan digər istiqamətlər: müxtəlif siniflərdən (sonsuz bölünən, sonsuzluqda sürətlə azalan, sferik simmetrik; dekart hasilləri və s.) olan paylanmaların faktorizasiyasının öyrənilməsi; dəyişənşəreli ölçülərin kompozisiyası şəklində ifadə olunmalarının öyrənilməsi; Abel qruplarında ehtimal paylanmalarının arifmetikasının qurulması; kompozisiya əməlinin daha ümumiləşməsi (bax, Ümumiləşmiş stoxastik konvolusiya. Hiperqrup) əvəz olunması halında ümumiləşmiş və s. kimi məsələlərdir.

Əd. [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Л и в ш и ц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 12, М., 1975, с. 5–42; [3] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [4] Островский И. В., «Теория вероятностей и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30.

EHİTİMAL PAYLANMALARININ ARİFMETİKASI,

Abel qruplarında « вероятностных распределений арифметика на абелевых группах; arithmetics of probability distributions on Abelian group », təsadüfi kəmiyyətlərin ayrılışı nəzəriyyəsi, – asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi ξ -nin paylanması məlum olduğu halda ξ_1

və ξ_2 -nin mümkün olan paylanmalarını müəyyən etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsi bölməsidir. Təsadüfi kəmiyyətlərin aldığı qiymətlər həqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxundan olduğu halda, klassik nəzəriyyənin inkişafında H. Kramer (H. Cramér), P. Levi (P. Lévy), A. Ya. Xinqin, D. A. Raykov, Yu. V. Linnik, İ. V. Ostrovskiy, R. Kuppens (R. Cuppens), Q. R. Çistyakov (bax, [1], [2]) kimi alimlərin böyük xidmətləri olmuşdur. Klassik nəzəriyyədə bu məqsədlə xüsusi inkişaf etdirilmiş güclü analitik apparatdan istifadə edilmiş seçiyyəvidir. Bu onunla əlaqədardır ki, baxılan paylanmaların xarakteristik funksiyaların ən mühüm hallarda davam oluna bilinir (tam analitik funksiyaların kompleks müstəviyə davam olunması kimi). Təsadüfi kəmiyyətlər lokal kompakt Abel qruplarında qiymət aldıkları hallarda bu metodları, bir qayda olaraq, bilavasitə tətbiq etmək olmur, çünki xarakterlər qrupu – xarakteristik funksiyaların təyin olunma oblası – təbii

analitik struktura malik olmur. Bununla belə, qruplarda harmonik analizdən, Pontryaginın ikilik nəzəriyyəsindən və ayrılış məsələlərində kompleks analizdən istifadə edilməsi üçün xüsusi qaydalar E. p. a.-nın klassik əsas teoremlərinin qruplar üçün analoqlarını almağa imkan yaratmışdır.

G – lokal kompakt separabel Abel metrik qrupu, $\mathcal{M}^1(G)$, – G -də paylanmaların kompozisiyaya görə semi – qrupu olsun.

Əgər ele $\mu_2 \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanması varsa ki, $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanması $\mu = \mu_1 * \mu_2$ şəklində ifadə olunsun, onda $\mu_1 \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanması μ paylanmasının böləni adlanır. Cırılmayan μ paylanmasının cırılşan paylanmalar və μ -nün yerindəyişmələrindən başqa bölənləri yoxdursa, μ a y r ı l m a y a n paylanma adlanır.

Ayrılmayan paylanmaların, qeyri – trivial idempotent bölənləri olmayan $\delta \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanmalarının sinfi I_0 -la işarə olunur.

Həqiqi ədəd oxunda paylanmalar üçün A. Ya. Xinqin paylanmalar arifmetikasının əsas iki teoreminin qruplarda analoqlarını isbat etmişdir: 1) hər bir $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanması üç paylanmanın kompozisiyası kimi ifadə oluna bilər, yeni $\mu = m_K * \nu * \delta$, burada m_K , – μ -nün maksimal idempotent böləni, ν ayrılmayan paylanmaların sonlu və ya hesabı kompozisiyası, $\delta \in I_0$; 2) I_0 sinfinin paylanmaları sonsuz bölünən paylanmalardır (bax, [3]).

Kramer teoreminə əsasən, $\mathbb{R}^d$ -də ixtiyari Gauss paylanması yalnız Gauss paylanması olan bölənlərə malikdir, yeni bölən Gauss paylanması I_0 sinfindəndir. Digər tərəfdən, çevrə fırlanmalar qrupu T -də ixtiyari Gauss paylanmasının Gauss bölənləri olmayan bölənləri vardır. Ümumi halda, G qrupunda ixtiyari Gauss paylanmasının yalnız Gauss bölənlərinin olması üçün zəruri və kafi şərt – G qrupunun T qrupuna topoloji izomorf altqrupuna malik olmamasıdır. G qrupunda ixtiyari Gauss paylanmasının Gauss paylanması olmayan bölənlərinin olması üçün G qrupunun T -yə topoloji izomorf olması zəruri və kafidir. Bu nəticələrə, müəyyən mənada, qrupların ehtimali xarakteristikası kimi baxmaq olar (qrupların baxılan sinfində).

γ , – G qrupunda Gauss paylanması, onun daşıyıcısı $\sigma(\gamma)$, – sonlu dim. – ölçülü əlaqələndirici altqrup olsun. Onda γ paylanmasının yalnız Gauss bölənlərinin olması, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, γ sonluölçülü xətti fəzada Gauss paylanmasının kəsilməz monomorf obrazı olsun (bax, [4]).

Raykov teoreminə əsasən $\mathbb{R}$ -də Puasson paylanması π -nin yalnız Puasson bölənləri vardır, yeni $\pi \in I_0$. Qruplarda bu hal, ümumiyyətlə, belə olmur. $x \in G$ nöqtəsində toplanmış ölçü ilə doğrulmuş Puasson paylanmasının yalnız Puasson bölənlərinin olması üçün zəruri və kafi şərt x elementinin ya sonsuz tertibdən olması, ya da 2-ci tertib element olmasıdır (bax, [5]).

Həqiqi ədəd oxunda Gauss və Puasson paylanmalarının kompozisiyası da I_0 sinfindəndir. Qrupda, ümumiyyətlə, I_0 sinfinə aid olmayan həm Gauss, həm də Puasson paylanmaları mövcud olduğundan, onların kompozisiyalarının I_0 sinfinə aid olması üçün kompozisiyalardan hər birinin vuruqlarının I_0 sinfindən olması zəruridir. Qrupların geniş sinfi üçün bu zəruri şərt, həm də kafi şərtədir. π – Puasson paylanması, γ , – G qrupunda Gauss

paylanması, γ paylanmasının daşıyıcısı $\sigma(\gamma)$ sonlu dim. – ölçü-lü əlaqələndirici altqrup olsun; əgər $\pi, \gamma \in I_0$ olarsa, $\pi * \gamma \in I_0$ (bax, [4]).

Ümumiləşmiş Puasson prosesi üçün $\mu = e(F)$ paylanma-sının I_0 sinfinə aid olması şərtləri F ölçüsünün xassələrindən asılıdır. F -in diskret ölçü olduğu fərz olunur. Həqiqi ədəd oxunda iki Puasson paylanmasının kompozisiyası I_0 sinfinə aid-dir. Qruplar üçün bu nəticənin analoqu aşağıdakı kimi ifadə olu-nur. Daşıyıcısı $\sigma(F) = \{x_1, x_2\}$ olan, G qrupunda ümumiləş-miş Puasson paylanması $\mu = e(F)$ -in I_0 sinfinə aid olması üçün ya hər iki x_1 və x_2 elementlərinin sonsuz tərtibdən ol-ması, ya da ki, elementlərdən birinin sonsuz tərtibdən, ikincisinin isə 2-ci tərtibdən olması zəruri və kifədir. Əgər F ölçüsü G -də ele ölçüdürsə ki, onun daşıyıcısı $\sigma(F) \subset \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ isə asılı olmayan çoxluqdursa, onda $\mu = e(F) \in I_0$ olur (bax, [6]), burada $2x_0 = 0$. Əgər ixtiyari $A \subset G$ Bo-rel çoxluğunun altçoxluğu $\{x_i\}_{i=1}^n$ üçün $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n = 0$ (k_i tam ədədlərdir) bərabərliyindən $k_1 = \dots = k_n = 0$ olduğu alınarsa, A asılı olmayan çoxluq adlanır.

F ölçüsü diskret olmadığı halda, əgər F ölçüsü G qrupunda sonludursa və F^{*n} və F^{*m} konvolusiyaları ixtiyari $n \neq m$ qi-yimlərinde cüt-cüt sinqulyar deyildirlərsə, onda $\mu = e(F) \in I_0$. Qüvvət üstü cüt-cüt sinqulyar konvolusiyalara malik ölçüyə misal – nöqtələrdən ibarət asılı olmayan çoxluqda toplanmış ixtiyari sonlu ölçüdür.

$\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ paylanmasının I_0 sinfindən olmamasının ümumi şərti aşağıdakı kimi ifadə olunur. Əgər G 2 modulu üzrə çıxıqlar qrupuna izomorf olmayan kompakt qrupdursa, $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ və μ paylanmaları $\mu(E) \geq \alpha m_G(E)$, $0 < \alpha < 1$ şərtini ixtiyari Borel çoxluğu E üçün ödəyirlərsə, onda $\mu \in I$ (m_G – G -də Haar paylanmasıdır).

Linnik teoreminə əsasən, əgər γ – $\mathbb{R}$ -də cırlaşmayan Gauss paylanmasıdır, F isə sonlu ölçüdürsə və $\gamma * e(F) \in I_0$ olarsa, onda F ölçüsü diskretdir, onun daşıyıcısı $\sigma(F)$ isə arifmetik xarakterli xüsusi şərtləri ödəyir. Qruplar halında bu teoremin hətta zəif bir analoqu belə yoxdur.

G qrupunun T -yə topoloji izomorf olmayan, qeyri – trivial sıfır komponentinə malik olduğu, G qrupunun özünün isə $\mathbb{R} + D$ şəkilli qrupa topoloji izomorf olmadığı fərz olunur, burada D – diskret qrupdur. Onda G -də ele Gauss paylanması γ və kəsilməz sonlu F ölçüsü vardır ki, $\gamma * e(F) \in I_0$. Əgər bu zaman sıfır komponenti sonlu dim. – ölçüyə malikdirsə, onda ixtiyari $\gamma \in I_0$ Gauss paylanması üçün belə kəsilməz sonlu ölçü vardır.

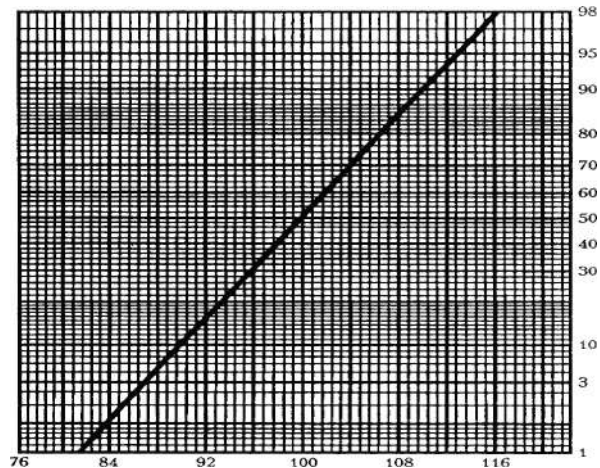
I_0 sinfi həqiqi oxda bütün sonsuz bölünən paylanmalar sinfin-də zəif topologiyada sıxdır və bu sinifdə bazisdir, lakin bu o anlamdadır ki, ixtiyari sonsuz bölünən paylanma I_0 sinfindən olan paylanmaların sonlu və ya sonsuz kompozisiyaları kimi ifadə oluna bilər. Aşağıda bu nəticələrin doğru olduğu qruplar təsvir olunmuşdur: 1) I_0 sinfinin bütün sonsuz bölünən paylanmalar

sinfində zəif topologiyada sıx olması üçün ya G qrupunun diskret olması, ya da 2 modulu üzrə çıxıqlar qrupunda izomorf olması zəruri və kifədir, 2) G qrupunda ixtiyari sonsuz bölünən paylanmanın I_0 sinfindən olan paylanmaların sonlu və ya sonsuz kompozisiyası şəklində ifadə olunması üçün G qrupunun $\mathbb{R}^n + D$ tipli qrupa topoloji izomorf olması zəruri və kifədir, D – $p > 2$ olduqda sonlu p tərtib elementləri olmayan diskret qrupdur.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Островский И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30; [3] Парасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 115–46; [4] Feldman G. M., Gruylov A. E., «J. Multiv. Anal.», 1983, v. 13, № 1, p. 148–66; [5] Рухин А. Л., «Лит. матем. сб.», 1970, т. 10, № 3, с. 537–43; [6] Фельдман Г. М., Арифметика вероятностных распределений и характеристические задачи на абелевых группах, Киев, 1990.

EHTİMAL PAYLANMASI « вероятности рас-пределение; probability distribution » – bax, *Paylan-ma(s)* ehtimalın.

EHTİMAL VƏRƏQİ normal « вероятностная бумага нормальная; normal probability paper » – xüsusi qayda ilə qraflanmış vərəq ele qurulmuşdur ki, *normal paylanma funksiyasının* qrafiki onun üzərində düzxətt kimi



Çekilmiş düzxətt – orta qiyməti 100-ə standart yayınması 8-ə bərabər olan normal paylanma funksiyasının qrafikidir.

təsvir olunur. Bu təsvir şaquli oxda şkalının dəyişməsi nəticəsində alınır (şəkil). Empirik paylanma funksiyasının normal paylanmalar ailəsindən olması hipotezinin yoxlanılması üçün sadə qayda normal paylanma funksiyasının qrafikinə «düz xətt» kimi təsvir olunması xassəsinə əsaslanır: əgər ehtimal vərəqində qurulmuş empirik paylanma funksiyasının qrafiki düzxətdən çox az fərqlənirsə, onda araşdırılan paylanmanın təqribən normal paylanma olduğunu fərz etmək olar.

Bu metodun üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, araşdırılan paylanmanın normal paylanmalar ailəsinə mənsubluğunu hipotetik paylanmanın parametrlərinin ədədi qiymətlərini bilmədən də müəyyən etmək olar.

Əd.: [1] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [2] Dixon W. J., Massey F. J., Introduction statistical analysis, N. Y. – Toronto – L., 1951.

EHİMALİ, SƏHV TƏSNİFİN « вероятность ошибочной классификации; probability of misclassification » – *diskriminant analizdə* təsnif qaydalının keyfiyyətini xarakterizə edən əsas göstəricilərdən biridir. X obyektini $D_1, \dots, D_k$ siniflərindən birinə aid edən təsnif qaydası S -in verildiyi fərz olunur: əgər $\max(d_1(X), \dots, d_k(X)) = d_j(X)$ olarsa, $S: X \in D_j$, burada $d_j(X)$, – j -ci sinfe uyğun diskriminant funksiyasıdır. Onda i -ci D_i sinfindən olan obyektin j -ci D_j sinfinə S . t. e.

$$P\{i|j\} = \int_{R_{ij}} p_i(X) dX$$

ifadəsile təyin olunur, burada $p_i(X)$, – i -ci sinif üçün X -in paylanma sıxlığı, $R_{ij} = \{X: \max(d_1(X), \dots, d_k(X)) = d_j(X)\}$.

Praktikada $p_i(X)$ paylanma sıxlıqları, adətən, məlum olmadıqlarından $P\{i|j\}$ kəmiyyətləri üçün aşağıdakı statistik qiymətlərdən istifadə olunur:

a) *öyrədici seçim* elementlərinə, yeni diskriminant funksiyaların özlerinin qiymətləndirildiyi müşahidələr üzrə, təsnif qaydalarını tətbiq etdikdə alınan, uyğun səhv aidolunmaların tezliyi üzrə $\hat{P}\{i|j\}$ statistik qiymətindən; bu, – S . t. e.-nin azalmaya meyilli statistik qiyməti olacaqdır;

b) sınaq seçimində səhv aidolunmalar tezliyi üzrə $\hat{P}\{i|j\}$ statistik qiymətindən; bu statistik qiymət – S . t. e. üçün meylsiz statistik qiymət olur.

Bundan başqa, S . t. e.-nin meylsiz statistik qiymətini sürüşən sınaq (imtahan) prosedurundan istifadə etməklə də almaq olar. Əgər paylanma sıxlıqları $p_i(X)$ çoxölçülü normal paylanma sıxlıqları olarsa, S . t. e.-nin parametrik meylsiz statistik qiyməti vardır (bax, *Mahalanobis məsafəsi*).

EHİMALİ AVTOMAT « вероятностный автомат; probabilistic automation », təsadüfi avtomat – hər bir taktidə işləmə qaydası yalnız bu taktidəki yaddaşın vəziyyətindən asılı olan və statistik olaraq təsvir olunan, taktiklər üzrə yaddaşlı informasiyanı başqa şəkildə salan diskret stasionar avtomatdır. E . a. ixtiyari (boş olmayan) giriş əlifbası X , çıxış əlifbası Y və vəziyyətlər əlifbası Z -lə: $Z \times Y$ – ölçülən fəzası, $\mu(\cdot|z, x)$, $z \in Z$, $x \in X$ ehtimal ölçüsü ilə verilir. Bu obyektlər toplusu E . a.-nin işləmə qaydasını təyin edir. Belə ki, ixtiyari $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ giriş sözünə uyğun olaraq, $\bar{z} = (z_0, \dots, z_n)$ və $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ (çıxış sözü) təsadüfi vektorları ehtimalla qarşı qoyulur ki, ölçülən $A \subset Z$ çoxluqları üçün

$$P\{z_0 \in A\} = \mu_0(A) \text{ və}$$

$$P\{(z_n, y_n) \in A | z_0, \dots, z_{n-1}, x_1, \dots, x_n\} = \mu(A|z_{n-1}, x_n), \quad n \geq 1$$

bərabərliyi ölçülən $A \subset Z \times Y$ olan A -lar üçün 1 ehtimalla ödənilsin. x_i, z_i, y_i kəmiyyətləri uyğun olaraq i anında (i -ci taktidə) giriş signalı, avtomatın vəziyyəti, çıxış signalları adlanır. X, Y, Z sonlu çoxluqları ilə verilən E . a. – sonlu E . a.; $X \times Y \times Z$ hesabı çoxluğu ilə

verilən E . a. – hesabı E . a. adlanır. Sonlu və hesabı E . a.-ları

$$\mu_0(i) = P\{z_0 = i\}$$

və

$$\mu(a', j|a, i) = P\{z_n = a', y_n = j | z_{n-1} = a, x_n = i\}$$

paylanmaları ilə verilir.

X birtəqəvi çoxluq olarsa, E . a. avtonom E . a. adlanır. Avtonom E . a. nəzəriyyəsi Markov zəncirləri çərçivəsinə aşıdır. Adətən, vəziyyətlərinin əlifbasını dəyişdirməklə nəzəri məsələlərin həllində E . a. çıxışsız E . a.-na gətirilir, bu E . a. üçün isə y_n -lər təyin olunmur, $\mu(\cdot|z, x)$ ölçüləri ölçülən Z fəzasında verilir. Çıxışsız avtonom E . a.-nın vəziyyətləri bircins Markov zənciri əmələ gətirir.

E . a. anlayışı yaddaşlı informasiya kanalı anlayışına ekvivalentdir. E . a. nəzəriyyəsində avtomatlar nəzəriyyəsinin əsas məsələlərinə analoji bir çox məsələlər həll olunur.

E . a.-nın cəbri nəzəriyyəsi də işlənmişdir (bax, [1]).

E . a. nəzəriyyəsi etibarsız elementlərdən ibarət etibarlı qurğuların sintezinə və əksinə, təsadüfi təbii qurğuların sintezinə də xidmət edir.

Əd.: [1] Б у к а р а е в Р. Г., Вероятностные автоматы, Казань, 1970; [2] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 432–63; [3] Ра б и н М. О., «Inform. and Control», 1963, v. 6, № 3, p. 230–45; [4] Ба к а е в А. А., К о с т и н а Н. И., Я р о в и ц к и й Н. В., Имитационные модели в экономике, К., 1978; [5] Л о р е н ц А. А., Синтез надежных вероятностных автоматов, Рига, 1975.

EHİMALİ BOREL ÖLÇÜSÜ « вероятностная борелевская мера; probability Borel measure » – bax, *Borel ölçüsü*.

EHİMALİ DOĞURAN FUNKSIYA « вероятностная производящая функция; probability generating function » – bax, *Doğuran funksiya*.

EHİMALİ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « вероятностная теория чисел; probabilistic number theory » – ədədlər nəzəriyyəsinin geniş mənada ələ bölməsidir ki, bu bölmədə ehtimal nəzəriyyəsinin ideya və metodları istifadə olunur (bax, *Ehtimal metodları ədədlər nəzəriyyəsində*).

Dar mənada E . a. n. arifmetik funksiyaların, yeni natural ədədlər çoxluğu $\mathbb{N}$ -də və ya onun ümumiləşmələrində verilmiş funksiyaların qiymətlərinin paylanması statistik nəzəriyyəsi anlaşılır. Bu nəzəriyyənin araşdırdığı obyektin nəzəri – ədədi olmasına baxmayaraq, E . a. n.-ni nəticələrinin ifadə olunması metodları və mülahizələrinə görə, ələ ehtimal nəzəriyyəsi sahəsinə də aid etmək olar.

Arifmetik funksiyaların əksəriyyəti additiv və ya multiplikativ funksiyalardır (yeni bunlar üçün $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ və $g(m_1 m_2) = g(m_1) \cdot g(m_2)$ xassələri ödənilir).

$$m = \prod_{p^\alpha || m} p^\alpha \in \mathbb{N}$$

argumenti üçün (burada p – sadə ədəd, α – natural ədəddir və $p^\alpha || m$ simvolu onu ifadə edir ki, p^α ədədi m -i bölür, lakin $p^{\alpha+1}$ isə m -i bölmür) $f(m)$ additiv arifmetik

funksiyası və $g(m)$ multiplikativ arifmetik funksiya uyğun olaraq, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$f(m) = \sum_{p^{\alpha} \parallel m} f(p^{\alpha})$$

ve

$$g(m) = \prod_{p^{\alpha} \parallel m} g(p^{\alpha}).$$

Hətta m natural ədədlər ardıcılığında ardıcıl qiymətlər aldıqda belə, $f(p^{\alpha})$ və ya $g(p^{\alpha})$ -nin ən sadə seçilməsinə baxmayaraq, $f(m)$ və $g(m)$ -in qiymətləri olduqca xaosik menzərə ilə ifadə olunur. Məs., heqiqi additiv arifmetik funksiyalar sinfində yalnız $a \ln m$ funksiyaları (a sabitdir) monotondurlar. Heqiqi arifmetik $h(m)$ funksiyalarının qiymətlərinin paylanması araşdırılan klassik tədqiqatlarda, adətən, ya funksiyanın özü və ya onun orta qiyməti araşdırılır. Birinci halda ele daha sadə $\Psi_1(m)$ və $\Psi_2(m)$ funksiyaları axtarılır ki, ya bütün m -lər üçün və ya da heç olmasa m ədədlərinin sonsuz çoxluğu üçün bunlar $\Psi_1(m) \leq h(m) \leq \Psi_2(m)$ münasibətini ödəsinlər. Məs., əgər $\omega(m) = \sum_{p|m} 1$, - m ədədinin bütün müxtəlif sadə bölenlərinin

sayıdırsa, onda $m > 1$ olan bütün m -lər üçün $\omega(m) \geq 1$, $m \geq m_0$ olduqda isə $\omega(m) \leq 2(\ln \ln m)^{-1} \ln m$,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \omega(m) = 1 \text{ və } \limsup_{m \rightarrow \infty} \omega(m)(\ln m)^{-1} \ln \ln m = 1$$

olur.

İkinci halda

$$E_n(h) = n^{-1} \sum_{m=1}^n h(m)$$

kemiyyəti araşdırılır. Bu misalda $E_n(\omega) = (1 + o(1)) \ln \ln n$ olur. (burada və daha sonra $n \rightarrow \infty$ limit keçidi işarələməsi qeyd olunmur). Ümumi halda, hər iki məsələnin həlli, $h(m)$ haqqında, onun dəyişiklikləri haqqında çox informasiya almağa xidmət edə bilmir, böyük yayınmalara da olduqca nadir hallarda rast gəlinir. Məsələ – arqumentin qiymətlərinin əksəriyyəti üçün $h(m)$ funksiyanın qiymətlərinin dəyişdiyi sərhədlərin tapılması məsələsilə əvəz olunur. Belə məsələ ehtimal terminologiyasında ifadə olunur.

$\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{A}_n$, - Ω_n -nin bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş cəbr, $\mathbf{P}_n$, - Ω_n -də müntəzəm ölçü olsun $\{ \mathbf{P}_n \dots \}$, - $m \leq n$ natural ədədlərinin ele tezliyidir ki, bu ədədlər mötəri-zədəki nöqtələr əvəzinə yazılmış şərtləri ödəsin $\{ \Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n \}$ ehtimal fəzasında $h(m)$, $m \leq n$ funksiyası təsadüfi kemiyyət, $E_n(h)$ - bu təsadüfi kemiyyətin riyazi gözləməsi olur.

$$\mathbf{P}_n \{ |h(m) - C_n| > D_n \} = o(1)$$

münasibətini ödəyən C_n və D_n ardıcılıqlarının təyin olunması böyük ədədlərin ehtimali qanununa uyğun olur. Bu, $f(m)$ additiv arifmetik funksiyalar olduğu hal üçün aşağıda şərh olunur.

220 EHTİMALI

$$A_n = \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p}, \quad B_n^2 = \sum_{p^{\alpha} \leq n} \frac{f^2(p^{\alpha})}{p^{\alpha}},$$

$$\sup_f \frac{1}{n B_n^2} \sum_{m=1}^n (f(m) - A_n)^2 = \kappa_n$$

olsun. Onda

$$|\kappa_n - 3/2| \leq C \ln^{-1} n, \quad (1)$$

burada C - mütləq konstantdır.

Deməli, ele n_0 mütləq sabiti vardır ki, $n \geq n_0$ olduqda ixtiyari additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üçün, ixtiyari $t > 0$ və $2nt^{-2}$ -dən çox olmayan sayda ədədlərdən başqa bütün $m \leq n$ qiymətlərində

$$|f(m) - A_n| < t B_n$$

berəbersizliyi doğrudur.

Xüsusi halda, əgər t böyük ədəd olarsa, onda $m \leq n$ arqumentlərinin çoxu üçün

$$|\omega(m) - \ln \ln n| < t \sqrt{\ln \ln n}$$

berəbersizliyi ödənilir. Bu müddəa bir qədər zəif formada 1917-də Q. Hardi (G. Hardy) və S. Ramanujan (S. Ramanujan) tərəfindən isbat olunmuşdur. Böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər 1979-da tapılmışdır. $f_n(m)$ additiv arifmetik funksiyalar ardıcılığı, bəzi C_n sabitləri və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}_n \{ |f_n(m) - C_n| \geq \varepsilon \} = o(1)$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, hər hansı $\lambda_n = o(1)$ ardıcılığı üçün

$$\sum_{p^{\alpha} \leq n} \frac{\min \{ 1, (f_n(p^{\alpha}) - \lambda_n \ln p^{\alpha})^2 \}}{p^{\alpha}} = o(1) \quad (2)$$

berəberliyi ödənilsin.

Verilmiş n qiymətində $p \leq n$, $1 \leq m \leq n$ olduqda, $f_n^{(p)}(m)$ təsadüfi kemiyyətlərini aşağıdakı kimi təyin etmək olar: $f_n^{(p)}(1) = 0$ və əgər $p^{\alpha} \parallel m$ olarsa, $f_n^{(p)}(m) = f(p^{\alpha})$ olduğu fərz edilməlidir, yeni $f_n^{(p)}(m) = f(p^{\alpha})$ berəberliyi

$$n^{-1}([n/p^{\alpha}] - [n/p^{\alpha+1}]) \sim p^{-\alpha}(1 - p^{-1})$$

ehtimalı ilə ödənilir. Onda

$$f(m) = \sum_{p \leq n} f_n^{(p)}(m)$$

olur, lakin (1) berəbersizliyindən aydındır ki, $f_n^{(p)}(m)$ təsadüfi kemiyyətləri asılıdır (əks halda (1)-də $3/2$ əvəzinə vahid olardı). Bununla belə, hər hansı ehtimal fəzasında verilmiş asılı olmayan X_p təsadüfi kemiyyətlərinin cəmi $S_n = \sum_{p \leq n} X_p$ ilə

X_p -lərin müəyyən bir paralelizmi müşahidə olunur, belə ki,

$$P\{X_p = f(p^\alpha)\} = p^{-\alpha}(1-p^{-1}), \quad \alpha \geq 0.$$

XX əsrin 70-ci illərində aydın olmuşdu ki, additiv arifmetik $f(m)$ funksiyasının özü deyil, $f(m) - \lambda \ln m$ fərqi λ -nın uyğun bir surətdə seçilməsilə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi ilə daha yaxşı aproksimə olunur. Bu (2) şərtində də əks olunur.

Həqiqi arifmetik $h(m)$ funksiyalarının qiymətlərinin paylanmalarının daha dəqiq xarakterizasiyası üçün $P_n\{h(m) \in E\}$ ehtimallarının asimptotik qiymətlərini hesablamaq lazımdır; E – ixtiyari Borel çoxluğudur. Asimptotik qanunlar arasında ən maraqlıları – integral və lokal tipli qanunlardır.

Integral qanunlar. C_n və D_n -in müəyyən qiymətlərində

$$F_n(C_n + D_n x) = P_n\{h(m) < C_n + D_n x\}$$

paylanma funksiyasının asimptotikası araşdırılır.

a) additiv arifmetik funksiyaların $h(m) = f(m)$ olduğu halda $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyasının hər hansı $F(x)$ paylanma funksiyasına onun bütün kəsilməzlik nöqtələrində yığılma şərtləri axtarılır (zeif yığılma). Bu halda məlum olur ki, əgər $F(x)$ cırılşmayan paylanma olarsa, onda D_n hökmən ya 0-dan fərqli və ya sonsuz limitə yığılır.

Limit sonlu olduğu halda $F_n(C_n + x)$ funksiyasını araşdırmaqla kifayətlənmək olar. Xüsusi halda, $C_n = 0$ olduqda 1939-da P. Erdős (P. Erdos) və A. Vintner (A. Wintner) üç sıra haqqında nəzəri – ehtimali teoremin analoqunu almışlar:

$F_n(x)$ paylanma funksiyasının limit funksiyası, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki,

$$\sum_{|f(p)| \geq 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| < 1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| < 1} \frac{f^2(p)}{p} \quad (3)$$

sıraları yığılsınlar,

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty \quad (4)$$

olarsa, limit qanunu diskret, əks halda kəsilməz qanundur.

C_n ixtiyari olduğu halda, XX əsrin 70-ci illərində, $F_n(C_n + x)$ -in yığılması araşdırılmışdır. $D_n \rightarrow \infty$ halı tamamilə araşdırılmamışdır. $C_n = A_n$, $D_n = B_n$ olduqda nəticələr ən sadə şəkildə ifadə olunur.

Əgər hər bir qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ üçün

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha \leq n, \\ |f(p^\alpha)| > \varepsilon B_n}} \frac{f^0(p^\alpha)}{p^\alpha} \rightarrow 0 \quad (5)$$

(Lindeberq şərtinə analoq; bax, Lindeberq – Feller teoremi) olarsa, onda

$$F_n(A_n + B_n x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x) \quad (6)$$

münasibəti doğrudur.

Əgər (5) ödənilsə, onda B_n Karamata məna $\ln n$ -in asta dəyişən funksiyası olur. Bundan əlavə, əgər B_n belə funksiya

olarsa, onda (6) münasibətinin doğruluğu üçün (5) zəruri şərt olur.

Güclü additiv arifmetik funksiya üçün [yeni f funksiyası üçün ki, ixtiyari $\alpha \geq 1$ qiymətində $f(p^\alpha) = f(p)$ olsun] (6) münasibəti $|f(p)| \leq 1$ şərti ilə R. Erdős və M. Kas (M. Kac) tərəfindən isbat olunmuşdur. $f^p(m)$ toplananlarının asılılığı çox vaxt yeni nəticələrin alınmasına səbəb olur: məs., $B_n \sim \sqrt{\ln n}$ olan f additiv arifmetik funksiyalar vardır ki, bunlar üçün (6) münasibəti ödənilir, lakin (5) şərti ödənilmir.

B_n , $-\ln n$ -in asta dəyişən funksiyası olsun. $F_n(A_n + B_n x)$ funksiyasının dispersiyası 1-ə bərabər limit paylanmasına yığılması üçün $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = 1$ şərtlərini ödəyən f bir azalmayan $V(u)$ funksiyasının varlığı zəruri və kafidir ki, ola bilər ki, $u = 0$ qiymətindən başqa, bütün u -lar üçün

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha \leq n, \\ f(p^\alpha) < u B_n}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \rightarrow V(u)$$

münasibəti ödənilsin.

Limit paylanmasının varlığı halında ona uyğun xarakteristik funksiya

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) u^{-2} dV(u) \right)$$

düsturu ilə təyin olunur.

M i s a l.

$$P_n \left\{ \sum_{p|n} \ln p < x \ln n \right\}, \quad \rho > 0, \quad \rho \neq 1$$

paylanma funksiyaları xarakteristik funksiyası

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{1+i\infty} \left(\frac{e^z}{z} \exp \left(\int_0^1 \frac{e^{izu} - 1}{u} e^{-uz} du \right) \right) dz$$

olan, sonsuz bölünən paylanma olmayan qanuna yığılır. Məlumdur ki, $F_n(C_n + D_n x)$ üçün cırılşmayan limit paylanması mövcud olarsa, $D_n \rightarrow \infty$ olduqda, $D_n = O(\ln^d n)$ statistik qiyməti doğrudur, $A > 0$ hər hansı sabitdir, limit qanunu isə bu halda ya mütləq kəsilməz və ya sinqulyar olur.

Limit qanununa yığılma sürəti də araşdırılmışdır. Məs., sıfıra bərabər olmayan güclü additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üçün

$$\max_{p \leq n} |f(p)| B_n^{-1} = \mu_n = o(1)$$

şərtile

$$F_n(A_n + B_n x) = \Phi(x) + O(\mu_n)$$

bərabərliyi doğrudur. $\omega(n)$ funksiyası üçün bu növ yaxşılaşmayan ilk statistik qiymət A. Renyi (A. Rényi) və P. Turan (P. Turán) tərəfindən alınmışdır. Additiv arifmetik funksiyaların bəzi

sinifləri üçün asimptotik ayrılışlar və böyük yayınmalar üçün teoremlər almaq mümkündür. Əgər $x = o(\sqrt{\ln \ln n})$ olarsa, $\omega(m)$

funksiyası üçün $x \leq 0$ olduqda $F_n(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n})$, $x > 0$ olduqda isə $1 - F_n(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n})$ funksiyaları

$$e^{K_n(x)} \Phi(-|x|) \left(1 + O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{\ln \ln n}}\right) \right)$$

ifadəsinə bərabər olurlar, burada qiymətləndirmə x -ə görə mün-təzəmdir,

$$K_n(x) = \frac{x^2}{2} + (\xi - (1 + \xi) \ln(1 + \xi)) \ln \ln n, \\ \xi = x(\ln \ln n)^{-1/2}.$$

b) multiplikativ arifmetik $g(m)$ funksiyaları üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin vurulma nəzəriyyəsi ilə analoji olaraq digər normalama da mümkündür.

$$G_n(x) = \mathbf{P}_n\{|C_n g(m)|^{1/D_n} \operatorname{sgn} g(m) < x\}$$

ardıcılığının $F(x)$ -ə zəif yığılması $G_n(\pm 0)$ -in $F(\pm 0)$ -a yığılması ilə birgə araşdırılır. Bu məsələ additiv arifmetik funksiyaların paylanması ilə əlaqəlidir. Əgər

$$\sum_{g(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty$$

şərti ödənilməzsə, onda $G_n(x)$ funksiyası $x=0$ nöqtəsində cırılmaşan paylanmaya yığılır. Əks halda yığılma, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, $\mathbf{P}\{\ln|g^*(m)| < \ln|C_n| + xD_n\}$ zəif yığılsın. Burada $g^*(m)$, $-g(m)$ -dən $g(p^\alpha) = 0$, 1-lə əvəz edildikdə alınan multiplikativ arifmetik funksiyadır. Multiplikativ arifmetik funksiyalar üçün limit qanunlarına yığılma tezliyi, asimptotik ayrılışlar, böyük yayınmalar, çoxölçülü limit teoremləri də araşdırılır.

Lokal teoremlər. Arifmetik $h(m)$ funksiyaları və onun qiymətləri çoxluğundan olan a ədədləri üçün $\mathbf{P}_n\{h(m) = a\}$ ehtimallarının yığılması araşdırılır. Tamqiymətli additiv arifmetik $f(m)$ funksiyaları üçün lokal teoremlər müxtəlif paylanmalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün uyğun teoremlərlə olduqca oxşardır. Məs., $\mathbb{Z}$ -də toplanmış hər hansı $p(k)$ paylanması üçün

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbf{P}_n\{f(m) = k\} - p(k)| = o(1)$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, (4) şərti ödənilsin və bu halda $p(k)$ ehtimalları

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) e^{ik} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\exp(itf(p^\alpha))}{p^\alpha}$$

eyniliyindən təyin etmək olar. $\mathbf{P}_n\{f(m) = k\}$ ehtimallarının standart normal paylanmanın $\Phi'(x)$ sıxlıq funksiyasının qiymətləri ilə aproksimasiyası üçün arifmetik şərtlər zəruridir. Məs., əgər

222 EHTİMALI

$$\sum_{f(p)=k} \frac{1}{p} = \infty$$

şərtini təmin edən k -lar üçün d ən böyük ortaq böləndirsə, onda $|f(p)| \leq K$ və $B_n \rightarrow \infty$ şərtlərini ödəyən güclü additiv arifmetik $f(m)$ funksiyaları üçün

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| B_n \mathbf{P}_n\{f(m) = k\} - \Phi\left(\frac{k - A_n}{B_n}\right) \right| = o(1) \quad (7)$$

qiyməti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $d=1$ və ya $d=2$ və $f(2)$ tək ədəd olsun.

Olduqca ümumi şərtlərlə, sadə ədədlərdə lokal münasibətlər

$$\left(\sum_{p \leq n} 1 \right)^{-1} \sum_{\substack{p \leq n, \\ f(p)=k}} 1 = \lambda_k + r_k(n)$$

(7) müddəasını verir, burada $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k = 1$ və

$\sum_k |r_k(n)| \rightarrow 0$ yığılması isə olduqca sürətli olur.

Yığılma sürəti araşdırılmışdır. Asimptotik ayrılışlar və böyük yayınmalar üçün lokal teoremlər alınmışdır. $k = \ln \ln n + o(\ln \ln n)$ olduqda $\omega(m)$ üçün

$$\mathbf{P}_n\{\omega(m) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \ln n \ln n}} \left(\frac{e \ln \ln n}{k} \right)^k (1 + o(1))$$

olur. k böyük yayınmalar zonasından kənarda qiymətlər aldıqda $\mathbf{P}_n\{\omega(m) = k\}$ üçün asimptotik qiymətlər də məlumdur.

Gücləndirilmiş yığılma. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının 1 ehtimalla yığılmasına analoji yığılmalarda spesifik vəziyyətlər yaranır: məsələlər $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ ehtimal fəzaları ardıcılığı terminologiyasında ifadə olunur, belə ki, $A \in \mathbb{N}$ çoxluğunun asimptotik sıxlığı adlanan $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n\{m \in A\}$, $A \in \mathbb{N}$

limiti həmişə mövcud olmur. Bundan başqa, asimptotik sıxlıq funksiyası ehtimalın kesilməzlik aksiomunu ödəmir. Lakin $h_k(m)$ ardıcılığının $h(m)$ -ə gücləndirilmiş yığılmasını, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n\left\{ \max_{x \leq k \leq n} |h_k(m) - h(m)| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

münasibəti şəklində ifadə etmək olar. Onda belə yığılma

$$h_k(m) \xrightarrow{\mathbf{P}_n} h(m) \text{ kimi işarə olunur.}$$

Məs.,

$$f_k(m) = \sum_{p^\alpha | m, p \leq k} f(p^\alpha)$$

olsun. $f_k(m) \xrightarrow{\mathbf{P}_n} f(m)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, (3) sıraları yığılsın (üç sıra haqqında teoremin digər forması). Additiv arifmetik funksiyaların ayrı-ayrı sinifləri üçün təkrar loqarifm qanununa analoji qanunlar öyrənilmişdir.

Funksional limit teoremləri. Kəsik additiv arifmetik funksiyaların qiymətləri üzrə ya sınıq xətlər və ya pilləvari funksiyalar

qurulur və belə arifmetik proseslərə (bax. *Arifmetik modelleşdirilmə*(si) təsadüfi proseslərin) uyğun $C_{[0,1]}$ və ya $D_{[0,1]}$ fəzalarında ölçülərin yığılması araşdırılır. Məs., additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üzrə aşağıdakı model qurulur. $B_n \rightarrow \infty$ olduqda

$$y_n(t) = \max\{z; B_z^2 \leq t B_n^2\}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$W_n(m, t) = B_n^{-1}(f_{y_n(t)}(m) - A_{y_n(t)})$$

olduğu fərz olunur. $D_{[0,1]}$ fəzasının Borel çoxluqları σ – cəbri $\mathcal{B}$ -də

$$P_n(B) = P_n\{W_n(m, t) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}$$

ölçüsü təyin olunur. P_n ölçüləri ardıcılığının asılı olmayan artımları müəyyən bir prosese uyğun ölçüyə zəif yığılması tamamilə araşdırılmışdır. Xüsusi halda, P_n standart Viner ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, (5) şərti ödənilsin. Arifmetik proseslərin Braun hərəkətinə yığılma sürəti öyrənilmişdir.

Müxtəlif ümumiləşmələr. $f_1(m + a_1) + \dots + f_s(m + a_s)$ funksiyalarının paylanması araşdırılır, burada $f_i(m)$ – additiv arifmetik funksiyalar, a_i – tam mənfi olmayan ədədlərdir, $1 \leq i \leq s$. a_i -lər n -dən asılı olduğu halda arqumentlərin yerindəyişmələrinin təsiri olduqca mühüm olur. $f_1(m + a_1) + \dots + f_s(m + a_s)$ funksiyalarının qiymətlərinin birgə paylanması, həmçinin $f(P(m))$, $f(P(p_m))$ paylanması araşdırılmışdır, burada $P(m)$, – $m \geq 1$ olduqda müsbət qiymətlər alan tamqiymətli çoxhədlidir. p_m , – m -ci sadə ədəd və ya $f(a_m)$ -dir, burada a_m – ədədi silsilələrdə «yaxşı» paylanmaya malik natural ədədlər ardıcılığıdır (bax, [1]). Sərbəst multiplikativ semi – qruplarda verilən additiv funksiyalar üçün E. ə. n. analogi qaydada təyin olunur (bax, [8]).

Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin bəzi metodları. a) Momentlər metodu. $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyasının limit funksiyasına yığılması haqqında

$$\mu_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(C_n + D_n x) = \frac{1}{n D_n^k} \sum_{m=1}^n (f(m) - C_n)^k, \\ k=1, 2, \dots$$

momentləri üzrə mühakimələr yürütmək olar. Əgər, məs., isbat etmək olarsa ki, $\mu_k(n)$ bütün təkqiymətli k -lər üçün sıfır və bütün cütqiymətli k -lər üçün $(k-1)!!$ -ə yığılır, onda $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyası $\Phi(x)$ normal qanununa yığılır.

b) Şəbəkə və kəsim metodu (bax, [2]). Arifmetik funksiyaların paylanması məsələlərinə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqində əsas çətinlik ondan ibarətdir ki, natural ədədlər çoxluğunun asimptotik sıxlığı hesabı additivliyə malik deyildir. Bu çətinliklə qarşılaşmamaq üçün şəbəkə və kəsim – nəzəri – ədədi metodundan istifadə olunur. $r = r(n) \rightarrow \infty$, $\ln r = o(\ln n)$ ardıcılığını götürərək, iki – $\{\Omega, \mathfrak{A}_n, P_n\}$ və $\{\Omega, \mathfrak{A}_n, Q_n\}$ ehtimal fəzaları ardıcılıqları qurulur, burada Ω – elementar hadisələr fəzasıdır və $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ – natural ədədlər çoxluğudur. Q_p , –

p -yə bölünən natural ədədlər çoxluğu olsun. Təsadüfi hadisələr sistemi $\mathfrak{A}_n$, – $p \leq r$ olduqda bütün Q_p çoxluqlarını və Ω -ni özündə saxlayan minimal çoxluqlar cəbridir. P_n ölçüsündən başqa ehtimal ölçüsü daxil olunur ki, bütün $p \leq r$ qiymətlərində $Q_n(Q_p) = 1/p$ olsun. Şəbəkə metodu ilə E. ə. n.-nin əsas fundamental lemması isbat olunur: $P_n(A) - Q_n(A) = o(1)$ münasibəti bütün $A \in \mathfrak{A}_n$ hadisələri üzrə müntəzəm ödənilir.

$f(m)$ – güclü additiv arifmetik funksiya olsun və $f^{(p)}(m)$, – m -in p -yə bölünən, yaxud bölünməyən olmasından asılı olaraq ya $f(p)$ -yə, yaxud sıfır bərabər olur. $f^{(p)}(m)$, $p \leq r$ funksiyaları $\{\Omega_n, \mathfrak{A}_n, Q_n\}$ fəzasına görə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. İxtiyari B Borel çoxluğu üçün bu halda

$$P_n\left\{\sum_{p \leq r} f^{(p)}(m) \in B\right\} = Q_n\left\{\sum_{p \leq r} f^{(p)}(m) \in B\right\} + o(1)$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci toplananın öyrənilməsi məqsədilə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün limit teoremlərini tətbiq etmək olar. Additiv arifmetik $f(m)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün $P_n\{f(m) \in B\}$ ehtimalı $P_n\{r(m) \in B\}$ ehtimalı ilə approksimasiya olunur.

c) Xarakteristik funksiyalar və çevirmələr metodu. Additiv arifmetik $f_n(m)$ funksiyalarının və multiplikativ arifmetik $g_n(m)$ funksiyalarının paylanmaları –

$$F_n(x) = P_n\{f_n(m) < x\} \quad \text{və} \quad G_n(x) = P_n\{g_n(m) < x\}$$

funksiyalarının öyrənilməsinə uyğun olaraq

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n e^{it f_n(m)}$$

xarakteristik funksiyalarının və

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^k \operatorname{sgn}^k x dG_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |g_n(m)|^k \operatorname{sgn}^k g_n(m) \\ k=0, 1; \quad 0^0 = 1$$

xarakteristik çevirmələrinin (Mellin çevirmələrinin) öyrənilməsinə gətirmək olar. Hər iki halda n və $t \in \mathbb{R}^1$ parametrlərindən asılı kompleksqiymətli multiplikativ arifmetik $h(m) = h_{n,t}(m)$ funksiyalarının orta qiymətləri $E_n(h)$ -dən istifadə olunur: $|h(m)|$ ya 1 və ya 0-a bərabər olur. Bu istiqamət 20-ci əsrin 60-cı illərində inkişaf etməyə başlamışdır. $E_n(h)$ -in öyrənilməsi üçün Dirixle doğuran sıralar metodu, integral tənliklər metodu və digər nəzəri-ədədi metodlardan istifadə olunur.

Dirixle doğuran sıralar metodu ilə araşdırmada

$$Z(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

Dirixle sırasına baxılır, burada $s = \sigma + it$ – kompleks dəyişəndir, $\sigma > 1$.

Kontur integrallaması nəticəsində

$$\sum_{m=1}^n h(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=\delta} \left(n + \frac{1}{2}\right)^s Z(s) \frac{ds}{s},$$

$$\delta = 1 + 1/\ln n$$

şəklində eynilik alınır. Bu halda məsələ $\sigma=1$ düz xətti ətrafında $Z(s)$ funksiyasının öyrənilməsinə gətirilir. İsbat etmək olur ki, $\lambda = \lambda_n(t)$ kəmiyyəti vardır ki,

$$M_n(h) = \frac{n^{i\lambda} Z(\delta + i\lambda)}{(1 + i\lambda) \zeta(\delta)} + o(1)$$

ifadəsi doğrudur, burada $\zeta(s)$ – Riman zeta – funksiyasıdır. $h(m)$ üçün bezi fərziyyələrlə isbat olunmuşdur ki, $o(1)$ qiyməti $t \in [-T, T]$ üzrə müntəzəmdir və bu da $F_n(x)$ və $G_n(x)$ üçün limit teoremlərinə gətirir.

İntegral tənliklər metodu ilə $E_n(h)$ -in araşdırılmasında $h(m)$ üçün olduqca ümumi fərziyyələrlə göstərmək olur ki, $x(u) = E_n(h)$ funksiyası

$$x(u) = u^{-1} \int_0^u K(u-v) x(v) dv + o(1)$$

tipli integral tənlikləri ödəyir, burada $K(v)$ hər hansı hissevi sabit funksiyadır. Ardıcıl yaxınlaşmalar metodu əksər hallarda həllin asimptotik ayrılışını almağa imkan verir ki, bu da limit teoremlərini dəqiqləşdirməyə səbəb olur.

d) Poliadik analizlə tətbiqi. Tam ədədlər halqası $\mathbb{Z}$ -də a nöqtəsində bazisi çıxıqlar siniflərinin çoxluğu $\{\alpha \in \mathbb{Z}; \alpha \equiv a \pmod{m}\}$, $m=1, 2, \dots$ olan topologiya daxil olunur. Alınan topoloji halqa bikiompakt topoloji $\mathcal{S}$ halqasına kimi tamamlanır, $\mathcal{S}$ -nin elementləri poliadik ədədlər adlanır. Tamamlandırılmış normalanmış Haar ölçüsü $\mathbf{P}$ σ -da ehtimal rolunu oynayır. Sonrakı mərhələdə $h(m)$, $m \in \mathbb{N}$ arifmetik funksiyası $h(x)$, $x \in \mathcal{S}$ funksiyasına qədər davam olunur. $h(x)$ funksiyası üçün ehtimali mülahizələr tətbiq oluna bilər. Məs., $f(m)$ additiv arifmetik funksiyası

$$f(x) = \sum_{p^k | x} f(p^k)$$

funksiyasına qədər bütün $x \in \mathcal{S}$ üçün $\mathbf{P}$ – sanki yəqin, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilər ki, (3) sıraları yığılındır. Bu halda $\mathbf{P}_n\{f(m) < u\}$ paylanmaları $\mathbf{P}\{x: f(m) < u\}$ paylanmasına zəif yığılır. Asimptotik paylanmalar, arifmetik funksiyaların orta qiymətləri haqqında digər bir çox məsələlər onların $\mathcal{S}$ -də davam olunmasına gətirilir.

Əd.: [1] Б а р б а н М. Б., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 1, с. 51–102; [2] К у б и л ю с Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [3] К у б и л ю с Й. П., в кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел. Минск, 1974, с. 81–118; [4] М а н с т а в и ч ю с Э., «Лит. матем. сб.», 1980,

т. 20, № 3, с. 39–52; [5] Н о в о с е л о в Е. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 307–64; [6] П о с т н и к о в А. Г., Вероятностная теория чисел, М., 1974; [7] П о с т н и к о в А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971; [8] Ю ш к и с З., «Лит. матем. сб.», 1964, т. 4, с. 565–603; [9] Б а б у G. J., Probabilistic methods in the theory of arithmetic functions, Delhi, 1978; [10] E l l i o t t P. D. T. A., Probabilistic number theory, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1979–80; [11] E l l i o t t P. D. T. A., Arithmetic functions and integer products, N. Y. – [a. o.], 1985; [12] G a l a m b o s J., «Ann. Inst. Henri Poincaré», Sect. B, 1970, v. 6, № 4, p. 281–305; [13] H i l d e b r a n d A., «Astérisque», 1987, № 147–48, p. 95–106; [14] N a r k i e w i c z W., Teoria liczb, Warsz., 1977; [15] P h i l i p p W., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1971, № 114; [16] S c h w a r z W., «Jahresber. Deutsch. math. Ver.», 1977, Bd 78, № 3, S. 147–67; [17] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, пер. с англ., М., 1963.

EHTİMALİ HƏLLİ, DIFFERENSİAL TƏNLİK-LƏRİN « вероятностное решение дифференциальных уравнений; probabilistic solution of differential equation » – bu və ya digər differensial tənliyin həllinin uyğun sayılan təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözlemələrinin vasitəsilə yazılışdır. Ehtimal nəzəriyyəsi və 2-ci tərtib xüsusi törəməli elliptik və parabolik differensial tənliklər arasında əlaqə çoxdan məlum idi. Muavr – Laplas teoremindən aydındır ki, məlum ehtimalların limiti istilikkeçirmə tənliyinin həllidir. Ehtimal nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin inkişafında təsadüfi dolaşmalarla əlaqədar müxtəlif növ riyazi gözlemələrin limitlərinin hesablanması mühüm rol oynamışdır və bu sahədə xeyli işlər görülmüşdür, alınmış nəticələr isə differensial tənliklərin həllinə gətirmişdir ki, bununla da onların həllərinin tapılmasına səbəb olmuşdur (bax, [1] – [5]). Həmçinin məlumdur ki, kəsilməz zamanlı təsadüfi proseslərlə əlaqədar bezi ehtimallar differensial tənlikləri ödəyir (bax, [6], [7]). Stoxastik integrallar və differensial tənliklər nəzəriyyəsi yaranana qədər (bax, [8], [9]) ehtimal nəzəriyyəsi və differensial tənliklər nəzəriyyəsi arasında əlaqə yalnız birtərəfli istifadə olunurdu və yalnız o halda ki, differensial tənliklər nəzəriyyəsinin hər hansı bir faktı ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunmuş olsun. [9]-də, əksinə, sırf ehtimali metodlarla, əvvəllər məlum olmayan nəticə – cırılmış parabolik tənliklərin həllinin varlığı nəticəsi alınmışdır.

Elliptik tənliyin ehtimali həll sxemi aşağıda verilir. $\mathbb{R}^d$ – qeyd olunmuş ortonormal bazisə malik d dim. – ölçülü Evklid fəzası olsun, bu fəzada qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan $b(x)$ funksiyası, qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -in xətti operatorlar (matrislər) çoxluğundan olan $\mathbb{R}^d$ -də $\sigma(z)$ funksiyası təyin olunmuşdur, burada d_1 – hər hansı tam ədəddir. w_t – hər hansı ehtimal fəzasında təyin olunmuş d_1 – ölçülü Viner prosesi olsun. $y \in \mathbb{R}^d$ qeyd olunur və fərz olunur ki, başlanğıc şərti $x_0 = y$ olan

$$dx_t = b(x_t) dt + \sigma(x_t) dw_t, \quad t > 0 \quad (1)$$

İto stoxastik tənliyinin həlli vardır, bu həll x_t^y ilə işarə olunur. $D \in \mathbb{R}^d$ hər hansı oblast, τ^y ilə x_t^y -in D -dən ilk çıxış anı olsun. L differensial operatoru

$$Lu = \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b^i(x) u_{x_i}(x) \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\|a^{ij}(x)\| = \frac{1}{2} \sigma(x) \sigma^*(x)$ və

«*» transponirlənmə işarəsidir. Əgər $u(x)$ funksiyası $\overline{D}$ -də kifayət qədər hamar olarsa,

$$Lu + f = 0 \text{ bərabərliyi } D \text{-də,} \quad (3)$$

$$u = \varphi \text{ bərabərliyi } \partial D \text{-də} \quad (4)$$

və bəzi texniki xarakterli şərtlər ödənilərsə, onda $y \in \overline{D}$ olduqda

$$u(y) = \mathbf{M} \left[\int_0^{\tau_y} f(x_t^y) dt + \varphi(x_{\tau_y}^y) \right] \quad (5)$$

doğrudur.

(5) düsturu (3), (4) məsələlərinin ehtimali ifadəsidir. (3), (4) məsələlərinin həllinin olub-olmadığı haqqında məlumat olmadıqda, aydındır ki, bu düsturun mənası ola bilər və o, (3), (4) məsələlərinin ehtimali həllini verir. Əgər u funksiyasını (5) düsturu ilə verdikdə və u kifayət qədər hamar funksiya olarsa, bir qayda olaraq, asanlıqla isbat olunur ki, u , – (3), (4) məsələlərinin həllidir. Bu mühüm faktdır. Bir sıra hallarda başlanğıc y şərtinə əsasən (1)-in həllinin differensiallanıqlığı haqqında teoremin köməyi (5)-in sağ tərəfinin hamarlığını isbat etmək olur.

Bəzi xətti tənliklər (bax, [14]) xüsusi törəmələri İto tənliklərinin (bax, [15]), hətta bəzi qeyri – xətti tənliklər (bax, [13]) sistemlərinin həlləri üçün də ehtimali ifadələr vermək mümkündür.

Əd.: [1] Philips H. B., Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1923, v. 2, p. 105–24; [2] Courant R., Friedrichs K., Lewy H., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 32–74 (рус. пер. – «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 125–60); [3] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Отд. Матем. и естеств. наук», 1933, с. 363–72 (рус. пер. – в его кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 141–48); [4] Хинчин А. Я., Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, В., 1933 (рус. пер. – Асимптотические законы теории вероятностей, М. – Л., 1936); [5] Петровский И. Г., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 425–44; [6] Vachellier L., Calcul des probabilities, P., 1912; [7] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 415–58, (рус. пер. – Колмогоров А. Н., кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105); [8] Ито К., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 4; [9] Гихман И. И., «Укр. Матем. ж.», 1950, т. 2, № 4, с. 37–63; 1951, т. 3, № 3, с. 317–39; [10] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [11] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [12] Stroock D. W., Varadhan S. P. S., Multidimensional diffusion processes, В. – [а. о.], 1979; [13] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [14] Белополюска Я. И., Далекций Ю. Л., «Докл. АН СССР», 1980, т. 250, № 3, с. 521–24; [15] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, в. 8, с. 153–68.

ЕHTІМАЛІ ХАРАКТЕРІЗАСІЯ(sı) **qrupların « вероятностная характеристизация групп; probabilistic characterization of groups »** – müəyyən qruplar sinfinin və ya qrupların hansısa xarakteristikalarının bu siniflərdə verilmiş ehtimal ölçülərinin, onların kompozisiyalarının, birparametrlili semi – qrup ölçülərinin və s. xassələrinin köməyi ilə təsviridir. Bu mövzu onunla əlaqədar yaranmışdır ki, $\mathbb{R}^1$ -də doğru olan ehtimali nəticələr və anlayışların hamısı ixtiyari qruplar üçün doğru olmur. Buna görə də, təbii və maraqlıdır ki, hər hansı limit teoreminin doğru olduğu, hər hansı paylanmanın səciyyəvi xüsusiyyəti ödənilən və ya hər hansı ehtimal anlayışının təyin oluna bilindiği qruplar təsvir olunsun.

Qrupların limit teoremləri ilə xarakterizasiyası. G – lokal kompakt qrup, μ isə G -də ele ixtiyari Borel ölçüsü olsun ki, onun daşıyıcısı bütün G -ni doğursun. Əgər ehtimal ölçüləri sinfində $\{\mu_j^*\}$ ardıcılığının limit nöqtələri varsa, onda G kompakt qrupdur. G , – topologiyası hesabı bazisə malik olan kompakt qrup olsun. Əgər: a) $\mathcal{M}^1(G)$ ailəsinə hər bir μ ölçüsü üçün ele $x \in G$ tapılsa ki, $\mu^* \varepsilon_x \in \mathcal{H}$; b) $\mathcal{H}$ -dan olan ixtiyari $\{\mu_j\}$, $j \geq 0$ ardıcılığı üçün $\{v_n\}$ ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda yığılarsa (burada $v_n = \mu_1 \dots \mu_n$), G -də bütün ehtimal ölçüləri ailəsi $\mathcal{M}^1(G)$ -nin alt çoxluğu $\mathcal{H}$ tam çoxluq adlanır. Onda əgər G kompakt qrupu üçün $\mathcal{M}^1(G)$ -də tam altçoxluq varsa, bu halda G qrupu tamamilə əlaqəsizdir, yeni qrup vahidinin əlaqələyici komponenti vahidlə üst-üstə düşür.

Tamamilə əlaqəsiz kompakt qrup sıfırlıdır və əksinə, onda yuxarıda qeyd olunan xarakterizasiya sıfırlı kompakt qrupun ehtimali xarakterizasiyasıdır (bax, [1], [2]).

Kompaktlıq xassəsinə müəyyən mənada əks olan xassəli qrup xarakterizasiyaları mövcuddur. Trivial vahidi altqrupdan başqa kompakt altqrupları olmayan G qrupu qeyri – periodik qrup adlanır. $X_1, X_2, \dots$ asılı olmayan G – qiymətli təsadüfi elementlər ardıcılığı, $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n$ olsun. Onda G qrupu, yalnız və yalnız, o halda qeyri – periodik qrupdur ki, Y_n paylanmalarının zəif yığılması $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ardıcılıqları ixtiyari olduqda onların sanki hər yerdə yığılması ilə ekvivalent olsun (bax, [1]).

G qrupunu tamamilə istifadə edən kompakt çoxluqların artan ardıcılığı olarsa, G qrupu σ – kompakt qrup adlanır. Əgər bütün $x \in G$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n - \varepsilon_x \mu_n\| = 0$$

münasibəti doğru olarsa, lokal kompakt G qrupunda ehtimal ölçüləri ardıcılığı $\{\mu_n\}$ asimptotik bərabər paylanmalı (soldan) ardıcılıq adlanır, $\|\cdot\|$ – ölçünün variasiyasını ifadə edir. G qrupu, yalnız və yalnız, o halda σ – kompakt qrupdur ki, G -də heç olmazsa birçə soldan asimptotik bərabər-ehtimalı ardıcılıq olsun. Analogi xarakterizasiya sağdan asimptotik bərabər-ehtimalı ardıcılıq üçün də vardır.

Paylanmaların xarakterizasiyası. Ehtimal nəzəriyyəsində əsas məsələ bəzi səciyyəvi xüsusiyyətlərinə görə paylanmaların təsviri olan bölmə çoxdan yaranmışdır. Nəticələrin əksəriyyəti normal qanunun xarakterizasiyası üçün alınmışdır. Ən tipik nəticə Darmua – Skitoviç teoremidir. Nəticələrin digər hissəsi, normal qanunun normal komponentlərə ayrılığı haqqında Levi – Kramer teoremi ilə əlaqədar alınmışdır. Bu teoremlər vektor halı üçün də doğru olduğundan kommutativ qrupların təsvir etmək məsələsi də təbii olaraq yaranı ki, bunlar üçün qrupda normal paylanmanın müəyyən surətdə tərfi ilə bu teoremlər doğru olur (bax, *Qauss paylanması* lokal kompakt Abel qrupunda).

Məlumdur ki, $\mathbb{R}^1$ -də ixtiyari sonsuz bölünən paylanmanı ehtimal ölçülərinin kəsilməz birparametrlili semi – qrupuna daxil etmək olur. Qruplar halında bu nəticə həmişə mövcud olmur,

buna görə də, bu müddəanın doğru olduğu qrupların təsviri problemi yaranır.

Bu qrupların xarakterizasiyası hələ ki, tamamilə alınmamışdır, lakin geniş bir qruplar sinfi (kökləri – kompakt qruplar) üçün bu problem müsbət həll olunmuşdur; bu qruplar üçün kəsilməz bir-parametrlı semiqruplara daxil olunma problemi müsbət həll olunur. Kökləri – kompakt qruplar Li cəbri yalnız həqiqi köklərin olmasını təmin edən qruplardır; məs., qeyd olunan xassəli bütün kompakt qruplar, kompakt doğurulmuş Abel qrupları, nilpotent kompakt doğurulmuş lokal kompakt qruplar, əlaqəli həllolunan Li qrupları (bax, *Sonsuz bölünən paylanma qrupu* da; daxil olma problemi).

Riyazi gözləmə və dispersiya anlayışlarının limit teoremləri nəzəriyyəsi və statistikada mühüm rolu aydındır.

Bu anlayışların G – qiymətli təsadüfi kəmiyyətlər üçün analoglarının məğzinin də bu dərəcədə önəmli olacağını gözləmək təbii olardı. G qrupu kompakt olduqda bu anlayışlar təyin olunmuşdur və bunların əsasında kompakt qruplarda limit teoremlərinin çox saylı ümumi və son ifadələri alınmışdır (bax, [1], [3], [4]). Aydın olmuşdur ki, $M^1(G)$ -də, vahidin olduqca kiçik ətrafını və bütün cırlaşmış ölçüləri özündə saxlayan ölçülər semi – qrupunda ixtiyari kompakt qrup üçün riyazi gözləmə təyin etmək mümkün olmur. Buna görə də, riyazi gözləmənin varlığı da qrupların xarakteristik xassələrindəndir. Yalnız $SO(2)$ qrupu və $SU(2)$ qrupu, iki elementli qrup və bu qrupların düz hasili belə qruplardandır.

Dispersiyalar yalnız trivial altqrupdan başqa altqrupu olmayan ətrafa malik olan kompakt qruplar üçün təyin oluna bilər. Belə kompakt qruplar ya sonlu qruplar, ya da Li qruplarıdır.

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, с. 1274–77; [3] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, с. 723–35; [4] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, с. 524–27.

EHİTİMALİ KODLAMA « вероятностное кодирование; probabilistic coding » – bax, *Kodlanma*(s i) məlumatlı mənbəinin.

EHİTİMALİ PROQNOZU, HAVANIN « вероятностный прогноз погоды; probabilistic weather forecast » – predikant (yeni öngörü kəmiyyətlər toplusu) əvəzinə bəzi hava təzahürlərinin (yeni bu və ya digər meteoroloji obyektlərin) ehtimalları istifadə olunan *hava proqnozudur*. H. e. p.-nün son nəticəsi (ehtimal formasında proqnoz) uyşmayan hadisələrin tam qrupunu təşkil edən havanın vəziyyətlərinin müəyyən toplusunun ehtimallarının statistik qiymətlərinin təyin edilməsindən ibarətdir. H. e. p.-da paylanması təyin olunan təsadüfi kəmiyyət diskret və ya kəsilməz ola bilər.

Y – havanın öngörü şərtlərini xarakterizə edən *predikant*, X – başlanğıc şərtləri xarakterizə edən və proqnoz tərtib olunan anda müşahidələrin məlum məlumatları ilə təyin olunan *prediktor* olsun. X və Y -in (adətən, çoxölçülü vektorlar hesab olunan) təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə ehtimal paylanması – çoxölçülü $F(x, y)$ paylanma funksiyasının varlığı fərz olunur. Bu halda $X = x$ olduğu fərz olunarsa, Y təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanma funksiyası $F(y|x)$ -i təyin etmək olar. *Statistik hava proqnozunun* əsas məsələsi istifadə olunan an prediktorun X üçün verilmiş qiymətində Y prediktantının $F(y|x)$ şərti paylanma funksiyasına uyğun şərti riyazi gözləməsi $M[Y|X = x] = \bar{Y}(x)$ -in qiymətləndirilməsi məsələsidir; bu məsələnin həlli üçün atmosfer proseslərinin

müxtəlif stoxastik – dinamik modelləri geniş istifadə olunur. X kəmiyyətinin müşahidələrinin proqnoz qiymətlərinin ən tam xarakteristikası yalnız $\bar{Y}(x)$ kəmiyyətinin verilməsi ilə deyil, H. e. p.-nün məğzini təşkil edən bütün şərti ehtimal paylanmasının – $F(y|x)$ -in verilməsi ilə təyin olunur. Belə proqnoz

simvolik olaraq $\mathcal{P}_y(x) = \hat{F}(y|x)$ şəklində ifadə olunur, burada

$\hat{F}(y|x)$, – X və Y kəmiyyətləri üzərində aparılan müşahidələrin nəticələri arxivi ilə təyin olunan $F(y|x)$ funksiyasının empirik statistik qiyməti, $\mathcal{P}_y$ y -in qiymətindən asılı proqnoz operatorudur.

Aydındır ki, H. e. p. *havanın kateqoriq proqnozundan* daha məzmunludur və o, praktik olaraq istifadə olunma üçün daha geniş imkanlara malikdir, çünki bu proqnozun verilməsi üçün yalnız $\bar{Y}(x)$ -in verilməsi çox vaxt kifayət etmir.

X və Y üzərində aparılan real müşahidələrin məlumatlarının analizi bu proqnozun keyfiyyət statistik qiymətini almağa imkan verir (bax, *Ehtimali proqnozu, havanın keyfiyyətinin statistik qiyməti*); bu statistik qiymət H. e. p.-nün optimizasiyasında istifadə olunur. H. e. p.-nün ən sadə forması havanın n sayda mümkün fazalarına uyğun sonlu sayda (məs., n sayda) qiymət alan diskret Y kəmiyyəti üçün proqnoz halıdır. Bu halda proqnoz $R = (r_1, \dots, r_n)$ vektorunun göstərilməsi ilə təyin olunur, burada r_i – havanın i -ci fazasının öngörül ehtimalıdır və $r_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. Əgər X prediktoru da sonlu sayda

(məs., n sayda) qiymət alırsa, onda X prediktorunun j -ci qiymətinin müşahidə edildiyi şərti ilə havanın i -ci fazasının şərti

ehtimalı – $\mathcal{P}_{ij}$ -nin statistik qiyməti kimi $\pi_{ij} = n_{ij} / \sum_{i=1}^n n_{ij}$ tezliyi

götürülür, burada n_{ij} , – Y -in i -ci qiymətinin X -in j -ci qiyməti ilə birlikdə müşahidələri hallarının sayıdır. Y kəsilməz prediktant olduğu hallarda, adətən, Y kəmiyyəti üçün yalnız bəzi verilmiş diskret dərəcələrinin ehtimali proqnozuna baxılır; X -in verilmiş qiymətində Y -in şərti paylanmasının kvantillərinin və ya etibarlı intervallarının proqnozu müəyyən ehtimal topluları üçün də mümkündür.

Prediktorlar və prediktantların birgə tərtib olunmuş empirik cədvəllərinə (yeni π_{ij} tezlikləri üçün cədvəllərə) əsaslanan və prediktor vəziyyətlərinin çoxsaylı olduğu, müşahidə nəticələrinin isə kifayət dərəcədə böyük olmadığı halda sadə H. e. p. olduqca dəqiq olur; real olaraq belə proqnoz yalnız prediktorlar az saylı olduqda, azsaylı ardıcılıqlar verildiyi və kifayət qədər geniş müşahidələr arxivi olduğu halda özünü doğruldur. H. e. p.-nün digər metodları – ortoqonal funksiyalar sistemləri üzrə ayrılıqlar istifadə olunan şərti ehtimal paylanmalarına haqqında müəyyən hipotezlərə, sonlu Markov zəncirləri aparatına, Bayes teoreminə, kəsilməz paylanmaların normal approksimasiyasına əsaslanır.

H. e. p.-nu analoglar qrupu üzrə (bax, *Analoqlar metodu*) ehtimalların qiymətləndirilməsi vasitəsilə də almaq olur. Meteoroloji Φ hadisələrinin proqnozu üçün binar Y prediktantlarından istifadə olunur, bu prediktantlar Φ hadisəsi baş verdikdə 1, əks halda 0 qiyməti alır. $P\{\Phi|X = x\} = M(Y|X = x)$ olduğundan Φ hadisəsinin şərti ehtimalının qiymətləndirilməsi üçün reqresion analizdən istifadə etmək olur.

Praktikada hava proqnozu üçün subyektiv H. e. p.-lardan da istifadə olunur, bu proqnozlarda ehtimal üçün qiymətlər

proqnozist tərəfindən onun şəxsi təcrübəsi, onda olan informasiya əsasında verilir. H. e. p. digər statistik hava proqnozları kimi dinamik proqnozlarla birlikdə bunların interpretasiyası üçün də istifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Г р у з а Г. В., Р а н ь к о в а Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983.

EHTİMALİ PROQNOZU, HAVANIN; keyfiyyətin statistik qiyməti « вероятностный прогноз погоды; оценка качества; probabilistic weather forecast evolution » – istehlakçını *havanın ehtimali proqnozu* ilə məlumatlandıran prediktantın ehtimal paylanma funksiyasının hesablanacaq dəqiqliyi üçün statistik qiymətdir (ölçüdür). H. e. p.-nün keyfiyyət statistik qiyməti proqnoz üçün baxılan metodla bağlı kifayət dərəcədə müşahidə nəticələrinin olduqca geniş çoxluğunun verilənləri əsasında təyin olunur. Bu zaman uzlaşma kriterilərindən və havanın müxtəlif vəziyyətləri üçün müşahidə tezlikləri ilə bu vəziyyətlərin ehtimali proqnozu ilə verilən «nəzəri ehtimallar» arasındakı fərqi mühümlüyü haqqında hipotezləri yoxlama metodlarından istifadə olunur. Keyfiyyətin statistik qiyməti üçün eyni zamanda öngörül ehtimalların trivial iqlim proqnozuna müvafiq ehtimallardan fərqlənmə dərəcəsi və proqnozdan proqnoza onların dəyişkənliyi də nəzərə alınmalıdır.

H. e. p.-nün keyfiyyət statistik qiymətinin təyin edilmə qaydası dörd ardıcıl mərhələdən ibarətdir. Birinci mərhələdə qiymətləndirmə məqsədi (və ya ilkin nöqtəyi – nəzər) təyin edilir; ikinci mərhələdə verilmiş məqsəd (və ya nöqtəyi – nəzər) üçün proqnozun arzu olunan xassələri müəyyən olunur; üçüncü mərhələdə proqnozun keyfiyyət ölçüsü təyin olunur, yəni elə kəmiyyət – statistik qiyməti götürülür ki, bu kəmiyyət proqnozun arzu olunan xassəyə nə dərəcədə malik olduğunu təyin etməyə imkan versin; nəhayət, dördüncü mərhələdə alınmış statistik qiymətlərin nəticələrinin statistik mühümlüyü haqqında nəticələr çıxarılır. Adətən, iki əsas məqsədə baxılır.

Bunlardan birincisi – istehlakçı üçün ən mühüm olanı, praktik həllərin proqnoztik informasiyası əsasında qəbul olunan nəticələrin analiz ilə bağlıdır; proqnozist üçün mərkəzi rol oynayan ikinci məqsəd proqnozun mükəmməllik dərəcəsinin təyin olunması ilə bağlıdır, lakin bu halda proqnozun nə cür istifadə olunacağı qaydalarına proqnozun təsirinin olmadığı nəzərdə tutulur.

Buna uyğun olaraq iki qrup statistik qiymətlər müəyyən olunur: proqnoztik informasiyanın praktiki dəyərini müəyyənləşdirən iqtisadi statistik qiymətlər və proqnoz müddəti keçdikdən sonra müşahidələrin verilənləri ilə proqnozun uyğunluq dərəcəsini əks etdirən nəzəri statistik qiymətlər.

Proqnozların qiymətləndirilməsinə iqtisadi yanaşmada verilmiş istehlakçı üçün proqnozun müəyyən faydalılıq ölçüsü əsas götürülür, bu da istehlakçıdan asılı olduğuna görə universal olmaya bilər. Keyfiyyətin nəzəri qiyməti də müxtəlif cür təyin olunur, bu isə proqnozun hansı xassəsinin ən mühüm olması və bu xassənin nə cür ölçülməsi ilə müəyyən olunur.

Məs., n sayda qiymət alan prediktantın ehtimali proqnozu məsələsinə baxılır (havanın n sayda $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ mümkün faza-larına uyğun).

$$R = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = 1$$

– veriləcək ehtimal proqnozuna uyğun vektor olsun (burada r_j , – Φ_j fazasının proqnozlanan ehtimalıdır). Real (məs., Φ_j fazasına uyğun) baş vermiş havanın vəziyyəti $D^i = (d_1, \dots, d_n)$ ilə işarə olunur, burada $d_i = 1$ və $j \neq i$ olduqda $d_j = 0$. Onda qiymətləndirilmə qaydası (R, D) vektorlar cütü çoxluğunda verilmiş, hər bir proqnoza və proqnozlanan kəmiyyət üçün alınmış

qiymətə $S(R, D^i) = S_i(R)$ qiymətini qarşı qoyan funksionaldan ibarətdir. Proqnozun keyfiyyət statistik qiymətləri üçün belə qaydalar kifayət qədər verilməlidir. H. e. p.-nün ən uğurlu hesab olunan ilk kəmiyyət ölçüsü, –

$$PS(R, D) = 1 - \frac{1}{2} (R - D, R - D) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (r_j - d_j)^2$$

Brayer göstəricisidir. Qrup üzrə proqnozlara görə ortalanmış Brayer göstəricisi verilmiş proqnoz metodunun dəqiqliyini ölçür. Brayer göstəricisi daha çox havanın nizamlanmamış fazaları üçün istifadə olunur; baş vermiş hadisənin ehtimalına uyğun komponent yerini dəyişmədikdə bu göstəricinin qiyməti R vektorunun komponentlərinin yerdəyişməsindən asılı olmur. Nizamlanmış fazalar üçün (məs., üç faza olduğu halda: temperatur normadan «aşağı», «norma ətrafında» və «normadan yuxarı») $D = (0, 0, 1)$ vektoru ilə verilən $R_1 = (0, 4, 0, 5)$ proqnozu $R_2 = (0, 1, 0, 4, 0, 5)$ proqnozuna nisbətən daha uğursuz sayılır. Belə hallarda

$$RPS(R, D) = 1 - (R' - D', R' - D') / (N - 1)$$

kriterisinə üstünlük verilir, burada $r'_j = \sum_{k=1}^j r_k$; $d'_j = \sum_{k=1}^j d_k$.

Ayındır ki, RPS göstəricisi öngörül və müşahidə olunan paylanma funksiyalarının uyğunluğunu, PS isə öngörül və müşahidə olunan diskret ehtimallar toplusunun uyğunluğunu qiymətləndirir.

Əd.: [1] Г р у з а Г. В., Р а н ь к о в а Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983; [2] M u r p h y A. H., E p s t e i n E. S., «J. Appl. Met.», 1967, v. 6, № 5, p. 748–55.

EHTİMALİ PROSES « вероятностный процесс; random / stochastic process » – bax, *Təsadüfi proses*.

EHTİMALLARI, BÖYÜK YAYINMALARIN « вероятности больших отклонений; large deviations probabilities » – bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*.

EHTİYATDA SAXLAMA « резервирование; redundancy » – texniki sistemin imtinasız işləmə ehtimalını sisteme müxtəlif növ əlavələr edilməsi hesabına artırmaq üçün metoddur. Əlavələrin növündən asılı olaraq E. s. aşağıdakı tiplərə ayrılır: 1) Sıradan çıxan elementlərin əsas funksiyalarını yerinə yetirən ehtiyatda olan əlavə elementlər daxil olunmaqla seçiyyələnen *struktur* tip; 2) sistemin iş qabiliyyətini itirməsilə bağlı hər bir fasilə onun tamamilə sıradan çıxmasına səbəb olmadığı *müvəqqəti ehtiyatda saxlama*; 3) *informasiya ehtiyatda saxlama* tipi – bu halda həddindən artıq informasiyanın yığıldığı nəzərdə tutulur və onun bir hissəsinin itkisi sistemin imtinasına səbəb olmur; 4) *funksional ehtiyatda saxlama* tipi – bu halda sistemin bəzi sıradan çıxan elementlərinin öz funksiyalarını digər, sıradan çıxmayan elementlərə verməsini nəzərdə tutan tip. Ehtiyatda saxlama xüsusiyyətli sistemlərin riyazi işləmə modelini qurmaq üçün yeni vəziyyətlər fəzası $X = \{x\}$

daxil olunur və imtina vəziyyətləri çoxluğu X_0 yenidən təyin olunur, $X_0 \subset X$. Ehtiyatın təsirindən asılı olaraq ehtiyatlar üç

növe ayrılır: yüklənmiş, sadələşmiş, yüklənməmiş. Ehtiyat elementlərin sayından asılı olaraq: birdəfəlik (*double*) və çoxqat *E. s.* təyin olunur. Əgər sistem bütünlüklə ehtiyatda saxlanılırsa, belə *E. s.* ümumi *E. s.*, əgər sistemin ayrı-ayrı elementləri ehtiyatda saxlanılırsa, belə *E. s.* – ayrılan *E. s.* adlanır. Ehtiyat elementin işləyəcəyi yerin olunub və ya qeyd olunmamasından asılı olaraq *E. s.* qeyd olunub və ya sürüşən *E. s.* adlanır.

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, М., 1983; [2] Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности аппаратуры радио-электроники и автоматики, М., 1975; [3] Надежность технических систем, М., 1985; [4] Черкасов Г. Н., Надежность технических систем с временной избыточностью, М., 1974.

EHTİYATDA SAXLAMA çoxqat «резервирование» многомерное; multiple redundancy» – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

EHTİYATDA SAXLAMA müvəqqəti «резервирование» временное; temporary redundancy» – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

EHTİYATDA SAXLAMA optimal «резервирование» оптимальное; optimal redundancy» – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama*.

EHTİYATDA SAXLAMA ümumi «резервирование» общее; general redundancy» – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

EHTİYATDA SAXLAMA; STRUKTUR TİP EHTİYATDA SAXLAMA «резервирование структурное; structured redundancy» – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

EKSKURSIYA(sı) Браун hərəkətinin «экскурсия» брауновского движения; Brownian excursion» – bax, *Braun ekskursiyası*.

EKSKURSIYA(sı) Markov prosesinin «экскурсия» марковского процесса; excursion of a Markov process» – $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x), t \geq 0$

Markov prosesinin trayektoriyasının hər hansı təsadüfi $[\alpha, \beta]$ parçasındakı t qiymətlərində ($t = \alpha$ qiyməti ola bilər ki, istisna olunmaqla) ζ_t -nin Markov prosesi vəziyyətlərinin əvvəlcədən nəzərdə tutulan Γ çoxluğundan xaricdə yerləşən ixtiyari maksimal hissəsidir (maksimalıq o mənada anlaşılır ki, trayektoriyanın böyük zaman parçalarındakı hissələri qeyd olunan xassəyə malik olurlar). Başqa sözlə, ζ faza fəzası $(E, \mathcal{B})$ -də Markov prosesi, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olsun. Təsadüfi $\{t: \zeta_t \in \Gamma\}$ çoxluğunun qapanmasının tamamlayıcısı hesabıdan çox olmayan kəsişməyən (α, β) intervallarının ailəsinə ayrılır və əgər (α, β) belə intervallardan biridirsə, onda $\zeta_t: [\alpha, \beta] \rightarrow E$ inikası – ζ Markov prosesinin Γ çoxluğundan ekskursiyasıdır, bu Markov prosesinin E -nin başlanğıc və son anları uyğun olaraq α və β nöqtələridir. Bu E -ya uyğun yerindəyişmiş ekskursiya – $Y_t^\alpha = X_{t+\alpha}: [0, \beta - \alpha] \rightarrow E$ inikası kimi təyin olunur.

Markov prosesinin E -nin araşdırılması Markov proseslərinin trayektoriyalarının incə xassələrini müəyyənləşdirməyə və onun hər hansı vəziyyətlər çoxluğundan ilk dəfə çıxdığı andan sonra,

onun davamının mümkün tiplərini təsvir etməyə imkan yaradır (bax, [4], [7]). Markov prosesinin qeyd olunmuş vəziyyətdə E -sı, ilk növbədə Viner prosesinin E -sı, xüsusilə intensiv surətdə öyrənilmişdir (bax, [1], [2]). K. İto [3]-də standart Markov prosesinin $a \in E$ vəziyyətlərindən E -ni aşağıdakı kimi təsvir etmişdir. Fərz olunur ki, bu vəziyyət $\Gamma = \{a\}$ üçün olduğu kimi $E \setminus \{a\}$ çoxluğu üçün də quyruqlu olsun (yeni ζ_t trayektoriyası t -nin olduqca kiçik $t > 0$ qiymətlərində $\{a\}$ və $E \setminus \{a\}$ çoxluqlarında P_a – sanki yeqin olur və fərz olunur ki, $A(t)$, – a nöqtəsində lokal zaman vaxtıdır. Aydın olmuşdur ki, bütün yerindəyişmiş E -lann çoxluğu $\{Y^\alpha\}$ -ni hər hansı $\tilde{\Omega}$ fəzasına daxil etmək olar və bu fəzanın ölçülən strukturlu olduğu, burada aşağıdakı xassələrə malik σ – sonlu ν ölçüsünün verildiyi fərz olunur: a) əgər $D \subset [0, \infty] \times \tilde{\Omega}$ ölçüləndirsə və $\lambda = (I \times \nu)(D) < \infty$ olarsa [burada I , – $[0, \infty]$ -də Lebeq ölçüsüdür], onda $\{Y^\alpha: (A(\alpha), Y^\alpha) \in D\}$ çoxluğunun elementlərinin sayı λ parametrlı Puasson paylanma qanununa tabedir; b) kəsişməyən D_i çoxluqlarının ixtiyari sonlu toplusu üçün $\eta(D_i)$ kəmiyyətləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

E anlayışının ümumiləşmələri də mümkündür (bax, [5]); bir çox tipli E -lann idarə edən ehtimal mexanizmini təsvir etmək mümkün olmuşdur (bax, [5], [6]). [5]-də E -nin texniki hesablanması aparatı işlənmişdir.

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. франц., М., 1972; [3] Ито К., «Proc. Sixth Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1972, v. 3, p. 225–40; [4] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 409–36; [5] Maisonneuve B., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 3, p. 399–411; [6] Gettoor R. K., Sharpe M. J., «Adv. in Math.», 1982, v. 45, p. 259–309; [7] Blumenthal R. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 63, № 4, S. 433–44.

EKSKURSIYA(sı) Viner prosesinin «экскурсия» винеровского процесса; excursion of a Wiener process» – 0-dan başlayan $w(t)$ standart Viner prosesinin iki qonşu sıfır arasındakı trayektoriya hissəsidir. Z_t , – $w(t)$, $t \geq 0$ trayektoriyasının sıfırları çoxluğu olsun. $[0, \infty)$ -də Z -ə tamamlayıcı bütün açıq Z_n , $n = 1, 2, \dots$ intervallarını hər yerdə sıx $\{t_i\}$ ardıcılığının köməyi ilə nömrələmək olar, belə ki, Z_1 minimal indeksli $t_i \notin Z$ nöqtəsini özündə saxlayan intervaldır, Z_2 minimal indeksli $t_i \notin Z \cup Z_1$ nöqtəsini özündə saxlayan intervaldır və s., $Z_n = (a_n, b_n)$ olsun. Viner prosesinin normalanmış mütləq ekskursiyası

$$e_n(t) = \frac{|w(a_n + t(b_n - a_n))|}{\sqrt{b_n - a_n}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

prosesidir. $t \in Z_n$ olduqda $e_n = \text{sign } w(t)$ olsun. Z təsadüfi çoxluğu, e_n təsadüfi prosesləri və ε_n təsadüfi kəmiyyətləri küllüyyatca asılı olmayandırlar və $P\{\varepsilon_n = 1\} = P\{\varepsilon_n = -1\} = 1/2$. e_n prosesi Markov prosesidir və onun keçid ehtimalının sıxlığı

$$p(0, 0; t, y) = \frac{2y^2}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}} e^{-y^2/2t(1-t)},$$

$$0 < t < 1, y > 0,$$

$$p(s, x; t, y) = \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^{3/2} \frac{y}{x\sqrt{2\pi(t-s)}} \times \\ \times [e^{-(y-x)^2/2(t-s)} - e^{-(y+x)^2/2(t-s)}] e^{-y^2/2(1-t)+x^2/2(1-s)}$$

$$0 < s < t < 1, x > 0, y > 0$$

düsturları ilə təyin olunur.

(a_n, b_n) intervallının əsli olduğu və $\{t_i\}$ -dən də asılılığı hesab olunur. Viner prosesinin E.-nin uçlarının əvvəldən seçilmiş t nöqtəsinin daxilə alması ehtimalının birgə sıxlıq funksiyası

$$p(a, b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a(b-a)^3}}, \quad 0 < a < t < b < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur, uyğun xüsusi sıxlıq funksiyaları

$$p_1(a) = \frac{1}{\pi\sqrt{a(t-a)}}, \quad p_2(b) = \frac{1}{\pi b} \sqrt{\frac{t}{b-t}}$$

düsturları ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Л е в и П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968.

EKSPERİMENT XƏTASI «эксперимента ошибка; experiment error» – bax, *Sistematik xeta. Təsədüfi xeta.*

EKSPONENSİAL AİLƏSİ, PAYLANMALARIN «экспоненциальное семейство распределений; exponential family of distributions» – ω abstrakt parametridən asılı və hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən

$$p(x, \omega) = \frac{dP_\omega}{d\mu} =$$

$$= C(\omega) h(x) \exp \{ C_1(\omega) \varphi_1(x) + \dots + C_m(\omega) \varphi_m(x) \} \quad (*)$$

sıxlıq funksiyaları ilə verilmiş, $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ ölçülən fəzasında $\mathcal{P} = \{P_\omega\}$ paylanmalar ailəsidir, burada $x \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$, $C(\omega) > 0$, $C_1(\omega), \dots, C_m(\omega)$, – Ω -da təyin olunmuş funksiyalar, $h(x) \geq 0$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$, – $\mathcal{X}$ -də təyin olunmuş ölçülən funksiyalardır.

m – P. e. a.-nin $(*)$ şəklində ifadə oluna bilinməsinə təmin edən minimal tam ədəd olsun. $(*)$ ifadəsi, yalnız və yalnız, $\mathcal{X}$ -də təyin olunmuş $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ funksiyaları və Ω -da təyin olunmuş $C_1(\omega), \dots, C_m(\omega)$ -lar xətti asılı olmadıqları halda minimaldır. Bu halda $\theta_j = C_j(\omega)$, $j = 1, \dots, m$ olduqda P. e. a.-nin parametrizasiyası $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ kanonik parametrizasiya, m isə P. e. a.-nin rəngi adlanır. $\Theta = \{(\theta_1, \dots, \theta_m) : \omega \in \Omega\}$ kanonik parametrik çoxluğunun mühüm rolu vardır. Əgər Θ çoxluğu $\mathbb{R}^m$ fəzasının müəyyən bir ətrafını daxilə alırsa, onda

P. e. a. tam paylanmalar ailəsidir (bax, *Tam ailəsi, paylanmaların*).

P. e. a.-nin statistik məsələlərdə müstəsna rolu onunla izah olunur ki, rəqulyarlıq tipli kifayət qədər ümumi şərtlərlə yalnız P. e. a.-ndən olan seçimlər üçün qeyri – trivial kafi statistikalar mümkün olur. Beləliklə, analitik nöqtəyi – nəzərdən P. e. a.-ni

$$\prod_{i=1}^n p(x_i; \omega) = R(T(x_1, \dots, x_n); \omega) r(x_1, \dots, x_n)$$

funksional tənliklərinin yeganə həlləri (rəqulyarlıq tipli şərtlərdə) kimi xarakterizə etmək olar, burada T – qeyri – trivial statistikadır (bax, [1]).

$(*)$ P. e. a.-ndən olan $x_1, \dots, x_n$ seçimləri üçün statistik nəticələri $T = (t_1, \dots, t_m)$ statistikasına əsaslandırmaq olar, belə ki, bu statistikanın dim. – ölçüsü seçimin həcmi n -in artması ilə art-

mır, burada $t_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i)$, $j = 1, \dots, m$.

Təbiiqi məsələlərdə çox təsadüf edilən ailələr P. e. a. olur. Məs.,

$$p(x; a, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-(x-a)^2/2\sigma^2\}$$

normal paylanma sıxlığı funksiyalarının ailəsi P. e. a.-dir və bu halda $(*)$ ifadəsində $\omega = (a, \sigma^2)$, $m = 2$, $\varphi_1(x) = x^2$,

$C_1(\omega) = -1/2\sigma^2$, $\varphi_2(x) = x$, $C_2(\omega) = a/\sigma^2$ olur.

Xüsusi halda, Kramer – Rao bərabərsizliyində bərabərlik işarəsi yalnız P. e. a. üçün mümkün olur. Rəngi 1-ə bərabər olan P. e. a. üçün birtərəfli alternativə qarşı sadə hipotezin müntəzəm ən güclü kriterləri vardır.

P. e. a.-nin sistematik öyrənilməsinə XX əsrin 30-cu illərindən başlanmışdır. İlk ciddi riyazi nəticələr J. Darmua (G. Darmonis), B. Kupmen (B. Koopman) və E. Pitmen (E. Pitman) tərəfindən alınmışdır. Lakin kafi statistikalar nəzəriyyəsində P. e. a.-nin rolu R. Figere (R. Fisher) daha əvvəl məlum idi. P. e. a. maksimal doğruxa oxşarlıq metodu ilə alınan statistik qiymətlərlə bağlı statistik məsələlərdə müəyyən mənada ekstremal rola malikdir.

Əd.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] B a r n d o r f f - N i e l s e n O., Information and exponential families in statistical theory, N. Y., 1978.

EKSPONENSİAL AVTOREQRESSİV MODEL «экспоненциальная авторегрессионная модель; exponential autoregressive model / EXPAR – proses» – bax, *Qeyri – xətti avtoeqressiv proses.*

EKSPONENSİAL AVTOREQRESSİV PROSES «экспоненциальный авторегрессионный процесс; exponential autoregressive process / EXPAR – proses», EXAR – p r o s e s s, – bax, *Qeyri – xətti avtoeqressiv proses.*

EKSPONENSİAL BƏRABƏRSİZLİK «экспоненциальное неравенство; exponential inequality» – bax, *Çəbişev bərabərsizliyi.*

EKSPONENSİAL ÇEVİRMƏ(si) təsadüfi trayektoriya uzunluğunun «экспоненциальное преобразование случайного пробега; exponential transformation of random path» – köçürmə məsələlərinin statistik modeləşdirilməsinin çəki modifikasiyasıdır və bu aşağıdakı kimi anlaşılır: hissəciyin sərbəst hərəkəti trayektoriyasının uzunluğu fiktiv mühit üçün zəiflənmə əmsali $\sigma' = \sigma - c \cos v$ ilə realizə olunur, burada v – trayektoriyanın baxılan hissəsinin istiqaməti və seçilmiş w istiqaməti arasındakı bucaqdır. Bu zaman hissəciyin «çəkisi» $\sigma(\sigma - c \cos v)^{-1} \times \exp(-lc \cos v)$ kəmiyyətinə vurulur; bu eməliyyat nəticəsində uyğun funksionalları statistik qiymətləri yaxşılaşır, bu şərtlə ki, c kəmiyyəti məqbul tərzdə təyin olunmalıdır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Михайлов Г. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1981, т. 21, № 6, с. 1435–44.

EKSPONENSİAL p – DAYANIQLILIQ «экспоненциальная p – устойчивость; exponential p – stability» – bax, *Dayanıqlılıq* (ğ) təsadüfi təyinedici elementlərli differensial tənliklərin.

EKSPONENSİAL DOĞURAN FUNKSİYA «экспоненциальная производящая функция; exponential generating function» – bax, *Doğuran funksiya*.

EKSPONENSİAL PAYLANMA «экспоненциальное распределение; exponential distribution» – bax, *Üstlü paylanma*.

EKSSƏS(i) dolaşmanın «экцесс блуждания; excess / overshoot of a walk», çatım – qeyd olunmuş sərhədlə hissəciyin bu sərhədi ilk dəfə aşdıqdan sonra olduğu vəziyyəti arasındakı məsafədir. S_t , $t \geq 0$ – birölçülü təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası və $f = f(t)$ – verilmiş təsadüfi olmayan funksiya (sərhəd). Onda təsadüfi dolaşmanın ekssəsi

$$\chi_f = S_\eta - f(\eta)$$

təsadüfi kəmiyyəti kimi təyin olunur, burada $\eta = \eta_f = \inf \{t \geq 0: S_t \geq f(t)\}$ – sərhədi ilk aşma müddətidir (çatım müddətidir).

Düzxətli sərhədlər halı üçün və $S_0 = 0$, $S_1 = X_1, \dots$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ təsadüfi dolaşması üçün dolaşma E. daha çox öyrənilmişdir, burada $X_1, \dots, X_k$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\chi(x)$, $\eta(x)$, $f(t) = x = \text{const}$ düzxətli sərhədi üçün χ_f , η_f təsadüfi kəmiyyətlərinin işarələri olsun. Onda $|z| < 1$, $\text{Im} \lambda = 0$, $\text{Im} \mu < 0$ olduqda aşağıdakı münasibətlər doğrudur (bax, [1], [2]):

$$1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0+)} e^{i\lambda\chi(0+)}; \eta(0+) < \infty) = A_+(z, \lambda), \quad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{i\mu u} d_u \mathbf{M}(z^{\eta(u)} e^{i\lambda\chi(u)}; \eta(u) < \infty) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda - \mu} \left(1 - \frac{A_+(z, \lambda)}{A_+(z, \mu)} \right), \quad (2)$$

burada

$$A_+(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k} \mathbf{M}(e^{i\lambda S_k}; S_k > 0) \right\},$$

əgər faktorizasiya funksiyasının müsbət komponenti $A(z, \lambda) = 1 - z \mathbf{M} e^{i\lambda X_1}$ olarsa (bax, *Faktorizasiya eynilikləri*).

Əgər χ^* ilə $S_1, S_2, \dots$ cəmlərindən ilk müsbət olmayan cəm, η^* ilə isə onun baş verdiyi an işarə olunarsa, onda (bax, [1], [2])

$$1 - z \mathbf{M} e^{i\lambda X_1} = (1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0+)} e^{i\lambda\chi(0+)}; \eta(0+) < \infty)) \times \\ \times (1 - \mathbf{M}(z^{\eta^*} e^{i\lambda\chi^*}; \eta^* < \infty)) \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur. İlk müsbət $\chi(0+)$ cəmi pille boyu adlanır; $\eta(0+)$ pille anı ilə $\chi(0+)$ birlikdə pille cütü eməle gətirir. (1) – (3) düsturlarından $\chi(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması əsas xassələrini müəyyən etmək olur. Dolaşma E. $\chi(x)$, yalnız və yalnız, o halda məxsusi təsadüfi kəmiyyətdir ki $(\eta(x) < \infty)$ sanki yəqin).

$$\sum_{k=1}^\infty k^{-1} \mathbf{P}\{X_k > 0\}$$

dağılan sıra olsun; bu sıranın dağılması üçün $0 \leq \mathbf{M} X_1 \leq \infty$ şərtinin ödənilməsi kafidir (bax, [1]).

Elə A, B, C sabitləri vardır ki (bax, [4]), $t \geq 0$ üçün əgər $\mathbf{M} X_1^* > 0$ olarsa,

$$A\Psi(t) \leq \mathbf{P}\{\chi(0+) > t\} \leq B\Psi(t)$$

münasibəti; əgər $\mathbf{M} X_1 = 0$, $0 < \mathbf{D} X_1 < \infty$ olarsa,

$$A\Phi(t) + B\Psi(t) \leq \mathbf{P}\{\chi(0+) > t\} \leq C\Phi(t)$$

münasibəti ödənilir, burada

$$\Psi(t) = \mathbf{P}\{X_1 > t\}, \quad \Phi(t) = \int_t^\infty \Psi(u) du.$$

Əgər X_1 -in paylanması arifmetik paylanma deyildirsə və $\mathbf{M} \chi(0+) < \infty$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda (bax, [1])

$$G(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\chi(n) < t\} = \\ = \frac{1}{\mathbf{M} \chi(0+)} \int_0^t \mathbf{P}\{\chi(0+) > x\} dx$$

limiti vardır. Bu limit arifmetik halda da, n səviyyəsi $\chi(0+)$ kəmiyyətinin paylanması şəbəkə addımına tam bölünən olaraq dəyişir. $G(t)$, – sonsuz uzaqlaşmış baryerə çatım kəmiyyəti $\chi(\infty)$ -un paylanma funksiyası adlanır. $\mathbf{P}\{\eta(u) = n, \chi(u) < x\}$ ehtimalının $u = u(n) \rightarrow \infty$ olduğu halda asimptotikası öyrənilmişdir (bax, [3], [5]). İxtiyari $u \geq 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur (bax, [6], [10]):

$$M\chi^k(u) \leq \frac{k+2}{k+1} M|X_1|^{k+1} / M X_1, \quad \text{eger } M X_1 > 0,$$

$$M\chi^k(u) \leq \frac{k+2}{k+1} M|X_1|^{k+2} / M X_1^2, \quad \text{eger } M X_1 \geq 0$$

olarsa,

burada A – mütləq konstantdır. Dolaşmanın E-i əyrizətli sərhədlər halı (bax, [3], [13]), asılı olmayan artımları proseslər (bax, [6], [7]), Markov zəncirləri (bax, [9]) üçün də öyrənilmişdir.

Dolaşma E. $\chi(u)$ -nün $n \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanması semi – Markov təsadüfi dolaşmaları üçün [8], [11], [12]-də öyrənilmişdir.

Dolaşma E. təsadüfi dolaşmalar üçün sərhəd məsələləri ilə bağlı araşdırmalarda mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; 1964, т. 5, № 2, с. 253–89; [4] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 3, с. 498–515; 1972, т. 17, в. 1, с. 143–47; [5] Нагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410–11; [6] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 350–57; 1976, т. 21, в. 3, с. 486–96; [7] Печерский Е. А., Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 3, с. 431–44; [8] Шуренков В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 248–63; [9] Пресман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861–900; [10] Lorden G., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 2, p. 520–27; [11] Kesten H., «Ann. Probab.», 1974, № 2, p. 355–86; [12] Jacod J., «Ann. Inst. H. Poincaré B», 1971, v. 7, № 2, p. 83–129; [13] Walk H., «Stoch. Proc. Appl.», 1989, v. 32, № 2, p. 289–304.

EKSSSES(i) paylanmanın «экссес распределения; excess of a distribution» – *unimodal paylanmanın* sıxlığının qrafikinə moda ətrafında dikzirvəli və ya yastı olduğunu ifadə edən xarakteristikadır. E-in ən çox istifadə olunan ölçüsü – *eksses əmsalıdır*. E-in digər göstəriciləri də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Əgər E. əmsalı sıfır bərabər, müsbət və ya mənfii olarsa, paylanmanın E. uyğun olaraq normal, müsbət və ya mənfii olur. Paylanmanın E-i müsbət (mənfii) olduqda, sıxlığın qrafiki moda ətrafında normal sıxlığın qrafiki ilə müqayisədə daha yüksək və şiş (uyğun olaraq daha alçaq və yastı) zirvəli olur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

EKSSSES ƏMSALI «экссес коэффициент; coefficient of excess» – paylanma ekssesinin ən sadə, ən çox istifadə olunan ölçüsüdür və

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada μ_4 – dördüncü mərkəzi moment, σ^2 – paylanmanın dispersiyasıdır. Normal paylanma üçün $\gamma_2 = 0$. $\gamma_2 > 0$ olduqda eksses müsbət, $\gamma_2 < 0$ olduqda eksses mənfidir.

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{n s^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 - 3$$

kəmiyyətinə seçimi eksses əmsalı deyilir, burada $X_1, \dots, X_n$ – eyni paylanma sıxlığına malik, asılı olmayan

təsadüfi kəmiyyətlər, $\bar{X}$ və s^2 – seçimi orta və seçimi dispersiyadır. Seçimi E. ə. $H_0: \gamma_2 \neq 0$ hipotezinin yoxlanılması kriterilərində istifadə olunur ki, bu hipotezdə X_i təsadüfi kəmiyyətinin paylanması normal paylanmadan fərqliliyi alınır.

α – EKSSSESSİV FUNKSİYA « α – экссессивная функция; α – excessive function» – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

EKSSSESSİV FUNKSİYA Markov zənciri üçün «экссессивная функция для цепи Маркова; excessive function for a Markov chain» – klassik anlamda mənfii olmayan superharmonik funksiyanın analoqudur; ehtimali potensial nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün). $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında, keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$,

$x \in E, \Gamma \in \mathcal{B}$ olan bircins Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Əgər $0 \leq f \leq \infty$ şərtini ödəyən f funksiyası $\mathcal{B}$ – ölçülən funksiya və $Pf \leq f$ münasibətini ödəyərsə,

$$Pf(\cdot) = \int_E f(y) p(\cdot, dy)$$

düsturu ilə təyin olunan f funksiyasına bu zəncir üçün *ekssessiv funksiya* deyilir (məs., vəziyyətləri çoxluğu 1, 2, ... olan zəncir üçün $f \geq 0$ funksiyasını $f_i = f(i)$ qəbul edərək $\{f_1, f_2, \dots\}$ ardıcılığı ilə eyniləşdirmək olar; onda

$Pf \leq f$ bərabərsizliyi $\sum_j p_{ij} f_j \leq f_i, i \geq 1$ bərabərsizliklər

sisteminə gətirilir, burada p_{ij} – i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır).

E. f.-ya aid misallar: mənfii olmayan konstantlar və $\pi_\Gamma(x)$ və $\varphi_\Gamma(x)$ funksiyalardır, burada $\pi_\Gamma(x)$ (uyğun olaraq $\varphi_\Gamma(x)$) $x \in E$ vəziyyətindən çıxaraq $\Gamma \in \mathcal{B}$ çoxluğunda sonsuz dəfə (uyğun olaraq heç olmazsa bir dəfə) olma ehtimalıdır. Bu misallardan birinci ikisində E. f.-lar zəncir üçün harmonik funksiyalardır. $0 \leq v \leq \infty$ şərtini ödəyən, $\mathcal{B}$ – ölçülən ixtiyari v funksiyasının potensialı $Rv = \sum_{n \geq 0} P^n v$ E. f.-ya aid bir misaldır.

Qayıdışlı Markov zəncirləri üçün bütün E. f.-lar məhz konstantlardır.

İxtiyari E. f. f harmonik funksiya və hər hansı $v \geq 0$ funksiyasının potensialının cəmi kimi ifadə olunur və bu ayrılış (R i s s a y r ı l ı ş ı) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n f < \infty$ (bax, [2]) olduğu halda yegənedir.

Markov prosesləri üçün E. f. anlayışının tərfi çətin olur. Məs., E – metrikləşən kompaktda Borel çoxluğu, $\mathcal{B}$ – onun bütün Borel altçoxluqlarının çoxluğu olsun. $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, dy)$, $t \geq 0, x \in E$ ilə bircins Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Əgər universal ölçülən f , $0 \leq f \leq \infty$ funksiyası (yeni $\mathcal{B}$ -nin tamamlanmasına nəzərən $\mathcal{B}$ -də ixtiyari sonlu ölçüyə nəzərən ölçülən funksiya) bütün $t \geq 0$ üçün $P_t f \leq f$ və

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t f = f$$

şertlerini ödeyərse,

$$P_t f(\cdot) = \int_E f(y) p(t, \cdot, dy)$$

berabərliyi ilə təyin olunan f funksiyasına bu proses üçün E. f. deyilir.

Əd.: [1] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel, Ch. IX-XI: Théorie discrète du potentiel, P., 1983.

EKSSESSİV FUNKSIYA Viner prosesinin hissəsi üçün « экссессивная функция для части винеровского процесса; excessive function for a part of the Wiener process » – bax, Viner prosesi; prosesin hissəsinin eks-sessiv funksiyaları.

α – **EKSSESSİV ÖLÇÜ** « α – экссессивная мера; α – excessive measure » – bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün.

EKSSESSİV ÖLÇÜ Markov zənciri üçün « экссессивная мера для цепи Маркова; excessive measure for a Markov chain » – *ekssessiv funksiya* anlayışına ikili anlayışdır. $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olan bircins Markov zəncirine baxıldığı fərz olunur. Əgər $\mathcal{B}$ -də verilmiş μ ölçüsü σ – sonlu və $\mu P \leq \mu$ olarsa,

$$\mu P(\cdot) \equiv \int_E p(x, \cdot) \mu(dx)$$

eyniliyi ilə təyin olunan μ ölçüsünə bu zəncir üçün *ekssessiv ölçü* deyilir (məs., vəziyyətləri çoxluğu 1, 2, ... olan Markov zənciri üçün μ ölçüsünü $\mu_i = \mu(\{i\})$ qəbul edərək, $\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ ardıcılığı ilə eyniləşdirmək olar, onda $\mu P \leq \mu$ berabərsizliyi $\sum_{i \geq 1} p_{ij} \mu_i \leq \mu_j$, $j \geq 1$ berabərsizliyinə çevrilir, burada p_{ij} – i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalıdır).

Zəncirin ixtiyari stasionar paylanması E. ö. təyin edir.

Markov prosesləri və qeyri – bircins zəncirlər halında E. ö.-nün tərfi çətinləşir. Məs., $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verilən və keçid funksiyası $p(t, x, dy)$, $t \geq 0$, $x \in E$ olan bircins Markov zənciri üçün E. ö. kimi $\mathcal{B}$ σ – cəbrində və ya onun hər hansı genişlənməsində təyin olunmuş, $\mu P_t \leq \mu$, $t \geq 0$ və $t \downarrow 0$ olduqda $\mu P_t \rightarrow \mu$ şərtini ödəyən

$$\mu P_t(\cdot) = \int_E p(t, x, \cdot) \mu(dx)$$

berabərliyi ilə təyin olunan σ – sonlu μ ölçüsü anlaşılır.

Bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün.

232 EKSSİSSİV

Əd.: [1] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel, Ch. IX-XI: Théorie discrète du potentiel, P., 1983.

EKSTRAPOLYASIYA(SI) təsadüfi proseslərin « экстраполяция случайных процессов; extrapolation of a random process » – bax, Təsadüfi proses; proqnozlanma, ekstrapolyasiya.

EKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « экстремальных экспериментов планирование; design of extremal experiments » – regressiya funksiyası $M y(x)$ -in lokal ekstremumunun axtarılması üçün aparılacaq eksperimentlərin şərtlərinin seçilməsidir, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Bu halda eksperiment təsadüfi $y(x)$ meydanının qiymətinin hesablanmasıdan ibarətdir. E. ö. p. alqoritmlərinin ümumi şəkl aşağıdakı kimidir:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma_k s_k, \quad (*)$$

burada $k \geq 0$ – iterasiyanın nömrəsi, $y_0, y_1, \dots$ – addımların uzunluğu adlanan mənfə olmayan təsadüfi kəmiyyətlər; $s_0, s_1, \dots$, – n – ölçülü təsadüfi vektorlar (hərəkətlərin istiqamətləri);

$x^{(0)} \in X$ başlanğıc yaxınlaşmadır. (*) nöqtələri ardıcılığının $g(x) = M y(x)$ regressiya funksiyasının lokal ekstremum nöqtəsinə yığılması və yığılma sürətinin araşdırılması üçün stoxastik approksimasiya və adaptiv idarəetmə nəzəriyyələrinin nəticələri istifadə oluna bilər (bax, [1]).

E. ö. p. alqoritmlərinin keyfiyyəti, adətən, asimptotik deyil, lokal (biraddımlı) xassələrlə xarakterizə olunur.

E. ö. p. alqoritmlərində, adətən, aşağıdakılar nəzərə alınır:

1) eksperimental verilənlərin statistik analizinin təkrar-təkrar aparılması (eyni zamanda regressiya funksiyasının xətti və ya kvadratik modelinin qurulması üçün xətti regression analizinin aparılması);

2) alqoritmın hər bir iterasiyasında eksperimentin planının spesifik olaraq seçilməsi (planın seçilməsi üçün kriterilər: ortoqonallıq, rotabellik, kompozisionluq, müxtəlif mənalarda D –, Q –, A – optimallıq və s. kimi kriterilər nəzərdə tutulur). (bax, [1] – [3] və *Regression eksperimentlərinin planlaşdırılması*);

3) qurulmuş regression modellərə və xüsusi optimallıq kriterilərinə uyğun hərəkət istiqamətinin seçilməsi (hərəkət istiqaməti – verilmiş nöqtədə regressiya funksiyasının qradientinin statistik qiymətidir; bax, [2], [3]);

4) seçilmiş istiqamət üzrə aparılmış bir neçə ölçmədən sonra addımın uzunluğunun təsadüfi kəmiyyət kimi seçilməsi (bax, [2] – [4]). E. ö. p. üçün alqoritmlərdən ən çox istifadə olunanı simpleks metod (bax, [2], [3], [6]) və dik yüksəliş metodudur (bax, [2] – [5]).

Simpleks metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, $k > n$ qiymətlərində $x^{(k)}$ nöqtələri tepələri $x^{(0)}, \dots, x^{(k-1)}$ nöqtələrindən bəziləri olan çoxüzlünün bu çoxüzlünün hər hansı bir üzünə nəzərən inikəsindən alınır. Simpleks metodun sadə variantı 20-ci əsrin 60-cı illərində təklif olunmuş *ardıcıl simpleks metodudur*. Bu metodda requlyar simplekslərin [yeni $(n+1)$ tepəli düzgün çoxüzlülərin] $y(x^{(i)})$ təsadüfi kəmiyyətinin ən əlverişsiz (minimum axtarılsa, ən böyük; maksimum axtarılsa, ən kiçik) qiymətlərinə bərabər uyğun tepələrə qarşı üzlərə görə güzgü əks olunmasından istifadə olunur.

Simplekslərin ölçüləri addımın nömrəsi artdıqca, adətən, azaldılır. belə ki, bu ölçülər sabit qaldıqda axtarışın əvvəlində hərəkətin yüksək sürəti və sonda ekstremumun tapılması dəqiqliyini eyni zamanda təyin etmək mümkün olmur.

Maksimum axtarışı üçün dik yüksəliş metodu - nün standart variantının mahiyyəti aşağıdakı kimidir.

$x^{(k)}$ nöqtəsindən s_k hərəkət istiqamətini seçmək məqsədilə N sayda ölçmə seriyası ($N > n$) aparılır [yeni X çoxluğunun xüsusi qaydada təyin olunmuş nöqtələrində $y(x)$ təsadüfi meydanının qiymətləri hesablanır]. Ölçmələrin aparıldığı nöqtələr $x^{(k)}$ -nin ələ kiçik ətrafında tapılır ki, bu ətrafda reqressiya funksiyası $\eta(x)$ -in x -dən xətti asılılığı təxminən ödənilir. Xətti reqressiyanın parametrləri (o cümlədən, $\nabla \eta(x^{(k)})$ qradientinin komponentləri) ən kiçik kvadratlar metodu ilə qiymətləndirilir. Əgər reqressiya funksiyasının statistik qiyməti sabitdən olduqca fərqlənirsə, onda bu statistik qiymət s_k kimi götürülür, əks halda əlavə ölçmələr aparılır və reqressiya funksiyası üçün x -ə görə kvadratik modelin parametrləri qiymətləndirilir. Bu halda $x^{(k+1)}$ kimi kvadratik reqressiyanın statistik qiymətinin ekstremum nöqtəsi götürülür. $\nabla x^{(k)}$ - qradientinin statistik qiyməti istiqamətində addımın uzunluğu γ_k -ni təyin etmək üçün qeyd olunmuş istiqamətdə bir-birindən eyni məsafədə yerləşən $\{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ nöqtələr ardıcılığı seçilir və $y(z_j)$, $j = 1, 2, \dots$ kəmiyyətləri o vaxta qədər hesablanılır ki, $y(z_j) < y(z_{j-1})$ bərabərsizliyi ödənilsin; bu halda $x^{(k+1)} = z_j$ qəbul olunur. Addımın uzunluğu və hərəkət istiqamətlərinin seçilməsi üçün müxtəlif üsullar da mümkündür.

Əgər ölçmələrin aparılması üçün ya 2^n sayda tam faktor plan [yeni ölçmələr $x^{(k)} + (\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_n)^T$ tipli 2^n sayda nöqtədə aparılır] seçilsə və ya bu plandan kəsri replikalar seçilsə, onda dik yüksəliş metodu - B o k s - U i l s o n m e t o d u adlanır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [3] Н а л и м о в В. В., Ч е р н о в а Н. А., Статистические методы планирования экспериментальных экспериментов, М., 1965; [4] А д л е р Ю. П., М а р к о в а Е. В., Г р а н о в с к и й Ю. В., Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий, 2 изд., М., 1976; [5] Д а м б р а у с к а я А. П., Симплексный поиск, М., 1979.

EKSTREMAL QIYMƏTLƏR PAYLANMASI
« экстремальных значений распределение; distribution of extreme values » - eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusunda ən böyük $\xi_{(nn)}$ və ya ən kiçik $\xi_{(1n)}$ qiymətinin paylanmasıdır; bu paylanma *qaydalı statistikələr* paylanması xüsusi halıdır.

Əgər ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ məlumdursa, onda

$$F_{nn}(x) = \mathbf{P} \{ \xi_{(nn)} < x \} = F^n(x),$$

$$F_{1n}(x) = \mathbf{P} \{ \xi_{(1n)} < x \} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Ekstremal qiymətlərin medianları - $\bar{m} = m(\xi_{(nm)})$ və

$\underline{m} = m(\xi_{(1n)})$ xarakteristikalarını $F(\bar{m}) = 1 - F(\underline{m}) = 1/2^n$ tənliyindən tapmaq olur. E. q. p.-nin mühüm xarakteristikaları xarakteristik ekstremumlar: $F(u_n) = 1 - 1/n$ tənliyindən təyin olunan xarakteristik ən böyük qiymət - u_n və $nF(u_1) = 1$ tənliyindən təyin olunan xarakteristik ən kiçik qiymət - u -dur.

u_n -dən kiçik olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin orta sayı u_1 -dən böyük olmayan kəmiyyətlərin orta sayı ilə üst-üstə düşür və 1-ə bərabərdir. Xarakteristik ekstremumlar uyğun olaraq ilkin paylanmanın $(n-1)/n$ və $1/n$ tərtibli kvantilləri ilə üst-üstə düşür. Bu xarakteristikalar müşahidələrin ekstremal nəticələrinin qəbul edilib-edilməməsi üçün Ş o v e n e k r i t e r i s i - n i n əsasını təşkil edir (bax, [1]).

$\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ ümumi paylanma funksiyası $F^{(n)}(x)$ olan və özünün ən böyük xarakteristik qiyməti ilə mərkəzlənmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun, yeni $F^{(n)}(0) = 1 - 1/n$. Onda

$\lim_{n \rightarrow \infty} (F^{(n)}(x))^n = \varphi(x) = \exp(e^{-ax})$ münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(y/an)) = e^{-y}$$

şerti zəruri və kafidir, burada $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $F^{(n)}(1/a_n) = 1 - 1/ne$ (bax, [2]);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F^{(n)}(x))^n = \Phi(x) = \begin{cases} \exp(-(x+r)^k), & x \geq -r, \\ 0, & x < -r \end{cases}$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{(n)}(x)}{1 - F^{(n)}(cx)} = c^k,$$

$$\inf \{ x: F^{(n)}(x) > 0 \} = -r < \infty;$$

şerti zəruri və kafidir, burada $c > 0$, $k > 0$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F^{(n)}(x))^n = \Psi(x) = \begin{cases} \exp(-((w-x)/w)^k), & x \leq w, \\ 1, & x > w \end{cases}$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - F^{(n)}(cx + w)}{1 - F^{(n)}(x + w)} = c^k,$$

$$\sup \{ x: F^{(n)}(x) < 1 \} = w > 0$$

şerti zəruri və kafidir, burada $c > 0$, $k > 0$.

$\Delta(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ - limit paylanma funksiyaları bütün mümkün olan halları əhatə edir.

$$F_{(nn)}(x) = 1 - F_{(1n)}(-x)$$

olduğuna əsasən, alınmış nəticələrdən ən kiçik qiymət üçün limit teoremlərini almaq olur.

Əd.: [1] Г у м б е л ь Э., Статистика экстремальных значений, пер. с англ., М., 1965; [2] Г н е д е н к о В., «Ann. Math.», v. 44, № 3, p. 423–53.

EKSTREMAL STATİSTİK MƏSƏLƏ « экстремальная статистическая задача; extremal statistical problem » – $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{X}, y \in Y, f_n: \mathcal{X}^n \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ olduqda, $X_1, X_2, \dots, X_n$ seçiminin elementləri və y parametri-nin funksiyası f_n -i minimallaşdıran $y(f_n) \in Y$ parametrinin qiymətinin, yəni

$$y(f_n) = \arg \min_{y \in Y} f_n(X_1, X_2, \dots, X_n; y)$$

kəmiyyətinin tapılması məsələsidir.

Tətbiqi statistikanın bir çox məsələləri, xüsusi halda K. Qaussun (C. Gauss, 1795) adı ilə bağlı ən kiçik kvadratlar metodu E. s. m.-lərə gətirir. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin statistika-sında E. s. m. mühüm rola oynayır.

E. s. m.-lərin asimptotik həlləri müəyyən olunmuşdur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12.

EKVİVALENT ADDİTİV FUNKSIONALLAR « эквивалентные аддитивные функционалы; equivalent additive functionals » – bax, Markov pro-sesi; additiv funksional.

EKVİVALENT BÖLGÜLƏR « эквивалентные разбиения; equivalent partitions » – bax, Ölçülən bölgü.

EKVİVALENT ÖLÇÜLƏR « эквивалентные меры; equivalent measures » – eyni bir spektral tipə aid (Hellinger tipinə) ölçülərdir. Daha dəqiq, E – əsas bazis fəza, S – E -nin hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr (hər hansı σ – halqa) və $\mathcal{M}$, – S -də təyin olunmuş bütün mümkün ölçülər sinfi olsun. $\mathcal{M}$ -də $\mu \equiv \lambda$ binar münasibətinə baxılır, bu münasibət belə anlaşıdır: μ və λ ölçülərindən hər biri digərinə nəzərən mütləq kəsilməzdir (yəni $\mu \ll \lambda$ və $\lambda \ll \mu$). Bu münasibət $\mathcal{M}$ -də ekvivalentlik münasibətidir və deməli, $\mathcal{M}$ sinfi bu münasibətlə bir-birilə kəsişməyən boş olmayan altsiniflərə ayrılır; bunlar bu altsiniflərə daxil olan ölçülərin spektral tipləri adlanır. σ – sonlu μ və λ ölçüləri üçün $\mu \equiv \lambda$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\mu \ll \lambda$ olsun və

$$\left\{ x \in E: \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = 0 \right\}$$

çoxluğunun μ – ölçüsü sıfıra bərabər olsun. Verilən spektral tipdə bu tipin hər hansı kanonik ifadəsinin seçilib ayrılınması məsələsinə olduqca tez-tez baxılır. Məs., eyniliklə sıfıra bərabər olmayan ixtiyari σ – sonlu ölçü ilə ehtimal ölçüsünə ekvivalentdir ki, bu ölçü ilə eməliyyat aparmaq asan olur. Bir ölçüden digər ona ekvivalent ölçüyə keçmək əvvəlki ölçünün bir çox xassələrini özündə saxlayır, lakin bu zaman bir sıra mühüm xassələr pozula bilər. Məs., heqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}^1$ -də verilən klassik σ – sonlu Lebeq ölçüsündən ona ekvivalent hər hansı ehtimal ölçüsünə keçdikdə Lebeq ölçüsünün $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunda bütün izometrik çevirmələri qrupuna nəzərən invariantlıq xassəsi

234 EKVİVALENT

ödənilir (itir). Bu halda alınan ehtimal ölçüsü qeyd olunan qrupa nəzərən kvazi – invariantlıq xassəsinə malik olur ki, bu xassə invariantlıq xassəsilə müqayisədə olduqca zəifdir.

Qeyd olunmuş spektral tipin bütün ölçülərinə xas olan ixtiyari xassə, adətən, bu tipin öz xassəsi kimi anlaşıdır.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ѝ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

*** EKVİVALENT TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « эквивалентные случайные величины; equivalent random variables »** – $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş və

$$P\{\omega: \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0$$

münasibətini ödəyən $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinə deyilir. $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ E. t. k.-lərdirsə, onda

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\omega: \eta(\omega) < x\} = F_{\eta}(x)$$

münasibəti bütün x -lər üçün ödənilir ($x \in \mathbb{R}^1$). $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni paylanma funksiyasına

malik olması simvolik olaraq $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ kimi işarə olunur. $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ olarsa, $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin E. t. k. olduğunu hökm etmək olmaz.

Misal. 1) $\xi(\omega)$ – mütləq kəsilməz və 0-a nəzərən simmetrik paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsun, yəni $\xi(\omega)$ -nin paylanmasının sıxlıq funksiyası bütün x -lər ($x \in \mathbb{R}^1$) üçün $p(-x) = p(x)$ bərabərliyini ödəyir. $\eta(\omega) = -\xi(\omega)$ olsun. $\xi(\omega)$ simmetrik təsadüfi kəmiyyət olduğundan aydındır ki, $F_{\xi} = F_{\eta}$, yəni $\xi \stackrel{d}{=} \eta$. $\xi(\omega)$ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduğundan bu təsadüfi kəmiyyətin hər bir x qiymətini alması ehtimalı sıfırdır: $P\{\omega: \xi(\omega) = x\} = 0$. Beləliklə,

$$\begin{aligned} P\{\omega: \xi(\omega) = \eta(\omega)\} &= P\{\omega: \xi(\omega) = -\xi(\omega)\} = \\ &= P\{\omega: \xi(\omega) = 0\} = 0 \end{aligned}$$

deməli, $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğuna baxmayaraq onlar E. t. k. deyildirlər.

2) $\xi(\omega)$ – diskret, 0-a nəzərən simmetrik təsadüfi kəmiyyət və $P\{\omega: \xi(\omega) = 0\} < 1$ olsun (əgər $P\{\omega: \xi(\omega) = 0\} = 1$ olarsa, bu trivial haldır). Onda $\xi(\omega)$ -nin sonlu və ya hesabı ədədi $\{-\infty, -x_2, -x_1, x_0 = 0, x_1, x_2, \dots\}$ çoxluğunda

$$P_0 = P\{\xi(\omega) = 0\},$$

$$P_j = P\{\xi(\omega) = x_j\} = P\{\xi(\omega) = -x_j\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

ehtimalları ilə qiymətlər aldığıni fərz etmək olar: $0 < x_1 < x_2 < \dots$ və

$$P_0 + 2 \sum_j P_j = 1.$$

$\eta(\omega) = -\xi(\omega)$ olsun. Onda aydındır ki, $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, lakin $P\{\omega: \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} > 0$, yəni $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ E. t. k. deyildir.

3) ξ, η, γ eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\xi \stackrel{d}{=} \eta \not\Rightarrow \xi\gamma = \eta\gamma$. $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ və $g(x)$ funksiyası ($x \in \mathbb{R}^1$) $\mathcal{B}^1$ – ölçülən funksiya olarsa, onda $g(\xi)$ və $g(\eta)$ funksiyaları da təsadüfi kəmiyyətlərdir və $g(\xi) \stackrel{d}{=} g(\eta)$. Onda bu fakt $\xi \stackrel{d}{=} \eta \Rightarrow \xi\gamma = \eta\gamma$ hipotezinin ixtiyari γ təsadüfi kəmiyyəti üçün irəli sürülməsinə səbəb ola bilər.

Ümumi halda belə hipotezin əsassız olduğu subut edilir.

ξ simmetrik təsadüfi kəmiyyət (bax, mis. 1) və $\eta = -\xi$; $\gamma = \eta$, yəni $\gamma = -\xi$ olsun. Onda $\xi\gamma = -\xi^2$, $\eta\gamma = \xi^2$ olur. Beləliklə, $\xi\gamma$ təsadüfi kəmiyyəti müsbət olmayan qiymətlər aldığı

halda, $\eta\gamma$ mənfi olmayan qiymətlər alır. Deməli, $\xi\gamma \stackrel{d}{=} \eta\gamma$ bərabərliyini yazmaq olmaz. $P\{\xi=0\}=1$ isə trivial hal kimi maraq doğurmur.

Əd.: [1] Стоянов Й., Контрпримеры в теории вероятностей. М., 1999; [2] Лоев М., Теория вероятностей. М., 1962.

EKVİVALENT YİĞİLAN ARDICILLIQLARI, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « эквивалентно – сходящиеся последовательности случайных величин; equivalently converging sequence of random variables » – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət*.

EKVİVALENT YÜKLƏR « эквивалентные заряды; equivalent charges » – bax, *Mütləq kəsilməzliyi, ölçülərin*.

EKVİVARIANT STATİSTİK QIYMƏT « эквивариантная оценка; equivariant estimator » – parametri qiymətləndirmə məsələsinin qrup strukturunu dəyişməyən statistik qiymətdir. $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – ölçülən $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzasında ehtimal ölçüləri ailəsi, G , – $\mathcal{X}$ -də ele çevirmələr qrupu olsun ki, $g\mathcal{X} = \mathcal{X}$ və $g\mathcal{A} = \mathcal{A}$ bərabərlikləri bütün $g \in G$ üçün ödənilsin; Θ -da çevirmələr qrupu $\overline{G}$, – $P_\theta(A) = P_{g\theta}(gA)$ eyniliyi bütün $A \in \mathcal{A}$ və $g \in G$ -lər üçün ödənilərək təyin olunur.

Əgər $\hat{\theta}(gX) = \overline{g}\hat{\theta}(X)$ bütün $g \in G$ -lər üçün ödənilərsə,

θ parametrinin statistik qiyməti $\hat{\theta}(X)$ G qrupuna nəzərən ekvivalent statistik qiymət adlanır, burada X – qiymətləri $\mathcal{X}$ -dən olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Ekvivariant qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin ən mühüm nəticələri G -yə nəzərən invariant itki funksiyası L olduğu hala, yəni bütün $g \in G$ -lər üçün $L(\theta, \hat{\theta}) = L(\overline{g}\theta, \overline{g}\hat{\theta})$ olduğu hala aiddir. Bəzən «E. s. q.» termini əvəzinə «düzgün statistik qiymət» termini də istifadə olunur.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

ELAYZINQ « элайзинг; aliasing » – bax, *Tezliklərin üst-üstə düşməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzing*.

ELEMENTAR ÇOXLUQ « элементарное множество; elementary set » – bax, *Hasil(i) ölçülərin*.

ELEMENTAR EHTİMAL « элементарная вероятность; elementary probability » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*.

ELEMENTAR HADİSƏ « элементарное событие; elementary event » – ehtimal modelinin ilkin anlayışdır.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının tərifində boş olmayan Ω çoxluğu elementar hadisələr fəzası, bu çoxluğun ixtiyari $\omega \in \Omega$ nöqtəsi – elementar hadisə adlanır. Qeyri – formal yanaşmada Ω çoxluğu hər hansı *stoxastik eksperimentin* bütün mümkün olan, bir-birini inkar edən, ayrılmayan nəticələri çoxluğunu təsvir edir və ω – E. h. elementar nəticəyə uyğundur: eksperiment, yalnız və yalnız, bir elementar nəticə ilə sona çatır, Ω çoxluğunun nöqtəsi ω E. h. və $\mathcal{A}$ çoxluqlar sinfinin elementi $\{\omega\}$ hadisəsi arasında prinsipial fərq vardır.

Bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi, Ehtimal fəzası, Təsadüfi hadisə, Cəbri, hadisələrin*.

ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI « элементарных событий пространство; space of elementary events » – bax, *Fəzası, ölçülərin*.

ELEMENTAR ÖLÇÜ « элементарная мера; elementary measure » – heç olmasa bir elementar hissəyə (erqodik komponentə) malik, kvaziinvariant (invariant) ölçüdür.

(X, G, S, μ) – kvaziinvariant (invariant) ölçülü fəza olsun, başqa sözlə, X – əsas bazis çoxluq, G – bu çoxluğun çevirmələrinin hər hansı qrupu, S , – X çoxluğunun hissələrinin hər hansı G – kvaziinvariant σ – halqası və μ , – S σ – halqasında verilən hər hansı G – kvaziinvariant (G – invariant) ölçü olsun. Daha sonra, Y , – X -də sanki G – invariant (μ -yə nəzərən) ixtiyari μ – ölçülən çoxluq olsun. Onda

$$\mu_Y(Z) = \mu(Z \cap Y), \quad Z \in S$$

bərabərliyi ilə təyin olunan μ_Y funksiyası, S σ – halqasında G – kvaziinvariant (G – invariant) ölçüdür. Bu ölçü μ ölçüsünün Y çoxluğuna uyğun hissəsi (komponent hissəsi) adlanır. μ ölçüsünün hissəsi μ_Y trivial olmazsa (yəni eynilik kimi sıfıra bərabər olmazsa) və erqodik olarsa (yəni metrik tranzitivlik xassəsinə malik olarsa), onda μ_Y elementar ölçü adlanır. Erqodiklik xassəsi belə anlaşılır: əgər ixtiyari μ – ölçülən $Z \subset Y$ çoxluğu və ixtiyari g üçün $g \in G \Rightarrow \mu(g(Z) \Delta Z) = 0$ münasibəti $\mu(Z) = 0 \vee \mu(Y \setminus Z) = 0$ dizyunksiyasını doğursasa, μ erqodik xassəyə malikdir, deyilir.

Praktikada əsas etibarilə elementar kvaziinvariant (invariant) ölçülərə təsadüf olunur. Lakin elementar olmayan invariant ölçülər vardır. Bundan başqa, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Evklid fəzasında bu fəzanın bütün hərəkətləri qrupuna invariant, $\mathbb{R}^n$ -də klassik Lebeq ölçüsünün davamı olan, lakin elementar olmayan ölçü qurmaq olur.

Əd.: [1] Харазшивили А. Б., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

ELFİNQ EKVİVALENTLİK TEOREMİ « Эльфинга теорема эквивалентности; Elfing equivalence theorem » – bax, *Regressiya eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ELLIPTİK QANUN « эллиптический закон; elliptic law » – n – tərtib $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ təsadüfi matrislərinin normalanmış *spektral funksiyaları* üçün limit qanunudur; bu matrisin vektorları (ξ_{ij}, ξ_{ji}) , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ asılı olmayan təsadüfi vektorlar fərz olunur. Fərz olunur ki, $n=1, 2, \dots$ qiymətlərinin hər birində (ξ_{ij}, ξ_{ji}) , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ eyni ehtimal fəzasında verilmiş stoxastik asılı olmayan təsadüfi vektorlardır və bu matrisin elementləri üçün

$$\mathbf{M}\xi_{ij} = 0, \quad \mathbf{M}|\xi_{ij}|^2 = n^{-1}, \quad \mathbf{M}\xi_{ij}\xi_{ji} = n^{-1}\rho, \\ i \neq j, \quad 0 < |\rho| < 1$$

şərtləri ödənilir. $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^n$ təsadüfi matrisinin təsadüfi elementləri ξ_{ij} , ξ_{ji} -lərin xəyali və həqiqi hissələrinin ikiölçülü ehtimal sıxlıqları $p_{ij}^\beta(x_s)$, $s = 1, \dots, 4$ mövcuddur. hər hansı $\beta > 1$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} \int \rho_{ij}^\beta(x_s) \prod_{s=1}^4 dx_s < \infty, \quad s=1, \dots, 4,$$

hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} \mathbf{M}|\xi_{ij}\sqrt{n}|^{2+\delta} < \infty$$

şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari x və y üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = \lambda(x, y)$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir, burada

$$v_n(x, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(\operatorname{Re} \lambda_k - x) F(\operatorname{Im} \lambda_k - y),$$

$y < 0$ olduqda $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda $F(y) = 0$, λ_k , $-\Xi_n$ matrisinin məxsusi qiymətləridir, $\lambda(x, y)$ – elliptik paylanma qanunudur və onun sıxlığı

$$p(x, y) = \pi^{-1} [1 - (a^2 + b^2)^2]^{-1}$$

düsturu ilə ifadə olunur, bu şərtlə ki, x və y dəyişənləri

$$(bx - ay)^2 (1 - a^2 + b^2)^{-2} + \\ + (ax + by)^2 (1 + a^2 + b^2)^{-2} < a^2 + b^2$$

bərabərsizliyini ödəsinlər,

$$a = \operatorname{Re} \sqrt{\rho}, \quad b = \operatorname{Im} \sqrt{\rho}.$$

Əd.: [1] Г н р к о В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–104.

ELLIPTİK TƏNLİK; Monte – Karlo metodu ilə həll « эллиптическое уравнение; решение методом Монте-Карло; Monte-Carlo solution method for an elliptic equation » – sərhəd məsələsinin həlli $u(\cdot)$ -nin şərti riyazi gözlemə şəklində, yəni

$u(x) = \mathbf{M}_x F(W)$ ifadəsinə əsaslanan, Monte – Karlo metodunun alqoritmlərinin toplusudur, burada W – müvafiq təsadüfi prosesin x nöqtəsindən başlayan təsadüfi trayektoriyası, F – bu trayektoriyanın funksionalıdır. Məs., $\Delta u(x) = 0$, $x \in G$ Laplas tənliyi üçün; $u(x)|_{\partial G} = \varphi(x)$ Dirixle məsələsi üçün; $W(t)$ Braun hərəkəti prosesinin trayektoriyası olacaqdır, $F(W) = \varphi(W(\tau))$, burada τ – trayektoriyanın ∂G üzərinə ilk çıxış anıdır. Oxşar ifadələr Laplas, Puasson, Helmholtz, bi. poli. və metaharmonik və həm də istilikkeçimə tənliklərinin müxtəlif sərhəd məsələsi üçün doğrudur. Hesablamalarda Braun hərəkəti təqribi olaraq şəbəkə üzrə dolaşma ilə əvəz oluna bilər (bu da məsələnin fərqlər metodu ilə həllinə gətirir). *Sferalar üzrə dolaşma metodu* daha effektiv sayılır, bu metodla $F(W)$ -nin hesablanması trayektoriyanın əhəmiyyətsiz hissələrini nəzərə almamaq olur. Oblastın sərhədində dolaşma alqoritmləri də işlənmişdir, bunlar da potensial nəzəriyyəsi və elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində çox münasib sayılır (bax, [6]). İkinci tərtib ümumi elliptik tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həlli metodları diffuzion proseslərin statistik modeləşdirilməsi əsasında qurulmuşdur. Elliptik tənliklərin həlli üçün Monte – Karlo metodunun xüsusi cəhəti – həllin axtarılma funksionallının hesablanması mümkün olduğudur, məs., həll və onun qeyd olunmuş nöqtədə törəmələri kimi funksionalın və bu halda həllin statistik qiymətinin detalları ilə qurulması tələb olunmur.

Əd.: [1] Е л е п о в Б. С., [и др.], Решение краевых задач методом Монте – Карло, Новосиб., 1980; [2] Е р м а к о в С. М., Н е к р у т к и н В. В., С и п и н А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [3] Б р а у н Д. Ж., в кн.: Современная математика для инженеров, пер. с англ., М., 1959, с. 275–301; [4] M u l l e r M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 569–89; [5] М и х а й л о в Г. А., С а б е л ь ф е л ь д К. К., Ч е н ц о в Н. Н., в кн.: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования, Новосиб., 1982, с. 69–82; [6] С а б е л ь ф е л ь д К. К., С и м о н о в Н. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 275, № 4, с. 802–05.

EMİQRASIYA şəxslərlə prosesdə « эмиграция в ветвящемся процессе; emigration in branching process » – bax, *Şəxslərlə proses, emiqrasiya*.

EMPIRİK BEYES HƏLLEDİCİ FUNKSIYASI « эмпирическая бейесовская решающая функция; empirical Bayesian decision function / rule » – bax, *Beyes yanaşması empirik*.

EMPIRİK BEYES STATİSTİK QIYMƏTİ « эмпирическая бейесовская оценка; empirical Bayesian estimator » – empirik *Beyes yanaşması* çərçivəsində *statistik qiymətdir*, yəni baxılan (cari) eksperimentin nəticələrindən asılı olduğu kimi, qiymətləndirilən parametrin aprior paylanması haqqında informasiya daşıyan əvvəl aparılmış araşdırmanın da nəticələrindən asılı olan *həllədiçi funksiyadır*.

M i s a l. $f(x, \theta) = \theta^x e^{-\theta} / x!$, $x = 0, 1, \dots$ Puasson paylanması θ parametrinin *Beyes statistik qiyməti*, kvadratik itki funksiyası verildiyi halda, bir müşahidə üzrə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\theta_G(x) = \frac{(x+1)f_G(x+1)}{f_G(x)},$$

burada x – müşahidələrin nəticəsidir.

$$f_G(y) = \int_0^{\infty} f(y, \theta) G(\alpha\theta),$$

G – aprior paylanmadır. Fərz olunur ki, G naməlumdur, lakin əvvəlki k sayda eksperimentlərdən analogi müşahidələrin seriyası $x_1, \dots, x_k$ statistikə məlumdur və bu seriyanı müşahidələrin $f_G(\cdot)$ şərtsiz paylanmaya malik seçimdən olduğu kimi izah etmək olar. Bu halda $k \rightarrow \infty$ olduqda $f_G(x+1)$ və $f_G(x)$ tutarlı statistik qiymətlərini təklif etmək olar (məs., $\hat{f}_G(y)$ -i $x_1, \dots, x_k$ sırasında y nəticələrinin sayına bərabər götürərək).

$$\hat{\theta}_G(x) = (x+1) \hat{f}_G(x+1) / \hat{f}_G(x)$$

– E. B. s. q. sanki hər yerdə Bayes statistik qiymətinə yığılır və beləliklə, $k \rightarrow \infty$ olduqda $\theta_G(x)$ Bayes statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymətidir; E. B. s. q. ilə qurulmuş risk Bayes riskinə yığılır.

Əd.: [1] Роббинс Г., «Математика», 1966, т. 10, в. 5, с. 122–40; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

EMPIRİK BEYES YANAŞMASI « эмпирический байесовский подход; empirical Bayesian approach » – bax, *Bayes yanaşması* empirik.

EMPIRİK KOVARIASİON MATRİSİ « эмпирическая ковариационная матрица; empirical covariance matrix » – bax, *Təsadüfi matris*.

EMPIRİK MOMENT « эмпирический момент; empirical moment » – bax, *Empirik paylanma*.

EMPIRİK ORTA QIYMƏT(i) təsadüfi çoxluğun « эмпирическое среднее значение случайного множества; empirical mean value of a random set » – bax, *Orta qiymət(i)* təsadüfi çoxluğun.

EMPIRİK ORTOQONAL FUNKSİYALAR « эмпирические ортогональные функции; empirical orthogonal functions », – $X(r)$ təsadüfi meydanının empirik ortoqonal funksiyaları. – meydanın hansısa qeyd olunmuş N sayda nöqtəsində $x(r_k)$, $k=1, \dots, N$ qiymətlərinin b empirik korrelyasion matrisinin ortonormalanmış məxsusi $\{\varphi_j(r_k)\}$, $k=1, \dots, N$ vektorlarının nizamlanmış çoxluğu və bu çoxluq müşahidə verilənlərinə görə aşağıdakı düsturun köməyi ilə qiymətləndirilir:

$$b = \|b_{ik}\|, \quad b_{ik} = b(r_i, r_k) = \overline{x(r_i) x(r_k)},$$

burada xətt işarəsi baxılan seçim üzrə orta qiymət mənasında, $x(r)$ isə baxılan meydan ilə onun seçim üzrə ortalananmış qiymətlərindən yayınması kimi anlaşılır. Beləliklə, E. o. f. olan $\varphi_j(r_k)$ –

$$\sum_{k=1}^N b_{ik} \varphi_j(r_k) = \lambda_j \varphi_j(r_i), \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{k=1}^N (\varphi_j(r_k))^2 = 1, \quad j = 1, \dots, N$$

münasibətləri ilə təyin olunur, burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. E. o. f. N – ölçülü Evklid fəzasında ortonormalanmış bazis əmələ gətirir. E. o. f.-in digər bazislərdən üstünlüyü aşağıdakı kimi izah olunur.

$$x(r_k) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(r_k), \quad k = 1, \dots, N$$

– $\{x(r_k), k=1, \dots, N\}$ vektorunun hər hansı $\varphi_j(r_k)$ bazisi üzrə ayrılışı olsun. Onda, əgər $\varphi_j(r_k) = \varphi_j(r_k)$ olarsa, (*) ayrılışında yalnız $m < N$ sayda toplananları saxladıqda seçim üzrə orta kvadratik xəta belə approksimasiya nəticəsində minimal olur. Bu halda a_j əmsalları – baş komponentlər adlanır; a_j -lər aşağıdakı münasibətləri ödəyirlər:

$$\overline{a_j a_k} = \lambda_j \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \text{ olduqda} \\ 0, & j \neq k \text{ olduqda} \end{cases}$$

odur ki, (*) ayrılışı bu halda komponentləri qeyri – korrelyar ayrılış olur, bu halda approksimasiya xətası

$$\delta^2(m) = \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_N$$

düsturu ilə təyin olunur.

E. o. f. E. Lorensin [5] və A. M. Obuxovanın [1] işlərindən başlayaraq meteorologiyada geniş istifadə olunur. Belə ki, bu işlərdə $r_1, \dots, r_N$ fəzanın N sayda nöqtələridir (bax, [2], [3]).

Təbiiqə, adətən, m -in N -lə müqayisədə çox da böyük olmayan qiymətlərində $\delta^2(m)$ kəmiyyəti çox böyük olmur. Məs.,

$$N \approx 10 \text{ olduqda } \delta^2(1) \text{ əksər hallarda } \sum_{j=1}^N \lambda_j = \sum_{j=1}^N b_{ji}$$

cəminin 50%-ni təşkil edir (bu cəm meydanın ümumi dispersiyası adlanır), $\delta^2(3)$ isə bu cəmin yalnız 10%-ni təşkil edir. Belə hallarda b korrelyasion matrisinin ilk məxsusi qiymətləri bir-birindən olduqca fərqlənir və j nömrəsi artdıqca sürətlə azalır. İlk baş komponentlər a_j -lərin az sayı ilə bütün

N sayda nöqtələrdə $x(r_k)$ meydanını kompakt və kifayət dərəcədə dəqiq təsvir etmək olur, bu da E. o. f.-nin praktiki cəhətdən mənasib olduğunu sübut edir. Bundan başqa, mehz belə hallarda E. o. f. $\varphi_j(r_k)$ və λ_j ədədləri sonuncu seçimlə ən etibarlı surətdə qiymətləndirilir.

E. o. f. anlayışı məhdud G oblastında müşahidə olunan kəsilməz $x(r)$ meydanı üçün də təyin olunur. Yuxarıda qeyd olunan faktlar bu halda da doğrudur (uyğun dəyişikliklərlə bu halda məxsusi funksiyaların sayı sonlu deyil, hesabi olur).

Əgər $x(r)$ meydanına korrelyasion funksiyası $B(r_1, r_2)$ ilə ehtimal paylanmasına malik $X(r)$ təsadüfi meydanının realizasiyası kimi baxılırsa, onda aydındır ki, $\varphi_j(r)$ və λ_j , – G oblastında təsir edən, nüvəsi $B(r_1, r_2)$ olan integral operatorun məxsusi funksiyaları və məxsusi qiymətlərinin seçimi statistik qiymətləri olacaqdır. Bu mülahizədən aydın olur ki, (*) ayrılışı *Karunen – Loev ayrılışının* seçimi analoqudur.

Әд.: [1] О б у х о в а А. М., «Изв. АН СССР. Сер. Геофиз.», 1960, № 3, с. 432–39; [2] Естественные составляющие метеорологических полей, Л., 1970; [3] Ф о р т у с М. И., «Метеорология и гидрология», 1980, № 4, с. 113–19; [4] Г л у х о в - с к и й А. Б., Ф о р т у с М. И., «Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана», 1982, т. 18, № 5, с. 451–59; [5] L o r e n z E. N., «MIT Statist. Forecasting Proj.» Sci. Rep., № 1, Camb. (Mass.), 1956.

EMPIRİK ÖLÇÜ « эмпирическая мера; empirical measure » – bax, *Təsadüfi ölçü. Yığılma(sı)* empirik ölçülərin və empirik proseslərin.

EMPIRİK PAYLANMA « эмпирическое распределение; empirical distribution », seçimin paylanması – əsl paylanmanı qiymətləndirmək üçün seçim üzrə təyin olunan *ehtimal paylanmasıdır*. $\xi_1, \dots, \xi_n$ paylanma funksiyası $F(x)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $x_1, \dots, x_n$ bu təsadüfi kəmiyyətlərin müşahidələr nəticələrində aldığı uyğun qiymətlər. $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ uyğun variasion sıra olsun. Hər bir x_i , $i = 1, \dots, n$ nöqtəsinə $1/n$ ehtimalını qarşı qoyan diskret paylanmaya $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinə uyğun empirik paylanma deyilir (x_i nəticələri arasında təkrarlananları ola bilər, məs., x^* qiyməti l dəfə təkrar olunarsa, bu halda təkrarlanan x^* qiymətindən qonşu nöqtəyə keçdikdə empirik paylanma funksiyasının aldığı artım $1/n$ -ə bərabər olur). Fərz olunur ki, $x_1, \dots, x_n$ qiymətləri ehtimallanmışdır ki, $x_i < x_{i+1}$. Aydındır ki, $x_k < x \leq x_{k+1}$ şərtini ödəyən ixtiyari x üçün $\xi < x$ bərabərsizliyini ödəyən sınaqların sayı k -ya bərabər olacaqdır. Beləliklə, $x_k < x \leq x_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ olduqda, empirik paylanma funksiyası

$$F_n^*(x) = \frac{k}{n}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi bütün qiymətlər çoxluğu ümumi çoxluq (rus. – «генеральная совокупность») adlandırılır. Nəticələri asılı olmayan n sayda aparılmış müşahidələrdə ξ təsadüfi kəmiyyəti müşahidə olunmuş $x_1, \dots, x_n$ qiymətlər toplusuna n həcmli seçim, hər bir sınaq nəticəsində ξ -nin alınmış hər bir x_i qiymətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri deyilir. Seçimin elementləri ümumi çoxluğun elementləri olacaqdır. Bu baxımdan $x_1, \dots, x_n$ qiymətləri müşahidə olunan ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni qanunla paylanmış $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq $1, 2, \dots, n$ -ci sınaqda aldığı qiymətlərdir. n həcmli seçimdəki $x_1, \dots, x_n$ qiymətləri seçimi qiymətlər adlanır. n həcmli bir və ya bir neçə seçim əsasında çıxarılan nəticələr ümumi çoxluğu elmi əsaslarla xarakterizə etməyə imkan verir.

Beləliklə, ξ_i , – i -ci sınaqda (ixtiyari n həcmli sınaqlar seriyasında) müşahidə oluna bilən təsadüfi kəmiyyətdir və ξ_i -lərin ($i = 1, \dots, n$) paylanma qanunları ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu ilə eynidir, yəni i -nin ixtiyari qiymətində

$$P\{\xi < x\} = P\{\xi_i < x\} = F(x).$$

$$F(x) = P\{\xi < x\} \approx \frac{k}{n} = F_n^*(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

münasibətilə təyin olunan $F_n^*(x)$ funksiyasını $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyası üçün statistik qiymət kimi götürmək təbiiir. (1) münasibətindəki k kəmiyyəti n sayda aparılan müşahidədə $x_k < x$ şərti ödənilən k -lərin sayıdır, $k = 1, 2, \dots, n$.

(1) münasibətilə təyin olunan $F_n^*(x)$ funksiyasına ξ təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanma funksiyası deyilir.

Beləliklə,

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \xi_{(1)}, \\ k/n, & \xi_{(k)} < x \leq \xi_{(k+1)}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ 1, & x > \xi_{(n)}. \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan empirik paylanma funksiyası həmişə pilləvari funksiyadır, onun sıçrayışları $x_1, \dots, x_n$ kəmiyyətləri ilə təyin olunur və bu sıçrayışların qiymətləri $x_k < x_{k+1}$ olduqda $1/n$ -ə bərabər olur. $\xi_1, \dots, \xi_n$ -lərin qeyd olunmuş qiymətlərində $F_n^*(x)$ funksiyası adi paylanma funksiyasının bütün xassələrini ödəyir. Doğrudan da, $F_n^*(x)$ soldan kəsilməz, monoton azalmayan funksiyadır: $x \leq x_1$ olduqda ixtiyari x üçün $\xi < x$ bərabərsizliyi ödənilən sınaqların sayı sıfır, $x > x_n$ olduqda $\xi < x$ bərabərsizliyi ödənilən sınaqların sayı n -ə bərabər olur; $x_k < x \leq x_{k+1}$ olduqda isə $F_n^*(x) = \frac{k}{n}$ olduğundan

(2) – empirik paylanma funksiyasının ifadəsidir. Beləliklə, $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçiminə uyğun E. p. heqiqi x parametrindən asılı $F_n^*(x)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ailesi ilə verilir. x -in qeyd olunmuş qiymətində

$$M F_n^*(x) = F(x),$$

$$D F_n^*(x) = F(x)[1 - F(x)]/n$$

və

$$P\{F_n^*(x) = k/n\} = C_n^k [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k}$$

empirik paylanmanın uyğun riyazi gözləməsi, dispersiyası və k/n qiymətində ehtimaldır. Böyük ədədlər qanununa əsasən hər bir x qiymətində $n \rightarrow \infty$ olduqda $F_n^*(x) \xrightarrow{P} F(x)$ münasibəti ödənilir. Odur ki, $F_n^*(x)$ – paylanma funksiyası $F(x)$ -in meylsiz və tutarlı statistik qiymətidir. E. p. funksiyası $F(x)$ -ə 1 ehtimalla x üzrə müntəzəm yığılır və ya əgər

$$D_n = \sup |F_n^*(x) - F(x)|$$

olarsa, onda

$$P\{\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0\} = 1$$

(Qlivenko – Kantelli teoremi).

D_n kəmiyyəti E. p. funksiyası $F_n^*(x)$ ilə $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının yaxınlıq ölçüsünü xarakterizə edir. A. N. Kolmogorov (1933) $F(x)$ kəsilməz funksiyası üçün limit paylanmasını almışdır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n}D_n < z\} = K(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, \quad z > 0.$$

Əgər $F(x)$ naməlum olarsa, bu funksiyanın verilmiş $F_0(x)$ kəsilməz funksiya olduğu haqqında hipotezin yoxlanılması üçün D_n tipli statistikalarla əsaslanan kriterilər tətbiq olunur (bax, Kolmogorov kriterisi, Kolmogorov – Smirnov kriterisi).

E. p.-nin momentləri və ixtiyari digər xarakteristikaları seçimi (empirik) momentlər və xarakteristikalar adlanır, məs.,

$$M^* \xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \text{– seçimi orta və ya seçimi}$$

riyazi gözləmə,

$$D^* \xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - M^* \xi)^2, \quad \text{– seçimi dispersiya}$$

və ya empirik dispersiya,

$$m_r^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^r, \quad \text{– } r \text{ – tərtib seçimi moment,}$$

$$\sigma_\xi^* = \sqrt{D^* \xi} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - M^* \xi)^2}$$

– seçimi kvadratik orta yayınma E. p.-nin seçimi ədədi xarakteristikalarıdır.

Seçimi xarakteristikalar əsl paylanmanın uyğun xarakteristikalarının statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984.

EMPIRİK PAYLANMA FUNKSİYASI « эмпирическая функция распределения; empirical distribution function / e. d. f. » – bax. *Empirik paylanma*.

EMPIRİK PROSES « эмпирический процесс; empirical process » – bax, *Yığılma(sı)* empirik ölçülərin və empirik proseslərin.

EMPIRİK REQRESSİYA ƏYRİSİ « эмпирическая линия регрессии; empirical regression line / curve » – naməlum, əsl reqressiya əyrisinin statistik qiymətidir.

EMPIRİK TƏSİR FUNKSİYASI « эмпирическая функция влияния; empirical influence function » havanın statistik proqnozunda – çoxölçülü argumentin funksiyasıdır, onun qiymətlərlə hava proqnozunda reqressiya əmsallarının kəmiyyətləri təyin olunur; havanın proqnozu isə öngörül kəmiyyətin zaman üzrə dəyişikliyi təsvir edən dinamik sistemlərə görə seçilmiş prediktorlar sistemində əsaslanır (prediktorların qiymətlərini verilən proqnoz təyin edir).

Məs., atmosferin verilən bir nöqtəsində hər hansı meteoroloji meydanın qiyməti X -in proqnozu olunmalıdır, belə ki, hidro-

və termodinamika tənliklərindən aydındır ki, X -in zaman üzrə dəyişikliyi, ilk növbədə, müşahidəsi mümkün olan $y_1 = y_1(x, y, z, t)$, $y_2 = y_2(x, y, z, t)$ meydanlarının və Yer səthində verilən $y_3 = y_3(x, y, t)$ meydanının təsiri ilə əlaqəlidir və dX/dt törəməsinin y_1, y_2, y_3 meydanlarından asılılığını ilk yaxınlaşmada xətti hesab etmək olar. Bu halda hətta X üçün dinamik tənlik yazmadan, hökm etmək olar ki, qeyd olunmuş τ müddəti ərzində X -in qiymətinin dəyişikliyi aşağıdakı düsturla ifadə etmək olar:

$$\begin{aligned} \delta_\tau X = & \iiint G_r^{(1)}(\mathbf{x}^{(3)}) y_1(\mathbf{x}^{(3)}) dV + \iiint G_r^{(2)}(\mathbf{x}^{(3)}) y_2(\mathbf{x}^{(3)}) dV \\ & + \iint G_r^{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) y_3(\mathbf{x}^{(2)}) dS, \end{aligned} \quad (*)$$

burada $\mathbf{x}^{(3)} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x, y)$, $G_r^{(1)}(\mathbf{x}^{(3)})$, $G_r^{(2)}(\mathbf{x}^{(3)})$ və $G_r^{(3)}(\mathbf{x}^{(2)})$ – nəzəri təsir funksiyalarıdır, bu funksiyalar $\delta_\tau X$ artımının y_1, y_2, y_3 meydanlarından asılılığını təyin edirlər, $dV = dx dy dz$ və $dS = dx dy$ – həcm və sahə elementləridir. (*) düsturunun sağ tərəfindəki inteqrallar ədədi hesablamalarda cəmlərlə əvəz olunur və bu cəmlər hər hansı üçölçümlü və ya ikiölçümlü (üçüncü inteqral olduğu halda) şəbəkənin düyünləri üzrə götürülür. Bu zaman $\delta_\tau X$ kəmiyyəti üçün – X -in bir addıma dəyişikliyi üçün – cəbri düstur alınır ki, bu düsturun sağ tərəfinə uyğun şəbəkənin düyünlərində y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətləri, bu düyündə təsir funksiyalarından birinin qiymətlərinə mütənəsib olan əmsallarla xətti olaraq daxil olur. Buna görə də, uyğun şəbəkənin düyünlərində y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətlərini prediktorlar kimi seçmək təbii, bundan sonra isə prediktorlardakı ədədi əmsallar dinamik tənliklərdən istifadə etmədən reqressiya əmsallarının qiymətləri kimi (yeni X -in qiymətlərinin dəyişiklikləri və y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətləri haqqında daha ilkin müşahidələrin empirik verilənləri əsasında ən kiçik kvadrlar metodu ilə) təyin olunmalıdır. y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətlərində bu qayda ilə alınan əmsallar E. t. f. adlanır.

E. t. f.-nin istifadəsi metodu EHM-da çox sadə reallaşır, lakin meteoroloji meydanların gözlənilən qiymətlərinin proqnozlarının yüksək dəqiqliyini təmin etmir, bu da onunla bağlıdır ki, hidro- və termodinamika tənlikləri, adətən, olduqca böyük dim. – ölçülü (bir neçə yüz tərtibdən) reqressiya tənliklərinə gətirir və proqnozun daha əvvəl söylənilməsilə dinamik sistemlərin qeyri – xətti hədlərinin təsiri sürətlə artır ki, bunlar (*) düsturunda nəzərə alınmamışdır. Lakin E. t. f. ilə iş təcrübəsi reqressiya tənliklərinə əsaslanan statistik hava proqnozunun digər metodlarında geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Б е л о в П. Н., Численные методы прогноза погоды, Л., 1975.

ENDOMORFİZM dəqiq « эндоморфизм точный; exact endomorphism » – bax, *Dəqiq endomorfizm*.

ENDOMORFİZM sıfır modulu üzrə « эндоморфизм по модулю нуль; endomorphism mod 0 » – bax, *Endomorfizm(i)* ölçülü fəzanın.

ENDOMORFİZM(i) ölçülü fəzanın «эндоморфизм пространства с мерой; endomorphism of a measure space» – ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fəzasının özünə ölçülən və ölçünü dəyişməz saxlayan inikasıdır. Başqa sözlə, əgər $T: \Omega \rightarrow \Omega$ inikası:

1) $T\Omega = \Omega$;

2) ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün $T^{-1}A \in \mathcal{A}$, $P(T^{-1}A) = P(A)$ şərtlərini ödəyirsə, onda T inikası $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ölçülü fəzasının endomorfizmidir.

1) şərtini $T\Omega \in \mathcal{A}$ şərti ilə əvəz etdikdə sıfır modulu üzrə endomorfizm (endomorfizm mod 0) alınır; münasib bilinən sıfır ölçülü çoxluğu fazadan xaric etdikdə endomorfizm alınır. Dar mənada stasionar təsadüfi X_n , $n \geq 0$ ardıcılığının realizasiyaları fəzasında sola yerindəyişmə ehtimal fəzasının endomorfizmine bir misaldır.

ENERGETİK NORMA « энергетическая норма; energy norm » – bax, Markov prosesi; enerji.

ENERGETİK SPEKTR « энергетический спектр; energy spectrum » – bax, Spektral sıxlıq, Stasionar təsadüfi proses.

ENERJİ « энергия; energy » – bax, Markov prosesi; enerji.

ENERJİ SƏVİYYƏSİ « энергия уровень; energy level » – bax, Qeyri-kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.

ENERJİSİ, HİSSƏCİYİN « энергия частицы; energy of a particle » şəxələnen prosesdə – bax, Şəxələnen proses, enerjili.

ENİNƏ KORRELYASİON FUNKSİYA « поперечная корреляционная функция; transverse correlation function » – bax, Bircins və izotrop təsadüfi meydan.

ENQSET DÜSTURU « Энгсета формула; Engset formula » – N sayda tələblər mənbələri daxil olunmuş, itkili, qapalı n – xətti xidmət sistemində k sayda xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k -nın

$$p_k = \frac{(N-k)!}{k!} \frac{\lambda^k}{\mu^k} p_0, \quad 0 \leq k \leq n$$

münasibətilə verilən ifadəsidir, burada λdt – daxil olacaq tələb xətdə və ya növbədə olmadıqda, dt müddəti ərzində tələbin ola biləcəyi ehtimalı, μ – xətdə tələbə xidmət parametridir. T. Engset (T. Engset) tərəfindən 1918-də müəyyən olunmuşdur; sonradan mənbədə tələbin baş vermə müddəti və xidmət müddəti kəmiyyətlərinin ixtiyari paylanmalara malik sistemləri halları üçün ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, unter der Leitung von B. W. Gnedenko und D. König. Bd 2, B., 1984.

ENLİKLƏ – İMPULSAL MODULYASIYA « широтно – импульсная модуляция; pulse width modulation » – bax, İmpulsal təsadüfi proses.

ENMƏ « выброс отрицательный; negative outlier » – bax, Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın.

ENTROPİK GÜC « энтропийная мощность; entropy power » – ehtimal sıxlığı

$$p_{\xi}(x) = p_{\xi}(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin nəzəri – informatik xarakteristikasıdır. E. g. anlayışı K. Şennon (C. Shannon) tərəfindən daxil olunmuşdur. İnformasiya nəzəriyyəsində əsas bərabərsizliklərin çıxarılışında geniş istifadə olunur. Sonlu differensial entropiyalı ξ təsadüfi kəmiyyətinin E. g. – $N(\xi)$

$$N(\xi) = \frac{1}{(2\pi e)^{n/2}} \frac{2}{n} \exp h(\xi)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $h(\xi)$, – ξ -nin differensial entropiyasıdır və

$$h(\xi) = - \int p(x) \log p(x) dx,$$

$p(x)$ isə ξ -nin ehtimal sıxlığıdır.

Əgər $\|r_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin kovariasion matrisidirsə, onda

$$N(\xi) \leq \det \|r_{ij}\|;$$

xüsusi halda, ξ birölçülü təsadüfi kəmiyyət olarsa,

$$N(\xi) \leq M(\xi - M\xi)^2$$

olur; bu bərabərsizliklərdə bərabərlik münasibəti, yalnız və yalnız, ξ Gauss təsadüfi kəmiyyəti olduğu halda ödənilir. Beləliklə, kovariasion matrisi verilən Gauss təsadüfi kəmiyyəti maksimal E. g.-nə malikdir.

ξ və η – entropik gücləri uyğun olaraq, $N(\xi)$ və $N(\eta)$ olan (təyin olunmuş) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $N(\xi + \eta) \geq N(\xi) + N(\eta)$ bərabərsizliyi doğrudur; bu bərabərsizlikdəki bərabərlik münasibəti, yalnız və yalnız, ξ və η mütenasib kovariasion matrisləri Gauss təsadüfi kəmiyyətləri olduğu halda ödənilir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Бласскман Н. М., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1965, v. IT-11, № 2, p. 267–71; [3] Costa M. H. M., Cover T. M., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1984, v. IT-30, № 6, p. 837–39.

ENTROPİK KRİTERİ « энтропийный критерий; entropy criterion » – bax, Məqsədyönlü proyeksiyalama.

ENTROPİYA « энтропия; entropy » – təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənlik dərəcəsinin nəzəri – informatik ölçüsüdür və paylanma qanunu $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ ehtimallar toplusu ilə verilən ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti üçün $(\mathcal{X} = \{x_k, k = 1, 2, \dots\})$

$$H(\xi) = - \sum_k p_k \log p_k$$

bərabərliyi ilə təyin olunan kəmiyyətdir ($0 \cdot \log 0 = 0$ qəbul edilir). Ölçü vahidinin bit (ikilik vahidi) və ya nat (natural vahid) seçilməsindən asılı olaraq loqarifm uyğun olaraq 2 və ya e əsasına görə götürülür. Əgər $N = |\mathcal{X}|$

olarsa, ixtiyari diskret təsadüfi kəmiyyətin E.-sı menfi deyildir və $H(\xi) \leq \log N$, ξ müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olduğu halda $H(\xi) = \log N$ olur. $H(\xi) \geq 0$ və $H(\xi) = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, p_k -lardan birindən başqa hamısı sıfıra bərabər olduğu halda ödənilir.

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^r p_i \ln p_i \leq -r \cdot \frac{p_1 + \dots + p_r}{r} \times \\ \times \ln \left(\frac{p_1 + \dots + p_r}{r} \right) = \ln r$$

olduğundan E. özünün maksimal qiymətini $p_1 = \dots = p_r = \frac{1}{r}$ olduğu halda alır. İxtiyari $f(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ funksiyası üçün $H(f(\xi)) \leq H(\xi)$ bərabərsizliyi doğrudur.

ξ və η paylanma qanunları uyğun olaraq

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k=1, 2, \dots, \mathfrak{X} = \{x_k; k=1, 2, \dots\}$$

və

$$q_j = P\{\eta = y_j\}, \quad j=1, 2, \dots, Y = \{y_j; j=1, 2, \dots\}$$

ehtimallar toplusı ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər, $p_{k|j} = P\{\xi = x_k | \eta = y_j\}$ isə şərti ehtimal paylanması olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin η təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti entropiyası $H(\xi|\eta)$, –

$$H(\xi|\eta) = - \sum_j q_j \sum_k p_{k|j} \log p_{k|j}$$

kəmiyyətinə deyilir.

İxtiyari diskret ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

a) $H(\xi|\eta) \leq H(\xi)$, bu xassədə bərabərlik işarəsi ξ və η , yalnız və yalnız, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda ödənilir; b) $H(\xi|\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta) = H(\eta|\xi) + H(\xi)$. Diskret zamanlı və qiymətlər fəzası diskret olan $\zeta = \{\zeta_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ stasionar təsadüfi prosesinin entropiyası –

$$\bar{H}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H(\zeta^{(n)}) \quad (*)$$

limitinə deyilir, burada $\zeta^{(n)} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Aydındır ki, (*) münasibətinin sağ tərəfindəki limit həmişə vardır və

$$\bar{H}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\zeta_n | \zeta^{n-1})$$

bərabərliyi doğrudur.

(Ω, S_Ω) – ixtiyari ölçülən fəza, μ və ν – bu fəzadə təyin olunmuş ele ölçülərdir ki, μ ölçüsü ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür. Onda μ ölçüsünün ν ölçüsünə nəzərən entropiyası $H(d\mu|d\nu)$ –

$$H(d\mu|d\nu) = \int_{\Omega} \log \frac{d\mu}{d\nu} \nu(d\omega)$$

bərabərliyinin sağ tərəfindəki integrala deyilir, burada $d\mu/d\nu$ – Radon – Nikodim integralıdır. Ölçünün ölçüyə nəzərən entropiyasının xüsusi halı – *differensial entropiyadır*.

Informasiya nəzəriyyəsində E.-nin mühüm ümumiləşmələrindən biri də $H_W(\xi)$, W – *entropiya anlayışı və epsilon – entropiyalar* – $H_\epsilon(\xi)$ (ϵ – entropiya) –dır. Təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – müəyyənliyinin ölçüsü kimi E.-dan istifadə edilməsi təbii, belə ki, informasiya ötürmə sistemlərinin əsas xarakteristikaları bu kəmiyyətlə ifadə olunur.

$H(\xi)$, $H_W(\xi)$ və $H_\epsilon(\xi)$ kəmiyyətləri informasiya ötürmə nəzəriyyəsinin əsas teoremi – *Şennon teoreminin* bir çox ifadələrində istifadə olunur.

Əd.: [1] Биллингский П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [4] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963.

ENTROPİYA alqoritmik «энтропия алгоритмическая; algorithmic entropy / Kolmogorov complexity entropy» – bax, *Alqoritmik entropiya*.

ENTROPİYA(sı) bölgünün «энтропия разбиения; entropy of a partition» – μ ehtimal ölçülü (Ω, μ) ölçülən fəzasının sonlu və ya hesabi sayda ölçülən, müsbət ölçülü P_i çoxluqlarına $\mathcal{D}$ bölgüsü üçün

$$\mathcal{E}(\mathcal{D}) = - \sum_i \mu(D_i) \ln \mu(D_i)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan kəmiyyətlərdir (və ya ∞ -dur), burada $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$, D_i , – $\mathcal{D}$ bölgüsünün atomlarıdır (boş

olmayan çoxluqlardır) və $\Omega = \bigcup_i D_i$, $i \neq j$ olduqda

$$D_i \cap D_j = \emptyset.$$

Bölgünün elementləri sıfır ölçülü çoxluqlar olarsa və ya müsbət ölçülü çoxluq təşkil edərsə, onda $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = \infty$ götürülür.

ENTROPİYA differensial «энтропия дифференциальная; differential entropy» – bax, *Differensial entropiya*.

ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin «энтропия динамической системы; entropy of a dynamical system», metrik entropiya – dinamik sistemin nəzəri – informasiyon mənsəli ədədi xarakteristikasıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının endomorfizmi T üçün $h(T)$ entropiyası aşağıdakı kimi təyin olunur. $\xi = \xi(\omega)$, – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, sonlu qiymətlər alan ixtiyari təsadüfi kəmiyyət, $\xi_n(\omega) = \xi(T^n \omega)$, $\omega \in \Omega$, $n = 0, 1, \dots$, $H_n(\xi_0^{n-1})$, – $\xi_0^{n-1} = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ təsadüfi vektorunun entropiyası olsun. $n \rightarrow \infty$ olduqda $H_n(\xi_0^{n-1})/n$ nisbəti $h(T, \xi)$ limitinə yığılır; $h(T, \xi)$ informasiya nəzəriyyəsində $\{\xi_n, n \geq 0\}$ təsadüfi prosesində entropiya yaranma tezliyi adlanır (bax, [3]) və bu limit $n \rightarrow \infty$ olduqda

ξ təsadüfi kəmiyyətinin $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ təsadüfi vektoruna nəzərən şərti entropiyasının limiti ilə üst-üstə düşür. Tərifə görə, $h(T) = \sup_{\xi} h(T, \xi)$, burada yuxarı sərhəd bütün göstərilən

ξ -lər üzrə götürülür. Əgər bu tərifdə sonlu sayda qiymətlər alan (hesabi sayda qiymətlərdən artıq olan hal istisna olunur) təsadüfi kəmiyyətlər əvəzinə sonlu entropiyalı təsadüfi kəmiyyətlərdən istifadə olunarsa, $h(T)$ dəyişilmir.

İxtiyari η təsadüfi kəmiyyətinin E yalnız bu təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu bölgüdən, yəni Ω fəzasının $\eta = \text{const}$ şəklində çoxluqlara bölgüsündən asılı olduğundan, E -ni bilavasitə bölgü terminologiyası ilə vermək məqsədəuyğundur.

Erqodik nəzəriyyədə qəbul olunmuş yanaşmada ξ təsadüfi kəmiyyəti Ω fəzasının ixtiyari sonlu α bölgüsü ilə, ξ_0^{n-1} isə $\alpha_T^n = \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{n-1}\alpha$ bölgüsü ilə əvəz olunur ki, onun elementləri $A_0 T^{-1} A_1 \cap \dots \cap T^{n-1} A_{n-1}$ şəklindədir, $A_0, \dots, A_{n-1}$, $-\alpha$ bölgüsünün ixtiyari elementləridir.

«Dinamik sistemin E » anlayışının yuxarıdakı tərfi J. Q. Sinaya (bax, [2]) məxsusdur. Lakin «dinamik sistemin E -si» anlayışının özü A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1]) və bu tərif Sinay tərəfindən bir qədər fərqlidir. E -nin meydana çıxması ilə əlaqədar olaraq erqodik nəzəriyyənin yeni erqodik istiqaməti yaranmış və bu da erqodik nəzəriyyənin bütün bölmələrinin inkişafında dərin bir təsirə səbəb olmuşdur.

E -nin hesablanması əksər hallarda [2]-də şərh olunmuş teoremdən istifadə olunur; bu teoremə görə ixtiyari α bölgüsü üçün $h(T) = h(T, \alpha)$ bərabərliyi doğrudur: α bölgüsünün elementləri $T^{-n}\alpha$, $n=1, 2, \dots$ bölgüsünün elementləri ilə birlikdə bütün $\mathcal{A}$ σ -cəbrini doğurur (onda α , T üçün birtərəfli doğurucu bölgü və ya birtərəfli doğurucu (rus. образующая) adlanır). T avtomorfizm olduqda, ikitərəfli doğurucu təyin olunur, yəni belə α -lar üçün $\mathcal{A}$ bütün T_α^n -lərlə doğurulur, $n \in \mathbb{Z}$. Bu hökmlərin ümumiləşmələri də vardır (bax, [4], [5]), bu hallarda doğurucular asimptotik doğurucular ardıcılığı ilə əvəz olunur.

Əgər T vəziyyətlər fəzası diskret $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ olan Bernulli yerindəyişməsidir, onda

$$h(T) = - \sum_i \mu(y_i) \ln \mu(y_i)$$

bərabərliyi doğrudur, burada y_i , $-\mu$ ölçüsünün atomlarıdır; vəziyyətlər fəzası diskret olmayan Bernulli yerindəyişməsi üçün $h(T) = \infty$. Vəziyyətlər fəzası diskret olan Markov yerindəyişməsi üçün

$$h(T) = - \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} \ln p_{ij}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\{\pi_i\}$ — birölcülü paylanma, p_{ij} uyğun Markov zəncirinin keçid ehtimallarıdır.

Hamar dinamik sistemlər üçün E həndəsi mena daşıyır: E başlanğıc anda fəza fəzasının bir-birinə yaxın nöqtələrinin bir-birindən uzaqlaşmasının orta sürətini (loqarifmik şkalada) xarakterizə edir.

242 ENTROPİYA

Entropiyanın ümumi xassələri:

1) $h(T)$ 0-dan $+\infty$ -a qədər ($0, \infty$ daxil olmaqla) bütün qiymətləri alır;

2) ixtiyari $k \geq 0$ üçün $h(T^k) = kh(T)$; əgər $\{T^t, t \geq 0\}$ kəsilməz semi – axındırsa, onda ixtiyari $t \geq 0$ üçün $h(T) = th(T^{-1})$ (bax, [7], [11]); əgər T avtomorfizmdir, onda $h(T^{-1}) = h(T)$ və deməli, kəsilməz axın üçün $h(T^t) = |t|h(T)$, $-\infty < t < \infty$. $h(T^t)$ – axın entropiyası adlanır.

3) dinamik sistemlərin düz hasilinin E bu sistemlərin E -lərinin cəminə bərabərdir;

4) dinamik sistemin homomorf obrazının E (bax, *izomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*) sistemin özünün E -ni aşmır; izomorf sistemlərin E -ləri eynidir;

5) əgər T – invariant ehtimal ölçüsü P , T – invariant ehtimal ölçüləri P_1 və P_2 -nin qəbənq kombinasiyası – $aP_1 + (1-a)P_2$ kimi ifadə olunarsa, onda $h(T) = ah_1 + (1-a)h_2$ bərabərliyi doğrudur, burada h_i , $-P_i$ ölçüsü üzrə hesablanmış E -dir, $i=1, 2$.

Dinamik sistemin E -nin asimptotik tərfi (bax, [6]), həm də ümumi qrup zamanlı dinamik sistemlər (bax, [7]), σ – sonlu ölçülü fəzada dinamik sistemlər üçün bu anlayışın ümumiləşməsi (bax, [8]) verilmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 86–91; [2] Синай Я. Г., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1959, т. 124, № 4, с. 768–71; [3] Пинскер М. С., Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, М., 1960; [4] Рохлин В. А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 5, с. 980–83; [5] Синай Я. Г., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 6, с. 1200–02; [6] Рохлин В. А., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 4, с. 779–81; [7] Конзе J. P., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd 25, № 1, S. 11–30; [8] Krenge U., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 17, № 3, S. 161–81; [9] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [10] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [11] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [12] Мартин Н., Инглэнд Д., Математическая теория энтропии, пер. с англ., М., 1988.

ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin, topoloji «энтропия динамической системы топологическая; topological entropy of a dynamical system» – bax, *Topoloji entropiya(sı)* dinamik sistemin.

ENTROPİYA(sı) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin «энтропия непрерывных случайных величин; entropy of continuous random variables» – bax, *Differensial entropiya*.

ENTROPİYA(sı) qrupda təsadüfi dolaşmanın «энтропия случайного блуждания на группе; entropy of a random walk on a group» – bax, *Təsadüfi dolaşma qrupda*.

ENTROPİYA nisbi «энтропия относительная; relative entropy» – bax, *Differensial entropiya. Nisbi entropiya*.

ENTROPİYA(sı) ölçülən D bölgüsünün « **Энтропия измеримого разбиения D : entropy of measurable of D partition** », – norma təyin olunmuş (X, μ) fəzasının ölçülən D bölgüsünə nəzərən E.-sı, aşağıdakı kimi təyin olunan kəmiyyətdir. Əgər D bölgüsünün sıfır ölçülü elementləri çoxluğu müsbət ölçülü çoxluq əmələ gətirərsə, onda ölçülən bölgünün E. $H(D) = \infty$ olur, əks halda

$$H(D) = - \sum \mu(C) \log \mu(C),$$

burada cəmləmə D -nin müsbət ölçülü bütün elementləri üzrə götürülür. Loqarifm, adətən, ikilik loqarifmidir.

ENTROPİYA prefiks « **Энтропия префиксная; prefix entropy** » – bax, *Alqoritmik entropiya*.

ENTROPİYA(sı) sonlu obyektlərin « **Энтропия конечных объектов; entropy of finite object** » – bax, *Alqoritmik entropiya*.

ENTROPİYA(sı) stasionar prosesin « **Энтропия стационарного процесса; entropy of stationary process** » – diskret zamanlı və qiymətlər fəzası diskret olan $\zeta = \{\zeta_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ stasionar prosesi üçün

$$\overline{\mathcal{E}}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathcal{E}(\zeta_n) \quad (*)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan limitə deyilir, $\zeta_n = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$. Məlumdur ki, (*) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limit həmişə vardır və

$$\overline{\mathcal{E}}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\zeta_n | \zeta_{n-1})$$

bərabərliyi doğrudur.

Bax, *Entropiya*.

ENTROPİYA şərti « **Энтропия условная; conditional entropy** » – bax, *Entropiya, Alqoritmik entropiya, Şərti entropiya*(sı) bölgüsünün.

ε – **ENTROPİYA** « ε – **Энтропия; ε – entropy** » – bax, *Epsilon entropiya / ε – entropiya*.

W – **ENTROPİYA** « W – **Энтропия; W – entropy** » – informasiya nəzəriyyəsində tətbiq edilən, təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənliyinin müəyyən anlamda nəzəri – informatik ölçüsüdür. ξ və $\tilde{\xi}$ – uyğun olaraq hər hansı $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $p(\cdot)$ -nin və $(\mathcal{X} \times \tilde{\mathcal{X}}, S_{\mathcal{X}} \times S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ fəzasında təyin olunmuş bütün ehtimal ölçüləri çoxluğunda $(\xi, \tilde{\xi})$ cütlerinin mümkün olan birgə paylanmalarının sinfi W -nin verilmiş olduğu fərz olunur. Onda W – entropiya (və ya W -nin dəqiqliklə eksolunma məlumatlarının verildiyi şərtə görə entropiya), –

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \quad (1)$$

kəmiyyətinə deyilir; $I(\xi, \tilde{\xi})$, – ξ -yə dair $\tilde{\xi}$ -də informasiya miqdarıdır; aşağı sərhəd isə $(\xi, \tilde{\xi})$ cütleri

üzrə götürülür ki, $(\xi, \tilde{\xi})$ -nin birgə paylanması $p(\cdot, \cdot)$ W çoxluğundadır, ξ -nin paylanması $p(\cdot)$ -dir. $p(\cdot, \cdot)$ birgə ehtimal paylanmaları sinfi W çox vaxt müəyyən mənfə olmayan heqiqiqlikə $\rho(x, \tilde{x})$ funksiyası vasitəsilə verilir, $x \in \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$:

$$W = \{ p(\cdot, \cdot): \mathbf{M} \rho(\xi, \tilde{\xi}) \leq \varepsilon \}, \quad (2)$$

burada $\varepsilon > 0$ qeyd olunmuş ədəddir. $\rho(x, \tilde{x})$ təhrif ölçüsüdür.

Bu halda (1) düsturu ilə təyin olunan kəmiyyət (W isə (2) düsturu ilə təyin olunur) ε – entropiya (və ya sürət – təhrif funksiyası kimi) adlanır.

Əd.: [1] Шеннон К., Математическая теория связи, в сб.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969.

EPİDEMİK PROSES « **Эпидемный процесс; epidemic process** » – populyasiyada epidemiyanın yayılmasının riyazi modelidir. Bir qayda olaraq, belə model kimi populyasiyanı törədən bütün individiumların vəziyyətlərini təsvir edən *Markov prosesi* seçilir, belə ki, hər bir individium öyrənilən xəstəliyə nəzərən ya sağlam, lakin immunitetsiz ola bilər və ya yoluxucu xəstə və ya xəstəlik keçirmiş, lakin yoluxucu olmayan individium ola bilər. Sağlam individiumun xəstəyə çevrilməsi intensivliyi yoluxucu xəstələrin sayından asılıdır. Xəstəlik keçirənlərin sayının son nəticə göstəricisinin paylanması, xəstələr sayının dəyişməsi prosesləri, populyasiyanın bütün üzvlərinin xəstə vəziyyətdə olduğu toplam müddət kimi xarakteristikalar öyrənilir.

EPSİLON – ENTROPİYA / ε – ENTROPİYA

« **Эпсилон – энтропия / ε – энтропия; epsilon entropy / ε – entropy** » – dəqiqliklə bərpə olunduğu halda təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənliyinin nəzəri – informatik ölçüsüdür. ε – entropiya anlayışı əsasən K. Şennon (C. Shannon) tərəfindən daxil edilmişdir. ξ – qiymətlər çoxluğu $\mathcal{X}$, paylanması $P_{\xi}(\cdot) = p(\cdot)$ olan təsadüfi kəmiyyət, $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ – ölçülən fəzalar, $\rho(x, \tilde{x})$, – $S_{\mathcal{X}} \times S_{\tilde{\mathcal{X}}}$ fəzasına nəzərən mənfə olmayan ölçülən funksiya, $\varepsilon > 0$ olsun. Onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin **epsilon – entropiyası** (ε – entropiya) –

$$H_{\varepsilon}(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \quad (1)$$

kəmiyyətinə deyilir, burada $I(\xi, \tilde{\xi})$, – $\tilde{\xi}$ -dən ξ -yə nəzərən *informasiya miqdarıdır*, aşağı sərhəd $\mathcal{X} \times \tilde{\mathcal{X}}$ fəzasından qiymətlər alan $(\xi, \tilde{\xi})$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ele cütleri üzrə götürülür ki, $P_{\xi}(\cdot) = p(\cdot)$ və

$$\mathbf{M} \rho(\xi, \tilde{\xi}) \leq \varepsilon \quad (2)$$

(məlumatların dəqiqliklə bərpası şərti).

Əgər ξ diskret təsadüfi kəmiyyət $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ – fəzalar eyni olarsa və $\rho(x, \tilde{x})$ funksiyası

$$\rho(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{əgər } x \neq \tilde{x} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunarsa, onda ε – entropiya $\varepsilon = 0$ olduqda adi entropiyaya bərabər olur, yəni

$$H_0(\xi) = H(\xi).$$

Məs., əgər $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ asılı olmayan komponentləri Gauss təsadüfi vektoru, $M\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$ və

$$\rho(x, \tilde{x}) = \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x}_j)^2$$

olarsa, onda ε – entropiya

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \max(M\xi_j^2/\lambda, 1)$$

düsturu ilə tapılır, burada λ

$$\sum_{j=1}^n \min(\lambda, M\xi_j^2) = \varepsilon$$

tənzimindən təyin olunur.

Müxtəlif Gauss təsadüfi kəmiyyətlərinin, proseslərinin və meydanlarının E. - e.-nin hesablama metodları da işlənmişdir.

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyəti ξ_j , $j = 1, \dots, n$ ikilik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığı olsun,

$$\mathfrak{X} = \tilde{\mathfrak{X}}, \quad P\{\xi_j = 1\} = 1/2,$$

$$\rho(x, \tilde{x}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, \tilde{x}_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathfrak{X}$$

və

$$\rho_i(x_i, \tilde{x}_i) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } x_i = \tilde{x}_i, \\ 1, & \text{əgər } x_i \neq \tilde{x}_i. \end{cases}$$

Onda $H_\varepsilon(\xi) = 1 + \varepsilon \log \varepsilon + (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon)$.

Təsadüfi kəmiyyətlərin müxtəlif sinifləri üçün $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $H_\varepsilon(\xi)$ -nin asimptotik ifadələri tapılmışdır.

E. - e. anlayışının bezi ümumləşmələri vardır. Məs., $\rho(x, \tilde{x}) = (\rho_1(x, \tilde{x}), \dots, \rho_m(x, \tilde{x}))$ vektor funksiyasına baxmaq olar, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, (2) şərtini isə

$$M\rho_i(\xi, \tilde{\xi}) \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

formasında vermək olar.

(2) və (3) şərtləri, mahiyyət etibarilə, $(\xi, \tilde{\xi})$ təsadüfi kəmiyyətlər cütünün ehtimal paylanmalarına bezi məhdudiyyətləri ifadə edir. $(\xi, \tilde{\xi})$ cütünün paylanmaları $P_{\xi\tilde{\xi}}$ -lərin hər hansı W çoxluğunu ixtiyari götürərək, $P_X(\cdot) = p(\cdot)$ qəbul edərək, in-formasiya nəzəriyyəsində W – entropiya ($H_W(\xi)$) anla-

yışı) və ya bərpanın dəqiqliyi verildiyi halda entropiya anlayışı E. - e. anlayışının ümumləşməsi kimi daxil olunmuşdur. $H_W(\xi)$ kəmiyyəti (1) düsturu ilə təyin olunur, burada aşağı sərhəd $P_{\xi\tilde{\xi}} \in W$ üzrə götürülür.

E. - e. anlayışı yalnız təsadüfi kəmiyyətlərə şamil olunmur. A. N. Kolmogorov Q metrik fəzasında C çoxluğunun nisbi və mütləq E. - e. anlayışlarını daxil etmişdir. C şəbəkəsinin nöqtələrinin minimal sayı ε -nın loqarifminə C çoxluğunun nisbi E. - e. $(H(C, Q))$ deyilir. Çoxluğun mütləq E. - e., C çoxluğunun diametri 2ε -dan böyük olmayan çoxluqlarla örtüyündəki elementlərinin minimal sayının loqarifmidir. Müxtəlif funksional siniflərin E. - e.-lərinin asimptotikasının tədqiqi yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin xüsusi bölməsidir. Təsadüfi kəmiyyətin E. - e. və metrik fəzada altçoxluqların E. e. arasında əlaqə vardır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385–388; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, с. 3–86; [4] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [5] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971.

ERQODİK MARKOV ZƏNCİRİ « эргодическая цепь Маркова; ergodic Markov chain » – qeyri – periodik, qeyri – dissipativ elə *Markov zənciridir* ki, onun vəziyyətlər fəzasında yalnız bir cə müsbət qayıdışlı sinif vardır (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Vəziyyətləri sayı hesabıdan çox olmayan $E = \{1, 2, \dots\}$ çoxluğu olan və n addıma keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$ -lərlə verilən E. M. z. X üçün $i \in E$, i -dən asılı olmayan, $(\mu_1, \mu_2, \dots)$ stasionar paylanması əmələ gətirən $\mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$ limitləri vardır (qeyd olunan bu xassə E. M. z.-nin tərifinin əsası kimi götürülür). Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda, $|p_{ij}(n) - \mu_j|$ sıfıra məxrəci 1-dən kiçik və (i, j) -dən asılı olmayan $i, j \in E$ hər hansı hendəsi silsilədən keçməməqlə yığılarsa, E. M. z. – *hendəsi erqodik Markov zənciri* adlanır (Hendəsi erqodiklik kriterisi haqqında bax, [2]).

Vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari Markov zəncirləri üçün də uyğun təriflər daxil olunur. Belə zəncirlərin hendəsi erqodikliyi, məs., [3]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Попов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316–19; [3] Нумеллин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989; [4] Карташов Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, № 2, с. 230–40.

ERQODİK MƏSƏLƏLƏR(i) Diofant yaxınlaşmalarının « эргодические задачи диофантовых приближений; ergodic problems of Diophantine approximation » – həqiqi ədədlərin rəşional ədədlərlə yaxınlaşmalarının öyrənilməsi ilə və ya daha ümumi qoyuluşda sıfırın sonlu sayda tamqismətli arqumentli funksiyalarının qiymətlərlə yaxınlaşması ilə bağlı dinamik sistemlərin *erqodik nəzəriyyəsinin* analizi və mülahizələrinin köməyiylə öyrənilməsi məsələləridir. Burada individual və maksimal erqodik teoremlər, qarşılıqlı erqodik çevirmələrin ölçülərini dəyişməz saxlayan anlayışlar xüsusilə geniş surətdə istifadə olunur. Belə yanaşma, E. Borel (E. Borel), A. Ya. Xinqinin və onların davamçılarının müəyyən arifmetik xassələrə malik ədədi nəzəriyyəsinin

metrik təsvir üzrə aldıkları nəticələrin müasir anlamı ilə əlaqədar olmuşdur.

Həqiqi ədədlərin q -lük kəsrlərə ayrılışı $[0, 1]$ intervalının $T_1: x \rightarrow \{qx\}$ çevirməsi ilə üzvü surətdə bağlıdır, burada $\{\alpha\}$ – α ədədinin kəsri hissəsinin işarələməsidir. T_1 çevirməsi Lebeq ölçüsünü olduğu kimi saxlayır və ərqodikdir, bu çevirmə nəticəsində $0, 1, \dots, q-1$ «rəqəmlərinin» və $[0, 1]$ intervalından təsadüfi seçilmiş α ədədlərinin q -lük ayrılışında «rəqəmlər» qrupunun paylanması araşdırmaq mümkün olur.

Zəncirvari kəsrlər nəzəriyyəsində $[0, 1]$ parçasında

$$T_{2x} = \begin{cases} \{1/x\}, & x \neq 0 \text{ olduqda,} \\ 0, & x = 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

düsturu ilə təyin olunan Qauss çevirməsi yaranmışdır. Bu çevirmə Lebeq ölçüsünə nəzərən ərqodikdir. Qauss çevirməsi Lebeq ölçüsünü saxlamır, lakin bu ölçüyə nəzərən mütləq kəsilməz və həmin $\mathcal{A}$ σ – cəbrində

$$M(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dx}{1+x}, \quad A \in \mathcal{A}$$

düsturu ilə təyin olunan Qauss ölçüsünü dəyişməz saxlayır. Bundan başqa, T_2 – güclü qarışdırıcı çevirmədir. α ədədinin zəncirvari kəsre ayrılışında i -ci natamam kəsri (bax, MƏ, т. 5, səh. 811) $a_i(\alpha)$ ilə, $q_i(\alpha)$ ilə isə i -ci münasib kəsirin məxrəcini işarə edərək, Birkhof – Xinqin ərqodik teoreminin köməyiylə, məs., sanki bütün α ədədləri üçün (Lebeq ölçüsü mənada) doğru olan aşağıdakı münasibətləri almaq olur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1(\alpha) + \dots + a_n(\alpha)) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n(\alpha) = \frac{\pi^2}{12 \ln 2},$$

bu münasibət həm özü-özlüyündə, həm də diofant yaxınlaşmalarında mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Qauss çevirməsi ədədlərin müxtəlif şəkili sıralara ayrılışlarının (bax, [5]) və çoxhədlilərin kəsri hissələrinin paylanması (bax, [2]) öyrənilməsində intervalın hissə-hissə monoton çevirmələrinin xüsusi halıdır.

p və q tam ədədlər olduqda, demək olar ki, bütün α -lar üçün

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q$$

bərabərsizlikləri araşdırılmışdır, burada $f(x)$ – müsbət artmayan funksiya, belə bərabərsizliklər sistemləri (birgə yaxınlaşmalar) və onların modifikasiyalı da tədqiq olunmuşdur. Xətti formalar üçün sistemlərə çox diqqət verilir, bu xətti formaların

$$\| \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \| < f_i(a), \quad 1 \leq i \leq n$$

münasibətlə verildiyi fərz olunur, burada $\|x\|$ – ən yaxın tam ədədə qədər məsafədir, $a = \max(|a_1|, \dots, |a_k|)$, $\mathbf{a} =$

$(a_1, \dots, a_k)$ vektorunun dəyişmə oblası $\mathbb{R}^k$ -dən tamqiymətli şəbəkə (xətti yaxınlaşmalar) və ya yalnız əvvəlcədən verilmiş çoxluq ola bilər (qeyri – xətti yaxınlaşmalar). ərqodik mülahizələrlə yanaşı dispersion metod da tətbiq olunur. Burada alınmış nəticələrin xarakterizasiyası üçün aşağıda iki teorem verilir (bax, həm də [3]).

m, n – natural ədədlər, Ω_{mn} – ω matrislərinin fəzası olsun; ω -nın komponentləri vahid uzunluqlu intervaldan qiymətlər alır: $0 \leq \omega_{ij} < 1$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Ω_{mn} fəzasında mn – ölçülü

E^{mn} – vahidi kubu verilmişdir. A_{mn} – Ω_{mn} fəzasının $\mathbf{P}_{mn}$ – ölçülü çoxluqlarının sinfi olsun. Bu qayda ilə $(\Omega_{mn}, \mathcal{A}_{mn}, \mathbf{P}_{mn})$

ehtimal fəzası alınır. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ -dən olan, komponentləri sıfırdan fərqli tamqiymətli vektor üçün

$$T: \omega \rightarrow (\mathbf{a}\omega_1, \dots, \mathbf{a}\omega_n) \pmod{1}$$

münasibətlə

$$T = T\mathbf{a}: \Omega_{mn} \rightarrow \Omega_{1m}$$

inikası təyin olunur, burada ω_i – ω matrisinin sətir vektoru, $\mathbf{a}\omega_i$ – vektorların skalyar hasil, mod 1 isə vektorun komponentlərinin kəsri hissəsinin götürülməsini ifadə edir. T inikası $A \in \mathcal{A}_{1m}$ üçün

$$\mathbf{P}_{mn}(T^{-1}A) = \mu_{1m}(A)$$

ölçüsünü dəyişməz saxlayır; xətti asılı olmayan $\mathbf{a}_1$ və $\mathbf{a}_2$ vektorları üçün $T\mathbf{a}_1$ və $T\mathbf{a}_2$ inikası stoxastik asılı deyildirlər, yəni $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{1m}$ üçün

$$\mathbf{P}_{mn} \{ T\mathbf{a}_1^{-1}A_1 \cap T\mathbf{a}_2^{-1}A_2 \} = \mathbf{P}_{1m}(A_1) \mathbf{P}_{1m}(A_2).$$

Bu iki xassə əsasında aşağıdakı teoremləri isbat etmək olur.

T e o r e m 1. S , – $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tamqiymətli vektorların sonsuz toplusu olsun və fərz olunur ki, hər bir $\mathbf{a} \in S$ vektoruna $A(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}_{1m}$ çoxluğu qarşı qoyulmuşdur. Əgər

$$\sum_{\mathbf{a} \in S} \mathbf{P}_{1m} \{ A(\mathbf{a}) \} \quad (1)$$

sırası yığılarsa, onda

$$(\mathbf{a}\omega_1, \dots, \mathbf{a}\omega_n) \in A(\mathbf{a}) \pmod{1}, \quad \mathbf{a} \in S \quad (2)$$

şərtləri sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün yalnız sonlu dəfə ödənilir. Əgər (1) sırası dağılırsa və S -dən olan ixtiyari iki vektor xətti asılı olmazlarsa, onda sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün (2) şərtləri sonsuz dəfələrlə ödənilirlər.

T e o r e m 2. $\omega \in \Omega_{mn}$ verildiyi halda $N(Q, \omega)$ (2) şərti ödənilən ele $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in S$ vektorlarının sayı olsun ki, bunlar üçün $a = \max(|a_1|, \dots, |a_n|) \leq Q$ şərti ödənilsin. Əgər S -dən olan ixtiyari iki vektor asılı olmazlarsa, onda sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün

$$N(Q, \omega) = \Phi(Q) + O((\Phi^{1/2}(Q))(\ln \Phi(Q))^{3/2+\varepsilon})$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\varepsilon > 0$ ixtiyaridir və

$$\Phi(Q) = \sum_{\substack{a \in S_1 \\ \max(|a_1|, \dots, |a_n|) \leq Q}} P_{1m}(A(a)).$$

Bele məsələlərə kompleks ədədlər çoxluqları, p -lik ədədlər, formal üstlü sıralar, hər biri uyğun ölçü ilə təmin olunmuş adəllər üçün də baxmaq olur.

Əd.: [1] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., 1969; [2] Конфелд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [3] Спринджук В. Г., Метрическая теория дюрфантовых приближений, М., 1977; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [5] Galambos J., Representations of real numbers by infinite series, B., 1976; [6] Schweiger F., «Acta arithmetica», 1966, v. 11, p. 451–60.

ERQODİK NƏZƏRİYYƏ « эргодическая теория; ergodic theory » – XX əsrin 20–30-cu illərində yaranmış riyaziyyat bölməsidir. Bu nəzəriyyənin *erqodiklik*, *qanşma* kimi əsas anlayışları statistik fizikanın əsaslandırılması probleminə həsr olunmuş L. Boltzmann (L. Boltzmann) və C. Gibbsin (J. Gibbs) əsərlərinə əsaslanır. E. n.-nin ilk ümumi teoremlərindən biri Birkhof – Xinqin *erqodik teoremi* hesab olunur. Bu teoremdə hökm edilir ki, hər hansı ehtimali ölçüsünü dəyişməyən çevimlərin (avtomorfizmlərin, axınların və ya endomorfizmlərin və semi – axınların) birparametrik qruplarında və ya semi – qruplarında zaman üzrə orta qiymətlər sanki yaqın mövcuddur. Belə qruplar və ya semi – qruplar *dinamik sistemlər* adlanır. Bu sistemlər E. n.-nin öyrəndiyi əsas obyektlərdir.

Ehtimal nəzəriyyəsində dinamik sistemlər dar mənada stasionar təsadüfi proseslərin realizasiyalan fəzasında yerindəyişmə qrupları kimi təbii surətdə yaranır. Dinamik sistemlərə differensial tənliklərin nəzəriyyəsinin, statistik fizikanın, mexanikanın, qeyri – xətti rəqslər nəzəriyyəsinin, plazma fizikasının və d.-nin bir çox problemlərində təsadüf olunur. Məs., kompakt çoxobrazlıya malik Hamilton sistemlərində sabit enerjili axın (belə sistemin trayektoriyaları boyunca yerindəyişmələrdən ibarət ola bilər) mikrokənonik Liuvill paylanması deyisim və buna görə də, dinamik sistemdir. Dinamikanın təsiri nəticəsində faza həcmi azalan, mexanikanın dissipativ sistemlərində faza fəzalarında tez-tez invariant cəzbedici çoxluqlar yaranır, məs., stoxastik attraktorlar və dinamikanın xassələri bunlarda toplanmış təbii dəyişməz qalan ehtimal ölçülərinin xassələrini təyin edir. Dinamik sistemlər ədədlər nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri ilə bağlı yaranır, xüsusilə də, müntəzəm paylanma ilə bağlı məsələlərdə. Məs., məşhur Veyl teoreminə əsasən,

$$\mathcal{P}_n = a_0 n^r + a_{r-1} n + \dots + a_r. \quad (1)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ əmsallardan heç olmasa biri irrasional olarsa və bu əmsallar müntəzəm paylanmaya malik olarsa, onda $\{\mathcal{P}(n)\}$ -in kəsri paylan – r – ölçülü torun ölçünü saxlayan xüsusi çevirməsi üçün Birkhof – Xinqin erqodik teoreminin gücləndirilmiş hali kimi alınır (bax, [1]).

Dinamik sistemlər kombinatorikada, qeyri – kommutativ cəbrlərdə, qrupların təsviri nəzəriyyəsində və b. əmələ gəlir (bax, [1], [2]).

Bu zaman bu oblastlarda həm çevirmələrin ölçüsünü dəyişməz saxlayan qruplar, həm də ölçüləri ölçünün mütləq kəsilməzliyi mənasında ekvivalent ölçülərə çevirən qruplar yaranır.

$X_0(\omega)$ – ixtiyari təsadüfi kəmiyyət, $\{S^{(t)}\}$ – Ω fəzasında axın olsun. $X_t(\omega) = X_0(S^t \omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi dar

mənada stasionar təsadüfi proses təşkil edir. Əgər $\{S^{(t)}\}$ axını ilkin stasionar prosesin yerindəyişmələr qrupudursa, onda $\omega \rightarrow \{X_t(\omega)\}$ keçidinə bu prosesin qeyri – xətti çevirməsi kimi baxmaq olar. E. n. belə yaranan bütün stasionar proseslərin xassələrini öyrənir. Əgər X_0 ele təsadüfi kəmiyyətdirsə ki, bütün X_t təsadüfi kəmiyyətlərinin $(-\infty < t < \infty)$ minimal σ – cəbri bütün ölçülən çoxluqların σ – cəbri ilə üst-üstə düşür, onda X_0 doğurucu təsadüfi kəmiyyət adlanır, $\{S^{(t)}\}$ dinamik sistemi bu halda qurulmuş stasionar prosesin yerindəyişmələr qrupuna izomorf olur (bax, *izomorfizmi dinamik sistemlərin metrik*).

Ehtimal nəzəriyyəsinin tipik məsələlərindən fərqli olaraq dinamik sistemin «təsadüflüyü» yalnız başlanğıc ω nöqtəsinin seçilməsindən ibarətdir ki, bundan sonra bu nöqtənin evolyusiyası sırf determinik surətdə baş verir. Bu səbəbdən fiziki ədəbiyyatda E. n. bir çox hallarda *determinik xaos nəzəriyyəsi* də adlandırılır.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, $\{S^{(t)}\}$ – Ω fəzasının çevimlərinin birparametrik qrupu və ya semi – qrupu olsun.

Aşağıda $\{S^{(t)}\}$ -nin dinamik sistemləri bu və ya digər rəqulyarlıq xassələri təsadüfi proseslərlə yaxınlaşdırən, adətən, stoxastik kimi sayılan xassələri verilir.

1. $\{S^{(t)}\}$ qrupuna nəzərən invariant ehtimal paylanmalarının varlığı. İxtiyari $C \in \mathcal{A}$ və ixtiyari t , $-\infty < t < \infty$ üçün $P(S^t C) = P(C)$

olarsa, burada **P** ehtimal paylanması $\{S^{(t)}\}$ -yə nəzərən invariant paylanma adlanır. Əgər Ω – kompakt, $\mathcal{A}$ – Ω -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbri, $\{S^{(t)}\}$ isə Ω -nin birparametrik homeomorfizmlər qrupudursa, onda heç olmazsa bir invariant ehtimal paylanması **P** vardır. Bu nəticə Boqolyubov – Krlovun ümumi teoremindən alınır; bu teoremin isbatındakı mülahizələr olduqca ümumi xarakterə malikdir və bir çox digər məsələlərdə onlara təsadüf olunur, məs., faza fəzası kompakt Markov zəncirinin heç olmazsa bir stasionar paylanmasının varlığının isbatı buna misaldır.

Invariant ehtimal paylanmaları cırtışan, yeni $\{S^{(t)}\}$ qrupunun bir və ya bir neçə trayektoriyasında toplanmış paylanmalar ola bilər. Cırtışmayan paylanmaların alınması üçün bezen aşağıdakı qaydadan istifadə olunur. İxtiyari **P** ehtimal paylanması üçün onun t müddətində yerindəyişməsi $(S^t)^* \mathbf{P}$ ilə işarə olunur, yeni

$$((S^t)^* \mathbf{P})(C) = \mathbf{P}(S^{-t} C), C \in \mathcal{A}.$$

Əgər $(S^t)^* \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}_0$ münasibəti hər hansı bir təbii mənada ödənilərsə, onda **P**₀ invariant ehtimal paylanması olacaqdır.

Stoxastik attraktorlu sistemlərdə və onlara yaxın sistemlərdə invariant ehtimal paylanmaları məhz belə qurulur.

2. *Erqodiklik*. $\{S^{(t)}\}$ qrupu üçün **P**₀ invariant ehtimal paylanmasının seçildiyi fərz olunur. Birkhof – Xinqin erqodik teoremində isbat olunur ki, ixtiyari $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_0)$ üçün sanki hər yerdə zaman üzrə orta qiymətlərin limiti sanki yaqın (her yerdə) vardır, yeni

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^t \omega) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^{-t} \omega) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(S^t \omega) dt.$$

P_0 -in ergodikliyi bütün bu limitlerin $\int f(\omega) dP_0(\omega)$ riyazi gözləməsinə bərabər olmaları ilə ifadə olunur, bəzi hallarda isə daha güclü stoxastik xassələrin nəticəsi kimi alınır.

3. Q a r ı ş m a. $\{S^t\}$ dinamik sistemi üçün təyin olunmuşdur ki, P_0 ehtimal paylanması invariant və ergodik paylanmadır və Q_0 ehtimal paylanması P_0 -a nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır, $q_0(\omega) = \frac{dQ_0}{dP_0}$. Onda $Q_t = (S^*)^t Q_0$ paylanması da

P_0 -a nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır və onun paylanma sıxlığı funksiyası $q_t(\omega) = q_0(S^t \omega)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari məhdud ölçülən f üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) dQ_t(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) q_t(\omega) dP_0(\omega) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) q_0(S^t \omega) dP_0 = \int_{\Omega} f(\omega) dP_0(\omega)$$

olarsa, $\{S^t\}$ – qarışdırıcı sistemdir (bax, Qarışma). Q ehtimal paylanması bərabərçəkili olmayan ehtimal paylanması kimi anlaşılar. Qarışma isə onu ifadə edir ki, hər bir bərabərçəkili olmayan ehtimal paylanması dinamik sistemin təsiri ilə bərabərçəkili P_0 ehtimal paylanmasına yığılır. Qarışma məhz bu şəkildə C. Gibbs tərəfindən daxil olunmuşdur. Qarışmadan ergodiklik alınır. Qarışmasız ergodik sistemlər xalis nöqtəvi spektrli *dinamik sistemlər* nəzəriyyəsində alınır.

4. R e q u l y a r l ı q. Kolmoqorovun «Sıfır – vahid qanunu» ehtimal nəzəriyyəsində böyük rola malikdir. Bundan başqa A. N. Kolmoqorov K – sistem anlayışını (bax, [3]) daxil etmişdir. Bu sistem müəyyən mənada «sıfır – vahid qanununun» ödənilməsi dinamik sistemdir. Bu anlayışlarla yanaşı K – qarışma və K – bölgü kimi yaxın anlayışlar yaranmışdır. K – sistemlər qeyri-regular stasionar proseslərə analoqlardır, lakin bunlara tamamilə identik deyildirlər (bax, Gauss dinamik sistemi).

Realizasiyalan $\omega = \{\omega(s), -\infty < s < \infty\}$ olan dar mənada stasionar təsadüfi prosesin yerindəyişmələri qrupu üçün əgər $\eta_0 = f(\omega) = f(\{\omega(s), -\infty < s < \infty\})$ doğurucusu varsa ki, ona uyğun olan $\eta_t = f(\{\omega(s+t), -\infty < s < \infty\})$ stasionar prosesi regular prosedir (yeni «sıfır – vahid qanununun» ödəyir), onda bu qrup K – sistemdir. K – sistemlər – ergodik və qarışdırıcı sistemlərdir. Tersi isə sadə misallardan görüldüyü kimi doğru deyildir. Bir sıra hallarda K – xassənin ödənilməsi təyin etmək ergodiklik və ya qarışmanı təyin etməkdən sadədir.

5. M ə r k ə z i l i m i t t e o r e m i n i n ö d e n i l m ə s i. Regular stasionar proseslər üçün çox az əlavə şərtlərlə mərkəzi limit teoremi ödənilir. Dinamik sistemdə bu teoremin hər hansı $X_0 = f(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti üçün doğruluğu belə anlaşılır ki,

$$\frac{1}{\sqrt{DX_t}} (X_t - tMX_0)$$

normalanmış təsadüfi kəmiyyəti $t \rightarrow \infty$ olduqda Gauss paylanması ilə paylanır, burada $DX_t(\omega) = \int_0^t f'(S^u \omega) du$ və

$tMX_0 = MX_t$, DX_t – uyğun olaraq X_t -nin riyazi gözləməsi və dispersiyasıdır. Ehtimal nəzəriyyəsinə bilavasitə aid olmayan dinamik sistemlər üçün mərkəzi limit teoreminin müddəəsi bəzən olduqca gözənilməz şəkildə ola bilər. Həmişə olduğu kimi bu teoremin isbatı $X_t = f(S^t \omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi üçün zəif yığılma xassələrinin ödənilməsinə gətirilir. E. n.-nin tətbiqində mərkəzi limit teoreminin isbatı X_0 təsadüfi kəmiyyətlərinin mümkün olduqca daha geniş sinfi üçün maraq kəsb edir.

6. Z a m a n k o v a r i a s i y a l a r ı n ı n a z a l m a x a r a k t e r i. E. n.-nin tətbiqi məsələlərinin bir çoxunda

$$b_f(t) = Mf(S^t \omega)f(\omega) - (Mf(\omega))^2$$

zaman kovariasiyalarının azalma xarakteri mühüm rol oynayır. Markov stasionar prosesləri halında belə kovariasiyalar eksponensial azalır, belə ki, eksponentin üstü uyğun Markov operatorunun spektrindəki çatla (ara ilə) ifadə olunur. Dinamik sistemlərdə kovariasiyaların eksponensial azalması, adətən, dinamik sistemin Markov təqribatının qurulması ilə təyin olunur. $b_f(t)$ -nin dəqiq asimptotik tədqiqi E. n.-nin ən çətin problemlərindəndir. Əksər hallarda kovariasiyaların azalması olduqca yavaş olur.

7. B e r n u l l i y e r i n i d e y i ş m ə s i n ə i z o m o r f i z m. Bernulli yerindəyişməsi ən güclü stoxastik xassələrə malik diskret zamanlı dinamik sistemdir. Stoxastik xassə kimi bəzən $\{S^t\}$ dinamik sisteminin bu yerindəyişməyə izomorfizmi təklif olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, izomorfizm, adətən, ölçülən olur və əlavə struktur saxlamır, məs., topologiyı, hamarlıqı. Buna görə də, izomorfizm olduqca təbii funksiyalar sinifləri üçün kovariasiyaların asimptotikası üzərində, mərkəzi limit teoreminə və s.-yə nəzarət ite bilər.

E. n.-nin əsas məsələlərindən biri dinamik sistemlərin və ya digər siniflərinin stoxastik xassələrinin araşdırılmasıdır. Differensial tənliklər sisteminin trayektoriyaları boyunca yerindəyişmələr qrupu olan klassik dinamik sistemlərdə stoxastik xassələrin meydana gəlməsi dinamik sistemin dayanıqlı olmaması ilə izah olunur. Bu ümumi və mühüm ideyaya aid olan ilk qeydlərə H. Puankarenin (H. Poincaré) işlərində təsadüf olunur. Statistika üçün qeyri – dayanıqlılığın rolu J. Adamar (J. Hadamard), C. Birkhoff (G. Birkhoff), E. Hopf (E. Hopf) kimi alimlərin araşdırılmasında öz əksini tapmışdır ([2], [4]). Dinamik sistemin qeyri – dayanıqlılığı və dinamik sistemin stoxastik xassələri arasında əlaqənin olması XX əsrin 60-ci illərinin başlanğıcında A. N. Kolmoqorovun əsərində (bax, [3]) dinamik sistemlərin entropiyası və K – sistem anlayışlarının daxil olunması ilə göstərilmişdir. Sonradan entropiya anlayışı daha ümumi şəkildə təklif olunmuşdur. Dinamik sistemin entropiyası izomorfizmin invariantıdır və bu da A. N. Kolmoqorova E. n.-nin əsas problemlərindən biri olan hesabıqat Lebeq spektrli dinamik sisteminin izomorfluğu haqqında hökm verməyə əsas vermişdir və o göstərmişdir ki, müxtəlif qiymətli entropiyası olan Bernulli yerindəyişmələri öz aralarında metrik izomorf deyildirlər, A. N. Kolmoqorovun bu nəticəsindən sonra eyni zamanda aydın olur ki, K – sistem halında dinamik sistemlərin izomorfizmi problemə informasiya nəzəriyyəsi baxımında stasionar kodlama problemi kimi yanaşmaq lazımdır. Bu istiqamətdə ilk nəticələr L. D. Meşalkin və Y. Q. Sinay (bax, [1], [2]) tərəfindən alınmışdır. K – sistem üçün metrik

izomorfizm probleminin son neticələri D. Ornşteynə məxsusdur (bax. [6]). Xüsusi halda o göstərmişdir ki, bərabər entropiyalı Bernulli yerindəyişmələri izomorfduurlar. Bununla belə, K – sistem sinfində entropiya metrik invariantların tam sistemini təşkil etmir və bərabər qiymətli entropiyaya malik olan cüt-cüt qeyri – izomorf K – sistemlərin kontinuumu mövcuddur. Bu nəticələr stasionar proseslərin rəqulyarlıq xassələrinin dərin analizi ilə və müxtəlif rəqulyarlıq xassələrlə incə proseslərin qurulması ilə alınmışdır.

E. n.-də zəif stoxastik xassəli dinamik sistemlər də mühüm rol oynayır. Belə sistemlərdən biri kimi ilk növbədə xalis nöqtəvi spektrli dinamik sistemlər qeyd olunmalıdır. Kolmoqorov – Arnold – Mozerin məşhur nəzəriyyəsində isbat olunur ki, belə sistemlər Hamilton sistemlərinin erqodik komponentlərində yaranır və bunlar da inteqrallanan Hamilton sistemlərinin kiçik sapmalarıdır. $(x_1, \dots, x_d)$ koordinatları d – ölçülü torun

$$(x_1, \dots, x_d) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x_1 + c_1, x_2 + c_2, x_1, \dots, x_d + c_d, x_1 + \dots + c_{d,d-1}x_{d-1})$$

şəkilli çevirmələri $\mathbb{C}$ ərinə yerindəyişmələr adlanır və bunlar ədədlər nəzəriyyəsinə E. n.-nin tətbiqində yaranır, burada c_{ij} – tam ədədlərdir (bax, [1]).

Bircins təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində «zaman» kimi $\mathbb{R}^d$ və $\mathbb{Z}^d$ fəzaları götürüldükdə, çevirmələrin ölçülərini saxlayan qruplar yaranır. Erqodiklik, erqodik teoremlər, qarşma, entropiya çevirmələrinin birparametrik qrupu halında olduğu kimi təyin edilir. Rəqulyarlıq xassələri isə birölçülü zaman halında olduğundan daha da müxtəlif və mürəkkəb ola bilər. Bircins meydanlara aid çoxsaylı misallar bərabərçəkili statistik mexanikada yaranır.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985; [3] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 86–91; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М. – Л., 1950; [5] Синай Я., «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 4, с. 768–771; [6] Орнштейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [7] Нейман Дж., Избранные труды по функциональному анализу, т. 1–2, пер. с англ., М., 1987.

ERQODİK SINİF(fi) Markov zəncirinin « эргодический класс цепи Маркова; ergodic class / set in a Markov chain » – bax, Markov zənciri; erqodik sinif.

ERQODİK TEOREMLƏR « эргодические теоремы; ergodic theorems » – təsadüfi prosesin zaman üzrə orta qiymətlərinin limitinin varlığı və ya bunların faza üzrə orta qiymətlər ilə üst-üstə düşməsi haqqında ixtiyari müddədir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında diskret zamanlı [yeni $T = \{0, 1, 2, \dots\}$] və ya kesilməz zamanlı [yeni $T = [0, \infty)$], qiymətləri $(\mathcal{X}, B)$ faza fəzasından olan $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesinin verildiyi fərz olunur: $\mathcal{A}$ ele minimal σ cəbr olsun ki, bütün $t \in T$ qiymətlərində ζ_t təsadüfi kəmiyyətləri bu cəbrə nəzərən ölçülən olsunlar.

Fərz olunur ki, ζ_t , $t \in T$ prosesinin trayektoriyaları çoxluğu yerindəyişmələrə nəzərən qapalı çoxluqdur. Yeni tərifə əsasən ixtiyari $\omega \in \Omega$ və ixtiyari $s \in T$ üçün Ω fəzasında ele ω'_s

elementi vardır ki, $\zeta_t(\omega'_s) = \zeta_{t+s}(\omega)$ bərabərliyi bütün $t \in T$ üçün ödənilir.

Yerindəyişmələrə nəzərən trayektoriyalar çoxluğunun qapalılığı ζ_t , $t \in T$ təsadüfi prosesi ilə ele θ_t , $t \in T$ yerindəyişmələr operatorlarının ailəsini əlaqələndirmək imkanı yaradır ki, bu operatorlar $\mathcal{A}$ – ölçülən ζ təsadüfi kəmiyyətlərinə və Γ hadisələrinə $\theta_t \zeta(\omega) = \zeta(\omega'_t)$ və $\omega \in \theta_t \Gamma$ qaydası ilə, yalnız və yalnız, $\omega'_t \in \Gamma$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olduğu halda təsir edir.

Əgər $T = [0, \infty)$ olarsa, onda ζ_t , $t \in T$ prosesi aşağıdakı mənada ölçülən proses fərz olunur: $(t, \omega) \rightarrow \zeta_t(\omega)$ inikası $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}_t \times \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasına inikası kimi anlaşılır ($\mathcal{B}_t$, $t \in [0, \infty)$ yarımxonun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir).

ζ_t , $t \in T$ prosesinin bu mənada ölçülənliyi yerindəyişmiş $\theta_t \zeta$ kəmiyyətinin t , ω dəyişənlərinin toplusu üzrə ölçülənliyini təmin edir.

$\mathcal{A}$ – ölçülən ζ təsadüfi kəmiyyətinin zaman üzrə orta qiymətləri, diskret zaman halında

$$S_t(\zeta) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \theta_k \zeta$$

normalanmış cəmləri, əgər kesilməz zaman halına baxılırsa,

$$S_t(\zeta) = \frac{1}{t} \int_0^t \theta_u \zeta du$$

inteqralları olur.

ζ təsadüfi kəmiyyətinin faza üzrə orta qiyməti – məhz onun riyazi gözləməsi – $\mathbf{M}\zeta$ kəmiyyətidir. Beləliklə, E. t. ya $S(\zeta) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t(\zeta)$ limitinin varlığını (hər hansı mənada) və ya $S(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün şərtləri formalaşdırır.

Belə növ nəticələrdən ən mühümü – Birkhof – Xinqin erqodik teoremidir; bu teoremdə hökm olunur ki, əgər zaman diskret, $\zeta_0, \zeta_1, \dots$ – stasionar ardıcılıq və $\mathbf{M}|\zeta| < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta | \mathcal{G}) \quad (*)$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur, burada $\mathcal{G}$ σ – cəbri, yalnız və yalnız, ele $\Gamma \in \mathcal{A}$ hadisələrini özündə saxlayır ki, onlar üçün $\theta_t \Gamma = \Gamma$ bərabərliyi bütün $t \geq 0$ üçün ödənilir. Əgər bundan

başqa hər hansı $p \geq 1$ qiymətində $\mathbf{M}|\zeta|^p < \infty$ olarsa, onda (*) münasibətində yığılma p – tərtiblə orta mənada da doğrudur.

Analoji müddəə kesilməz zaman halında da doğrudur. Bu halda $S(\zeta)$ -nin $\mathbf{M}(\zeta)$ ilə üst-üstə düşməsi $\mathcal{G}$ σ – cəbrinin triviallıq məsələsinə gətirilir. Trivial $\mathcal{G}$ σ – cəbri ilə verilən stasionar prosesləri erqodik proseslər də adlandırılır. Prosesin erqodikliyi üçün onun qarışma xassəsinə malik olması kafidir. Asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı; kesilməz spektral sıxlığa malik Gauss təsadüfi prosesi; vəziyyətlər çoxluğu sonlu və ya hesabi, müsbət qayıdışlı Markov zənciri erqodik təsadüfi proseslərə misaldır.

Bu gün üçün ümumi hesab edilən E. t.-dən biri aşağıdakı kimi ifadə olunur. Fərz olunur ki, ələ $\mathcal{X}$ -ölçülən $\tau \geq 0$ kəmiyyəti tapılar ki, $\zeta_t, t \geq 0$ və $\zeta_{\tau+t}, t \geq 0$ proseslərinin sonlu ölçülü paylanmaları üst-üstə düşər. Onda əgər $M\tau < \infty$ və

$$M \int_0^{\tau} \theta_t |\zeta_t| dt < \infty \text{ olarsa, onda}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t(\zeta) = M \left(\int_0^{\tau} \theta_t \zeta_t dt | \mathcal{G} \right) / M(\tau | \mathcal{G})$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir.
Bəzən

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\theta_t \zeta_t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S_t(\zeta) / S_t(\eta)$$

və ya

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\theta_t \zeta_t / M\theta_t \eta$$

şəklində limitlərin varlığı haqqında teoremlər də E. t.-lər adlanır. Bax, *Erqodik teoremlər* stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi meydanlar üçün.

Əd.: [1] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Шуренков В. М., Эргодические теоремы и смежные вопросы теории случайных процессов, К., 1981.

ERQODİK TEOREMLƏR Markov prosesləri üçün «эргодические теоремы для марковских процессов»; **ergodic theorems** for Markov processes — 1) fəza fəzalarında E. t.-zaman parametri məhdud olmadan artıqca kəsilməz və həmçinin diskret zamanlı Markov proseslərinin keçid funksiyalarının limitlərinin və qiymətlərinin varlığı haqqında teoremlərdir. Limit anlayışı konkret vəziyyətdən asılı olaraq ifadə olunur, məs., o, nöqtəvi yığılma, Cezaro menada yığılma və ya hər hansı Banax fəzasında yığılma kimi yığılmalarla əlaqədar ola bilər. Markov zəncirlərinin erqodik xassələrini A. A. Markov özü öyrənməyə başlamışdır (1906–07). Bu problem sonradan A. N. Kolmoqorov (1936), V. Deblin (W. Doeblin) və digər tədqiqatçıların nəzərini cəlb etmişdir və hal-hazırda da öz aktuallığını itirməmişdir. E. t.-in praktiki əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bir çox fiziki sistemlər çoxluqlarında bu teoremlər limit və ya müəyyən menada bərabərçəkili paylanmaları təsvir edir.

A. N. Kolmoqorovun aşağıdakı nəticələri (bax, [5], [2]) klassik nəticələr sayılır. $p_{ij}(n)$ — hər hansı bircins sonlu və ya hesabi X Markov zənciri üçün n addıma i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalı olsun. Onda Cezaro limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=1}^n p_{ij}(m) = \pi_{ij}$$

vardır, belə ki, əgər j qayıdışsız vəziyyət olarsa, $\sum_j \pi_{ij} \leq 1$ və

$\pi_{ij} = 0$ olur (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Əgər i zəncirin qayıdış vəziyyətidirsə, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}(nd) = d f_{ii}^{-1}$$

olur, burada d , — i vəziyyətinin periodu, f_{ii} , — i vəziyyətinə qayıdış müddətinin orta qiymətidir (bax, *Markov zənciri*; orta

qayıdış müddəti). Bu müddətlərdən mühüm nəticələr alınır. Məs., X sonlu və ayrılmayan zəncir olarsa, onda π_{ij} ədədləri i -dən asılı olmur və $\mu_j \equiv \pi_{ij}$ şərtini ödəyən $\{\mu_{ij}\}$ toplusu stasionar paylanma təşkil edir. Əgər i və j vəziyyətləri $d = 1$ periodlu eyni bir qayıdışlı sinifdən olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = f_{ii}^{-1}$$

olur.

E. t.-də limite yığılma sürəti mühüm nəzəri və tətbiqi maraq doğurur, məsələn, bəzi $\rho < 1$ və $c_{ij} < \infty$ qiymətlərində $n \geq 1$

olduqda $|p_{ij}(n) - \mu_j| \leq c_{ij} \rho^n$ qiymətləndirilməsi kimi; bu halda i və j X Markov zəncirinin vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ -də dəyişir, μ_{ij} ədədləri isə zəncirin stasionar paylanmasını əmələ gətirir (bu halda zəncir həndəsi erqodik zəncir adlanır). Sonuncu qiymətləndirmənin yerinə yetməsi üçün zəruri və kafi şərt $\mathcal{E}$ vəziyyətlər çoxluğunda müəyyən xassələrə malik funksiyaların varlığı terminləri ilə ifadə olunur (bax, [12]); yığılma sürəti üstlü olduğu hal üçün oxşar qiymətləndirmələr də vardır. *Döblin şərti* və zəncirin ayrılmayan zəncir olması onun həndəsi erqodikliyi doğurur; bu halda c_{ij} konstantlarını müntəzəm məhdud hesab etmək olar.

$X = (X_n, P_x)$ bircins Markov zənciri ixtiyari $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verildiyi halda E. t.-lərin alınmasında M. Freşe (M. Frechet), V. Döblin, N. M. Krilov, N. N. Boqolyubov, K. Yosida (K. Yosida) və S. Kakutani (Sh. Kakutani) kimi alimlərin xidmətlərini qeyd etmək lazımdır (bax, [1]). Orey teoreminə (bax, *Markov zənciri*) görə, əgər çoxaddımlı keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$ olan X zənciri Harris qayıdışlı, qeyri — periodik və stasionar μ paylanmasına malik zəncirdirsə, onda $\mathcal{B}$ -də ν ehtimal ölçüsünün, yükün tam variasiyası νP^n -nin seçilməsindən asılı olmaya-raq μ stasionar paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda 0-a yaxınlaşır, burada

$$\nu P^n(\cdot) = \int p(n, x, \cdot) \nu(dx).$$

Periodik zəncir üçün analogi müddə müvafiq şəkildə doğrudur. Əgər X Harris qayıdışlı zəncirdirsə və $\mu(\mathcal{E}) = \infty$ şərtini ödəyən invariant μ ölçüsünə malikdirsə, $\mu(\Gamma) < \infty$ olduğu hər bir halda $x \in \mathcal{E}$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda, $p(n, x, \Gamma) \rightarrow 0$ olur (bax, [4]).

Baxılan mövzuda keçid ehtimallarının kvazikompaqtlıq şərti mühüm rol oynamışdır; bu şərtə tələb olunur ki, X zənciri üçün ələ m natural ədədi və $B(\mathcal{E})$ fəzasında təsir edən T kompakt operatoru olsun ki, $\|P^m - T\| < 1$ şərti ödənsin, burada $B(\mathcal{E})$ — norması $\|f\| = \sup |f|$ olan məhdud $\mathcal{B}$ — ölçülən f funksiyalarının Banax fəzası, P , — $B(\mathcal{E})$ -də təyin olunmuş operatorudur:

$$Pf(\cdot) = \int f(y) p(\cdot, dy).$$

Bu halda E. t. aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [4]). $\mathcal{E}$ fəzasında cüt-cüt kəsişməyən aşağıdakı xassələri $E_k \in \mathcal{B}$ çoxluqlarının sonlu ailesini seçmək olar: a) hər bir E_k uducu vəziyyətdir, yəni $x \in E_k$ olduqda $p(x, E_k) = 1$; b) X zəncirinin E_k -dəki hissəsi X_k [yeni $(E_k, \mathcal{B}_k)$ ölçülən fəzasında Markov zənciridir, burada $\mathcal{B}_k = \mathcal{B} \cap E_k$ - cəbrinin E_k -də izidir, $p(x, \Gamma)$, $x \in E_k$, $\Gamma \in \mathcal{B}_k$, - X_k zəncirinin keçid ehtimallarıdır] Harris qayıdışlı zəncirdir və stasionar μ_k paylanmasına malikdir; c) əgər $x \in D = \mathcal{E} \setminus \bigcup_k E_k$ olarsa, onda

$p(n, x, D) \rightarrow 0$ münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda $x \in D$ üzrə müntəzəm ödənilir. Bundan başqa, X_k zəncirlərindən hər hansı biri qeyri - periodik olarsa, onda $p(n, x, \Gamma) \rightarrow \mu_k(\Gamma)$ münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda $x \in E_k$ üzrə müntəzəm ödənilir (X_k periodik zəncir olduğu halda sadə dəyişikliklər tələb olunur). Qeyd olunanlardan, məs., kvazikompaktlıq və Döblin şərtinin eynigüclülüüyü tələbi alınır. Nəhayət,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=1}^n p(m, x, \Gamma) = \sum_k \pi(x, E_k) \mu_k(\Gamma)$$

münasibəti $x \in \mathcal{E}$ və $\Gamma \in \mathcal{B}$ üzrə müntəzəm ödənilir, burada

$$\pi(x, E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n, x, E_k)$$

- E_k çoxluqları üzrə final paylanmadır.

Markov zəncirləri üçün digər E. t. mövcuddur. Feller zəncirləri (bax, [3], [11]) üçün, yeni məhdud kəsilməz funksiyalar ailesini özündə inikas etdirən P operatorlarına uyğun topoloji fəzalarda zəncirlər üçün E. t. xüsusi yer tutur. Nisbətler üçün limit teoremləri də E. t.-in müxtəlif formalarıdır (bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətler üçün). Bu və ya digər E. t.-in tətbiqinin mümkünlüyü zəncirdə trivial olmayan ölçünün və ya onun analoqlarının olmasından asılıdır. Bu və digər bir sıra səbəblərə görə belə ölçülərin varlığı və onun strukturunun təsviri böyük maraq doğurur (bax, [3], [4], [10], [14]).

Kəsilməz zamanlı Markov prosesləri üçün E. t. Markov zəncirləri ilə müqayisədə ikinci plana keçir. Bu onunla izah olunur ki, Markov prosesləri üçün E. t.-in ekseriyyəti zəncirlərlə əlaqədar E. t.-də yaranır ki, bu da zəncirlərin uyğun proseslərə məqbul surətdə daxil edilməsi ilə bağlı olur (bax, [7], [13]). Beləliklə, Harris qayıdışlı zəncirlər üçün E. t. Harris qayıdışlı, müəyyən rəqulyarlıq şərtini (bax, [7]) ödəyən standart proseslər üçün E. t. kimi ifadə olunur (bax, *Qayıdışlı Markov prosesi*).

İdeyaları, metodikası və ümumi istiqamətinə görə Markov prosesləri və zəncirləri üçün ergodik nəzəriyyə ümumi nəzəriyyə və funksional analizlə oxşar bölmələri ilə sıx əlaqədardır. Funksional analizlə xüsusi metodlarından istifadə etməklə E. t.-in isbatında mühüm effektlərin olduğu aydın olmuşdur (bax, [11], [12]). Klassik işlərin əsaslandığı regenerasiya ideyaları bununla əlaqədar [9]-də yeni tərzdə ifadə olunmuşdur. Bircins olmayan hal da araşdırılmışdır.

2) Elementar hadisələr fəzasında E. t. - böyük ədədlər qanunu tipli teoremlər və nisbətler üçün limit teoremləri onların analoqlarıdır (bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətler üçün). Belə teoremlər müasir ergodik nəzəriyyə və stasionar proseslər nəzəriyyəsinin analoji nəticələri ilə bilavasitə çox yaxındır.

Qeyd olunan E. t.-ə misal aşağıdakı müddə ilə ifadə olunur (bax, [2]). X - stasionar paylanması $\{\mu_j\}$ olan, vəziyyətləri çoxluğu hesabı çoxluğu aşmayan ergodik Markov zənciri olsun. Onda başlanğıc paylanması ixtiyari olduğu halda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n f(X_m) = \sum_j \mu_j f(j)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, çünki $f(j)$, $j \in \mathcal{E}$ funksiyası üçün qeyd olunan sıra mütləq yığılır. Döblin şərtini ödəyən zəncirlərin ümumi halı üçün analoji nəticə alınmışdır.

Əd.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Ч ж у н К а й - л а й, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] F o g u e l S. R., The ergodic theory of Markov processes, N. Y. - [a. o], 1969; [4] R e v u z D., Markov chains, Amst. - [a. o], 1975; [5] K o l m o g o r o f f A., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 607-10; [6] Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 196-214; [7] D u f l o M., R e v u z D., «Ann. Inst. H. Poincaré. В», 1969, т. 5, р. 223-44; [8] П о п о в Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316-19; [9] Н у м м е л и н Е., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 43, S. 309-18; [10] Ш у р М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 3, с. 496-509; [11] С м и р н о в С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, с. 554-58; [12] К а р т а ш о в Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 230-40, 478-85; [13] Ш у р е н - к о в В. М., Эргодические процессы Маркова, М., 1989; [14] С к о р о х о д А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 641-50; [15] Н у м м е л и н Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989.

ERQODİK TEOREMLƏR stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi meydanlar üçün « эргодические теоремы для стационарных случайных процессов и однородных случайных полей: **ergodic theorems for stationary random process and homogeneous random fields** » - stasionar təsadüfi proseslərin və bircins təsadüfi meydanların zaman üzrə orta qiymətlərinin varlığı və hesablanmasına aid müddəalardır.

1. Zaman üzrə orta qiymətin varlığı və yeganəliyi; abstrakt ergodik teoremlər. T - topoloji semi - qrup, $\mathcal{P}(T)$, - T -də bütün ehtimali Borel ölçülərinin ailesi, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ - ehtimal fəzası olsun; fərz olunur ki, $X(t)$, $t \in T$, - T -də ölçülən təsadüfi meydandır və hər hansı $p \geq 1$ qiymətində $\mathbf{M}(|X(t)|^p) < \infty$, $t \in T$. L^p -də $X(\cdot)$ meydanının realizasiyaları (trayektoriyalar) üzrə orta qiyməti və ya zaman üzrə orta qiyməti ilə $M^*(X) \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir ki, hər hansı $\{v_n\} \subset \mathcal{P}(t)$ ardıcılığı üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T X(vt) v_n(dt) = M^*(X) \quad (1)$$

münasibəti $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzasında yığılma mənasında $v \in T$ üzrə müntəzəm ödənilsin; bu halda $\{v_n\}$ ardıcılığı $X(\cdot)$ meydanını statistik ortalayır, deyilir. L^p -də hər bir $M^*(X)$ orta qiyməti - L^p -də orta qiymətdir, $1 \leq p < \infty$.

Geniş mənada sol yerindəyişmələrə nəzərən ixtiyari bircins meydanın L^2 -də zaman üzrə yeganə orta qiyməti vardır, dar

menada biricins $X(\cdot)$ təsadüfi meydanı $\mathbf{M}(|X(x)|p) < \infty$ şərtini ödəyərsə, onda onun L^p -də zaman üzrə yeganə orta qiyməti vardır, $1 \leq p < \infty$. Əgər $X_{t_1, t_2}(t) = X(t, t_1, t_2)$, $t, t_1, t_2 \in T$ olarsa, onda $M^*(X_{t_1, t_2}) = M^*(X)$. Əgər $X(\cdot)$ meydanı dar menada biricins olarsa, $M^*(X) = \mathbf{M}(X(t)|J_X)$ olur, burada $J_X = X(\cdot)$ meydanının yerindəyişmələrə nəzərən $\mathcal{A}$ -da $\mathbf{P} = \text{mod } 0$ invariant altçoxluqlarının σ -cəbridir. Əgər $X(\cdot)$ geniş menada biricins meydan olarsa, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün kombinasiyalının çoxluğunun qapanması olan H_X altfəzasına və bu fəzada $U_t X(y) = X(ty)$, $t, y \in T$ xassəsi ilə təyin olunan U_t izometrik xətti operatorlarına baxmaq olar. $J_X = \{\gamma: \gamma \in H_X, U_X \gamma = \gamma, t \in T\}$ olsun. Onda $M^*(X) = \hat{\mathbf{M}}(X(t)|J_X)$, $X(t)$ -nin J_X üzərinə ortoqonal proyeksiyasıdır, $t \in T$. Bu nəticələr Birkhof [2] və Alaoglu – Birkhof [1] «abstrakt ergodik teoremləri»-ndə şərh olunmuşdur. Deməli, buradan belə nəticə alınır ki, əgər $X(\cdot)$ dar menada biricins və metrik tranzitiv olarsa və ya $X(\cdot)$ geniş menada biricins olarsa və J_X alt fəzası trivial olarsa (konstantlardan ibarət olarsa), onda $M^*(X) = \mathbf{M}X$ olur, yəni zaman üzrə M^* orta qiyməti – «statistik ansambl üzrə» orta «qiymət» $\mathbf{M}X(t)$ – fəza üzrə orta qiymət adlandırılan orta qiymətlə üst-üstə düşür. Bu fakt L. Boltzmann (L. Boltzmann) və C. U. Gibbs (J. W. Gibbs) kimi alimlərin ideyalına əsaslanır və onun əsasında riyazi statistikada, statistik mexanikada və informasiya nezeriyyəsində bir sıra müddəalar isbat etmək olur. $X = \mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$ hallarında zaman üzrə $M^*(X)$ orta qiymətinin varlığı və $M^*(X) = \hat{\mathbf{M}}(X(t)|J_X)$ bərabərliyi Birkhof – Xinqin ergodik teoremi və Neyman ergodik teoreminde isbat olunmuşdur.

Birkhof – Xinqin və Neyman E. t.-ne əsasən $\nu_{A_n}: \nu_{A_n}(B) = |A_n \cap B|/|A_n|$ ölçülər ardıcılığı $\mathbb{R}$ -də (uyğun olaraq $\mathbb{Z}$ -də) bütün biricins təsadüfi meydanları ortalayır, burada $A_n = [0, n]$ və ya $A_n = [-n, n]$, $|B|$, $B \subset \mathbb{R}$ çoxluğunun (uyğun olaraq $B \subset \mathbb{Z}$) Lebeq ölçüsüdür (uyğun olaraq gücüdür). Digər alt qruplarda «bele universal» ortalayıcı ardıcılıqların axtarışı bu E. t.-lərin geniş ümumiləşmələrinə gətirmiş oldu (bax, aşağı).

2. Universal ortalayıcı ardıcılıqlar, statistik ergodik teoremlər. Aşağıdakı iki eyni-güclü müddəadan biri doğru olduqda $\{\nu_n\} \subset \mathcal{P}(T)$ ardıcılığı T -də universal statistik ortalayıcı ardıcılıq adlanır, əgər:

1) $\{\nu_n\}$ T -də ixtiyari geniş menada biricins ölçülən təsadüfi meydanı statistik ortalayır;

2) $\{\nu_n\}$ L^p -də ixtiyari dar menada biricins, $\mathbf{M}(X(t))^p < \infty$ ($p \geq 1$) şərtini ödəyən ölçülən $X(t)$ təsadüfi meydanını statistik ortalayır.

Əgər T lokal kompakt qrup və A_n , $n = 1, 2, \dots$ – sağ Haar ölçüsü $0 < \mu(A_n) < \infty$ ilə T -də Borel altçoxluqlarıdır, onda

$\nu_{A_n}(B) = \mu(A_n \cap B)/\mu(A_n)$ ölçülərinə baxmaq təbii, bu halda (1) münasibəti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} X(yt) \mu(dt) = M^*(X)$$

şəklini alır və əgər $\{\nu_{A_n}\}$ statistik ortalayıcı ardıcılıqdırsa, onda $\{A_n\}$ ardıcılığı statistik ortalayıcı ardıcılıq adlanır. Hesabi bazaya malik ixtiyari lokal kompakt qrupda bu növ ardıcılıqlar mövcuddur (bax, [23]). Bunların axtarışı ilə bağlı teoremlər statistik ergodik teoremlər adlanır (ingilis dilli ədəbiyyatda «mean ergodic theorems» termini istifadə olunur). İxtiyari $\{\theta_n\}$ ardıcılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n \Delta A_n x)}{\mu(A_n)} = 0$$

– Feller xassəsini ödəyirsə, belə ardıcılıq statistik ortalayıcı ardıcılıqdır (bax, [19]). $\mathbb{R}^m$ -də radiusları $r(S_n) \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən S_n küreələrini özündə saxlayan A_n qabarıq çoxluqların ixtiyari $\{A_n\}$ ardıcılığı Feller xassəli ardıcılıqdır (bax, [5]). Neyman ($X = \mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$, $A_n = [0, n]$ və ya $[-n, n]$ olduqda) E. t. və Viner (bax, [12]) və Danford E. t. (bax, [6]) ($X = \mathbb{R}^m$ və $\mathbb{Z}^m$, $m \geq 1$, A_n – küreələr və ya kublar olduqda) bu teoremin xüsusi hallarıdır. Əgər X sonlu mərkəzə malik qeyri – kompakt sadə Li əlaqə qrupudursa, onda $\mu(A_n) \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari $\{A_n\}$ ardıcılığı statistik ardıcılıqdır, bu E. t. qeyri – kompakt Li əlaqə qrupları sinfində sonlu mərkəzli sadə qrupları xarakterizə edir (bax, [22], burada ixtiyari Li qrupları üçün statistik E. t. isbat olunmuşdur). [13] və [19]-də E. t.-lər ümumiləşmiş biricins təsadüfi meydanlar üçün də tədqiq olunmuşdur.

3. Universal ortalayıcı ardıcılıqlar, individual ergodik teoremlər. Əgər $\mathbf{M}(|X(t)|) < \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari dar menada biricins $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi meydanı üçün ixtiyari $y \in T$ qiymətində (1) [uyğun olaraq (2)] münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, $\{\theta_n\}$ ardıcılığı (uyğun olaraq $\{A_n\}$) T -də individual ortalayıcı ardıcılıq adlanır; individual ortalayıcı ardıcılıqların axtarışı ilə bağlı teoremlər individual ergodik teoremlər adlanır (ingilis dilli ədəbiyyatda «pointwise ergodic theorems» termini də işlədilir). Əgər $q \in \mathcal{P}(t)$, q -nün daşıyıcısı T -ni doğurursa, nq^k q -nün konvolusiyaya nəzərən

k -cı dərəcəsidir, onda $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k$, $n = 1, 2, \dots$ – sta-

tistik ortalayıcı ardıcılıq və individual ortalayıcı ardıcılıqdır (bax, [21]); q və $X(\cdot)$ haqqında bezi əlavə fərziyyələrlə $\{q^n\}$ statistik ortalayıcı ardıcılıq və individual ortalayıcı ardıcılıqdır (bax, [18]). Əgər $\{A_n\}$ azalmayırsa və Feller xassəlidirsə və

$$\sup_{1 \leq n < \infty} (\mu(A_n A_n^{-1})/\mu(A_n)) < \infty$$

şerti ödenilərsə, onda $\{A_n\}$ – individual ortalayıcı ardıcılıqdır (bax, [8], [21]–[23]); məs., $\mu(S_n) \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən S_n

kürelərini özündə saxlayan, $\mathbb{R}^m$ -də qəbənq çoxluqların ixtiyari azalmayan ardıcılığı – individual ortalayıcı ardıcılıqdır. Birkhof – Xinqin, Viner [12] və Kalderon (bax, [3]) E. t. bu teoremin xüsusi hallarıdır. [9] və [11]-də qruplarda individual ortalayıcı ardıcılıqların qurulması üçün digər metodlar təklif olunmuşdur.

4. Erqodik teoremlərin digər tipləri.

E. Hopf [24]-də $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(\varphi^k \omega)$ əvəzinə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=0}^n f(\varphi^k \omega)}{\sum_{k=0}^n g(\varphi^k \omega)} \right)$$

limitlərinə baxaraq, Birkhof – Xinqin E. t.-ni sonsuzölçülülük $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ fəzasının φ endomorfizmlərinə ümumiləşdirmişdir,

burada $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$, $g \geq 0$. R. Çakon və D. Ornşteyn

[4]-də Hopf E. t.-ni $L^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$ -də müsbət sıxlaşdırıcı operatorlara ümumiləşdirmişlər (bax, [17]), [20]-də Hopf E. t. ixtiyari endomorfizmlər qrupuna köçürülmüşdür. N. Danford və

J. Şvarts [7]-də Birkhof – Xinqinin E. t.-ni $L^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$ və

$L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m)$ fəzalarında $\|S\| < 1$ normalan olan S xətti operatorlarına ümumiləşdirmişlər (bax, [15]). E. t.-in digər ümumiləşmələri [10]-da və [10], [15], [16] və [22] kitablarında şərh olunmuşdur.

Asılılıq üçün müxtəlif məhdudiyyətlərlə təsadüfi proseslər, ardıcılıq və meydana üçün zaman üzrə orta qiymətlərin varlığını müəyyənləşdirən böyük ədədlər qanunu formaca E. t.-ə yaxındır, $\mathbb{R}^m$ -də geniş mənada bircins təsadüfi meydanlar üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununda bu məhdudiyyətlər spektr üzərinə olduqca zəif şərtlər terminlərində ifadə olunur (bax, [14]).

Əd.: [1] Alaoglu L., Birkhoff G., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 293–309; [2] Birkhoff G., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 19–20; [3] Calderon A., «Ann. Math.», 1953, v. 58, p. 182–91; [4] Chacon R., Ornstein D., «Ill. J. Math.», 1960, v. 4, p. 153–60; [5] Day M., «Trans Amer. Math. Soc.», 1942, v. 51, p. 399–412; [6] Dunford N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 635–46; [7] Dunford N., Schwartz J., «J. Ration. Mech. Anal.», 1956, v. 5, p. 129–78; [8] Emerson W. R., «Amer. J. Math.», 1974, v. 96, p. 472–87; [9] Emerson W., Greenleaf F., «Adv. Math.», 1974, v. 14, p. 153–72; [10] Krengel U., Ergodic theorem. B. – N. Y., 1985; [11] Vershik A. M., «Selecta Math. Sovietica», 1982, v. 2, p. 331–50; [12] Wiener N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 1–18; [13] Urbanik K., «Studia Math.», 1958, v. 16, p. 268–334; [14] Гапошкин В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, с. 295–319; [15] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [16] Корнфельд И. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [17] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [18] Оселедц В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, с. 551–57; [19] Темпельман А. А., «Литовский. Матем. сб.», 1962, т. 2, № 1, с. 195–213; [20] Темпельман А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, с. 380–83; [21] Темпельман А. А., «Докл. АН СССР», 1967, т. 176, с. 790–93; [22] Темпельман А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1972, т. 26, с. 95–132; [23] Темпельман А. А., Эргодическая теоремы на группах,

Вильнюс, 1986; [24] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113–82.

ERQODİK TEOREMLƏR Viner prosesləri üçün «эргодические теоремы для винеровских процессов; ergodic theorems for Wiener processes» – lokal zaman üzrə inteqrallar nisbətinin asimptotik qiymətinin tapılması probleminə aid teoremlər sinfidir. Bu teoremlərin xüsusi halı Viner prosesinin additiv funksionallarının nisbətinin asimptotikası haqqında nəticələndir. Indikator funksionallarının ən sadə halında

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(s \leq t; w(s) \in A)}{I(s \leq t; w(s) \in B)} = \frac{I(A)}{I(B)}$$

münasibəti doğrudur, burada I – Lebeq ölçüsü, $w(s)$ – Viner prosesi, A, B – Borel çoxluqları, $I(B) < \infty$.

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968.

ERQODİK TƏSADÜFİ PROSES «эргодический случайный процесс; ergodic random process» –

kəsilməz və ya diskret zamanlı ele $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir ki, bu təsadüfi prosesin qiymətlərinin funksionallarının müəyyən bir $\Phi[\zeta(t)]$ sinfi üçün zaman üzrə $m^{(\Phi)}$ orta qiyməti vardır

($m^{(\Phi)}$ orta qiyməti $-T \leq s \leq T$ olduqda $\Phi[\zeta(t+s)]$ qiymətinin zaman üzrə orta qiymətinin $T \rightarrow \infty$ halında müəyyən ehtimal mənasında limiti kimi təyin olunur), bu qiymət ehtimali orta – $M\Phi[\zeta(t)]$ ilə üst-üstə düşür (yeni $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyalarının bütün ansamblı üzrə $\Phi[\zeta(t)]$ -nin orta qiyməti ilə).

Erqodiklik anlayışı ilk dəfə statistik fizikada 20-ci əsrin başlanğıcında yaranmış, bu anlayışın yaranması fiziki sistemlərin ağılabatan tərzdə seçilmiş statistik ansamblı üzrə orta qiymətinin təyin edilməsi əvəzinə bu sistemin birçə trayektoriyası boyunca zaman üzrə orta qiymətinin təyin olunması mümkün-lüyünə əsaslanmışdır; bu yanaşmadan istifadə olunaraq, sonralar erqodik təsadüfi proseslərlə bir çox orta qəhətləri olan, dinamik sistemlərin geniş erqodik nəzəriyyəsi inkişaf etmişdir (bax, məs., [1]).

t kəsilməz olsun: diskret zaman halı üçün isbatlar və nəticələr tamamilə analojidir və yalnız bəzi sadələşmələrlə fərqlənir. Belə ki, $\Phi[\zeta(t)]$ funksionalının zaman üzrə orta qiyməti, aydındır ki, zamandan asılı deyildir, onda erqodiklikdə fərz olunur ki, $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallarının baxılan sinfi üçün $M\Phi[\zeta(t)]$ orta qiyməti t -dən asılı deyildir, yeni $\zeta(t)$ prosesi müəyyən stasionallığa malikdir. E. t. p. anlayışına dəqiq mənə vermək üçün $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallarının baxılan sinfini də göstərmək lazımdır (və $T \rightarrow \infty$ olduqda istifadə olunan limit keçidinin mənasını da).

Erqodik anlayışlardan ən geniş maraq ifadə edən anlayışlar $\Phi[\zeta(t)]$ funksionalı əvəzinə bütün t_0 qiymətləri üçün yalnız $\zeta(t_0)$ ani qiymətlərinə baxılmaqla kifayətlənildiyi hallarda yaranır; bu halda E. t. p. üçün $M\zeta(t) = \text{const}$ bərabərliyi ödənilməlidir və erqodiklik isə onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesi üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir (adi böyük ədədlər qanunu – eger $T \rightarrow \infty$ olduqda ya ehtimala görə limit və ya kvadratik orta mənada limit və böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu – eger limit 1 ehtimalı limit kimi götürülsə). $\Phi[\zeta(t)] = \zeta(t_0)$ şəklində funksionallara (və bunların sonlu xətti kombinasiyalarna) aid erqodiklik birinci tərtib erqodiklik adlanır.

Geniş mənada stasionar proseslərə tətbiqdə (və bu şərtlə ki, $T \rightarrow \infty$ olduqda limit kvadratik orta mənada anlaşılır) belə stasionarlığın sadə zəruri və kafi şərti *Slutski erqodik teoremi* ilə verilir (bax, həm də, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün); belə proseslər üçün zaman üzrə orta qiymətin 1 ehtimalla limit kimi təyin olunduğu halında 1-ci tərtib erqodiklik şərtləri haqqında *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün məqaləsinə bax. Dar mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesləri üçün *Birkhof – Xinqin erqodik teoremi* ödənilir; bu teoreme görə $\zeta(t)$ prosesinin zaman üzrə orta qiyməti (1 ehtimalla limit kimi təyin olunan) yalnız $M[\zeta(t)] < \infty$ olduğu halda, olduqca geniş şərtlərlə mövcuddur; buradan, məs., aydın olur ki, dar mənada stasionar proseslər üçün Slutski şərtinin ödənilməsindən $\zeta(t)$ prosesi üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun doğruluğu alınır.

$\zeta(t)$ prosesinin ikinci tərtib erqodikliyi – elə $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallar sinfinin erqodikliyi kimi adi qaydada təyin olunur ki, bu sinfə $\zeta(t_0)$ nöqtəsindəki qiymətlərin hamısı və bütün cüt-cüt – $\zeta(t_0)\zeta(t_1)$ hasiləri daxildir; belə erqodiklik üçün $\zeta(t)$ prosesinin hökmən geniş mənada stasionar olması tələb olunur və bu erqodiklik o vaxt ola bilər ki, həm $\zeta(t)$ prosesi, həm də $Y_\tau(t) = \zeta(t)\zeta(t+\tau)$ prosesi (τ parametridən asılı olan) 1-ci tərtib erqodikliyə malik olsunlar.

$$B(\tau) = M(\zeta(t+\tau)\zeta(t))$$

ve

$$b(\tau) = M[\zeta(t+\tau) - M\zeta(t+\tau)][\zeta(t) - M\zeta(t)]$$

korrelyasion funksiyalarının və həmçinin $f(\lambda)$ spektral sıxlığının və $\zeta(t)$ prosesinin bir realizasiyasının T uzunluqlu parça üzrə $F(\lambda)$ spektral funksiyasının tutarlı qiymətləndirilməsi üçün 2-ci tərtib erqodiklik zəruridir. Əgər $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ elə n dəyişənli funksiya olarsa ki,

$$M[\Phi[\zeta(t_0), \zeta(t_0+t_1), \dots, \zeta(t_0+t_{n-1})]] < \infty$$

şərtini ödəsin və əgər

$$\Phi[\zeta(t)] = \Phi[\zeta(t_0), \zeta(t_0+t_1), \dots, \zeta(t_0+t_{n-1})]$$

şəklində bütün funksionallar (və ya hətta daha geniş –

$$\Phi[\zeta(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n[\zeta(t_0), \zeta(t_0+t_1), \dots, \zeta(t_0+t_{n-1})]$$

şəklində funksionallar sinfi) üçün zaman üzrə orta qiymətin nəzəri – ehtimali orta qiymətlə bərabər olması tələbi qoyularsa, erqodikliyin daha dar mənada anlayışı alınır. Bu mənada erqodiklik ödənilən proseslər, çox vaxt sadəcə erqodik (və ya metrik tranzitiv) proseslər adlandırılır. Əgər $\zeta(t)$ dar mənada stasionar təsadüfi proses olarsa,

$$m^{(\Phi)} = (2T)^{-1} \times \int_{-T}^T \Phi[\zeta(t_0+s), \zeta(t_0+t_1+s), \dots, \zeta(t_0+t_{n-1}+s)] ds$$

kəmiyyətinin $T \rightarrow \infty$ olduqda 1 ehtimalla limiti $m^{(\Phi)}$ -in varlığı Birkhof – Xinqinin erqodik teoremindən alınır; buna görə də, erqodiklik şərtlərinin tapılması məsələsi $m^{(\Phi)} = M\Phi[\zeta(t)]$ bərabərliyinin ödənilməsi şərtlərinin tapılmasına gətirilir. Bu şərtlər, adətən, olduqca çətin müəyyən olunur; yalnız $\zeta(t)$ Qauss stasionar prosesi olduğu hal istisnadır (bu halda, aydındır ki, geniş və dar mənada stasionarlıq üst-üstə düşür). Belə ki, belə proseslərin erqodikliyi (metrik tranzitivliyi) üçün zəruri və kəfidir ki, $\zeta(t) - M\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ hər yerdə kesilməz olsun (bax, [2], [3], [4], diskret t halında, [5], [6]). Qauss prosesləri sinfindən daha geniş olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesləri sinfinə aid olan qeyd olunan şərtin bezi ümumiləşmələri və $\zeta(t)$ -nin yüksək tərtib momentləri və ya çoxölçülü xarakteristik funksiyaları terminləri ilə ifadə olunan şərtlər [7], [8]-də göstərilmişdir; lakin buradakı şərtlər çox çətin yoxlanılır. Daha ümumi erqodiklik şərti ($0 \leq s \leq T$ intervalında $T \rightarrow \infty$ olduqda $\Phi[\zeta(t+s)]$ -in orta qiymətinin limitinin yığılması tələbi kimi anlaşılan) [9]-də verilmişdir.

Qeyri – erqodik (metrik intranzitiv) dar mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesi halında dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsinə aid J. Neymanın [10], [11]-də, V. A. Rokslinin [12]-də aldığı nəticələrdən aydındır ki, $\zeta(t)$ prosesinin bütün realizasiyaları çoxluğunun olduqca geniş requlyarlıq şərtlərində bu çoxluq ələ kəşilməyən altçoxluqlara bölünə bilər ki, bunların hər biri üzrə $\zeta(t)$ -nin bütün orta qiymətləri $T \rightarrow \infty$ olduqda 1 ehtimalla sabit qiymətlərə – $\zeta(t)$ -nin şərti orta qiymətlərinə yığılırlar, bu şərtlə ki, prosesin baxılan realizasiyası uyğun altçoxluğa daxil olsun (bax, məs., [5]). Bu faktı belə interpretasiya etmək olar: qeyri – erqodik stasionar proseslərə praktiki olaraq belə erqodik proseslər sırasının qanışığı kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Корнфельд Н. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Мацуяма Г., «Мем. Fac. Sci. Kyusyu Univ.», Ser. A, 1949, v. 4, № 1, p. 45–106; [3] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [4] Фомин С. В., «Укр. матем. ж.», 1950, т. 2, № 2, с. 25–47; [5] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [6] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций в их приложения, пер. с англ., М., 1969; [7] Парзен Е., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 299–301; [8] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [9] Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, 2 изд., 1989; [10] Нейманн J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 4, p. 587–642; [11] Нейманн J., Избранные труды по функциональному анализу, пер. с англ., нем., т. 1, М., 1987, с. 7–62; [12] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 57–128.

ERQODİKLİK « эргодичность; ergodicity » – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının çevirmələrinin ölçüsünü dəyişməz saxlayan, qrup və ya semi – qrupa aid xassədir. Bu xassə qrup və ya semi – qrupa nəzərən invariant ələ $A \in \mathcal{A}$ altçoxluqlarının yoxluğu kimi təyin olunur ki, bunlar $P(A) > 0$, $P(\Omega \setminus A) > 0$ şərtini ödəsinlər. Sonsuzölçülü ölçünü saxlayan çevirmələr üçün bəzən «E» termini əvəzinə «metrik tranzitivlik» termini istifadə olunur.

Əgər $\{S^{(t)}\}$ $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d \text{ və ya } \mathbb{Z}^d\}$ stasionar təsadüfi prosesinin realizasiyanın fəzasında yerindəyişmələr qrupu-dursa, onda E. ifadə edir ki, ixtiyari $Y(x) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ təsadüfi kəmiyyəti üçün sanki yəqin

$$\frac{1}{T^d} \int_0^T \dots \int_0^T Y(S^{(t_1 + t_2)} x) dt_1 \dots dt_d \rightarrow MY$$

münasibəti ödənilir ($\mathbb{Z}^d$ halında integrallar əvəzinə cəmlər götürülür). Yuxarıda qeyd olunan tərifi ekvivalent Birkhof – Xinqin *ərqodük teoreminin* sadə nəticəsini qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

ERLANG DÜSTURU « Эрланга формула; Erlang formula » – n – xətti xidmət sisteminde k xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k üçün axın və xidmətin parametrləri λ, μ vasitəsilə ifadə olunan düsturdur:

$$p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k / \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Tələbin itməsi ehtimalı p_n -nə bərabərdir. 1917-də A. Erlanq tərəfindən çıxarılmışdır və bu düstur telefon və digər xidmət sistemlərində hesablama üçün istifadə olunur.

Bax, Sevastyanov düsturu.

ERLANG PAYLANMASI « Эрланга распределение; Erlang distribution » – paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{(n\alpha)^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-n\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, $[0, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada α, n – parametrlər, n – tam ədəddir, $\Gamma(n)$ – bütün n – müstəvidə analitik funksiyadır, $n = 0, -1, -2, \dots$ nöqtələrində sadə polynslara malikdir və

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt, \quad (\operatorname{Re} n > 0),$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n), \quad \Gamma(n+1) = n!,$$

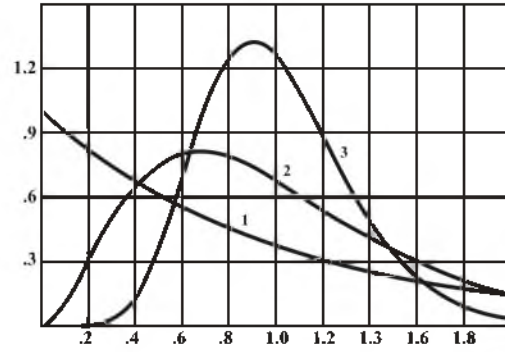
$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

E. p. ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləmə və dispersiyası uyğun olaraq $1/\alpha$ və $1/n\alpha^2$ kəmiyyətlərinə bərabərdir. E. p. *Qamma paylanması* xüsusi bir halıdır. Bu paylanma kütləvi xidmət nəzəriyyəsi məsələlərində onu ilk dəfə tətbiq etmiş A. Erlanqın (*A. Erlang*) adı ilə adlandırılmışdır. Parametrləri α və n olan E. p. hər biri $n\alpha$ parametrlə eyni üstlü qanunla paylanmış, n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmasıdır: xüsusi halda $n=1$ olduqda E. p. – $\alpha > 0$ parametrlə üstlü paylanmadır. E. p.-nın xarakteristik funksiyası

$$f(z) = (1 - iz/n\alpha)^{-n}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

254 ERLANQ



$\alpha=1$ olduqda, (1): $n=1$, (2) $n=3$, (3) $n=10$ qiymətlərində Erlanq paylanmasının sıxlıq funksiyaları

E. p.-dan kütləvi xidmət nəzəriyyəsində bəzi hallarda xidmət müddətlərinin paylanmalarının hesablanması istifadə olunur.

Əd.: [1] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971.

EROZIYA « эрозия; erosion » – bax, *Minkovski əməlləri*.

ESSEEN TEOREMİ « Эсseenа теорема; Esseen theorem » – bax, *Asimptotik ayrılışı* paylanmanın.

ETİBARLI ÇOXLUQ « доверительное множество; confidence set », etibarlı oblast, etibarlı zona, – ehtimal paylanmasının parametri çoxölçülü olduğu halda *etibarlı interval* üçün ümumiləşmiş anlayışdır (bax, *Etibarlı interval*, *Məylsiz etibarlı çoxluq*, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Statistik qiymətləndirmə*).

ETİBARLI EHTİMAL « доверительная вероятность, вероятность накрытия; confidence probability » – bax, *Etibarlı zolaq*, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Etibarlı interval*.

ETİBARLI İNTERVAL « доверительный интервал; confidence interval » – qiymətləndirilən naməlum parametrlin əsl qiymətini vahidə yaxın γ ehtimalı ilə daxilə alan *təsadüfi interval*dir. γ – *etibarlı ehtimal* adlanır. Bu ehtimal müşahidəçi tərəfindən seçilir. γ verildiyi halda E. i.-in uzunluğu naməlum parametrlin dəyişikliyi xarakterizə edir. Təbiidir ki, verilmiş etibarlı ehtimalla uyğun təyin olunan müxtəlif E. i.-lardan uzunluğu minimal olan E. i. götürülür.

Birölçülü parametr. ζ – qiymətlər çoxluğu $\mathbb{R}^n$ olan seçimi vektor, P_θ , – ζ vektorunun naməlum θ parametrindən asılı paylanması, $\bar{\theta}(\zeta)$, – ζ parametri üçün hesablanmış statistik qiymətdir. $\underline{\theta}(x)$ və $\bar{\theta}(x)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^1$ -dən olan və ζ vektorunun paylanmasının naməlum parametrlərindən asılı olmayan, $\underline{\theta}_1(x) < \bar{\theta}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ şərtini ödəyən həqiqi funksiyalar olsun. Əgər

$$p(\theta) = P_\theta \{ \underline{\theta}(\zeta) < \theta < \bar{\theta}(s) \} \geq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta$$

münasibəti ödənilsə, onda $(\underline{\theta}(\zeta), \bar{\theta}(\zeta))$ təsadüfi intervalı γ – *etibarlı interval*, γ ($0 < \gamma < 1$) – *etibarlı hədd*, $\underline{\theta}(\zeta)$ və $\bar{\theta}(\zeta)$, – uyğun olaraq *aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər*

adlanır. Əgər $p(\theta)$ ehtimalı θ -dan asılı olmazsa, onda $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ E. i. seçimlər fəzasına müvafiq interval adlanır. $P = \inf_{\theta \in \Theta} p(\theta)$ – statistik qiymətin *etibarlılıq əmsalı* və

ya *etibarlılıq həddü* adlanır. $p(\theta)$ ehtimalı θ parametrisinin $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ intervalından olması hadisəsinin ehtimalı deyil, $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ təsadüfi intervalının θ parametrisini öz daxilinə alması ehtimalı (*örtüm ehtimalı* adlanan) kimi anlaşılmalıdır.

İdeyası ingilis statistiki R. Fişerə məxsus etibarlı intervallar metodu amerikan statistiki Y. Neyman tərəfindən işlənmişdir.

Müşahidələr nəticəsində θ parametri üçün $\tilde{\theta}_n$ meylsiz statistik qiyməti hesablanmışdırsa və $\tilde{\theta}_n$ kəmiyyətinin paylanma qanunu məlum olarsa, onda E. i.-i təyin etmək üçün sadəcə olaraq ε -nün ehtimalı $\tilde{\theta}_n$ qiymətini təyin etmək lazımdır ki, ε -nün bu qiyməti üçün

$$P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = p(\theta)$$

bərabərliyi ödənilsin. Bu halda qarşıya çıxan çətinlik ondan ibarətdir ki, $\tilde{\theta}_n$ -nin paylanma qanunu araşdırılan təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunundan, deməli, bu qanunun məlum parametrlərindən asılı olur (xüsusi halda isə $\tilde{\theta}_n$ -nin özündən asılı olur). Bu çətinliyi müəyyən dərəcədə aradan qaldırmaq məqsədilə, məlum parametrlər statistik məlumatlar əsasında hesablanmış *nöqtəvi statistik qiymətlərlə* əvəz olunur (sınaqlar sayı n -in $20 \div 30$ qiymətləri üçün) və bununla da alınan nəticələr qaneedici olur.

Bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Вентцель Е. С., Теория вероятностей, М., 1964; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, М., 1979.

ETİBARLI QIYMƏTLƏNDİRMƏ « доверительное оценивание; confidence estimation » – ehtimal paylanmalarının məlum parametrlərinin təqribi qiymətləri çoxluğunu təyin edən riyazi statistika metodudur. X – Evklid fəzasının $\mathcal{X}$ çoxluğundan qiymətlər alan təsadüfi vektor olsun. Bu vektorun ehtimal paylanması müəyyən bir $\mu(x)$ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyaları verilmiş $p(x|\theta)$, $x \in \mathcal{X}$, $\theta \in \Theta$ olan paylanmaların parametrik ailəsindəndir. Fərz olunur ki, X -in müşahidələri nəticəsinə uyğun θ parametrik nöqtəsinin əsl qiyməti məlumdur. E. q. metodunun mahiyyəti X -dən asılı ehtimal $C(X)$ çoxluğunun qurulmasından ibarətdir ki, bu çoxluq θ parametrik nöqtəsinin əsl qiymətinə uyğun verilmiş $u(\theta)$ funksiyasını daxilinə almış olsun.

$U, - u(\theta)$, $\theta \in \Theta$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu, $C(X)$ – bütün $x \in \mathcal{X}$ qiymətləri üçün U -ya aid olan çoxluqların hər hansı bir çoxluğu olsun; bu halda fərz olunur ki, ixtiyari $u \in U$ elementi və ixtiyari $\theta \in \Theta$ qiymətində $\{C(X) \ni u\}$ hadisəsinin ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimal –

$$P_C(u, \theta) = \int_{\{C(X) \ni u\}} p(x|\theta) d\mu(x), \quad u \in U, \theta \in \Theta$$

integralı ilə ifadə olunur və θ -nın verilmiş qiymətində $C(X)$ çoxluğunun u qiymətini öz daxilinə alması ehti-

malı – *örtüm ehtimalı* (rus. вероятность накрытия) adlanır.

Əgər θ -nın əsl qiyməti məlumdursa, onda müşahidələrin nəticəsinə uyğun $C(X)$ çoxluğu $[C(x), x \in \mathcal{X}]$ çoxluqlar çoxluğundan olan *etibarlı çoxluq* və ya $u(\theta)$ funksiyasının məlum əsl qiyməti üçün *interval statistik qiyməti* adlanır.

Göstərilən qaydada qurulan $C(X)$ interval statistik qiymətinin ehtimalı xarakteristikası kimi *örtüm ehtimalı terminologiyasında* $P_C(\theta)$ *etibarlı ehtimalı* –

$$P_C(\theta) = P_C[u(\theta), \theta], \quad \theta \in \Theta$$

bərabərliyi ilə verilən ehtimaldan istifadə olunur. Başqa sözlə, $P_C(\theta)$ – məlum θ parametrik nöqtəsinin əsl qiymətinə uyğun verilmiş $u(\theta)$ funksiyasının qiymətini $C(X)$ çoxluğunun öz daxilinə alması ehtimalıdır, yəni *örtüm ehtimalıdır*.

$P_C(\theta)$ etibarlı ehtimalı θ -dan asılı olmadığı hallarda $C(X)$ seçimlər fəzasına müvafiq interval statistik qiyməti adlanır. Bu termin $P_C(\theta) = P\{C(X) \ni u(\theta) | \theta\} = \text{const}$ və $P\{X \in \mathcal{X} | \theta\} = \text{const} = 1$ düsturlarının analoji olmasına əsaslanır. Daha ümumi halda $P_C(\theta)$ məlum θ parametridən asılı olur, odur ki, praktiki işlərdə interval statistik qiyməti *etibarlılıq əmsalı* $P_C = \inf_{\theta \in \Theta} P_C(\theta)$ ilə

xarakterizə olunur; bu halda aşağı sərhəd Θ çoxluğunda hesablanılır (etibarlılıq əmsalı bəzən *etibarlılıq həddü* da adlanır).

E. q.-nin optimizasiyası interval qiymətləndirilmələrində qoyulan tələblərlə təyin olunur. Məs., əgər məqsəd seçim fəzasına müvafiq etibarlı çoxluqların qurulmasıdırsa və bu çoxluqlar üçün $0,5 \leq \omega \leq 1$ münasibətlə təyin olunan etibarlılıq əmsalı verilsə, onda birinci tələb $P_C[u(\theta), \theta] \equiv \omega$, $\theta \in \Theta$ eyniliyi ilə ifadə olunur. Bu halda ehtimal interval statistik qiymətlərini axtarmaq təbii olardı ki, onlar $u(\theta)$ -nin əsl qiymətini ixtiyari $u \in U$ qiyməti üçün *örtüm ehtimalından* kiçik olmayan ehtimalla öz daxilinə alsın. Başqa sözlə, *meylsizlik tələbi* adlanan ikinci tələb $P_C(u, \theta) \leq \omega$, $u \in U$, $\theta \in \Theta$ bərabərsizliyi ilə ifadə olunur. Bu şərtlər daxilində interval statistik qiymətlərdən «ən yaxşısı» ehtimal C sayılır ki, o, ən kiçik ehtimalla u -nün əsl $u(\theta)$ -dan fərqli ixtiyari qiymətini öz daxilinə alsın. Buradan üçüncü tələb – «ən çox selektivləşmə» tələbi yaranır: C -dən fərqli olan ixtiyari digər etibarlı C' çoxluğu üçün

$$P_{C'}[u(\theta), \theta] \geq \omega, \quad \theta \in \Theta$$

şərti ödənilərsə,

$$P_C(u, \theta) \leq P_{C'}(u, \theta), \quad u \in U, \theta \in \Theta$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir.

Göstərilən üç tələbi ödəyən interval statistik qiymətlərini təyin etmə məsələsi seçimlər fəzasına müvafiq və mühümlük ölçüsü $1 - \omega$ olan meylsiz, ən güclü statistik kriterilərin təyin edilməsi məsələsinə ekvivalentdir. Bu məsələnin həllərinin varlığı məsələləri və onun konstruktiv təsviri hipotezlərin statistik yoxlanılması-nın ümumi nəzəriyyəsinin əsasını təşkil edir.

E. q.-nin ən çox tətbiq olunduğu hallar $u(\theta)$ -nin skalyar funksiya olduğu hallardır. $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$ – parametrləri naməlum, $MX_i = \theta_1$, $DX_i = \theta_2$ şərtlərini ödəyən, eyni normal paylanmaya malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $u(\theta) = \theta_1$ üçün interval statistik qiymətini qurmaq tələb olunur.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

olsun. $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta_1)/s$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ -ə bərabər Student paylanmasına tabe olduğundan və bu paylanma naməlum θ_1 və θ_2 ($|\theta_1| < \infty$, $\theta_2 > 0$) parametrlərindən asılı olmadığından, t -nin ixtiyari müsbət qiymətində

$$\{\bar{X} - ts/\sqrt{n} < \theta_1 < \bar{X} + ts/\sqrt{n}\}$$

hadisəsinin ehtimalı yalnız t -dən asılıdır. Əgər göstərilən interval θ_1 üçün C interval statistik qiyməti kimi götürülərsə, onda bu interval statistik qiymətinə uyğun etibarlı ehtimal $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ -dən asılı olmayan

$$P_C(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{P}\{|T| < t\}$$

ehtimalı olacaqdır. Bu interval statistik qiyməti **etibarlı interval**, intervalın ucları – **etibarlı sərhədlər** və **etibarlılıq həddləri** adlanır. Qeyd olunan misalda interval statistik qiyməti meylsiz və ən çox selektiv statistik qiymətdir.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187–92.

ETİBARLI LİMİT «**доверительный предел; confidence limit / bound**» – bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*.

ETİBARLI OBLAST «**доверительная область; confidence region**» – bax, *Etibarlı çoxluq*.

ETİBARLI SƏRHƏD «**доверительная граница; confidence bound**» – bax, *Etibarlı interval, Etibarlı çoxluq, Etibarlı qiymətləndirmə*.

ETİBARLI ZOLAQ «**доверительная полоса; confidence band**» – naməlum paylanma funksiyasının interval qiymətləndirilməsi üçün anlayışdır. Paylanma funksiyası F -ə uyğun ümumi çoxluqdan n həcmli seçim əsasında $\underline{F}_n$ və $\bar{F}_n$ empirik paylanma funksiyaları ilə təyin olunur ki, verilmiş $\gamma \in (0, 1)$ ehtimalı üçün

$$\mathbf{P}\{\underline{F}_n(x) \leq F(x) \leq \bar{F}_n(x) \text{ bütün } x\text{-lər üçün}\}$$

bərabərliyi ödənilsin. Onda $\underline{F}_n$ və $\bar{F}_n$ funksiyaları uyğun olaraq aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər, bu sərhədlər arasında olan paylanma funksiyaları çoxluğu F üçün γ etibarlı ehtimala müvafiq **etibarlı zolaq** adlanır. Kəsilməz F

funksiyası üçün E. z.-in təyin olunması limiti və dəqiq paylanması məlum olan Kolmoqorov statistikası əsasında apanılır (bax, [1]–[3]).

Əd.: [1] Бикел П., Доксам К., Математическая статистика, пер. с англ., в. 1–2, М., 1983; [2] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Корольков В. С., Боровков Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981.

ETİBARLI ZOLAQ α həddüdlü «**доверительная полоса**» уровня α : **confidence band of level α** » α – zolaq, $0 < \alpha < 1$, – $\eta(x) = \theta^T f(x)$ regressiya funksiyası üçün $A \subseteq X$ oblastı üzərində etibarlı zolaq – $\epsilon D(y) \subset \mathbb{R} \times A$ altçoxluğu ki, α və $D(y)$ üçün

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}^p} \mathbf{P}_\theta \{(\langle x, \eta(x) \rangle, x \in A) \in D(y)\} \geq \alpha \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilsin, burada $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ – paylanması $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}(y - F\theta)$ olan regressiya eksperimentidir və $F = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$, $x_i \in X$, $i = 1, \dots, N$.

(1) bərabərsizliyində yalnız bərabərlik işarəsi ödənilərsə, E. z. – dəqiq, əks halda konservativ zolaq adlanır. Əgər ixtiyari açıq $B \subset D(y)$ çoxluğu üçün $D(y) \setminus B$ α – zolaq olmazsa, onda α – zolaq məqbul α – zolaq adlanır.

Adətən, $\mathbf{P}_\theta$ paylanması ortası $F\theta$ -ya bərabər normal paylanma fərz olunur, kovariasiya matrisi V -nin məlum olduğu hesab edilir. Onda V və $M = F^T V^{-1} F$ (informasiya matrisi) cırlaşmayan olduqları halda, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti ən kiçik kvadratlara metoduna görə $(0, \sigma^2 M^{-1})$ parametrləri normal qanunla paylanır.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta}(x) &= f^T(x) \hat{\theta}, \quad \mathbf{P}_\theta \{\hat{\theta} - \theta \in U_\alpha \subset \mathbb{R}^p\} \geq \alpha, \\ \Psi_\alpha(x) &= \inf_{u \in U_\alpha} u^T f(x), \quad \bar{\Psi}_\alpha(x) = \sup_{u \in U_\alpha} u^T f(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

olsun. Onda

$$D(y) = \{(x, \hat{\eta}(x) + z), x \in A, z \leq \bar{\Psi}_\alpha(x)\}$$

– birtərəfli α – zolaq.

$$D(y) = \{(x, \hat{\eta}(x) + z), x \in A, \Psi_\alpha(x) \leq z \leq \bar{\Psi}_\alpha(x)\} \quad (3)$$

– ikitərəfli α – zolaqdır. Məs., k_α – sərbəstlik dərəcəsi sayı p olan χ_p^α paylanmasının α kvantili olarsa, «ən ehtimalı nöqtələr» çoxluğu $U = \{u: \sigma^2 u^T M u \geq k_\alpha\}$, – $\mathbb{R}$ -də düzxətli $\theta_0 + \theta_1 x$ regressiyası üçün V vahidi matris olan ikitərəfli dəqiq Uorkinq – Hotelling α – zolağına uyğundur. Bu zolaq üçün

$$\bar{\Psi}_\alpha(x) = -\underline{\Psi}_\alpha(x) = k_\alpha \sigma \sqrt{1 + b(x - \bar{x})^2}$$

münasibəti ödənilir, burada $b > 0$, $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_N)/N$. Əgər

σ parametri $s^2 = (N - p)^{-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\eta}(x_i))^2$ kəmiyyəti

ilə qiymətləndirilmişdirsə, onda həmin model üçün ele zolaq dəqiq olur ki, onun üçün σ s ilə, k isə F – paylanmanın α – kvantili ilə əvəz olunsun. Sonlu intervallar üzərində dəqiq zolaqlar və digər α – zolaqların cədvəlləşdirilməsi haqqında bax, [1].

(3)-lə ifadə olunan ikitərəfli dəqiq məqbul α – zolaq

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha}(x) &= -\underline{\Psi}_{\alpha}(x) = \\ &= \sup \left\{ \left| \underline{f}^T(x) \underline{v} \right| : \max_{i=1, \dots, p} \left| \underline{f}^T(z_i) \underline{v} \right|, \gamma_i \leq k_{\alpha} \sigma \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

funksiyası ilə təyin olunur, burada $\gamma_i > 0$, $z_i \in X$ – münasib nöqtələrdir, k_{α} kritik səviyyəsi onunla təyin olunur ki, $\hat{\eta}(x)$ – ortası $\eta(x)$ olan, korrelyasion funksiyası isə $\mathbf{M}_{\theta} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(x') = \sigma^2 \underline{f}^T(x) \mathbf{M}^{-1} \underline{f}(x')$ olan təsadüfi meydandır.

Məs.,

$$\begin{aligned} \eta(\underline{x}) &= \theta_0 + \bar{\theta}_1 x^{(1)} + \dots + \bar{\theta}_m x^{(m)}, \\ (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) &= \underline{x} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

yanxətli reqressiya üçün ixtiyari $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N$ planında $\bar{\Psi}_{\alpha}(\underline{x})$ funksiyası kəsilməz hissəvi xətti splayndır, k_{α} isə $z_1, \dots, z_{m+1}$ nöqtələrini $\mathbb{R}^m$ -dən münasib olaraq seçdikdə, $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ olduqda X_i normal kəmiyyətinin maksimumunun α – kvantilidir:

$$\mathbf{M} X_i = 0, \quad \mathbf{D} X_i = 1,$$

$$\mathbf{M} X_i X_j = p, \quad 1 \leq i < j \leq m+1.$$

$\mathbb{R}$ -də polinomial və triqonometrik m tərtib reqressiya üçün $\bar{\Psi}_{\alpha}(\cdot)$ – ixtiyari planda həmin tərtib uyğun splayndır. Nöqtəvi planın informasiya matrisinin bəzi kanonik Markov – Kreyn ifadələrinin düyünləri seçdikdə (bax, [2]) $\hat{\eta}(z_i)$ asılı olmurlar, bu isə (4) düsturu ilə verilən dəqiq α – zolağın cədvəlləşdirilməsini standart normal paylanmanın cədvəllərinə gətirir.

Ən kiçik $\int \bar{\Psi}_{\alpha}(x) w(x) dx$, $w(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ inteqralı ilə

(3) α – zolaqlarının tapılması üçün alqoritm mövcuddur.

Əd.: [1] С е б е р Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] К р е й н М. Г., Н у д е л ь м а н А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973; [3] Н а и м а н н Д., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 4, p. 1199–214.

ETİBARLI ZONA « доверительная зона; confidence zone » – bax, *Etibarlı çoxluq*.

ETİBARLILIĞIN OPTİMİZASIYASI « надежности оптимизация; reliability optimization » – minimal xərcərlə verilən etibarlılıq göstəricilərinə nail olmaq və ya sərf olunan bütün xərclərə məhdudiyyət qoyulduqda maksimal etibarlılıq göstəricilərini almaq üçün mühəndis – texniki tədbirlər kompleksidir. E. o. məsələsinin həllində optimizasiyanın riyazi metodları geniş istifadə olunur. Etibarlılıq nəzəriyyəsində optimizasiya məsələlərinin bir neçə əsas istiqamətləri: optimal ehtiyatdasaxlama (rus. резервирование), çatışmamazlıq və sıradan çıxmaların (imtinaların) optimal axtarışı, optimal yoxlamalar və optimal profilaktik əvəzetmələrdir.

Optimal ehtiyatdasaxlama məsələləri qeyri – xətti tamqiymətli proqramlaşdırma məsələləri sinfinə aiddir.

Optimal ehtiyatdasaxlama məsələsinin məzhi – resurslara qoyulan məhdudiyyətlərlə (və ya əksinə resursların mümkün minimal xərclərində) sistemin seçilmiş etibarlılıq göstəricisinin maksimumunun alınmasından ibarətdir. Optimal ehtiyatda saxlanmanın əksər praktik məsələlərində etibarlılıq göstəricisi – arqumentlərin hər birinə görə separabel və kvaziqəbərkdir, resurslara xərclər göstəricisi isə xəttidir. Bu da optimal ehtiyatdasaxlamanın əksər məsələlərinin həllində diskret optimizasiya üçün standart metodlardan istifadə etməyə imkan verir: məs., dinamik proqramlaşdırma, modifikasiya olunmuş Laqranj vuruqları metodu, koordinatlar üzrə ən sürətli enmə metodu və s.

Optimal texniki diaqnostika məsələsi sistemin vəziyyətlərinin ən sürətli (və ya minimal xərclərlə) identifikasiyası və imtinanın lokalizasiyasından ibarətdir. Elementlərdən hər birinin imtina vəziyyətində olması ehtimallarının məlum olduğu və sistemin elementlərinin uyğun altçoxluqlarında işəqabiliyyətsizliyini aşkar etməyə imkan verən testlər çoxluğunun da verildiyi fərz olunur. Optimal diaqnostika məsələsi testlərin aparılması üçün ele qaydadan tapılmasından ibarətdir ki, bu qayda sistemin heç olmazsa bir imtinasının orta hesabla ən sürətlə aşkar olunmasını və ya sistemin bütün imtinalarının orta hesabla ən sürətlə aradan qaldırılmasını təmin etmiş olsun. (Elementlərin etibarlılığı haqqında informasiya olmadığı halda hər iki məsələ minimaks kriterilərdən istifadə edilməklə həll olunur.)

Optimal yoxlamalar və optimal profilaktika məsələləri təsadüfi proseslərin optimal idarəetmə məsələləri (optimal dayanma haqqında məsələ) sinfinə aiddir. Birinci halda imtina anından imtinanın aşkar olunduğu ana qədər işsiz dayanma hesabına itkiləri minimallaşdıran yoxlama anları müəyyənləşdirilir. İkinci halda təsadüfi prosesin optimal dayanma məsələsinə, qoyuluşuna görə yaxın olan məsələ həll olunur; əgər qəzanın təmirinə sərf olunan cərimə profilaktik tədbirə sərf edilən cərimədən çox olarsa, onda profilaktik təmirin keçirilməsi üçün bütün itkiləri minimallaşdıran optimal anı tapmaq olur.

E. o.-nın bütün riyazi məsələlərini müəyyən mənada iki tipə ayırmaq olar: fəza fəzasını idarəetmə (işəqabiliyyətli vəziyyətlər fəzasının genişləndirilməsi) və qeyd olunmuş fəzada təsadüfi dolaşma prosesinin özünün idarəedilməsi (prosesin işəqabiliyyətli vəziyyətlərin altçoxluğunda qaldığı müddətin çoxaldılması və imtina vəziyyətləri altçoxluğunda qalma müddətinin azaldılması məqsədilə idarə olunma) məsələləri kimi.

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, М., 1983; [2] Надежность технических систем. Справочник, М., 1985; [3] У ш а к о в И. А., Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений, М., 1969; [4] П а ш к о в с к и й Г. С., Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в радиоэлектронной аппаратуре, М., 1981; [5] Б а р з и л о в и ч Е. Ю., К а ш т а н о в В. А., Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем, М., 1971.

ETİBARLILIĞIN RIYAZI NƏZƏRİYYƏSİ « надежности математическая теория; mathematical theory of reliability » – mühəndis araşdırmalarında riyazi metodların tətbiqinə həsr olunmuş nəzəriyyədir. E. r. n.-ində: 1) element və sistemlərin layihələşdirilməsi mərhələsində onların etibarlılığının hesablanması metodları və etibarlılığın təmin edilməsi; 2)

hazırlanmış elementlər və sistemlərin etibarlılığı haqqında, xüsusi olaraq planlandırılmış sınaqlar və istismar nəticələrindən alınmış məlumatlara görə əsaslandırılmış nəticələrin alınması metodlarının tapılması; 3) sistem və onu təşkil edən elementlərin istismarı, saxlanması və bir yerdən başqa yere göndərilməsi prosesində aparılan işin etibarlılığını təmin etmək və yaxşılaşdırmaq üçün qaydaların tapılması (bax, [1]) kimi metod və qaydalar araşdırılır. E. r. n.-ndə riyaziyyatın müxtəlif bölmələrinin metodlarından istifadə olunur. Optimizasiya nəzəriyyəsi, riyazi məntiq və b. metodlar da geniş tətbiq olunur.

E. r. n.-də riyazi modellərin qurulması texniki sistemin (elementin) bütün mümkün vəziyyətlərinin $X = \{x\}$ vəziyyətlər çoxluğunun təşkil edilməsinə əsaslanır. t müddətinin keçməsi ilə sistemin (elementin) vəziyyətlərindəki dəyişiklik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ilə təsvir edilir. Sistemin (və ya elementin) işləməməsinə (sıradan çıxması) uyğun vəziyyətlər çoxluğu X_0 , – X -in alt çoxluğudur. Sistemin (elementin) qabiliyyətini itirməsi – i m t i – n a – $\zeta(t)$ prosesinin trayektoriyalarının X_0 alt çoxluğunda olmasına uyğundur. Real verilənlərin analizinə əsasən imtinaların baş verməsi ilə bağlı hadisələrə təsadüfi hadisələr kimi baxmaq olar. İ m t i n a s ı z l ı q – sistemin (elementin) işləmə qabiliyyətinin saxlanması (sıradan çıxması), etibarlılığın təmin olunması üçün əsas tələblərdən biridir. Etibarlılığın yüksək olması üçün sistemin t ə m i r q a b i l i y y ə t l i l i y i n i n olması, yəni qısa müddətdə və qənaətlə təmir aparılması mümkünlüyü əsas şərtlərdən biridir.

Təmir üçün zəruri fasilələr və iqtisadi cəhətdən sonrakı istismarın məqsədəuyğunluğu şərtlə sistemin işləmə vəziyyətinə gətirilməsi üçün aparılan işlər, profilaktik tədbirlər – sistemin (elementin) u z u n ö m ü r l ü l y ü adlanır.

Sistemin n elementdən ibarət olduğu fərz olunur. i -ci elementin vəziyyəti x_i dəyişəni ilə təsvir edilir və əgər bu element işeqabiliyyətdirsə, $x_i = 1$, əks halda $x_i = 0$ götürülür. Sistemin işeqabiliyyətliliyi ($x_1, \dots, x_n$) toplusu ilə təyin olunur. $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası s t r u k t u r f u n k s i y a s ı adlanır və sistem işqabiliyyətli olduğu halda $\varphi = 1$, əks halda isə $\varphi = 0$.

M i s a l l a r. Əgər sistemin ixtiyari bir elementinin sıradan çıxması sistemin imtinasına səbəb olarsa, onda sistemin struktur funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi = \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \prod_{i=1}^n x_i.$$

x_1, x_2, x_3 , – A məntəqəsini B ilə, B məntəqəsini C ilə və A məntəqəsini C məntəqəsi ilə bağlayan rabitə xətlərinin vəziyyətləri olsun. Əgər bütün məntəqələr bir-birilə əlaqəlidirlərsə, rabitə sistemi işqabiliyyətli sayılır. Bu halda, ən çoxu bir rabitə xəttinin sıradan çıxması qəbul olunur. Belə sistemin struktur funksiyası

$$\varphi = \max(x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 2 x_1 x_2 x_3$$

münasibətlə ifadə olunur.

Əgər sistemin işeqabiliyyətliliyi elementlərin imtinalarının müəyyən kombinasiyalarında i -ci elementin vəziyyəti x_i ilə təyin olursaysa, onda i -ci element m ü h ü m e l e m e n t adlanır. Əgər sistemin hər bir elementi mühüm element olarsa və $x'_i \leq x''_i$, $i = 1, \dots, n$ olduqda $\varphi(x'_1, \dots, x'_n) \leq \varphi(x''_1, \dots, x''_n)$ olarsa, sistem m o n o t o n s t r u k t u r a malikdir.

Elementlərin vəziyyətləri x_i -lərin qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və $p_i = \mathbf{P}\{x_i = 1\}$ ehtimallarının da təyin olduğu fərz olunur. Onda sistemin işeqabiliyyətliliyi ehtimalı təyin olunmuşdur və bu ehtimal $h(p_1, \dots, p_n) = \mathbf{P}\{\varphi = 1\}$ kimi ifadə olunur. $h(p_1, \dots, p_n)$ funksiyasının analizi sistemin imtinasız işləmə ehtimalının ən çox hansı elementlərdən asılı olmasını aşkar edə bilər. Əgər i -ci elementin fasiləsiz işləmə müddəti

τ_i – paylanma funksiyası $F_i(t) = \mathbf{P}\{\tau_i \leq t\}$ olan təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $p_i = \mathbf{P}\{x_i = 1\} = F_i(t)$, $\bar{F}_i(t) = 1 - F_i(t)$ olur. Bu halda, bərpa olunmayan elementləri monoton strukturlu sistemin t müddəti ərzində fasiləsiz işləmə ehtimalı $\bar{F}(t) = h(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$ bərabərliyi ilə ifadə olunur. Mürəkkəb strukturlu sistemin işləmə ehtimalının və ya sistemin uyğun imtina funksiyasının intensivliyinin hesablanması çoxsaylı hesablamaların aparılmasına səbəb olur. Bu halda, köhnəlmə xassələri ilə bağlı bərabərsizliklərdən, *minimal zəncirlər və kəsiklər metodu* ilə bağlı bərabərsizliklərdən istifadə oluna bilər.

Sistemin etibarlılığının analizi məqsədilə sistemin strukturu *imtinalar ağacı* ilə təsvir olunur.

Sistemi proyektəndirmə ərəfəsində onun etibarlılıq göstəricilərini (imtinasız işləmə ehtimalını, işlək olma əmsalını) yaxşılaşdırmaq məqsədilə əlavə elementlərin təsiri araşdırılır (struktur e h t i y a t d a s a x l a n m a; bax, [4]). Digər ehtiyatda saxlama tipləri də, məs., funksional, zaman, yüklənmə kimi tiplər də mümkündür (bax, *Ehtiyatda saxlama, Optimal ehtiyatda saxlama*).

Sistemin etibarlılıq göstəriciləri, sıradan çıxan elementlərin bərpası mümkün olduqda, yaxşılaşır. Bərpalı sistemin etibarlılıq göstəricilərinin hesablanması kütləvi xidmət sistemlərinin göstəricilərinin hesablanılmasına çox analojidir (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*). Sisteme sifarişlərin (tələblərin) daxilolma anları imtina anlarına uyğundur, xidmət müddətlərinə isə təmir müddəti və ya sıradan çıxan elementlərin yenisi ilə əvəz olunma müddəti uyğundur. Anı təmirli sistemin ən sadə riyazi modeli bərpa prosesinə uyğundur (bax, *Bərpa nəzəriyyəsi*).

M i s a l. Sistem EHM-ni idarə edən iki identik elementdən ibarətdir. $t = 0$ başlanğıc anında hər iki element saz vəziyyətdədir. Hər bir t anında yalnız bir saz element istifadə olunur, ikinci element isə əgər saz vəziyyətdədirsə, yüklənməyərək ehtiyatda saxlanılır. Sıradan çıxan elementin bərpasına dərhal başlanılır, ehtiyatda saxlanılan element isə işə başlayır. Fasiləsiz işləmə müddəti U_i və bərpa müddəti V_i – paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F(s)$ və $G(s)$ olan qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Sıradan çıxmış elementin bərpası başa çatmayıb, işləyən element ilk dəfə sıradan çıxdığı anda sistem sıradan çıxır. Belə sistemin sıradan çıxdığı ana qədər işləmə müddətinin riyazi gözləməsi $T = m + m_1 / (1 - \gamma)$ kimi ifadə olunur, burada $m = \mathbf{M}U_i$ – elementin fasiləsiz işləmə müddətinin orta qiyməti; $m_1 = \mathbf{M} \min(U_i, V_i)$, $\gamma = \mathbf{P}\{V_i \leq U_i\}$ isə sıradan çıxan elementin bərpasının işləyən elementin sıradan çıxma anına qədər, sona çatması ehtimalıdır.

Etibarlılıq göstəricilərinin hesablanması üçün analitik metodlarla yanaşı statistik modeləşdirmənin metodları geniş surətdə istifadə olunur (Monte – Karlo metodları).

Bərpaolunan elementləri sistemin etibarlılıq göstəriciləri təmir müddətinin qısaldılması hesabına yaxşılaşır. Təmir müddətinin qısaldılması üçün sıradan çıxmış elementləri axtarma üçün xüsusi metodlar işlənir (bax, *İmtina axtarışı*).

E. r. n.-nin sıradan çıxan elementlərin bərpa olunmasını nəzərə alan əsas riyazi modelləri üçün aşkar analitik həllər olmadığından E. r. n.-də asimptotik metodlardan geniş istifadə olunur. Bu halda fərz olunur ki, bərpa «sürətlə» aparılır, yeni verilmiş bərpa göstəriciləri (məs., orta müddət) imtinasız işləmə intervallının analoji göstəricilərlə müqayisədə sonsuz kiçikləşir. Sistem və elementlərin etibarlılığını artırmaq məqsədilə, istismar prosesində profilaktik tədbirlər aparılır.

E. r. n.-də etibarlılıq göstəricilərinin faktiki qiymətləri haqqında statistik nəticələrin alınması məsələləri mühüm yer tutur. Tipik misallar sistemin elementlərini (komponentlərini) təşkil edən

sınaqların nəticələrinə görə sistemin etibarlılığının qiymətləndirilməsi məsələləridir.

M i s a l 1.) Sistemin n müxtəlif elementlərdən ibarət olduğu fərz olunur. İxtiyari elementin sıradan çıxması digər elementlərin sıradan çıxmasından asılı olmayıb, sistemin sıradan çıxmasına səbəb olur, yeni ehtiyatda saxlanılma yoxdur. i tipli imtinalar m_i sayda elementlərin sınaqdan keçirilməsində müşahidə olunmamışdır, $i = 1, \dots, n$. Bu halda sistemin işqabiliyyətliyi γ – etibarlı aşağı sərhədi – $m_k = \min_{1 \leq i \leq n} m_i$

şərtini təmin edən k tipli elementlərin işqabiliyyətliyi ehtimalının γ – etibarlı aşağı sərhədinə bərabərdir.

Elementlərin (sistemin) etibarlılıq göstəriciləri haqqında nəticələr xüsusi qaydada planlandırılmış sərgi sınaqlarının nəticələrindən alınmış verilənlərə əsaslanır. N – elementlərin sınaqları üçün hücrələrin sayı olsun. Hər bir element bir hücrədə yerləşir. Sərgi sınaqları iki sinfə ayrılır: sınaqlar aparıldıqda sıradan çıxan elementləri saz elementlərlə əvəz olunmayan B sinfi və sıradan çıxan elementləri saz elementlərlə əvəz olunan C sinfi. Sərgi sınaqlarının davam edilmə müddəti dayanma qaydası ilə təyin olunur, məs., sınaqlar müddətinin limiti T -nin verilməsi ilə, müşahidə olunan imtinaların limit qiyməti r -in verilməsi ilə. Sınaqların mühüm xarakteristikası t müddəti ərzində bütün sınaqdan keçirilən elementlərin imtinasız işləmə müddətlərinin cəmi $S(t)$ -dir. Sərgi sınaqlarında $[N, B, (r)]$ planına görə N element sınaqdan keçirilir, bu elementlər sıradan çıxdıqda yeni elementlərlə əvəz olunur və müşahidələr r -ci imtina qeyd olunana qədər aparılır. $[N, B, (r)]$ planına – t a m i ş l ə n i l m ə m ü d d ə t i – $S(t_r) = t_1 + \dots + t_{r-1} + (N - r + 1)t_r$ uyğun olur, burada $t_1, \dots, t_r$ – imtinaların baş verdiyi anlardır və $t_1 < t_2 < \dots < t_r$. $[N, B, (r)]$ planı üzrə aparılan sınaqlarda $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ eksponensial paylanma funksiyasının parametri λ -nin meylsiz statistik qiyməti $\hat{\lambda} = (r - 1)/S(t_r)$ nisbətinə bərabərdir. Əgər bütün sınaqlar $[N, B, T]$ planı üzrə aparılmışdırsa, bütün N sayda elementlər T müddəti ərzində sınaqdan keçirilsə, onda λ parametrinin meylsiz statistik qiymətinin ifadəsi olduqca mürəkkəb olur. Sınaqdan keçiriləcək elementlərin etibarlılıq xarakteristikalarının qiymətləri üçün nöqtəvi statistik qiymətlərin, etibarlı intervalların və hipotezlərin yoxlanılması kriterlərinin ifadələri planın tipi və imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyalarının seçilmiş ailəsi ilə təyin olunur ki, bu da sərgi sınaqlarının nəticələrinin üzərində işlənilməsi üçün müxtəlif statistik metodların tətbiq olunması ilə seçiyələndir (bax, [1], [5], [6]).

Əgər paylanma funksiyalarının qeyri – parametrik ailəsinə baxılsa, yeni imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyaları ixtiyari olarsa, onda bir çox statistik nəticələr natamam (senzurlanmış) verilənlər yığımı sxemi əsasında aşağıdakı qaydada təyin olur.

Əgər x_{ij} i -ci elementin bütün müşahidə olunmuş imtinasız işləmə müddətlərinin j -ci porsiyasında müşahidə olunmuş müddətdirsə, γ_{ij} – bu hissədə i -ci element üzərində müşahidənin dayandırılması işarəsidirsə, $x_j = \{x_{ij}, \gamma_{ij}, i = 1, \dots, k_j\}$ ədədlər toplusu verilənlər porsiyası adlanır. Əgər i -ci elementin sıradan çıxması ilə əlaqədar olaraq müşahidələr dayandırılmışdırsa, onda $\gamma_{ij} = 1$; əgər müşahidələr i -ci elementin

sıradan çıxmasına görə deyil, digər səbəblərə görə dayandırılmışdırsa, $\gamma_{ij} = 0$ olur.

Məlumatlar hissəsi diskret bölünənlik xassəsinə o halda malikdir ki, əgər ixtiyari $p_{ij} > 0$

$$\sum_{i=1}^{(k_j)} p_{ij} \leq 1,$$

şərtini ödəyən p_{ij} ədədləri üçün sıçrayışları $\Delta F(x_{ij}) = F(x_{ij}) - F(x_{ij} - 0) = p_{ij} > 0$ olan $F(\cdot)$ paylanma funksiyası və əngəlləyici θ parametrinin hər hansı bir qiyməti tapılsın ki, $F(\cdot)$ və θ ilə təyin olunan verilənlər hissəsi x_j -nin alınması ehtimalı

$$\prod_{i=1}^{k_j} [\Delta F(x_{ij})]^{\gamma_{ij}} [1 - F(x_{ij})]^{1-\gamma_{ij}} C(x_j, \theta) > 0$$

ifadəsinə bərabər olsun. Diskret bölünənlik xassəsinə malik verilənlər hissəsi aşağıdakı hallarda alınır: a) B tip plan üzrə sınaqlar aparıldıqda, bu şərtlə ki, sınaqların dayandırılması anları *dayanma anı* olsun; b) işləmə müddətləri asılı olmayan alternlənən proseslər və təmir müşahidə olunduqda, bu kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F(s)$ və $G(s)$ -dir [$G(s)$ – əngəlləyici parametr rolunu ifadə edir]; c) semi – Markov prosesləri və həmçinin etibarlılıq haqqında verilənlərin toplanılması üçün digər bir sıra sxemlər müşahidə olunduqda.

$x_1, \dots, x_m$ – qarşılıqlı asılı olmayan, eyni qanunla paylanması şərt kimi qoyulmaya da bilinən, diskret bölünənlik xassəsinə malik verilənlər porsiyaları olsun. Onda $F(s)$ paylanma funksiyası üçün maksimal doğruxaoxşarlıq ümumiləşmiş statistik qiyməti

$$\hat{F}(s) = 1 - \prod_{u \leq s} \left[1 - \frac{\Delta D(u)}{N(u)} \right] \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\Delta D(u) = D(u) - D(u - 0)$, $D(u)$ isə $\gamma_{ij} = 1$ olan $x_{ij} \leq u$ şərtini ödəyən bütün x_{ij} -lərin sayı; $N(u)$, – $x_{ij} \geq u$ şərtini ödəyən bütün x_{ij} -lərin sayına bərabərdir, $i = 1, \dots, k_j$, $j = 1, \dots, m$. (*) statistik qiyməti $F(s)$ paylanma funksiyasının vuruğu statistik qiyməti adlanır.

Əgər $x_1, \dots, x_m$ porsiyaları yuxarıda qeyd olunmuş a), b), c) müşahidələrinin misalllarına uyğun olarsa, onda $m \rightarrow \infty$ olduqda (*) statistik qiyməti tutarlı və asimptotik normallıq xassələrinə malikdir və $F(s)$ paylanma funksiyası üçün bu halda γ – etibarlı interval və zolaqların sadə asimptotik sərhədlərini almaq olur (bax, [7] – [8]).

Etibarlılıq haqqında verilənləri topladıqda onların uyğun rejimləri nəzərə alınmalıdır. α – sınaqları və ya istismar rejimi dedikdə, əsas yüklənmə parametrlərinin seçilməsi nəzərdə tutulur (məs., temperatur, vibrasiya amplitudları və s.). Əgər sistemlər (elementlər) müxtəlif α rejimlərində istismar olunursa, onda etibarlılığı yoxlamaq üçün sınaqlar elə tərzdə aparılır ki, sistemin etibarlılıq göstəricilərinin statistik qiymətlərini iş rejiminin funksiyası kimi almaq mümkün olsun. Yükləmə hesabına sınaqların rejiminin ağırlaşması imtinaların baş vermə anlarının tezləşməsinə səbəb olur. E. r. n. -nin mühüm məsələlərindən biri – müəyyən

rejimlerden digər rejimlərə keçdikdə sistemin etibarlılıq göstəricilərinin yenidən hesablanılma metodlarının təyin olunması məsələsidir. Bu məsələnin müəkkəbliyi mümkün ola bilən rejimlərin müxtəlifliyi ilə bağlıdır. Praktikiada çox istifadə olunan sınaqların rejimləri – yüklənməsi pilləvari olan və ya xətti artan rejimlərdir.

Zədələrin additiv yığılma modelinin tətbiq olunma bilinməsi şərtlərində yenidən hesablama metodları çox sadədir. Bu modeldə fərz olunur ki, sabit yüklənməyə malik hər hansı α_0 nominal rejimində imtina (sıradançıxma) anı – paylanma funksiyası $F_0(t) = P\{R \leq t\}$ olan R təsadüfi kəmiyyətdir. α_0 rejimindən digər sabit yüklənməyə malik olan α rejiminə keçid $r(\alpha_0, \alpha) \geq 0$, $r(\alpha_0, \alpha_0) = 1$ funksiyası ilə verilir. İxtiyari $\alpha_1 = \alpha_1(t)$ rejimi üçün imtina anı τ

$$\int_0^{\tau} r(\alpha_0, \alpha_1(s)) ds = R$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. α_1 rejimində fasiləsiz işləmə müddətinin paylanma funksiyası

$$F(t, \alpha_1) = P\left\{\int_0^t r(\alpha_0, \alpha_1(s)) ds \geq R\right\} = F_0\left(\int_0^t r(\alpha_0, \alpha_1(s)) ds\right)$$

münasibətilə ifadə olunur. Beləliklə, zədələrin additiv yığılma modelində hesablanma aparılması üçün ilk əvvəl $r(\alpha_0, \alpha)$ funksiyası və $F_0(s)$ funksiyası qiymətləndirilməlidir.

E. r. n.-də daha ümumi hesablanılma metodlarından da istifadə olunur (bax, [1]).

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, М., 1983; [2] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [3] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984; [4] Надежность технических систем, М., 1985; [5] Kalbfleisch J., Prentice R. L., The statistical analysis of failure time data, N. Y. – [a. o.], 1980; [6] Lawless J. E., Statistical models and methods for lifetime data, N. Y. – [a. o.], 1982; [7] Беляев Ю. К., «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1985, № 4, с. 45–59; [8] Беляев Ю. К., Замятин А. А., в сб.: Вероятностные процессы и их приложения, М., 1985, с. 3–17; [9] Надежность и эффективность в технике, т. 8, М., 1990.

ETİBARLILIQ «надежность; reliability» – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin, Etibarlılıq nəzəriyyəsi; analitik – statistik metod.*

ETİBARLILIQ ƏMSALI «доверия коэффициент; confidence coefficient» – bax, *Etibarlı qiymətləndirmə, Etibarlı interval.*

ETİBARLILIQ FUNKSIYASI «надежности функция; reliability function»: 1) E. f. – sistemin fasiləsiz işləmə ehtimalını onun elementlərinin etibarlılıq qiymətləri $p_1, \dots, p_n$ -lərdən asılılığı ilə ifadə edən

$$R = R(p_1, \dots, p_n)$$

funksiyasıdır; $R = (p_1, \dots, p_n)$ ardıcıl sistemi, $R = 1 - (1 - p_1) \dots$

$\dots (1 - p_n)$ paralel sistemi üçün. Müəkkəb strukturlu sistem halında E. f.-nin tədqiqi kombinatorika metodları ilə (məs., minimal zəncirlər və minimal kəsiklər metodu ilə) aparılır.

2) E. f. $(0, t)$ müddətində hər hansı bir obyektin işləmə ehtimalını ifadə edən $P(t)$ funksiyasıdır. Baxılan obyektin imtinalar intensivliyi ilə bağlı olan E. f. $P(t)$ –

$$P(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u) du\right\}$$

münasibətilə ifadə olunur.

ETİBARLILIQ FUNKSIYASI, etibarlılıq əmsalı «надежности функция, коэффициент надежности; reliability function, reliability coefficient» – verilən rabitə kanalı üçün blokun uzunluğu n -in artması ilə optimal *blok kodu* xətasının ehtimalının azalmasını təmin elən eksponentin qüvvət üstündəki n -in əmsalıdır. Verilən kanal üçün E. f. $E(R)$ –

$$E(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{-\frac{1}{n} \log P_e(n, R)\right\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $P_e(n, R)$ – verilən n və R (kodun sürəti) üzrə blok uzunluqları n olan bütün blok kodları üzrə xətanın orta ehtimalının qiymətinin aşağı sərhədidir. Kanalların kifayət qədər geniş sinfi üçün $E(R)$ -in dəqiq qiyməti yalnız $R_{cr} \leq R \leq C$ oblastında məlumdur, burada C – kanalın ötürücülük qabiliyyəti, R_{cr} – kritik sürətdir. $0 \leq R < R_{cr}$ oblastında $E(R)$ üçün yalnız yuxarı və aşağı sərhədlər məlumdur (bax, *Təsadüfi kodla(n)ma sərhədi, Sıx yerləşmə sərhədi*).

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

ETİBARLILIQ GÖSTƏRİCİLƏRİ, SISTEMİN «надежности системы показатели; reliability indices of system» – konkret bir sistemin etibarlılığını müəyyənləşdirən xassələri ifadə edən kəmiyyət xarakteristikalarıdır. Etibarlılıq – sistemin zaman ərzində qəbul olunmuş sərhədlər çərçivəsində bütün parametrlərinin qiymətlərini saxlama xassəsidir. Bu parametrlər verilmiş rejimlərdə və texniki xidmət, tətbiq olunma, təmir, saxlanılma şəraitlərində tələb olunan funksiyaları yerinə yetirmək qabiliyyətini xarakterizə edən parametrlərdir.

Etibarlılıq elə müəkkəb xassədir ki, o, texniki sistemin hansı məqsədlə istifadə olunmasından və bu sistemin tətbiq olunma şərtlərindən asılı olaraq, imtinəsizlik, uzunömürlülük, təmirəyarlılıq və saxlanılma xassələrinin birgə nəzərə alınmasını ifadə edir.

Sistemin müəyyən müddət ərzində işəqabiliyyətlik vəziyyətini kəsilməz sürətdə saxlama xassəsinə imtinəsizlik (sıradançıxmamazlıq) deyilir. İmtinasızlıq etibarlılığın əsas xassəsidir. Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsinin əsas işləri imtinəsizlik göstəricilərinin hesablanmasına həsr olunmuşdur. İmtinasızlıq göstəricilərinin əsas olanları aşağıdakılardır.

İmtinasız işləmə (fasiləsiz işləmə) ehtimalı – verilmiş t_0 müddəti ərzində sistemin fasiləsiz işləməsi ehtimalıdır. ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə imtinaya qədər işləmə müddəti işarə olunarsa, bu göstərici $P(t_0) = P\{\xi \geq t_0\}$ kimi ifadə olunur.

İmtinaya qədər orta işləmə müddəti – sistemin ilk imtinaya qədər işləmə müddətinin riyazi gözləməsi $M\xi$ -dir.

İmtinaya qədər qamma-faizli işləmə müddəti – γ ehtimalı ilə sistemin fasiləsiz işlədiyi t_γ müddətidir, yeni $P\{t_\gamma\} = \gamma$.

İmtinaya sərf olunan orta işləmə müddəti – bərpaolunan sistemin işləmə müddətinin bu işləmə müddətində baş vermiş imtinalar sayının riyazi gözləməsinə nisbətidir. İmtinasızlığın mühüm xarakteristikası – *imtina intensivliyi funksiyasıdır*.

Təmirəyararlılığın əsas göstəriciləri – verilmiş müddət ərzində işəqabiliyyətlik vəziyyətinin bərpa olunma ehtimalı və işəqabiliyyətlik vəziyyətinin bərpasının orta müddətidir.

Etibarlılığın bəzi xassələrini xarakterizə edən etibarlılığın kompleks göstəricilərindən də tez-tez istifadə olunur. Bu göstəricilərdən əsas olanları imtinasızlığı və təmirəyararlığı xarakterizə edən göstəricilərdir. Hazırolma əmsalı – ixtiyari anda sistemin işəqabiliyyətli olması ehtimalıdır. Operativ hazır olma əmsalı – obyektin ixtiyari anda işəqabiliyyətli vəziyyətdə olması və bu andan sonra verilmiş zaman intervalında imtinasız işləməsi ehtimalıdır.

Sistemlərin hamısı yalnız iki vəziyyət ilə, yeni ya işəqabiliyyətliyi və ya sıradan çıxmış vəziyyəti ilə xarakterizə olunmur, belə ki, sistemin işəqabiliyyətliliyinin effektivliyi müəyyən surətdə aşağı olmağa başladığı halda hissəvi sıradan çıxma vəziyyəti də olur. Buna görə də, etibarlılıq araşdırıldıqda işləmə göstəricilərinin effektivliyi də tədqiq olunur. Belə halda xüsusi olaraq, etibarlılıq effektivliyi saxlama əmsalı – müəyyən istismar müddətində effektivlik göstəricisinin bu göstəricinin nominal qiymətinə olan nisbəti ilə xarakterizə olunur və bu da məqsədə uyğun olur; göstəricinin nominal qiyməti isə baxılan müddətdə sistemin sıradan çıxmıdığı şərtlə hesablanır. Effektivliyi saxlama əmsalı sistemin müxtəlif elementlərinin imtinalarının bu əmsaldan istifadənin məqsədyönlü tətbiqinin effektivliyini xarakterizə edir.

Etibarlılığın hesablanması elementlərin etibarlılığı haqqında məlumatların nəzərə alınması ilə onların işləmə prinsipləri və onların strukturu haqqında informasiya əsasında sistemin etibarlılıq göstəricilərinin kəmiyyətə hesablanması ibarətdir. Etibarlılıq göstəricilərinin apriori hesablanması üçün ehtimal nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunur. İstismar nəticələri və ya xüsusi sınaqların nəticələri əsasında etibarlılıq göstəricilərinin empirik statistik qiymətlərini hesablamaq üçün riyazi statistikanın metodlarından istifadə olunur.

Əd.: [1] Надежность в технике. Термины и определения. ГОСТ 27.002-83, М., 1983; [2] Надежность технических систем. Справочник, М., 1985; [3] Вопросы математической теории надежности, М., 1983.

ETİBARLILIQ GÖSTƏRİCİSİ «надежности показатель; reliability index» – etibarlılıq nəzəriyyəsində istifadə olunan termindir. Bütün elementləri statistik asılı olmayan sistemdə i -ci element təsadüfi X_i vəziyyəti ilə xarakterizə olunur və məlumdur ki,

$$P\{X_i=1\} = p_i = M X_i, \quad i=1, \dots, n.$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ olsun. i -ci elementin işəqabiliyyətli olması ehtimalı i -ci elementin etibarlılıq göstəricisi adlanır. Onda sistemin E. g. analogi olaraq

$$P\{\Phi(X)=1\} = h = M\Phi(X)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada MX , – X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, Φ – sistemin struktur funksiyasıdır.

Sistemin elementləri asılı olmadığı halda sistemin E. g.-ni onun elementlərinin E. g.-lərinin funksiyası kimi ifadə etmək olar:

$$h = h(p).$$

Əgər $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ olarsa, $h(p)$ simvolundan istifadə olunur. $h(p)$ -yə (elementlər eyni olduğu halda isə $h(p)$ -yə) Φ strukturunun etibarlılıq funksiyası deyilir. Əgər sistemin elementləri asılı olmayan elementlər olarsa, onda sistemin E. g. yalnız p -nin funksiyası olmaya bilər və bu halda h funksiyasından istifadə olunmur.

Etibarlılıq funksiyası üçün

$$h(p) = p_i h(1, p) + (1 - p_i) h(0, p), \quad i=1, \dots, n$$

bərabərliyi doğrudur (bax, [1]).

Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

ETİBARLILIQ HÜDUDU / SƏVİYYƏSİ «доверительный уровень; confidence level» – bax, *Etibarlı interval, Etibarlı qiymətləndirmə, Statistik qiymətləndirmə*.

ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİ; analitik – statistik metod «надежности теория; аналитико-статистический метод; reliability theory; analytical – statistical method / combined simulation method» – etibarlılığı hesablanılacaq xarakteristikaların $\xi_1, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələrinin analitik ifadəsi f şəklində ifadə edilməsindən ibarət hesablama metodudur.

Qiymətləndiriləcək xarakteristikanın təqribi qiymətini tapmaq üçün $\xi_1, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərini *Monte – Karlo metodu* ilə hesablayaraq, f ifadəsində uyğun təqribi $M\xi_1, \dots, M\xi_k$ qiymətlərinin yerinə qoymaq lazımdır. Xarakteristikanın f , $M\xi_i$ ilə ifadə olunmasının seçilməsi sonlu statistik qiymətin dispersiyasının minimumuna əsasən aparılır (bu məsələ, adətən, evristik mülahizələrə əsaslanmaqla həll olunur). Sistemin etibarlılığı üçün kiçik ε parametrinin qüvvət üstləri üzrə sırası kimi ifadə olunmasına əsaslanan analitik – statistik metod sxemində baxılmışdır;

ε – sistemin elementlərinin imtina intensivliklərini ümumi normalaşdırıcı vuruqdur. *Hissəvi xətti proses* halında qeyd olunan qüvvət üstlü sıranın əmsallarının ehtimali interpretasiyası mümkündür və bunları asanlıqla modeləşdirmək olur.

Analitik – statistik metodun modifikasiyaları sistemin modeli üzərində bilavasitə sürətli modeləşdirmə metodlarıdır. Bu halda, sistemin axtarılan ehtimalı xarakteristikalarının təyin olunması – modeləşdirməyə (metodun statistik hissəsi), sistemin trayektoriyalarının bəzi funksionallarının hesablanması və orta qiymətlərinin təyin olunmasına (analitik hissə) gətirilir.

Analitik – statistik metod sistemin qeyri – stasionar xarakteristikalarının (fasiləsiz işləmə ehtimalı, qeyri – stasionar hazır olma əmsalı, operativ hazır olma əmsalı) araşdırılmasında effektiv hesab olunur.

Analitik – statistik metod xarakteristikaları az fərqlənən sistemlərin axtarılan etibarlılıq göstəricilərinin yaxınlığının statistik qiymətlərini kəmiyyət etibarilə qurmağa imkan verir. Metodun birinci mərhələsində iki sistemin axtarılan xarakteristikalarının fərqi üçün aşkar şəkildə hesablanılmayan bəzi parametrlər daxil olan analitik düsturlar qurulur; ikinci mərhələdə statistik modeləşdirmə metodu ilə verilmiş parametrlərin meylsiz statistik qiymətləri qurulur və bu qiymətlər analitik düsturda yerinə qoyulur.

Analitik – statistik metod və onun modifikasiyalrı mürəkkəb texniki sistemlərin etibarlılıq xarakteristikalarının hesablanması-da geniş surətdə praktiki tətbiq olunur. Yüksəkətibarlı sistemlərdə bu metodların tətbiqi statistik qiymətin dispersiyasını statistik modeləşdirmə metodu ilə bilavasitə hesablanmış qiymətlə müqayisədə azaltmağa imkan verir. Analitik – statistik metod və onun modifikasiyalrı EHM-da reallaşdırılmışdır.

Əd.: [1] К о в а л е н к о И. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем, К., 1975; [2] К о в а л е н к о И. Н., Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем, М., 1980; [3] К о в а л е н к о И. Н., Расчет вероятностных характеристик систем, К., 1982; [4] К о в а л е н к о И. Н., К у з н е ц о в Н. Ю., Методы расчета высоконадежных систем, М., 1988.

EVKLİD KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ «ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ; Euclidean quantum field theory» – kvant meydan nəzəriyyəsinin bölməsidir, burada $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) fəzasında Evklid mey-

danları adlandırılan M^d Minkovski fəzasında adi kvant meydanları üzrə qurulan köməkçi yeni meydanlar öyrənilir (kobud deyimdə, bu meydanlar qeyd olunanların $\mathbb{R}^d$ fəzasına – «xəyali zaman» oblastına «davamıdır»). Əksər hallarda M^d -də kvant meydanını qurmaq və öyrənmək əvəzinə, ona uyğun Evklid fəzasını araşdırmaq, sonradan isə analitik surətdə davam edilmiş prosedurunun köməyi ilə ilkin meydana qayıtmaq münasibdir.

$\mathbb{R}^d$ -də Evklid meydanları, M^d -də kvant meydanları aksiomatik təsvir oluna bilinirlər: bozon meydanı – $T \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ olduqda $[S(\mathbb{R}^d), - \mathbb{R}^d$ -də sürətlə azalan sonsuz hamar funksiyaların fəzasıdır], $\xi_\varphi(T) = (T, \varphi)$ şəklində funksionallar ilə doğurulmuş, $\mathbb{R}^d$ -də ümumiləşmiş funksiyaların $S'(\mathbb{R}^d)$ fəzasında funksionallarının $\mathcal{A}$ cəbrində təyin olunmuş vəziyyəti (və ya kvazivəziyyəti) kimi verilir. Bu vəziyyət bəzi ümumi şərtləri ödəməlidir (kovariantlıq, SO – müsbətlik və s.; bax, [2]). Fermion Evklid meydanları üçün kvazivəziyyət uyğun Grassman cəbrində təyin olunur (bax, [3]).

Əgər μ – Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanının $S'(\mathbb{R}^d)$ -də ehtimal paylanmasıdır, onda bu paylanma $(F \in \mathcal{A})$ üzrə $\langle F \rangle_\mu$ orta qiyməti $\mathbb{R}^d$ -də bozon Evklid meydanını təyin edir; E. Nelsonun aşkar etdiyi bu fakt (E. Nelson, bax, [1]) Evklid meydanlarının qurulmasını olduqca yüngülləşdirir.

$$\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} S_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i) dx_1^d \dots dx_n^d, \\ \varphi_i \in S(\mathbb{R}^d),$$

momentləri $S_n(x_1, \dots, x_n)$ (ümumiləşmiş) funksiyalarını təyin edir (bunlar Evklid meydanının *Şvinger funksiyaları* adlanır) və bunların $(M^d)^n$, $n = 1, 2, \dots$ fəzalarına analitik davamları uyğun kvant meydanının *Uaytman funksiyaları* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] С а й м о н Б., Модель $P[\varphi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Г л и м м Д. Ж., Д ж а ф - ф е А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984;

[3] Osterwalder K., Schrader R., «Helv. Phys. Acta», 1973, v. 46, p. 277–302.

EVKLİD MEYDANI «ЕВКЛИДОВО ПОЛЕ; Euclidean field» – bax, *Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi*.

EVKLİD ŞEYRİ «ЕВКЛИДОВА ШЕЙП; Euclidean shape» – bax, *Təsadüfi şeyr*.

EVKLİD YANAŞMASI «ЕВКЛИДОВА ПОДХОД; Euclidean approach» – bax, $P[\varphi]_2$ – *modelləri, kvant meydan nəzəriyyəsinin*.

EVOLYUSİON SENZURLAMA «ЭВОЛЮЦИОННОЕ ПЕНЗУРИРОВАНИЕ; evolutionary censoring» – bax, *Senzurla(n)ma*.

EVOLYUSİONAL STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK «ЭВОЛЮЦИОННОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; evolutionary stochastic differential equation» – təchiz olunmuş Hilbert fəzasında (rus. в оснащенном гильбертовом пространстве) –

$$du(t, \omega) = A(u(t, \omega), t, \omega) dN(t) + B(u(t, \omega), t, \omega) dM(t) \\ t > t_0, \quad u(t_0, \omega) = u_0(\omega) \quad (1)$$

şəklində tənlikdir, burada A və B – hər hansı təchiz olunmuş H Hilbert fəzasında operatorlar, N – məhdud variasiyalı təsadüfi proses, M – qiymətləri hər hansı Hilbert fəzasından olan lokal martinqal, ω – təsadüf simvolunu ifadə edən dəyişən. (1) bərabərliyi isə stoxastik differensial martinqallar mənasında anlaşılır. H Hilbert fəzasını «təchiz edən» fəzalar kimi A və B operatorlarının təyin olunma və qiymətlər oblastları ilə bağlı fəzalar istifadə olunur.

E. s. d. t.-yə tipik misal xüsusi törəməli evolyusion stoxastik differensial tənlikdir. Mes.,

$$du(t, x) = \frac{1}{2} u_{xx}(t, x) dt + u_x(t, x) dw(t), \\ (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^1, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

şəklində tənliyə, w – Viner prosesi, u_0 – $L^2(\mathbb{R}^1)$ fəzasından funksiya olduğu halında, $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $W_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$ Sobolev fəzaları cütü ilə təchiz olunmuş Hilbert fəzasında E. s. d. t. kimi baxmaq

münasibdir. $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ fəzası $A := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $B := \frac{\partial}{\partial x}$ operator-

larının təyin olunma oblastı, $W_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$ isə A operatorunun qiymətlər oblastıdır.

Xüsusi törəməli E. s. d. t. E. s. d. t. nəzəriyyəsinin inkişafı üçün başlanğıc və əsas stimul olmuşdur (bax, [1] – [3]). lakin ele mühüm problemlər mövcuddur ki, bunların öyrənilməsinə zəruri edir. Mes., sonsuzölçülü fəzalarda 2-ci tərtib xüsusi törəməli elliptik və parabolik tənliklərin həllində E. s. d. t.-lər münasib köməkçi aparatdır (bax, [4]).

E. s. d. t.-lər nəzəriyyəsində stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsində olduğu kimi zəif və güclü həllər anlayışları da təyin olunmuşdur. Bir qədər dəqiq olmasa da, güclü həll M martinqalı verildiyi halda verilmiş ehtimal fəzasında qurulmuş həll anlaşılır. Zəif həll anlayışı belə anlaşılır: hər hansı ele ehtimal fəzası və bu fəzada ele martinqal axtarılır ki, bunlar üçün (1)

tənliyinin həlli olsun. Güclü və zəif həllərin varlığını təmin edən şərtlər olduqca fərqlidir. Təchiz olunmuş E. s. d. t.-in güclü və zəif həllərinin varlığına aid tipik nəticələr aşağıda verilir.

H – separabel Hilbert fəzası, $H^* \equiv H$, V – separabel refleksiv Banax fəzası olsun (sadəlik üçün fərz olunur ki, bütün fəzalar heqiqidir). Əgər: a) $V \subset H \subset V^*$; b) V , H -da sıx olarsa; c) əgər c konstantı varsa ki, bütün $v \in V$ -lər üçün $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$; ç) $vv^* = (v, v^*)_H$ şərti bütün $v \in V$, $v^* \in V^*$ üçün ödənilsə (vv^* , $-v^*$ -un v -də qiymətidir) fərziyyələri ödənilsə, H fəzası V , V^* cütü ilə təchiz olunmuşdur, deyilir. Daha sonra hesab olunur ki, a) – ç) xassələrinə malik olan V və H fəzaları verilmişdir. Bu xassələrə malik olan fəzalara aid $W_p^m(G) (= V)$ və $L^2(G) (= H)$ – Sobolev fəzalarını qeyd etmək olar, burada G , $\mathbb{R}^d$ -də məhdud oblast, $d, p \geq 2(d - mp)$ və ∂G requlyardır. Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında qiymətləri heqiqi separabel E ($E^* = E$) Hilbert fəzasından olan və vahidi korrelyasion operatora malik Viner prosesi $w(t)$ verilmişdir. $\mathcal{P}$ – öngörül çoxluqların σ -cəbri, $\mathcal{F}^2(E, H)$, E -dən H -a olan Hilbert – Şmidt operatorlarının fəzası, $\|\cdot\|$ – bu fəzada norma olsun; hesab olunur ki, $S = V \times [0, T] \times \Omega$ -da $A: S \rightarrow V^*$ və $B: S \rightarrow \mathcal{F}^2(E, H)$ funksiyalar verilmişdir. Fərz olunur ki, bu funksiyalar ölçülən və öngörül funksiyalardır və $v \in V$. Fərz olunur ki,

$$du(t, \omega) = A(u(t, \omega), t, \omega)dt + B(u(t, \omega), t, \omega)dw(t), \quad t \leq T, \quad (2)$$

$$u(0, \omega) = u_0(\omega) \quad (3)$$

E. s. d. t. verilmişdir və bezi K sabitləri, $\alpha > 0$ bütün $v_1, v_2, v_3 \in V$, $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

A_1) A -nın semikəsilməzliyi: $vA(v_1 + \lambda v_2) \in \mathbb{R}^1$ -də λ üzrə kəsilməzdir;

A_2) (A, B) -nin monotonluğu:

$$2(v_1 - v_2)(A(v_1) - A(v_2)) + \|B(v_1) - B(v_2)\|^2 \leq K \|v_1 - v_2\|_H^2;$$

A_3) (A, B) -nin koersitivliyi:

$$2vA(v) + \|B(v)\|^2 + \alpha \|v\|^2 \leq K(1 + \|v\|_H^2);$$

A_4) A -nın artımının məhdudluğu:

$$\|A(v)\|_{V^*} \leq K(1 + \|v\|_V).$$

Əgər $A_1 - A_4$ şərtləri ödənilsə və $u_0 \in L^2(\Omega; \mathcal{A}_0; H)$ olarsa, onda (2) – (3) məsələsinin yeganə güclü həlli vardır. Bu həll $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathcal{P}, V) \cap L^2(\Omega; C([0, T]; H))$ fəzasındandır (bax, [1], [2]). Bu həll sonluölçülü stoxastik differensial tənliyin həllinin xassələrinə analoji xassələrə malikdir (məs., bu

həll başlanğıc verilənlərə görə kəsilməzdir, bu şərtlə ki, əmsallar təsadüfdən asılı olmasın – Markov xassəsinə malik olsun) və s.

Koersitivlik şərti bəzən olduqca ağır şərt olur. Xətti E. s. d. t.-lərə tətbiq olunarkən onun əvəzinə monotonluq tipli şərtlərdən istifadə etmək olar ki, bu şərtlər xətti halda $(A + 1/2B^*B)$ operatorunun dissipativlik şərtlə əvəz olunur.

E. s. d. t.-in həllinin güclü həllər tipli olmasının isbatı monotonluq xassəsinə əsaslanır. Bu olduqca geniş şərtidir. Məs., A, B xətti olduqları halda, bu şərt koersitivlik şərtindən alınır.

Buna baxmayaraq, bir sıra ələ mühüm E. s. d. t. vardır ki, onlar üçün bu şərt ödənilmir. Məs., Nəvyə – Stoks stoxastik differensial tənliyi və ya populyasion genetikanın tənliklərindən biri:

$$du(t) = \alpha \Delta u(t)dt + \sqrt{u(t)(1-u(t))} dw(t)$$

üçün bu şərt ödənilir.

Lakin bu tənliklərin zəif həllərinin varlığını isbat etmək olar (bax, [5]). Ümumiyyətlə, (2) – (3) məsələsinin zəif həllinin varlığının isbatı üçün monotonluq şərtindən imtina etmək olar. Bunun əvəzində aşağıdakı şərtin ödənilməsinə tələb etmək olar: A_5) V -nin H -a daxil olmasının kompaktlığını.

Bu halda semikəsilməzlik şərti A və B operatorlarının hər hansı daha güclü kəsilməzlik şərti ilə əvəz olunmalıdır (bax, [6]).

Monotonluq şərtindən başqa E. s. d. t.-in həllinin yeganəliyini təmin edən hansısa ümumi şərtlər, hal-hazırda məlum deyildir.

E. s. d. t.-in zəif həll problemi ilə bağlı olaraq, müstəqil bir maraq doğuran, E. s. d. t.-lər ardıcılığının doğurduğu ölçülər ardıcılığının nisbi kompaktlığı məsələsi araşdırılmışdır (bax, [6]). Bu halda fərz olunmuşdur ki, E. s. d. t.-in əmsalları (1) E. s. d. t.-in əmsallarına yığılır. İsbat olunmuşdur ki, nisbi kompaktlıq üçün əsas kafi şərtlər A_2, A_4, A_5 tipli şərtlərdir.

E. s. d. t.-in həllinin varlığının ən geniş yayılmış isbat metodu – Qalyorkin metodudur. Bu metod eyni zamanda həm güclü, həm də zəif həllərin varlığının isbatında tətbiq olunur. Fərq yalnız sonluölçülü approksimasiyalardan limite keçmə mərhələsində alınır. A_3 şərti ödənilmədiyi halda limite keçmə tənlikdə bilavasitə monotonluq metodu ilə aparılır. Əgər bu şərt olmasa, onda limite keçid sonluölçülü approksiməedici tənliklərin həllərinin doğurduqları ölçülər üzrə aparılır.

Diffuziya əmsalı B məhdud olan E. s. d. t.-lər üçün semi – qruplar metodu geniş yayılmışdır (bax, [7]).

E. s. d. t.-lər nəzəriyyəsi operator stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır (bax, [8]).

Əd.: [1] Pardoux E., Équations aux dérivées partielles stochastiques nonlineaires monotones. Thèse doct. Sci. Univ. Paris Sud., P., 1975; [2] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 71–146; [3] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов, М., 1983; [4] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [5] Viot M., Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques nonlineaires. Thèse doct. Sci. Univ. Pierre et Marie Curie, P., 1976; [6] Grigelionis B., Mikulevicius R., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1985, v. 69; [7] Curtain R. F., Pritchard A. J., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1978, v. 8; [8] Скоробод А. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 157–85.

EVOLYUSIONAR SPEKTRAL FUNKSIYA
« эволюционирующая спектральная функция; evolutionary spectral function » – bax, Evolyusionar spektral ifadə.

EVOLYUSİONAR SPEKTRAL İFADƏ « ЭВОЛЮЦИОННИРУЮЩЕЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ; evolutionary spectral representation » – $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$

stasionar təsadüfi prosesinin spektral ifadəsinin zəif qeyri – stasionar proseslərin geniş sinfinə ümumiləşməsidir. $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin E. s. i. aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} A(t; \lambda) dZ(\lambda), \quad (1)$$

burada $Z(\lambda)$ – stasionar təsadüfi prosesin ayrılışında olduğu kimi, qeyri – korrelyar artımları kompleks təsadüfi funksiyadır, odur ki,

$$M dZ(\lambda) d\overline{Z(\lambda')} = 0, \quad \lambda' \neq \lambda \quad \text{və} \quad M |dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda), \quad (2)$$

təsadüfi olmayan $A(t; \lambda)$ funksiyası isə bütün t -lər üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(t; \lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty, \quad (3)$$

şertini ödəyir (bu şərt bütün t -lər üçün $M |\zeta(t)|^2 < \infty$ şərtinin ödənilməsinə təmin edir) və t -nin asta dəyişən funksiyasıdır. M. Priestliyə görə (E. s. i.-ni o daxil etmişdir; bax. [1], [2]) $A(t; \lambda)$ -nin «asta dəyişənliyini» aşağıdakı kimi ifadə etmək münasibdir:

$$A(t; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dK_t(\theta),$$

burada $|dK_t(\theta)|$ t -nin ixtiyari qiymətində $\theta = 0$ olduqda mütləq maksimuma malikdir. E. s. i.-yə malik olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesləri [yeni $dZ(\lambda)$ (2) şərtini, $A(t; \lambda)$ (3) şərtini ödədikdə və t -yə görə asta dəyişdikdə (1) şəkildə ifadə olunan] ossilyar təsadüfi proseslər adlanır.

Təsadüfi funksiyaların ifadə olunması haqqında Karunen teoreminə əsasən $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi, yalnız və yalnız, o halda ossilyar prosesdir ki, t -yə görə hər hansı asta dəyişən $A(t; \lambda)$ funksiyası və məhdud azalmayan $F(\lambda)$ funksiyası üçün $B(t; s) = M \zeta(t) \overline{\zeta(s)}$ funksiyası

$$B(t; s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda-s)} A(t; \lambda) \overline{A(s; \lambda)} dF(\lambda)$$

şertini ödəsin. Bu halda $F(t; \lambda) = |A(t; \lambda)|^2 F(\lambda)$ $\zeta(t)$ prosesinin evolyusionar spektral funksiyası adlanır. Bu funksiya, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur, belə ki, $\zeta(t)$ prosesi (1) şəkildə bir çox müxtəlif E. s. i.-yə malik ola bilər.

Ossilyar təsadüfi proseslər sinfinə stasionar proseslərdən başqa, praktiki cəhətdən çox maraq doğuran qeyri – stasionar təsadüfi proseslər də (məs., iqtisadiyyatda; bax. [3]) aiddir. Bu halda stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin bir sıra nəticələri [məs., $\zeta(t)$ proseslərinin optimal xətti ekstrapolyasiya və

filtrasiya məsələlərinə, uyğun $F(\lambda)$ spektral funksiya və $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsinə aid] ossilyar proseslər üçün olduqca sadə və yalnız cüzi dəyişikliklərlə ifadə oluna bilər (bax. məs., [2], [4]).

Əd.: [1] Priestley M. B., « J. Roy. Statist. Soc., Ser. B », 1965, v. 27, № 2, p. 204-37; [2] Priestley M. B., Spectral analysis and time series, v. 2, Ch.11, L. – [a. o.], 1981; [3] Г р е н д ж е р К., Х а т а н а к а М., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., М., 1972; [4] M a n d r e k a r V., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 32, № 1, p. 280-84.

EVOLYUSİONAR SPEKTRAL ÖLÇÜ « ЭВОЛЮЦИОННИРУЮЩАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА; evolutionary spectral measure » – bax. *Spektral nəzəriyyələri* qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin.

EYLER ƏDƏDLƏRİ « Эйлеры числа; Euler numbers » –

$$E_{n,k} = k E_{n-1,k} + (n-k+1) E_{n-1,k-1}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n \quad (*)$$

rekurrent münasibətindən təyin olunan natural $E_{n,k}$ ədədləridir, $E_{0,0} = 1$, $E_{n,0} = E_{0,k} = 0$ və $k > n$ olduqda $E_{n,k} = 0$ qəbul edilir. (*) ədədləri L. Eyler (L. Euler) tərəfindən 1755-də nəzəri ədədi məsələlərlə bağlı daxil edilmişdir. E. ə. sonlu cəm şəklində ifadə olunur:

$$E_{n,k} = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_{n+1}^m (k-m)^n.$$

E. ə.-ni doğuran funksiyanın köməyi ilə də təyin etmək olur:

$$\frac{1-x}{1-xe^{t(1-x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n E_{n,k} x^k \frac{t^n}{n!}.$$

E. ə. kombinator analizdə, növlərə ayırma alqoritmlərinin aşdırılmasında, optimal kvadratur düsturların qurulmasında mühüm rol oynayır. $E_{n,k}/n!$ nisbəti – $1, 2, \dots, n$ ədədlər çoxluğunun ixtiyari təsadüfi yerdəyişməsi – $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ -də k sayda $\alpha_{i-1} < \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$ artmalarının ödənilməsi ehtimalıdır ($\alpha_0 = 0$ olduğu fərz olunur).

Əgər $k = n/2 + x\sqrt{n/12}$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda məhdud x -lər üçün

$$\frac{E_{n,k}}{n!} \sim \sqrt{\frac{6}{\pi n}} e^{-x^2/12}$$

asimptotik düsturu doğrudur.

Birparametrlili E. ə. – E_n -lər aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

Əd.: [1] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

EYNŞTEYN – SMOLUXOVSKI MODELİ « Эйнштейна – Смолуховского модель; Einstein – Smoluchowski model » – bax. *Ornşteyn – Ulenbek prosesi*.



ƏDƏDİ SİMULYASIYA(sı), təsadüfi təzahürün « численная симуляция случайного явления; numerical simulation of a random phenomenon » – təsadüfi və ya psevdotəsadüfi ədədlərin köməyiylə baxılan təsadüfi təzahürün elementar nəticələri ardıcılığının qurulmasıdır və bu nəticələrin müşahidə olunan təzahürün asılı olmayan müşahidələri ardıcılığına xas olan statistik xassələrə malik olduğu fərz olunur. EHM-də sonlu – tərtib ədədlər üzərində əməllər aparıldığından, yalnız olduqca sadə alqoritmlər praktiki əhəmiyyət kəsb edir, ona görə də, bu təzahürün yalnız bəzi xassələrə malik olan realizasiyaları ilə, o da təqribi olaraq, kifayətlənilir.

Əd.: [1] С о б о л ь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] Е р м а к о в С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

ƏNƏMİYYƏTSİZ ÇOXLUQ « пренебрежимое множество; negligible set » – ölçü nəzəriyyəsi mənasında kiçik çoxluqdur. (X, S, μ) – ölçülü ixtiyari fəza, Y – əsas bazis çoxluğu X -in altçoxluğu olsun. Əgər μ^* ölçüsü μ ölçüsü ilə uzlaşan xarici ölçü və $\mu^*(Y)=0$ olarsa, Y çoxluğu μ ölçüsünə nəzərən əhəmiyyətsiz çoxluqdur, deyilir. Əgər (X, S, μ) tam ölçülü fəza olarsa, onda μ – əhəmiyyətsiz çoxluqların bütün sinfi sıfır μ – ölçülü bütün çoxluqların sinfi ilə üst-üstə düşür. Əgər X topoloji fəza, μ ölçüsü X -də Borel ölçüsü olarsa və ixtiyari $x \in X$ çoxluğu üçün onun ilə $U(x)$ ətrafı olarsa ki, $Y \cap U(x) \subset Y \subset X$ kəsişməsi X -də μ – əhəmiyyətsiz çoxluq olsun, onda $Y \subset X$ çoxluğu X fəzasında μ ölçüsünə nəzərən lokal əhəmiyyətsiz çoxluq adlanır. Hər bir Ə. ç. eyni zamanda lokal əhəmiyyətsiz çoxluqdur. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

Invariant və kvaziinvariant ölçülər üçün mütləq əhəmiyyətsiz çoxluq anlayışı vardır (bax, [3]) və bu anlayış ölçülü adi fəzalar üçün Ə. ç. anlayışına yaxındır. Məs., sonsuzölçülü E Banax fəzasının ixtiyari kompakt altçoxluğu E -də paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant və E -də verilən bütün σ – sonlu ölçülərin sinfi üzrə mütləq əhəmiyyətsiz çoxluqdur.

Əd.: [1] Б у р б а к и Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [2] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Х а р а з а ш в и л и А. В., Топологические аспекты теории меры, К., 1984.

ƏNƏMİYYƏTSİZ ZONA « безразличная зона; indifference zone » statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində – ilkin H_0 hipotezi və alternativ H_1 hipotezinə uyğun parametrik çoxluqları ayırd edən oblastdır. Ə. z.-nın məzhi H_0 -dan kiçik yayınmaların, yeni

onların nəzərə çarpmaması ciddi nəticələr doğurmayan yayınmaların çoxluğu mənasında anlaşılır. Ə. z., adətən, təminatlı gücə malik kriterilərin axtarılması məsələlərində daxil olunur, məs., verilmiş $\varepsilon > 0$, α qiymətlərində bütün $\theta \geq \theta_0 + \Delta$

[burada $(\theta_0, \theta_0 + \Delta)$ – əhəmiyyətsiz zonadır] üçün, gücü $\geq 1 - \varepsilon$ olan, α – ölçülü $H_0: \theta \leq \theta_0$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin tapılmasında. Belə tələbin yerinə yetirilməsi aparılacaq müşahidələrin lazım olan sayını planlaşdırmaq hesabına təmin olunur.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

ƏKS HADİSƏ « противоположное событие; negation / complement of an event » – bax, *Tamamlayan hadisə*.

ƏKSEDİCİ BARYER « отражающий барьер; reflecting barrier / boundary » – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

ƏKSEDİCİ SƏRHƏD « отражающая граница; reflecting boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya; sərhədlərin təsnifatı*.

ƏLAQƏLƏR MODELİ « связей модель; bound model » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*.

ƏLAQƏLİ VƏZİYYƏTLƏR(i) Markov zəncirinin « сообщающиеся состояния цепи Маркова; communicating states of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*.

ƏLAVƏ MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « дополнительные наблюдаемые; complementarity observables » – bax, *Müşahidələnlər*.

ƏLVERİŞLİ ELEMENTAR HADİSƏ A hadisəsi üçün « благоприятное элементарное событие для события A ; elementary event, favorable to A » – eksperimentdə müşahidə oluna bilən hər hansı A hadisəsinin baş verməsinə səbəb olan elementar hadisəyə deyilir. Məs., « düzgün metal pulun iki dəfə atılması » stoxastik eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{GG, GŞ, ŞG, ŞŞ\}$ çoxluğu, $A = \{\text{metal pul birinci dəfə gerb üzünə yuxarı olmaqla düşmüşdür}\}$ – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisədir. A hadisəsi üçün Ə. e. h.-lər – $\{GG\}$ və $\{GŞ\}$ elementar hadisələridir.

ƏN BÖYÜK DOĞRUYAOXŞARLIQ METODU « наибольшего правдоподобия метод; maximum likelihood method » – bax, *Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu*.

ƏN BÖYÜK DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ

« **наибольшего / максимального правдоподобия принцип; maximum likelihood principle** » **максимального** doğruyaoxşarlıq prinsipi, – statistik nəticənin evristik prinsipidir; bu prinsipə əsasən, statistik modeldə naməlum parametrin qiyməti kimi *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* supremumunu təmin edən ən «doğruyaoxşar» qiymət seçilməlidir.

x – paylanması naməlum $\theta \in \Theta$ qiymətindən asılı X təsadüfi seçiminin müşahidə nəticəsi, $p(x, \theta)$ – təsadüfi seçimin paylanmaları ailəsini dominarlayan σ – sonlu μ ölçüsünün köməyi ilə təyin olunan doğruyaoxşarlıq funksiyasıdır ($\theta \in \Theta$ parametrinin funksiyası). Ə. b. d. p.-nə əsasən θ parametrinin iki mümkün θ_1 və θ_2 qiymətlərindən doğruyaoxşarlıq o qiymətdir ki (yəni x müşahidəsi ilə ən çox uzlaşan), o, doğruyaoxşarlıq funksiyasının ən böyük qiymətinə uyğundur. Bu nəticə doğruyaoxşarlıq funksiyasının hansı σ – sonlu dominarlayıcı ölçü ilə təyin olunmasından asılıdır. Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində Ə. b. d. p. konkret şəkildə ifadə olunur və bu prinsipə əsasən, θ naməlum parametri üçün statistik qiymət kimi doğruyaoxşarlıq funksiyasının supremumunu təmin edən $\hat{\theta}(x)$ statistikasını seçilir. İki mürekkəb $H_0: \theta \in \Theta_0$ və $H_1: \theta \in \Theta_1$ statistik hipotezlərinin yoxlanılması nəzəriyyəsində Ə. b. d. p. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinə* gətirir; bu kriteriyə əsasən

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} p(x; \theta) / \sup_{\theta \in \Theta_0} p(x; \theta)$$

doğruyaoxşarlıq nisbətinin böyük və ya kiçik olmasından asılı olaraq H_1 və ya H_0 hipotezi qəbul edilir [iki sadə $H_0: \theta = \theta_0$ və $H_1: \theta = \theta_1$ hipotezləri halında Ə. b. d. p. $p(x; \theta_1) / p(x; \theta_0)$ doğruyaoxşarlıq nisbətinə əsaslanan ən güclü – Neyman – Pirson kriterisinə gətirir].

Qeyd etmək lazımdır ki, ümumi halda Ə. b. d. p.-nin ciddi formal əsaslandırılmaları mövcud deyildir, lakin bu prinsip əsasında qurulan statistik prosedurlar əksərən bir çox optimal (və ya asimptotik optimal) xassələrə malikdirlər (bax, *Doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi, Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu*).

Ə. b. d. p. ilə yanaşı statistik nəticənin ümumi nəzəriyyəsində daha ümumi prinsiplərə – **doğruyaoxşarlıq zəif prinsipi** və **doğruyaoxşarlıq gücləndirilmiş prinsipi** – də baxılır. Birinci prinsipə görə, X seçimi üzrə iki müxtəlif x_1 və x_2 müşahidələri əsasında bunların doğruyaoxşarlıq funksiyaları mütənasibdirlərsə, yəni $p(x_1; \theta) \equiv h(x_1, x_2) p(x_2; \theta)$ olarsa, eyni statistik nəticələr çıxarılmalıdır. İkinci prinsip iki müxtəlif X və Y seçimləri üzrə x və y müşahidələri haqqındadır, bu halda X və Y -in doğruyaoxşarlıq funksiyaları $p_X(x; \theta)$ və $p_Y(y; \theta)$ eyni bir naməlum θ parametrindən asılıdırlar. Bu prinsipə görə x və y müşahidələri üzrə θ parametri haqqında, onların uyğun doğruyaoxşarlıq funksiyaları mütənasib olarsa, yəni $p_X(x; \theta) \equiv h(x, y) p_Y(y; \theta)$ münasibəti ödənilərsə, eyni statistik nəticələr çıxarılmalıdır.

Əd.: [1] К о к с Д., Х и н к л и Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [2] К е н д а л л М. Д. ж., С т ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

266 ƏN BÖYÜK

ƏN CİDDİ KRİTERİ « **наиболее строгий критерий; most stringent test** » – bax, *Qurşayıcı funksiyası, gücün*.

ƏN DƏQİQ ETİBARLI ÇOXLUQ « **наиболее точное / селективное доверительное множество; most accurate confidence set** », ən selektiv etibarlı çoxluq, – ehtimal paylanmasının naməlum parametrinin ixtiyari düzgün olmayan qiymətini daxilə alma ehtimalını minimallaşdıran, eyni etibarlılıq əmsalına malik etibarlı çoxluqlar sinfindən *etibarlı çoxluqdur*.

X , – $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}, P_0)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $\Delta = \{C(X)\}$ – etibarlılıq əsmalı eyni P olan θ parametri üçün etibarlı çoxluqlar sinfi olsun, yəni Δ -dan olan ixtiyari $C(X)$ üçün

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_{\theta} \{ \theta \in C(X) \} = P$$

olsun. Δ -dan olan $C^0(X)$ çoxluğu θ parametri üçün Δ sinfində o halda Ə. d. e. ç. adlanır ki, ixtiyari $C(X) \in \Delta$ üçün

$$P_{\theta} \{ \theta' \in C^0(X) \} \leq P_{\theta} \{ \theta' \in C(X) \}, \quad \theta \neq \theta'$$

münasibəti ödənilsin. Bax, *Etibarlı interval, Etibarlı çoxluq*.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ƏN DƏQİQ İNVARİANT ETİBARLI ÇOXLUQ

« **наиболее точное инвариантное доверительное множество; most accurate invariant confidence set** » – eyni hüdudlu invariant etibarlı çoxluqlar sinfində ən dəqiq *etibarlı çoxluqdur*.

X , – $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}, P_0)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $\Delta = \{C(X)\}$ – etibarlılıq əmsalı eyni P ,

$0 < P < 1$ olan, θ parametri üçün bütün etibarlı çoxluqların sinfi olsun. $\mathcal{X}$ -də $\mathcal{X}$ fəzasının özünə ölçülən g çevirmələrinin $G = \{g\}$ qrupunun verildiyi və bu qrupa nəzərən $\{P_{\theta}\}$ ailəsinin invariant olduğu fərz olunur. Əgər bütün $g \in G$ üçün $C(gX) = \overline{g}C(X)$ bərabərliyi ödənilərsə, Δ -nın etibarlı $C(X)$ çoxluğu G qrupuna nəzərən *invariant etibarlı çoxluq* adlanır, burada $\overline{g}$, – Θ -nı özünə çevirən $\overline{g}$ çevirmələrinin doğrurulmuş $\overline{G} = \{\overline{g}\}$ qrupunun elementidir. Əgər Δ -dan olan ixtiyari digər $C(X)$ invariant çoxluğu üçün

$$P_{\theta} \{ \theta' \in C_0(X) \} \leq P_{\theta} \{ \theta' \in C(X) \}, \quad \theta \neq \theta'$$

münasibəti ödənilərsə, Δ -dan olan invariant etibarlı $C_0(X)$ çoxluğu ən dəqiq invariant etibarlı çoxluq adlanır.

Bax, *Etibarlı interval, Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ƏN DƏQİQ SƏRHƏD « **наиболее точная граница; most accurate bound / limit** » – ən dəqiq etibarlı intervalın sərhədidir.

Bax, *Etibarlı interval, Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

ƏN ƏLVERİSSİZ PAYLANMA « **наихудшее распределение, наименее благоприятное распределение; worst distribution** » – bax, *Oyunu, iki şəxs*.

ƏN ƏLVERİŞSİZ PAYLANMA « наименее благоприятное распределение; least favorable distribution » – qərar qəbul etmə statistik məsələsində risk funksiyasını maksimallaşdıran *aprior paylanma*dır.

$(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\mathcal{X}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası üzrə d həllinin (qərarının) $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_\mathcal{D})$ həllər fəzasından qəbul edilməsi fərz olunur və fərz olunur ki, bu halda naməlum θ parametri $(\Theta, \mathcal{D}_\Theta, \pi_t)$, $t \in T$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətdir. $L(\theta, d)$ – parametrin əsl qiyməti θ olduğu halda d həlli qəbul edildikdə yaranan itkiləri ifadə edən funksiyadır.

$$\rho(\pi_t, d) = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{X}} L(\theta, d(x)) d\mathbf{P}_\theta(x) d\pi_t(\theta)$$

d həllinin qəbul edilməsindən yaranan orta itkiləri ifadə edən risk funksiyası olduqda

$$\sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \rho(\pi_{t^*}, d)$$

münasibəti ödənilsə, $\{\pi_t, t \in T\}$ ailəsindən olan π_{t^*} aprior paylanması Bayes yanaşmasında qərar qəbul etmə statistik məsələsində d həlli (qərarı) üçün ən əlverişsiz paylanma adlanır. Ə. ə. p. d həllini qəbul etmədə yaranan ən «ağır» (orta hesabla) $\rho(\pi_{t^*}, d)$ itkilərini hesablamağa imkan verir. Praktikada, adətən, Ə. ə. p. yönümdə deyil, əksinə, d həllin qəbul olunması yönündə nəticəyə gəlməyə cəhdlər göstərilir ki, θ parametrinin dəyişiklikləri maksimal itkilərə səbəb olmasın; bu isə maksimal riski minimallaşdıran, minimal d^* həllinin axtarılmasına, yəni

$$\inf_{d \in \mathcal{D}} \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d^*)$$

münasibətini ödəyən d^* həllinin təyin olunmasına gətirir.

Bayes yanaşmasında, sadə alternativə qarşı mürekkəb statistik hipotezin yoxlanılması məsələsində Ə. ə. p. *Vald reduksiya*sı vasitəsilə təyin olunur. X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası üzrə X təsadüfi kəmiyyətinin Q qanununa tabe olduğu haqqında H_1 sadə alternativə qarşı X -in paylanma qanununun $H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsindən olması haqqında mürekkəb H_0 hipotezini yoxlamaq tələb olunur. Fərz olunur ki, $p_\theta(x) = d\mathbf{P}_\theta(x)/d\mu(x)$ və $q(x) = dQ(x)/d\mu(x)$, burada $\mu(x)$, – $(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\mathcal{X})$ fəzasında hər hansı σ – sonlu ölçüdür, $\{\pi_t, t \in T\}$, – $(\Theta, \mathcal{D}_\Theta)$ fəzasında aprior paylanmalar ailəsidir. Onda ixtiyari $t \in T$ üçün mürekkəb H_0 hipotezinə qarşı d sadə H_t hipotezini qarşı qoymaq olar ki, bu hipotezə görə X təsadüfi kəmiyyəti ehtimal sıxlığı

$$f_t(x) = \int_{\Theta} p_\theta(x) d\pi_t(\theta)$$

olan ehtimal qanununa tabədir. *Neyman – Pirson* lemmasına əsasən, sadə alternativ H_1 -ə qarşı H_t sadə hipotezinin yoxlanılması üçün doğruxaoxşarlıq nisbətinə görə qurulmuş *ən güclü kriteri* vardır. β_t bu kriterinin gücü olsun, onda Ə. ə. p. $\{\pi_t, t \in T\}$ ailəsindən π_{t^*} aprior paylanmasıdır ki, bu

paylanma üçün bütün $t \in T$ qiymətlərində $\beta_{t^*} \leq \beta_t$ bərabər-sizliyi ödənilir. Ə. ə. p. belə bir xassəyə malikdir: H_{t^*} hipotezində X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal sıxlığı $f_{t^*}(x)$ alternativ $q(x)$ sıxlığından «ən az uzaqlaşmışdır», yəni H_{t^*} hipotezi $\{H_t, t \in T\}$ ailəsindən olan H_1 alternativ hipotezinə ən «yaxın» olan hipotez sayılır. Bax, *Bayes yanaşması* statistik məsələlərə, *Oyunu, iki şəxs*in.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « наиболее мощный критерий; most powerful test » – verilmiş *mühümlük ölçülü* bütün kriterilər arasında ən böyük kriteri gücünə malik olan *statistik kriteridir*. Müşahidələrin nəticəsi əsasında sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır. Əslində, H_1 hipotezi doğru olduğuna baxmayaraq, H_1 hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 hipotezini yoxlamaq məqsədilə tətbiq edilən statistik kriteri əsasında yayınma nəticəsində mümkün ola bilən 1-ci növ səhvin məqbul ehtimalının α olduğu fərz olunur. Statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində H_1 hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunan bütün statistik kriterilər arasında ən yaxşı kriteri ən böyük kriteri gücünə malik kriteridir: bu halda bütün bu kriterilər üçün 1-ci növ səhv ehtimalının eyni olduğu və mühümlük ölçüsünün də eyni – α olduğu nəzərdə tutulur; ən yaxşı kriteri H_1 alternativ hipotezinin doğru olduğu halda, yoxlanılan H_0 hipotezini ən böyük ehtimalla qəbul etməyən kriteridir. Məhz bu kriteri mühümlük ölçüsü α olan bütün statistik kriterilər arasında *ən güclü kriteri* adlanır (bu kriterilərin sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunduğu nəzərdə tutulur). *Statistik kriterinin gücü* ikinci növ səhvin ehtimalı $\beta = \mathbf{P}\{H_0 | H_1\}$ vasitəsilə ifadə olunur və $1 - \beta$ -ya bərabərdir. Adətən, kriterinin mühümlük ölçüsü – $\alpha = \mathbf{P}\{H_1 | H_0\}$ ehtimalı öncədən seçilir (məsələn, $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$) və bu halda kriterinin gücünün maksimal olması ikinci növ səhvin ehtimalı β -nin minimal olmasına səbəb olur. 1-ci növ xəta ehtimalı verilmiş bütün kriterilər arasında 2-ci növ xəta ehtimalı ən kiçik olan sadə hipotezin (sadə alternativə qarşı) yoxlanılması üçün istifadə olunan statistik kriteri Ə. g. k.-dir. Sadə hipotezlər hallarında Ə. g. k.-nin təyin olunması məsələsinin həlli Neyman – Pirson lemmasında verilir; bu lemma əsasən *doğruxaoxşarlıq nisbəti kriterisi* Ə. g. k.-dir.

H_0 və H_1 konkurent hipotezləri mürekkəb hipotezlər olduğu halda, Ə. g. k.-nin təyin olunması məsələsi – əgər belə kriteri vardırsa – *müntəzəm ən güclü kriteri* terminləri ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Никитин М. С., в кн.: Исследования по математической статистике, в. 8, Л., 1988, с. 129–42; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Neyman J., Pearson E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», Ser. A, 1933, v. 231, p. 289–337.

ƏN KİÇİK EKSSESSİV MAJORANT « наименьшая экссессивная мажоранта; minimal excessive majorant » – bax, *Optimal dayanma(sı) təsadüfi prosesin*.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÇƏKİLİ METODU « наименьших квадратов взвешенный метод; weighted least squares / generalized least squares method » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU « наименьших квадратов метод; least squares method » – xətlər nəzəriyyəsi və statistik qiymətləndirmənin ən geniş yayılmış ümumi metodlarından biridir; bu metodla naməlum parametrlərin statistik qiymətləri xətlər vektorunun normasının minimizasiyası şərtindən təyin olunur. Funksiyaların nəzəriyyəsinə və operator tənliklərin təqribi həlli nəzəriyyəsində bu metodun analogları vardır.

Ə. k. k. m. K. Qaussun (C. Gauss, 1778 – 1855) və A. Lejandrın (A. Legendre, 1782 – 1847) işlərində daxil olunmuşdur. O. Koşi (A. Cauchy, 1789 – 1859) Ə. k. k. m. üçün ortoqonallıq ideyasının müəhlülünü birinci olaraq göstərmişdir. P. L. Çebışev (1794 – 1867) polinomial regressiya modellərində Ə. k. k. m.-nin tətbiqinin müxtəlif aspektlərini işləmişdir. K. Pirsun (K. Pearson, 1859 – 1942) xətti model-lə çoxölçülü normal qanunun əlaqəsi olduğunu müəyyən etdi və Ə. k. k. m. ilə bağlı müxtəlif statistikaların paylanma qanunlarını çıxardı. A. A. Markov (1856 – 1942) və A. N. Kolmoqorov (1897 – 1980) Ə. k. k. m.-nu ciddi surətdə əsaslandırdılar və onun tətbiq olunma şərtlərini müəyyənləşdirdilər. A. Eytken (A. Aitken, 1893 – 1969) müasir matris işarələmələrində bu metodu ifadə etmişdir. R. Fişer (R. Fisher, 1890 – 1962) ortoqonallıq ideyasını inkişaf etdirdi və dispersion analiz və regression eksperimentlərin planlaşdırılma-sının əsasını qoydu. A. N. Kolmoqorov (1897 – 1980), J. Derbin və M. Kendall (J. Durbin, M. Kendall, 1951), U. Kruskal (W. Kruskal, 1928 – 1983) Ə. k. k. m.-na həndəsi (koordinatsız) yanaşmanı inkişaf etdirdilər. S. Rao (S. Rao, 1907 – 1997) xətti modelin müxtəlif variantlarına baxmışdır. A. Hörl (A. Hoerl, 1905 – 1993) Ə. k. k. m. prosedurlarına C. Steynin (Ch. Stein, 1915 – 1983) ümumi yanaşmasını tətbiq etmişdir və bu zaman A. N. Tixonovun qeyri – korrekt operator tənliklərin həllində inkişaf etdirdiyi rəqulyarizasiya metodları ilə dərin əlaqələri olan yalvarı regressiyanın ümumiləşmiş sxemini daxil etmişdir.

Ə. k. k. m. ölçmələrin xətti modelində. Fərz olunur ki, n – ölçülü ölçmələr vektoru $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ $Y = X\theta + \varepsilon$ strukturludur, burada $X = (x_{ij})$ – rəngi p olan və $(n \times p)$ – dim. – ölçülü məlum matrisdir, $p \leq n$ (bu matris regression əmsallar matrisi, $A = X^T X$ plan matrisi adlandırılır); $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ – naməlum, lakin tamamilə müəyyən parametrlər vektorudur; ε – riyazi gözləməsi sıfıra bərabər xətlərin n – ölçülü təsadüfi vektorudur. Fərz olunur ki, ε vektorunun komponentləri $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan və ümumi simmetrik paylanma funksiyası $F(x) = P\{\varepsilon_1 < x\}$, $F(x) = 1 - F(-x)$ olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Y -in ölçümləri əsasında θ vektor parametrlərini qiymətləndirmək tələb olunur.

Ə. k. k. m.-na əsasən θ parametrlərinin statistik qiyməti

$$S(\theta) = \|Y - X\theta\|^2 = (Y - X\theta)^T(Y - X\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - X_i\theta)^2 = \min$$

kvadratik formasının minimizasiyası şərtindən alınır, burada X_i , – X matrisinin i -ci sətiridir. $S(\theta)$ forması $\theta_1, \dots, \theta_p$ dəyişənlərinə nəzərən ikinci dərəcəli çoxhədlidir. $S(\theta)$ minimumunu $\hat{\theta}$ -nin ələ qiymətində alır ki, birinci tərtib xüsusi törəmələr vektoru sıfıra çevrilir; $\partial S / \partial \theta = 0$, buradan isə belə nəticə alınır ki, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti

$$(X^T X)^{-1} X^T Y$$

normal tənliklər sistemini ödəməlidir. Fərziyyəyə görə, X – tam rəngli matrisdir, buna görə də, $A = X^T X$ matrisinin tərs matrisi vardır və deməli, $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Bu statistik qiymət $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ ölçmələrin xətti funksiyasıdır. Onun statistik xassələri paylanma funksiyası $F(x)$ -dən olduqca asılıdır. Məs., $F(x)$ -in üzərinə olduqca ümumi məhdudiyyətlərdə statistik qiymət $y_1, \dots, y_n$ üzrə xətti, bütün meylsiz statistik qiymətlər sinfində tutarlı, meylsiz və effektiv statistik qiymət olur (bax, *Meylsiz statistik qiymət, Effektiv statistik qiymət*); burada effektivlik dörd keyfiyyət ölçüsündən heç olmasa birinə nəzərən

optimalıq kimi anlaşılmalıdır: 1) ixtiyari $\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\theta}_j$ xətti kombina-

siyasının dispersiyası $\sum_{j=1}^p \lambda_j \theta_j$ kəmiyyətinin bütün xətti meylsiz

statistik qiymətləri sinfində minimaldır, o cümlədən, $\hat{\theta}_j$,

$j=1, \dots, p$ komponentlərindən hər birinin dispersiyası mini-

maldır; 2) $\det(\text{cov} \hat{\theta}) = \min$ (ümumiləşmiş disper-

siya adlandırılan, $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin kovariasion matrisinin

determinantı); 3) $\text{cov} \hat{\theta} = \min$, yeni verilmiş sinfin ixtiyari

statistik qiyməti və Ə. k. k. m. statistik qiymətinin kovariasion

matrisləri arasındakı fərq həmişə müsbət müəyyən matrisdir;

4) $\text{tr}(\text{cov} \hat{\theta}) = \text{tr}(\hat{\theta} - M\hat{\theta})(\hat{\theta} - M\hat{\theta})^T = \min$, $M\hat{\theta} = \hat{\theta}$.

Ə. k. k. m. statistik qiymətinin mühüm xassəsi aşağıdakı kimi

ifadə olunur. Fərz olunur ki, ölçmə xətlərinin dispersiyası

$\sigma^2 = D\varepsilon_1$ naməlum parametrlərdən biridir və $\Delta = Y - X\hat{\theta}$

qalıqlar vektorudur (xətlər kimi sayılan vektor), $S^2 =$

$= \frac{1}{n-p} \Delta^T \Delta$. Onda S^2 , – σ^2 -nin meylsiz statistik qiymətidir.

Xətlərin paylanma qanunu $F(x)$ haqqında olduqca geniş

şərtlərlə Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətlər asimptotik normal

kəmiyyətlərdir: $\hat{\theta} \sim N_p(\theta, \sigma^2(X^T X)^{-1})$, $n \rightarrow \infty$ və ya daha

aydın yazılışda, $\sigma^{-1}(X^T X)^{1/2}(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$. σ

naməlum olduqda, σ əvəzinə onun statistik qiymətini yerinə

qoyduqda bu nəticə yenə də doğrudur. Normal qanunla

paylanmış ε_i xətlərin üçün, yəni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$ olduqda daha da

ən güclü müddəalar doğrudur: 1) Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymət

yalnız xətti və meylsiz statistik qiymətlər sinfində deyil, bütün

statistik qiymətlər sinfində effektiv statistik qiymətdir; 2) $\hat{\theta}$ və S^2 statistikaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və birlikdə $(\hat{\theta}^T, \sigma^2) = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p, \sigma^2)$ naməlum parametrləri vektorunun kafi (bax, *Kafi statistika*) və asimptotik effektiv statistik qiymətdir; 3) σ^2 məlum olduqda, Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymət $N_p(\hat{\theta}, \sigma^2(X^T X)^{-1})$ normal qanuna yalnız $n \rightarrow \infty$ olduqda deyil, hətta ixtiyari sonlu n qiymətində də təbədir. Sonlu n qiymətlərində $\hat{\theta}$ və S^2 statistik qiymətlərinin asılı olmamalı normal qanunun seçiyəvi xassəsidir: digər bütün $F(x)$ paylanmaların üçün bu statistikalar asılıdır. Lakin xətlərin ixtiyari simmetrik paylanmaya malik olduğu hallarda, $n \rightarrow \infty$ $j=1, \dots, p$ olduqda, korrelyasiya əmsalları $r(\hat{\theta}_j, S^2) \rightarrow 0$ münasibətini ödəyir, odur ki, bu statistikalar asimptotik olaraq qeyri – korrelyardır.

Qeyd olunanlardan mühüm nəticə olaraq belə bir fakt alınır: maksimal rəqə malik olan, $(k \times p) - \dim. -$ ölçülü ixtiyari G matrisi üçün $G\hat{\theta}$ kəmiyyəti $H = G\theta$ vektorunun Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətdir, belə statistik qiymətin xassələri $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin xassələrindən asanlıqla alınır.

Bir çox praktiki məsələlərdə regression əmsallar matrisi apriori verilir, lakin elə qoyuluşlar olur ki, tədqiqatçı X matrisini hər hansı məlum sinifdən seçərək, eksperimentli planlaşdırmaq imkani əldə edir (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*). Matrisin seçilməsində aydın olan prinsiplərdən biri statistik qiymətlərin kovariasion matrisi – $P = \sigma^2(X^T X)^{-1}$ -in minimizasiyasıdır, yeni

$A = X^T X$ plan matrisinin maksimizasiyasıdır (bu və ya digər mənada). Regression eksperimentlərin planlaşdırılmasının digər mühüm prinsipi ortoqonallıq anlayışı ilə bağlıdır. Baxılan məsələdə $G\theta = H = (h_1, \dots, h_k)^T$ vektorunu qiymətləndirmək tələb olunur. Əgər H vektorunun komponentlərinin Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətləri $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k$ qeyri – korrelyardırsa, plan – $h_1, \dots, h_k$ parametrik funksiyalarına nəzərən **o r t o q o n a l** **p l a n** adlanır: yeni $M(\hat{h}_i - h_i)(\hat{h}_j - h_j) = 0; i, j = 1, \dots, k, i \neq j$ olarsa. Ortoqonal planların üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, hər bir h_j üçün $\hat{h}_j$ statistik qiymətini ələ hesablamaq olar ki, guya bütün digər h_i -lər $i \neq j$ olduqda $h_i = 0$ şərtini ödəyir. Bu yanaşma, xüsusilə, Ə. k. k. m.-dəki hesablama çətinliklərini aradan qaldırır, belə ki, statistik qiymətlər üçün aşkar düstura bu halda diaqonal matrisin çevrilməsi tələb olunur.

Baxılan yanaşmanın ən sadə ümumiləşməsi ən kiçik kvadratların çəkilənmiş metodudur, bu metodda $(n \times n) - \dim. -$ ölçülü çəkili matris W daxil olunur və kvadratların çəkili cəmlərinin minimumu şərtindən $\hat{\theta}$ statistik qiyməti tapılır: $(Y - X\hat{\theta})^T W(Y - X\hat{\theta}) = \min$ şərtindən. Bu metod, adətən, ölçmə xətlərin korrelyar olan və ε vektorunun kovariasion matrisi $\text{cov} \varepsilon = \Xi$ məlum olan xətti modeldə tətbiq olunur. Bu şərtlərlə $W = \Xi^{-1}$ qəbul etdikdə, Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətlərin yuxarıda qeyd olunan bütün xassələrinə malik olan statistik qiymət almaq olur. Məs., asimptotik normallıq şərti $n \rightarrow \infty$ olduqda $\hat{\theta} \sim N_p(\theta, (X^T \Xi^{-1} X)^{-1})$ münasibətilə ifadə olunur, xətlər normal qanunla paylandığı halda və

$\varepsilon \in N_n(0, \Xi)$ olduqda, bu münasibət yalnız asimptotik deyil, hətta bütün sonlu n -lər üçün də ödənilir. Əgər Ξ kovariasion matrisi sabit vuruq dəqiqliyi ilə məlum olarsa, yeni $\Xi = \sigma^2 \Xi_0$

olarsa, onda $W = \Xi_0^{-1}$ və $S^2 = \frac{1}{n-p} \Delta^T \Xi_0^{-1} \Delta$ [burada

$\Delta = Y - X\hat{\theta}$ – qalıqlar vektorudur (xəta kimi sayılanların vektoru)] statistikası σ^2 parametrlərinin meylsiz statistik qiymətidir, $(\hat{\theta}, S^2)$ cütü isə (θ, σ^2) üçün kafi statistikadır. Çəkili Ə. k. k. m. daha mürəkkəb qeyri – xətti qiymətləndirmə metodlarını reallaşdıraraq rekurrent ədədi alqoritmlərin qurulmasında da tətbiq olunur.

Bir naməlum parametr olduğu hal. Naməlum θ kəmiyyətinin qiymətini qiymətləndirmək üçün n sayda asılı olmayan ölçmələr aparılmış və $y_i = \theta + \varepsilon_i, i=1, \dots, n$ nəticələri alınmışdır, burada $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – təsadüfi xətlərdir (xətlər nəzəriyyəsinə qəbul olunmuş tərifi görə, təsadüfi xətlər riyazi gözlemləri sıfır bərabər, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, yeni $M\varepsilon_i = 0$; əgər $M\varepsilon_i \neq 0$ olarsa, xətlər sisteməti xətlər adlanır).

$D\varepsilon_i = \sigma^2 d_i$ olsun, burada d_i – məlum kəmiyyətlərdir, σ^2 isə naməlum miqyas parametridir. Bu qoyuluşa $Y = 1\theta + \varepsilon$ şəklində xətti model uyğundur, burada $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, regression əmsallar matrisi isə $(1 \times n) - \dim. -$ ölçülü $1 = (1, \dots, 1)$ vektordur, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$. Çəkili Ə. k. k. m.-na görə θ parametrlərinin statistik qiyməti

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \theta)^2 = \min, \quad w_i = d_i^{-1}$$

şərtindən alınır, buradan isə $\hat{\theta}$ üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$\hat{\theta} = w^{-1} \sum_{i=1}^n w_i y_i, \quad w = \sum_{i=1}^n w_i$$

σ^2 üçün aşağıdakı statistik qiymət alınır:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \hat{\theta})^2$$

n -in olduqca böyük qiymətində və $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ xətlərinin paylanmaların üçün bezi ümumi fərziyyələrlə

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2/w)$$

münasibəti ödənilir, bu münasibətdən θ -nın qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması və təqribi etibarlı intervalların qurulmasında istifadə etmək olar.

Əgər xətlər normal qanunla paylanmış olarsa, yeni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2 d_i)$ olarsa, S^2 və $(\hat{\theta} - \theta)/S$ təsadüfi kəmiyyətlərinin dəqiq paylanma qanunlarını tapmaq olar, doğrudan da, $(n-1)S^2/\sigma^2$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ olan χ^2 – paylanmasına təbədir, $(\hat{\theta} - \theta)/S$ statistikası isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ -ə bərabər Styudent t – paylanması ilə paylanır.

M i s a l 1. Cilalama avtomatında hazırlanmış 20 oxda nominal ölçülərdən yayınlara nəzarət olunur. Bərabərdeqiqliklə asılı olmayan ölçmələr nəticəsində (mikronlarda) yayınlmaların qiymətləri cədvəldə verilmişdir (burada n_i – yayınlma kəmiyyəti y_i -nin müşahidə olduğu ölçmələrin sayıdır,

$$\sum_{i=n}^k n_i = n = 20).$$

y_i	39	40	41	42	43	44	46
n_i	2	4	4	6	2	1	1

Bütün ölçmələr asılı olmadıqlarından və bərabərdeqiqliklə aparıldıqlarından, ayrı-ayrı ölçmələrin çəkili onları miqdarına mütənasib götürülməlidir, $w_i = n_i$, odur ki, çəkili matrisi $W = \text{diag}(n_1, \dots, n_k)$ şəklində olur və θ -nın naməlum yayınlmasının statistik qiyməti kimi $\hat{\theta} = \sum n_i y_i / \sum n_i = 41,50$ kəmiyyəti götürülür. Etibarlılıq ehtimalı $\gamma = 0,95$ olduqda serbestlik dərəcəsi sayı 19-a bərabər Stuydent paylanması üçün cədvəllərdən $t_\gamma = 2,09$ olduğunu tapmaq olur, buna görə də, $\theta \approx \hat{\theta} = 41,50$ təqribi bərabərliyinin limit mütəlak xətası

$$t_\gamma S = t_\gamma \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i (y_i - \hat{\theta})^2 / n(n-1)} = 0,80$$

kəmiyyəti götürülməlidir. Beləliklə, $\gamma = 0,95$ etibarlılıq ehtimalı ilə θ üçün etibarlı interval $40,70 \leq \theta \leq 42,30$ münasibətilə təyin olunur.

M i s a l 2. Qəbuledicinin girişinə $y(t) = \theta x(t) + \varepsilon(t)$ signalı daxil olur, bu signal $\theta x(t)$ şəklində faydalı signal ilə riyazi gözleməsi sıfır bərabər və korrelyasion funksiyası $h(s, t)$ olan qeyri – stasionar $\varepsilon(t)$ maneəsinin qarşıdır, burada $x(t)$ məlum funksiyadır. Signalın amplitudu $y(t)$, $t_1, \dots, t_n$ anlarında ölçülür. Faydalı signalın amplitudu θ -nı qiymətləndirmək tələb olunur.

Bu qoyuluşa $Y = X\theta + \varepsilon$ xətti modeli uyğundur, $Y = (y(t_1), \dots, y(t_n))^T$, $X = (x(t_1), \dots, x(t_n))^T$, $\varepsilon = (\varepsilon(t_1), \dots, \varepsilon(t_n))^T$, burada ε orta qiyməti 0 və kovariasion matrisi $\Xi = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = k(t_i, t_j)$ olan təsadüfi vektordur. Çəkili Ə. k. k. m-na görə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $S(\theta) = (Y - X\theta)^T \times \Xi^{-1} (Y - X\theta) = \min$ şərtindən alınır və $\theta = (X^T \Xi^{-1} X)^{-1} \times X^T \Xi^{-1} Y$ şəklində olur. Matrisinin elementlərini σ_{ij} -lərlə işarə edib, statistik qiyməti daha sadə aşkar şəkildə yazmaq olur, yeni

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i y_j \right] \left[\sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \right]^{-1} \quad (1)$$

$\hat{\theta}$ kəmiyyəti orta qiyməti θ və dispersiyası

$D = \left[\sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \right]^{-1}$ olan asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Əgər küy Gauss prosesidirsə, onda bu münasibət ixtiyari

$$n: (\theta - \hat{\theta}) / \sqrt{D} \in N(0, 1)$$

üçün ödənilir.

Sabit signalın qeyri – korrelyar ölçülmələri halında $x(t) \equiv 1$, $X = 1 = (1, \dots, 1)^T$, $\Xi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ və (1) düsturu aşağıdakı şəkildə ifadə olunur

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=1}^n y_i / \sigma_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} \right]^{-1};$$

$\Xi = \sigma^2$ xüsusi halında

$$\hat{\theta} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Hipotezlərin yoxlanılması və etibarlı qiymətləndirmə. Xətti modelin parametrlərinin Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətləri olduqca ümumi fərziyyələrlə asimptotik olaraq normal qanuna tabedirlər, buna görə də, etibarlı çoxluqların və kritik oblastların sərhədləri kimi limit normal qanununun sıxlığının hədd səthləri olan $(\theta - \hat{\theta})^T X^T X (\theta - \hat{\theta}) = \text{const}$ şəklində p – ölçülü ellipsoidlər səthlərindən istifadə etmək məsləhətdir (bax, *Sepələnmə ellipsoidi*). $Q(c) = \{ \theta \in \mathbb{R}^p : (\theta - \hat{\theta})^T X^T X (\theta - \hat{\theta}) \leq c \}$, $c > 0$ olsun. Onda normal qanunla paylanmış ε_i xətaləri halında, yeni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$ olduqda ixtiyari $c > 0$ qiymətlərində nəticələr doğrudur: σ^2 dispersiyası naməlumdursa,

$$\mathbf{P}\{Q(c\sigma^{-2}) \ni \theta\} = \mathbf{P}\{\chi_p^2 \leq c\},$$

burada χ_p^2 – serbestlik dərəcəsi sayı p -yə bərabər χ^2 paylanmasına tabe təsadüfi kəmiyyətdir; σ^2 naməlumdursa və onun statistik qiyməti S^2 -dan istifadə etdikdə:

$$\mathbf{P}\{Q(cS^{-2}) \ni \theta\} = \mathbf{P}\{F_{p,n-p} \leq c\},$$

burada $F_{p,n-p}$ – parametrləri $p, n-p$ olan F – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyətdir.

M i s a l 3. Ölçmə cihazının kalibrlənməsində onun vasitəsilə parametrləri $a_1, \dots, a_n$ əvvəlcədən məlum olan etalonlar toplusu ölçülür, sonra ölçülmə qiymətləri A_i -lərin əsl qiymətlərdən yayınlmaları y_i -lər araşdırılır: $y_i = A_i - a_i$. Əgər cihaz sistemətik xətasızdırsa, onda $\mathbf{M} y_i = 0$ sabit olaraq cihazın dəqiqliyini xarakterizə edir. Əgər sistemətik xəta vardırsa, onda onu təqribi olaraq

$$\mathbf{M} y_i = \alpha + \beta a_i = (\alpha + \beta \bar{a}) + \beta(a_i - \bar{a}),$$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

şəklində ifadə etməyə cəhd göstərilir, bu isə aşağıdakı xətti modelə uyğundur:

$$Y = X\theta + \varepsilon, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)^T, \quad \theta_1 = \alpha + \beta\bar{a}, \quad \theta_2 = \beta,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 - \bar{a} & a_2 - \bar{a} & \dots & a_n - \bar{a} \end{bmatrix},$$

burada ε_i xetaları $(0, \sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. θ_1, θ_2 parametrlərinə keçid $X^T X$ matrisinin diaqonal matris olmasını təmin edir. Ən kiçik kvadratlar statistik qiyməti burada aşkar şəkildə yazılır:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\hat{\theta}_2 = \left[\sum_{i=1}^n y_i (a_i - \bar{a}) \right] / \left[\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 \right]$$

$\hat{\theta}_1$ və $\hat{\theta}_2$ statistik qiymətləri qeyri – korrelyardırlar, buna görə də, θ_1 və θ_2 üçün etibarlı oblaslar ellipslərdir:

$$Q(c) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^2 : \frac{(\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2}{D\hat{\theta}_1} + \frac{(\theta_2 - \hat{\theta}_2)^2}{D\hat{\theta}_2} \leq c \right\},$$

burada

$$D\hat{\theta}_1 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad D\hat{\theta}_2 = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2;$$

$$P\{\theta \in Q(c\sigma^2)\} = P\{\chi^2_2 \leq c\} = 1 - \exp(-c/2).$$

σ^2 dispersiyası məlum olmadıqda onun əvəzinə onun aşağıdakı statistik qiymət qoyulur:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2(a_i - \bar{a})]^2$$

bu halda $P\{\theta \in Q(cS^2)\} = P\{F_{2,n-2} \leq c\}$. Bu modeldə ilkin parametrlər üçün alınmış $\hat{\alpha}$ və $\hat{\beta}$ statistik qiymətləri korrelyardırlar, buna görə də, $(\alpha, \beta)^T$ vektoru üçün etibarlı oblaslar daha mürekkəb ifadəli ellipsoidlər ailəsi olur:

$$Q(c) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^2 : n(\alpha - \hat{\alpha})^2 + 2n\bar{a}(\alpha - \hat{\alpha})(\beta - \hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq c \right\}$$

Ə. k. k. m.-nin hesablamada çətinlikləri. Çəkili Ə. k. k. m. üzrə $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $A\hat{\theta} = X^T \Xi^{-1} Y$ normal tənliklər sisteminin həllidir, onun kovariasion matrisi $\text{cov } \hat{\theta} = P = A^{-1}$ münasibətilə ifadə olunur. Əsas çətinliklər Ξ matrisi və ya planın ümumiləşmiş matrisi $A = X^T \Xi^{-1} X$ yaxşı şərtləndirildikdə yaranır, ümumiyyətlə, bu eksperimentin planının dəyişməsi zərurətinin olduğunu göstərir.

Bir çox hallarda, matrislərin adi çevrilməsini psevdöçevirmə variantlarından biri ilə əvəzləməyə üstünlük verilir. Yaxşı şərtləndirilməklə bağlı digər problem o halda yaranır ki, A^{-1} -in məşin-da hesablanması çətin olmasa da, onun ifadəsi $\hat{\theta}$ -nın lazımı dəqiqliklə qiymətləndirilməsini təmin edir. Bu halda statistik qiymətə süni meyyl daxil etmək məqsəduyğun olur və buna görə A matrisini $A_\lambda = A + \lambda I$ ilə əvəz etmək lazımdır, burada λ – kiçik bir ədəddir (ölçmə dispersiyalar 1-ə yaxın olduqda $\lambda = 0,01$ tərtiblə götürülür). Belə statistik qiymət kvadratik orta xətanın minimumu kriterisi üzrə daha üstün hesab olunur. Kvadratik orta xətanın minimumu kriterisi əsasında λ parametrlərinin optimizasiyası da mümkündür (bax, *Yalvari rəqressiya*).

Ə. k. k. m.-nin realizasiyası ilə bağlı digər çətinlik böyük həcmli informasiyanın qorunub saxlanması zərurəti və Ξ matrisinin çevrilməsində onun dim. – ölçüsünün böyük olması ilə yaranan mürekkəbliliklə əlaqədardır. A və Ξ matrislərinin çevrilməsini yeni ölçmələr daxil olduqca rekkurent olaraq aparmaq məqsəduyğundur. Bu $\hat{\theta}^{(0)}$ və $P^{(0)}$ ilkin qiymətləri əsasında $\hat{\theta}^{(k)}$ statistik qiymətinin və onun kovariasion matrisi $P^{(k)}$ -nin rekursiv hesablanma prosedurlarına gətirir. Xüsusi halda, $\Xi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ halında bu prosedura aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + K^{(k+1)} [y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\theta}^{(k)}];$$

$$K^{(k+1)} = P^{(k)} X_{k+1}^T [X_{k+1} P_k X_{k+1}^T + \sigma_k^2]^{-1};$$

$$P^{(k+1)} = [I - K^{(k+1)} X_{k+1}] P^{(k)}$$

burada X_k – X matrisinin k -cı sətridir; $K^{(k)}$ – $(p \times 1)$ – dim. – ölçülü vektor – ötürmə əmsalı (bax, *Kalman filtri*) adlanır.

Ə. k. k. m. əsasında ölçmələrin hamarlanması (rus. выравнивание, сглаживание) Ə. k. k. m.-nin tətbiqinin ən tipik hallarından biri –

$$y_i = \sum_{j=1}^p \theta_j \varphi_j(t_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

şəklində ölçmə nəticələrinin hamarlanmasıdır, burada $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ – hər hansı t parametrlərinin məlum funksiyalarıdır (əgər t zaman-dırsa, onda $t_1, \dots, t_n$ ölçmələr aparılan anlardır). Bu sxem rəqression əmsallar matrisi $X = (\varphi_j(t_i))$ olan xətti modelə uyğundur. Tətbiqdə, əsas etibarilə, çox vaxt parabolik interpolyasiyaya rast gəlinir, $\varphi_j(t)$ -lər çoxhədlilər olduğu hala (məs., $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2, \dots$). Tətbiq üçün digər mühüm hal harmonik interpolyasiyadır, bu halda $\varphi_j(t)$ kimi triqonometrik funksiyalar götürülür [məs., $\varphi_j(t) = \cos(j-1)t$, $j=1, \dots, p$]. Müasir standart paket proqramlarında, adətən, $\varphi_j(t)$ kimi çoxhədlilərin, eksponentlərin və triqonometrik funksiyaların müxtəlif kombinasiyalarından istifadə olunması da nəzərə alınır.

Ölçmələrin hamarlanması məsələlərində ortoqonalizasiya ideyaları mühüm əhəmiyyətə malikdir, burada bu ideyalara görə $\varphi_j(t)$, $j=1, \dots, p$ funksiyalarının seçilməsi funksiyaların ortoqo-

nal sistemlərinin seçilməsinə gətirilir. Ortoqonalizasiya p parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində alınmış statistik qiymətlər arasında sadə əlaqəni təmin edir, bu da onun hesablama üstünlüklərindən başqa digər üstün bir cəhətdir (bax, *Forsayt metodu*) və hesablama həcmi azaldır, məs., approksiməedici çoxhədlinin dərəcəsi düzgün seçildikdə.

M i s a l 4. Hərəkət edən avtomobilə havanın müqavimətini təyin etmək üçün aparılan sınaqların nəticələri cədvəldə göstərilmişdir, burada y – avtomobilin ön sethinin müqavimətinə məruz qalan sahəsidir (m^2), v – avtomobilin sürətidir (km/s). Bu kəmiyyətlər arasında $y = av^2 + bv + c$ şəklində təqribi asılılığı müəyyənləşdirmək tələb olunur. Xətlər kvadratını minimallaşdıraraq, yeni:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{10} [y_i - av_i^2 - bv_i - c]^2 = \min$$

y_i	4,28	3,53	3,16	2,98	2,60	2,23	2,05	1,67	1,49	1,12
v_i	88,7	98,0	100,0	102,8	106,7	115,8	118,9	130,2	138,9	146,3

münasibətindən $\hat{a} = 0,0007$; $\hat{b} = -0,205$; $\hat{c} = 16,84$ qiymətləri alınır. $\{1, v, v^2\}$ funksiyalar sistemindən

$$\{G_0(v) = 1; G_1(v) = a_0 + a_1 v; G_2(v) = \beta_0 + \beta_1 v + \beta_2 v^2\}$$

sisteminə keçdikdə hesablamalar sadələşir, bu sistemin əmsalları isə aşağıdakı ortoqonallıq şərtlərindən təyin olunur:

$$\sum_{i=1}^{10} G_j(v_i) G_k(v_i) = 0, j, k = 0, 1, 2, \dots, j \neq k,$$

bu şərtlər plan matrisinin diaqonallığını təmin edir ki, bu matris də çevrilməlidir. Bu prosedurların hər ikisi ekvivalentdirlər, lakin hesablama nöqtəyi – nəzərindən ortoqonallıq çoxhədlilərə keçid daha sadədir və nəticədə yuvarlaqlaşdırma xətləri azalır və approksiməedici çoxhədlinin dərəcəsi dəyişdikdə G_0, G_1, G_2 halında tapılmış əmsalların korreksiyasına ehtiyac olmur.

Ə. k. k. m. ölçmələrin qeyri-xətti modellərinə n – ölçülü ölçmələr vektoru $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ -nin naməlum parametrlərin p – ölçülü vektoru ilə

$$y_i = f_i(\theta_1, \dots, \theta_p) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$$

münasibətlər sistemi ilə əlaqəli olduğu fərz olunur, burada ε_i – naməlum təsadüfi xətlər, f_i isə $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ differensiallanan inikasının məlum koordinat funksiyalarıdır (ümumi halda, qeyri-xətti). Ə. k. k. m.-na əsasən θ_j -nin statistik qiymətləri kimi $\hat{\theta}_j$ -nin ələ qiymətləri götürülür ki, bunlar üçün xətlər vektorunun norması minimaldır:

$$S(\theta) = \|Y - F(\theta)\|^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f_i(\theta_1, \dots, \theta_p)]^2 = \min.$$

f_i funksiyaların qeyri-xətti olduğundan $\partial S / \partial \theta = 0$ normal tənliklər sisteminin həlli olduqca çətin ola bilər. Bəzən Y vektorunun qeyri-xətti çevirməsini tapmaq mümkün olur, bu halda (2) münasibətləri xətti modelə gətirilir. Ölçmələr müxtəlif dispersiyalı (heterogen) və korrelyar olduğu hal üçün metodun şübhə doğurmayan ümumiləşdirmələri mümkündür.

M i s a l 5. Podşibnikdə sürtünmə əmsalı μ kəmiyyəti t temperaturu ilə (sabit sürət halında) $\mu = \beta \exp(\gamma t)$ empirik düsturu ilə əlaqədirlər. Beləliklə, μ kəmiyyəti β və γ -dan qeyri-xətti asılıdır, lakin onun loqarifmi $\ln \mu$ isə $\ln \beta$ və γ -nın xətti funksiyasıdır. Ə. k. k. m.-nin ilkin və çevrilmiş bərabərliklərə tətbiqi nəticədə β və γ üçün müxtəlif statistik qiymətlər verir, lakin əgər xətlər ölçülən kəmiyyətlə müqayisədə kiçik olarsa, $D(\ln \mu) \approx \mu^{-2} D\mu$ olduğu alınır. Buna əsasən, xətiləşdirilmiş modeldə $\ln \mu_i$ ölçmələrinə $w_i = \mu_i^{-2}$ çəkirləri qarşı qoymaq olar. Bundan sonra ilkin və xətti hallarda statistik qiymətlər arasındakı fərq mühüm əhəmiyyət kəsb etmir.

Rekurrent xətiləşdirmə. Ölçmələrin qeyri-xətti modelini xətti modelə gətirən funksional çevirmə seçmək mümkün olmayan hallarda, əvvəlcə hər hansı $\hat{\theta}^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşması seçilir, sonra $X = \theta - \hat{\theta}^{(0)}$ vektoru daxil olunur və (2) münasibətləri $Y = F(\hat{\theta}^{(0)})X + \varepsilon$ şəklində yazılır. Daha sonra, sağ tərəf X vektorunun komponentləri $X_1, \dots, X_p$ -lərin qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılır və xətti hədlərlə kifayətlənərək, nəmülüm X vektoru ilə ölçmələrin təqribi xətti modeli alınır:

$$Y - F(\hat{\theta}^{(0)}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(\hat{\theta}^{(0)}) \right) X + \delta$$

yeni

$$y_i - f_i(\hat{\theta}^{(0)}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}^{(0)}) X_j + \delta_i, i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

burada $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)^T$ – xətlər vektorudur. $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_p)^T$ -nin parametrlərinin statistik qiymətlərini tapmaq üçün Ə. k. k. m.-nu tətbiq edərək birinci yaxınlaşma – $\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} + \hat{X}$ alınır. Bu əməliyyatı rekurrent təkrar etmək olar, bu halda əgər xətlər dispersiyası $D\delta_i$ hər bir addımdan sonra azalırsa, onda proses yığılır: $n \rightarrow \infty$ olduqda $\hat{\theta}^{(n)} \xrightarrow{P} \tilde{\theta}$, bununla belə alınan $\tilde{\theta}$ qiyməti birqiymətli təyin olunmaya bilər və həm də, $\hat{\theta}^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşmasından asılı ola bilər. Bu metodda əksər hallarda iterasiyada 1 – 2 addımla kifayətlənməyə üstünlük verilir.

(3) xətti modellərində iterasiyanın hər bir addımında hesablamaları da rekurrent formada aparmaq əlverişlidir, bu halda yalvarı (ric) regressiya ideyalarından istifadə olunur (bax, *Levenberg – Markvardt metodu*).

Bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu* qiymətləndirilmiş kovariasion matrisli, *Ən kiçik kvadratlar metodu* məhdudiyyətləri.

Əd.: [1] Л и н и к Ю. В., Метод наименьших квадратов в основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] С е а л Н. Л., «Биометрика», 1967, в. 54, № 1–2, р. 1–24; [3] Д е м и д е н к о Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М., 1981; [4] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и

их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Алберт А., Регрессия, псевдониверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [6] Планирование оптимальных экспериментов, М., 1975; [7] Аг-
nold S. F., The theory of linear models and multivariate analysis,
N. Y., 1981; [8] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия,
М., 1989; [9] Большев Л. Н., Наименьших квадратов метод,
в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU qiymət-
ləndirilmiş kovariasion matrisli «**на-
меньших квадратов метод** с оцененной ко-
вариационной матрицей; **least squares method**
with estimated covariance matrix» – ölçmələr
vektorunun kovariasion matrisinin tutarlı statistik qiymətinin
ümumiləşmiş (çəkili) *ən kiçik kvadratlar metodunda* istifadə-
sile bağlı statistik prosedurlar toplusudur.

$Y = X\theta + \varepsilon$ xətti regressiya modelində $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$
tesadüfi xətlər vektorunun $M\varepsilon = 0$, $\text{cov}\varepsilon = \Xi$ şərtlərini
ödədiyi fərz olunur. Əgər Ξ matrisi məlum olarsa, onda θ
parametrinin Ə. k. k. m. ilə hesablanmış $\hat{\theta}$ statistik qiyməti

$$\hat{\theta}(\Xi) = (X^T \Xi^{-1} X)^{-1} X^T \Xi^{-1} Y \quad (1)$$

şəklində olur və ən sadə fərziyyələrlə optimallığın məlum
xassələrinə malik olur. Əgər Ξ matrisi naməlumdursa, lakin
onun tutarlı $\hat{\Xi}$ statistik qiyməti varsa, onda

$$\hat{\theta}(\hat{\Xi}) = (X^T \hat{\Xi}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{\Xi}^{-1} Y \quad (2)$$

statistik qiyməti asimptotik olaraq əsl Ξ kovariasion matrisinə
esaslanan $\hat{\theta}(\Xi)$ statistik qiymətinin paylanması ilə eyni paylan-
maya malik olur (bax, [1]). Bu zaman (2) statistik qiyməti və
onunla əlaqədar statistikaların sonlu seçimi xassələri (1) statistik
qiymətinin analoji xassələrindən olduqca fərqlənir və bunların
tədqiqi hətta normal ölçmələr halında belə əksər hallarda çox
çətin məsələlərə gətirir. Məsələn, olduqca sadə sxemlər klassik
Berens – Fişer probleminin çoxölçülü ümumiləşmələri olan
məsələlərə gətirilir (bax, [2]–[5]).

Ξ matrisi üçün müxtəlif strukturlu fərziyyələrlə Ə. k. k. m. ilə
ümumiləşmiş statistik qiymətlər alınmışdır (bax, [6]) və bu sta-
tistik qiymətlər (2) ilə müqayisədə daha effektivdir. Xüsusi
strukturlu Ξ matrislər üçün (qiymətləndiriləcək parametrlərin
çox olmayan sayı deqiqliyi ilə təyin olunan)

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = [X^T (\hat{\Xi}^{(k)})^{-1} X]^{-1} X^T (\hat{\Xi}^{(k)})^{-1} Y$$

şəklində çoxaddımlı sxemlərə baxılır, burada $\hat{\Xi}^{(k)}$ statistik qi-
ymətləri hər dəfə $\Delta^{(k)} = Y - X\hat{\theta}^{(k)}$ regression qalıqların analizi
əsasında alınır. Bu şəkildə daha çox araşdırılmış sxemlərdən
biri psevd əsillənməyən regressiyalar sxemidir (bu sxem
[1]-də daxil olunmuşdur; bax, [7]). Belə məsələlər zaman sıra-
ları nəzəriyyəsində geniş yayılmışdır – ARMAX – modelləri (bax,
[8]).

Paylanmış laqlarla xətti modellərdə (2) tipli statistik qiymətlərə
çox diqqət yetirilir və bu laqlarda bu statistik qiymətlər hətta asim-
ptotik effektiv belə olmur; bu xassələr $\hat{\Xi}$ statistik qiymətinin
qurulması qaydasından olduqca asılı olur (bax, məs., [9]).

Əd.: [1] Zellner A., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1962, v. 57,
p. 348–68; [2] James G. S., «Biometrika», 1951, v. 38, p. 324–29;
[3] Rao C. R., «Proc. 5-th Berk. Symp. Math. Stat. Probab.», 1967,
v. 1, p. 355–72; [4] Hannan E. J., «Econometrica», 1976, v. 44,

№ 4, p. 713–23; [5] Шалаевский О. В., «Тр. Матем. ин-та
АН СССР», 1968, т. 104, с. 189–214; [6] Макшанов А. В., «Зап.
науч. сем. ЛОМН», 1979, т. 85, с. 137–57; [7] Шалаев-
ский О. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 3, с. 565–69;
[8] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М.,
1981; [9] Анализ авторегрессий. Сб. ст., пер. с англ., М., 1978.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU məhdud-
diyyətlərlə «**наименьших квадратов метод**
с ограничениями; **constrained least squares**
method» – *ən kiçik kvadratlar metodu* ilə nöqtəvi qiymət-
ləndirmə məsələsində qiymətləndirilən parametrlin məqbul qi-
ymətləri çoxluğuna məhdudiyyətlər olduğu halda statistik prose-
durlar toplusudur. Məhdudiyyətlər formaları xətti (kvadratik) tən-
liklər və ya bərabərsizliklər şəklində olduğu hallar daha tam su-
rətdə araşdırılmışdır ki, bu hallar, məs., qiymətləndirilən para-
metrlin məqbul qiymətləri çoxluğunun qəbənqılığı, parametrlin
qiymətləndirilən funksiyasının müsbət və ya monotonluğu kimi
şərtlər nəticəsində yaranır.

Fərz olunur ki, n – ölçülü ölçmələr vektoru $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$

$$Y = X\theta + \varepsilon \quad (1)$$

xətti modelinə tabedir, burada X , – $p \leq n$ rəngli, $(n \times p)$ –
dim. – ölçülü məlum matrisdir, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ isə qeyri – kor-
relyar təsadüfi xətlərin ele vektorudur ki, $M\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2$,
 $i = 1, \dots, n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ məhdudiyyətini ödəyən naməlum
 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ parametrini *ən kiçik kvadratlar metodu* ilə

qiymətləndirmək tələb olunur. Uyğun $\hat{\theta}$ statistik qiyməti bəzən
restriktiv statistik qiymət adlanır,
 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)^T$.

Bərabərlik şəklində xətti məhdudiyyətlər.
Fərz olunur ki, məhdudiyyət

$$H\theta = b \quad (2)$$

bərabərliyi şəklindədir, burada H , – $m \leq p$ rəngli, $(m \times p)$ –
dim. – ölçülü matris, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ – məlum vektordur. Bu
həndəsi olaraq onu ifadə edir ki, naməlum θ vektoru $\mathbb{R}^p$ -də
(2) tənliyi ilə verilən, m – ölçülü hiperüstəvidəndir. Bu
halda, (2) məhdudiyyətlərində, uyğunluq normasını minimallaş-
dıran $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)^T$ statistik qiyməti

$$\hat{\theta} = \hat{\theta} + (X^T X)^{-1} H^T S (b - H\hat{\theta}) \quad (3)$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $S = [H(X^T X)^{-1} H^T]^{-1}$ və
 $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, – θ vektorunun Ə. k. k. m. ilə təyin olunan

adi (məhdudiyyətlərsiz) statistik qiymətidir (bax, [1]–[3]). $\hat{\theta}$
statistik qiyməti (2) şərtini ödəyən xətti meylsiz statistik qiymətlər
sinfində effektiv statistik qiymətdir. Onun kovariasion matrisi –
 $\text{cov}\hat{\theta} = V[\mathbf{I} - H^T S H (X^T X)^{-1}]$ bərabərliyi ilə ifadə olunur,
burada $V = \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \text{cov}\hat{\theta}$. σ^2 üçün meylsiz statistik
qiymət

$$s^2 = \frac{1}{n-p+m} (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. $\hat{\theta}$ üçün rekurrent formada düsturlar (həm də X və H tam rəngli matrislər olmadığı hallarda) [5]-də verilmişdir.

Bərabərsizliklər şəklində xətti məhdudiyyətlər.

Məhdudiyyətin

$$H\theta \leq b$$

şəklində olduğu fərz olunur, yəni

$$(H\theta)_i \leq b_i, \quad i=1, \dots, m. \quad (4)$$

Uyğun $\hat{\theta}$ statistik qiyməti yeganə surətdə təyin olunur və yaxud əgər $\hat{\theta}$ üçün bütün (4) bərabərsizlikləri ödənirsə, $\hat{\theta}$ -nın Ə. k. k. m. üzrə adi statistik qiyməti ilə üst-üstə düşür, ya da ki, $(H\theta)_i = b_i$ hipermüstəvilərinin heç olmasa birində olur, yəni (4) bərabərsizliklərindən heç olmasa birini bərabərliyə çevirir. Bununla bağlı olaraq, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti sıfırdan fərqli ehtimalla sərhəd qiymətlərini alır və meylsiz statistik qiymət olur (bax, [5]). Xətanın tam kvadratının müqayisəsi üçün kriteri kimi

$$\mathbf{M}[(\hat{\theta} - \theta)^T (\hat{\theta} - \theta)] = \sum_{j=1}^p \mathbf{D}\hat{\theta}_j + \sum_{j=1}^p [\mathbf{M}(\hat{\theta}_j - \theta_j)]^2$$

bərabərliyini istifadə etdikdə, (4) məhdudiyyətlərini nəzərə alma-

dan hesablanmış adi Ə. k. k. m. statistik qiyməti $\hat{\theta}$ restriktiv statistik qiymətdən daha əlverişli ola bilər (bax, [5]).

Xətti və qeyri – xətti modellər və həm də xətti və qeyri – xətti məhdudiyyətli sistemlər hallarında restriktiv statistik qiymətlərin qurulması üçün hesablama alqoritmləri tapılmışdır (bax, [6], [7]). Xətti modellər və (4) tipli məhdudiyyətlər, həm də bunların bəzi ümumiləşmələri üçün uyğun restriktiv statistik qiymətləri rekurrent formada almaq olur (bax, [8], [9]).

Əd.: [1] Chipman J. S., Rao M. M., «Econometrika», 1964, v. 32, № 1–2, p. 198–209; [2] Liew C. K., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1976, v. 71, № 355, p. 746–51; [3] Rao C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [4] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессии, М., 1981; [5] Алберт А., Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [6] Бард Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [7] Лусон Ч., Хенсон Р., Численное решение задач метода наименьших квадратов, пер. с англ., М., 1986; [8] Оценивание в условиях неопределенности. Свердловск, 1982; [9] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989.

ƏN SADƏ NÖQTƏVİ PROSES « простейший точечный процесс; simplest point process » – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi*.

ƏN SELEKTİV ETİBARLI ÇOXLUQ « наиболее селективное доверительное множество; most selective confidence set » – bax, *Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

«ƏN YAXIN QONŞU» ALQORİTMİ « «ближайшего соседа» алгоритм; nearest neighbour algorithm » – *iyerax prosedurun təsnifatının xüsusi halıdır*;

iki sinif arasında yaxınlıq ölçüsünün bu siniflərin ən yaxın obyektləri arasında yaxınlıq ölçüsü kimi təyin olunması ilə səciyyələnilir.

ƏN YAXIN ÜMUMİ ƏCDAD « ближайший общий предок; nearest mutual ancestor » – *şaxələnlənən prosesdə* elə hissəcikdir ki, verilən andaki bütün hissəciklərin əcdadı olduğu halda onun varislərindən heç biri bu xüsusiyyətə malik olmur. Ə. y. ü. ə. anlayışı və onun ümumiləşməsi – *redüslənmiş şaxələnlənən proses – şaxələnlənən təsadüfi meydanların* öyrənilməsində istifadə olunur. Ə. y. ü. ə.-in bölmə anı üçün ilk limit teoremləri [1], [2]-də alınmışdır.

Əd.: [1] Fleischmann K., Prehn U., «Math. Nachr.», 1974, Bd 64, S. 357–62; [2] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 614–23; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67.

ƏN YAXŞI XƏTTİ MEYLSİZ STATİSTİK QIYMƏT « наилучшая линейная несмещенная оценка; best linear unbiased estimator, BLUE » – bax, *Xətti statistik qiymət* ən kiçik dispersiyalı.

ƏN YAXŞI XƏTTİ PROQNOZ « наилучший линейный прогноз; best linear prediction » – bax, *Təsadüfi proses; kanonik ifadə*.

ƏNGƏLƏDAYANIQLILIQ « помехоустойчивость; noise immunity » – *əngəllərin təhrifedici təsirinin aradan qaldırılmasında sistemin informasiya ötürmə qabiliyyətini xarakterizə edən texniki termindir. Optimal ötürmə metodu üçün mümkün qədər alına bilən Ə. çox vaxt potensial əngələdavamlılıq* adlandırılır. *Informasiya ötürmənin konkret sisteminin əngələdayanıqlılığı informasiya nəzəriyyəsində məlumatların bərpaulunma dəqiqliyi* ilə xarakterizə olunur, məs., ötürülən *məlumatın səhv dekodlama* ehtimalı ilə bərpa olunması halında. Təbiiqlərdə informasiyanı ötürmə sisteminin Ə.-i *siqnal / küy nisbəti (əmsalı)* ilə də xarakterizə olunur.

Əd.: [1] Витерби Э., Омурра Д. К., Принципы цифровой связи и кодирования, пер. с англ., М., 1982; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

ƏNGƏLƏDAYANIQLI STATİSTİK QIYMƏT « помехоустойчивая оценка; robust estimator » – bax, *Robast statistik qiymət*.

ƏNGƏLLƏYİCİ PARAMETR « мешающий параметр; nuisance parameter » statistik məsələdə – müşahidələrin paylanması asılı olduğu naməlum parametrdir, lakin verilən məsələdə bu parametirin qiymətinə görə statistik nəticələrin çıxarılması tələb olunmur. Məs., normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin orta qiyməti haqqında Student hipotezinin yoxlanılması məsələsində müşahidələrin dispersiyası Ə. p.-dir; normal paylanma qanununa tabe iki seçimin orta qiymətlərinin bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılmasının *Berens – Fişer problemində* müşahidələrin dispersiyaları Ə. p.-lərdir. Naməlum parametrlərin bir hissəsinin qiymətləndirilməsi məsələsində digər parametrlər Ə. p.-lər hesab olunur; bu, qiymətləndirmə nəzəriyyəsində belə qəbul olunmuşdur. Ə. p.-lər sonsuzölçülü obyektlər də ola bilər, məs., asılı olmayan $y_i = a + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ müşahidələri üzrə a parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsində $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ xətlərinin birgə paylanması Ə. p. (sonsuzölçülü) ola bilər.

Ə. p.-lərli məsələlərdə belə parametrlərin müxtəlif xaricetmə metodlarından istifadə olunur. Bəzən qeyri – asimptotik məsələ-

lərdə şərti məsələlərə keçiddən (bax, məs., *Şərti kriteri*) istifadə olunur; bu zaman statistik nəticələr, şərti paylanmanın parametrlərinə nəzərən şərti məsələdə, yəni Θ . p. üçün məqbul statistikanın verilmiş (müşahidə olunmuş) qiymətində alınır.

Digər hallarda əvvəlcədən paylanmaları Θ . p.-lərdən asılı olmayan statistikalara əsaslanan prosedurlarla (sərbəst prosedurlar adlandırılan) kifayətlənilir.

Asimptotik məsələlərdə Θ . p.-i xaric etmə məqsədilə bəzən, seçimdən və Θ . p.-in naməlum qiymətindən asılı təsadüfi kəmiyyətlər qurulur ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərin asimptotik paylanmaları Θ . p.-dən asılı olmur və Θ . p.-i onun statistik qiyməti ilə əvəz etdikdə o dəyişmir (bax, məs., *Statistik kriteri* $C(\alpha)$).

Θ . p. anlayışını H. Hotelling [1]-də daxil etmişdir.

Əd.: [1] Hotelling H., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, № 3, p. 271–83; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Линник Ю. В., Избранные труды. Математическая статистика, Л., 1982, с. 217–32; [4] Basu D., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1977, v. 72, № 358, p. 355–66;

[5] Basu D., «J. Statist. Plann. and Inference», 1978, v. 2, № 1, p. 1–13.

ƏSAS BƏRPA TEOREMİ « основная / узловая / ключевая теорема восстановления; **key renewal theorem** » – bax, *Bərpa teoremi*.

ƏSAS HİPOTEZ « основная гипотеза; **null hypothesis** » – bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

ƏVƏZETMƏ / PERMUTASIÖN / YERDƏYİŞMƏ təsadüfi / substision « подстановка случайная; **random permutation substision** » – bax, *Təsadüfi əvəzetmə*.

ƏYRİ XƏTLİ STOXAŞTİK İNTEQRAL « криволинейный стохастический интеграл; **stochastic curve integral** » – bax, *Stoxastik integral təsadüfi meydanda əyri üzrə*.



FAKTOR « фактор; factor » – bax, *Faktor eksperiment*.

FAKTOR ANALİZ « факторный анализ; factor analysis » – çoxölçülü statistik analizin ele bölməsidir ki, özündə

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

xətti modelinin qurulması ilə bağlı məsələlərin riyazi – statistik həlli metodlarını birləşdirir, burada $\mathbf{x}$ – müşahidə olunan kəmiyyətlərin $(p \times 1)$ – ölçülü təsadüfi vektoru, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{x})$,

$\mathbf{M}[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ – müşahidə olunan kəmiyyətlər üzərinə qoyulan ümumi faktorların yüklərinin naməlum $(p \times m)$ – matrisi, $\boldsymbol{\xi}$ – müşahidə olunmayan təsadüfi, ümumi faktorların $(p \times m)_x$ – vektoru ($m \ll p$), $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}^T) = 0$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T) = \mathbf{I}$ (bəzən $\boldsymbol{\xi}$ – normalanmış, qarşılıqlı ortoqonal, naməlum, təsadüfi olmayan parametrlərin vektoru kimi də interpretasiya olunur), $\boldsymbol{\varepsilon}$ – təsadüfi $(p \times 1)$ – xətlər vektoru (və ya da spesifik faktorlar vektoru da adlanır), $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}^T) = 0$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \boldsymbol{\Psi}$, burada $\boldsymbol{\Psi}$ naməlum diaqonal kovariasion matrisdir. F. a.-in (1) modelindən aydındır ki,

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T + \boldsymbol{\Psi}. \quad (2)$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ və $\boldsymbol{\Psi}$ parametrləri bütün müşahidələr üçün eynidir və bunlar struktur parametrləri adlanır, $\boldsymbol{\xi}$ vektorunun $\mathbf{x}$ təsadüfi vektorunun ayrı-ayrı müşahidə qiymətləri ilə eləqədar qiymətləri təsadüfi parametrlər adlanır. $m > 1$ olduqda $\boldsymbol{\Lambda}$ üzərinə $[(1/2)m(m-1)]$ sayda asılı olmayan məhdudiyyətlər qoymaq zəruridir, əks halda onun elementləri təyin olunmur, belə ki, (1)-də $\boldsymbol{\Lambda}$ -nı $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}$ ilə, $\boldsymbol{\xi}$ -ni isə $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{T}^T\boldsymbol{\xi}$ ilə əvəz etmək olar və (2) münasibəti doğru olaraq qalır. Beləliklə, $\boldsymbol{\Lambda}$ ortoqonal fırlanma dəqiqliyi ilə təyin olunur. Bu qeyri – müəyyənlik bir sıra fırlanma kriteriləri (bax, [1]) ilə aradan qaldırılır və bu halda bu kriterilərə F. a. modelinə qoyulan məhdudiyyətlər kimi baxmaq olar.

F. a. modellərinin qurulması ilə bağlı əsas məsələlər modelin varlığı və identifikasiyası (yeganəliyi), naməlum parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi, yeganəliyin algoritmik təyin edilməsi kimi məsələlər, həmçinin müşahidə verilənlərinə modelin adekvatlığı haqqında hipotezlərin statistik yoxlanılması, struktur parametrlərinin qiymətləri haqqında məsələlərdir.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcılığı olsun və bunların seçimi verilənləri və ya seçimi ifadə etdikləri fərz olunur. $\boldsymbol{\mu}$ və $\boldsymbol{\Xi}$ üçün statistik qiymətlər kimi uyğun olaraq,

$$\bar{\mathbf{x}}^T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{və} \quad S = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$$

götürülür. Struktur parametrlər matrislərinin qiymətləndirilməsi proseduru $\tilde{S} = \tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}^T + \tilde{\Psi}$ matrislər sinfində S matrisinin «ən yaxşı» approksimasiyasının axtarışı kimi anlaşılmalıdır [burada $\tilde{\Lambda}$, – $(p \times m)$ – matris, $\tilde{\Psi}$ – dəyişənlərin diaqonal $(p \times p)$ – matrisidir], «ən yaxşı» approksimasiya hər hansı seçilmiş məsafə funksiyasının və ya approksimasiya funksiyası $\mu(S; \tilde{S})$ -in minimizasiyası mənasında anlaşılar. Bu sonuculara aid misallar uyğun olaraq: $[\text{tr}(S - \tilde{S}^2)]^{1/2}$ və $\text{tr}(S\tilde{S}^{-1}) - \ln|\tilde{S}\tilde{S}^{-1}| - p$ olur. Onda verilən $\boldsymbol{\mu}$ üzrə $\boldsymbol{\Psi}$ üçün statistik qiyməti

$$\mu(S; \hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mu) = \inf_{\boldsymbol{\Psi} \in \mathfrak{A}_p} \mu(S; \boldsymbol{\Psi})$$

münasibətini ödəyən $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mu: \mathfrak{S}_p^\mu \rightarrow \mathfrak{A}_p$ inikası kimi təyin etmək olar, burada $\mathfrak{S}_p$ – həqiqi simmetrik müsbət müəyyən $(p \times p)$ – matrislər çoxluğu, $\mathfrak{A}_p$ – diaqonal $(p \times p)$ – matrislər çoxluğu,

$$\mu(S, \tilde{\boldsymbol{\Psi}}) = \sum_{i=k+1}^{k+p-m} f(g_i),$$

$f(x)$ – hər hansı kəsilməz ciddi çökük ele funksiyadır ki, ikinci tərtib də daxil olmaqla ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri vardır, $x=1$ nöqtəsində minimum qiymətini alır və

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{H}\mathbf{G}, \quad \mathbf{H}^T\mathbf{S}\mathbf{H} = \mathbf{I} \quad (3)$$

probleminin ümumi məxsusi qiymətlərinin spektrində təyin olunmuşdur, burada $\mathbf{G}$ – elementləri $g_1 \geq \dots \geq g_p$ olan ümumiləşmiş məxsusi qiymətlərin diaqonal $(p \times p)$ – matrisidir, $\mathbf{H}$ – uyğun, ümumiləşmiş məxsusi vektorlar matrisidir, k isə $f(g_k) > f(g_{k+p-m})$ bərabərsizliyi ödəyən ən böyük tam qiymətə bərabərdir. $\boldsymbol{\mu}$ üzrə $\boldsymbol{\Lambda}$ -nın statistik qiyməti $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\mu = \mathbf{S}\mathbf{H}_1(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1)^{1/2}$ ifadəsilə təyin olunur, burada $\mathbf{G}_1$ – elementləri $g_1 \geq \dots \geq g_k \geq g_{k+p-m+1} \geq \dots \geq g_p$ olan diaqonal $(m \times m)$ – matrisdir, $\mathbf{H}_1$ isə (3) probleminin uyğun məxsusi vektorlarının $(p \times m)$ – matrisidir və $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ bu halda $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mu$ ilə əvəz olunur. Onda model üçün yalnız $\boldsymbol{\Xi}$ matrisinin varlığı və yeganəliyi halında ($\mathbf{x}$ -in paylanması haqqında fərziyyələrsiz) $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\mu$ və $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mu$ statistik qiymətləri ciddi tutarlı statistik qiymətlərdir (yeni $N \rightarrow \infty$ olduqda uyğun olaraq $\boldsymbol{\Lambda}$ və $\boldsymbol{\Psi}$ -yə vahid ehtimalla yığılırlar). $2m > p$ şərtində F. a. modeli identifik olmur.

Modelin identifikasiyası üzrə əsas nəticələr (modelin yeganəliyi üçün zəruri və kafi şərtlər) sistemləşdirilmişdir (bax. [4], [5]). Beləliklə, Λ və Ψ -nin qiymətləndirilməsi məsələsinin həlli (3) ümumiləşmiş məsələsinin öz məxsusi qiymətlərində optimizasiyasına gətirilir. Optimizasiya kriterisi hər hansı seçilmiş, μ -dən asılı funksiya, dəyişənlər – $\tilde{\Psi}$ matrisinin p diaqonal elementləridir. Praktiki optimizasiya çoxdəyişənli funksiyanın EHM-dan istifadə olunmaqla iterativ metodlarla minimallaşdırılması ilə həyata keçirilir. $x \sim N_p(\mu, \Xi)$ olduğu fərz olunanda Ψ üçün ümumiləşmiş ən kiçik kvadratlar metodu və maksimal doğrulaoxşarlıq metodu ilə tapılmış statistik qiymətlər məhz $\hat{\Psi}_\mu$ -nün qiymətləri olur və bu qiymətlərdə uyğun olaraq,

$$\mu = \sum_{i=k+1}^{k+p-m} (g_i^{-1} + \ln g_i - 1)$$

və

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{k+p-m} (1 - g_i)^2$$

funksiyalarının minimumları alınır. Ayrıca x_0 müşahidəsi ilə əlaqədar olan ξ_0 vektorunun şərti riyazi gözleməsi və kovariasion matrisinin tutarlı statistik qiymətləri məhz uyğun olaraq $\Lambda_\mu^T S^{-1}(x_0 - \bar{x})$ və $(1 - \hat{\Lambda}_\mu^T S^{-1} \hat{\Lambda}_\mu)$ -yə bərabərdir.

F. a., adətən, birincisi, müşahidə olunan dəyişənlər fəzasının dim. – ölçüsünün kiçildilməsi məqsədilə informasiyanın konvolysiya metodu kimi, ikincisi, xətlər variyasiyasını nəzərə almayan müşahidələr matrisinin variasiya mənbələrinin bölüşdürülməsi metodu kimi, üçüncüsü, müşahidələrin təsnifi metodu kimi istifadə olunur. F. a. psixologiya, sosiologiya, təbiiat, coğrafiya və s. kimi oblasatlarda tətbiq olunur (bax, məs., [1] – [3]).

Əd.: [1] Харман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., М., 1972; [2] Окунь Я., Факторный анализ, пер. с польск., М., 1974; [3] Иберла К., Факторный анализ, пер. с нем., М., 1980; [4] Anderson T. W., Rubin H., «Proc. 3-rd Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1956, v. 5, p. 111–50; [5] Tsumura Y., Sato M., «TRU Math.», 1980, v. 16, № 2, p. 121–31; [6] Банныков В. А., в кн.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа, М., 1980, с. 208–32.

ФАКТОР АНАЛИЗ; modelin identifikasiyası « факторный анализ; идентификация модели; identification of a model of factor analysis » – faktor analiz modelinin qurulması ilə əlaqədar əsas məsələlərdən birinin həllidir və $\Xi = \Lambda \Lambda^T + \Psi$ tənliyinin Λ və Ψ struktur parametrləri matrislərinə nəzərən həllinin varlığı fərz olunduğu halda, faktor yüklərinin ($p \times m$) – matrisi Λ üzərinə qoyulan ələ zəruri və kafi şərtlərin təyin olunmasından ibarətdir ki, bu həll Λ matrisinin m tərtib ixtiyari ortoqonal T matrisinə sağdan vurulma dəqiqliyi ilə yeganə olsun.

Bax, Faktor analiz.

ФАКТОР АНАЛИЗ; sxemlər « факторный анализ; схемы; factor analysis models » – faktor analizin müxtəlif sxemləridir, o cümlədən, baş komponentlər analizi (BKA), əsas faktor analiz (ƏFA), kanonik faktor analiz (KFA), alfa – faktor analiz (AFA). Bu sxemlər onun xüsusi halları olan modelə aşağıdakı kimi təsvir olunur.

$y^T = (y_1, \dots, y_n)$ – komponentlərinin hamısının riyazi gözlemələri sıfıra bərabər, dispersiyaları isə sıfırdan fərqli olan təsadüfi vektor olsun. Fərz olunur ki, $y = c + s + l$, burada $c = Fx$, $My = Ms = Ml = Mc$, $n \times r$ – ölçülü təsadüfi olmayan F matrisi ümumi faktorların yüklər matrisi adlanır (rus. матрица нагрузок). Fərz olunur ki, $Mx = 0$, $Mxx^T = I$. Ümumi faktorların təsadüfi vektoru x , spesifik faktorlar vektoru s , xətlər vektoru l -in ortoqonal vektorlar olduğu, $Mxs^T = 0$, $Mxl^T = 0$, $Msl^T = 0$ fərz olunur. $y = t + l$, $y = c + u$ mümkün ola bilən ifadələrdir, burada $t = s + c$, $u = s + l$; t – əsl qiymətlər vektoru, u – individual faktorlar vektoru adlanır.

Fərz olunur ki,

$$C = Myy^T, C_c = Mcc^T = FF^T,$$

$$C_t = Mtt^T, S^2 = Mss^T, E^2 = Mll^T,$$

$$U^2 = Muu^T = S^2 + E^2;$$

və

$$V = \text{diag } C, H^2 = \text{diag } C_c,$$

$$T^2 = \text{diag } C_t = H^2 + S^2, C_0 = C - V.$$

D^2 – baş diaqonal elementləri müsbət olan diaqonal matris olsun. Yuxarıda təsvir olunan matrislər arasında bu və ya digər münasibətlərin müəyyənəşdirilməsi ilə əlaqədar olan F. a. məsələləri $w = (w_1, \dots, w_n)$ vektorunun qiymətləri fəzasında

$$\lambda = (w^T C_c w) / (w^T D^2 w)$$

kvadratik formalar nisbetinin ekstremal nöqtələrinin təsvirinə gətirilə bilər. Bu məsələləri hər hansı matrisin məxsusi qiymətlərinin və məxsusi vektorlarının təsvirinə gətirmək olar. Əgər $D^2 = V^2$, $D^2 = U^2$, $D^2 = H^2$ götürülərsə, uyğun olaraq, ƏFA, KFA, AFA sxemləri alınır.

BKA sxemi

$$\lambda_c = (w^T C w) / (w^T V^2 w)$$

kvadratik formalarının nisbetinin öyrənilməsinə gətirilə bilər. Bir çox hallarda KFA daha üstün sxem hesab olunur. Fərz olunur ki, yuxarıda təsvir olunan bütün matrislər ya tamamilə məlumdurlar, ya da ki, seçim üzrə qiymətləndirilir.

Əd.: [1] McDonald P. P., Roderich P., «Brit. J. Math. and Statist. Psychol.», 1970, v. 23, № 1, p. 1–21.

ФАКТОР ÇOXLUQ « факторное множество; factor set » – bax, Faktor eksperiment.

ФАКТОР ЕКСПЕРИМЕНТ « факторный эксперимент; factor experiment » – faktor modellərin öyrənilməsi üçün *reqression eksperimenti*. Belə modellərə *dispersion analizin* ələ tipli məsələləri gətirilir ki, bu məsələlərdə məhsuldarlığın torpaqların tiplerindən və bunların becərilməsindən asılılığı statistik araşdırılır (bax, Blok plan, F. e.-də torpaqların tipləri və onların becərilməsi eyni hüquqlu, əsl olmayan dəyişənlər kimi fərz olunur, lakin blok plan nöqtəyi – nəzərinə sınaqlar aparılan hissələrdə torpaqların müxtəlifliyi onların qeyri – bircins olması səbəb kimi anlaşıldı və bu səbəbin

eksperiment nəticələrinə təsirini mümkün olduqca aradan qaldırmaq tələb olunurdu). Qeyd olunan asılı olmayan dəyişənlər (torpaqların tipləri, onların becərilməsi qaydaları), başqa bir çox dəyişənlər kimi, mahiyyət etibarilə, təbii olaraq, kəmiyyətə təsvir olunmur və buna görə də, bunlar *keyfiyyət dəyişənləri* adlandırılır (kəmiyyət dəyişənlərindən, məs., istifadə olunan gübrələrin miqdarı kimi dəyişənlərdən fərqli olaraq). Keyfiyyət dəyişənlərinin qiymətlərini faktorlar vasitəsilə təsvir etmək münasibdir. Əgər i -ci dəyişən s_i qiymətlərindən birini ala bilərsə, onda bunlar müxtəlif $I_1, \dots, I_{s_i}$ ədədləri

ilə (adətən, tam olan) nömrələnir və bu halda deyilir ki, F_i faktorunu təcrübə zamanı I_{ik} səviyyəsindədir, bu isə belə anlaşılır ki, i -ci dəyişən bu səviyyədə ala biləcəyi qiymətlərdən k -cısını almışdır; bu təsvir qaydası kəmiyyət dəyişənləri üçün də yararlıdır. F. e.-də faktorların sayının sonlu olduğu fərz olunur; hər bir faktor sonlu sayda səviyyəyə malik olur (ümumiyyətlə, faktordan faktora keçdikcə dəyişən).

F. e.-in R. Fişer tərəfindən tarixən daxil olunması və öyrənilməsi (ciddi tərifsiz olmasına baxmayaraq) *eksperimentin planlaşdırmasının* müasir nəzəriyyəsi üçün zəruri olmuşdur. Hal-hazırda «F. e.» termini üçün vahid anlamın olmadığını hesab etmək olar. Bir çox müəlliflər F. e.-in səciyyəvi cəhətlərini sınaqdan sınağa keçdikdə eyni zamanda bir neçə faktorun dəyişməsi kimi hesab edirlər. Bu hal F. e.-i R. Fişerin işlərinə qədərki klassik eksperiment adlandırılan eksperimentlərdən onunla fərqləndirir ki, bu halda hər hansı sınaqlar seriyasında yalnız bir faktorun səviyyələri dəyişir, digərlərinin səviyyələrinin isə dəyişməz qaldığı fərz olunur. F. e.-in təbiiqə araşdırmalar üçün vaxtın azalmasını təmin edərək (bu, məs., aqrobioloji sınaqlar üçün xüsusilə mühümdür), bir qayda olaraq, alınan statistik qiymətlərin dəqiqliyini artırmağa, həmçinin müxtəlif faktorların qarşılıqlı təsirini qiymətləndirməyə (bax, aşağı) imkan yaradır.

Təbiiq olunan faktor modelinin tipi eksperimentator tərəfindən postulatlaşdırılır və ya uyğun hipotezlərin statistik müqayisəsi yolu ilə təyin olunur. Ən sadə – xətti – model yuxarıda məhsuldarlıq haqqında baxılan məsələ üçün aşağıdakı şəkildədir:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha x_{1i} + \beta x_{2j} + \varepsilon_{ijk},$$

burada y_{ijk} – k -cı təcrübədə öyrənilən faktorlar uyğun olaraq, x_{1i} və x_{2j} qiymətlərini aldıqda məhsuldarlığı ifadə edən kəmiyyətdir, ε_{ijk} – təsadüfi xətdir, belə ki, adətən, fərz olunur ki,

bunlar riyazi gözləmələri sıfıra bərabər, dispersiyası σ^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. α və β parametrləri uyğun faktorların səviyyələrinin əsl effektləri, μ ümumi orta qiymət adlandırılır. n sayda iki səviyyəli faktorlar halında xətti model aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$y = \mu + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \varepsilon.$$

Müxtəlif faktorların qarşılıqlı təsirini də nəzərə alan daha mürəkkəb modellərdə y -in ifadəsinə bir neçə faktorun səviyyələrinin kombinasiyaları ilə təyin olunan toplananlar da əlavə olunur. Baxılan misal üçün belə model aşağıdakı şəkildə olur:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha x_{1i} + \beta x_{2j} + \gamma x_{1i}x_{2j} + \varepsilon_{ijk}.$$

γ parametri – ikifaktorlu qarşılıqlı təsir effekti adlanır. μ , α , β , γ parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi də bu halda F. e.-in məqsədi olur.

Struktur nöqtəyi – nəzərdən ən sadə F. e. – tam F. e.-dir və bu eksperiment faktorların səviyyələrinin bütün mümkün kombinasiyalarına uyğun sınaqlardan ibarət olur. n sayda ikisəviyyəli

faktorlar halında eksperiment 2^n sayda sınaqdan ibarət olur (bunların təkrarlanmayan sınaqlar olduğu fərz olunur). Tam F. e. həm əsas effektləri, həm də bütün tərtibdən olan faktorların qarşılıqlı təsir effektlərini qiymətləndirməyə (əgər bunlar seçilmiş modeldə nəzərə alınrsa) imkan verir. Tam F. e. bir sıra optimallaşdırma xassələrinə malikdir (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin* həm də [1] – [3]), onun nəticələrinin yenidən statistik işlənilməsi olduqca sadədir.

Tam F. e.-in çatışmayan cəhəti onun üçün aparılan sınaqlar sayının çox olmasıdır. Buna görə də, sınaqların sayı az olan F. e.-in planlarını qurmağa müvəffəq olmaq mühümdür (belə planlar *kəşri planlar* adlanır (rus. *дробные планы*), lakin bununla belə bu planlar seçilmiş modelin parametrlərinin statistik qiymətlərini təyin etməyi təmin edir. Belə növ mühüm metod *qarışdırma* metodudur. Bu üsulun məzhi ondan ibarətdir ki, F. e. elə sınaqlardan təşkil olunur ki, bu sınaqlar parametrlərin bəzi xətti funksiyalarının toplam statistik qiymətlərini qurmağa imkan verir, bu şərtlə ki, bu funksiyalardan hər birinə qiymətləndiriləcək effektlərdən ən çox biri daxil ola bilər. Əgər bu halda qiymətləndirilməyən effektlər sıfır effektlər kimi hesab olunarsa, onda maraq kəsb edən parametrlər üçün statistik qiymətlər alınır. Tam F. e.-lə müqayisədə sınaqlar sayının azaldılması olduqca əhəmiyyətli ola bilər. Məs., xətti n – faktorlu model üçün bu sayı 2^n -dən $(n+1)$ -ə qədər azaltmaq olur

(adətən, 2^{n-p} sınaqdan ibarət kəşri F. e.-lər istifadə olunur ki, bu halda $2^{n-p} \geq n+1$ olur). Qarışdırma proseduru münasib cəbriləşməni mümkün edir. Doğrudan da, effektlərin qiymətləndiriləcək xətti funksiyalarının qurulması üçün hər bir qayda ilə hər hansı sonlu Abel qrupu əlaqələnilir; bu funksiyalar, Abel qrupunun elementləri arasında, aparılmış qarışdırma haqqında bütün informasiyanı özündə saxlayan münasibətləri təyin edir.

F. e.-in parametrlərinin xətti əvəzlənməsi tez-tez tələb olunduğundan (məs., parametrlər üçün eyniliklərin doğruluğunda, bax, *Aprior informasiyadan istifadə*), həmçinin kəmiyyət faktorlarının bir hissəsinin məlum olduğu halında F. e.-in daha ümumi şəkildə ifadə olunması səmərəlidir. Məs., faktorların səviyyələrinin effektlər vektoru ilə yanaşı, onun cəmiyyətin xətti çevirmələri mühüm hesab olunur, bu xətti çevirmələrin hər biri *baş effektlər vektoru* adlanır.

Müxtəlif faktorlar halında (hər hansı ω çoxluğundan) əsas effektlər vektorunun ixtiyari komponentlərinin bir-birinə vurulması ilə faktorların qarşılıqlı təsir effektlərinin toplusu alınır (bax, *Faktorun baş effekti, Faktorların qarşılıqlı təsir effekti*). F. e.-in regressiya funksiyası əsl əsas effektlərin və bəzi qarşılıqlı təsir effektlərinin bütün komponentlərinin xətti formasıdır. Hətta bu regressiya funksiyasına faktorların A altçoxluqlarının qarşılıqlı təsir effekti də daxil olursa, onda o, ixtiyari $B \subset A$ altçoxluğundan qarşılıqlı təsir faktorlar effektini də daxilinə alır.

Faktorların belə altçoxluqlarının toplusu F. e.-in *faktor çoxluğu* Ω adlanır (qeyd etmək olar ki, *Çəkilmə planı* məqaləsində təsvir olunmuş model faktor modeli deyildir, çünki, bu modeldə faktorların boş çoxluğuna müvafiq sərbəst həd yoxdur).

Bütün faktorların səviyyələri eyni olan F. e. – *simmetrik* və *müntəzəm* F. e. adlandırılır, bu şərtlə ki, ixtiyari x_i faktorunun bütün səviyyələri planda $n_i = N$ dəfə iştirak etmiş

olsunlar. $\omega_i(j)$ və $A = \{i_1, \dots, i_r\}$ üçün $\omega_A(j_1, \dots, j_r)$ – uyğun olaraq, x_i səviyyəsinin j -ci tezliyinin və $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ faktorlarının $j_1, \dots, j_r$ səviyyələri üzərində birgə müşahidənin tezliyinin işarələri olsun. Əgər bütün $A \in \Omega$ altçoxtluqları üçün

$$\omega_A(j_1, \dots, j_r) = \prod_{k=1}^r \omega_{i_k}(j_k) \text{ bərabərliyi ödənilərsə, F. e. -}$$

Ω üzərində *requlyar eksperiment*dir, deyilir.

F. e.-in Ω üzərində *requlyarlığı* Ω üzərində *esas effektlər* və *qarşılıqlı təsirlər* effektlərin cüt-cüt ortoqonal seçilməsi mümkünliyinə ekvivalentdir. s səviyyəli k sayda faktorun simmetrik müntəzəm *requlyar planı* (N, k, s, t) – *ortoqonal cədvəl* adlanır. Əgər r sayda faktorun bütün qarşılıqlı təsirlərini meylsiz qiymətləndirmək mümkün olarsa, plan $2r+1$ sayda *izn-vermə qabiliyyətinə* malikdir, deyilir. $r=1$ olduqda *esas effektlər planı* alınır.

Aşağıdakı hökm planlar və optimalıq kriterilərinin kombinator xassələri arasındakı asılılığı illüstrasiya edir (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*): *esas effektlərin requlyar müntəzəm planı* ξ^* , bu planın (ξ^* -nün) *düyün*lərində (və ya faktorlar *kəmiyyət faktorları* olduğu halda ξ^* -nün *düyün*lərini örtən *çoxölçülü kubda*) *daşıyıcıya* malik planlar içərisində D – *optimal* plandır. Çoxlu yaxın nəticələr vardır. İlkin olaraq *ortoqonal cədvəllər* *latin kvadratları*, *latin kubları* və s. kimi kombinator konstruksiyalar vasitəsilə qurulurdu (bax, *Ortoqonal kvadratlar*, *Ortoqonal kublər*). Sonradan bu cədvəllərin qurulması sonlu meydanlar nəzəriyyəsinin, sonlu həndəsələrin və sonlu proyektiv fəzaların metodlarını istifadə edən faktor planların *həndəsi nəzəriyyəsi* çərçivəsində ümumiləşdirilmişdir. Məs., 0, 1 və 2 qiymətlərini alan dörd sayda üçsəviyyəli faktorlar üçün *esas effektlərin həndəsi planı* setirləri $EG(4, 3)$ sonlu Evklid fəzasının $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \pmod{3}$ və $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \pmod{3}$ müstəvilərinin kəsişməsində yerləşən nöqtələrindən təşkil olunan aşağıdakı plan olacaqdır:

$$D = \{x_{ui}\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u = 1, \dots, 9 \\ i = 1, \dots, 4. \end{matrix}$$

Əgər x_{u3} və x_{u4} qiymətlərinə uyğun olaraq, 3 ölçülü iki kvadratin $x_{u1}+1$ nömrəli setri ilə $x_{u2}+1$ nömrəli sütununun kəsişməsindəki elementlər kimi baxılırsa, onda planın ənənəvi, iki ortoqonal latin kvadratları şəklindəki yazılışı alınır:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Həndəsi metodlar bir çox mühüm xüsusi hallar üçün eksperimentin effektiv planlarını qurmağa imkan verir. Ümumi halda, verilən Ω faktor çoxluğu üçün minimal sayda müşahidələrlə *həndəsi planın qurulması məsələsi* həll olunmamışdır.

Eksperimentlərin sayının azaldılması bəzi hallarda planlaşdırmanın *requlyarlığından* imtina edərək, daha az effektiv planlarla qanə olunmaqla nəticələnir. Qeyri – *requlyar planların qurulması* üçün işlənmiş ədədi metodlar müxtəlif kombinar cədvəllərin (məs., balanslanmış cədvəllərin) qurulmasına əsaslanmışdır.

Əd.: [1] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983, гл. 10–14; [3] Ермаков С. М., Жигляевский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [4] Raghavarao D., Constructions and Combinatorial problems in design of experiments, N. Y. – [a. o.], 1971; [5] Rактоё В. Л., Hedayat A., Federer W. T., Factorial designs, N. Y. – [a. o.], 1981.

FAKTOR MODEL « факторная модель; factor model » – bax, *Faktor eksperiment*.

FAKTORIAL MOMENT « факторный момент; factorial moment » – *təsadüfi kəmiyyətin* ədədi xarakteristikasıdır. Daha dəqiq, X *təsadüfi kəmiyyətin* m *tərtib* ($m \geq 1$ – tam ədəddir) *faktorial*

momenti – $X^{[m]} = X(X-1) \dots (X-m+1)$ *təsadüfi kəmiyyətin* riyazi gözləməsinə (əgər, bu riyazi gözləmə varsa) deyilir. F. m.-lər *təsadüfi kəmiyyətlərin momentləri* və əksinə, momentlər F. m.-lə ifadə oluna bilinirlər. Məs., birinci F. m. və riyazi gözləmə üst-üstə düşür, dispersiya $DX = MX^{[2]} + MX^{[1]} - (MX^{[1]})^2$ və s. F. m.-lər, bir qayda olaraq, tamqiymətli *təsadüfi kəmiyyətlər* üçün istifadə olunurlar və bu halda bunlar X *təsadüfi kəmiyyətinin* doğuran funksiyası $\psi(z)$ -in *töremələri* vasitəsilə ifadə olunur: $MX^{[m]} = \psi^{[m]}(1)$, burada $\psi^{(m)}(z)$, – $\psi(z)$ funksiyasının m -ci *tərtib* *töreməsidir*. Doğuran funksiya və F. m. vasitəsilə diskret paylanmalarla bağlı bəzi düsturlar kompakt şəkildə ifadə olunur.

Bax, *Təsadüfi proses; kəsilmələr*.

Əd.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

FAKTORIAL OXLARIN FIRLANMASI « факторных осей вращение; rotation of factorial axes » faktor analizdə – faktor yüklərinin ($p \times m$) – *matrisi* Λ -nın (bax, *Faktor analiz: sxemlər*) m *tərtib* *çirəlməyən* *həqiqi* T *matrisinə* sağdan vurulmasıdır; bu vurma ümumi faktorlar fəzasında (yeni Λ *matrisinin* *sütunlarının* *ilkin* p – *ölçülü* *fəzasında* m sayda vektorları altfəza kimi ötürmüş m – *ölçülü* *altfəzada*) yeni koordinat sisteminin (yeni *faktorial oxların*) seçilməsinə uyğun olur, bu isə ümumi faktorların ən yaxşı məzmunlu interpretasiyası məqsədilə edilir; onda $T^{-1}\xi$, – ($m \times 1$) – *vektoru* yeni

faktor oxlarında *nöqtənin* *koordinatlarını* verir (burada ξ – ümumi faktorların ($m \times 1$) – *vektordur*). Əgər T *ortoqonal* *matris* olarsa, F. o. f. *ortoqonal fırlanma*, əks halda isə *çəpbucaq fırlanma* adlanır. F. o. f. üçün iki yanaşma vardır, bu isə anlayışın cəbri və ya *həndəsi* *terminlərlə* ifadə olunması ilə bağlıdır. Birinci yanaşma *analitik* *metodlarla*, ikinci isə *oxların* *qrafik təsviri* ilə bağlıdır. [3]. [4]-də *ortoqonal* və *çəpbucaq fırlanmalarının* ümumi *şəkilli* *məqsəd funksiyalarının*

maksimizasiyasına əsaslanan analitik metodlarla alınmış faktor yüklər üçün maksimal doğruluqşarlıq statistik qiymətlərinin asimptotik dispersiyaları və kovariasiyalannın hesablanması üçün düsturlar alınmışdır.

Əd.: [1] Харман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., М., 1972; [2] Иберла К., Факторный анализ, пер. с нем., М., 1980; [3] Archer C. O., Jennrich R. L., «Psychometrika», 1973, v. 38, № 4, p. 581–92; [4] Jennrich R. L., «Psychometrika», 1973, v. 38, № 4, p. 593–604.

FAKTORIAL SEMİINVARIANT « факториальный семинвариант; factorial semiinvariant / cumulant »

– təsadüfi kəmiyyətin seminvarianti analoji ededi xarakteristikasıdır. ξ – doğuran funksiyası $\psi(z)$ olan mənfi olmayan tam-

qiymətli təsadüfi kəmiyyət olsun. $\ln \psi(1+z)$ funksiyasının ayrılışında $Z^m/m!$ -in qarşısındakı əmsala m tertib faktorial seminvariant deyilir. F. s. və seminvariantlar arasında münasibətlər faktorial momentlər və momentlər arasında münasibətlərə analoji (bax, Faktorial moment).

Əd.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

FAKTORIZASİON EYNİLİKLƏR « факторизационные тождества; factorization identities »

– təsadüfi dolaşmaların müxtəlif xarakteristikaları arasında (əsas etibarilə onların serhed funksionallarının paylanmaları arasında) əlaqələri ifadə edən çoxparametrlili eyniliklər sistemidir.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi

kəmiyyətlər, $f(\lambda) = \mathbf{M} e^{i\lambda \xi_1}$, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ olsun.

F. e.-in yaranması – $|z| \leq 1$, $(\operatorname{Im} \lambda = 0)$ oblastında $1 - zf(\lambda)$ funksiyasının

$$1 - zf(\lambda) = A_{+}(\lambda)A_{-}(\lambda) \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilmesi mümkünlüyü ilə bağlı olmuşdur, burada $A_{\pm}(\lambda)$ – serhedlər də daxil olmaqla, $\pm \operatorname{Im} \lambda > 0$ oblastında sıfır çevrilməyən analitik funksiyalardır. (1) ifadəsi $1 - zf(\lambda)$ funksiyasının faktORIZASİYASI adlanır və bu ifadə integral tənliklərin Viner – Hopf metodu həlli ilə sıx əlaqədardır. Bu ifadə

$$A_{\pm}(\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^{\pm \infty} e^{i\lambda x} dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\{S_n < x\} \right] \right\}, \quad |z| < 1$$

sabit vuruğu dəqiqliyi ilə yeganədir, burada və aşağıda sadəlik üçün $\mathbf{P}\{S_n = 0\} = 0$, $n = 1, 2, \dots$ qəbul olunmuşdur.

(n, t) müstəvisində hissəciyin hərəkəti trayektoriyası kimi $(0, 0)$, $(1, S_1)$, $(2, S_2)$, ... trayektoriyası üçün serhedlər təyin olunur; $n = \text{const} > 0$, $t = \text{const} > 0$. Bu sədlərin keçilməsi ilə bağlı aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətlər daxil olunur:

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad Y_{\infty} = Y,$$

$$\theta_{n-} = \min\{k \leq n: S_k = Y_n\},$$

$$\theta_{n+} = \max\{k \leq n: S_k = Y_n\}, \quad \theta_{0+} = \theta_{0-} = 0,$$

$$\eta(t) = \min\{k: S_k \geq t\}, \quad \chi(t) = S_{\eta(t)} - t,$$

bu təsadüfi kəmiyyətlər yuxarı serhed funksionalları adlanır. n və $t < 0$ sədləri üçün də aşağıdakı serhed funksionalları simmetrik olaraq daxil olunur. Bu halda bu funksionallar * simvolları da qoyularaq işarə olunurlar. Məs.,

$$Y_n^* = \min_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad \theta_{n-}^* = \min\{k \leq n: S_k = Y_n^*\}$$

$$\eta^*(t) = \min\{k \geq 1: S_k \leq t\}, \quad \chi^*(t) = S_{\eta^*(t)} - t.$$

S_n təsadüfi kəmiyyəti eyni zamanda yuxarı və aşağı funksional kimi hesab olunur.

Birgə paylanmaların yuxarı (aşağı) serhed funksionallarının xarakteristik funksiyaları faktORIZASİYA komponentləri $A_{\pm}(\lambda)$ [uyğun olaraq $A_{\pm}(\lambda)$] terminlərində ifadə olunurlar. Bu halda yalnız ikiölçülü paylanmanın xarakteristik funksiyasının ifadəsinin məlum olması kifayətdir (bax, [2]):

$$\mathbf{P}\{Y_n \in dx, \theta_{n-} = k\} \quad \text{və} \quad \mathbf{P}\{\chi(t) \in dy, \eta(t) = l\}. \quad (2)$$

Bu paylanmalar üçün xarakteristik funksiyaların ifadələri vasitəsilə F. e.-in bütün müxtəlif formalarnı təsvir etmək olur. (2) paylanmalar üçün eyniliklər uyğun olaraq, birinci və ikinci faktORIZASİON eyniliklər adlanır. Bu iki eynilikdən serhed funksionallarının digər kombinasiyalarının xarakteristik funksiyaları asanlıqla alınır.

FaktORIZASİYA komponentləri $A_{\pm}$ ilə digər təsadüfi kəmiyyətlərin çevirmələri də əlaqədardır, belə ki, bu çevirmələrə, təbii ki, serhed funksionalları kimi baxmaq olar; məs., təsadüfi dolaşmanın trayektoriyasının $t \geq 0$ səviyyəsini kəsmə nöqtələri sayı $\nu_n(t)$ və bu trayektoriyanın t səviyyəsindən yuxarıda keçirdiyi $\tau_n(t)$ müddəti (yeni $S_k \geq t$ şərt ilə təyin olunan k , $1 \leq k \leq n$ indekslərinin sayı) belə funksionallardır və bunlar eyni zamanda hər iki – n və t parametrlərindən asılı serhed funksionallardır. Bu halda $\tau_n(t)$ və $\nu_n(t)$ üzərində çevirmələr və $A_{\pm}$ komponentləri arasında olan əlaqələr daha mürəkkəb şəkildə ifadə olunur. Bu əlaqələrdən alınan nəticələrdən birinə əsasən $\tau_n(+)$ və θ_{n-} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları üst-üstə düşür.

Birinci faktORIZASİON eynilik. $|z| < 1$, $\rho < 1/|z|$, $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ olduqda

$$(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\rho^{\theta_{n-}} \exp(i\lambda Y_n)) = \frac{A_{+}(0)}{A_{+}(\lambda)}. \quad (3)$$

Birinci F. e.-in nəticəsi:

$$1. \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\exp(i\lambda Y_n); \theta_{n-} = n) = \frac{1}{A_{+}(\lambda)},$$

$$2. \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\rho^{\theta_{n-}} \exp(i\lambda Y_n)) \right] \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\rho^{\theta_{n+}^*} \exp(i\lambda Y_n^*)) \right] = \frac{1}{(1-z)(1-z\rho f(\lambda))}$$

3. $\rho = 1$ qiymətində (3)-dən P o l l a ç e k - S p i t s e r eyniliyi alınır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M} \exp(i\lambda F_n) = \frac{A_{z+}(0)}{(1-z)A_{z+}(\lambda)} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{M} \exp(i\lambda \max(0, S_n)) \right\}.$$

$$4. \mathbf{M}(z^{\eta(+0)}; Y > 0) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\{S_n > 0\} \right\};$$

$$\mathbf{M}\eta(0) = \frac{1}{\mathbf{P}\{Y^* = 0\}}.$$

5. Aşağıdakı üç müddəə ekvivalentdir:

$$\mathbf{P}\{Y < \infty\} = 1, \quad \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_n > 0\}}{n} < \infty.$$

$$6. \mathbf{M} \rho^{\theta_{n-}} \exp(i\lambda Y) = \frac{A_{\rho+}(0)}{A_{\rho+}(\lambda)},$$

(θ_{n-}, Y) təsadüfi vektorunun paylanması sonsuz bölünən paylanmadır.

7. Əgər ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri simmetrikdirsə, onda

$$\mathbf{P}\{\theta_{n-} = n\} = \mathbf{P}\{Y_n = 0\} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2};$$

$$\mathbf{P}\{\eta(0) = n\} = \frac{\mathbf{P}\{Y_n = 0\}}{2n-1};$$

$$\mathbf{P}\{\theta_{n-} = k\} = \mathbf{P}\{\theta_{k-} = k\} \mathbf{P}\{Y_{n-k} > 0\}.$$

$$8. r = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (1/2 - \mathbf{P}\{S_n > 0\}) \text{ olsun. Əgər } |r| < \infty$$

olarsa (buna görə kifayətdir ki, $\mathbf{M}\xi_1 = 0, \mathbf{D}\xi_1 < \infty$ olsun və ya ξ_k -lər simmetrik təsadüfi kəmiyyətlər olsun), onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\theta_{n-}}{n} < \alpha \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\tau_n(+0)}{n} < \alpha \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}$$

(arksinus qanunu).

İkinci faktorizasiya eynilik. $|z| < 1,$

$\operatorname{Im} \lambda \geq 0, \operatorname{Im} \mu > 0$ olduqda

$$1 - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} d_x \mathbf{M}(z^{\eta(x)} e^{i\mu \chi(x)}, \eta(x) < \infty) = \frac{A_{z+}(\mu)}{A_{z+}(\lambda)}. \quad (4)$$

Bu halda belə razılaşdırılmışdır ki, integrallanan funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində

$$\mathbf{M}(z^{\eta(+0)} e^{i\mu \chi(+0)}; \eta(+0) < \infty)$$

kəmiyyətinə bərabər sıçrayışı vardır, $\lambda = \mu$ olduqda (4) eyniliyin-
dəki integral $\lambda A_{z+}'(\lambda)/A_{z+}(\lambda)$ nisbətinə bərabər olur.

İkinci F. e.-in nəticələri:

1. $|z| \leq 1, \operatorname{Im} \lambda \geq 0$ olduqda

$$1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0)} e^{i\mu \chi(0)}; \eta(0) < \infty) = A_{z+}(\mu).$$

2. Əgər $\mathbf{M}\xi_1 = 0, \mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ olarsa, onda $\mathbf{M}_x(0)$ son-
ludur və $\mathbf{M}_x(0) = \sigma e^r / \sqrt{2}$.

3. Fərz olunur ki, Kramer şərti ödənilir ($\psi(\mu) = f'(-i\mu)$ funk-
siyası hər hansı $0 < \operatorname{Re} \mu < \mu_+$ zolağında analitiktir) və fərz
olunur ki, $\psi(\mu_+) > 1$ və $\lambda(z), -\psi(\mu) = 1/z, 0 < z < 1 / \inf_{\operatorname{Im} \lambda = 0} \psi(\mu)$ tənliyinin ən böyük köküdür. Onda
 $x > 0$ olduqda

$$\mathbf{M}(z^{\eta(x)} e^{\lambda(z)\chi(x)}; \eta(x) < \infty) = e^{-\lambda(z)x}.$$

Məs.,

$$\mathbf{M}(z^{\eta(0)} e^{\lambda(z)\chi(0)}; \eta(0) < \infty) = 1.$$

4. $\chi(x)$ və $\eta(x)$ asılı olmadıqda yalnız iki mümkün hal var:

$$a) \mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = ce^{-\alpha x} \quad (c > 0, \alpha > 0, x > 0);$$

b) ξ_1 -in tam qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x\} = c p^{x-1} \quad (c > 0, p \geq 0, x = 1, 2, \dots).$$

Bu hallarda uyğun olaraq

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} f(n, x) + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{n} f(n, x) \right),$$

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\} + \frac{p}{1-p} \left[\frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\} - \frac{x-1}{n} \mathbf{P}\{S_n = x-1\} \right],$$

burada $f(n, x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P}\{S_n < x\}, -S_n$ -in sıxlığıdır. $p = 0$

olduqda ($\xi_1 \leq 1$), yeni dolaşma yuxarıdan semikəsilməz
olduqda

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\}.$$

Əgər $\mathbf{M}(e^{i\lambda \xi_1}; \xi_1 < 0)$ və ya $\mathbf{M}(e^{i\lambda \xi_1}; \xi_1 > 0)$ rəşional
funksiya olarsa, onda faktorizasiya komponentləri $1 - z f(\lambda)$
funksiyasının sıfırları və polyusları ilə aşkar şəkildə ifadə oluna
bilir (bax, [2]). ξ_1 tamqiymətli olduğu zaman $e^{i\lambda}$ -nın rəşional
olması da tələb olunur. Bu sinifdən olan paylanmalar üçün
təsadüfi dolaşmanın trayektoriyasının zolağı tərk etməsi ilə
bağlı sərhəd funksiyaının paylanmalarının iqiqat çevirmələrinin

komponentləri vasitəsilə ifadə olunan aşkar düsturlar da məlumdur (bax, [8]):

$$Q_0(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(e^{i\lambda S_n}; N > n),$$

$$Q_1(z, \lambda) = \mathbf{M}(z^N e^{i\lambda S_N}; S_N \leq -a),$$

$$Q_2(z, \lambda) = \mathbf{M}(z^N e^{i\lambda S_N}; S_N \geq b),$$

burada $N = \min\{n: S_n \notin (-a, b)\}$, $a > 0$, $b > 0$.

F. e. *Sərhd məsələlərində* asimptotik analiz güclü vasitəsidir. Araşdırmalar, adətən, üç mərhələdə aparılır. Birinci mərhələdə araşdırılan sərhd funksionallarının birgə paylanmalarının ikiqat və ya üçqat çevirmələrinin (fəza və zaman üzrə) faktORIZASIYA komponentləri ilə ifadə oluna bilən eynilikləri axtarılır. Sonra bu çevirmələr faktORIZASIYA komponentlərinin xüsusiyyətləri (sıfırlar, polyusları, şəxələnmə nöqtələri) istifadə olunmaqla fəza dəyişəni üzrə çevrilirlər. Bu zaman doğuran funksiyaların asimptotik ifadələri adlandırılan ifadələr alınır. Bunların sonrakı analizi aşma metodunun (rus. метод перевала) modifikasiyası vasitəsilə həyata keçirilir. Bu halda yenə də faktORIZASIYA komponentlərinin analitik xassələrindən olduqca istifadə olunur. Nəticədə tam asimptotik ayrılıqlar haqqında, böyük yayınmalar haqqında teoremlər daxil olmaqla teoremlər alınmışdır.

Asimptotik analiz metodu A. A. Borovkovun işlərində təklif olunmuşdur (bax, [3]) və burada təsadüfi dolaşmalar trayektoriyasının birtərəfli sərhdədən kənara çıxması ilə bağlı sərhd funksiyalarının asimptotikası araşdırılmışdır. Bu metodun sonrakı inkişafı iki sərhdli bir sıra sərhd məsələlərinin həllinə səbəb olmuşdur (bax, [3], [4]).

F. e.-nin vasitəsilə çox sadə yollarla böyük ədədlər qanunu, arksinus qanunu və s. kimi müddəalar almaq olur. Bir çox F. e. və bunlarla bağlı olan sərhd funksionallarının paylanmalarının araşdırmaları kəsilməz zamanlı və asılı olmayan artımlarlı bircins $\zeta(t)$ prosesləri üçün də tədqiq olunmuşdur (bax, [5], [6]). Bu halda $z/(z - \varphi(\lambda))$ funksiyası faktORIZASIYA olunur, burada $\varphi(\lambda) = \ln \mathbf{M} \exp(\lambda \zeta(1))$. Bir sıra nəticələr sonlu Markov zəncirləri vəziyyətlərində verilən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [7]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение теории вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; [4] Рогозин Б. А., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 6, с. 1334–63; [5] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 656–70; [6] Лотов В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 475–85, в. 4, с. 873–79; [7] Пресман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861–900; [8] Кемперман J. H. B., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 4, p. 1168–93.

FAKTORIZASIYA METODU « факторизацион метод; factorization method » – yamoxda Viner – Hopf tənliyinin həll versiyalarından biridir. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_k , $k \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri –

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu təsadüfi dolaşmaların və ya asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ bircins təsadüfi prosesinin sərhd funksionallarının araşdırılmasında F. m. *faktORIZASIYA eyniliklərinə* əsaslanmışdır.

282 FAKTORİZASIYA

$\varphi(s) = \mathbf{M} e^{is\zeta(1)}$, $\psi(s) = \ln \mathbf{M} e^{is\zeta(1)}$, $\text{Im } s = 0$ olsun, onda A) $1 - z\varphi(s) = \varphi_+(s, z)\varphi_-(s, z)\varphi_0(s, z)$ bərabərliyi doğrudur, burada

$$\varphi_{\pm}(s, z) = \exp \left\{ \mp \int_0^{\pm\infty} e^{isx} dx \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{P}\{\zeta_k < x\} \right] \right\},$$

$$\varphi_0(s, z) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{P}\{\zeta_k = 0\} \right\}$$

və həm də

B) $\lambda[\lambda - \psi(s)]^{-1} = f_+(s, \lambda)f_-(s, \lambda)$ bərabərliyi doğrudur, burada

$$\begin{aligned} f_+(s, \lambda) &= \\ &= \exp \left\{ - \int_0^{\infty} (e^{isx} - 1) dx \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t} t^{-1} \mathbf{P}\{\zeta(t) > x\}) dt \right\}, \\ f_-(s, \lambda) &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^0 (e^{isx} - 1) dx \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t} t^{-1} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x\}) dt \right\}. \end{aligned}$$

S_n cəmlərinin və $\zeta(t)$ prosesinin bir çox sərhd funksionallarının xarakteristik funksiyaları faktORIZASIYA komponentləri terminləri ilə ifadə olunur. Məs., $S_n^+ = \sup_{0 \leq m \leq n} S_m$, $\zeta^+(t) =$

$= \sup_{0 \leq u \leq t} \zeta(u)$ funksionalları üçün uyğun olaraq,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M} e^{isS_n^+} = \varphi_+(0, z)/(1 - z)\varphi_+(s, z)$$

– Pollaçek – Spitser eyniliyi.

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{M} e^{is\zeta^+(t)} dt = f_+(s, \lambda)$$

– Spitser – Roqozin eyniliyi alınmışdır.

Əd.: [1] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 656–70; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

FAKTORIZASIYA TEOREMI « факторизационная теорема; factorization theorem » k a f i statistikalar üçün – bax, *Kafi statistika*.

FAKTORLARIN QARŞILIQLİTƏSİR EFEKTI « факторов эффект взаимодействия; interaction of factors » – faktor eksperimenti D-nin müşahidələrinin qarşılıqlı təsir effektiv faktorlar vektoru əmələ gətirən əmsallarla xətti funksiyadır. Bu vektor induksiya ilə aşağıdakı kimi daxil olunur. Faktorun baş effekt vektoruna (bax, *Faktorun baş effekti*) sıfır tərtib qarşılıqlı təsir effekt vektoru (və ya birkətfərlilik qarşılıqlı təsir vektoru) deyilir. N sınaqda D planının $F_1, \dots, F_r$ faktorlarının $(r-1)$ – tərtib qarşılıqlı təsir effekt

vektoru (və ya r – faktor qarşılıqləşir effekt vekturu) ele $z = \{z_1, \dots, z_N\}^T \in \mathbb{R}^N$ vektoruna deyilir ki,

$$\sum_{i=1}^N z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N z_i^2 \neq 0.$$

z vekturu $F_1, \dots, F_r$ faktorlarının $(r-2)$ -ci tertibə qədər, $(r-2)$ -ci tertib də daxil olmaqla bütün qarşılıqləşir effektlər vektorlarına ortoqonal olsun və z -in komponentləri D planının $F_1, \dots, F_r$ faktorları eyni qiymətlər alan bütün müşahidələri üçün bərabər olsunlar. Əmsalları qarşılıqləşir effektlə faktorlar vekturu əmələ gətirən müşahidələrin riyazi gözlemələrinin xətti funksiyasına faktorların qarşılıqləşirinin əsl effekti (rus. истинный эффект) deyilir.

Faktor eksperiment, Faktorun baş effekti məq.-dəki əd.-ta bax.

FAKTORSİSTEM(i) dinamik sistemin « факторнcистема динамической системы; factor quotient of a dynamical system » – bax, *izomorfizm, dinamik sistemlərin* metrik.

FANO ALQORİTMİ « Фано алгоритм; Fano algorithm » – bax. *Ardıcıl dekodla(n)ma*.

FANO BƏRABƏRSİZLİYİ « Фано неравенство; Fano inequality » – rabitə kanalları üçün tərs kodlama teoremlərinin isbatında əsas yer tutan, informasiya nəzəriyyəsi bərabərsizliyidir. X, Y N sayda elementli eyni bir çoxluqdan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər (asılı) olsun. $\rho = P\{X \neq Y\}$ olsun, onda şərti (ikilik) entropiya $H(X|Y)$ yuxarıdan Fano bərabərsizliyi ilə qiymətlənir, yəni

$$H(X|Y) \leq \rho \log_2(N-1) + h(\rho),$$

burada $h(\rho) = -\rho \log_2 \rho - (1-\rho) \log_2(1-\rho)$.

F. b. informasiyanın rabitə kanalları ilə ötürülmə xətasının ehtimalı üçün yuxarı qiymətlənmələrinin alınmasında əsas vasitələrdən biridir.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник Б. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

FAYDALILIQ FUNKSİYASI « полезностей функция; utility function » – üstünlük münasibətinin indikatorudur. Daha dəqiq: M – ixtiyari təbiətli elementlərin hər hansı çoxluğu, $\succeq$ – M -də verilmiş binar üstünlük münasibəti olsun. Əgər M -də təyin olunan ele U funksionalı olarsa ki,

$$a \succeq b \Leftrightarrow U(a) \geq U(b) \quad (1)$$

münasibətini ödəsin, onda (1)-dəki U funksionalı üstünlük indikatoru və ya faydalılıq funksiyası adlanır.

Əgər U, V üstünlüklər meydanı $\{M, \succeq\}$ üçün iki indikator-dursa (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*), onda ele ciddi artan $g(x)$ funksiyası vardır ki, $U(a) = g(V(a))$. Əgər M hər hansı $\{X, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmalarının hər hansı çoxluğu-dursa və (1) doğrudursa, M -dən olan ixtiyari P paylanması üçün

$$U(P) = \int u(x) P(dx) \quad (2)$$

olarsa ($u, -X$ -də hər hansı ölçülən funksiyadır), onda u funksiyasına, adətən, F. f. (2) funksionalının qiymətinə isə göz-lənilən faydalılıq deyilir (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*).

«F. f.» anlayışı ilk dəfə D. Bernulli tərəfindən təyin olunmuşdur (bax, [1]); onun «Peterburq oyunu» məsələsinin analizində bax-dığı «mənevi gözlemə» anlayışı mahiyyəti etibarilə, göz-lən-lən faydalılıq anlayışı ilə üst-üstə düşür. F. f. haqqında müasir ifadələr C. Neyman və O. Morgenştemin işləri ilə başlanmış hesab olunur.

Əd.: [1] Bernoulli D., Specimen theoriae novae de mensura sortis, «Coment. acad. sci. imper. Petrop.», 1738, t. 5, p. 175–92 (angl. per.: «Econometrica», 1954, v. 22, № 1); [2] Нейман Дж., Morgenштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [3] Фишберн П., Теория полезностей для принятия решений, пер. с англ., М., 1978.

FAYDALILIQ NƏZƏRİYYƏSİ « полезностей тео-рия; utility theory » – ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli fəzalarda üstünlük münasibətlərinin təsviri üsullarına və formalaşdırılması prinsiplərinə aid nəzəriyyədir. Üstünlük münasibətləri konkret məsələlərdə, adətən, araşdırılan obyektin keyfiyyətinin bu və ya digər xarakteristikaları ilə uzlaşdırılır. Aşağıda əsas etibarilə ehtimal paylanmaları fəzalarında üstünlüklərə baxılır. Bu halda əsas məsələlərdən biri ondan ibarətdir ki, təsadüfi kəmiyyətin bu və ya digər mənada orta qiymətinin anlaşıldığı kimi (riyazi gözlemə, median və s.), təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin orta qiymətə nəzərən bu və ya digər səpələnmə xarakteristikaları da eyni zamanda nəzərə alınmalıdır. Başqa sözlə, sistemin orta göstəricilərinin dəyişməsi mümkünlüyü və eyni zamanda araşdırılan sistemin stabilliyi də nəzərə alınmalıdır.

F. n.-nin ilkin ideyalanna hələ D. Bernullinin işlərində təsadüf olunur (bax, [1]). Onun «Peterburq oyunu» məsələsində daxil etdiyi «mənevi gözlemə» (rus. «нравственное ожидание») anla-yışı mahiyyətcə göz-lən-lən faydalılıq anlayışı ilə üst-üstə düşür (bax, aşağıda bənd 4). Müasir F. n.-ne C. Neyman və O. Morgenştemin işləri ilə başlanıldığı hesab olunur (bax, [2]).

1. **İlkin anlayışlar.** İxtiyari təbiətli elementlərin boş olmayan çoxluğu M -də – üstünlük münasibəti hər hansı $T \subset M^2$ çoxluğu-dur. Əgər $(a, b) \in T$ olarsa, onda $a \succ b$ (a, b -dən yaxşıdır) və əgər $(a, b) \notin T$ olarsa, onda $b \succeq a$ (a, b -dən yaxşı deyildir və b, a -dan pis deyildir). Aşağıda $\succ$ münasibəti zəif nizamlanma kimi, yəni asimmetrik ($a \succeq b \Rightarrow a \succeq b$) və mənfi tranzitiv ($a \succeq b, b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$) hesab olunur. Əgər $a \succeq b$ və $b \succeq a$ olarsa, tərifə görə $a \sim b$ (a, b -yə ekvivalentdir). Asimmetriyaya görə $a \succeq b \Leftrightarrow (a \succ b \vee a \sim b)$. $\succeq$ münasibəti $\succ$ münasibətinə uyğun qeyri – ciddi üstünlükdür. $\{M, \succeq\}$ cütü üstünlüklər mey-danı adlanır. $\sim$ münasibətinə əsaslanaraq M çoxlu-ğunu ekvivalentlik siniflərinə ayırmaq olar və belə siniflərin fəzası M' -də $\succ$ münasibətinə uyğun $\succ'$ münasibətini daxil etmək olar.

2. **Hesablanırlıq.** Əgər M -də təyin olunmuş ele U funksio-nalı varsa ki,

$$a \succeq b \Leftrightarrow U(a) \geq U(b)$$

münasibəti ödənilir, onda $\succeq$ münasibəti hesablanı-lan münasibət adlanır. U funksionalı üstünlük indi-katoru və ya faydalılıq funksiyası adlanır.

Əgər $U, V, - \{M, \succeq\}$ üstünlük meydanının iki indikatoru-dursa, onda ele ciddi artan $g(x)$ funksiyası vardır ki, $U(a) = g(V(a))$.

Hesablanırlıq aşağıdakı anlayışla əlaqəlidir. Əgər ele $H \subset M$ hesabi çoxluğu varsa ki, $a \succ b$ münasibətini ödəyən ixtiyari $a, b \in M$ üçün $a \succ h \succ b$ münasibətini ödəyən $h \in H$ elementi tapılsa, onda $\succ$ münasibəti separabel münasibətdir, deyilir. Teorem 1: M -də $\succeq$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda hesablanırlıdır ki, M' -dəki $\succ'$ ciddi üstünlüyü separabel münasibət olsun, bu teorem doğrudur.

Misal. Əgər

$$\{(x, y) \succ^0 (x_1, y_1) \Leftrightarrow x > x_1 \text{ və ya } x = x_1 \text{ və } y > y_1\}$$

münasibəti ödənilərsə, $\succ^0$ münasibəti $\{(x, y)\}$ ədədlər cütü fəzasında – leksikoqrafik münasibət adlanır, bu halda hər bir ekvivalentlik sinfi bir nöqtədən ibarət olur, $\succ^0$ separabel münasibət olmur və deməli, hesablanırlı münasibət de olmur.

3. **Affin üstünlük indikatoru.** M – affin fəza və ya qarışıqlar fəzası, yeni ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ və ixtiyari $a, b \in M$ üçün – «qanşıq» $\alpha a + (1 - \alpha)b \in M$ elementi təyin olunmuşdur və

$$1 \cdot a + 0 \cdot b = a, \quad \alpha a + (1 - \alpha)b = (1 - \alpha)b + \alpha a$$

və ixtiyari $\beta \in [0, 1]$ üçün

$$\alpha(\beta a + (1 - \beta)b) + (1 - \alpha)b = \alpha\beta a + (1 - \alpha\beta)b.$$

«Xətti» F. n.-nin esas nəticələrindən biri teorem 2-dir: Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

1⁰ (asılı olmamaşlıq şərti) – ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ və $c \in M$ üçün

$$\alpha \succeq b \Rightarrow \alpha\alpha + (1 - \alpha)c \succeq \alpha b + (1 - \alpha)c;$$

2⁰ (Arximed şərti) – hər hansı $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ədədləri üçün

$$(\alpha \succ b, b \succ c) \Rightarrow \alpha\alpha + (1 - \alpha)c \succ b, \quad b \succ \beta a + (1 - \beta)c;$$

onda $\succeq$ – hesablanırlı münasibətdir və onun indikatorları arasında affin funksional ola bilər, yeni ele U funksionalı tapıla bilər ki, ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ üçün

$$U(\alpha a + (1 - \alpha)b) = \alpha U(a) + (1 - \alpha)U(b). \quad (1)$$

4. **Gözlənilən faydalılıq.** $\{X, \mathcal{A}\}$ – ölçülən fəza, $\mathcal{A}$ isə bütün bımöqtəli çoxluqları özündə saxlayan σ – cəbr və $M = \mathcal{P}$, – X -də ehtimal paylanmalarının hər hansı ailəsi olsun. $\mathbf{P}_x$, – x nöqtəsində toplanmış paylanma olarsa, $\succeq$ münasibəti X fəzasında $x \succeq y \Leftrightarrow \mathbf{P}_x \succeq \mathbf{P}_y$ qaydasına görə üstünlük münasibəti doğurur. $\mathcal{P}$ bütün cırılmış paylanmaları özündə saxlayırsa və hesabi sayda qəbənq kombinasiyaların və şərti paylanmaların yaranmasına nəzərən qapalı olarsa, $\mathcal{P}$ meqbul aile

adlanır. Ehtimal paylanmaları halında teorem 2-ni teorem 3 deqiqləşdirir: əgər $\mathcal{P}$ meqbul ailedir, $\succeq$ zeif nizamlanması isə $1^0 - 2^0$ xassələrindən başqa

$$\{\mathbf{P}(A) = 1, y \preceq x \text{ bütün } x \in A\} \Rightarrow \mathbf{P}_y \preceq \mathbf{P}$$

şərtini ödəyirsə, onda $\preceq$ hesablanırlı münasibətdir və onun indikatorları arasında

$$U(\mathbf{P}) = \int u(x) \mathbf{P}(dx)$$

affin indikatoru tapılar, burada u , – X -də hər hansı ölçülən funksiyadır.

Ehtimal paylanmalarını müqayisə edərkən, u funksiyası – faydalılıq funksiyası, U funksionalının özü isə gözlənilən faydalılıq adlanır (diger yanaşmalar və mülahizələrə bax, BB. 5, 7, 8).

Teorem 2–3 F. n.-ne ordinalist yanaşma kimi adlandırılan yanaşmanı əks etdirir. Bu yanaşmanın tərəfdarları hesab edirlər ki, meqsəduyğun sayılmalıdır ki, yalnız baxılan elementlər müqayisə edilsin və bunlara heç bir konkret faydalılıq qiymətləri yazılmasın. Bu zaman üstünlük münasibətinin hesablanırlıq faktı işin mahiyyətini deyismir, belə ki, bir münasibət indikatorları sonsuz çoxluğu uyğun olur. Göstərilən yanaşma çərçivəsində teoremlərin şərtləri münasibətlərin öz terminləri ilə ifadə olunur, bu və ya digər indikatorun varlığı haqqında hökm yalnız münasibətin xarakterizasiyası kimi anlaşılır, funksionalın özü isə önəm daşımır.

Diger – marginalist – yanaşmanın tərəfdarları elementlərin «keyfiyyət ölçmə» funksionalının varlığını əvvəlcədən fərz etmək mümkün olması hallarını istisna etmirlər. Bu zaman funksionalın özünün bu və digər postulatlaşdırılan xassələrinə əsaslanaraq funksionalın şəklini təyin olunur. Məs., ele hallar mümkün ola bilər ki, baxılan hadisə və ya prosesin təbiətinin keyfiyyətə və verilənlərin analizinə görə öyrənilməsinə əsaslanan (1) afflilik şərtinin ödənilməsinin bilavasitə yoxlanılması $1^0 - 2^0$ şərtlərinin yoxlanılmasından daha sadə ola bilər, çünki, (1) şərti aşağıdakı sadə şəkildə interpretasiya oluna bilər: a elementi M -dən seçildiyi halda randomlanmış strategiyalar ola bilər, onda (1) α ehtimalı ilə a -nın alınmasına səbəb olan, $(1 - \alpha)$ ehtimalı ilə b -yə gətirən strategiya seçildikdə bir çox hallarda faydalılıq qiymətlərinə təbii tələbatı ifadə edir.

Bundan sonrakı müddəalar göstərilən yanaşmalardan ikincisini əks etdirir.

5. **Kəsilməzlik şərti.** Bu şərtlər paylanmaların özlərinin bu və ya digər mənada yaxınlığı halında faydalılıqların yaxınlığı haqqında təsəvvürlə bağlıdır. $\mathcal{F}$ – ədəd oxunda F paylanmalarının hər hansı ailəsi; $\succeq$, – $\mathcal{F}$ -də verilmiş üstünlük münasibəti, U funksionalı $\succeq$ münasibətinin indikatoru olsun. Aşağıdakı şərtlərə baxılır.

A1 şərti: U funksionalı paylanmaların zeif yığılmasına nəzərən kəsilməzdir.

A2 şərti: əgər ixtiyari A Borel çoxluğu üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{F}_n(A) \rightarrow \mathbf{F}(A)$ olarsa, $U(\mathbf{F}_n) \rightarrow U(\mathbf{F})$ münasibəti doğrudur. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 4: əgər paylanmalar ailəsi $\mathcal{F}$ meqbul ailedir, $\mathcal{F}$ -də təyin olunmuş U affin funksionalı isə A2 şərtini ödəyirsə, onda

$$U(\mathbf{F}) = \int u(x) \mathbf{F}(dx). \quad (2)$$

Əgər A1 şərti də ödənilərsə, onda (2)-dəki faydalılıq funksiyası u kəsilməzdir.

U funksionalının kəsilməz olduğu topologiyayı bir qədər də zəiflətməklə, (2)-dəki faydalılıq funksiyası u üçün daha müəyyən xassələrə nail olunur. Məs., əgər sonlu riyazi gözləmələrə malik hər hansı paylanmalar ailəsi ilə kifayətlənərək, U əvəzinə $\int |F(x) - G(x)| dx$ integral metrikasında kəsilməz, affin funksionallara baxılırsa, onda (2)-dəki faydalılıq funksiyası u Lipsits şərtini ödəyir (bu zaman Lipsits sabiti funksionalın normasına bərabər olur).

6. «Artım və stabililik» üçün şərtlər. Burada ixtiyari F paylanması gözlənilən gəlir təsadüfi kəmiyyətinin paylanması kimi interpretasiya olunur. Belə interpretasiya yalnız mülahizələrin münasibliyi ilə bağlıdır, əslində isə növbəti müddəalar müxtəlif təbliqlərdə istifadə olunur.

$F(x)$, $-F$ tip paylanma funksiyası olsun. Qeyd olunan interpretasiyada təbii olaraq aşağıdakı şərtlər daxil olunur:

B1 şərti (1-ci növ stoxastik dominanlanma şərti):

Əgər $F, G \in \mathcal{F}$ və bütün x -lər üçün

$$F(x) \leq G(x) \quad (3)$$

olarsa, onda $F \succeq G$;

B2 şərti («stabilliyə yaxınlaşma»): əgər $F, G \in \mathcal{F}$ – ümumi simmetriya mərkəzi m olan simmetrik paylanmalar və $x \leq m$ olduqda $F(x) \leq G(x)$ olarsa, onda $F \succeq G$. [Əgər $F(m-x) = 1 - F(m+x+0)$ bərabərliyi bütün $x > 0$ -lər üçün ödənilərsə, F paylanması m mərkəzi ilə simmetrik paylanma adlanır].

Misal. $\mathcal{F}$ – riyazi gözləməsi m , dispersiyası σ^2 olan bütün $\Phi_{m\sigma}$ normal paylanmalarından ibarət ailə olsun. Onda B1 – B2 şərtləri məsələni (m, σ^{-1}) cütleri fəzasında ele üstünlüklər münasibətlərinin araşdırılmasına gətirir ki, bunlar adi hissəvi vektor nizamlanması, yəni $\geq$ münasibətinə zidd olmur.

Paylanmaların kifayət qədər geniş siniflərinə baxıldıqda dispersiya stabililik üçün «yaxşı» xarakteristika olmur, bu aşağıdakı müddəadan aydın olur. m_F və σ_F^2 , $-F$ paylanmasının uyğun riyazi gözləməsi və dispersiyası. $U(F) = f(m_F, \sigma_F)$ funksional olsun, burada f funksiyası: $\partial f(x, y)/\partial x > 0$, $\partial f(x, y)/\partial y < 0$ şərtlərini ödəyir (B1 – B2 şərtlərinə baxdıqda sonuncu şərt təbiidir). Onda ixtiyari G paylanması üçün ele F paylanması tapılar ki, (3) ödənilir, lakin $U(F) < U(G)$ olar.

Əgər (2) hər hansı, konkret faydalılıq funksiyası u ilə doğru olarsa, $\mathcal{F}$ isə (2)-nin sağ tərəfi sonlu olan paylanmalar ailəsi olarsa, onda B1 şərti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, faydalılıq funksiyası u azalmayan, B2 şərti isə, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, faydalılıq funksiyası u – yuxarı qabanq olsun.

7. «Paylanmaların ortalanması» ilə bağlı şərtlər.

Hesablanmış üstünlük münasibəti monoton çevirmə dəqiqliyi ilə indikator doğrurduğundan, affinlik şərti təbii olaraq ele zəiflənməlidir ki, monoton çevirmə dəqiqliyi ilə affin funksionallara keçid mümkün olsun. Aşağıdakı C şərtinə baxıldığı fərz olunur:

Q ixtiyari paylanma olarsa, $U(F) = U(G)$ şərtini ödəyən ixtiyari F, G paylanmalar üçün

$$U((F+Q)/2) = U((G+Q)/2)$$

bərabərliyi doğrudur. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. Əgər $\mathcal{F}$ – bütün paylanmaların fəzası, U funksionalı A2, B1 və C şərtlərini ödəyərsə, onda ele ciddi artan v funksiyası və azalmayan u funksiyası tapılar ki,

$$U(F) = v \left(\int u(x) F(dx) \right). \quad (4)$$

Əgər A1 şərti ödənilərsə, onda v və u kəsilməz funksiyalardır. Əgər «determinik gəlirin faydalılığı gəlirin özü ilə ölçülürsə», yəni bütün x -lər üçün

$$U(E_x) = x \quad (5)$$

olarsa (burada E_x , $-x$ -də toplanmış paylanmadır), onda

$$U(F) = u^{-1} \left(\int u(x) F(dx) \right). \quad (6)$$

burada u^{-1} , $-u$ -ya tərs funksiyadır. $\mathcal{F}$ -in daralması və əlavə şərtlərin daxil edilməsi (4)-ü konkretləşdirməyə imkan verir.

Misal (Masse kriterisi). $\mathcal{F}$ – eyni bir sonlu parçada toplanmış paylanmalar ailəsi, $u(x) = \exp\{cx\}$, $c > 0$ olsun. Onda (6) aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$U(F) = \frac{1}{c} \ln \left(\int e^{cx} F(dx) \right).$$

Sonuncu kriteri yeganə kriteridir ki, C, A1 və

$$U(F * G) = U(F) + U(G)$$

şərtlərini ödəyir, burada $*$ – kompozisiya əməlidir. Digər ortalama əməli, bilavasitə paylanmaların riyazi gözləmələrinə gətirir. ξ və η – paylanmalar uyğun olaraq, F və G olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $(\xi + \eta)/2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $F \circ G$ simvolu ilə işarə edilmişdir (aşağıda). « $\circ$ » əməlini kompozisiya əməlinə nəzərən ortalama adlandırmaq olar. Aşağıdakı D şərtinə baxılır: $U(F) = U(G)$ olarsa, onda $U(F \circ G) = U(F)$.

Aşağıdakı teorem doğrudur. **Teorem 6:** $\mathcal{F}$ paylanmalar ailəsi $\circ$ əməlinə görə qapalı olsun və fərz olunur ki, bütün $F \in \mathcal{F}$ -lər üçün sonlu riyazi gözləmə m_F mövcuddur; $\mathcal{F}$ -də təyin olunmuş U funksionalının A1, B1 və D şərtlərini ödədiyi fərz olunur; onda v hər hansı kəsilməz azalmayan funksiya olduqda, $U(F) = v(m_F)$. Əgər (5) ödənilərsə, onda bu sonuncu teorem çərçivəsində $U(F) = m_F$. Teorem 6-nın tətbiqini yalnız o halda faydalı hesab etmək olar ki, $\mathcal{F}$ çoxluğu bir o qədər də «zəngin» olmasın, məs., m_F funksionalı $\mathcal{F}$ -də kəsilməz olduqda. Bu 6 teoreminin nəticəsindən aydındır: əgər $\mathcal{F}$ sonlu riyazi gözləmələrə malik bütün paylanmaların çoxluğu, U funksionalı isə A1 və D şərtlərini ödəyərsə, onda $U(F) = \text{const}$.

8. **Qeyri – xətti funksionallar və müqayisəedici faydalılıq.** Affin indikatorlarla təsvir olunan üstünlüklər münasibətləri nisbətən dar sinif təşkil edir. «Affinlik şərtlərini» ödəməyən münasibətə nümunə *Alle paradoksudur*. «Affin» olmayan, lakin daha çevik üstünlüklər münasibətlərinin təsviri bilavasitə qeyri – xətti funksionallara keçiddən ibarətdir, məs., n tərtib formalarına:

$$U(F) = \int \dots \int u(x_1, \dots, x_n) F(dx_1) \dots F(dx_n). \quad (7)$$

(7)-nin interpretasiyalarından biri aşağıdakı kimi ifadə olunur. Fərz olunur ki, gəlir götürmənin variantı uyğun F bir-birindən asılı olmayaraq n dəfə istifadə olunur. ξ_j – j -ci dəfə alınan gəliri ifadə edən təsadüfi kəmiyyətdir və determinik gəlirlər ardıcılığının faydalılığı faydalılıq funksiyası $u(x_1, \dots, x_n)$ ilə ölçülür. Onda (7) $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ardıcılığının gözənilən faydalılığıdır. Xüsusi halda,

$$u(x_1, \dots, x_n) = (u(x_1) + \dots + u(x_n)) / n$$

berabərliyi ilə təyin olunan faydalılığın orta qiyməti anlamında (7) formasından (2) alınır, burada $u(z)$ – determinik z gəlirinin faydalılığıdır.

İkinci yanaşmada $X \times Y$ fazasında (determinik alternativlər cütleri fazasında, bax, bənd 4) müqayisəedici faydalılıq funksiyası $u(x, y)$ daxil edilir; bu funksiya « x alternativinin y -dən nə qədər yaxşı olmasını» ifadə edir. X -də nizamlanma formalarından biri kimi

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x, y) \geq w(y)$$

münasibətini vermək olar, burada w – hər hansı «sədd» funksiyasıdır. Bu formanın interpretasiyalarından biri, eger «üstünlük intensivliyi hər hansı səddi keçirsə», alternativlərin fərqli olması təsevvürü ilə bağlıdır. Digər, bezi səbəblərə görə daha mühüm interpretasiya seçimin dayanıqlılığı ilə bağlıdır. Bu halda fərz olunur ki, $w(y) = u(y, y)$ və bu zaman $u(x, y)$ kəmiyyəti y -in x -lə əvəzlənməsindən faydalılıq kimi, $u(y, y)$ kəmiyyəti isə y alternativinin qorunub saxlanılmasının faydalılığı kimi interpretasiya olunur, modelin özü isə nisbi faydalılıq və ya şərti faydalılıq modeli adlanır.

Bu anlayışların (X, χ) fazasında ehtimal paylanmaları ailəsi $\mathcal{P}$ halına köçürülməsi (bax, [4]) gözənilən müqayisəedici faydalılığın ümumi modeli üçün

$$P \succeq Q \Leftrightarrow \iint u(x, y) P(dx) Q(dy) \geq \int w(y) Q(dy)$$

qaydasının və gözənilən nisbi müqayisəedici faydalılığın modeli üçün

$$\begin{aligned} P \succeq Q &\Leftrightarrow \iint u(x, y) P(dx) Q(dy) \geq \\ &\geq \iint u(x, y) Q(dx) Q(dy) \end{aligned}$$

qaydasının daxil edilməsindən ibarətdir.

Əgər sədd funksiyası $w(y) \equiv 0$ olarsa, onda yuxarıda qeyd olunan mənada P paylanmasına ekvivalent çırışmış paylanma axtarışı P paylanmasına nəzərən determinik y alternativinin müqayisəedici faydalılığının orta qiyməti $g(y) = \int u(x, y) P(dx)$ funksiyası ilə bağlı olur. Məs., $\mathcal{P} = \mathcal{F}$ – ədəd

oxunda paylanmalar ailəsi olsun (bax, bənd 5). Onda

$$\int u(x, y) F(dx) = 0 \quad (8)$$

tənliyinin həlli determinik gəlirdir və onun müqayisəedici orta qiyməti paylanması F olan təsadüfi gəlirə nəzərən sıfır bərabərdir.

$\mathcal{F}$ məqbul ailə olarsa (bax, bənd 4) və burada təyin olunmuş U funksionalı (5), A 1, B 1 şərtlərini və həmçinin aşağıdakı şərti ödəyirsə: eger $U(F) = U(G)$ olarsa, onda $U((F+G)/2) = U(F)$ (C şərti ilə müqayisə et) şərtlərini ödəmiş olsun. Onda $U(F)$ (8) tənliyinin həllidir, $u(x, y)$ funksiyası isə hər iki arqumentinə görə kəsilməzdir, x -ə görə artandır və $u(x, x) = 0$.

Əd.: [1] Bernoulli D., «Comment. acad. sci. imper. Petrop.», 1738, t. 5, p. 175–92 (angl. per.: «Econometrica», 1954, v. 22, № 1); [2] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [3] Debreu G., Theory of value, N. Y. – L., 1959; [4] Фишберн П., Теория полезностей для принятия решений, пер. с англ., М., 1978; [5] Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. В., Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах, Л., 1980; [6] Handbook of mathematical psychology, v. 1–3, N. Y. – L., 1963–65; [7] Allais M., «Econometrica», 1953, v. 21, № 4, p. 503–46; [8] Смоляк С. А., в св.: Модели и методы стохастической оптимизации, М., 1983, с. 181–212.

FAZA «фаза; phase», faza spektri, qarşılıqlı faza spektri, faza sıxlığı, faza yerindəyişməsi. – λ tezliyində, $-\infty < \lambda < \infty$ iki stasionar $X(t)$ və $Y(t)$ təsadüfi prosesləri arasında

$$F_{XY}(\lambda) = \arg f_{XY}(\lambda) = \arctg [-\operatorname{Im} f_{XY}(\lambda) / \operatorname{Re} f_{XY}(\lambda)]$$

ifadəsi ilə təyin olunan kəmiyyətdir, burada $f_{XY}(\lambda)$ – $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı spektral sıxlığıdır. Əgər təsadüfi proseslər öz aralarında xətti çevirmə ilə bağlı olarsa, onda $F_{XY}(\lambda)$ kəmiyyətini bir prosesin digərinə nəzərən faza üzrə yerindəyişməsi kimi interpretasiya etmək olar və yerindəyişmədə $X(t)$ və $Y(t)$ prosesləri arasında koherentlik əmsalının λ tezliyində maksimum qiymətini alır.

Bax. *Ötürücü funksiya*.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, М., 1972; [3] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

FAZA DİAQRAMI «фазовая диаграмма; phase diagram» – Gibbs meydanının potensialını (məs., tərs β temperaturu və kimyəvi μ potensialını) ifadə edən parametrlərin bu parametrlə ekstremal Gibbs təsadüfi meydanları sayından asılılığını illüstrasiya edən qrafikdir.

FAZA FƏZASI Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin «фазовое пространство цепи Маркова или марковского процесса; state space of a Markov chain or a Markov process» – Markov zənciri və ya Markov prosesinin vəziyyətləri çoxluğudur (fəzasıdır).

FAZA FƏZASI təsadüfi prosesin «фазовое пространство случайного процесса; state space of a random / stochastic process», $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$, $t \in T$

(T – hər hansı parametrik çoxluqdur) təsadüfi prosesinin faza fəzası, – ölçülən $(M, \mathcal{B})$ fəzasıdır, bu fəzada $\zeta(t, \cdot)$ təsadüfi elementi t -nin hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ qiymətində öz qiymətlərini $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının ölçülən $(M, \mathcal{B})$ fəzasına inikası kimi alır. Təsadüfi prosesin vəziyyətlər fəzası termini də eyni mənada anlaşılır. Əgər $F. k.$ hər hansı əlavə strukturlarla verilsə, onda, adətən, bu strukturların ölçülən fəzanın strukturu ilə uzlaşdırıldığı fərz olunur (məs., M metrik fəzadırsa, onda $\mathcal{B}$ bir qayda olaraq, M -in Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir).

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

FAZA KEÇİDİ « фазовый переход; phase transition » – maddenin termodinamik parametrlərinin kəsilməz surətdə dəyişməsi nəticəsində onun makroskopik xassələrinin sıçrayışvari dəyişməsindən ibarət təzahürdür.

$F. k.$ -nin ciddi riyazi tərifini statistik mexanikanın bərabərçəkili vəziyyətlərini təsvir edən *Gibbs təsadüfi meydanları* nəzəriyyəsi çərçivəsində vermək olar. $\mathcal{U}_\lambda$ – şəbəkəvari sistemin həqiqi $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ parametrindən asılı *potensialları* ailəsi olsun. Sadəlik üçün fərz olunur ki, meydanın qiymətləri fəzası X sonludur və indekslərin ixtiyari sonlu çoxluğu A və ixtiyari $x_A \in X^A$ konfigurasiyası üçün $\mathcal{U}_\lambda^\lambda(x_A)$ funksiyası λ -nin həqiqi analitik funksiyasıdır. Əgər potensialı $\mathcal{U}^\lambda$ olan Gibbs təsadüfi meydanlarının ehtimal paylanmalarının ele $\mathbf{P}^\lambda$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ ailəsi vardsa ki, realizasiyanın hər hansı silindrik funksiyası φ -nin (yəni sonlu sayda dəyişənlərdən asılı φ -nin) $\mathbf{P}^\lambda$ ölçüsü üzrə orta qiyməti $\langle \varphi \rangle^\lambda$ λ -nin funksiyası kimi λ_0 nöqtəsində analitik xüsusiyyətlərə malik olsun (yəni λ_0 nöqtəsinin heç bir ətrafında həqiqi analitik funksiya olmasın), $\mathcal{U}^{\lambda_0}$ ($\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$) potensialı $\mathcal{U}^\lambda$ istiqamətində $F. k.$ nöqtəsidir, deyilir. Kəsilməz sistemlər üçün və ixtiyari X fəzası ilə verilən şəbəkəvari sistemlər üçün də $F. k.$ nöqtəsi analogi təyin olunur.

Əgər $\langle \varphi \rangle^\lambda$ orta qiyməti sonlu həcmdə Gibbs paylanması üzrə hesablanarsa, onda $\langle \varphi \rangle^\lambda$ həmişə λ -nin analitik funksiyası olur. Beləliklə, $F. k.$ -nin ciddi riyazi tərfi yalnız sonsuz sistemlər dilində verilə bilər, bu sistemlər isə *termodinamik limit keçidindən* sonra yaranır.

Əgər λ_0 ele nöqtə olarsa ki, $\mathcal{U}^{\lambda_0}$ potensialı bütün ekstremal Gibbs paylanmalarının çoxluğunun gücü λ_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafında sabit deyildir, onda analitik funksiyanın yeganə surətdə davam olunmasından $\mathcal{U}_{\lambda_0}$ -in $\mathcal{U}_\lambda$ istiqamətində $F. k.$ nöqtəsi olduğu alınır. Baxılan $F. k.$ nöqtələrinin əksəriyyəti belə təbiətə malik nöqtələrdir, məs., *İzinq modelinin* $F. k.$ nöqtələri. Odur ki, $F. k.$ -nin tədqiqi məsələsi *faza diaqramının* forması haqqında məsələ ilə sıx əlaqədardır. Belə bir hipotez vardır ki, $F. k.$ nöqtəsinin ətrafında Gibbs vəziyyəti yeganə olan $F. k.$ -inə malik sistem Heyzenberq XY – modelindən alınır, lakin bu modeldə pozulmaların olması analitik olaraq isbat olunmamışdır.

Əgər $F. k.$ $\langle \varphi \rangle^\lambda$ funksiyalarından birinin λ_0 nöqtəsi ətrafında sıçrayışvari dəyişməsi ilə baş verirsə, onda $F. k.$ birinci növ $F. k.$ -dir, deyilir. $F. k.$ -ləri korrelyasion funksiyaların (məs., Heyzenberq modelində) asimptotik azalması sürətinin dəyişməsi ilə

və qeyri – trivial limit avtomodel paylanmalarının yaranması ilə bağlı olur.

Korrelyasion tənliklər metodu və ya klaster ayrılığı metodundan istifadə edərək, β tərs temperaturunun olduqca kiçik qiymətləri üçün, həmçinin μ kimyəvi potensialının (güclü səyrəklənmiş qazlar) olduqca böyük mənfi qiymətləri üçün $F. k.$ -nin olmadığını isbat etmək olur. Birözlü sistemlərin geniş sinfində $F. k.$ yoxdur.

$F. k.$ -nin varlığı haqqında riyazi nəticələr daha çox xüsusi xarakter daşıyır. Daha tam surətdə yalnız ferromagnit *İzinq modeli* öyrənilmişdir. $\beta = \infty$ olduqda (yəni sıfır temperaturda) meydanları təsvir edən *əsas vəziyyətlərin* araşdırılması və kükrəntilər nəzəriyyəsi metodlarının ardıcıl tətbiqi hesabına alınan, β -nin olduqca böyük qiymətlərində baş verən $F. k.$ strukturu ən yaxşı anlaşılana hesab olunur. Burada alınan nəticələrdən ən ümumi *Piroqov – Sinay teoremidir*.

Kristal strukturlu maddenin yaranması ilə bağlı kəsilməz sistemlərdə, μ -nün olduqca böyük qiymətlərində $F. k.$ -nin varlığı haqqında mülahizə isbat olunmamışdır.

$F. k.$ -ləri yalnız Gibbs təsadüfi meydanları üçün tipik olmayıb, çoxkomponentli təsadüfi sistemlərin digər modelləri üçün də, məs., qarşılıqlı təsire malik Markov proseslərində də yaranır. $F. k.$ -ləri bioloji sistemlərin riyazi modelləri, texniki sistemlər (təsvir etmə, məlumatları ötürmə sistemləri), iqtisadi sistemlərdə və s.-də yaranır.

Əd.: [1] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А., Г и б б с о в с к и е случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [2] П р е с т о н К., Г и б б с о в с к и е состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1971; [3] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [4] С и н а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [5] L i g g e t t, T h o m a s M., Interacting particle system, N. Y. – [a. o.], 1985.

FAZA MODULYASIYASI « фазовая модуляция; phase modulation » – bax, *Tezlikli – modulyar ossilyasiya, Modulyasiya və demodulyasiya*.

FAZA SIXLIĞI « фазовая плотность; phase density » – bax, *Faza*.

FAZA SPEKTRİ « фазовый спектр; faza spectrum » – bax, *Faza*.

FAZA TEZLİK XARAKTERİSTİKASI « фазовая частотная характеристика; phase frequency characteristic » – bax, *Ötürücü funksiya*.

FAZA YERİNİDƏYİŞMƏSİ « фазовый сдвиг; phase shift / displacement » – bax, *Ötürücü funksiya, Faza*.

FAZACA MODULYAR RƏQS / OSSİLYASIYA « фазово – модулированное колебание; phase – modulated oscillation » –

$$X(t) = A \sin(\omega_0 t + a(t)) \quad (*)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada ω_0 – yüksək aparıcı tezlik, $a(t)$ – modulyasiyalayıcı aşağıtezlilik təsadüfi prosesdir və bu prosesin qiymətlərinə əsas əlavələr ω_0 -dan çox kiçik olan tezliklər sayəsində baş verir.

$F. m. r.$ radiotexnikada və rabitə texnikasında informasiyanın ötürülməsi və digər tətbiqi məqsədlər üçün geniş istifadə olunur (bax, məs., [1] – [4]); bu halda $a(t)$ təsadüfi prosesinin əksər hallarda, heç olmasa stasionar artımlı və ya stasionar proses olduğu fərz olunur. (*) prosesi hətta $a(t)$ stasionar proses

olduqda belə qeyri – stasionar prosesdir (lakin kompleks stasionar prosesin həqiqi hissəsidir; bax. [4], [5]). Geniş şərtlər daxilində $X(t)$ prosesinin *ortalanmış korrelyasion funksiyası*, *ortalanmış spektral sıxlığı* və *ortalanmış spektral funksiyası* vardır (və $X(t)$ asimptotik stasionar prosesdir və bu o mənada anlaşılır ki, onun üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M X(t + \tau) X(t) = B_0(\tau)$$

limiti vardır və bu limit ortalanmış korrelyasion funksiya ilə üst-üstə düşür). ortalanmış korrelyasion $B_0(\tau)$ funksiyası və onun Furiye çevirməsi $f_0(\lambda)$ – ortalənmiş spektral sıxlığı (başqa sözlə, ortalənmiş güc spektri) – üçün hesablamalar modulyasiyalayıcı $a(t)$ proseslərinin müxtəlif sinifləri üçün aparılmışdır (bax, məs., [1] – [8]). Məs., əgər $a(t)$ stasionar artımları Gauss təsadüfi prosesidirsə və onun orta qiyməti sıfıra bərabər, struktur funksiyası isə

$$M [X(t + \tau) - X(t)]^2 = D(\tau)$$

olarsa, onda geniş şərtlərlə

$$B_0(\tau) = 0,5 A^2 e^{-D(\tau)/2} \cos \omega_0 \tau,$$

$$f_0(\lambda) = 0,25 A^2 \{ G(\lambda - \omega_0) + G(\lambda + \omega_0) \}$$

olur, burada

$$G(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-D(\tau)/2\} \cos \lambda \tau d\tau.$$

$a(t)$ Viner prosesi olduğu xüsusi halda $D(\tau) = \sigma^2 |\tau|$ (bax, [9]), odur ki, burada

$$f_0(\lambda) = \frac{A^2 \sigma^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{(\lambda - \omega_0)^2 + \sigma^4/4} + \frac{1}{(\lambda + \omega_0)^2 + \sigma^4/4} \right\}.$$

Faza modulyasiyası, yeni hər hansı verilmiş $a(t)$ təsadüfi prosesinə mütənasib olan rəqs fazasının fluktuasiyalannın yaranması bucaq modulyasiyanın mühüm tipidir (bax, *Təzlikli – modulyar ossilyasiya*).

Əd.: [1] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 2, М., 1962; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, 2 изд., М., 1974; [3] Ван Трис Г. Л., Теория обнаружения оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [4] Папулис А., Probability random variables and stochastic processes, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1984; [5] Папулис А., «IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.», 1983, v. 31, № 1, p. 96–105; [6] Папулис А., «Trans. 9-th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Rand. Processes», 1983, V. B, p. 105–11; [7] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [8] Zadeh L. A., «Proc. IRE», 1951, v. 39, № 4, p. 425–28; [9] Wiener N., Wintner A., «Nature», 1958, v. 181, № 4608, p. 561–62.

FEFFERMAN BƏRABƏRSİZLİYİ « Феффермана неравенство; Fefferman inequality » – bax, *Martingal*.

288 FELLER

FELLER HƏLLİ stoxastik differensial tənliyin « *феллеровское решение стохастического дифференциального уравнения; Feller solution of a stochastic differential equation* » – elə $(\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ *Feller prosesidir* ki, hər bir $x \in \mathbb{R}^d$ üçün P_x –

$$d\zeta_t = \sigma(\zeta_t) dW_t + b(\zeta_t) dt \quad (*)$$

tənliyinin zəif həllidir. F. h. aşağıdakı hallarda mövcuddur (σ və b -nin məhdud olduğu fərz edilir):

1) əgər σ və b Lipsitz şərtini ödəyərlərsə,

2) əgər $\sigma\sigma^*/2$ müntəzəm müsbət olarsa,

3) (sərhədli stoxastik differensial tənlik üçün) əgər $\sigma\sigma^*/2$ sərhəd xaricində və apar əmsalı isə sərhəddə müntəzəm müsbət olarsa.

1) halında (*)-nın həlli güclü yeganə həldir və onun paylanması Feller prosesidir. 2) və 3) hallarında yeganəlik olmaya da bilər və F. h. bütün həllər çoxluğundan seçilir.

Əd.: [1] Крылов Н. В., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 691–708; [2] Крылов Н. В., Сафонов М. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 1, с. 18–20; [3] Ануллова С. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», т. 50, № 2, с. 211–41.

FELLER KEÇİD FUNKSIYASI « феллеровская переходная функция; Feller transition function » – bax, *Keçid funksiyası*, Markov prosesi üçün.

FELLER MARKOV ZƏNCİRİ « феллеровская цепь Маркова; Feller Markov chain » – bax, *Feller prosesi*.

FELLER PROSESİ « феллеровский процесс; Feller process » – ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında verilən bir cins ζ *Markov prosesidir*, burada $\mathcal{E}$ – topoloji fəza, $\mathcal{B}$ – bu fəzada Borel çoxluqlar çoxluğu, $p(t, x, \Gamma)$, $t \geq 0$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, – ζ prosesinin Feller keçid funksiyasıdır, yəni $t \geq 0$

$$P_t f(\cdot) = \int f(y) p(t, \cdot, dy)$$

münasibəti ilə təyin olunan $P_t: f \rightarrow P_t f$, $t \geq 0$ operatorları, f funksiyası $\mathcal{E}$ -də məhdud və kəsilməz bütün funksiyalar ailəsində dəyişdikdə bu ailəni öz-özünə inikas etdirirlər. Belə proseslər sinfi ilk dəfə U. Feller tərəfindən [1]-də göstərilmişdir.

Bir çox birölçülü diffuziya prosesləri və hər bir *güclü Feller prosesi* F. p.-lərinə misaldır. İxtiyari standart prosesin vəziyyətləri fəzasına onun özünün doğurduğu incə topologiya daxil etdikdə bu prosese F. p. kimi baxmaq olar (bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün*).

Feller xassəsindən bir çox faydalı nəticələr alınır (bundan sonra $\mathcal{E}$ fəzasının metrikləşən fəza olduğu fərz olunur). Məs., $\mathcal{E}$ kompakt, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -də verilən Feller keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ stoxastik kəsilməz olarsa, yəni hər dəfə $\zeta \in \mathcal{E}$ olarsa, $t \downarrow 0$ olduqda $p(t, x, U) \rightarrow 1$ münasibəti ödənilərsə, U isə x nöqtəsinin ətrafı olarsa, onda bu funksiya uyğun Markov prosesi ζ -ni, ümumiliyi pozmadan, sağdan kəsilməz və ikinci növ kəsilməyə malik olmayan proses hesab etmək olar (bax, [2]). Trayektoriyaları sağdan kəsilməz ixtiyari F. p. *ciddi Markov prosesidir*.

Markov prosesinin Feller xassəsi bəzən geniş mənada verilir: bu halda əvvəlki qaydada təyin olunan P_t , $t \geq 0$ operatorlarının $\mathcal{E}$ -də bütün məhdud Borel funksiyaları sinfində təyin olunduğu və bu operatorların bu və ya digər münasib surətdə seçilmiş funksiyalar çoxluğunu özünə inikas etdirməsi tələb olunur (bax, [3]). Məs., $\mathcal{E}$ hesabi bazaya malik lokal kompakt fəza olduğu halda P_t operatorlarının $\mathcal{E}$ -də kəsilməz, sonsuzluqda sıfıra yaxınlaşan bütün kəsilməz funksiyalar ailəsinə özünə əks etdirdiyini fərz etmək məqsəduyğun olur. Əgər bu halda eyni zamanda stoxastik kəsilməzlik şərti də ödənilsə, onda ζ prosesi hər hansı standart prosesə ekvivalentdir (bax, [2]; bu proseslərin ekvivalentliyi onların ümumi keçid funksiyasına malik olması kimi anlaşılar).

F. p.-nə analogi olaraq, Feller Markov zənciri də təyin olunur. Bir çox hallarda hər hansı ölçülən fəzada verilən ümumi Markov zəncirinə əsaslanaraq, bu zəncirin vəziyyətləri fəzasının mümkün olduqca qənaətlə genişləndirilməsi hesabına və bu genişləndirilmiş fəzada zənciri təyin edərək, bu fəzada Feller zəncirini almaq mümkün olur (bax, [4]). Feller zəncirlərinin dərinəndə ətraflı öyrənilməsinə səylər göstərilmişdir.

Əd.: [1] F e l l e r W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Д и н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [3] W a l s h J. B., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, p. 1672–83; [4] Ш у р М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 3, с. 496–509; [5] С м и р н о в С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, № 3, с. 554–58.

FELLER SEMİ – QRUPU « феллеровская полу-группа; Feller semigroup » – bax, *Markov semi – grupu*.

FERMİ – DİRAK STATİSTİKASI « Ферми – Дирака статистика; Fermi – Dirac statistics » – $(1/2, 3/2, \dots)$, yarımspinli eyni tipli hissəciklər sistemlərinə

$h = 1,05 \cdot 10^{-27}$ erq.san vahidlərində tətbiq olunan kvant statistikasındır. E. Fermi (E. Fermi) tərəfindən 1926-da təklif olunmuşdur və həmin ildə də P. Dirak (P. Dirac) onun kvant – mexaniki mənasını aydınlaşdırmışdır: F. – D. s.-na tabe olan sistem üçün dalğa funksiyası koordinatların və hissəciklərin spinlərinin yerdəyişmələrinə nəzərən antisimmetrik olmalıdır. F. – D. s.-na görə hər bir kvant vəziyyətində bir hissəcikdən artıq hiccəcik ola bilməz (Pauli prinsipi) və bu hissəciklər bir-birindən fərqlənir.

İdeal qaz üçün F. – D. s.-na görə kvant vəziyyəti $\{n_p\}$ səviyyələrinin doldurduğu ədədlərin çoxluğu ilə təyin olunur, hər bir n_p səviyyəsi göstərir ki, verilən səviyyə p impulsu ilə dolmuşdur ($n_p = 1$) və ya boşdur ($n_p = 0$). Böyük sistemlər üçün səviyyələri kiçik oyuqlar üzrə ələ qruplaşdırmaq olar ki, bu oyuqlarda orta enerjisi $\varepsilon_i = P_i^2 / 2m$ olan G_i səviyyə olsun və $G_i \gg 1$. Sistemin vəziyyəti $\{N_i\}$ toplusu ilə təyin olunur, burada N_i – oyuğun səviyyələri üzrə n_p -lərin cəmidir. Makroskopik vəziyyətin statistik çəkisi, yəni hissəciklərin oyuqlarda müxtəlif yerləşmələrinin sayı –

$$W(N_i) = \prod_i \frac{G_i!}{N_i! (G_i - N_i)!}$$

düsturu ilə təyin olunur. Vəziyyətlər üzrə hissəciklərin ən böyük ehtimalı paylanması, $E = \sum_i \varepsilon_i N_i$ enerjisi qeyd olunduqda,

hissəciklərin sayı $N = \sum_i N_i$ vasitəsilə statistik çəkinin maksi-

mallıq şərtindən tapılır. Bu halda dolma halı üçün orta qiymətlər $\bar{n}_i = \bar{N}_i / G_i = (\varepsilon^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1)^{-1}$ olur, μ – kimyəvi potensial, $\beta = 1/kT$, k – Boltsmann sabiti, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erq/grad, T – mütləq temperaturdur.

Əd.: bax, Boze – Eynşteyn statistikası məq. əd-ta və Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, т. 1, М., 1984.

FERMİON FƏZASI « фермионное пространство; fermion space » – bax, *Fok fəzası*.

FERNİK TEOREMİ « Ферника теорема; Fernique theorem » – bax, *Təsadüfi proses; trayektoriyaların reqlulyarlığı*.

FEYDİNLƏR / DONMALAR kanalda « зами- рания в канале; channel fading » – ötürücünün şüalandırdığı dalğa fazası və amplitudunun stabil olduğu halda, qəbuledici apparaturunun girişində dalğanın (elektromaqnit və akustik) faza və amplitudunun dəyişiklikləridir (fluktuasiyalardır). F. yaranmasının əsas səbəbi dalğanın ötürücüdən qəbulediciyə çoxsaylı yollarla yayılmasıdır və yayılmadakı gecikmələr və yolların sayı təsadüfi surətdə dəyişə bilər; digər səbəblər yayılma mühitinin sınıma əmsalının fluktuasiyaları, udma əmsallarının dəyişilmələri (məs., yağintılar ucbatından) və s. kimi səbəblərdir.

Tezlik – selektiv və zaman – selektiv F. vardır. Tezlik – selektiv F. modeli qurularkən fərz olunur ki, təsadüfi parametrləri kanal ilə dalğa keçərkən çıxış signalının spektri təsadüfi tezlik funksiyasının (kompleks təsadüfi ötürmə əmsalı) vurulmuş giriş signalının spektrinə bərabərdir. Bu funksiya (təsadüfi tezlik funksiyası), adətən, kompleks təsadüfi Qauss prosesi hesab edilir. Əgər ötürmə əmsalı argumenti $[0, 2\pi]$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış kompleks təsadüfi kəmiyyət olarsa, F. – t e d r i c i F. adlandırılır. $w(x)$ modulunun paylanma sıxlığı əksər hallarda $w(x) = (x/\sigma^2) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ (R e l e y d o n m a l a r ı) və ya $w(x) = (x/\sigma^2) \exp\{-(x^2 + a^2)/\sigma^2\} I_0(\mu a/\sigma^2)$ (R a y s f e y d i n q l e r i) funksiyaları vasitəsilə təsvir olunur.

Zaman – selektiv F.-lər modeli əsas etibarilə belə fərziyyə əsasında qurulur ki, təsadüfi parametrləri kanal ilə dalğa keçərkən onun kompleks qurşayıcısı təsadüfi zaman funksiyasına, adətən, kompleks Qauss prosesinə vurulur.

Əd.: [1] К е н н е д и Р., Каналы связи с замираниями и рассеянием, пер. с англ., М., 1973.

FEYNMAN – KAS DÜSTURU « Фейнмана – Каца формула; Feynman – Kas formula » – bax, *Stoxastik differensial həndəsə*.

FƏRQ PSEVDOMOMENTİ « разностный псевдомомент; difference pseudomoment » – bax, *Pseudomoment*.

FƏRQLƏR FUNKSİYASI, METEOROLOJİ İTKİLƏRİN « разностная функция метеорологических потерь; difference function of meteorologic losses » – bax, *Meteoroloji itkilər funksiyası*.

FƏRQLƏR ŞKALASI « разностей шкала; difference scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

FƏRQLİ ÖLÇMƏLƏRİN XARİC OLUNMASI « выделяющихся измерений исключение; outliers detection » regression analizdə – asılı olmayan

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ xətalırlı

$$y_i = \theta^T f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

xətti *regression eksperiment* modelinə adekvat olmayan ölçmələrin qüsurlusunu seçib ayırma kriteriləridir.

Şövene kriterisinə görə y_i ölçməsi o halda qüsurlu hesab olunur ki, $\hat{\theta}^T f(\cdot)$ -nin ən kiçik kvadratlar metodu ilə approksimasiyasının uyğun studentləndirilmiş qalığı –

$$e_i^* = |y_i - \hat{\theta}^T f(x_i)| \hat{\sigma}_i^{-1} (1 - f^T(x_i) M^{-1} f(x_i))^{-1/2}$$

kritik sərhədi aşmış olsun (burada $\hat{\sigma}_i$ – y_i -nin ölçmə nəticələri nəzərə alınmadığı hal üçün y_i -nin statistik qiymətidir və

$$M = \sum_{i=1}^N f(x_i) f(x_i)^T). \text{ Bu kriteri üçün sərhədlər L. N. Bolşev}$$

və onun şagirdləri tərəfindən araşdırılmışdır. F. ö. x. o.-nın bir çox evristik kriteriləri vardır ki, bunlar y_i ölçməsi üçün Kuk statistikası Kuk statistikasında, qalıqlar qrafikində h_i kəmiyyətinə:

$$h_i = f^T(x_i) M^{-1} f(x_i)$$

əsaslanır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., Избранные труды, М., 1987, с. 224–42; [2] Д р е й п е р Н., С м и т Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн. 1–2, М., 1986; [3] Atkinson A. C., Plots, transformations and regression, Oxf., 1985.

FƏZA(sı) 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyaların «пространство функций безразрывов 2-го рода: space of right-continuous functions with left limits / space of CADLAG functions» – qiymətləri hər hansı metrik fəzadan olan, $[a, b]$ -nin hər bir nöqtəsində sağdan limiti olan, $(a, b]$ -nin nöqtələrində soldan limiti olan $[a, b]$ parçasında funksiyalar sinfidir. Adətən, fərz olunur ki, 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-dan olan funksiyaların qiymətləri daxili nöqtələrdə birtərəfli limitlərdən biri ilə üst-üstə düşür. Markov proseslərinin seçimi funksiyaların təbii şərtləri bu fəzalara aid olur. Təsadüfi proseslər üçün bir çox mühüm limit teoremləri 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar fəzasında ehtimal ölçülərinin zəif yığılması haqqında müddəalardır.

Əksər hallarda 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-nin tərifini daraltmaq münasibdir: fərz olunur ki, $D = D[0, 1]$, – $[0, 1]$ -də soldan kəsilməz, $(0, 1]$ -in nöqtələrində soldan limiti olan, təyin olunma oblası $[0, 1]$ olan bütün həqiqi funksiyalar çoxluğu.

D – Banax fəzasıdır və $\|x\| = \sup \{ |x(t)| : t \in [0, 1] \}$ bu fəzada normadır, D -nin altfəzası isə kəsilməz funksiyalar fəzası – $C[0, 1]$ -dir.

Limit teoremlərində D fəzası

$$d(x, y) = \inf \{ \|x \circ \lambda - y\| + \|\lambda - i\| : \lambda \in \Lambda \}$$

metrikasının doğurduğu Skoroxod topologiyası (bax, [1], [2]) ilə verilir, burada $x \circ \lambda \equiv x(\lambda(t))$, $i(t) \equiv t$, Λ , – $[0, 1]$ -i özünə inikas eldiren bütün kəsilməz artan funksiyalar çoxluğudur.

(D, d) metrik fəzası separabeldir, lakin tam deyildir. İsbat olunmuşdur ki, D -də ehtimal metrika vermək mümkündür ki, bu metrika Skoroxod topologiyasını doğurmaqla yanaşı D -ni tam metrik fəzaya çevirir: belə metrika aşkar təsvir edilmişdir (bax, [3], [4]).

D fəzası metrikaçı

$$d_0(x, y) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \text{ehtimal } \lambda \in \Lambda \text{ tapılar ki, } \|x \circ \lambda - y\| \leq \varepsilon$$

$$\sup \{ |\ln((\lambda(t) - \lambda(s))/(t - s))| : t \neq s \} \leq \varepsilon \}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan tam separabel metrik fəzadır.

D -nin kompakt altçoxluqlarının xarakterizasiyası [3]-də alınmışdır. $A \subset D$ çoxluğunun Skoroxod topologiyasında, yalnız və yalnız, o halda kompakt qapayıcısı vardır ki, $\|x\|$ norması A -da məhdud olsun və $w_x[0, \delta)$, $w_x[1 - \delta, 1)$, $w_x''(\delta)$ kəmiyyətləri $\delta \rightarrow 0$ olduqda $x \in A$ üzrə müntəzəm sıfıra yaxınlaşsınlar, burada

$$w_x(T) = \sup \{ |x(s) - x(t)| : s, t \in T \},$$

$$w_x''(\delta) = \sup \{ \min \{ |x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)| \} :$$

$$t_1 \leq t \leq t_2, t_2 - t_1 \leq \delta, t_1, t, t_2 \in [0, 1] \}.$$

Əksər hallarda D -də $\|\cdot\|$ norması ilə doğurulan müntəzəm topologiyaya da baxılır. Bu topologiya Skoroxod topologiyasından güclüdür. $C[0, 1]$ altfəzasında (kəsilməz funksiyalar fəzasında) müntəzəm topologiya və Skoroxod topologiyası eyni bir topologiya doğurur. Banax fəzası $(D, \|\cdot\|)$ separabel fəza deyildir. Bu fəzada paylanmalar haqqında məzmunlu limit teoremlərini bütün sferalan özündə saxlayan $\mathcal{B}$ σ -cəbrində (bu σ -cəbr Borel σ -cəbrindən kəsibdir) təyin olunmuş ölçülərə baxdıqda almaq olar və bu halda zəif yığılma məhdud kəsilməz $\mathcal{B}$ – ölçülən funksiyaların inteqrallarının yığılması kimi anlaşılmalıdır (bax, [5]), separabel ölçü adlanan ölçüləri də ayırmaq olur (bax, [6]). Bax, C – yığılma(sı) təsadüfi proseslərin.

Qiymətləri metrik fəzadan olan 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-də bezi topologiyalar [2]-də şərh olunmuşdur və bunlar Skoroxod topologiyasından zəif topologiyalardır.

Əd.: [1] С к о р о х о д А. В., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, в. 3, с. 364–67; [2] С к о р о х о д А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [3] К о л м о г о р о в А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 239–47 (в кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 384–93); [4] П р о х о р о в Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [5] D u d l e y R. M., «Ill. J. Math.», 1966, v. 10, № 1, p. 109–26; [6] Б и л л и н г с л и П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [7] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41; [8] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов.

S – FƏZA « S – пространство; S – space» – bax, Banax fəzası, Sazonov xassəli.

σ – FƏZA « σ – пространство; σ – space» – bax, σ – Topoloji fəza.

FƏZA, σ TOPOLOGİYA İLƏ « пространство с σ – топологией; space with σ – topology » – bax, σ – Topoloji fəza.

FƏZASI, ELEMENTAR HADİSƏLƏRİN « пространство элементарных событий; space of elementary events » – bax, *Stoxastik eksperiment*.

FƏZASI, HƏLLƏRİN (QƏRARLARIN) « пространство решений; decision space », həllər fəzası – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

FƏZASI, KƏSİLMƏZ FUNKSİYALARIN « пространство непрерывных функций; space of continuous functions » – topoloji $\mathcal{X}$ fəzasının heqiqi kəsilməz funksiyalar çoxluğu $C(\mathcal{X})$ –dir; qiymətləri bəzi metrik fəzalardan olan kəsilməz funksiyalar F -na da baxılır.

$\mathcal{X}$ -dən olan kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyası ilə verilən $C(\mathcal{X})$ fəzası Hausdorff lokal qabarıq fəzasıdır. Əgər $\mathcal{X}$ -dən olan kompaktların ele artan (hesabi) ardıcılığı varsa ki, ixtiyari kompakt bu ardıcılığın çoxluqlarından birinin tərkibində olsun, onda $C(\mathcal{X})$ – metrikləşən fəzadır (bax, [1], [2]).

Əgər K kompakt metrik fəza olarsa, onda $C(K) \|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in K\}$ norması təyin olunmuş separabel Banax fəzasıdır. $(C(K), \|\cdot\|)$ -ya qoşma fəza – K -nın Borel σ – cəbrində hesabi – additiv ölçülər çoxluğudur (bax, [3]). $C(K)$ – kompaktın müntəzəm məhdud və eyniderecədə kəsilməz funksiyalar çoxluğudur.

$K=[0, 1]$ olduqda kəsilməz funksiyalar F . 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan *funksiyalar fəzasının* bir hissəsini təşkil edir.

Borel σ – cəbri $C(K)$ silindrik σ – cəbrlə üst-üstə düşür. $C[0, 1]$ fəzası separabel Banax fəzaların sinfində universaldır, lakin refleksiv deyildir, bazisi var, lakin şərtsiz bazisə malik deyildir (bax, [4]).

Əd.: [1] Б у р б а к и Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1975; [2] К е л л е у J. L., N a m i o k a I., Linear topological spaces, N. Y. – [a. o.], 1963; [3] Ш и л о в Г. Е., Г у р е в и ч Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [4] Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [5] Функциональный анализ, 2 изд., 1972.

FƏZASI, ÖLÇÜLƏRİN « пространства мер; space of measure » – zəif yığılma topologiyası təyin olunmuş hər hansı fəzanın Borel σ – cəbrində bütün *requlyar ölçülərin* çoxluğudur. $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ – topoloji və ya σ – topoloji fəza, $\mathfrak{G}$ – açıq çoxluqlar sinfi, $C(\mathcal{X})$, – $\mathcal{X}$ -də bütün məhdud kəsilməz, norması $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ olan funksiyaların Banax fəzası olsun. Əgər $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ normal fəza olarsa, onda $C(\mathcal{X})$ -ə qoşma $C^*(\mathcal{X})$ fəzası $\mathfrak{G}$ sinfinin doğurduğu çoxluqlar cəbri $\alpha(\mathfrak{G})$ -də bütün yüklərin fəzasıdır. Buna görə də, $C(\mathcal{X})$ -də ixtiyari xətti Φ funksionali

$$\Phi(f) = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x)$$

integralı ilə ifadə olunur, burada μ *yükdür* (bax, [1]).

$C^*(\mathcal{X})$ -də topologiyaya baxıldığı fərz olunur, bu topologi-

yada ixtiyari μ_0 yükünün açıq ətrafları $C(\mathcal{X})$ fəzasından $f_1, \dots, f_n$ funksiyalar toplusu və $\varepsilon > 0$ ədədi ilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\left\{ \mu : \left| \int_{\mathcal{X}} f_i(x) d\mu(x) - \int_{\mathcal{X}} f_i(x) d\mu_0(x) \right| < \varepsilon \right\}.$$

$C^*(\mathcal{X})$ -də belə topologiya $*$ – zəif topologiya və ya $\mathcal{X}$ – topologiya adlanır (bax, [2]).

$C^*(\mathcal{X})$ -dən olan hər bir hesabi – additiv yükün $\sigma(\mathfrak{G})$ Borel σ – cəbrində verildiyini hesab etmək olar, belə ki, o, $\alpha(\mathfrak{G})$ -dan $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinə yeganə surətdə davam olunur. $C^*(\mathcal{X})$ -də $*$ – zəif topologiyasının doğurduğu topologiya təyin olunmuş, bütün mənfioqlmayan hesabi – additiv $M \subseteq C^*(\mathcal{X})$ yüklərin çoxluğu ölçülər fəzası adlanır; M -də alınan topologiya zəif topologiya adlanır. Bu topologiyada yığılma ölçülərin zəif yığılması adlanır. M çoxluğu $C^*(\mathcal{X})$ -də qapalı deyildir. Onda M -dən olan ölçülərin şəbəkəsi M -dən olmayan yükə yığıla bilər. $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ tam mənası ilə normal fəza olarsa, ölçülər fəzası M -dən olan ölçülər ardıcılığı (μ_n) μ -yə zəif yığılarsa, onda $\mu \in M$ (bax, [1]).

Əgər $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ metrikləşən fəza olarsa, onda ölçülər fəzası M -də Levi – Proxorov metriksəsi adlanan $\pi(P, Q)$ metriksini daxil etmək olar. π metriksinin doğurduğu topologiya zəif topologiya ilə həmişə üst-üstə düşməyə bilər. Əgər $\mathcal{P} \subseteq M$ ölçülərin tam ailəsi olarsa, onda $\mathcal{P}$ -də zəif topologiya olan və π metriksəsi ilə doğurulan topologiya üst-üstə düşür. Əgər $\mathcal{X}$ tam separabel metrik fəza olarsa, onda zəif topologiya və π metriksəsi ilə doğurulan topologiya bütün M -də üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [3] Прохоров Ю. В., «Теория вероятностей и ее примен.», 1950, т. 1, в. 2, с. 177–238; [4] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [5] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах, пер. с франц., М., 1977.

FƏZASI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin « пространство состояний цепи Маркова; state space of a Markov chain » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zəncirləri üçün.

FƏZASI, VƏZİYYƏTLƏRİN təsadüfi prosesin « пространство состояний случайного процесса; state space of a random process » – bax, *Fəza fəzası*.

FƏZAVİ STATİSTİK STRUKTUR « пространственная статистическая структура; spatial statistical structure » – bax, *Statistik struktur*.

Fİ – ŞAXƏLƏNƏN PROSES « Фи – ветвящийся процесс; ϕ – branching process », ϕ – şaxələnən proses, – özündən sonrakı nəslə doğuran hissəciklərin sayı

cari nسلin ölçüsünün funksiyası olan, diskret zamanlı, *requlyar şaxelənən prosesdir*. Məs., əgər $\varphi(\cdot)$ funksiyası və asılı olmayan eyni qanunla paylanmış $\zeta_i(t)$ təsadüfi kəmiyyətləri tam mənfi olmayan qiymətlər alırsa, onda F - φ p-in $(t+1)$ -ci nسلinin hissəciklərinin sayı $\zeta(t+1)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\zeta(t+1) = \zeta_1(t) + \dots + \zeta_{\varphi(z(t))}(t).$$

$\varphi(n)=n$ olduğu hal Qalton - Vatson şaxelənən prosesinə uyğundur; $\varphi(n)=n+c$, $c=\text{const} > 0$ - immiqrasiyalı şaxelənən prosese; $\varphi(n) = \max(0, n-C)$, $C=\text{const} > 0$ halı isə emiqrasiyalı şaxelənən prosese uyğundur və s.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 15-25; [2] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 319-39; [3] Янев Н. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 433-40; [4] Ватутин В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 3, с. 482-97.

FİDUSİAL EHTİMAL « фидуциальная вероятность; fiducial probability » - namelum parametr haqqında aprior paylanmadan asılı olmayan fidusial (güvenilə bilən) mülahizələrə əsaslanan ehtimaldır. Qoyulan məsələyə fidusial mülahizələrdən istifadə etməkə yanaşma R. A. Fişer (R. A. Fisher) tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu metodun mahiyyəti qısaca aşağıda verilir. T - baxılan ailə üçün kafi statistika, $g(T, \theta)$, - T və θ -nin ehl funksiyası olsun ki, onun paylanması θ -dan asılı olmasın.

$$P\{g(T, \theta) < \lambda | \theta\} = F(\lambda) \quad (1)$$

olsun.

$$g(T, \theta) < \lambda \quad \text{və} \quad \theta > h(T, \lambda) \quad (2)$$

bərabərsizliklərinin ekvivalent olduğu fərz olunur. Onda (1) bərabərliyini

$$P\{\theta > h(T, \lambda)\} = F(\lambda) \quad (3)$$

şəklində yazmaq olar. Lakin T_0 , - T təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş qiymətidir,se,

$$P\{\theta > h(T_0, \lambda)\} = F(\lambda) \quad (4)$$

hökmünün ne dərəcədə doğru olub-olmadığı mübahisəlidir.

Məs., $N(\theta, 1)$ normal qanunu ilə verilmiş n həcmli seçimin seçimi ortası $\bar{x}$ olsun. Onda $y = (\bar{x} - \theta) \sim N(0, 1/\sqrt{n})$ və

$$P\left\{\bar{x} - \theta < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} = \int_{-\infty}^{\lambda/\sqrt{n}} N\left(y|0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) dy = \Phi(\lambda).$$

Əgər müəyyən bir seçim üçün $\bar{x} = 5.832$ olarsa, onda fidusial mülahizələrə əsasən,

$$P\left\{\theta > 5.832 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi(\lambda) \quad (5)$$

olduğu alınır. Lakin belə mülahizələr mübahisə doğura bilər. Birincisi, θ təsadüfi kəmiyyət olmaya da bilər və ola bilər ki, o, hər hansı bir qeyd olunmuş, amma namelum kəmiyyət olsun. İkincisi, əgər θ hətta namelum aprior paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsa belə, (5) tipli hökmlər aprior paylanmadan asılı olmayaraq düzgün olmaya da bilər. (5) düsturunu ehtimal hökmü kimi müxtəlif üsullarla interpretasiya etməyə cəhd etmək mümkündür. Bu istiqamətdə bezi mülahizələr A. P. Dempster (A. P. Dempster, 1963), D. A. S. Frezer (D. A. S. Fraser, 1961), Sprota (1961) məxsusdur.

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., 1968; [2] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528-35; [3] Frazer D., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261-80; [4] Климов Г. П., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 763-65.

FİDUSİAL İNTERVAL « фидуциальный интервал; fiducial interval » - $F^*(\theta|x) = 1 - F(x|\theta)$ fidusial paylanma funksiyasından istifadəyə əsaslanan, *etibarlı intervala* analoji olan intervaldır, burada x - müşahidələr nəticəsi, θ - müşahidənin paylanma funksiyası $F(x|\theta)$ -nin namelum parametri. θ və x ədədi qiymətli olduğu hallarda x əvəzinə kafi statistika götürülür və $F^*(\theta|x)$ θ arqumentinin funksiyası kimi paylanma funksiyasıdır. Belə hallarda θ üçün $1 - \alpha$ hüdudlu F , i. -

$$\inf_x \{F^*(\theta_2|x) - F^*(\theta_1|x)\} = 1 - \alpha$$

şərtlə təyin olunur. F , i.-in uçları olan $\theta_1(x)$ və $\theta_2(x)$ statistikaları bir çox hallarda parametrin mümkün olan qiymətləri üçün təminədiyi sərhədlər olur.

F , i. - $F^*(\theta|x)$ funksiyası ilə ifadə olunan kifayət qədər böyük *fidusial ehtimala* malik olan və namelum parametrin qiymətlərini daxilinə alan intervaldır. İnvariant statistik modelər üçün fidusial intervallar etibarlı intervallarla onların ehtimalları ilə birlikdə üst-üstə düşür, bu şərtlə ki, invariant fidusial intervallarda olduğu kimi invariant etibarlı intervallarla kifayətlənilməlidir. Bu halda intervala parametrin ehl qiymətləri daxil olunur ki, bu qiymətlər müşahidə nəticəsində paylanma funksiyasının qiymətlərinin verilmiş ehtimalla qeyd olunmuş çoxluqdan olmasını təmin etsin.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528-35; [2] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

FİDUSİAL PAYLANMA « фидуциальное распределение; fiducal distribution » - $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsinin θ parametrinin *paylanması* P_x^* -dir. Bu anlayış ədədi θ və x -lər üçün R. Fişer tərəfindən ehl hal üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]) ki, bu halda x müşahidəsinin empirik paylanma funksiyası $F(x|\theta)$ θ -nin artması ilə ehl azalır ki, x qeyd olunduqda θ -nin funksiyası kimi baxılan $F^*(\theta|x) = 1 - F(x|\theta)$ paylanma funksiyasının xassələrini ödəyir (x əvəzinə kafi statistika istifadə olunduğu zaman bir çox hallar belə vəziyyətə gətirilir).

F , p. invariant paylanmalar ailəsi üçün təyin olunmuşdur (bax, [2] - [4]). g çevirmələrinin qrupu G -nin X və Θ -da təsir göstərdiyi fərz olunur. Əgər x -in paylanması P_θ olduqda $g \cdot x$ -in paylanması $P_g(\theta)$ olarsa, paylanmalar ailəsi - *invariant*

paylanmalar ailəsi adlanır. Bu halda $\delta: X \rightarrow D$ ekvariant həlledici qaydalarına (əle qaydalara ki, $\delta(gx) = g\delta(x)$ bərabərliyi bütün x və g -lər üçün ödənilsin) və $L_0(d)$ invariant itki funksiyalarına (əle funksiyalara ki, $L_g\theta(gd) = L_0(d)$ bərabərliyi bütün θ , d və g -lər üçün ödənilsin) baxılır. Əgər G qrupunun Θ çoxluğunda təsiri tranzitivdirsə, onda $\mathcal{P}$ ailəsi müəyyən bircinslik xassəsinə malikdir: θ_0 parametrinin qeyd olunmuş qiyməti və paylanması P_{θ_0} olan x müşahidəsi üçün, g elementi G qrupundan olduqda, gx elementi $\mathcal{P}$ ailəsinin bütün elementlərini əhatə edir.

D , Θ -da ehtimal ölçüləri çoxluğu olsun [müəyyən $\mathcal{B}(\Theta)$ və $\mathcal{B}(X)$ σ -cəbrlərinin verdiyi fərz olunur; odur ki, G qrupunun çevirmələri ölçüləndir]. $B \in \mathcal{B}(\Theta)$ üçün G -nin D -yə təsiri $(g\alpha)(B) = \alpha(g^{-1}(B))$ münasibəti ilə verilmiş olsun. F. p. meylsizlik şərtini

$$\int L_0(\alpha) d\beta(\theta) \geq \int L_0(\beta) d\beta(\theta)$$

tip bərabərsizliyi ilə ödəyən hər bir invariant itki funksiyası üçün ekvariant həllər qaydaları sinfində $\int L_0(\delta(x)) dP_0(x)$ riskini minimallaşdıran Θ -da ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathcal{P}^* = \{P_x^*: x \in X\}$ ilə ifadə olunur.

Əgər G qrupu X -ə tranzitiv təsir edirsə, onda F. p.-lər ailəsi $\mathcal{P}^* = \{P_x^*: x \in X\}$ üçün invariantlıq və $S(x)$ invariant ailələri üçün $P_0\{\theta \in S(x)\} = P_x^*\{\theta \in S(x)\}$ fidusial ehtimallar və etibarlı ehtimalların üst-üstə düşməsi tələbləri ilə birqiyəmətlilik olaraq seçilir [$S(x)$ -in invariantlığı $\theta \in S(x)g \in G$ şərtindən $g\theta \in S(gx)$ şərtinin ödənilməsidir].

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528–35; [2] Flaser D., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261–80; [3] Климов Г. П., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 763–65; [4] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

FİKTİV VƏZİYYƏT « фиктивное состояние; fictitious / fictions state » – prosesin trayektoriyalarını nizama salmaq məqsədilə Markov prosesinin faza fəzasına daxil edilmiş əlavə α vəziyyətidir. F. v. termini [1]-də P. Levi tərəfindən vəziyyətlər çoxluğu hesabı Markov proseslərinin araşdırılmasında daxil edilmişdir. Məs., əgər ζ prosesi ardıcıl olaraq 1, 2, 3, ..., sonra isə ..., -3, -2, -1 vəziyyətlərində olursa və n vəziyyətində $\sum M\tau_n < \infty$ şərtini ödəyən τ_n müddəti ərzində qalarsa, onda 1, 2, 3, ..., vəziyyətlər ardıcılığından ..., -3, -2, -1 ardıcılığına təsadüfi sıçrayış anında keçdikdə, təbiidir ki, trayektoriyaların real vəziyyətinin heç birində deyil, fiktiv bir ∞ vəziyyətində olduğunu qəbul etmək olar. t -nin ixtiyari $t > 0$ qiymətində ζ_t -nin fiktiv vəziyyətlər çoxluğunda olması ehtimalı sıfır bərabərdir. Markov prosesinin faza fəzasının tamamlanması ideyası sonradan giriş və çıxış şərtlərinin qurulması istiqamətində inkişaf etmişdir (bax, Markov prosesi; sərhəd şərti).

Əd.: [1] Levy P., Ann. sci. École norm. supér., 1951, t. 68, p. 327–81; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

FİLTR FAZASI « фильтра фаза; filter phase » – ələ fazadır ki, ötürücü funksiyaların filtrinin bu fazası kompleks kəmiyyət kimi təsvir olunur.

Bax, Xətti filtr.

FİLTRASIYA(sı) semimartinqalın « фильтрация семимартингала; filtering of semimartingale » – bax, Semimartinqalın filtrasiyası.

FİLTRASIYA(sı) signalın « фильтрация сигнала; signal filtering » – signalın küylə additiv qarışıqından onun ayrılması prosesidir. Signalın F. məsələsi $s(t)$ signalının t anında $x(u)$, $u \in [t_0, t_1]$ təsadüfi prosesinin müşahidələri üzrə $s(\cdot)$ ilə bağlı $\hat{s}(t)$ statistik qiymətinin qurulmasıdır. Əgər $s(\cdot)$ -in statistik xarakteristikaları və $x(\cdot)$ məlum olarsa, onda bir qayda olaraq, kvadratik orta xətası $M|\hat{s}(t) - s(t)|^2$ ən kiçik olan $\hat{s}(t)$ statistik qiymətini qurmağa cəhd edilir. Ən çox signalın xətti filtrasiyası istifadə olunur. Bu halda optimal statistik qiymət

$$\hat{s}(t) = \int_{t_0}^t h(t, \lambda) x(\lambda) d\lambda$$

integralı ilə ifadə olunur, $h(t, \lambda)$ funksiyası isə

$$M x(u) s(t) = \int_{t_0}^t h(t, \lambda) M x(\lambda) x(u) d\lambda, \quad u \in [t_0, t_1]$$

integral tənliyini ödəyir.

$x(\cdot)$ və $s(\cdot)$ prosesləri birgə Gauss paylanmasına malik olduğu halda, xətti metodlar signalın F.-nin minimal xəta ilə olmasını təmin edir. Bu metodların signalın F. üçün ümumiləşməsi qeyri-xətti stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlə formalaşaraq signalın F.-nin ümumi stoxastik tənliklərinin alınması ilə nəticələnir (bax, [2]).

Əd.: [1] Ван Трис Г., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Липцер Р. Ш., Шнряев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

FİLTRASIYA(sı) təsadüfi proseslərin « фильтрация случайных процессов; filtering of random processes » – bax, Təsadüfi proses: filtrasiya.

FİLTRASIYA TƏNLİYİ diffuzion prosesin filtrasiya sıxlığı üçün « фильтрации уравнение для фильтрационной плотности диффузионного процесса; filtering equation for filtering density of a diffusion process » – diffuzion proses üçün Lebeq ölçüsünə nəzərən filtrasiya tənliyini ödəyən ölçünün sıxlığı $\pi(t, x)$ üçün aşağıdakı qeyri-xətti tənlikdir:

$$\pi(t, x) = \varphi(t, x) / \int \varphi(t, x) dx,$$

$\varphi(t, x)$ təsadüfi meydanı isə əmsalları diffuzion prosesin əmsalları üzrə təyin olunan xətti stoxastik 2-ci tərtib parabolik tənliyin həllidir. Bu tənlik, adətən, normallaşdırılmayan filtrasiya sıxlığının tənliyi adlanır. $\pi(t, x)$

və $\varphi(t, x)$ sıxlıqları üçün F. t. hal-hazırkı dövrə qədər yaxşı öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1983.

FİLTRASIYA TƏNLİYİ diffuzion proseslər üçün « **филтрации уравнение** для диффузионных процессов; **filtering equation** for diffusion processes » – *şerti riyazi gözlemə* üçün

$$\pi_t[f] = M[f(\zeta(t))|Y(s), s \leq t]$$

tənlidir, burada $\zeta(t)$ – diffuzion prosesin komponentlərinin müəyyən bir hissəsidir (şerti olaraq «müşahidə olunmayan» adlanan), $Y(s)$ – komponentlərin qalan hissəsi («müşahidə olunan»), f – verilmiş funksiyadır. $\pi_t[f]$ üçün tənlik ümumlaşmış menada anlaşılır, yeni şerti riyazi gözlemə ilə verilən ölçüyə nəzərən F. t. filtrasiya nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayır. F. t. ən ümumi formada [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

FİLTRİN GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI « **филтра коэффициент усиления; gain of a filter** » – bax, *Xətti filtr*.

FİLTRLƏNMİŞ PUASSON PROSESİ « **профильтрованный пуассоновский процесс; filtered Poisson process** » – bax, *İmpulsal Puasson prosesi*.

FİNAL EHTİMAL « **финальная вероятность; final probability** » – vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ sonlu və ya hesabi çoxluq olan bircins Markov zəncirinin i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$ -lərin $n \rightarrow \infty$ olduqda hər bir $j \in \mathcal{E}$ üçün limiti mövcud olan, i -dən asılı olmayan və $\sum_j p_j = 1$ şərtini ödəyən p_j ehtimalına deyilir. F. e.-lan zəncir

cinin yeganə stasionar paylanmasını təşkil edir. Sonlu Markov zəncirində F. e., yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, $\mathcal{E}$ periodu 1-ə bərabər olan vəziyyətlərin yeganə bir mühüm sinfindən və ola bilər ki, əhəmiyyətsiz vəziyyətlər sinfindən ibarət olsun (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*). Hesabi zəncirdə F. e.-in varlığı üçün bütün mühüm vəziyyətlərin çoxluğu C -nin 1 periodlu yeganə müsbət sinif təşkil etməsi zəruridir; əgər $\mathcal{E} = C$ olarsa, onda bu şərt ələ kafidir. p_j^{-1} kəmiyyəti i vəziyyətindən j vəziyyətinə orta qayıdış müddətinə bərabərdir.

Misal (uducu vəziyyətli təsadüfi dolaşma).

$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p_{00} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, $0 < p < 1$, $i = 1, 2, \dots$ olsun, burada $\mathcal{E} = C \cup R$, $C = \{0\}$ isə müsbət mühüm sinif, $R = \{1, 2, \dots\}$ – əhəmiyyətsiz vəziyyətlər sinfidir. Əgər $p \leq 1/2$ olarsa, onda F. e.-ləri vardır və $p_0 = 1$, $p_j = 0$, $j \geq 1$. Əgər $p > 1/2$ olarsa, onda $i = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərində

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}(n) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0, \quad j \geq 1$$

olur və F. e.-lan yoxdur.

Bax, *Şaxələnen proses*.

294 FİNAL

FİNAL EHTİMAL şaxələnen prosesin « **финальная вероятность** ветвящегося процесса; **final probability** of a branching process » – bax, *Şaxələnen proses; final ehtimalları*.

FİNAL ÖDƏMƏ « **финальная плата; final reward** » – bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

FİNAL TİP şaxələnen prosesdə « **финальный тип** в ветвящемся процессе; **final type** in a branching process » – final sinfe daxil olan hissəciklər tipidir (bax, *Şaxələnen proses hissəciklərinin tipləri sayı sonlu*). Final sinfe daxil olan hissəciklər çoxaldıqda bu sinfdəki hissəciklərin ümumi sayı dəyişmir və bu sinfdən olan hər hansı final tipin bir hissəciyinə sanki yəqin çevrilir və ya ola bilər ki, digər sinflərin hissəciklərinin hər hansı bir neçəsinə çevrilsinlər.

FİNİT AXIN « **финитный поток; finitary flow** » – bax, *Təsadüfi axın*.

FİNİT POTENSİAL « **финитный потенциал; finite-range potential** » – bax, *Potensial(ı) Gibbs meydanının*.

FİNİT SƏRHƏD « **финитная граница; finitary boundary** » – bax, *Birölçülü diffuziya; sərhədlərin təsnifatı*.

FİSK İNTEQRALI « **Фиска интеграл; Fisk integral** » – bax, *Stratonoviç stoxastik integralı*.

FİSK – STRATONOVİÇ İNTEQRALI « **Фиска – Стратоновича интеграл; Fisk – Stratonovich integral** » – bax, *Stratonoviç stoxastik integralı*.

FİŞER APPROKSİMASIYASI « **фишеровская аппроксимация; Fisher approximation** » – bax, *Fişer çevirməsi*.

FİŞER ÇEVİRMƏSİ « **Фишера преобразование; Fisher transformation** » – χ^2 – kvadrat paylanmasına

təbə təsadüfi kəmiyyəti normalaşdıran çevirmədir. χ_n^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər χ^2 – kvadrat paylanmasına təbə təsadüfi kəmiyyət olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda mərkəzi limit teoreminə əsasən, $\{\chi_n^2\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, asimptotik olaraq parametrləri $M\chi_n^2 = n$, $D\chi_n^2 = 2n$ olan normal qanunla paylanır. Daha dəqiq, n -in böyük qiymətlərində, ixtiyari $x \in \mathbb{R}$, x üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\begin{aligned} P\left\{ \frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \leq x \right\} &= \Phi(x) - \frac{2}{3} \phi^2(x) \frac{1}{\sqrt{2n}} + \\ &+ \left[\frac{2}{9} \phi^{(5)}(x) + \phi^{(3)}(x) \right] \frac{1}{2n} + O\left[\frac{1}{n^{3/2}} \right] = \\ &= \Phi(x) + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır.

$\phi(x) = \Phi'(x)$, $\phi^{(r)}(x) = \Phi^{(r+1)}(x)$.

R. Fişer digər normalaşdırıcı çevirmə də təklif etmişdir və bu çevirmədə o, belə bir faktdan istifadə etmişdir ki, n -in böyük

qiymətlərində $\sqrt{2\chi_n^2}$ təsadüfi kəmiyyəti təqribi olaraq parametrləri

ləri $\sqrt{2n-1}$ və 1-ə bərabər normal qanunla paylanır. Daha dəqiq, $n \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari $x \in \mathbb{R}$, x üçün

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \leq x\right\} &= \Phi(x) - \frac{1}{6}\phi^2(x) \frac{1}{\sqrt{2n}} + \\ &+ \frac{1}{6}\left[\frac{1}{12}\phi^{(3)}(x) - \phi^{(3)}(x)\right] \frac{1}{2n} + O\left[\frac{1}{n^{3/2}}\right] = \\ &= \Phi(x) + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \end{aligned} \quad (2)$$

düsturu doğrudur. F. ç. Puasson paylanması *F i ş e r* *a p p r o k s i m a s i y a s ı* adlanan yaxşı aproksimasiyasını qurmağa imkan yaradır. ξ , $-\lambda$, $\lambda > 0$ parametrlili Puasson qanununa tabe təsadüfi kəmiyyət olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası üçün χ^2 – kvadrat terminlərində ixtiyari mənfi olmayan m ədədi üçün

$$\mathbf{P}\{\xi \leq m\} = \mathbf{P}\{\chi_{2m+2}^2 \geq 2\lambda\}$$

ifadəsi doğrudur; (2) düsturundan istifadə edərək Puasson paylanması üçün aşağıdakı Fişer normal aproksimasiyasını qurmaq olar:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi \leq m\} &\approx 1 - \Phi[\sqrt{4\lambda} - \sqrt{4(m+1)-1}] = \\ &= \Phi[\sqrt{4m+3} - 2\sqrt{\lambda}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Bu Fişer aproksimasiyasından $\lambda \geq 25$ qiymətlərində istifadə etmək tövsiyyə olunur. (3) aproksimasiyası faktiki olaraq nəticə kimi belə müddəadan alınır ki, $\lambda \rightarrow \infty$ olduqda $\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyəti asimptotik olaraq standart normal qanuna tabedir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55; [2] Б р а у н л и К. А., Статистическая теория и методология в науке и технике, пер. с англ., М., 1977; [3] G r e e n w o o d P. E., N i k u l i n M. S., A guide to chisquare testing, N. Y., 1996.

FİŞER z – ÇEVİRMƏSİ « Фишера z – преобразование; Fisher z – transformation » – seçimi *korrelyasion əmsalı* normallaşdıran çevirmədir. (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , ..., (X_n, Y_n) – eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan, normal qanuna tabe, ikiölçülü təsadüfi vektorlar olsun, bunların birgə paylanması aşağıdakı düsturla verilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_i < x, Y_i < y\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{(x-\mu_1)/\sigma_1} \int_{-\infty}^{(y-\mu_2)/\sigma_2} e^{-(u^2-2\rho uv+v^2)/2(1-\rho^2)} du dv, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbf{M}X_i, \quad \sigma_1^2 = \mathbf{D}X_i, \quad \mu_2 = \mathbf{M}Y_i, \quad \sigma_2^2 = \mathbf{D}Y_i, \\ \rho &= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{M}(X_i - \mu_1)(Y_i - \mu_2). \end{aligned}$$

Korrelyasiya əmsalı ρ X_i və Y_i təsadüfi kəmiyyətlərinin xətti asılılıq dərəcəsini xarakterizə edir, $|\rho| \leq 1$. Əgər normal

qanunun parametrləri μ_i , σ_i^2 və ρ naməlum olarsa, onda ρ üçün nöqtevi statistik qiymət kimi seçimi korrelyasiya əmsalı –

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

götürülür, burada

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

R. Fişer [1]-də göstərmişdir ki, r statistikasının ehtimal paylanması ρ parametridən asılıdır və $n \geq 3$ olduqda paylanma sıxlığı

$$p_n(r) = \begin{cases} \frac{2^{n-3}}{\pi \Gamma(n-2)} (1-\rho^2)^{(n-1)/2} (1-r^2)^{(n-4)/2} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right) \right]^2 \frac{(2\rho r)^m}{m!}, & |r| < 1, \\ 0, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur. R. Fişer [2]-də seçimi korrelyasiya əmsalı r -i normallaşdıran z – çevirməsini təklif etmişdir və

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \arg \operatorname{th} r$$

düsturu ilə təyin olunub, nə ρ , nə də ki, n -dən asılı olmur; n -in böyük qiymətlərində z statistikasını təqribi olaraq, aşağıdakı parametrləri normal qanunla paylanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-3)} \left[1 - \frac{3-\rho^2}{4(n-3)} + \dots \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}z = \frac{1}{n-3} \left[1 - \frac{\rho^2}{2(n-3)} - \frac{2-6\rho^2+3\rho^4}{6(n-3)^2} + \dots \right] \approx \frac{1}{n-3}.$$

z statistikasını $H_0: \rho = 0$ hipotezini yoxlamaq üçün tətbiq etmək məsləhətdir, bu halda o faktdan istifadə olunur ki, H_0 doğru olduqda z statistikasının paylanması təqribi olaraq standart normal paylanma olur.

Əd.: [1] F i s h e r R. A., «Biometrika», 1915, v. 10, p. 507–21; [2] F i s h e r R. A., «Metron», 1921, v. 1, № 4, p. 3–32; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Б р а у н л и К. А., Статистическая теория и методология в науке и технике, пер. с англ., М., 1977.

FİŞER DƏQIQ KRİTERİSİ « Фишера точный критерий; Fisher exact test » – bax, *Yeyts düzəlişi*. *Fişer – İrvin kriterisi*.

FİŞER F – PAYLANMASI « Фишера F – распределение; Fisher F – distribution ». F – paylanma, Fişer–Snedekor paylanması, Snedekor paylanması, – paylanmasının sıklık funksiyası

$$p_{ab}(x) = \frac{1}{B[a/2, b/2]} (a/b)^{a/2} x^{b/2-1} [1 + (a/b)x]^{-(a+b)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(0, \infty)$ -da toplanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*, burada $a, b > 0$ – sərbəstlik dərəcələri sayları adlandırılan parametrlər, $B(a, b)$ – beta – funksiyadır. $a > 2$ olduqda bu paylanma müsbət asimmetriyalı, modasını $x = (a-2)b/a(b+2)$ nöqtəsində alan unimodal paylanmadır. F – F – p.-nin riyazi gözləməsi $b > 2$ olduqda $b/(b-2)$ -yə, $b > 4$ olduqda isə $2b^2(a+b-2)/a(b-2)^2 \times \times(b-4)$ -ə bərabərdir. F – F – p. 2-ci növ *beta – paylanmaya* getirilir (*Pirson paylanmaları* sisteminin VI tipinin xüsusi halına). F – F – p.-na $a/2$ və $b/2$ parametrləri *qamma – paylanma* qanununa tabe uyğun X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri ilə ifadə olunan $F_{a,b} = bX_1/aX_2$ nisbətinin paylanması kimi baxmaq olar. $F_{a,b}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$ beta – paylanmanın paylanma funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$P\{F_{a,b} < x\} = B_{a/2, b/2} \left(\frac{(a/b)x}{1 + (a/b)x} \right).$$

Bu münasibətdən F – F – p. qiymətlərinin beta – paylanma cədvəlləri vasitəsilə hesablanılmasında istifadə olunur. Əgər $a = m$ və $b = n$ tam ədədlər olarsa, onda

$$F_{mn} = \frac{\chi_m^2}{m} \bigg/ \frac{\chi_n^2}{n} \quad (*)$$

– F – nisbət paylanması sərbəstlik dərəcələri sayları m və n olan *Fişer F – paylanma* adlanır, burada χ_m^2 və χ_n^2 – uyğun olaraq, sərbəstlik dərəcələri sayları m və n olan χ^2 – kvadrat paylanmaya tabe asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

F – F – p. riyazi statistikada fundamental rol oynayır və birinci növbədə iki seçimi dispersiyanın nisbətinin paylanması kimi meydana çıxır. $X_1, \dots, X_m$ və $Y_1, \dots, Y_n$ – (a_1, σ_1^2) və (a_2, σ_2^2) parametrləri normal qanunlu ümumi çoxluqlardan seçimlər olsun.

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2,$$

və

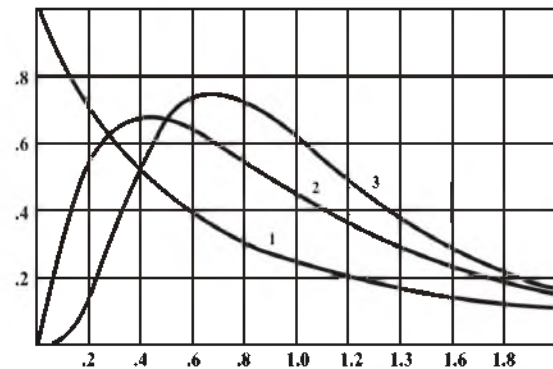
$$s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (Y_j - \bar{Y})^2$$

düsturları uyğun olaraq, σ_1^2 və σ_2^2 dispersiyalarının statistik qiymətləri olsun, burada $\bar{X} = \sum_i X_i / m$, $\bar{Y} = \sum_j Y_j / n$ –

seçimi ortalarıdır. Onda *dispersion nisbət* adlandırılan

$$F = \sigma_1^2 s_1^2 / \sigma_2^2 s_2^2$$

nisbətinin paylanması $\sigma_1 = \sigma_2$ hipotezi şərtində $m-1$ və $n-1$ sərbəstlik dərəcələri F – F – p.-dir (belə təyin olunan F – F – p. həmçinin *dispersion nisbət paylanması* kimi də adlandırılır).



Fişer F – paylanmasının sıklık funksiyaları: (1) $a = b = 2$; (2) $a = 4$, $b = 10$; (3) $a = b = 10$

F – kriteri $\bar{F}$ statistikasına əsaslanır və bu kriteri, xüsusi halda, iki ümumi çoxluğun dispersiyalarının bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün, *dispersion analizdə*, *regression analizdə*, *çoxölçülü statistik analizdə* istifadə olunur.

F – F – p.-nin universallığı onun digər paylanmalarla əlaqələrilə nəzərə çarpır. $m = 1$ qiymətində (*) düsturundakı F_{mn} -in kvadratının paylanması sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər *Styudent paylanmasıdır*. Normal paylanma və χ^2 – kvadrat paylanmasının köməyi ilə F – F – p.-nin müxtəlif *approximasiyaları* mövcuddur.

F – F – p.-nin *dispersion analizə* daxil olunması R. Fişerin (bax, [1]) adı ilə bağlıdır, lakin qeyd olunmalıdır ki, o, *dispersion nisbət* üçün z kəmiyyətindən istifadə etmişdi ki, bu kəmiyyət də

F ilə $z = \frac{1}{2} \ln F$ bərabərliyi ilə bağlıdır. z təsadüfi kəmiyyətinin

paylanması üçün R. Fişer, F – F – p. üçün cədvəlləri C. Snedekor (G. Snedecor, 1937) tərtib etmişlər. Müasir praktiki məsələlərdə daha sadə F – F – p.-ndan onun beta – paylanma və natamam beta – paylanma cədvəllərindən istifadə etməklə istifadəyə üstünlük verilir.

Bax, Dispersion analiz. Fişer z – paylanması.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805–13; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

FİŞER z – PAYLANMASI « Фишера z – распределение; Fisher z – distribution » – ehtimal sıklığı

$$p(x) =$$

$$= 2m_1^{m_1/2} m_2^{m_2/2} \frac{\Gamma((m_1 + m_2)/2) e^{m_1 x}}{\Gamma(m_1/2) \Gamma(m_2/2) (m_1 e^{2x} + m_2)^{(m_1 + m_2)/2}}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(-\infty, \infty)$ -da toplanmış kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$ – sərbəstlik dərəcələri sayları adlandırılan tam ədədlərdir. F , z – p -nın xarakteristik funksiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$f(t) = [m_2/m_1]^{i/2} \frac{\Gamma((m_1 + it)/2) \Gamma((m_2 - it)/2)}{\Gamma(m_1/2) \Gamma(m_2/2)}.$$

$(1/m_2 - 1/m_1)/2$ və $(1/m_2 + 1/m_1)/2$ uyğun olaraq riyazi gözlemə və dispersiyadır.

Əgər F təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcələri sayları m_1 və m_2 olan *Fişer F – paylanması* olarsa, onda

$$z = \frac{1}{2} \ln F \text{ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcə-}$$

ləri sayı m_1 və m_2 olan F , z – p -dir. Dispersiya nisbət paylanması kimi məlum olan *Fişer F – paylanması* ilə birlikdə R. *Fişer* tərəfindən [1]-də 1924-də dispersiya analiz ilk dəfə daxil olunmuşdur. *Fişer* belə hesab etirdi ki, statistik hipotezlerin yoxlanılmasında və dispersiya analizdə F , z – p əsas paylanma ola bilər. F , z – p elə o dövrdə cədvəlləşdirilmişdir və ilk araşdırmalar z statistikasına aid olmuşdur, lakin müasir riyazi statistikada daha sadə F statistikasından istifadə olunur.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 305–13; [2] Кендалл М., Стюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

FİŞER – İRVİN KRİTERİSİ « Фишера – Ирвина критерий; Fisher – Irwin test », *Fişer – Yeyts* kriterisi, *Fişer* dəqiq kriterisi, – *əlamətlərin qoşmalıq cədvəli* $\|f_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$ -də asılı olmamazlığın yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*, bu halda $f_i = \sum_j f_{ij}$.

$$f_j = \sum_i f_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \text{ cəmlərinin əvvəlcədən qeyd olunduq-}$$

ları fərz olunur. $H_0: p_{ij} = p_i p_j$ asılı olmamazlığın ilkin hipotezidir, p – eyni indeksli tezliklərə uyğun ehtimallardır, alternativ hipotez – heç olmazsa indekslərin bir cütü üçün bərabərsizlikdir. H_0 hipotezində ixtiyari seçim üçün və burada yeganə f_{11} təsadüfi kəmiyyəti üçün müşahidə ehtimalı

$$P\{f_{ij} | f_i, f_j, i, j = 1, 2\}$$

hiperhəndəsi paylanmaya gətirir və bu da H_0 -ın yoxlanılması üçün kriterinin alınması ilə nəticələnir (bax, [1], [2], [3]). Paylanma cədvəlləri və yaxınlaşmalar [2], [6]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] G i b b o n s J. D., в кн.: Encyclopedia of statistical sciences, v. 3, N. Y., 1982, p. 118–21; [4] L i e b e r m a n G. J., O w e n D. B., Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford (Calif.), 1961; [5] V i l a p l a n a J. P., Table of hypergeometric probability distribution, pt. 2, Panama, 1976; [6] Л и к е ш П., Л я г а Й., Основные таблицы математической статистики, пер. с чеш., М., 1985; [7] P r a t t J. W., G i b b o n s J. D., Concepts of nonparametric theory, N. Y., 1981; [8] F i s h e r R. A., «J. Roy. Statist. Soc.», 1935, v. 98, p. 39–54; [9] Y a t e s F., «J. Roy. Statist. Soc.», 1934, v. 1, p. 217–35; [10] I r w i n J. O., «Metron», 1935, v. 12, № 2, p. 83–94.

FİŞER – YEYTS KRİTERİSİ « Фишера – Йейтса критерий; Fisher – Yates test » – bax, *Fişer – İrvin kriterisi*.

FİZİKİ REALİZASIYA OLUNMA ŞƏRTİ « физической реализуемости условие; physical realizability condition » – bax, *İmpulsal keçid funksiyası*.

FİZİKİ SPEKTR SİXLİĞİ « физического спектра плотность; physical spectrum density » – bax, *Spektral nəzəriyyə(lər)i* qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

FİZİKİ STATİSTİK HAVA PROQNOZU « физико-статистический прогноз погоды; physical statistical weather forecasting » – bax, *Statistik proqnozu, havanın*.

FKJ – BƏRABƏRSİZLİYİ « ФКЖ – неравенство; FKG – inequality » – məs., ixtiyari maqnit meydanı ilə ferromaqnit modelləri üçün tez-tez istifadə olunan *korrelyasion bərabərsizlikdir*.

FOK FƏZASI « Фока пространство; Fock space » – hissəcikləri sayı qeyri – məhdud kvant sistemlərinin təsvirində istifadə olunan fəzaların xüsusi sinfi üçün istifadə olunan ümumi addır. H – hər hansı Hilbert fəzası («birhissəli» fəza) və $H_{s,a}^{\otimes n}$ – onun simmetrikləşmiş (s) və ya antisimmetrikləşmiş (a) tenzor qüvvət üstü olsun (n – hissəli vəziyyətlər fəzası; bax, [1]). Onda bu fəzaların düz cəmi

$$\mathcal{F}_{s,a}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{s,a}^{\otimes n}, \quad H_{s,a}^{\otimes 0} = C^1.$$

H üzərində simmetrik və ya bozon və antisimmetrik və ya fermion Fok fəzası adlanır. $H = L_2(\Omega, \mu)$ olduğu halda $[(\Omega, \mu) - \text{ölçülü fəza}]$, f. f. $\mathcal{F}_{s,a}(L_2(\Omega, \mu))$ sayı artan $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$ dəyişənlərinin simmetrik və ya antisimmetrik funksiyalarının sonsuz

$$\Phi = \{f_0, f_1(x), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots\}$$

ardıcılıqlarından ibarətdir. Bu halda

$$\|\Phi\|^2 = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |f_n(x_1, \dots, x_n)|^2 d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n).$$

Əd.: [1] Б е р е з и н Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Р и д М., С а й м о н Б., Метод современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977.

FOK İFADƏSİ kommutativ və antikommutativ münasibətlərin «**Фока представления коммутационных и антикоммутационных соотношений; Fock representation of commutative and anticommutative relations**» – bu münasibətlərin *Fok fəzasında* doğum və ölüm operatorları şəklində ən çox istifadə olunan ifadələri sinfidir. H Hilbert fəzasında L *prehilbert kompleks fəzası* üzərində kanonik kommutativ münasibətlərin və ya kanonik antikommutativ münasibətlərin ifadəsi H -da təsir göstərən və f -dən antixətli asılı

$(f \in L)$, $\{a(f), f \in L\}$ qapalı operatorlarının ehtə ailəsinə deyilir ki, bu operatorlar üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilsin (heç olmazsa, H -dan olan vektorların hər yerdə sıx hər hansı çoxluğunda):

$$\left. \begin{aligned} a(f_1)a(f_2) \mp a(f_2)a(f_1) &= 0, \\ a(f_1)a^*(f_2) \mp a^*(f_2)a(f_1) &= (f_1, f_2)E, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

burada $(\cdot, \cdot)$, $-L$ -də skalyar hasil, « $-$ » işarəsi kanonik kommutativ münasibətə, « $+$ » işarəsi kanonik antikommütativ münasibətə uyğundur, $a^*(f)$, $-a(f)$ operatoruna qoşma operatorudur. Əgər H fəzasında bütün $a(f)$, $f \in L$ operatorları ilə sıfır çevrilən və bu operatorların doğurduğu operatorlar $*$ - cəbrinə nəzərən tsiklik vektor (vakuüm) tapılırsa, (1) münasibətlərinin ifadəsi Fok ifadəsi adlanır. $\mathcal{F}_{s,a}(\bar{L})$ Fok fəzasında $\{a(f), f \in L\}$ ifadəsi buna bir misaldır, burada $\bar{L}$, $-L$ -in tamamlanmasıdır və tamamlanma $(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)^{s,a}$ [$\varphi_i \in L$ vektorlarının simmetrik (s) və ya antisimmetrik (a) tenzor hasilı] şəklində vektorlarda aşağıdakı düstur vasitəsilə təsir edən, L -in skalyar hasilı üzrə tamamlanmasıdır:

$$\begin{aligned} a(f)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)^{s,a} &= \\ = \sqrt{n}(\varphi_i, f)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \overset{\vee}{\varphi_i} \otimes \dots \otimes \varphi_n)^{s,a}, \end{aligned} \quad (2)$$

burada φ_i üzərində $\vee$ işarəsi bu vuruğun olmaması kimi anlaşılır və $a(f)1 = 0$, $1 \in \mathcal{F}_{s,a}(L)$ - vakuüm vektorudur.

(1) münasibətlərinin ixtiyari F , i. (2) ifadəsinə unitar ekvivalentdir. L sonluölçülü fəza olduğu halda (1) münasibətlərinin ixtiyari ifadəsi F , i.-dir, sonsuzölçülü L halı üçün hətta qeyri - Fok ifadəsi də mövcuddur (bax, [2]).

Əd.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

FOKKER - PLANK TƏNLİYİ «Фоккера - Планка уравнение; Fokker - Planck equation», Kolmogorov düz tənliyi - bax, Diffuzion proses, Kolmogorov tənlikləri, Stoxastik differensial həndəsə.

FOKKER - PLANK - KOLMOQOROV TƏNLİYİ «Фоккера - Планка - Колмогорова уравнение; Fokker - Planck - Kolmogorov equation» - bax, Stasionar Markov proses, Kolmogorov tənlikləri.

FORSAYT METODU «Форсайта метод; Forsythe method / algorithm» - Qram - Şmidt ortoqonalizasiya metodunun rekurrent variantı olub, ən kiçik kvadratlar metodu əsasında parabolik interpolasiya məsələlərində mühüm rol oynayır.

Ölçmələrin nəticələri y_i -lərin, $i = 1, \dots, n$ aşağıdakı şəkildə olduğu fərz olunur:

$$y_i = \sum_{j=0}^p \theta_j t_i^j + \varepsilon_i =$$

$$= \sum_{j=0}^p \alpha_j \varphi_j(t_i) + \varepsilon_i, \quad M\varepsilon_i = 0, \quad D\varepsilon_i = \sigma^2, \quad (1)$$

burada j üstlü $\varphi_j(t)$ çoxhədliləri ortonormalanma şərtləri -

$$\sum_{i=1}^n \varphi_j(t_i) \varphi_k(t_i) = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}, \quad 0 \leq k, j \leq p \quad (2)$$

şərtlərini ödəyirlər. Bu halda aydındır ki,

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \varphi_1(t) = \lambda_1 \left(t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)$$

və

$$\lambda_j \varphi_j(t) = (t - \beta_j) \varphi_{j-1}(t) - \gamma_j \varphi_{j-2}(t),$$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n t_i \varphi_{j-1}^2(t_i), \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^n t_i \varphi_{j-1}(t_i) \varphi_{j-2}(t_i)$$

Forsayt münasibətləri doğrudur (bax, [1]), burada λ_j konstantları (2) normalanma şərtindən təyin olunurlar:

$$\sum_{i=1}^n \varphi^2(t_i) = 1.$$

Ortonormalanmış (1) modelinə ən kiçik kvadratlar metodunun tətbiqi aşağıdakı bir sıra nəticələrə gətirir:

$$1) \hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_j(t_i);$$

$$2) D(\hat{\alpha}_j) = D(\varepsilon_i) = \sigma^2;$$

$$3) s^2 = \hat{\sigma}^2 = (n-p-1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2 \right).$$

Əgər approksiməedici çoxhədlinin tərtibi əvvəlcədən məlum olmazsa və hesablama prosesində seçilsə, onda p -nin bir vahid artırılması nəticəsində $\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_p$ statistik qiymətləri dəyişmir,

$$\alpha_{p+1} = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_{p+1}(t_i),$$

və

$$(\hat{\sigma}^2)_{p+1} = \frac{n-p-1}{n-p-2} (\hat{\sigma}^2)_p - \frac{1}{n-p-2} \hat{\alpha}_{p+1}^2$$

olur.

Regressiya analiz üzrə tətbiqi proqramların müasir paketlərində baxılan metod addımlı regressiya prosedurunun mühüm əsas hissəsini təşkil edir.

Əd.: [1] Forsythe G., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1957, v. 5, p. 74-88; [2] Худсон Д., Статистика для физиков, пер. с англ., М., 1970.

FORSAYT MÜNASİBƏTİ «Форсайта соотношение; Forsythe relation / equation» - bax, Forsayt metodu.

FORTE – XARKEVIÇ – ROZANOV SPEKTRİ
 «Форте – Харкевича – Розанова спектр; Fortet – Kharkevich – Rozanov spectrum» – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

FORTE – KAS TEOREMİ «Форте – Каца теорема; Fortet – Kac theorem» – bax, *Limit teoremləri diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin*.

FORTE – MURYE METRİKASI «Форте – Мурье метрика; Fortet – Mourier metric» – ξ – strukturdan istifadə olunmaqla aşağıdakı şəkildə təyin olunan ehtimal metrikdir (bax, *Ehtimal metriksi; struktur*). (U, d) – hər hansı separabel metrik fəza, $\mathfrak{X}$ – qiymətləri U -dan olan təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu və $G_q^p = \{f\}$ U -da təyin olunmuş ele həqiqi funksiyalar çoxluğudur ki, bunlar üçün aşağıdakı münasibət:

$$L_p(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y) [\max(1, d(x, c), d(y, c))]^{p-1}} : \right. \\ \left. x \neq y, x, y \in U \right\} \leq 1, \quad p \geq 1, \quad 0 < q \leq \infty$$

və bundan başqa, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in U\} \leq q$ münasibəti də ödənilir, burada $c, - U$ -dan olan sabit elementdir.

$$\zeta(X, Y; G_q^p) = \sup\{|E(f(X) - f(Y))| : f \in G_q^p\}$$

funksionalı Forte – Murye metriksi adlanır.

F. – M. m.-na aid misallar: 1) $\zeta(X, Y; G_\infty^1)$ – Kantoroviç metriksi, 2) $\zeta(X, Y; G_1^1)$ – Dadli metriksinin modifikasiyasıdır (bax, [2]).

Əgər $q < \infty$ olarsa, onda F. – M. m. $\mathfrak{X}$ -də zəif yığılma topologiyasını doğrurur. Əgər $X_n \in \mathfrak{X}$ ardıcılığı hər hansı $c \in U$ üçün $m_n = M d^p(X_n, c) < \infty, n = 0, 1, \dots$ şərtini ödəyərsə, onda $\zeta(X_n, X_0; G_\infty^p) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ yığılması momentlərin $m_n \rightarrow m_0$ yığılması ilə birlikdə $\pi(X_n, X_0^\infty) \rightarrow 0$ zəif yığılmasına ekvivalentdir (π Levi – Proxorov metriksidir).

Əd.: [1] Forter R., Mourier E., «Ann. Sci. École norm. supér.», 1953, v. 70, № 3, p. 266–85; [2] Dudley R. M., «Aarhus Univ. Lect. Notes Ser.», 1976, v. 45; [3] Rachev S. T., «Publ. Inst. Statist. Univ. Paris», 1982, v. 27, № 1, p. 27–47; [4] Золотарева В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87.

FOSTER KRİTERİSİ «Фостера критерий; Foster criterion» – bax, *Stasionar Markov prosesi*.

FRAKTAL «фрактал; fractal», fraktal çoxluq – məzmunu tamamilə müəyyən olunmamış termdir. Bu termin əsasən kəsi dim. – ölçülü «fraktal» çoxluqların adı kimi istifadə olunur (bu dim. – ölçü, çoxluqların geniş sinfi üçün, üst-üstə düşən Hausdorf və ya «entropik» ölçü ola bilər və prinsip etibarilə bu müəyyən olunmalıdır); bu şərhə qədər dəqiqliklə «fraktal» dim. – ölçü dəqiq termdir. Lakin bu terminin müəllifi

B. Mandelbrot [1]-də, onu maraqlandıran çoxluqların iki cəhətini qeyd etmişdir: «F. adlandırdığım araşdırdığım, bütün fiqurlar mənim anlamımda «qeyri – rəqulyarlıq, lakin özünəoxşarlıq» xassəli olmuşlar. «Oxşar» (rus. подобный) sözü həmişə klassik mənə, yəni «xətti böyüdülmüş və ya kiçildilmiş» mənasında anlaşılmamalıdır, lakin o, daha münasib və geniş izahlı «bənzer» (rus. похожий) sözü ilə uzlaşır (bax, [2]-də, onun məqaləsinə). Baxılan obyektlərin «rəqulyarlıq» və ya «kəsirlilik» xassəsinin məhz hansı anlam daşdığını dəqiq söyləmək çətindir; bu halda aydındır ki, mənfi xarakteristikalar, yəni onların nə çoxobrazlılar, nə də ki, bunların hesabı birləşmələri olduğu hesabla alınmır. M çoxluğunun «özünəoxşarlığı» (rus. самоподобие) belə anlaşılar: hər hansı x nöqtəsinin ətrafı $U_n(x)$ müxtəlif dərəcədə böyüdülməklə mikroskopda müşahidə olunarsa, böyüdülmə artdıqca mikroskopun görüntü sahəsində alınan mənzərələrin bir-birinə oxşarlığı daha çox nəzərə çarpır. Bu müşahidələr olduqca aydın dəqiqləşmələr tələb edir [məs., ətraflar, adətən, radiusları r_n -ə bərabər kürelər kimi götürülərək, vahid radiuslu

D küresinə qədər böyüdüldür, yəni y -i $(y - x)/r_n$ -ə çevirən $g_n : U_n \rightarrow D$ inikasına baxılır; g_n və $(U_n \cap M)$ çoxluqları arasında oxşarlıq ondan ibarətdir ki, bu çoxluqlar (ola bilər ki, nə cürsə çevrilmiş, yəni hansısa ortoqonal çevirmələrə məruz qalmış) Hausdorf metriksində bir-birinə yaxın olur] və bu dəqiqləşmələr daxil olunduqda «özünəoxşarlıq» tamamilə dəqiq anlayış olur. B. Mandelbrot izah edir ki, kəsi Hausdorf dim. – ölçülü çoxluq, əlbəttə ki, «qeyri – rəqulyar» çoxluqdur, lakin o, «özünəoxşar» olmaya bilər, lakin tam Hausdorf dim. – ölçülü çoxluq tamamilə «qeyri – rəqulyar» (məs., «kəsiklənən») ola bilər və bununla belə, lokal «özünəoxşarlıq» xassəsinə malik olmaya bilər. F. üçün digər xassənin, ilkin olaraq əsas xassə kimi adlandırılan: Hausdorf dim. – ölçüsü topoloji ölçüdən böyükdür (bax, [1]) xassəsinin ödənilməsi tamamilə zəruri deyildir. Buna görə də, «fraktallıq» hərfi mənada anlaşılmamalıdır. İlk etimologiyanın əksinə olaraq, onun ingilis variantı «fraction» – hərfi mənada «parçalanmış» (rus. изломанный) mənasında (bəzən də «kəsiklənmiş») işlənən latın «fractus» sözü ilə əlaqələndirilə bilər.

B. Mandelbrot F.-a böyük diqqət yetirərək, həm nəzəri riyaziyyat, həm də təbiətşünaslıqda ona aid çoxsaylı misallar göstərərək, əminliklə qeyd etmişdir ki, F. hələ məktəb kursundan adət edilmiş məlum həndəsi fiqurlar kimi, «təhmüquqlu» obyektlərdir. Bir sıra riyazi məsələlərdə onun ilk nəşrləri ərəfəsinə qədər kəsi dim. – ölçülü çoxluqlara, təbii olaraq təsadüf olunmuşdu (yəni «qeyri – rəqulyar» çoxluqlara; bax, [4]-də riyaziyyatın müxtəlif bölmələrindən bəzi misallara); B. Mandelbrot ədədi eksperimentlərin verənlərinə əsaslanaraq belə tip yeni və mühüm misallar göstərmişdir; bu bir növ təbliğat xarakterli olmuşdur. Lakin o, lap əvvəldən bunlarda mühüm «özünəoxşarlıq» xassəsinə malik olmaya diqqət yetirmişdir. Əlbəttə ki, «özünəoxşarlıq» «artefakt» ola bilər, yəni insan tərəfindən yaradıla bilər. Klassik misallarda – sanki heç yerdə differensiallanmayan K. Veyerştrass (K. Weierstrass) və B. Van-der – Varden (B. Van der Waerden) funksiyalarının, C. Peano (G. Peano), H. Kox (H. Koch) və D. Hilbert (D. Hilbert) ayrılarının, V. Serpinski (W. Sierpinski) xalçası kimi misallarda vəziyyət belədir. Bütün bu misallarda müəyyən obyekt sonsuz sayda addımlarla qurulur və müəlliflər təsviri asan etmək məqsədilə bu addımları bir-birinə oxşar şəkildə edirdilər. Lakin digər hallarda «özünəoxşarlıq» ilkin tərif və ya quruluşda bilavasitə olmur; buna diqqət yetirmək olduqca səmərəli olurdu. Bir sıra hallarda bu və ya digər çoxluqların «fraktallıq» haqqında (dim. – ölçü haqqında və «özünəoxşarlıq» haqqında hökmlər də daxil olmaqla) müşahidələr ciddi araşdırmalar prosesində təsdiq olunmuşdur və bu halda digər cəhətlərlə əlaqədar mühüm prosedura nail olunmuşdur.

Bu xüsusilə «Konform dinamikaya», yeni kompleks deyışenler oblastında analitik funksiyaların iterasiyasına aiddir. bax, [2], [3].

Təbiətşünaslıq oblastında, məs., qayalıqlı sahil, dağ silsiləsi, rəqs edən alov, bulud, cəng koloniyası F.-dirlər. B. Mandelbrot həttə müxtəlif təbii elmi misallarda özünəoxşarlığın kəmiyyət xarakteristikalarını da göstərmişdir. Əlbəttə ki, bu misallarda riyazi misallardan fərqli olaraq, özünəoxşarlıq yalnız hər hansı məhdud diapozonlu miqyaslarda ödənilir. B. Mandelbrota görə cəmsiz təbiətdə diapazonun ucları 10^4 dəfə, bioloji misallarda isə 10^2 dəfə fərqlənə bilər. Belə xarakterli ayn-ayın mülahizələrə əvvəllər də təsadüf olunurdu, lakin yalnız B. Mandelbrotdan sonra bir çox müəlliflər təbiətdə çoxsaylı F. aşkar etmişlər (məs., toz buxumları və kolloidların bir-birinə yapışmış «kiçik»ləri F.-dirlər; kürəvi ildırımın da fraktal olduğu fərz olunur). Belə görünür ki, təbiətdə formaları yüksək dəqiqliklə adi «Euklid» fiqurlarına malik obyektlərlə yanaşı, heqiqətən də, «fraktal» formalı obyektlərə də təsadüf olunur. Əlbəttə ki, bu yalnız fenomenologiyadır; belə bir sual doğur: bu və ya digər obyekt hansı səbəbdən hansısa kəmiyyət xarakteristikalarına malik olan fraktal formalı obyekt olur? Məlum olduğu kimi, riyazi təbiətşünaslıqda bu suala əksər hallarda cavab alınmamışdır.

F.-in geniş populyarlığı ilə bağlı olaraq, ixtiyari kəsri dim. – ölçülü ölçüləri ehatə edən hendəsi ölçü nəzəriyyəsinin bu sahəsi böyük marağa səbəb olmuşdur (lakin özünəoxşarlıqla bağlılıq olmaya da bilər, bax, [4]).

Əd.: [1] Mandelbrot B. B., On fractal geometry and a few of the mathematical questions it has raised. «Proc. Intern. Congr. Math., Warszawa. 1983», v. 2, Warszawa, 1984, p. 1661–75; [2] Пейтген Х. О., Рихтер П. Х., Красота фракталов, пер. с англ., М., 1993; [3] Carleson L., Gamelin T. W., Complex dynamics, N. Y., 1993; [4] Falconer K. J., The geometry of a fractal sets, N. Y. – [a. o.], 1985.

FRAKTAL BRAUN HƏRƏKƏTİ «фрактальное брауновское движение; fractional brownian motion» – bax, *Avtomodel proses.*

FUNDAMENTAL LEMMA(sı) riyazi statistikanın «фундаментальная лемма математической статистики; fundamental lemma of mathematical statistics» – bax, *Neyman – Pirson lemması.*

FUNDAMENTAL MATRİS Markov zəncisinin «фундаментальная матрица цепи Маркова; fundamental matrix of a Markov chain» – bax, *Markov zənciri; fundamental matrix.*

FUNKSIONAL EHTİYATDA SAXLAMA «функциональное резервирование; functional redundancy» – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

FUNKSIONAL İNTEQRAL «функциональный интеграл; path integral» – bax, *Kontinual integral.*

FURYE ÇEVİRMƏSİ diskret «Фурье преобразование дискретное; discrete Fourier transform» – bax, *Diskret Furiye çevirməsi.*

FURYE ÇEVİRMƏSİ qrupda ehtimal paylanmalarının «Фурье преобразование распределения вероятностей на группе; Fourier transform of a probability distribution on a group» – G qrupunun bir-birinə ekvivalent

olmayan ayrılmayan bütün unitar ifadələrinin $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ çoxluğunda

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G A_\gamma(g) \mu(dg) \quad (*)$$

qaydası ilə verilmiş operatorqiymətli funksiyadır (burada μ , – G qrupunda ehtimal paylanmasıdır). İntegralı Boxner inteqralı kimi təyin etmək olar.

Əgər G qrupu lokal kompakt olarsa, onda G -də ehtimal ölçülərinin F. ç. $\hat{\mu}(\gamma)$ aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) F. ç. $\hat{\mu}(\gamma)$ ixtiyari $\gamma \in \Gamma$ üçün hər hansı Hilbert fəzasında məhdud xətti operatorudur və onun norması vahidi aşmır;

2) əgər A_γ vahidi ifadədirsə, yeni $A_\gamma(g) = I$ bərabərliyi ixtiyari $g \in G$ üçün ödənilərsə, onda $\hat{\mu}(\gamma) = I$ bərabərliyi doğrudur, burada I , – H -da vahidi operatorudur.

3) μ ölçüləri və onların F. ç.-ləri $\{\hat{\mu}(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir;

4) əgər μ_1 və μ_2 üçün $\mu_1 * \mu_2$ konvolusionu təyin olunmuşdursa, onda onun F. ç. $\hat{\mu}_1(\gamma) \times \hat{\mu}_2(\gamma)$ ilə üst-üstə düşür;

5) əgər $\bar{\mu}$ ölçüsü μ ölçüsü üzrə $\bar{\mu}(B) = \mu(B^{-1})$ qaydası ilə təyin olunarsa (burada $B^{-1} = \{g \in G : g^{-1} \in B\}$), onda $\hat{\mu}$ operatoru $\hat{\mu}(\gamma)$ -ya qoşma operatorudur; μ ölçüsü yalnız və yalnız, o halda simmetrik ölçüdür ki, $\hat{\mu}(\gamma)$ öz-özünə qoşma operator olsun;

6) G -də ehtimal ölçüləri μ_n -lər ardıcılığı μ ehtimal ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, $\hat{\mu}_n(\gamma) \rightarrow \hat{\mu}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ zəif yığılması ödənilsin.

Əgər G Mur qrupudursa (məs., kompakt qrupdursa), onda ayrılmayan bütün ifadələr sonluölçülüdürlər və belə hesab etmək olar ki, bunlar matris şəklində verilir. Onda $\hat{\mu}$ matris-qiymətli funksiyadır. (*) düsturunda inteqrallama bu halda matrislərin elementləri üzrə inteqrallama kimi anlaşılmalıdır.

Əgər G Abel qrupu olarsa, onda onun bütün ayrılmayan unitar ifadələri birölçülü olub, G qrupunun hər hansı xarakterinə vurma operatorlarına ekvivalentdirlər. Buna görə də, Abel qrupu G -də ehtimal ölçüsü μ -nün F. ç. kimi G qrupunun xarakterlər qrupu $\hat{G}$ -də bütün $\gamma \in \hat{G}$ üçün

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(g) \mu(dg)$$
 qaydası ilə verilmiş kompleksqiymətli $\hat{\mu}(\gamma)$ funksiyası nəzərdə tutulur. Bu halda $\hat{\mu}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$ μ ehtimal paylanmasının G Abel qrupunda xarakteristik paylanma funksiyası adlanır. Yuxarıda 1) – 6) xassələri $\hat{\mu}(\gamma)$ funksiyasının uyğun xassələri kimi ifadə olunur. Məs., bütün $\gamma \in \Gamma$ üçün $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq 1$;

$\hat{\mu}(1) = 1$, $1 \in \hat{G}$ vahidi xarakterdir; $\mu_1(\gamma) * \mu_2(\gamma) = \hat{\mu}_1(\gamma) * \hat{\mu}_2(\gamma)$. Bundan başqa, $\hat{\mu}(\gamma)$ – kəsilməz funksi-

yadır və xarakteristik funksiyalar üçün kəsilməzlik teoreminin analoqu da bu halda doğrudur.

Klassik halda, $G = \mathbb{R}^1$ və ya $\mathbb{R}^n$ olduqda, bütün xarakterlər $\gamma_t(x) = e^{itx}$, $x \in G = \mathbb{R}^1$, $t \in \hat{G} = \mathbb{R}^1$ şəklində olur və μ ölçüsünün F. ç. adi xarakteristik funksiya anlayışı ilə üst-üstə düşür, yeni

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \exp \{ itx \} \mu(dx).$$

Əd.: [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

FURYE ÇEVİRMƏSİ sonlu « Фурье преобразование конечное; finite Fourier transform » – bax, *Sonlu Furiye çevirməsi*.

FURYE ÇEVİRMƏSİ sürətli « Фурье преобразование быстрое; fast Fourier transform » – bax, *Sürətli Furiye çevirməsi*.

FURYE – STİLTYES ÇEVİRMƏSİ « Фурье – Стильеса преобразование; Fourier – Stiltjes transform » – bax, *Xarakteristik funksiya*.

GELFAND İNTEQRALI « Гельфанда интеграл; Gelfand integral » – qiymətləri Banax fəzası B -dən olan funksiyalar üçün Lebeq inteqralının ümumiləşmələrindən biridir. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ – ölçülü fəza, $\mathcal{B}$ – σ – cəbr, μ – $\mathcal{B}$ -də σ – sonlu ölçü olsun. X – Ω -dan $\mathcal{B}$ -yə ele inikas olsun ki, B -yə qoşma olan B^* -dan ixtiyari x^* üçün $x^*(X)$ ədədi funksiyası ölçülən və Lebeq üzrə inteqrallanan olsun. Onda X -ə qoşma olan ikinci bir fəzadan ele x^{**} elementi vardır ki, bütün $x^* \in X^*$ üçün

$$x^{**}(x^*) = \int_{\Omega} x^*(x) d\mu$$

bərabərliyi doğrudur. x^{**} elementi Gelfand inteqralı adlanır.

Əgər Pettis inteqralı mövcuddursa, G. i. onunla üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., «Зап. Научно-иссл. инст. матем. и мех. Харк. держ. ун-та Харк. матем. тов.», 1936, т. 13, в. 1, с. 35–40; [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ в полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

GENERATOR(u) korrelyasion pəncərənin « генератор корреляционного окна; lag window generator » – bax, Korrelyasion pəncərə.

GENERATOR(u) prosesin « генератор процесса; generator of a process » – proses üçün təyin olunmuş anlayışdır; doğuran operator və ya infinitezimal operator kimi də adlanır. Bax, Doğuran operator. Infinitezimal operator, Kolmoqorov tənlikləri.

GENİŞLƏNDİRİLMİŞ STOXAŞTİK İNTEQRAL « расширенный стохастический интеграл; extended stochastic integral » – qeyri – antisipativ funksiyaların adi stoxastik inteqralı (İto, Stratonoviç və s.) ilə üst-üstə düşən, təsadüfi funksiyanın Viner prosesi w üzrə inteqralıdır. G. s. i.-in bir neçə konstruksiyası məlumdur.

Hitsuda – Skoroqod konstruksiyası (bax, [1], [2]). $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası, $\mathcal{A} = \sigma\{w_t^2\}$, $H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ olsun. H -dan olan ixtiyari $F = (F_t)$ funksiyası üçün

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t_1, \dots, t_n))$$

ifadəsi doğrudur, burada f_n (təsadüfi olmayan) funksiyaların $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \|\cdot\|_{n+1})$ fəzasındandır, I_n – çoxqat Viner inteqralıdır.

302 GENİŞLƏNDİRİLMİŞ

Fərz olunur ki,

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \left\{ F : p^2(F) = \sum (n+1)! \|\tilde{f}\|_{n+1}^2 < \infty \right\},$$

burada $\tilde{f}_n$ – f_n -in bütün arqumentlər üzrə simmetrizasiyasıdır.

$F \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ üçün G. s. i. –

$$\mathcal{F}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(f_n(t_1, \dots, t_n))$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Çoxqat Viner inteqrallarının xassələrinə əsasən, $M\mathcal{F}(F) = 0$, $M[\mathcal{F}(F)]^2 = p^2(F)$ olduğu alınır. Əgər F H -dan olan qeyri – antisipativ funksiya olarsa, onda $F \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ və $\mathcal{F}(F)$ İto inteqralı $\int F_t dw_t$ ilə üst-üstə düşür.

$F \rightarrow \mathcal{F}(F)$ inikası H -dan $L^2(\Omega)$ -ya qapalı xətti operatorudur. $\mathcal{F}$ operatoru stoxastik törəmə D ilə sıx əlaqəlidir. Əgər $F \in H$ olarsa, bütün təsadüfi kəmiyyətlər $\mathcal{D}(D)$ stoxastik törəməsinin təyin olunma oblastındadırlar və $\int \|DF_t\|_H^2 dt < \infty$ olarsa, onda $F \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ və

$$M[\mathcal{F}(F)]^2 = \|F\|_H^2 + M \iint DF_t(s) DF_s(t) ds dt.$$

$\mathcal{F}$ və D operatorları aşağıdakı mənada qoşmadırlar: əgər $\eta \in \mathcal{D}(D)$, $F \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ olarsa, onda $M\langle D\eta, F \rangle = M\eta \mathcal{F}(F)$ bərabərliyi doğrudur; burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – $L^2(\mathbb{R}_+)$ -da skalyar hasilidir.

Göstərilən eynilik differensiallanan ölçülər nəzəriyyəsində G. s. i. təyin etmək məqsədilə istifadə olunur, burada, adətən, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ölçü ilə verilən lokal qabarıq fəza fərz olunur.

F funksiyasına qiymətləri $L^2(\mathbb{R}_+)$ -dan olan Ω -da verilmiş vektor meydan kimi baxılır, stoxastik törəmə isə hər hansı zəif mənada istiqamət üzrə törəmə kimi anlaşılır. Belə yanaşmada G. s. i. P ölçüsünün F vektor meydanı boyunca loqarifmik törəməsi olur (bax, [3]). Hilbert fəzaları halında G. s. i. $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ -dan daha geniş inteqralaltı funksiyalar sinfində təyin oluna bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi konstantı $\mathcal{F}$ işarəsindən xaric çıxarmaq olmaz. M i s a l: $F = w_T I_{[0,T]}$. Onda

$$\mathcal{F}(F) = w_T^2 - T.$$

O q a v a konstruksiyası (simmetrik G. s. i.; bax, [4], [5]). $F \in H$, $\{e_i\}$, – $L^2(\mathbb{R}_+)$ -da tam ortonormalanmış sistem olsun. F üçün Furye sırasının dw_t üzrə formal inteqrallanmasından alınan $\sum \langle F, e_i \rangle I_t(e_i)$ sırasının cəmi stoxastik inteqral

anlaşılır. Əgər $\int \| \mathcal{Q} F_t \|_H^2 dt < \infty$ olarsa, onda $\mathcal{Q} F_t(s)$ nüvəsi-nin sanki yəqin sonlu izi varsa, onda simmetrik G. s. i. möv-cuddur və o, $\mathcal{I}(f) + \text{tr } \mathcal{Q} F$ ilə üst-üstə düşür. Qeyri – anti-sipativ funksiya İto prosesi olduqda simmetrik G. s. i. *Stratonoviç stoxastik integrali* ilə üst-üstə düşür.

G. s. i. sıçrayışvari funksiyaların inteqrallarından limite keçidlə də təyin olunur.

Əd.: [1] Скорород А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–37; [2] Кабанов Ю. М., Скорород А. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов. (Друскининкай 25–30 ноября 1974), ч. 1, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [3] Норин Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 114–24; [4] Nualart D., Zakai M., «Probab. Theory and Related Fields», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80; [5] Мацквичюс В., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 1, с. 121–130; [6] Далецкий Ю. Л., Парасимонова С. Н., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 3, с. 512–15.

GENİŞYAYIMLI KANAL « широкополосный канал; broadcast channel » – bir ötürücüdən bir neçə qəbulediciyə informasiya ötürməsinə təsvir edən, informasiya nəzəriyyəsində çoxkomponentli kanallardan biridir. Diskret stasionar ikiçıxışlı yaddaşsız kanal giriş əlifbası $\mathcal{X}$, iki çıxış əlifbası $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ və keçid ehtimalları $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 | y)$ ilə verilir, burada $\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ – sonlu çoxluqlar, $\tilde{y}_1 \in \mathcal{Y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}_2, y \in \mathcal{Y}$. Belə G. k. üçün kodlama $K=1, L=2$ olduqda kanallar şəbəkəsi üçün (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*) ümumi kodlama sxemi ilə təsvir olunur. Sistemdə üç tip məlumat vardır ($M=3$): bir məlumat birinci qəbuledən üçün bir məlumat, ikinci qəbuledən üçün bir məlumat isə hər iki qəbul edən üçün nəzərdə tutulur. Bu halda kodlayıcı qurğuların sayı 1-ə bərabərdir və $A_1 = \{1, 2, 3\}$ dekodlayıcı qurğuların sayı isə 2-yə bərabərdir və $B_1 = \{1, 3\}, B_2 = \{2, 3\}, C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}$. Beləliklə, birinci çıxışdakı dekodlar məlumatın birinci və üçüncü komponentini bərpa etməlidir, ikinci çıxışdakı dekodlar ikinci və üçüncü komponentləri bərpa etməlidir. Baxılan ikiçıxışlı G. k.-in ötürücülük qabiliyyəti əlaqəli keçid ehtimalları $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 | y)$ -lərdən deyil, yalnız uyğun $p(\tilde{y}_1 | y)$ və $p(\tilde{y}_2 | y)$ marginal ehtimallarından asılı olur (tərs əlaqə olmadıqda).

İkiçıxışlı G. k. üçün ümumi kodlama sxeminin xüsusi halları ümumi informasiyasız genişyayimli kanaldır (üçüncü komponent iştirak etmir, odur ki, $A_1 = \{1, 2\}, B_1 = C_1 = \{1\}, B_2 = C_2 = \{2\}$) və asimmetrik genişyayimli kanaldır (birinci və ikinci komponent yoxdur, odur ki, $A_1 = \{1, 3\}, B_1 = \{1, 3\}, C_1 = \{1\}, B_2 = \{3\}, C_2 = \{2\}$).

G. k.-in ötürücülük qabiliyyəti əlaqəli $\mathcal{R}$ üçün ümumi halda yalnız bezi şərtlər (daxildən və xaricdən) məlumdur. Lakin G. k.-in bir sıra sinifləri üçün $\mathcal{R}$ -i dəqiq hesablamaq mümkündür. Məs., asimmetrik G. k.-in ötürücülük qabiliyyəti əlaqəli (R_1, R_3) cütlerinden ibarətdir ki, bunlar üçün

$$0 \leq R_3 \leq I(U; \tilde{Y}_2),$$

$$0 \leq R_1 + R_3 \leq \min \{ I(Y; \tilde{Y}_1), I(Y; \tilde{Y}_1 | U) + I(U; \tilde{Y}_2) \},$$

(I – informasiya miqdarı) münasibətləri $(U, Y, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$ təsadüfi kəmiyyətlər dördlüyü üçün ödənilir və bu təsadüfi kəmiyyətlər uyğun olaraq $(\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ -dən qiymətlər alır ($\mathcal{U}$ – elementlərinin sayı $|\mathcal{U}|$ olan, $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 2$ şərtini ödəyən hər hansı sonlu çoxluqdur); bununla yanaşı bu cütler, $p(u, y, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = p(u, y)p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 | y)$ birgə ehtimal paylanmalarına verilir, burada $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 | y)$ – baxılan G. k.-in keçid ehtimallarıdır.

Ümumi halda ötürücülük qabiliyyəti əlaqəli $\mathcal{R} = \{(R_1, R_2, R_3)\}$ iki böyük, ikiçıxışlı G. k. üçün pisləşmiş G. k. və semideterminik G. k. üçün məlumdur. Bu halda əgər marginal $p_1(\tilde{y}_1 | y)$ və $p_2(\tilde{y}_2 | y)$ keçid ehtimalları hər hansı $q(\tilde{y}_2 | \tilde{y}_1)$, $\tilde{y}_1 \in \mathcal{Y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}_2$ keçid ehtimallarının toplusu üçün

$$p(\tilde{y}_2 | y) = \sum_{\tilde{y}_1} q(\tilde{y}_2 | \tilde{y}_1) p(\tilde{y}_1 | y)$$

münasibətlə əlaqəlidirlərsə, ikiçıxışlı diskret G. k. pisləşmiş kanal (rus. ухудшенный канал) (ikinci komponent birincidən pisdır) adlanır. Əgər diskret G. k.-in komponentlərindən biri determinik kanaldırsa, yeni bütün $y \in \mathcal{Y}, \tilde{y}_1 \in \mathcal{Y}_1$ üçün $p_1(\tilde{y}_1 | y) = 0$ və ya $p_1(\tilde{y}_1 | y) = 1$ olarsa, G. k. semideterminik kanal adlanır.

G. k.-in baxılan modelinin bir çox ümumiləşmələri vardır. Məs., diskret və kəsilməz zamanlı Gauss G. k.-in ötürücülük qabiliyyəti əlaqəli hesablanmışdır (bu kanallar pisləşmiş G. k.-lərə gətirilir). Tərs əlaqəli G. k. üçün kodlama, xəta ehtimalı maksimal olan G. k. üçün kodlama və digər məsələlərə də baxılmışdır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Cover T., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1972, v. 18, № 1, p. 2–14.

GƏNCLƏŞƏN PAYLANMA « молодющее распределение; beneficial aging distribution » – bax, *Qocalan paylanma*.

GƏTİRİLMİŞ AÇIM « приведенный размах; ab-yusted range » – bax, *Hörst fenomeni*.

GİBBS FENOMENİ « Гиббса явление; Gibbs phenomenon » – Furiyə sıralarının xüsusi cəmlərinin (və ya orta qiymətlərinin) xüsusiyyətidir. $f(x)$ funksiyasının Furiyə sırasının xüsusi cəmləri $s_n(x)$ -lərin $f(x)$ -ə x_0 nöqtəsinin hər hansı $\{x: 0 < |x - x_0| < h\}$ ətrafında yığıldığı fərz olunur və fərz olunur ki, $a = f(x_0 - 0) \leq f(x_0 + 0) = b$. Əgər $A < a \leq b < B$ olarsa,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad B = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s_n(x),$$

$$x \rightarrow x_0 - 0 \quad x \rightarrow x_0 + 0$$

x_0 nöqtəsində $s_n(x)$ üçün G. f. baş verir. G. f. zaman sıralarının spektral analizində yaranır ki, bu da seçimin həcmnin sonluluğu ilə əlaqədar baş verir ki, bu isə müşahidələrin verilənlərin düzbucaqlı pəncərəsinə həsilinə ekvivalentdir. Spektral sıxlığın statistik qiymətini taparkən Furiyə çevirməsindən istifadə etdikdə G. f. nəticəsində meyl əmələ gəlir. Əgər seçim verilənlərin münasib pəncərəsi ilə əvvəlcədən hamarlanarsa (belə hamarlama tezlik əlaqəli uyğun spektral pəncərənin istifadə edilməsinə ekvivalentdir), meyl azalır.

Əd.: [1] Ульянов П. Л., Математическая энциклопедия, т. 1. М., 1977, с. 958; [2] Отнес Р., Энноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982.

GIBBS LİMİT VƏZİYYƏTİ « Гиббса предельное состояние; Gibbs limit state » – bax. Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.

GIBBS PAYLANMASI « Гиббса распределение; Gibbs distribution » – termodinamik tarazlıqda hissəciklər sisteminin və təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsinin konfigurasiyalannın statistikasının təsviri üçün statistik mexanikada istifadə olunan ehtimal paylanmasıdır.

d – ölçülü $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasının Λ oblastında («qabda») N hissəcikdən ibarət kəsilməz sistem halında G. p. N sayda $X_1, \dots, X_N$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı

$$p_{\Lambda}(x_1, \dots, x_N) = \exp \{-H(x_1, \dots, x_N)\} / Z_{N,\Lambda} \quad (1)$$

şəklində verilir, burada $H(x_1, \dots, x_N)$, $x_1, \dots, x_N \in \Lambda$ -nın simmetrik heqiqi funksiyası, $Z_{N,\Lambda}$ normalayıcı ele seçilmiş vuruqdur ki, p_{Λ} -nın integralının 1-ə bərabər olmasını təmin etsin; bu integral statistik cəm adlanır. Bu şəkildə ixtiyari sıxlıq verilə bilər, odur ki, bu tərif fiziki tətbiqlərdə sistemin potensial enerjisini ifadə edən H funksiyasına yalnız əlavə məhdudiyyətlər qoyulduqda məzmun kəsb edir. Əksər hallarda fərz olunur ki, H cüt translyasion invariant izotrop $\Phi(x)$, $x \in [0, \infty)$ potensialı ilə

$$H(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(|x_i - x_j|) \quad (2)$$

şəklində verilmişdir. Bəzən əlavə sərhəd şərtləri, cüt potensial halında

$$H(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(|x_i - x_j|) + \sum_i U(x_i) \quad (3)$$

şəklində olan H funksiyasına da baxılır, burada $U(x)$, $x \in \Lambda$, – Λ qabından kənarda yerləşən hissəciklərlə verilən, fiziki tətbiqlərdə potensial enerjini təyin edən funksiyadır. Adətən, fərz olunur ki, $\text{dist}(x, \Lambda^c) \rightarrow 0$ olduqda $U(x) \rightarrow 0$ olur. Əksər hallarda

$$H(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} U(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\})$$

olduqda cüt olmayan (çoxhisseli) potensial halında ümumiləşmələrə də baxılır.

Bir qədər fərqli, münasib sayılan digər nöqtəyi – nəzərə görə, üst-üstə düşməyən komponentlərli $(x_1, \dots, x_N) \in \Lambda^N$ vektoruna N – nöqtəli $\{x_1, \dots, x_N\} \in \Lambda$ altçoxluğu qarşı qoyulur və bu inikasdan doğrulan altçoxluqlar fəzasında ehtimal ölçüsünə baxılır. Bu onu ifadə edir ki, G. p. Λ qabının altçoxluqlarında toplanmış nöqtəvi təsadüfi meydanın paylanması kimi interpretasiya olunur. Fiziki olaraq bu hissəciklərin fərqlənməyən olduqları haqqında təsəvvürə uyğun olur.

Bələ gözəlmək olar ki, termodinamik limitə keçmədə, Λ oblastının həcmi $|\Lambda|$ ilə birlikdə hissəciklərin sayı N üçün $N \rightarrow \infty$

münasibəti ele ödənilməlidir ki, ρ sıxlığı $\rho = N/|\Lambda| = \text{const}$ olmalı, Λ -da nöqtəvi meydanın G. p. isə potensialı U_{μ} olan (əlavə kimyəvi μ potensialının daxil olunması ilə ilkin potensialdan alınan) nöqtəvi Gibbs təsadüfi meydanının ehtimal paylanması zəif yığılma mənasında yığılmalıdır. μ -nün qiyməti Gibbs limit meydanında hissəciklərin orta sıxlığının ρ kostantına bərabər olması şərtindən tapılır. Bu hökm potensial üzərinə bezi şərtlərlə və ρ sıxlığının olduqca kiçik olduğu fərz olunmaqla isbat olunmuşdur, odur ki, uyğun Gibbs meydanı U_{μ} potensialı ilə yeganə surətdə verilir. Fəza keçidləri oblastında analoji müddəə, hələ ki, yalnız doğruxaoxşar hipotez olaraq qalmaqdadır.

Bir çox hallarda Λ qabında təsadüfi sayda bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin G. p. araşdırılır. Bu halda fərz olunur ki, qabdakı hissəciklərin sayının N -ə bərabər olması ehtimalı p_N –

$$p_N = \frac{e^{-\mu N}}{N!} Z_{N,\Lambda} \left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu N}}{N!} Z_{N,\Lambda} \right)^{-1} \quad (4)$$

düsturu ilə ifadə olunur, N -in qeyd olunmuş qiyməti şərtində bu hissəciklərin vəziyyətlərinin şərti paylanması isə N hissəcikdən ibarət sistem üçün yuxarıda təsvir olunmuş G. p. olur. Məlumdur ki, μ -nün qeyd olunmuş qiymətində və $N \rightarrow \infty$ olduqda termodinamik limit keçidində bu G. p. zəif yığılma mənasında, asimptotik olaraq, potensialı U_{μ} olan nöqtəvi Gibbs meydanlarının paylanmaları sinflə yaxınlaşır.

Fiziki ədəbiyyatda təsadüfi sayda hissəcikləri G. p. – böyük kanonik ansambl (və ya böyük kanonik ansambl G. p.), qeyd olunmuş sayda hissəcikləri G. p., – kiçik kanonik ansambl (və ya kiçik kanonik ansambl G. p.) adlanır.

Hissəciklər sayı N -in və H enerjisinin qeyd olunduğu G. p.-na da baxılır. Bu paylanma sıxlığı (1) olan paylanmanın doğrunduğu, $H(x_1, \dots, x_N) = H$ qiymətinin qeyd olunduğu şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır. Burada $|\Lambda| \rightarrow \infty$ olduqda, termodinamik limit keçidində hissəciklərin sıxlığı $\rho = N/|\Lambda|$ və xüsusi enerji – $e = H/|\Lambda|$ -nın qeyd olunduğu fərz olunur, limit paylanması isə potensialı $U_{\mu, \beta}$ -yə bərabər təsadüfi Gibbs meydanının paylanması olur, bu halda kimyəvi μ potensialının və ters β temperaturunun qiymətləri münasib olaraq seçilir. Fiziki ədəbiyyatda ρ və e qeyd olunmuş G. p. mikrokanonik G. p. (və ya mikrokanonik ansambl G. p.) adlanır.

Təz-təz baxılan digər hal diskret $t \in T$ parametrlı G. p.-nın şəbəkəvari modellərinə uyğun haldır. $U = \{U_A(x_A), A \subset T\}$ potensialı halında, sonlu tutumlu $\Lambda \subset T$ qabında, qiymətləri $(X, \mathcal{B}, m)$ ölçülü fəzasından olan G. p.

$$p_{\Lambda}(x_t, t \in \Lambda) = \exp \{-H(x_t, t \in \Lambda)\} / Z_{\Lambda}$$

şəklində sıxlıqla (μ ölçülü ekzemplyarların $|\Lambda|$ hasili üzrə) təyin olunur, burada

$$H_{\Lambda}(x_t, t \in \Lambda) = \sum_{A \subset \Lambda} U_A(x_t, t \in A)$$

və Z_A – statistik cəm adlanan normalayıcı vuruqdur. $|\Lambda| \rightarrow \infty$ olduqda termodinamik limitdə bu G. p., asimptotik olaraq, potensial U -ya bərabər Gibbs təsadüfi meydanlarının paylanması sinfi ilə yaxınlaşır. Belə G. p. böyük kanonik ansamblda nöqtəvi Gibbs meydanının G. p.-nin analoqudur. Şəbəkəvari qazın potensialı $U_{\mu,\beta}$ halında da kiçik kanonik və mikrokanonik ansamblda da təbii olaraq paylanmalar daxil olunur.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] D o b r u s h i n R. L., T i r o z z i B., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 54, № 2, p. 173–92; [3] E l l i s R., Entropy, Large deviations and statistical mechanics, N. Y., 1985; [4] G e o r g i i H.-Q., Canonical Gibbs measures, B. – N. Y., 1979.

GIBBS POSTULATI « Гиббса постулат; Gibbs postulate » – bax, *Statistik mexanika*.

GIBBS SİXLİĞİ « Гиббса плотность; Gibbs density » – bax, *Gibbs təsadüfi meydanı*.

GIBBS SONLU VƏZİYYƏTİ « Гиббса конечное состояние; Gibbs finite state » – bax, *Qeyri-kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*.

GIBBS TƏSADÜFİ MEYDANI « Гиббса случайное поле; Gibbs random field » – xüsusi şəkilli şərti keçid ehtimalları ilə verilən *təsadüfi meydan*dır. Statistik mexanikanın şəbəkəvari modellərinə uyğun diskret arqumentli G. t. m. aşağıdakı konstruksiya ilə təyin olunur. T – sonlu və ya hesabi çoxluq, $(X, \mathcal{B}, m)$, $-\sigma$ – sonlu m – ölçülü ölçülən fəza olsun. Gibbs meydanının potensialı $U = \{U_A, A \subset T, |A| < \infty\}$ bütün sonlu $A \subset T$ çoxluqlarına qarşı qoyulan, qiymətləri $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ -dan olan, $x_A \in X^A$ arqumentlərinin ölçülən U_A funksiyalarının sistemi kimi təyin olunur, burada $|A|$, $-A$ -nın gücdür. İxtiyari sonlu $\Lambda \subset T$ və $x \in X^T$ üçün şərti hamiltonian

$$H(x_A | x_{T \setminus A}) = \sum_{A \subset T, A \cap \Lambda = \emptyset, |A| < \infty} U_A(x_A) \quad (1)$$

düsturu ilə verilir, burada x_A , $-x$ realizasiyasının A -ya daralmasıdır. Daha sonra

$$(x_{T \setminus A}) = \int_{X^A} \exp \{-H(x_A | x_{T \setminus A})\} m_A(dx_A) \quad (2)$$

statistik cəmi daxil olunur, burada m_A , $-m$ – ölçülü $|A|$ ekzemplyarlarının düz hasilidir. Nəhayət, m_A ölçüsünə görə

$$p(x_A | x_{T \setminus A}) = \exp \{-H(x_A | x_{T \setminus A})\} / Z(x_{T \setminus A}) \quad (3)$$

ehtimal sıxlıqları daxil olunur. Bu sıxlıqlar $x_A, x_{T \setminus A}$ üçün təyin olunmuşdur ki, bunlar üçün (1) sırası və (2) integralı mütləq yığılırlar, (3)-dəki məxrəc isə sıfır bərabər olmur. Belə sıxlıq Λ həcmində $x_{T \setminus \Lambda}$ şərhə şərtli Gibbs sıxlığı adlanır. Əgər ixtiyari sonlu $\Lambda \subset T$ üçün $X_{T \setminus \Lambda} = \{X(t), t \in T \setminus \Lambda\}$ kəmiyyətinin verilmiş qiymətində $X_\Lambda = \{X(t), t \in \Lambda\}$ -nin şərti paylanması m_Λ ölçüsü üzrə Gibbs sıxlığı (3)-lə verilsə, $\{X_t, t \in T\}$ təsadüfi kəmiyyətlər sistemi – *təsadüfi Gibbs meydanı* adlanır. Bu təklif *DLR – şərti* (rus. *ДЛР – условие*) adlanır. Bu halda G. t. m.

$$H(x) = \sum_{A \subset T} U_A(x_A)$$

formal hamiltonianı ilə verilir.

Λ sonlu olduqda, verilən tərif *Gibbs paylanması*nın tərfi ilə üst-üstə düşür. Əksər hallarda, $T = \mathbb{Z}^d$ d – ölçülü tamqiymətli şəbəkə və X sonlu çoxluq olduğu halda baxılır və bu halda m sayıcı ölçü götürülür. $X = \{-1, 1\}$, $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, potensial translyasion invariant olur və $U_A \neq 0$ şərti yalnız $A = \{t\}$ və $A = \{s, t\}$ olduqda ödənilir, burada $|s - t| = 1$, bu halda *İzinq*

modelindən söhbət gedir. $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, potensial üzərinə, əksər hallarda, təbii olaraq daxil olunan translyasion invariantlıq şərti qoyulur. G. t. m. anlayışının statistik mexanikada olduğu kimi digər tətbiqi sahələrdə tətbiqlərinin geniş dairəni əhatə etməsi özünü Averintsev – Spitser teoremi ilə doğruldur: bu teoremə görə, təsadüfi meydanın hər hansı potensiallı Gibbs meydanı olması üçün $p(x_\Lambda | x_{T \setminus \Lambda})$ şərti sıxlıqları üçün yalnız ümumi xarakterli olduqca zəif fərziyyə irəli sürülməlidir. Məs., X sonlu olduqda, əgər bütün bu sıxlıq şərtləri sıfır bərabər olmazsa, *Markov təsadüfi meydanı* olduqca böyük diametrlili çoxluqlarda potensialı sıfır çevrilən Gibbs meydanı olur.

Birölçülü $\mathbb{Z}$ şəbəkəsində G. t. m.-na misal Markov zəncidir. Burada $U_{\{t, t-1\}}(x_t, x_{t-1}) = -\ln p_t(x_t | x_{t-1})$, $p_t(x_t | x_{t-1})$ – keçid ehtimallarıdır, $A \neq \{t, t-1\}$ olduqda, $U_A \equiv 0$. İxtiyari Gauss təsadüfi meydanı kvadratik potensialı $T = \mathbb{Z}^d$, $X = \mathbb{R}$ olduqda

$$H(x) = \sum_{s, t \in \mathbb{Z}^d} U_{s, t} x_s x_t \quad (4)$$

formal hamiltonianı ilə verilən Gibbs meydanıdır, burada $U_{s, t} \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} |U_{s, t}| < \infty$$

şərtini ödəyirlər.

Digər mühüm sinif – Gibbs nöqtəvi təsadüfi meydanlardır. Burada potensial $U = \{U(A)\}$ funksiyası kimi verilir, A , $-\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında bütün mümkün olan sonlu altçoxluqlardan biri ola bilər. x realizasiyasının şərti hamiltonianı $\mathbb{R}^d$ -də lokal sonlu altçoxluq olduğundan

$$H_\Lambda(x_\Lambda | x_{\mathbb{R}^d \setminus \Lambda}) = \sum_{A \subset X, A \cap \Lambda = \emptyset} U_A \neq \infty$$

kimi verilir, burada $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ – sonlu Lebeq ölçülü ölçülən çoxluqdur və $x_\Lambda = x \cap \Lambda$. Nəhayət, statistik cəm Gibbs sıxlıqları və G. t. m. anlayışının özü diskret haldakı kimi, lakin bir mühüm fərqli cəhətlə daxil olunur, bu cəhət μ_Λ -nın Λ -da Puasson nöqtəvi təsadüfi meydanının l sıxlıqlı ehtimal paylanması olmasıdır.

Daha sonra, müəyyənlik üçün, əsas etibarilə, $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində sonlu X fəzalı təsadüfi meydanlar və $U_A(x_A) \neq \infty$ halları araşdırılır. İxtiyari X fəzalı meydanların ümumi nəzəriyyəsi və nöqtəvi təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsi X -i sonlu olan şəbəkəvari meydanlar nəzəriyyəsinə analojiqdir, amma burada bir çox əlavə şərtlər və razılaşmaların daxil olunması tələb olunur.

U potensialının translyasion invariant və

$$\sum_{A: 0 \in A} \sup_{x_A} |U(x_A)| < \infty \quad (5)$$

olduğu fərz olunur. Onda verilmiş U potensialı G. t. m.-ni müəyyən edən, $X^{\mathbb{Z}^d}$ -də bütün ehtimal ölçülərinin toplusu $S(U)$ boş olmayan qapalı (zəif yığılma topologiyasında) qabarıq çoxluq əmələ gətirir. Bu çoxluğun kənar nöqtələri onunla seçilir ki, bunlar *reqlulyar təsadüfi meydanlardır*. U potensialı reqlulyar G. t. m.-ni müəyyənləşdirən ehtimal ölçüləri sinfi, $n \rightarrow \infty$ olduqda, $x_{\mathbb{Z}^d, V_n}$, $n=1, 2, \dots$ sərhəd şərtlərinin hər hansı ardıcılığı üçün

$V_1 \subset V_2 \subset \dots, U_n V_n = \mathbb{Z}^d$ artan həcmində (3) şəklində sıxlığa malik Gibbs paylanmalarının bütün limitləri sinfi ilə (hər hansı təbii mənada) üst-üstə düşür.

G. t. m.-lərin nəzəriyyəsinin əsas riyazi məsələsi $S(U)$ toplusunun təsviri və bu topluya daxil olan meydanların xassələrini U potensialının xassələrindən asılı olaraq təsvir etməkdir. Bu məsələ tam həldən uzaqdır. Çoxsaylı cəhdlər edilməsinə baxmayaraq, potensial vasitəsilə G. t. m.-nin sonluölçülü paylanmalarının aşkar analitik təsviri, yalnız bezi nadir hallarda, məs., ikiölçülü İzinq modeli, Qauss modeli hallarında mümkün olmuşdur. Buna görə də, ilk növbədə keyfiyyət xarakterli məsələlər ön plana çıxır, məs., $S(U)$ çoxluğu yalnız bir nöqtədən ibarət olan U potensiallarının sinfini təyin etmək məsələsi.

$d=1$ olan birölçülü halda verilmiş potensiala malik G. t. m.-nin yeganəliyi üçün

$$\sum_{A: 0 \in A} (\text{diam } A) \sup_{x_A} |U(x_A)| < \infty \quad (6)$$

şərtinin ödənilməsi kifayətdir.

(5) şərti ödənilən, lakin (6) şərti ödənilməyən potensiallar sinfində müxtəlif imkanlar yaranır ki, bunlar ələ bil ki, çoxölçülü halı təqlid edir.

Yeganəlik kriterilərindən ən münasib olanı (ixtiyari d dim. – ölçüsü halında) aşağıdakı tələblə ifadə olunur (bax, [1], [2]):

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{s \neq t} \alpha_{s,t} < 1. \quad (7)$$

Burada $s, t \in \mathbb{Z}^d$, $s \neq t$ olduqda

$$\alpha_{s,t} = \sup \text{var} (g(t) (\cdot | \tilde{x}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}), q(s) (\cdot | x'_{\mathbb{Z}^d \setminus \{s\}})),$$

burada $\text{var} (\cdot, \cdot)$ – variasiya üzrə məsafədir və yuxarı sərhəd yalnız s nöqtəsində fərqlənən $\tilde{x}, x'$ sərhəd şərtlərinin bütün cütleri üzrə götürülür. Bu şərt aşkar surətdə asılı olmayan artımlı meydan olduqca yaxın G. t. m.-lərinin sinfini seçib ayırır. Tərs temperatur β -dan asılı $U_\beta = \{ \beta U \}$ şəklində Gibbs meydanı potensiallarının sinfi üçün bu kriteri olduqca kiçik bütün β -lar üçün ödənilir. Kimyəvi potensiallar vektoru μ -dən asılı Gibbs meydanının U_μ potensiallar sinfi üçün, əgər μ_x -in bütün qiymətləri modulca olduqca böyük mənfi qiymətlər alarsa, yeganəlik kriterisi ödənilir, bu isə onu fərz etmək nəticəsinə gətirir ki, qaz seyrəklənmişdir və olduqca kiçik sıxlığa malikdir.

G. t. m. yeganəlik oblastında ehtimal nəzəriyyəsi baxımından bir çox təbii xassələrə malikdir. Məs., (5) və (7) şərtlərinin ödənilməsi nəticəsində aşağıdakı qanşma şərti alınır: P_V – meydanın

V -yə daralma paylanması, $P_V (\cdot | x_W)$ – meydanın $W \subset \mathbb{Z}^d \setminus V$ çoxluğuna daralmasının verilmiş qiymətində bu daralmanın şərti paylanması olarsa, ixtiyari sonlu $V \subset \mathbb{Z}^d$ çoxluğu üçün

$$\lim_{\text{dist}(V, W) \rightarrow \infty} \sup_{x_W} \text{var} (P_V (\cdot | x_W), P_V) = 0. \quad (8)$$

Əgər əlavə olaraq, $\sup_{x_A} |U(x_A)|$ -nin $\text{diam } A \rightarrow \infty$ olduqda

eksponensial olaraq sürətlə azalması fərz olunarsa, onda (8)-də sıfıra yığılma sürətlə eksponensial olaraq baş verəcəkdir və meydan üçün mərkəzi limit teoremi doğru olacaqdır. (6) şərtini ödəyən, potensiala malik birölçülü meydanlar üçün bu mülahizələr analojiçdir.

Yuxarıda qeyd olunan fərziyyələrsiz, verilən potensiala malik G. t. m. yeganə olmaya da bilər və $S(U)$ çoxluğunun strukturu (yeni *faza diaqramı*) d dim. – ölçüsü və μ, β kimi parametrlərdən olduqca asılı olur. Bu struktur yalnız ayrı-ayrı xüsusi modellər üçün (məs., İzinq modeli üçün) kifayət dərəcədə tamamilə öyrənilmişdir. Bu – *faza keçidləri* nəzəriyyəsinin predmetidir.

Gibbs vəziyyətlərinin strukturu aşkar olaraq təsvir olunabilən, çox da olmayan hallardan biri kvadratik hamiltonianın (4) şəklində olduğu haldır. Əlavə – ciddi müsbət müəyyənlik şərti ödənildikdə, yeni ixtiyari sonlu $V \subset \mathbb{Z}^d$ və $x_t \in \mathbb{R}$, $t \in V$ üçün, $c > 0$ olduqda

$$\sum_{s,t \in V} u_{s,t} x_s x_t \geq c \sum_{t \in V} (x_t)^2 \quad (9)$$

şərti ödənilərsə, $t \in \mathbb{Z}^d$ üzrə müntəzəm məhdud mütləq birinci momente malik meydanlar sinfi ilə apriori kifayətlənmək olarsa, onda yeganə G. t. m. mövcuddur. Bu meydan orta qiyməti 0-a bərabər stasionar Qauss meydanıdır. Bu məhdudiyyətsiz G. t. m. olduqca çoxdur. (9) şərtindən imtina edildikdə vəziyyət kəskin surətdə dəyişir. Məs., dim. – ölçü $d=1, 2$ olduqda

$$\sum_{s,t \in \mathbb{Z}^d: |s-t|=1} (x_s - x_t)^2$$

şəklində hamiltonian üçün G. t. m. yoxdur. $d=3$ olduqda, orta qiyməti sıfıra bərabər yeganə Qauss stasionar meydanından başqa, bu potensialı Gibbs meydanı əvvəlkindən ixtiyari konstant əlavə olunmaqla alınan meydanlar olur.

Əd.: [1] Д о б р у ш и н Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 201–29; 1970, т. 15, в. 3, с. 469–97; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, в. 4, с. 31–43; [3] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [4] П р е с т о н К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [5] С и н а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] Д о б р у ш и н Р. Л., Gaussian random Fields Gibbsian point of view, в кн.: Multicomponent random systems, N. Y. – Basel, 1980, p. 119–59; [7] P r e s t o n C h., Random Fields, B., 1976; [8] R u e l l e D., Thermodynamic formalism, Reading (Mass.), 1978.

GİRİŞ AXINI « входящий поток; input / arrival flow / stream » – xidmət sistemi nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. G. a. ədəd oxunun nöqtələrinin, yeni $t_n \in \mathbb{R}$ nöqtələrinin təsadüfi ardıcılığı kimi təyin olunur və bu ardıcılığın sonlu limit nöqtələrinin sanki yeqin olmadığı fərz olunur; bu ardıcılıq, adətən, nizamlanmış ardıcılıqdır ($t_n \leq t_{n+1}$). t_n kəmiyyətinə G. a.-nın n -ci hadisəsi anı və ya n -ci tələbin sistmə daxilolma anı deyilir. Bir çox

hallarda G. a. sistemin fəaliyyətdə olmasından asılı olmayaraq verilir. Ən çox yayılmış G. a.-ları – keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik G. a.-ları, təsiri məhdud G. a.-ları və *Palm axınıdır*. Müasir baxışlara görə, G. a. xidmət müddəti ardıcılıqları ilə birlikdə xidmət sisteminin idarəedici ardıcılığına əmələ gəlir. Stasionar idarəedici ardıcılıqlı sistemlər nəzəriyyəsi daha çox inkişaf etdirilmişdir. Bax, *Nöqtəvi proses*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987.

GİRİŞ AXINI ixtiyari keçmiş təsirsiz «**ВХОДЯЩИЙ ПОТОК** произвольный без последовательности; **arbitrary input / arrival flow / stream with lack of memory**» – bax, *Giriş axını* keçmiş təsirsiz.

GİRİŞ AXINI keçmiş məhdud təsirliliyə malik «**ВХОДЯЩИЙ ПОТОК с ограниченным последствием**; **recurrent input / arrival flow / stream**» – ehl *giriş axınıdır* ki, bu axında n -ci hadisənin baş vermə anı asılı olmayan təsadüfi z_n kəmiyyətlərinin cəminə bərabər təsadüfi kəmiyyətdir:

$$t_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad n \geq 1.$$

Keçmiş məhdud təsirli G. a. nəzəriyyəsi A. Ya. Xinqin tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində və onun tətbiqlərində ən çox yayılmış axın – *rekurrent axındır* (bəra axını), bu axın üçün

$$P\{z_1 < t\} = F_0(t), \quad P\{z_n < t\} = F(t), \quad n \geq 2$$

şərtləri ödənilir. $F_0(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ olduqda keçmiş məhdud təsirli G. a. – ən sadə axındır (*stasionar Puasson axını*). Bax, *Palm axını*.

Əd.: [1] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, М., 1965; [2] Бусленко Н. П., Моделирование сложных систем, М., 1978.

GİRİŞ AXINI keçmiş təsirsiz «**ВХОДЯЩИЙ ПОТОК без последовательности**; **input / arrival flow / stream with lack of memory**» – aşağıdakı xassəli *giriş axınıdır*: $\zeta(t)$, – $[0, t)$ yarıintervallında bircins axın hadisələrinin sayını ifadə edən təsadüfi proses olsun, $t \geq 0$; onda $\{\zeta(t), t \geq 0\}$ – *asılı olmayan artımlı təsadüfi prosesdir*. Başqa sözlə, ixtiyari t_i, t_j , $1 \leq t_i < t_j \leq n$ anlarında $\zeta(t_j) - \zeta(t_i)$ qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, giriş axını keçmiş təsirsiz G. a. adlanır. Əgər $(t, t+s)$ müddətində k sayda hadisənin baş vermə ehtimalı t anına qədər baş vermiş hadisələrdən asılı olmazsa, onda belə axın keçmiş təsirsiz G. a.-dır, $s > 0$.

Keçmiş təsirsiz *regulyar giriş axını* onunla xarakterizə olunur ki, $t < s$ şərtini ödəyən ixtiyari t, s qiymətlərində $\zeta(s) - \zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda(s) - \lambda(t)$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır; $\Lambda(t)$ – kəsilməz azalmayan funksiyadır. Keçmiş təsirsiz *sinqulyar giriş axını* onunla xarakterizə olunur ki, hadisələr yalnız verilmiş $\{x_n\}$ ardıcılığından olan anlarda baş verə bilər. Ixtiyari keçmiş təsirsiz giriş axını – asılı

olmayan *regulyar və sinqulyar keçmiş təsirsiz G. a.-larının cəmidir*.

Bax, *Puasson prosesi*.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Бусленко Н. П., Моделирование сложных систем, М., 1978.

GİRİŞ AXINI *regulyar, keçmiş təsirsiz* «**ВХОДЯЩИЙ ПОТОК регулярный без последовательности**; **regular input / arrival flow / stream with lack of memory**» – bax, *Giriş axını* keçmiş təsirsiz.

GİRİŞ AXINI *sinqulyar, keçmiş təsirsiz* «**ВХОДЯЩИЙ ПОТОК сингулярный без последовательности**; **singular input / arrival flow / stream with lack of memory**» – bax, *Giriş axını* keçmiş təsirsiz.

GİRİŞ BRAKI «**ВХОДНОЙ брак; entrance rejets**» – bax, *Ardıcıl statistik qiymətlər*.

GİRİŞ QANUNU «**ВХОДА закон; entrance law**» – bax, *Kolmogorov tənlikləri*.

GİRİŞ PAYLANMASI «**ВХОДОВ распределение; entrance distribution**» – bax, *Markov prosesi*; davamı.

GİRİŞ SİGNALI «**ВХОДНОЙ сигнал; input signal**» – bax, *Ehtimali avtomat*.

GÖZLƏMƏ MÜDDƏTİ «**ОЖИДАНИЯ длительность; waiting time**» – tələbin *xidmət sisteminde* olduğu – lakin onun xidmət müddəti hesaba alınmayan – zaman müddətidir. Fasiləsiz xidmət sisteminde G. m. – tələbin daxil olduğu andan onun xidmətinə başlandığı ana qədər keçən zaman müddətinə bərabərdir. G. m.-nin araşdırılması üçün əsas metodlar: *semi – Markov prosesləri metodu, virtual gözləmə müddəti metodu, çoxölçülü təsadüfi dolaşma metodudur* (bax, *Xinqin teoremi*).

Gözləmə müddəti ilə xidmət sistemlərində ehl G. m.-nin stasionar orta qiymətləri $M\omega$, $M\nu$ və *növbə kəmiyyəti* mövcuddurlarsa, bunlar bir-birilə $M\nu = \lambda(M\omega + \tau)$ bərabərliyi ilə əlaqəlidirlər, burada λ – giriş axınının *intensivliyi*, τ – tələbə xidmətin orta müddətidir.

GÖZLƏNİLƏN FAYDALILIQ «**ОЖИДАЕМАЯ полезность; expected utility**» – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

GÖZLƏNİLƏN GƏLİR KRİTERİSİ «**ОЖИДАЕМОГО дохода критерий; expected reward criterion**» – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

GÜC ($\bar{u}$) statistik kriterinin «**МОЩНОСТЬ статистического критерия; power of a statistical test**» – H_1 mürekkəb alternativinə qarşı H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş *statistik kriterinin*, H_1 hipotezi əslində doğru olduğu halda, H_0 hipotezinin qəbul edilməməsi ehtimalıdır. Yoxlanılan H_0 hipotezinə alternativ H_1 hipotezi mürekkəb hipotez olduğu halda (bu halda H_0 hipotezinin özü sadə və ya mürekkəb ola bilər, bu isə simvolik olaraq belə yazılır: $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$), H_0 -ın H_1 -ə qarşı yoxlanılması üçün təyin olunmuş statistik kriterinin G. bu statistik kriterinin G. funksiyası $\beta(\theta)$ -nın

($\theta \in \Theta = \Theta_1 = \Theta_0 \cup \Theta_1$) çoxluğuna daralması kimi təyin olunur.

Bu tərifdən fərqli digər aşağıdakı tərif də geniş yayılmışdır: bu $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ müəkkəb hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş statistik kriterinin $G. \inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta)$ -dır, burada $\beta(\theta)$ – bu statistik kriterinin

G. funksiyasıdır (bax, *Güc funksiyası, kriterinin*).

Əd.: [1] Л е м а н Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1975.

GÜC FUNKSIYASI, KRİTERİNİN «мощности критерия функция; power function of a test» – statistik kriterinin keyfiyyətini xarakterizə edən funksiyadır. ($\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\theta$), $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi vektorunun realizasiyası x üzrə

$$\mathbf{P}_\theta \in H_1 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0\}$$

alternativ H_1 hipotezinə qarşı X təsadüfi vektorunun ehtimal paylanması $\mathbf{P}_\theta$ -nin

$$H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0 \subset \Theta\}$$

altçoxluğundan olması haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq tələb olunur və $\varphi(\cdot)$ H_1 -ə qarşı H_0 -in yoxlanılması üçün statistik kriterinin kritik funksiyası olsun. Onda

$$\beta(\theta) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(x) d\mathbf{P}_\theta(x), \quad \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \quad (*)$$

– kritik funksiyası φ olan statistik kriterinin *güc funksiyası* adlanır. (*)-dan aydın olur ki, əgər X $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ qanununa tabe olarsa, kriterinin G. f. $\beta(\theta)$ göstərir ki, H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezini yoxlamaq üçün təyin edilmiş statistik kriteri hansı ehtimallarla H_0 hipotezini qəbul etmir.

Yu. Neyman (J. Neyman) və E. Pirson (E. Pearson) tərəfindən əsas qoyulmuş statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsinə müəkkəb H_1 hipotezinə qarşı müəkkəb H_0 hipotezinin yoxlanılması məsələsi kriterinin G. f. terminləri ilə ifadə olunur və bu aşağıdakı kimi ifadə olunur: $\theta \in \Theta_1$ olduqda, bütün $\theta \in \Theta_0$ üçün və $0 < \alpha < 1$ qiymətində $\beta(\theta) \leq \alpha$ olarsa, belə kriterinin G. f. $\beta(\theta)$ -nin maksimumunu təmin edən statistik kriteri qurmaq tələb olunur, burada kriterinin mühümlük ölçüsü adlandırılan α ədədi H_0 hipotezi doğru olduğu halda onun səhvən qəbul edilməməsinin verilən məqbul ehtimalıdır.

Əd.: [1] Л е м а н Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

GÜC SPEKTRİ «мощности спектр; power spectrum» – bax, Stasionar təsadüfi proses.

GÜCLƏNDİRİLMİŞ PRİNSİPİ, DOĞRU YAOX-ŞARLIĞIN «усиленный принцип правдоподобия; strong likelihood principle» – bax, Ən böyük doğru yaoxşarlıq prinsipi.

GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI «усиления коэффициент; gain» – bax, Ötürücü funksiya.

GÜCLÜ BİRZİRVƏLİ PAYLANMA «сильно одновершинное распределение; strictly unimodal distribution» – bax, Unimodal /təkzirvəli paylanma.

GÜCLÜ FELLER XASSƏSİ Markov proseslərinin «сильно феллеровское свойство марковских процессов; strong Feller property of a Markov processes» – ($X, \mathfrak{B}$) (X – topoloji fəza, $\mathfrak{B}$ – onun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir) fəza fəzasında $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ bircins keçid ehtimalıdır ki, bütün $t > 0$ və $f \in B(X)$ üçün

$$F(x) = T_t f(x) = \int_X \mathbf{P}(t, x, dy) f(y) \in C(X)$$

daxilolma münasibəti ödənilir, burada $B(X)$ – məhdud Borel funksiyalarının fəzası, $C(X)$ – kəsilməz funksiyalar fəzasıdır. Güclü Feller keçid ehtimalı ilə verilən Markov prosesinə *güclü Feller prosesi* deyilir. Viner prosesi – güclü Feller prosesidir.

GÜCLÜ FELLER KEÇİD FUNKSIYASI «сильно феллеровская переходная функция; strong Feller transition function» – bax, Keçid funksiyası Markov prosesi üçün.

GÜCLÜ FELLER PROSESİ «сильно феллеровский процесс; strong Feller process» – Feller prosesinin xüsusi halıdır. E – topoloji fəza, $\mathcal{B}$ – bu fəzada Borel çoxluqlarının çoxluğu olsun. ($E, \mathcal{B}$) ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$, $t \geq 0$ $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olan bircins Markov prosesi X -in verildiyi fəzə olunur. f funksiyası hər dəfə $\mathcal{B}$ – ölçülən və məhdud olduqda

$$\mathbf{P}_t f(\cdot) = \int f(y) \mathbf{P}(t, \cdot, dy)$$

funksiyası ixtiyari $t > 0$ qiymətində hər dəfə kəsilməz olarsa, X prosesinə *güclü Feller prosesi* deyilir. Nisbətən zəif məhdudiyyətləri ödəyən hər bir diffuzion proses G. F. p.-dir (bax, [2]). G. F. p.-nə və açıq çoxluqlarda G. F. p.-lərinin hissələrinə müvafiq eksessiv funksiyaların xassələri klassik superharmonik funksiyaların xassələrinə yaxındır və bu da Dirixle məsələsinin ehtimali izahında (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) kəsilməz G. F. p.-lərinin istifadəsinin müvəffəqiyyətini təyin etmiş oldu (bax, [2]). G. F. p.-ləri sinfinə ilk dəfə [1]-də baxılmışdır.

G. F. p.-lərinə analogi, güclü Feller Markov zənciri də təyin olunur. Güclü Feller komponentinə malik keçid funksiyaları olan Markov zəncirləri öyrənilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Г и р с а н о в И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 1, с. 7–28; [2] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [3] Т у о м и н е н Р., Т w e e d i e R., «Proc. London Math. Soc.», 1979, v. 38, p. 89–114.

GÜCLÜ HARMONİKLƏNMƏLİK(y_i) təsadüfi prosesin « сильная гармонизуемость случайного процесса; strong harmonizability of a random process » – bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*.

GÜCLÜ İNFİNİTEZİMAL OPERATOR « сильный инфинитезимальный оператор; strong infinitesimal operator / generator » – bax, *İnfinitesimal operator*.

GÜCLÜ ÖLÇÜLƏN İNİKAS « сильно измеримое отображение; strongly measurable mapping » – sonsuzölçülü Banax fəzasına inikas üçün ölçülənlik anlayışıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – tam ölçüyə malik ehtimal fəzası, B – Banax fəzası olsun. Əgər $f: \Omega \rightarrow B$ inikası sonlu sayda müxtəlif qiymətlər alırsa və bu qiymətlərdən hər biri A -nın hər hansı çoxluğundandırsa, f sadə inikas adlanır. Əgər elə sadə $f_n: \Omega \rightarrow B$ inikalar ardıcılığı və elə $\Omega_0 \in A$ çoxluğu varsa ki, $\mu(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ və bütün $\omega \in \Omega_0$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ münasibəti ödənilsin, onda f inikasına güclü ölçülən inikas (Bохnerə görə ölçülən inikas) deyilir.

$f: \Omega \rightarrow B$ inikası, yalnız və yalnız, o halda güclü ölçüləndir ki, bu inikas sanki separabelqiymətli olsun [yəni elə $\Omega_0 \in A$ tapılar ki, $\mu(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ və $f(\Omega_0)$, – B -nin separabel altçoxluğu] və hər bir $\beta \in B$ Borel çoxluğu üçün $f^{-1}(\beta) \in \mathcal{A}$.

Sanki separabelqiymətli $f: \Omega \rightarrow B$ inikası, yalnız və yalnız, o halda güclü ölçülən inikadır ki, o, zəif (skalyar) ölçülən olsun (Pettis teoremi).

Əd.: [1] Носида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

GÜCLÜ TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « сильный случайный линейный оператор; strong random linear operator » – bax, *Təsadüfi xətti operator*.

GÜCLÜ UNİMODAL / GÜCLÜ TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA « сильно унимодальное / одновершинное распределение; strongly unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkzırvəli paylanma*.

GÜCLÜ YİĞİLMƏ « сильная сходимость; strong convergence » – bax, *Müntəzəm yığılma*.

GÜCÜ GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI « усиления мощности коэффициент; gain » – bax, *Xətti filtr*.



HAAR ÖLÇÜSÜ « Хаара мера; Haar measure »

– G çevirmeler qrupuna malik E fəzasının Borel σ – cəbri $\mathcal{B}$ -də verilmiş, G -yə nəzərən invariant μ ölçüsüdür, yəni ixtiyari $A \in \mathcal{B}$ və ixtiyari $s \in G$ üçün $\{sg : g \in A\}$ çoxluğu ölçülendir, $\mu(sA) = \mu(A)$, burada sA çoxluğu $\{sg : g \in A\}$ çoxluğu kimi anlaşılr. Əgər $f(p)$, $p \in E$ funksiyası $\mathcal{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndirsə və mənfii olmayandırsa, onda

$$\int f(p) \mu(dp) = \int f(sp) \mu(dp)$$

bərabərliyi bu integrallardan heç olmasa birinin varlığı halında doğrudur. Əgər $\mu(A) = \mu(sA)$ olarsa, μ ölçüsü sol invariant H. ö. (sol H. ö.) adlanır. Əgər μ sol H. ö.-dürsə, onda G -nin elementlərinin ölçülən altçoxluqları K -lardan təşkil olunmuş σ – cəbrdə verilmiş ν funksiyası üçün $\nu(K) = \mu(K^{-1})$ olarsa, ν ölçüsü sağ H. ö.-dür, burada $K^{-1} = \{g^{-1} : g \in K\}$ çoxluğu kimi anlaşılr. Ayrılan topoloji lokal T kompakt qrupunda sol H. ö. həmişə vardır: əgər μ və $\tilde{\mu}$ T -də iki sol H. ö.-dürsə, onda $\tilde{\mu} = c\mu$, burada c – hər hansı müsbət ədəddir. T -də ele müsbət kəsilməz Δ funksiyası (T -də modular funksiya) vardır ki, $\Delta(t) > 0$, $t \in T$, $\Delta(e) = 1$, e , – T qrupunun vahidi elementidir. $\Delta(tt') = \Delta(t)\Delta(t')$, $t, t' \in T$ münasibətlərini ödəyir. Əgər μ T -də sol H. ö.-dürsə, onda $\mu(pg) = \Delta(g)\mu(p)$, $g \in T$, $p \in \mathfrak{A}$ bərabərliyi doğrudur, $\mathfrak{A}$ T qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir.

Əd.: [1] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [2] Виленькин Н. Я., Специальные функции и теория представления групп, М., 1965.

HADİSƏ « событие; event » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi, Təsadüfi hadisə*.

* A HADİSƏSİ B HADİSƏSİNİ DOĞURUR

« событие A влечет событие B; event A implies event B » – eksperimentdə müşahidə oluna bilən A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi hökmən baş verdiyi halda deyilir və bu münasibət simvolik olaraq $A \subset B$ və ya $B \supset A$ kimi işarə olunur. A, B – elementləri müəyyən mənada nizamlanmış Ω çoxluğunun altçoxluqlarıdır.

$B = A \cup B$ və ya $A = A \cap B$ olarsa, $A \subset B$; $A \subset A$; $B \subset C \Rightarrow A \subset C$; A eksperimentdə müşahidə oluna bilən ixtiyari hadisədirsə, $A \subset \Omega$ və $\emptyset \subset A \subset \Omega$ münasibətləri doğrudur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей. 5-ое изд., М.: Наука 1969; [2] Неве Ж., Математические основы вероятностей, М., 1969.

310 HADİSƏ

HALQASI, ÇOXLUQLARIN « кольцо множеств; ring of sets » – bax, *Ölçü*.

σ – **HALQASI, ÇOXLUQLARIN « σ – кольцо множеств; σ – ring of sets »**, σ – halqa, – bax, *Ölçü*.

τ – **HAMAR ÖLÇÜ « τ – гладкая мера; τ – smooth measure »** – topoloji X fəzasında Borel ölçüsü μ -dür və aşağıdakı xassəyə malikdir: X fəzasının açıq çoxluqlarının artan ümumiləşmiş hər bir $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ardıcılığı üçün

$$\mu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \lim_{\lambda} \mu(U_\lambda)$$
 münasibəti doğrudur. Hesabi baza-

ya malik topoloji fəzada (xüsusiylə, separabel metrik fəzada) hər bir Borel ölçüsü τ – hamar ölçüdür. Requlyar topoloji fəzada hər bir τ – hamar sonlu ölçü requlyar ölçüdür. Əgər X metrik fəzadırsa, μ ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda τ – hamar ölçüdür ki, μ ölçüsünün daşıyıcısı mövcud olsun.

Əd.: [1] Барадарайн В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, в. 1, с. 35–100.

HAMARLA(N)MA BƏRABƏRSİZLİYİ « сглаживания неравенство; smoothing inequality » – paylanmalar arasında yaxınlığı daha hamar paylanmaların yaxınlığı ilə qiymətləndirməyə imkan yaradan bir sıra bərabərsizliklərin ümumi adıdır. H. b.-ləri aşağıdakı şəkildə olur:

$$\mu(P, Q) \leq c\mu(P * \Phi^\varepsilon, Q * \Phi^\varepsilon) + C(\varepsilon),$$

burada μ – hər hansı ehtimal metrikası, c – sabit, P və Q – paylanmalar, $\{\Phi^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ – hamar paylanmaların ele parametrik çoxluğudur ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda Φ^ε sıfırda cırlaşmış paylanmaya zeif yığılır. $C(\varepsilon)$, – μ , P və Q -dən asılı və $\varepsilon \rightarrow 0$

olduqda sıfıra yaxınlaşan hər hansı funksiya. Adətən, Φ^ε – hamarlayıcı paylanma adlanan – hamar paylanması $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi(x/\varepsilon)$ şəklində olur. Hamar Φ -lər üçün $P * \Phi^\varepsilon$

və $Q * \Phi^\varepsilon$ paylanmaları da uyğun hamarlığa malik olurlar və belə paylanmalar bunlarla iş prosesində sadələşməyə səbəb olur.

H. b.-lərə aid misallar. Aşağıda birölçülü hala baxılır və Φ – orta qiyməti sıfıra bərabər, dispersiyası vahidə bərabər normal qanun, $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ olsun.

1. Müntəzəm metrika üçün H. b.:

$$\rho(P, \Phi) \leq c_1 \rho(P * \Phi^\varepsilon, \Phi * \Phi^\varepsilon) + c_2 \varepsilon$$

burada c_1 və c_2 – sabitlərdir, P – ixtiyari paylanmadır.

2. Levi – Proxorov metrikası üçün H. b.:

$$a) \pi(P, Q) \leq \pi(P * \Phi^\varepsilon, Q * \Phi^\varepsilon) + c\varepsilon \sqrt{\log 1/\varepsilon},$$

burada c – sabitdir, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ – ixtiyari paylanmalardır,

$$b) \pi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq c_1 \pi(\mathbf{P} * \Phi^e, \mathbf{Q} * \Phi^e) + c_2 (1 + \Gamma) \varepsilon,$$

burada $\mathbf{P}$ – ixtiyari paylanma, $\mathbf{Q}$ – mütləq kəsilməz ele paylanmadır ki, onun paylanma sıxlığı $q(x)$ üçün bütün h -lar üçün

$$\Gamma = \sup_h \{ h^{-1} \int |q(x+h) - q(x)| dx \} < \infty$$

münasibəti ödənilir, c_1 və c_2 – sabitlərdir.

3. s tərtib *ideal metrika* üçün H. b.: $0 < s \leq 2$ olduqda,

$$\zeta_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \zeta_s(\mathbf{P} * \Phi^e, \mathbf{Q} * \Phi^e) + c \varepsilon^s,$$

burada c – sabitdir, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ – ixtiyari paylanmalardır.

4. *Tam variasiyalı metrika* üçün məzmunlu H. b. mövcud deyildir. Məs., ele $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları yoxdur ki, $x \rightarrow 0$ olduqda $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ olsun və bunlar üçün bütün $\mathbf{P}$ və $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ şərtini ödəyən bütün ε üçün

$$\sigma(\mathbf{P}, \Phi) \leq f(\sigma(\mathbf{P} * \Phi^e, \Phi * \Phi^e)) + g(\varepsilon)$$

berəbersizliyi ödənilsin.

Əd.: [1] Bergstrom H., «Skand. aktuarietidskr.», 1945, v. 28, № 1/2, p. 106–27; [2] Esséen C. – G., «Acta math.», 1945, t. 77, № 1, p. 3–125; [3] Sazonov V. V., «SANKHYA. ser. A», 1968, v. 30, pt. 2, p. 181–204; [4] Ротарь В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 4, с. 647–65; [5] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 1, с. 3–12; [6] Abramov B. A., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 406–10.

HAMARLAMA PARAMETRİ « сглаживания параметр; smoothing parameter » – bax, *Qeyri – parametrik regression analiz*.

HAMARLAYICI PAYLANMA « сглаживающее распределение; smoothing distribution » – bax, *Hamarlama berəbersizliyi*.

HAMBURGER TEOREMİ « Гамбургера теорема; Hamburger theorem » – bax, *Momentler problemi*.

HAMILTON STRATEGİYASI « гамильтонова стратегия; Hamiltonian strategy » – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi*.

HAN TEOREMİ, yüklər haqqında « Хана теорема о зарядах; Hahn theorem on signed » – ixtiyari yükün iki müsbət ölçünün fərqi kimi göstərilməsini ifadə edən, ölçü nəzəriyyəsi teoremidir. μ – əsas bazis fəzası X -in hissələrindən təşkil olunmuş S σ – cəbrində təyin olunmuş ixtiyari yük olsun. Onda X fəzasının aşağıdakı şərtləri ödəyən iki – A və B altçoxluqlarına bölgüsü $\{A, B\}$ vardır:

1) ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu üçün $Y \cap A \in S$ və $\mu(Y \cap A) \geq 0$,

2) ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu üçün $Y \cap B \in S$ və $\mu(Y \cap B) \leq 0$.

A , – μ yükünə nəzərən müsbət çoxluq, B , – μ yükünə nəzərən mənfi çoxluq adlanır. Bu halda deyilir ki, $\{A, B\}$ bölgüsü – μ yükünə nəzərən X fəzasının Han mənasında ayrılışıdır.

S σ – halqasında iki (müsbət) μ^+ və μ^- ölçüləri –

$$\mu^+(Y) = \mu(Y \cap A), \quad \mu^-(Y) = -\mu(Y \cap B), \quad Y \in S$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur, μ^+ və μ^- uyğun olaraq μ yükünün yuxarı və aşağı variasiyaları adlanır (aydındır ki, bu ölçülər X fəzasının $\{A, B\}$ bölgüsünün seçilməsindən asılı deyildir). Bu ölçülərdən biri hökmən sonludur. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ münasibəti də vardır ki, bu əksər hallarda verilən μ yükünün Jordan mənasında ayrılışı adlandırılır. $|\mu|(Y) = \mu^+(Y) + \mu^-(Y)$, $Y \in S$ bərabərliyi ilə təyin olunan çoxluq funksiyası $|\mu|$, – μ yükünün tam variasiyası adlanır. Bu funksiya S σ – halqasında ölçüdür. Bu ölçü üçün $|\mu(Y)| \leq |\mu|(Y)$, $Y \in S$ münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. А., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

HANNİNG PƏNCƏRƏSİ « ханнинг окно; hanning window » – bax, *Korrelasyon pəncərə*.

HANT PROSESİ « Ханта процесс; Hunt process » – standart Markov prosesinin xüsusi halıdır. Lokal kompakt separabel Hausdorff fəzası E standart, ümumiyyətlə isə, qınlan $X = (X_t, \zeta, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ prosesinin vəziyyətləri çoxluğu və $\bar{E} = E \cup \{\Delta\}$, – E fəzasının adi birməqəvi kompaktifikasiyası olsun, yeni Δ – sonsuz uzaqlaşmış nöqtədir. Əgər ilkin (başlanğıc) paylanmanın ixtiyari seçilmə və ixtiyari $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ Markov momentləri üçün X_{τ_n} nöqtəsi $\bar{E}$ fəzasının topologiyasında Δ nöqtəsinə $\{\tau = \zeta < \infty\}$ çoxluğunda sanki yəqin yaxınlaşırsa, X prosesi Hant prosesi adlanır. burada $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Bircins keçid funksiyasına müvafiq Hant

prosesinin varlığı üçün şərtlər olduqca ümumi xarakter daşıyır (bax, [1], [2]).

H. p.-ləri sinfi ehtimali potensial nəzəriyyəsinin yaranmasında mühüm rol oynamışdır (bax, [1], həm də *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

Əd.: [1] Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

HARDİ ENTROPİYASI « Харди энтропия; Hardy entropy » – bax, *Informasion ölçü*.

HARMONİK AYRILIŞ METODU « гармонического разложения метод; metod of harmonic decomposition » – bax, *Pisarenko spektral statistik qiymeti*.

HARMONİK FUNKSİYA Markov prosesi üçün « гармоническая функция для марковского процесса; harmonic function for a Markov process » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

HARMONİK FUNKSİYA Markov zənciri üçün « гармоническая функция для цепи Маркова; harmonic function for a Markov chain » – klassik mənasda harmonik funksiyanın mənfi olmayan analogudur;

eksessiv funksiyanın xüsusi halıdır; $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olan $X = (X_n, P_x)$ bircins Markov zənciri verilir. Əgər E -də verilən f funksiyası $(0 \leq f \leq \infty)$ $\mathcal{B}$ - ölçülən və $\mathcal{E}$ -də hər yerdə

$$M_x f(X_1) \equiv \int_E f(y) p(x, dy) = f(x)$$

münasibətini ödəyirsə, f bu zəncir üçün **harmonik funksiya** adlanır, burada $M_x, - P_x$ ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir [məs., Markov zəncirinin vəziyyətləri çoxluğu 1, 2, ... olarsa, f funksiyasını $f_i = f(i)$ götürərək $\{f_1, f_2, \dots\}$ ardıcılığı ilə eyniləşdirmək olar, onda harmonik funksiyanı təyin edən bərabərlik

$$\sum_j p_{ij} f_j = f_i$$

bərabərliklər sistemi şəklində olur, burada p_{ij} - i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır. $i \geq 1$]. H. f.-ya aid mühüm misal $\pi_\Gamma(x)$, $x \in \mathcal{E}$ funksiyasıdır, $\pi_\Gamma(x)$ - zəncirin trayektoriyasının $\Gamma \in \mathcal{B}$ çoxluğunda sonsuz dəfə olması ehtimalı - P_x - ehtimalıdır.

Əgər f H. f.-sı məhdud olarsa, onda ixtiyari $\tau < \infty$ Markov momenti üçün $M_x f(X_\tau) \equiv f(x)$ eyniliyi ödənilir və bu xassənin müəyyən bir modifikasiyası - separabel lokal kompakt Hausdorff fəzası $\mathcal{E}$ -də verilən standart Markov prosesi $X = (X_t, \zeta, \mathcal{A}_t, P_x)$, $t \geq 0$ üçün harmonik funksiyanın tərifində əsas götürülür. Doğrudan da, bu halda əgər f eksessiv funksiyası üçün

$$M_x \{f(X_\tau); \tau < \zeta\} \equiv f(x)$$

eyniliyi $\mathcal{E}$ -də ödənilirsə, $f(x)$ funksiyası X üçün H. f. adlanır, burada $\tau = \inf \{t \geq 0: X(t) \notin U\}$, - X prosesinin U çoxluğundan başlanğıc andan sonrakı ilk çıxış anıdır, U , - $\mathcal{E}$ çoxluğunda kompakt qapanmalar ilə bütün açıq çoxluqların ailəsindəndir (bu tərifin digər modifikasiyaları da mümkündür; bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

Misal. n - ölçülü Evklid fəzasının hər hansı oblastında klassik mənada $f \geq 0$ H. f. bu oblastdan ilk çıxış anında kəsilən (dayanan) Viner prosesi üçün H. f.-dir.

HARMONİK İNTERPOLYASIYA « гармоническая интерполяция; harmonic interpolation » - ən kiçik kvadratlar metodu ilə

$$\theta_0 + \sum_{k=1}^n (\theta_{2k} \cos kx + \theta_{2k-1} \sin kx)$$

şəklində *regressiya* funksiyasının parametrlərinin interpolasiyasıdır (bax, *Regression eksperiment*).

HARMONİK ORTALAMA « гармоническое усреднение; harmonic averaging » - bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

HARMONİKLƏNƏN KORRELYASİON FUNKSIYA « гармонизируемая корреляционная функция; harmonizable correlation function » - bax, *Harmonikləşmə şərtləri*.

HARMONİKLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « гармонизируемое случайное поле; harmonizable random field » - $t = (t_1, \dots, t_n)$ nöqtələrinin n - ölçülü $\mathbb{R}^n$ fəzasında (və ya tamqiyəmetli koordinatları t nöqtələrinin n - ölçülü $\mathbb{Z}^n$ şəbəkəsində) verilmiş və

$$X(t) = \int_{\Lambda_n} e^{itk} Z(dk) \quad (1)$$

n - ölçülü Furiye - Stilyes inteqralı şəklində ifadə oluna bilən kompleksqiyəmetli $X(t)$ *təsadüfi meydan*dır, burada Λ_n , - $t \in \mathbb{R}^n$ olduqda $k = (k_1, \dots, k_n)$ nöqtələrinin n - ölçülü fəzası, yaxud $t \in \mathbb{Z}^n$ olduqda $\{k: -\pi \leq k_i < \pi, i = 1, \dots, n\}$ kubudur, $Z(dk)$, - n - ölçülü bütün Δ intervalları üçün Λ_n -də təyin olunmuş kompleksqiyəmetli təsadüfi ölçüdür. (1)-in sağ tərəfindəki stoxastik inteqralın müxtəlif təriflərinə H. t. m.-lərin müxtəlif sinifləri müvafiq olur, lakin bütün ağlabatan təriflərdə (1) təsadüfi meydanının korrelyasion funksiyası -

$$M X(t) X(s) \equiv B(t, s) \int_{\Lambda_n} \int_{\Lambda_n} e^{i(tk - sk')} F(dk, dk') \quad (2)$$

düsturu ilə verilir, burada Z ölçüsünün təyin olunma oblastından olan ixtiyari $\Delta \subset \Lambda_n$, $\Delta' \subset \Lambda_n$ altçoxluqları üçün

$$F(\Delta, \Delta') = M Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}, \quad Z(\Delta) = \int_{\Delta} dZ(k).$$

Bu halda $B(t, s)$ korrelyasion funksiyasının (2) şəklində ifadə olunması $X(t)$ meydanının harmonikləşən olmasını təmin edir.

Əd.: bax, *Harmonikləşən təsadüfi proses*.

HARMONİKLƏNƏN TƏSADÜFİ PROSES « гармонизируемый случайный процесс; harmonizable random process » - heqiqi $t \in \mathbb{R}^1$ arqumentindən və ya tamqiyəmetli $t \in \mathbb{Z}^1$ arqumentindən asılı,

$$\zeta(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilən kompleksqiyəmetli $\zeta(t)$ *təsadüfi proses*dir, burada $t \in \mathbb{R}^1$ olduqda $\Lambda = (-\infty, \infty)$, $t \in \mathbb{Z}^1$ olduqda $\Lambda = [-\pi, \pi]$, $Z(\lambda)$ isə kompleksqiyəmetli təsadüfi funksiya-dır. H. t. p.-lər sinfinə ilk dəfə 1940-cı illərin ortalarında M. Loev (M. Loève) tərəfindən baxılmışdır və alınan nəticələr [1]-də s. 496 - 99-da şərh olunmuşdur. M. Loev fərz etmişdir ki, $\zeta(t)$ H. t. p.-nin

$$\left. \begin{aligned} F(\Delta, \Delta') &= M Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}, \\ Z(\Delta) &= \int_{\Delta} dZ(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ilə ifadə olunan *spektral ölçüsü* $\Lambda \times \Lambda$ fəzasında məhdud variasiyalı kompleks ölçüdür, odur ki,

$$V(F) = \sup \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |F(\Delta_i, \Delta'_j)| \right) < \infty \quad (3)$$

münasibəti ödənilir, burada supremum kəsişməyən Δ -ya aid $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ və $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$ Borel çoxluqlarının bütün mümkün olan sonlu toplulan üzrə götürülür. Bu halda (1)-in sağ tərəfindəki integral uyğun Stilyes integral cəmləri ardıcılığının kvadratik orta mənada limiti kimi təyin etmək olur [yeni $F(d\lambda, d\lambda')$ ölçüsü tamamilə $\lambda = \lambda'$ diaqonalında toplanmış stasionar təsadüfi prosesin xüsusi halındakı integral kimi təyin olunur]. (1), (2) və (3)-dən

$$M \zeta(t) \overline{\zeta(s)} = B(t, s) = \int_{\Delta} \int_{\Delta} e^{i(t\lambda - s\lambda')} F(d\lambda, d\lambda') \quad (4)$$

münasibəti alınır, burada sağ tərəfdəki integral adi ikiölçülü Stilyes integralıdır. Tersi də doğrudur – $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ -in (4) şəklində ifadə olunma bilinməsindən $\zeta(t)$ -nin H. t. p. olduğu alınır, burada $F(d\lambda, d\lambda') - \Delta \times \Delta$ fəzasında məhdud variasiyalı ölçüdür. [$F(\Delta, \Delta')$ nüvəsinin müsbət müəyyən olması tələbi əslində artıqdır, bu [1]-də əlavə qoyulmuşdu, bax, [2]].

Müəyyənlik üçün, $t \in \mathbb{R}^1$ və $\Delta = (-\infty, \infty)$ olsun. H. t. p. üçün daha ümumi tərif Yu. A. Rozanov tərəfindən [3]-də verilmişdir (bax, həmçinin, [4] – [8]-ə). Yu. A. Rozanov (3) şərti əvəzinə $F(\Delta, \Delta')$ spektral ölçüsünün Freşe mənada sonlu variasiyallığı üçün daha zəif fərziyyə daxil etmişdir ki, bu da

$$W(F) = \sup \left(\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} F(\Delta_i, \Delta'_j) \right| \right) < \infty \quad (5)$$

şərtinə getirilir, burada supremum həqiqi oxun kəsişməyən $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ və $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$ Borel çoxluqlarının bütün mümkün olan toplulan üzrə, həm də modulca vahidi aşmayan $a_1, \dots, a_n$ və $b_1, \dots, b_n$ kompleks ədədlərinin toplulan üzrə götürülür. (5) şərtini başqa şəkildə, (2) düsturundan kompleksqiymətli təsadüfi $Z(\Delta)$ ölçüsünün semivariasiyasının sonlu olması şərti kimi xarakterizə etmək olar (bax, məs., [9], səh. 347 – 48 və [5]). (5) şərtində (4) integralı yalnız adi Stilyes integralı kimi deyil, hər hansı daha geniş mənada mövcud ola bilər, bu halda da $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ -in (4) şəklində ifadə olunması üçün zəruri və kafi şərt olur (burada bu halda sağ tərəfdəki Stilyes integralı hər hansı xüsusi şəkildə təyin olunmalıdır). $\zeta(t)$ prosesi (1) şəklində ifadə olunduqda və (2) funksiyası da (5) şərtini ödədikdə o, H. t. p. adlanır; harmonikləşmənin belə (daha geniş) anlayışını Loev mənada daha sadə harmonikləşmədən fərqləndirmək üçün Y. Q. Qladışev [10]-də təklif etmişdir ki, Loev mənada harmonikləşmə mütləq harmonikləşmə adlandırılın; M. Rao [6] – [8]-də onu sadəcə harmonikləşmə (və ya güclü harmonikləşmə) adlandırmışdır, lakin o, Rozanov mənada harmonikləşməni zəif harmonikləşmə termini ilə işarə etmişdir (yəni bu halda o, $\zeta(t)$ -ni zəif harmonikləşmənin təsadüfi proses adlandırmışdır; bu sonuncu termin aşağıda istifadə olunacaqdır).

Yu. A. Rozanov [3]-də göstərmişdir ki, ixtiyari $Y(t)$ stasionar prosesinin H fəzasının hər hansı xətti altfəzasına proyeksiyalanmasından alınan $\zeta(t)$ prosesi həmişə zəif H. t. p.-dir (burada $Y(t)$ – hər hansı H Hilbert fəzasında sonlu dispersiyalı təsadüfi kəmiyyətlər ayrısı kimi nəzərdə tutulur; bax, *Korrelyasion nəzəriyyə təsadüfi funksiyaların*). A. Mayami və H. Salehi [5]-də isbat etmişlər ki, ters teorem də doğrudur, belə ki, zəif H. t. p.-lər sinfi H Hilbert fəzasının təsadüfi kəmiyyətlər ayrıları sinfi ilə üst-üstə düşür və bu ayrılar H -da olan hər hansı daha geniş Hilbert fəzasındakı stasionar ayrılərin H -da proyeksiyalardır.

Zəif H. t. p. üçün (Loev mənada H. t. p. üçün də) aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\lambda_0 t} \zeta(t) dt = Z(\lambda_0 + 0) - Z(\lambda_0 - 0)$$

və

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t + \tau, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \tau} F(d\lambda, d\lambda')$$

(bax, [3], [6], [8]). Qeyri – stasionar proseslər üçün H. t. p. böyük ədədlər qanununa, yalnız və yalnız, o halda təbədir ki, $\zeta_0(t) = \zeta(t) - M\zeta(t)$ mərkəzlənmiş prosesinin müvafiq spektral ölçüsünün qiyməti $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$ nöqtələri üçün sıfıra bərabərdir. Belə H. t. p. üçün həmişə ortalananmış $\tilde{B}(\tau)$ korrelyasion funksiyası və

$$\tilde{F}(\Delta) = \int_{\Delta} d\tilde{F}(\lambda) = \int_{\Delta} F(d\lambda, d\lambda')$$

bərabərliyi ilə təyin olunan ortalananmış $\tilde{F}(\lambda)$ spektral funksiyası mövcuddur.

H. t. p.-ə aid misallar «*Harmonikləşmə şərtləri*» məq.-də şərh olunmuşdur. H. t. p. anlayışının sadə ümumiləşməsi çoxölçüllü H. t. p. anlayışdır, bu anlayışın digər ümumiləşməsi (eyni zamanda da bircins təsadüfi meydan anlayışının ümumiləşməsi) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ fəzasında harmonikləşmənin təsadüfi meydan anlayışdır. Bu ümumiləşmələr, xüsusi halda, [6] – [8]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] H u r d H. L., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1973, v. 19, № 3, p. 316–20; [3] Р о з а н о в Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] В о с н е р С., в кн.: Proc. Third Berk. Symp. Math. Statist. and Probab., v. 2, Berk. – Los Ang., 1956, p. 7–27; [5] M i a m e A. G., S a l e h i H., «Indiana Univ. Math. J.», 1978, v. 27, № 1, p. 37–50; [6] R a o M. M., «L'enseignement math.», 1982, t. 28, № 3–4, p. 295–351; [7] R a o M. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1984, v. 81, p. 4611–12; [8] R a o M. M., в кн.: Handbook of Statistics, v. 5, Amst., 1985, p. 279–310; [9] Д а н - ф о р д Н., Ш в а р ц Д. Ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [10] Г л а д ы ш е в Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 184–89.

HARMONIKLƏNMƏ ŞƏRTLƏRİ « гармонизуемость условия; harmonization conditions » – $B(t, s) = M\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$ korrelyasion funksiyası üzərinə qoyulan əl şərtləridir ki, bu şərtlərdə $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ (və ya $t \in \mathbb{Z}^1 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$) təsadüfi prosesi harmonikləşmənin

prosesdir. Müəyyənlik üçün $t \in \mathbb{R}^1$ olsun, harmonikləşmə isə Loev mənasında anlaşılır (bax, *Harmonikləşən təsadüfi proses*). ($\zeta(t)$ prosesinin Rozanov mənasında harmonikləşən proseslər sinfindən, yeni zəif harmonikləşən proseslərin daha geniş sinfindən olması üçün H. ş. haqqında bax, məs., [2]).

$\zeta(t)$ prosesi, yalnız və yalnız

$$B(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda - is\lambda'} d^2 F(\lambda, \lambda') \quad (1)$$

olduğu halda harmonikləşən, burada $F(\lambda, \lambda')$, $\mathbb{R}^2$ müstəvisində məhdud variasiyalı funksiyadır (bax, [1], [3]). (1) şəklində ifadə olunan korrelyasiya funksiyası (harmonikləşən korrelyasiya funksiyası adlanan) həmişə məhduddur və hər iki dəyişənə görə müntəzəm kəsilməzdir. Lakin sonuncu şərtləri ödəyən korrelyasiya funksiyası harmonikləşən olmağa da bilər (olsa belə, yalnız Rozanov mənasında harmonikləşən ola bilər) (bax, [3], [4]).

Bir sıra H. ş.-lərini funksiyaların Furiye – Stilyes integralı şəklində göstərilməsi üçün məlum şərtlərdən almaq olur (bax, məs., [5] – [7]). Lakin bütün bu H. ş.-ləri (hətta [8]-də tapılan zəruri və kafi H. ş.) effektiv sayılır, belə ki, bunlar çətin yoxlanılır. Bununla belə, [5] və [8]-də bir-birilə qovuşan nəticələr (həm də [9]-də, fəsil 6-da şərh olunmuş) harmonikləşən proseslərin bir çox xüsusi hallarının alınmasına imkan verir (bax, məs., [3]). Bu nəticələrə görə $B(t, s)$ funksiyası $\mathbb{R}^2$ -də $F(\lambda, \lambda')$ -in tam variasiyasının $N < \infty$ şərtləri ödəyən N -i aşmadığı halda və yalnız və yalnız, o halda (1) şəklində ifadə oluna bilər ki, ixtiyari tamqiyəmətlı n və $(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)$ heqiqi ədədlər cütələrinin ixtiyari ardıcılığı və $c_1, \dots, c_n$ kompleks ədədləri üçün

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j B(t_j, s_j) \right| \leq N \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left| \sum_{j=1}^n c_j \exp(i t_j x - i s_j y) \right| \quad (2)$$

münasibəti ödənilsin.

(1) və (2) şərtləri bir sıra harmonikləşən təsadüfi proseslər siniflərini göstərməyə imkan yaradır (bax, məs., [3], [10] və [11]). Hər bir belə sinfin təsviri faktiki olaraq hər hansı kafi H. ş.-dir.

Misallər. 1) Əgər $|B(t, s)|$ funksiyası və ya $|B(t, s)|^2$ $\mathbb{R}^2$ -də integrallanırsa, onda $B(t, s)$ funksiyasını hər hansı $f(\lambda, \lambda')$ funksiyasının ikiölçülü Furiye çevirməsi kimi ifadə etmək olar. Bu halda $\zeta(t)$ prosesi harmonikləşən və $d^2 F(\lambda, \lambda') = f(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda'$.

2) $K(\omega)$ məhdud variasiyalı kompleks funksiya, $h(t)$ – kompleks funksiya olarsa,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dK(\omega)$$

olduqda $\zeta(t) = h(t) \zeta_0(t)$ şəklində proses harmonikləşən prosesdir, burada $\zeta_0(t)$ – spektral funksiyası $F_0(\lambda)$ olan stasionar təsadüfi prosesdir. Bu halda

$$F(\lambda, \lambda') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \omega) \overline{K(\lambda' - \omega)} dF_0(\omega).$$

3) $Z(u)$ – qeyri – korrelyar artımlı,

$$M dZ(u) \overline{dZ(v)} = \delta(u - v) dF_0(u) dv$$

şərtləri ödəyən kompleks təsadüfi funksiya, $F_0(u)$ – məhdud azalmayan funksiya,

$$h(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dK_u(\omega)$$

olarsa və $K_u(\omega)$ -nın isə ω -nın funksiyası kimi bütün u qiymətlərində eyni bir sabitlə məhdudlanan variasiyası olarsa, onda

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u) dZ(u)$$

şəklində proses harmonikləşən prosesdir.

Ossilyar proseslər *evolyusionar spektral ifadəyə* malik olarsa, onda belə proseslər də harmonikləşən proseslərdir.

4) $Z(u)$ – kompleks təsadüfi funksiya və

$$M Z(u) \overline{Z(v)} = B Z(u, v)$$

$\mathbb{R}^2$ -də sonlu variasiyaya malik olarsa, $h(t)$ isə (2) misalındakı kimi kompleks funksiya olduqda

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - u) dZ(u)$$

tipli proseslər harmonikləşən proseslərdir və bu halda

$$\begin{aligned} d^2 F(\lambda, \lambda') &= \\ &= dK(\lambda) \overline{dK(\lambda')} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(u\lambda - v\lambda')] d^2 B_Z(u, v). \end{aligned}$$

Əd.: [1] Л о з в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 496–99; [2] Рао М., «L'enseignement math.», 1982, t. 28, p. 295–351; [3] Х у р д Н. Л., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1973, v. IT 19, p. 316–20; [4] Г л а д ы ш е в Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 184–89; [5] В о с н е р С., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 40, p. 271–76; [6] С р а м е р Н., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1939, v. 46, p. 191–201; [7] Д о м и н - г у е с А. Г., «Duke Math. J.», 1940, v. 6, p. 246–55; [8] Е б е р - л е й н В. Ф., «Duke Math. J.», 1955, v. 22, p. 465–68; [9] Р у д и н В., Fourier analysis on groups, N. Y. – L., 1962; [10] Р о з а н о в Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [11] С а м б а н и с С., Л и у Б., «Inform. and Control», 1970, v. 17, p. 183–202.

HARRIS QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ « возвратная по Харрису цепь Маркова; Harris recurrent Markov chain » – bax, *Markov zənciri*.

HARRISON MÖVSÜM MODELİ « Харрисона сезонная модель; Harrison seasonal model » – proqnozlanan təsadüfi proseslər üçün *Holt – Winters modelinin*

modifikasiyasıdır. Holt – Uinters modelinin mövsüm komponenti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$s(t-L+j) = 1 + \sum_k \{ a_k \cos(k\lambda_j) + b_k \sin(k\lambda_j) \}. \quad (*)$$

burada

$$a_k = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^L s(t-L+j) \cos(k\lambda_j),$$

$$b_k = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^L s(t-L+j) \sin(k\lambda_j),$$

$$\lambda_j = 2(j-1)\pi/L - \pi.$$

(*)-da cəmlənmə mühüm sayılan harmoniklər üzrə apanılır və $s(t-L+j)$ bu şəkildə Holt – Uinters modelinə əvəz olunur.

Əd.: [1] Harrison P., «Appl. Statist.», 1965, v. 14, p. 102–39; [2] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

HARTLİ «хартли; hartley» – informasiya miqdarı vahididir, informasiya miqdarı təyin olunduqda onluq loqarifmləri istifadə olunduqda alınır. Keçid düsturu: $1H. = 1/\lg 2 \text{ bit} \approx 3,32 \text{ bit}$.

HARTMAN – VINTNER – ŞTRASSEN TEOREMİ
«Хартмана – Винтнера – Штрассена теорема; Hartman – Wintner – Strassen theorem» – bax, *Təkrar loqarifm qanunu Banax fəzasında*.

HASIL(i) σ -cəbrlər ailəsinin «произведение семейства σ -алгебр; product of a family of σ -algebras» – bax, *Hasil(i) ölçülərin*.

HASIL(i) ehtimal fəzalarının «произведение вероятностных пространств; product of probability spaces» – verilən $(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda, P_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = \emptyset$ ehtimal fəzalarından aşağıdakı qaydada alınan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasıdır. $\Omega_\lambda = \Omega_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ çoxluqlarının dekart hasilı $\prod_\lambda \Omega_\lambda$, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ σ -cəbrlərinin

hasilı, yeni $A_\lambda \neq \emptyset$ şərti yalnız sonlu sayda $\lambda \in \Lambda$ indeksləri üçün ödənilirdiyi halda

$$A = \prod_\lambda A_\lambda, \quad A_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda, \quad (*)$$

şəkildə verilən $A \subset \Omega$ altçoxluqlarının doğurduğu σ -cəbr, P isə P_λ , $\lambda \in \Lambda$ ehtimal ölçülərinin hasilidir, yeni $\mathcal{A}$ -da ehtimal ölçüsü olub, aşağıdakı xassəyə malikdir: (*) şəklində hər bir $A \in \mathcal{A}$ çoxluğunda

$$P(A) = \prod_\lambda P_\lambda(A_\lambda)$$

bərabərliyi doğrudur. $\mathcal{A}$ -da belə ölçünün varlığı Anderson – Yessen teoremi ilə ifadə olunmuşdur.

Ehtimal fəzalarının H.-nin konstruksiyası vasitəsilə ixtiyari μ_λ , $\lambda \in \Lambda$ ehtimal ölçüləri ailəsi üçün heç olmazsa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası və $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də asılı olmayan təsadüfi elementlərin $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ailəsini göstərmək olur ki, hər bir $\lambda \in \Lambda$ üçün X_λ elementinin paylanması μ_λ vardır.

Adeten, ehtimal fəzaları ailəsinin hesabından çox olmayan hasilindən istifadə olunur.

Əd.: [1] Лозэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

HASIL(i) ölçülən fəzaların «произведение измеримых пространств; product of a measurable spaces» – bax, *Hasil(i) ölçülərin*.

HASIL(i) ölçülərin «произведение мер; product measure» – ölçü nəzəriyyəsinin əsas konstruksiyalarından biridir. $(X_t, S_t, \mu_t)_{t \in T}$, – ölçülərli fəzaların ixtiyari ailəsi, ixtiyari $t \in T$ üçün $X_t \in S_t$ və $\mu_t(X_t) = 1$ (başqa sözlə, μ_t ehtimal ölçüsüdür) münasibətləri ödənilmiş olsun. Fərz olunur ki, ixtiyari $t \in T$ indeksi üçün Y_t çoxluğu S_t σ -cəbrindədir və $t \in T$ indekslərinin sonlu saydasından başqa bütün t -lər üçün $Y_t = X_t$ bərabərliyi doğrudur. $\prod_{t \in T} X_t$ hasilində

$\prod_{t \in T} Y_t$ şəklində ixtiyari altçoxluq ölçülən paralelepiped (və ya elementar çoxluq) adlanır. Bütün mümkün olan ölçülən paralelepipedlərin çoxluğu $\prod_{t \in T} X_t$ -də

çoxluqların semi-cəbridir. Bu semi-cəbr $(S_t)_{t \in T}$ σ -cəbrlər ailəsinin hasilı adlanan və $\prod_{t \in T} S_t$ simvolu ilə

işarə olunan σ -cəbrlər çoxluğunu doğurur. Bu sonuncu σ -cəbri başqa cür də təsvir etmək olar: bu σ -cəbr $\prod_{t \in T} X_t$ -də

minimal σ -cəbrdir və bütün $p r_t$, $t \in T$ proyeksiyaları bu cəbrə nəzərən ölçüləndirir. $\prod_{t \in T} S_t$ σ -cəbrində, ixtiyari $\prod_{t \in T} Y_t$ ölçülən paralelepipedini üçün

$$\mu \left(\prod_{t \in T} Y_t \right) = \prod_{t \in T} \mu_t(Y_t)$$

xassəsinə malik olan yeganə μ ölçüsü təyin etmək olur. μ ölçüsü $(\mu_t)_{t \in T}$ ölçülər ailəsinin hasilı adlanır və $\prod_{t \in T} \mu_t$ simvolu ilə işarə olunur. Beləliklə, nizamlanmış üçlüyü

$$\left(\prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} S_t, \prod_{t \in T} \mu_t \right)$$
 ölçülü fəza olub, $(X_t, S_t, \mu_t)_{t \in T}$

fəzalar ailəsinin hasilı adlanır. $\left(\prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} S_t \right)$

ölçülən fəzası çox vaxt $(X_t, S_t)_{t \in T}$ ölçülən fəzalarının hasilı adlanır.

İndeksler çoxluğu T sonlu olduqda, yuxarıda qeyd olunana analogi qaydada $\prod_{t \in T} \mu_t$ hasilı və $(\mu_t)_{t \in T}$ ölçülər ailəsi təyin olunur ki, burada hər bir μ_t , $t \in T$ ölçüsü σ -sonlu ölçüdür.

Bu halda $\prod_{i \in T} \mu_i$ da σ – sonlu ölçü olur. Məs., $\mathbb{R}^n$ Evklid

fəzasında klassik n – ölçülü Lebeq ölçüsünə birölçülü ölçülərin hasilinin tamamlanması kimi baxmaq olur (aydındır ki, vuruqların sayı n -ə bərabər olmalıdır). Öz növbəsində, vahid uzunluqlu intervalda birölçülü Lebeq ölçüsünə $\{0, 1\}^N$ Kantor diskontinuumunda verilən hər hansı ölçü – hasilin tamamlanması obrazı kimi baxmaq olar. Sonuncu ölçü $\prod_{n \in N} \mu_n$ ölçüsüdür, burada hər

bir $n \in N$ indeksi üçün μ_n ölçü – vuruğu $\{0, 1\}$ ikiyelementli çoxluğunda ele təyin olunmuşdur ki, $\mu_n(\{0\}) = \mu_n(\{1\}) = 1/2$.

Ölçülərin H. Kavalieri prinsipi adlanan prinsipə sıx əlaqədardır, bu prinsip fəzaların hasilində yerləşən ixtiyari ölçülən çoxluqların ölçülərini bu çoxluqların uyğun kəsiklərinin ölçüləri vasitəsilə hesablamağa imkan verir. Fubini teoremi də bu qəbildən olub, fəzaların hasilii üzrə inteqrallar və vuruqlar üzrə inteqrallar arasında əlaqəni ifadə edir.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ъ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д.ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

HAUSDORF PSEVDOMETRİKASI « Хаусдорфа псевдометрика; Hausdorff pseudometric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

HAUSDORF STRUKTURU ehtimal metrikasının « Хаусдорфа структура вероятностной метрики; Hausdorff structure of a probability metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

HAUSDORF TEOREMİ « Хаусдорфа теорема; Hausdorff theorem » – funksiyalar sinfinin Hausdorfa görə tamlıq xassəsini və bu sinifdən olan funksiyaların kəsilməzlik xassəsini əlaqələndirən teoremdir.

$\mathcal{G}$ – funksiyaların $\mathcal{X}$ çoxluğunda Hausdorfa görə tam sinfi və $\mathcal{G}$, – $\{x: g(x) > 0\}$, $g \in \mathcal{G}$ şəkilli çoxluqlar sistemi olsun.

Onda $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ σ – topoloji fəza emələ gətirir və $\mathcal{X}$ -də bütün funksiyaların çoxluğu $\mathcal{G}$ ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М. – Л., 1937; [2] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

HAZIROLMA ƏMSALI « готовности коэффициент; instantaneous availability index » – sistemin ixtiyari anda işəqabiliyyətli vəziyyətdə olması ehtimalıdır. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin*.

HELLİ TEOREMİ « Хелли теорема; Helly theorem »: $F(x), F_1(x), F_2(x), \dots$ – məhdud azalmayan ele funksiyalar olarsa ki, $\{F_n(x)\}$ ardıcılığı $F(x)$ -ə tamamilə yığılır, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari kəsilməz məhdud $g(x)$ funksiyası üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \quad (*)$$

münasibəti doğrudur. Tərsi də doğrudur, (*) yığılmasından $\{F_n\}$ ardıcılığının F -ə tamamilə yığılması alınır.

Əd.: [1] H e l l y E., «Sitzungsber. Math. – Naturwiss. Kl. Keiser. Akad. Wiss.», 1912, Bd 121, S. 265–97.

316 HELLİ

HELLİNGER İNTEQRALI « Хеллингера интеграл; Hellinger integral » – P və $\tilde{P}$ ehtimal ölçüləri arasında aşağıdakı α tərtib inteqraldır:

$$\int (dP)^\alpha (d\tilde{P})^{1-\alpha}$$

və ixtiyari $P \ll Q$, $\tilde{P} \ll Q$ münasibətlərini ödəyən Q ehtimal ölçüsünə görə

$$\int \left(\frac{dP}{dQ} \right)^\alpha \left(\frac{d\tilde{P}}{dQ} \right)^{1-\alpha} dQ$$

inteqralı kimi anlaşılır. Bu tərifin korrektiliyi ona əsaslanır ki, o, Q ölçüsünün seçilməsindən asılı olmur; Q , – P və $\tilde{P}$ ölçüləri üçün dominar ölçüdür.

Bax, *Hellinger metrikası*.

HELLİNGER METRİKASI « Хеллингера метрика; Hellinger metric » – hər hansı $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında verilən ehtimal paylanmalarının $\mathcal{P}(\Omega)$ fəzasında sadə ehtimal metrikasıdır və

$$\chi^2(P, Q) = (1/2) \int_{\Omega} \left(\sqrt{\frac{dP}{dV}} - \sqrt{\frac{dQ}{dV}} \right)^2 dV$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, V , – Ω -da ele ixtiyari ölçüdür ki, P və Q ehtimal paylanmaları bu ölçüyə nəzərən mütləq kəsilməzdir [məs., xüsusi halda, $V = (P + Q)/2$ belə ölçüdür].

χ H. m. V -nin seçilməsindən asılı deyildir. H. m. simvolik formada

$$\chi^2(P, Q) = (1/2) \int_{\Omega} \left(\sqrt{dP} - \sqrt{dQ} \right)^2 \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə ifadə olunur. Əgər Ω -da invariant dx ölçüsü mövcuddursa, deməli, P paylanmasının sıxlığı $p(x)$ haqqında danışmaq olar, onda (*) münasibəti paylanmalarının sıxlıq funksiyaları p və q olan P və Q paylanmaları üçün adi –

$$\chi^2(P, Q) = (1/2) \int_{\Omega} \left(\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)} \right)^2 dx$$

formasını alır. H. m. –

$$H(P, Q) = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{dP}{dV} \frac{dQ}{dV}} dV$$

Hellinger inteqralı ilə $\chi^2(P, Q) = 1 - H(P, Q)$ bərabərliyi ilə əlaqəlidir və $\alpha = 1/2$ tərtib *Hellinger məsafəsinin* xüsusi halıdır.

H. m. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $0 \leq \chi(P, Q) \leq 1$, $\chi(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;

2) $\chi(P, Q) = 1 \Leftrightarrow P$ və Q qarşılıqlı singulyardırlar ($P \perp Q$);

3) əgər $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P = P_1 \times P_2$, $Q = Q_1 \times Q_2$ olarsa, onda

$$1 - \chi^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (1 - \chi^2(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1))(1 - \chi^2(\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i \in \mathcal{P}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$. Bu xassə H. m.-nin geniş istifadəsi üçün əsas səbəb olmuşdur.

4) H. m. və *tam variasiya metrikası* σ arasında aşağıdakı münasibət vardır:

$$\chi^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \sigma(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \sqrt{2} \chi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

bu münasibət onu ifadə edir ki, χ və δ metrikaları ciddi mənada ekvivalentdirlər (bax, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*).

χ metrikası bir sıra digər ehtimal metrikaları və məsafələri kimi, məs., σ metrikası, müşahidələr nəticələri üzrə $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmalarının fərqlənməsinin «çətinlik dərəcəsinə» düzgün əks etdirən bir xassəyə malik olub, statistikada mühüm rol oynayır. Doğrudan da, fərz olunur ki, $\alpha(\varphi)$ və $\beta(\varphi)$ – müqayisə olunan

$\mathbf{P}$ və $\tilde{\mathbf{P}}$ paylanmalarından hansının doğru olması haqqında H və $\tilde{H}$ hipotezlərinin yoxlanılması üçün $\varphi(\omega)$ kriterisinin 1-ci və 2-ci növ səhv ehtimallarıdır. Əgər bu paylanmaların fərqlənmə ölçüsü kimi

$$\text{Er}(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}) = \inf \{ \alpha(\varphi) + \beta(\varphi) : \varphi \}$$

götürülərsə, onda

$$\text{Er}(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}) = 1 - \sigma(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}})$$

olur. Asılı olmayan sınaqlarla bağlı $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}_1 \times \dots \times \mathbf{P}_n$ və $\tilde{\mathbf{P}}^n = \tilde{\mathbf{P}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathbf{P}}_n$ ölçüləri üçün fərqlənmə ölçüsü

$$(1/2) e^{-2\lambda n} \leq \text{Er}(\mathbf{P}^n, \tilde{\mathbf{P}}^n) \leq e^{-\lambda n}$$

münasibətlə qiymətləndirilir, burada

$$\lambda = -\log H(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}) \geq \chi^2(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}).$$

Əd.: [1] Жакоб Ж. Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

HELLINGER MƏSAFƏSİ «Хеллингера расстояние; Hellinger distance», α tərtib H. m. – adi ehtimal məsafəsidir və o,

$$\tau(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \varphi_{\alpha}(p_V, q_V) d\mathbf{V}, \quad 0 < \alpha < 1$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\varphi_{\alpha}(x, y) = \alpha x - (1 - \alpha)y - x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, $\mathbf{V}$, – $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında ele ehtimal paylanmasıdır ki, o, eyni ehtimal fəzasında verilən $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ehtimal paylanmalarından dominar olanıdır [yeni $\mathbf{P} \ll \mathbf{V}$, $\mathbf{Q} \ll \mathbf{V}$: belə ölçülər həmişə mövcuddur, məs., $\mathbf{V} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q})/2$] və $p_V = d\mathbf{P}/d\mathbf{V}$, $q_V = d\mathbf{Q}/d\mathbf{V}$. H. m. –

$$\tau(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{M}_{\mathbf{V}} \varphi_{\alpha}(p_V, q_V) = 1 - \mathbf{M}_{\mathbf{V}} p_V^{\alpha} q_V^{1-\alpha},$$

bərabərlikləri şəklində yazıla bilər, burada $\mathbf{M}_{\mathbf{V}}$, – $\mathbf{V}$ ölçüsü üzrə ortalamadır.

φ_{α} funksiyası aşağıdakı xassələri ödəyir:

$\varphi_{\alpha}(x, y) \geq 0$, $x, y \geq 0$ olduqda,

$\varphi_{\alpha}(x, y) \rightarrow yI(x=0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(x, y)$, $\alpha \downarrow 0$ olduqda,

$$\varphi_{1/2}(x, y) = (1/2)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

$$\frac{2}{1-\alpha} \varphi_{1/2}(x, y) \leq \varphi_{\alpha}(x, y) \leq 8 \varphi_{1/2}(x, y).$$

Bu xassələr əsasında H. m. ilə *Hellinger metrikası* – $\chi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \tau(1/2; \mathbf{P}, \mathbf{Q})$ –ni müqayisə etmək olur:

$$\frac{2}{1-\alpha} \chi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \tau(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq 8 \chi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

bu münasibətdən

$$\tau(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

münasibəti alınır. H. m. $\alpha \neq 1/2$ olduqda metrika olmur, çünki onun üçün simmetriya və üçbucaq bərabərsizliyi xassələri ödənilmir.

H. m. və onunla bağlı

$$H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 1 - \tau^2(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

– α tərtib Hellinger integralının üstün cəhətləri, xüsusi halda, aşağıdakı mütəlak kəsilməzlik ($\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$) və $\mathbf{Q}$ paylanmasının $\mathbf{P}$ -yə nəzərən singulyarlıq ($\mathbf{Q} \perp \mathbf{P}$) kriteriləri ilə ifadə olunur:

$$\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \Leftrightarrow H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \rightarrow 1, \quad \alpha \downarrow 0$$

$$\mathbf{Q} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0$$

$$\mathbf{Q} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0, \quad \text{bütün } \alpha \in (0, 1) \text{ üçün,}$$

$$\mathbf{Q} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0, \quad \text{her hansı } \alpha \in (0, 1) \text{ üçün.}$$

$\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n, n \geq 1$ ehtimal paylanmaları ailələrinin kontinualıq və tam asimptotik fərqlənmə kimi xassələrinin kriteriləri Hellinger integralları terminləri ilə ifadə olunur:

a) $(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n)$ -nin kontinualılığı – $n \rightarrow \infty$ olduqda,

$\mathbf{P}^n(A^n) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{Q}^n(A^n) \rightarrow 0$, $A^n \in \mathcal{A}$; b) $(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n)$ -nin tam asimptotik fərqlənməsi – yeni ele n_k və $A_1, A_2, \dots$ ardıcılıqları vardır ki, $k \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{P}^{n_k}(A_k) \rightarrow 1$ və $\mathbf{Q}^{n_k}(A_k) \rightarrow 0$ olur. Doğrudan da:

$$(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf H(\alpha; \mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) = 1,$$

$$(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf H(\alpha; \mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) = 0,$$

$$(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$$

bütün $\alpha \in (0, 1)$ üçün,

$$(\mathbf{Q}^n) \Delta(\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$$

her hansı $\alpha \in (0, 1)$ üçün

münasibətləri doğrudur.

HELLINGER PROSESİ « Хеллингера процесс; Hellinger process »

– ehtimal ölçüləri ailələri arasında Helinger integralının zaman üzrə dəyişmə evolyusiyasını xarakterizə edən *öngörül təsadüfi prosesdir*. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0})$, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ filtrasiyası ilə verilmiş (bax, *Stoxastik bazis*) $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzası və $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}, - (\Omega, \mathcal{A})$ -da iki ehtimal ölçüsü: $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}|_{\mathcal{A}_t}$ və $\tilde{\mathbf{P}}_t = \tilde{\mathbf{P}}|_{\mathcal{A}_t}$, $\mathbf{P}$ və $\tilde{\mathbf{P}}$ ölçülərinin $\mathcal{A}_t$ -yə daralması olsun və $\mathbf{Q}$ ehtimal ölçüsü olsun ki, $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$, $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{Q}$, yeni hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\mathbf{P}_t, \tilde{\mathbf{P}}_t, \mathbf{Q}_t$ ölçüləri $\mathbf{P}_t \ll \mathbf{Q}_t, \tilde{\mathbf{P}}_t \ll \mathbf{Q}_t$ şərtlərini ödəyirlər, burada $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}|_{\mathcal{A}_t}$.

$$\mathbf{J}_t = \frac{d\mathbf{P}_t}{d\mathbf{Q}_t}, \quad \tilde{\mathbf{J}}_t = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{Q}_t}, \quad Y_t(\alpha) = \mathbf{J}_t^\alpha \tilde{\mathbf{J}}_t^{1-\alpha}$$

və $H(\alpha)_t = \mathbf{M}_{\mathbf{Q}_t} Y_t$, $\mathbf{P}_t$ və $\tilde{\mathbf{P}}_t$ ölçüləri arasında α tərtib Helinger integralı olsun; simvolik olaraq:

$$H(\alpha)_t = \int \left(\frac{d\mathbf{P}_t}{d\mathbf{Q}_t} \right)^\alpha \left(\frac{d\tilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{Q}_t} \right)^{1-\alpha} d\mathbf{Q}_t = \int (d\mathbf{P}_t)^\alpha (d\tilde{\mathbf{P}}_t)^{1-\alpha}$$

$Y(\alpha) = (Y_t(\alpha))_{t \geq 0}$ prosesi $Y_t(\alpha) = \mathbf{J}_t^\alpha \tilde{\mathbf{J}}_t^{1-\alpha}$ olduqda D sinfinin $\mathbf{Q}$ ölçüsü üzrə mənfi olmayan supermartinqalıdır və Dub – Meyer ayrılışına görə ehtimal $\mathcal{M}(\alpha)$ $\mathbf{Q}$ – martinqalı və artan sonluqiymətli $A(\alpha)_0 = 0$ şərtini ödəyən ehtimal $\mathcal{A}(\alpha)$ prosesi vardır ki, $Y(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha) - A(\alpha)$. Hər bir $\alpha \in (0, 1)$ üçün $h(\alpha)_0 = 0$ şərtini ödəyən ehtimal artan $h(\alpha) = (h(\alpha)_t)_{t \geq 0}$ öngörül prosesi tapılır ki, $(\mathbf{Q}$ – fərqlənməməzliyinə qədər dəqiqliklə yeganə olan), $h(\alpha) = I_{\Gamma} \cdot h(\alpha)$ doğrudur, burada $\Gamma' = \Gamma \cap \tilde{\Gamma}$, $\Gamma = \{\mathbf{J}_- > 0\} \cup \{0\}$, $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\mathbf{J}}_- > 0\} \cup \{0\}$ və $A(\alpha) = Y(\alpha)_- \cdot h(\alpha)$, yeni

$$A(\alpha)_t = \int_0^t Y(\alpha)_{s-} dh_s(\alpha).$$

Bu $h(\alpha)$ prosesi $\mathbf{P}$ və $\tilde{\mathbf{P}}$ ölçülərinə uyğun $\alpha \in (0, 1)$ tərtib Hellinger prosesi adlanır. Əgər $\tilde{\mathbf{J}}^c$ $\mathbf{J}$ və $\tilde{\mathbf{J}}$ $\mathbf{Q}$ – martinqallarının kəsilməz martinqal komponentləri, $\nu(\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{J}})$ – ikiölçülü $(\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{J}})$ prosesinin sıçrayışları ölçüsünün kompensatoru olarsa, onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$h(\alpha)_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \left\{ \frac{1}{\mathbf{J}_-^2}, \langle \mathbf{J}^c, \mathbf{J}^c \rangle - \frac{1}{\mathbf{J}_- \tilde{\mathbf{J}}_-}, \langle \mathbf{J}^c, \tilde{\mathbf{J}}^c \rangle + \frac{1}{\tilde{\mathbf{J}}_-^2}, \langle \tilde{\mathbf{J}}^c, \tilde{\mathbf{J}}^c \rangle \right\} + \varphi_\alpha \left(1 + \frac{x}{\mathbf{J}_-}, 1 + \frac{y}{\tilde{\mathbf{J}}_-} \right) * \nu_t^{(\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{J}})}.$$

burada $\langle \mathbf{J}^c, \mathbf{J}^c \rangle, \langle \tilde{\mathbf{J}}^c, \tilde{\mathbf{J}}^c \rangle, - \mathbf{J}^c$ və $\tilde{\mathbf{J}}^c$ -nin kvadratik xarakteristikaları, $\langle \mathbf{J}^c, \tilde{\mathbf{J}}^c \rangle, - \mathbf{J}^c$ və $\tilde{\mathbf{J}}^c$ -nin kvadratik kovariasiyasıdır: $\varphi_\alpha(x, y) = \alpha x + (1-\alpha)y - x^\alpha y^{1-\alpha}$.

M i s a l l a r. 1) Əgər $\mathbf{Q} = (\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})/2$ olarsa, onda $\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{J}} = 2$ və

$$h(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \left(\frac{1}{\mathbf{J}_-} + \frac{1}{\tilde{\mathbf{J}}_-} \right)^2 \cdot \langle \mathbf{J}^c, \mathbf{J}^c \rangle + \varphi_\alpha \left(1 + \frac{x}{\mathbf{J}_-}, 1 - \frac{x}{\tilde{\mathbf{J}}_-} \right) * \nu^{\mathbf{J}}.$$

2) Əgər $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ və $Z_t = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t}$ olarsa, onda

$$h(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c, Z^c \rangle + \left\{ \alpha + (1-\alpha) \left(1 + \frac{x}{Z_-} \right) - \left(1 + \frac{x}{Z_-} \right) \right\} * \nu^Z$$

və məsələn,

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{Z_-^2} \cdot \langle Z^c, Z^c \rangle + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{x}{Z_-}} \right\}^2 * \nu^Z.$$

H. p.-nin «öngörül kafi statistika» kimi rolu aşağıdakı nəticələrdən aydın olur.

1. $A = \mathbf{V}_{\mathcal{A}_t}$, $\tau = \tau(\omega)$ – Markov momenti (yeni $\tau \geq 0$ və $\{\tau \geq t\} \in \mathcal{A}_t$, $t \geq 0$) olsun; onda $\tilde{\mathbf{P}}_\tau \ll \mathbf{P}_\tau$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kifidir ki, $\tilde{\mathbf{P}}_0 \ll \mathbf{P}_0$ və $h(\alpha)_\tau \xrightarrow{\tilde{\mathbf{P}}} 0$, $\alpha \downarrow 0$ münasibətləri ödənilsin.

2. $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ olsun, onda Kakutani alternativinin aşağıdakı ümumiləşməsi doğrudur: $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kifidir ki, $\tilde{\mathbf{P}} \{ h(1/2)_\infty < \infty \} = 1$ olsun, $\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kifidir ki, $\tilde{\mathbf{P}} \{ h(1/2)_\infty < \infty \} = 0$ şərti ödənilsin.

Əd.: [1] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., On the problem of «predictable» criteria of contiguity. Proc 4th USSR – Japan Symp., «Lect. Notes Math.», 1983, № 1021, p. 386–418; [2] Жакоб Ж., Ширяев А.Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

HEMMİNG PƏNCƏRƏSİ « ХЭММИНГ ОКНО; hamming window » – bax, *Korrelyasion pəncərə*.

HENNAN – KUINN KRİTERİSİ « Хеннана – Куинна критерий; Hannan – Quinn criterion » – bax, *Parametrik model; tərtibin seçilməsi*.

HERMİT MÜSBƏT FUNKSİYASI « Эрмитова положительная функция; Hermitian positive function » – bax, *Müsbət müəyyən funksiya*.

HERMİT TƏSADÜFİ MATRİSİ « Эрмитова случайная матрица; Hermitian random matrix » – n

tərtib n $H_n = \|\xi_{ij}\|$ kvadrat təsadüfi matrisidir ki, özünün qoşma Hermit matrisi H_n^T ilə üst-üstə düşür. Əgər H t. m. H_n -in elementlərinin diaqonalda və diaqonaldan yuxarıda yerləşən heqiqi və xəyali hissələri birgə ehtimal sıxlığına malik olarsa, onda H_n matrisinin məxsusi qiymətləri $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ 1 ehtimalla üst-üstə düşürlər. H. t. m. H_n -in məxsusi vektorları

$$(H_n - \lambda_i I) a_i = 0, (a_i, \bar{a}_i) = 1, \arg a_{1i} = c_i, i = 1, \dots, n$$

tenliklər sistemi ilə birqiymətli təyin olunurlar, burada c_i – hər hansı təsadüfi olmayan ədədlərdir, $0 \leq c_i \leq 2\pi$, $i = 1, \dots, n$.

Γ – n – ölçülü unitar matrislər qrupu və ν – bu qrupda normalanmış Haar ölçüsü, $\mathcal{B}$ – Γ qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri olsun, $A_n = (a_1, \dots, a_n)$. Əgər H. t. m. H_n -in paylanma sıxlığı mövcuddursa, onda

$$P\{A_n \in L, \alpha_i < \lambda_i < \beta_i, i = 1, \dots, n\}$$

ehtimalları hesablamak olar, burada α_i, β_i – ixtiyari heqiqi ədədlərdir, L – $\mathcal{B}$ -nin ixtiyari altçoxluğudur.

Əgər $U_n H_n U_n^*$ və H_n matrislərinin paylanmaları bütün $U_n \in \Gamma$ unitar matrislər üçün üst-üstə düşsə, onda A_n matrisi H. t. m. H_n -in məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və onun paylanması

$$P\{A_n \in L \subset \mathcal{B}\} = \int_L \nu(dU_n | \arg u_{1i} = c_i, i = 1, \dots, n)$$

düsturu ilə təyin olunur. Məxsusi qiymətlərin paylanma sıxlığını da təyin etmək olur (bax, [1]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

HESABİ – ADDİTİV FUNKSİYASI, ÇOXLUQLARIN « счетно – аддитивная функция множеств; countably additive set function / σ – additive set function » – çoxluqların hər hansı sinfində təyin olunmuş və hesabi additivlik xassəsinə (yeni hesabi sayda toplananlar üçün additivlik xassəsinə) malik funksiyadır. K – çoxluqların hər hansı sinfi, G – additiv yazılışda kommutativ topoloji qrup olsun (yeni G -də qrup əməli $+$ simvolu ilə işarə olunur). Əgər K sinfinin elementlərinin hesabi dizyunkt $(X_i)_{i \in I}$ ixtiyari ailəsi üçün bu elementlərin birləşməsi də K -nin elementi olduğu halda

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(X_i)$$

bərabərliyi ödənilsə, $\mu: K \rightarrow G$ funksiyası **hesabi – additiv funksiya** adlanır. Bərabərliyin sağ tərəfindəki cəmin yığılması adı mənada anlaşılar (I çoxluğunun sonlu altçoxluqlarının tamamlayıcılarının doğruduğu Freşe filtri üzrə I -də yığılma kimi). Tərifdən bilavasitə alınır ki, bu sıra kommutativ (şərtsiz) yığılır və deməli, əgər G qrupu heqiqi ədədlər meydanı

üzərində sonluölçülül normalanmış vektor fəza olarsa, onda o göstərilən sıra mütləq yığılır.

G heqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxu ilə üst-üstə düşdükdə, sonsuz qiymətlər alan H. – a. ç. f.-na da tez-tez baxılır. Bu halda tələb olunur ki, hər bir funksiya sonsuzluq qiymətini yalnız bir işarə ilə ala bilsin (ya yalnız $+\infty$ və ya yalnız $-\infty$).

Ayındır ki, hər bir H. – a. ç. f. eyni zamanda həm də sonlu – additiv çoxluq funksiyasıdır. Tersi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir. Riyaziyyatın müxtəlif oblastlarında halqalar və cəbri çoxluqlarda (uyğun olaraq, çoxluqların σ – halqa və σ – cəbri rəndə) verilən ədədi hesabi – additiv funksiyalar olduqca mühüm rola malikdirlər. Belə funksiyalar tez-tez **yüklər** (ü m u m i l e ş m i ş ölçülər, işarəsini dəyişən ölçülər) adlandırılır. H.-a. ç. f. anlayışının mühüm xüsusi halı – **ölçü** anlayışdır.

Əd.: [1] Проко́ров Ю. В., Роза́нов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [2] Ха́лмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Ги́хман И. И., Скоро́ход А. В., Теория случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

HESABİ EHTİMALİ AVTOMAT « вероятностный автомат счетный; countable probabilistic automation » – bax, **Ehtimali avtomat**.

HESABİ MARKOV ZƏNCİRİ « счетная цепь Маркова; countable / denumerable Markov chain » –

1) geniş mənada H. M. z. – vəziyyətləri çoxluğu hesabi **Markov zənciridir**.

2) Dar mənada H. M. z. – vəziyyətləri çoxluğu hesabi bircins **Markov zənciridir**. H. M. z. nəzəriyyəsi asılı təsadüfi sınaqlar və kəmiyyətlərin bütövlükdə nəzəriyyəsi kimi sonlu zəncirlər üzrə A. A. Markovun işləri seriyasından qaynaqlanmışdır (bax, [1], [2]). Vəziyyətləri çoxluğu hesabi zəncirlərin öyrənilməsinə 1936 – 37-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən başlanılmışdır (bax, [4], [5]).

H. M. z. nəzəriyyəsi Markov zəncirlərinin ümumi nəzəriyyəsinin ən çox öyrənilmiş sahəsinə qədər inkişaf yolu keçərək, elm və texnikanın müxtəlif oblastlarında cürbəcür tətbiqlərini tapa bilmişdir (bax, [6], [10]).

Sonlu və hesabi Markov zəncirlərinin (yeni vəziyyətləri çoxluğu sonlu və hesabi Markov zəncirlərinin) evolyusiyasını təyin edən ehtimal mexanizmi ilk növbədə keçid ehtimalları (biraddıma) p_{ij} ilə təsvir olunur, burada i və j baxılan zəncirin vəziyyətləri fəzası E -nin nöqtələridir. Əgər E sonlu fəza olarsa, onda o, ekser hallarda, $\{0, 1, \dots, N\}$ və ya $\{1, \dots, N\}$ çoxluğu ilə eyniləşdirilir, N – natural ədəddir; əgər E hesabi fəzadırsa, onda o, $\{0, 1, \dots\}$ və ya $\{1, 2, \dots\}$ çoxluğu ilə eyniləşdirilir. Başlanğıc (ilkin) paylanma məlum olduğu halda, yeni $p_i = P\{X_0 = i\}$, $i \in E$ ehtimalları məlum olduqda $\Lambda_n = \{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}$ şəkildə hadisələrin ehtimalları və bu hadisələr üzrə zəncirin bütün evolyusiyası $P(\Lambda_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$ bərabərliyindən tapılır, burada $\{X_0, X_1, \dots\}$ – baxılan zəncirin trayektoriyasıdır. Beləliklə, $P\{X_n = i_n | \Lambda_{n-1}\} = p_{i_{n-1} i_n}$, $P\{X_n = i_n | \Lambda_{n-1}\} = p_{i_{n-1} i_n}$ bərabərliyi $P\{X_{n-1}\} \neq 0$, $n \geq 1$ olduqda doğrudur.

p_{ij} ehtimallarından $P = \|p_{ij}\|$ keçid matrisi qurulur və bu matris E -nin sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq sonlu və ya

sonsuz stoxastik matris olur. $p_{ij}(n)$ n addıma i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalı olduqda *Kolmoqorov – Çepmen tənliyi*

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k \in E} p_{ik}(m)p_{kj}(n), \quad m, n \geq 1$$

əsasında $\|p_{ij}(n)\|$ matrisini P^n şəklində yazmaq olur.

P^n matrisinin $n = 1, 2, \dots$ bütün qiymətlərində bilavasitə tapılması, bir qayda olaraq, mümkün olmur və adətən, həm nəzəri, həm də təbiiqi araşdırmalarda əsas səylər $n \rightarrow \infty$ halında

P^n -in asimptotikasının təsvirinə istiqamətlənir. Bu halda A. N. Kolmoqorova məxsus, zəncir vəziyyətlərinin təsnifatı əsas götürülmüşdür (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*). Markov zəncirləri üçün *limit teoremləri* də mühüm informasiya verir. Buna baxmayaraq H. M. z. ilə araşdırmalarda, xüsusilə də, sonlu zəncirlərlə bağlı olaraq, bəzi müəlliflər sırf cəbri texnikadan istifadə edirlər (bax, məs., [6]), bu halda cəbri və ehtimal modellərinin kombinasiyasında, adətən, böyük uğurlara nail olunur (bax, [7]–[10]).

M i s a l 1. Zəncirin vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, \dots, N\}$ toplusu olsun və zəncirin verilən vəziyyətlər üzrə təsadüfi dolanmaya uyğun olduğu fərz olunur. Fərz olunur ki, 0 və N vəziyyətləri uducu vəziyyətlərdir və hər bir i vəziyyətindən ($0 < i < N$) növbəti addımla ya $p_{i,i+1} = p$ ($p \in (0, 1)$) ehtimalı ilə $i+1$ vəziyyətinə və ya $p_{i,i-1} = q = 1 - p$ ehtimalı ilə $i-1$ vəziyyətinə keçid baş verir. Aydın olur ki, əgər $1 \leq j \leq N-1$ olarsa, i -nin ixtiyari qiymətlərində $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0$ münasibəti ödənilir. $\alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}(n)$ və $\beta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{iN}(n)$ limitləri də mövcuddur və $\alpha_i + \beta_i = 1$. Əgər $p = q = 1/2$ olarsa, onda $\alpha_i = 1 - iN^{-1}$. Əgər $p \neq 1/2$ olarsa, onda $\alpha_i = (\gamma^N - \gamma^i)(\gamma^N - 1)^{-1}$ olur, burada $\gamma = qp^{-1}$ ($0 \leq i \leq N$).

M i s a l 2 (müvəffəqiyyət seriyası). Vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, \dots\}$ olan H. M. z.-nin keçid ehtimalları $p_{i0} = q_i$ və $p_{i,i+1} = 1 - q_i$ olsun, burada $q_i \in (0, 1)$, $i \geq 0$ və digər hallarda isə $p_{ij} = 0$. Əgər hər dəfə i vəziyyətindən $i+1$ vəziyyətinə və ya hər hansı sınaqlarda 0 vəziyyətinə keçid uyğun olaraq «müvəffəqiyyət» və ya «qeyri – müvəffəqiyyət» kimi interpretasiya olunarsa, onda n -ci addımda zəncirin $i \geq 1$ vəziyyətində olması bu ana qədər, sonuncu qeyri – müvəffəqiyyətdən sonra məhz yalnız i sayda müvəffəqiyyətin baş verməsi kimi anlaşılar (fərz olunur ki, qeyri – müvəffəqiyyətlər baş vermişdir). Verilən zəncir qarşılıqlı zəncir, yalnız və yalnız, o halda olur ki, $\sum_i p_i = \infty$ şərti

ödənilsin (bax, *Qayıdışlı Markov zənciri*), burada $p_i = 1 - q_i$. Bu halda bu zəncirin *final ehtimalları* $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$ ehtimalları olur ki, bunlar $\sum_j \pi_j = 1$ və $\pi_j = \pi_0 p_0 p_1 \dots p_{j-1}$, $j \geq 1$ münasibətlərindən təyin olunur.

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-матем. об-ва Казан ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–56; [2] Марков А. А., «Изв. Петерб.

АН», 1907, т. 1, № 3, с. 61–80; [3] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 173–78; [5] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 183–97; [6] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949; [7] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [8] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [9] Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова, Таш., 1979; [10] Баруча – Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [11] Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А., Счетные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1987.

HESABİ TİP σ – CƏBR «счетного типа σ – алгебра; σ – algebra of countable type», separabel tip – bax, σ – Cəbri, çoxluqlann.

HESABLANILMA MƏSƏLƏLƏRİ kombinator analizdə «перечислительные задачи в комбинаторном анализе; enumerative problems in combinatorial analysis» – bax, *Kombinator analiz*.

HETEROSKEDASTİK REQRƏSSİYA «гетероскедастическая регрессия; heteroscedastic regression» – dispersiyaları müxtəlif olan, qeyri – korrelyar xətlərlə *regression eksperimentidir*.

HEYZENBERQ MODELİ «Гейзенберга модель; Heisenberg model» – statistik mexanikanın şəbəkəvari modelidir; bu modeldə vəziyyətlər fəzası $\{x_i\}$ (X -in qiymətləri fəzası) – vahid radiuslu $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sferasıdır, U potensialı isə aşağıdakı şəkildədir:

$$U_A(x_A) = \begin{cases} -hx_i, & A = \{i\}, \\ -I x_s x_t, & A = \{s, t\}, |s - t| = 1, s, t \in \mathbb{Z}^d, \\ 0, & \text{digər } A\text{-lar üçün} \end{cases}$$

Üçölçülü H. m.-ndə ($\mathbb{Z}^3$ şəbəkəsində) $h = 0$ olan maqnit sahəsində və $I > 0$ olduqda (ferromaqnit model) faza keçidi baş verir, bu keçid ondan ibarət olur ki, tərs temperatur parametri β -nin böyük qiymətlərində *Gibbs paylanmalarının* tam bir kontinuumu olur.

H. m. *XYZ – modeli* də adlandırılır. $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ halı *XY – modeli* adlanır. Üçölçülü *XY – modeli* Gibbs paylanmalarının analogi strukturuna malikdir. $\mathbb{Z}^2$ şəbəkəsində vəziyyət başqadır: ikiölçülü *XY – modelində* Berezinski – Kosterlits – Tauless faza keçidi baş verir, bu keçid ondan ibarətdir ki, bütün β qiymətlərində, Gibbs paylanmasının yeganəliyinə baxmayaraq, korrelyasiyaların azalma sürəti kiçik β qiymətlərində eksponensial azalmadan böyük β -larda qüvvət üstü azalmaya qədər dəyişir.

İkiölçülü H. m. üçün analogi problem həll olunmamışdır. Əd.: [1] Fröhlich J., Simon B., Spencer T., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 50, № 1, p. 79–85; [2] Bricmont J., Fontaine J., Landau L. J., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 56, № 3, p. 281–96; [3] Fröhlich J., Spencer T., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 81, № 4, p. 527–602.

HƏDDƏNZİYADƏLİK «избыточность; redundancy» – məlumatlar mənbəinin hasil etdiyi məlumatın komponentləri arasında statistik asılılıq ölçüsüdür. Elementlərinin sayı

$|\mathcal{X}|$ -ə bərabər sonlu $\mathcal{X}$ çoxluğundan qiymətlər alan $\{X_k\}$, $-\infty < k < \infty$ stasionar təsadüfi prosesinin realizasiyaları olan $X = (\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$ məlumatlarını hasil edən, stasionar məlumatlar mənbəi diskret zamanlı U -nın H. ölçüsü λ

$$\lambda = 1 - \bar{H}(U)/H_{\max}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\bar{H}(U)$ – məlumatların hasil-
olunma sürəti, $H_{\max}$ – komponentləri $|\mathcal{X}|$ sayda qiymətlər
alan, diskret zamanlı mənbənin məlumat hasilolunma sürətinin
mümkün olan maksimal qiymətidir. İnformasiya nəzəriyyəsi üçün
H. ölçüsünün qiyməti məlumatlar mənbəinin kodlama teoremi
ilə təyin olunur və bu teoremdə informasiyanı ötürmə sürətinin
artırılması mümkünüyü göstərilir.

Rabitə kanalının əngələdayıcılığını artırmanın əsas metodla-
rından biri kodlamada H. z. ölçüsünün daxil olunmasıdır və
bununla da kanalın girişində simvollar arasında statistik asılılıq
əks olunur. Belə asılılıq, dekodlamada, kanalda xətlərin təsirinə
aradan qaldırılmasına imkan yaradır ki, bu da şəhv dekodlama
ehtimalının azalmasına səbəb olur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь,
пер. с англ., М., 1974; [1] Колесник В. Д., Полтырев Г.
Ш., Курс теории информации, М., 1982.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « решающая функция; decision function » – seçimi $\mathcal{X}$ fəzasının həllər fəzası $\mathcal{D}$ -yə stoxastik inikasıdır. Stoxastik inikas həllər fəzası $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ -da stoxastik eksperimentin nəticəsi x -dən asılı olan $\varphi(\cdot|x)$ ehtimal paylanması (həllədiçi qaydası) təyin edir. H. f. hər bir x üçün paylanması $\varphi(\cdot|x)$ qiymətləri $\mathcal{D}$ -dən olan $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətdir. H. f., bezen φ həllədiçi qaydası ilə eyniləşdirilir. H. f.-nin praktiki realizasiyası, ümumi halda randomizasiya proseduru ilə bağlıdır və əgər $\varphi(\cdot|x)$ paylanması hər hansı $d = d(x)$ nöqtəsində toplanmışdırsa, onda randomizasiya aparılmır. Bununla əlaqədar olaraq, randomlanmış və randomlanmamış H. f.-lər daxil olunur; randomlanmamış H. f.-lər $\mathcal{X}$ -dən $\mathcal{D}$ -yə ölçülən inikaslar kimi statistikalarla eyniləşdirilir.

Statistik oyunlar nəzəriyyəsində H. f. – seçimi fəzanın bütün mümkün həllər çoxluğuna ixtiyari ölçülən inikasıdır (bax, Oyunu, iki şəxsin, Statistik oyun).

Əd.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; Bayes həllədiçi funksiyası « решающая функция байесовская; Bayes decision function » – bax, Bayes həllədiçi funksiyası.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA invariant « решающая функция инвариантная; invariant decision function » – bax, İnvariantlıq statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA məylsiz « решающая функция несмещенная; unbiased decision function » – bax, Məylsizlik(yi) statistik prosedurun.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA məqbul « решающая функция допустимая; admissible decision function » – bax, Məqbul həllədiçi funksiya.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA minimal « решающая функция минимальная; minimal decision function » – bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; minimal tam sinif « решающая функция; минимально полный класс; minimal complete class of decision function » – bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA müntəzəm yaxşı « решающая функция равномерно лучшая; uniformly best decision function » – parametrik fəzanın bütün nöqtələrində risk funksiyasını müntəzəm minimallaşdıran həllədiçi funksiya. Bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA optimal « решающая функция оптимальная; optimal decision function » – bax, Optimallıq(ğı) statistik prosedurun.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA randomlanmamış « решающая функция нерандомизированная; non-randomized decision function » – bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA randomlanmış « решающая функция рандомизированная; randomized decision function » – bax, Statistik həllər nəzəriyyəsi.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; tam sinif « решающая функция; полный класс; complete class of decision function » – ehlə həllədiçi funksiyalar çoxluğu. Bax, ki, qəbul olunan qərarların itkisiz keyfiyyəti statistik probleminde bu funksiyalara baxılması kifayət edir. K – həllədiçi funksiyaların hər hansı sinfi olsun (ola bilər ki, bu sinif bütün həllədiçi funksiyaların sinfi ilə üst-üstə düşsün). Əgər ixtiyari $\delta \in K$ həllədiçi funksiyası üçün ehlə $\delta^* \in K^*$ həllədiçi funksiyası tapılsa ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ bərabərsizliyi ödənilsin,

onda $K^* \subset K$ altsinfi K sinfində tam sinif adlanır, burada $R(\theta, \delta)$, – δ həllədiçi funksiyasının risk funksiyası olub, araşdırılan obyektə xarakterizə edən naməlum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunur. Bax, Statistik prosedur; tam sinif.

HƏLLEDİCİ KRİTERİ « решающий критерий; decision criterion » – bax, Həllədiçi qayda, Ardıcıl yoxlanılması, hipotezlerin.

HƏLLEDİCİ QAYDA « решающее правило; decision rule », həllədiçi kriteri, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyasının θ parametrinə nəzərən H_i , $i=0, \dots, k$ hipotezlerinin yoxlanılması üçün (τ, d) ardıcıl statistik kriterisidir. Burada τ hər hansı $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında, verilmiş azalmayan $\{\mathcal{A}_i\}$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$, σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anıdır (dayanma anı), d , – $0, \dots, k$ qiymətlərini (qəbul edilən hipotezin nömrəsi) alan ölçülən funksiya. Bax, (sonda qəbul olunan qərar funksiyasıdır). Məs., əgər τ təsadüfi kəmiyyət olmazsa, onda H. q. statistik hipotezləri yoxlamaq üçün adi kriteridir.

Əgər (τ^*, d^*) H. q.-sında $w(\tau, \theta, d)$ Beyes riskinin orta qiymətinin minimumu alınrsa, yəni

$$\inf_{(\tau, d)} \int_{\Theta} \mathbf{M}_{\theta} w(\tau, \theta, d) q(d\theta) = \int_{\Theta} \mathbf{M}_{\theta} w(\tau^*, \theta, d^*) q(d\theta)$$

münasibəti ödənilərsə, (τ^*, d^*) H. f. $q(d\theta)$, $\theta \in \Theta$ aprior paylanması üçün **Beyes (optimal Beyes)** H. q.-sı adlanır.

Parametrlərin ardıcıl qiymətləndirilməsi məsələləri üçün H. q. anlayışının analoqu **ardıcıl plandır** (qiymətləndirmənin).

Əd.: [1] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.

HƏNDƏSİ EHTİMALLAR «геометрические вероятности; geometric probability» – *ehtimal nəzəriyyəsinin* təsadüfi fiqurlar və onların təsadüfi yerləşmələrinin xassələrini öyrənən bölməsidir. H. e. üzrə ilk məsələlər artıq 18-ci əsrdə həll olunurdu (bax, *Byuffon iynə məsələsi*). 19-cu əsrin riyaziyyatçıları üçün seçiyyəvi hal müntəzəm paylanmaya və fiqurları təyin edən parametrlərin asılı olmamazlığına əsaslanaraq, təsadüfi fiqurların paylanmalarını vermək üçün səylərin göstərilməsi olmuşdu. Lakin parametrlərin seçilməsində sərbəstlik təsadüfi fiqurun paylanmasını yeganə şəkildə vermək üçün təminədiçisi olmamışdır. Bu vəziyyət *Bertran paradokslarında* aşkar surətdə özünü əks etdirmişdir.

Vahid radiuslu dairənin «ixtiyari vətərinin» uzunluğunun $\sqrt{3}$ -dən böyük olması (yəni «təsadüfi vətərin» uzunluğunun daxilə çəkilmiş bərabərtərəfli üçbucaqlının tərəfindən böyük olması) hadisəsi *A*-nın ehtimalı *P*-nin tapılması məsələsi qoyulmuşdu. J. Bertran (J. Bertrand) təsadüfi vətərin seçilməsi üçün aşağıdakı üç halı təklif etmişdi:

1) Çevrə üzərinə bir-birindən asılı olmadan *B* və *C* nöqtələri atılır. Bu nöqtələrin hər biri müntəzəm paylanmaya malikdir. *BC* vətərinə baxılır. Bu halda, $P(A) = 1/3$.

2) Dairənin mərkəzindən vətərə endirilən perpendikulyarın oturacağı daire daxilində müntəzəm qanunla paylanmışdır. Onda $P(A) = 1/4$.

3) Dairənin mərkəzindən vətərə qədər olan məsafə $[0, 1]$ -də müntəzəm qanunla paylanmışdır. Vətərin istiqaməti ixtiyaridir və $[0, 2\pi]$ -də müntəzəm qanunla paylanmışdır. Onda $P(A) = 1/2$.

Əgər vətər onun dairənin mərkəzindən məsafəsi *p* və vətərin verilmiş istiqamətlə əmələ gətirdiyi ϕ bucağı ilə verilsə, onda «təsadüfi vətər» sözünün mənası – *p* və ϕ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması anlamına ekvivalentdir. Bu misallarda paylanmaların uyğun differensialları aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$1) \frac{dp d\phi}{2\pi^2 \sqrt{1-p^2}}; \quad 2) \pi^{-1} p dp d\phi; \quad 3) (2\pi)^{-1} dp d\phi.$$

Təsadüfi vətərin «təbii» təyin edilmə məsələsini H. Puankare (H. Poincaré) həll etmişdir. O, təsadüfi vətərin paylanmasını – Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant düz xətlər fəzasında ölçünün vətərlər çoxluğuna normalanmış daralması kimi təyin etməyi təklif etmişdir (belə ölçü yeganədir; bax, *İnteqral həndəsə*). Belə seçimə 3) misalı uyğundur. Invariant ölçülərin sonlu ölçülü çoxluqlara analoji daralması ilə təsadüfi fiqurların paylan-

masını digər fəzalarda da qurmaq olar (bax, məs., *Təsadüfi kəsik(yi) çoxölçülünün*). A. Renyi [6]-da verdiyi aksiomlar sistemi əsasında yuxarıda şərh olunmuş ölçünün daralması metodunun ehtimal ölçülərinin qurulmasına gətirdiyini göstərmişdir.

H. e.-də elə ölçülər də böyük əhəmiyyətə malikdirlər ki, çevirmələr qrupuna nəzərən bu ölçülərin invariant olmaları tələbi yalnız qismən ödənilir (bax, *İnteqral həndəsə*). İnteqral həndəsədə kombinator yanaşmaların inkişafı ölçülərin invariant olması tələblərindən asılı olmayan nəticələr almağa imkan verir. Verilmiş ölçüyə görə ehtimal ölçülərinin qurulması üsuluna onun faktorizasiyası da aiddir. Xüsusi halda, bu üsulla *təsadüfi şeylərin* paylanmaları alınır. *Həndəsi proseslərdə* «tipik» konfiqurasiyaların paylanmalarının tapılması məsələləri də H. e.-a aiddir.

Konkret hadisələrin ehtimallarının hesablanması uyğun ölçülər və onların hasilləri üzrə inteqralların (çoxölçülülük) hesablanmasına gətirilir. Bu halda inteqrallama oblası olduqca mürəkkəb ola bilər. Örtüklər haqqında, qablaşdırma, fiqurların qarşılıqlı yerləşməsi haqqında məsələlər, cisimlərin düz xətlərlə və müstəvilərlə kəsilməsi haqqında *riyazi stereologiyanın* məsələləri belələndirəndir.

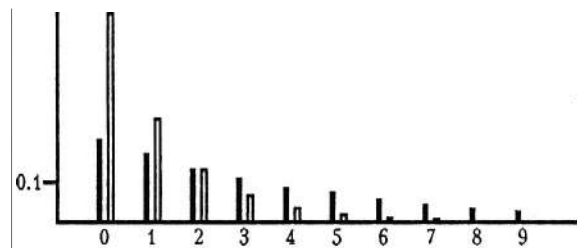
Əd.: [1] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [2] Санта-Ало Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [3] Баддлей А., «Adv. Appl. Probab.», 1977, v. 9, p. 824–60; [4] Литтл Д., «Adv. Appl. Probab.», 1974, v. 6, p. 103–30; [5] Geometrical probability and biological structures, B. – [a. o.], 1978; [6] Реньи А., Wahrscheinlichkeitstheorie, 2 Aufl., B., 1966.

HƏNDƏSİ ERQODİK MARKOV ZƏNCİRİ «геометрически эргодическая цепь Маркова; geometrically ergodic Markov chain» – bax, *Erqodik Markov zənciri*.

HƏNDƏSİ PAYLANMA «геометрическое распределение; geometric distribution» – $m = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərini

$$p_m = P\{\xi = m\} = p(1-p)^m, \quad 0 < p < 1$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır (bax, şəkil). Riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq $(1-p)/p$ və $(1-p)/p^2$ -na bərabərdir; asimmetriya əmsalı $As = (2-p)/\sqrt{1-p}$, eksses əmsalı $Eks = 6 + p^2/(1-p)$ -yə bərabərdir.



$p = 0,2$ və $p = 0,5$ qiymətlərində həndəsi paylanma

H. p. adı p_m ehtimallarının həndəsi silsilədə azalmasına görə verilmişdir. H. p. mənfi binomial paylanmanın xüsusi halı olub, Bernulli sxemində ilk müvəffəqiyyətə qədər aparılan sınaqlar sayının paylanması kimi yaranmışdır; bu halda *p* – hər bir sınaqda «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır.

H. p. keçmişin təsirsizliyi xassəsinə malikdir: əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti H. p. qanununa tabedirsə, onda ixtiyari tam m və n qiymətlərində

$$P\{\xi \geq m+n \mid \xi \geq m\} = P\{\xi \geq n\}$$

bərabərliyi doğrudur. Bu xassə onu göstərir ki, H. p. *üstlü qanunun* diskret analoqudur və H. p.-nin mühümlüyünə dəlalat edir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

HƏNDƏSİ PROSES «геометрический процесс; geometric process» – həndəsi fiqurların hər hansı $\mathcal{J}$ fəzasında təsadüfi nöqtəvi prosesdir.

Fiqurlar əsas adlandırılan U fəzasında yerləşir və adətən, sonlu sayda parametrdən asılı olur.

$\mathcal{J}$ fəzasına aid misallar: $\mathbb{R}^n$ -də d – ölçülü müstəvilər, $\mathbb{R}^n$ -də kürelər, $\mathbb{R}^n$ -də çoxüzlülər, sferada dairelər və s. H. p.-in realizasiyanı U fəzasında sonlu və ya hesabi sayda fiqurların toplusudur.

Əksəriyyətə əsas U fəzasının çevirmələri qrupuna nəzərən invariant H. p.-lərə baxılır. Əsas fəzası $U = \mathbb{R}^n$ olan $\mathbb{R}^n$ fəzasının paralel yerindəyişmələr qrupuna nəzərən invariant H. p. bircins (stasionar), Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant H. p. isə bircins və izotrop H. p. adlanır.

Ən çox məlum olan Puasson H. p.-ləridir; bu proseslərə $\mathcal{J}$ -də Puasson nöqtəvi prosesləri uyğundur ki, bunlar üçün $\mathcal{J}$ -də idarəedici ölçü adlanan μ -nün verilməsi tələb olunur. Müstəvidə düzxətlər Puasson prosesi, yalnız və yalnız, o halda bircins və izotrop prosesdir ki, onun idarəedici ölçüsü düzxətlərin invariant ölçüsünə müənasib olsun (bax, *Integral həndəsə*), bu halda müənasiblik əmsalı λ düzxətlər prosesinin intensivliyi adlanır. Bu halda H perimetrlı qabarıq oblastı kəsən düzxətlərin sayı $\pi^{-1}\lambda H$ parametrlı Puasson qanunu ilə paylanır. $\mathbb{R}^n$ -də kürelər Puasson prosesi, yalnız və yalnız, o halda bircins və izotrop prosesdir ki, $\mathcal{J} = \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ -da onun idarəedici ölçüsü μ , $-\mu = \lambda L \times m$ bərabərliyi ilə təyin olunsun, burada L , $-\mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsü, λ – mərkəzlər prosesinin intensivliyi, m – «tipik» diametr paylanması adlanan, $[0, \infty)$ -da ehtimal ölçüsüdür.

Puasson prosesləri digər H. p.-lərin qurulmasının əsasını təşkil edir. Əgər $\mathbb{R}^n$ -də Puasson nöqtəvi prosesinin realizasiyasının hər bir nöqtəsinə qabarıq çoxüzlü qarşı qoymaq olarsa, bu çoxüzlü isə $\mathbb{R}^n$ -in ele nöqtələrindən ibarət olarsa ki, bunlar üçün x realizasiyanın ən yaxşı nöqtəsidir, onda çoxüzlülər H. p.-i alınır; bu proses Voronoy *təsadüfi mozaikası* adlanır.

Əgər Puasson nöqtəvi prosesi bircins (izotrop) olarsa, uyğun Voronoy mozaikası da bu xassəyə malikdir. İdarəedici meylləri $\mathcal{J}$ -də təsadüfi ölçülər olan Puasson H. p.-lərinə – ikiqat *stoxastik Puasson proseslərinə* (Koks proseslərinə) də baxılır.

H. p.-lərin mühüm xarakteristikaları onların moment ölçüləridir. $N(B)$ – prosesin $B \subset \mathcal{J}$ altçoxluluğuna aid nöqtələrinin sayı olsun. İxtiyari kəsişməyən $B_1, \dots, B_k \subset \mathcal{J}$ altçoxluluqları üçün $\Lambda_k(B_1 \times \dots \times B_k) = \mathbf{M}[N(B_1) \dots N(B_k)]$ ölçüsünə k – *tərtib moment ölçüsü* deyilir. Puasson H. p.-nin birinci moment ölçüsü onun idarəedici ölçüsü ilə üst-üstə düşür.

$U = \mathbb{R}^n$ -də fiqurlar fəzasını vəziyyətlər fəzası $\mathbb{R}^d$ -nin ölçülər, səmtlər və şeyplər (daxili bucaqlar) fəzası Φ -ə hasili, yeni $\mathbb{R}^d \times \Phi$ fəzası kimi göstərmək məqsəduyğundur. Məs., müstəvidə üçbucaqlı özünün ağırlıq mərkəzi, sahəsi, səmti və şeypi vasitəsilə təyin olunur. Deməli, üçbucaqlılar fəzasını $\mathcal{J} = \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \Omega$ hasili kimi ifadə etmək olar, burada Ω – üçbucaqlının şeyplərinin ikiölçülü fəzasıdır. Digər misal: Ox oxuna paralel olmayan düzxətlər fəzası – düzxətlərin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin $\mathbb{R}^1$ fəzasının səmtlər fəzası $[0, \pi)$ -yə hasili-dir. Əgər bu halda H. p.-in $\mathbb{R}^d$ vəziyyətlər fəzasına proyeksiyası nöqtəvi proses olarsa, H. p. Φ -dən nişanları olan (qeyd olunmuş misallarda nişanlar – sahə, səmt və üçbucaqların şeypi və düzxətlərin istiqamətləridir), $\mathbb{R}^d$ -də nişanlanmış nöqtəvi prosesdir.

$\mathbb{R}^d$ -də bircins nişanlanmış nöqtəvi proseslər üçün birinci moment ölçüsü ölçülərin hasili $\Lambda_1 = L \times \lambda \mathbf{P}$ kimi ifadə olunur, burada L , $-\mathbb{R}^d$ -də Lebeq ölçüsü, λ – H. p.-in intensivliyi, $\mathbf{P}$ – nişanlar fəzasında ehtimal ölçüsüdür; $\mathbf{P}$ «tipik» nişanın paylanması adlanır. H. p.-i nişanlanmış nöqtəvi proses kimi ifadə etdikdə «tipik» nişan anlayışı ilə H. p.-in «tipik» elementi anlayışı da təyin olunur («tipik» elementin vəziyyəti təyin olunmamışdır). Bircins düzxətlər H. p.-i üçün «tipik» düzxətin istiqamətinin paylanması $\mathbf{P}$ *istiqamət qızılgülü* adlanır (bax, *İntensivlik qızılgülü*).

Bir sıra hallarda fiqurlar fəzası qrup olur və bu halda H. p. qrupda təsadüfi *nöqtəvi prosesdir*, bu proseslər üçün Palm paylanması adlanan paylanmalar təyin olunmuşdur. Məs., müstəvidə vahid uzunluqlu parçalar fəzasını fəzada Evklid hərəkətləri qrupu kimi göstərmək olar; təpələri nömrələnmiş, sahəsi vahidə bərabər üçbucaqlılar fəzasını müstəvinin affın çevirmələrinin sahəsini saxlayan (dəyişdirməyən) qrup kimi göstərmək olar. Düzxətlər parçaları və dairelərin bircins və izotrop H. p.-lərinin Palm paylanmalarını şərtsiz paylanmalarla əlaqələndirən tənliklər mövcuddur.

$\mathbb{R}^d$ -də sonlu intensivliyə malik H. p. əksər hallarda digər H. p.-lərin sonlu altçoxluluqlarına baxılarkən alınır.

Misallər. 1) ω_1 – müstəvidə Puasson nöqtəvi prosesinin təsadüfi realizasiyası olsun. ω_1 -in nöqtələri üçlüyü üçbucaqlıların H. p.-i ξ_1 -i əmələ gətirir. Sonlu intensivliyə malik H. p. almaq üçün ξ_1 prosesinə seyrəklənmə proseduru tətbiq olunur. Əgər seyrəklənmə «parametr» üzrə aparılırsa (məs., ξ_1 -dən ele üçbucaqlılar saxlanılır ki, onların perimetrləri verilmiş ədəddən kiçik olsun), onda alınmış H. p.-in «tipik» üçbucaqlının şeypinin paylanması *Təsadüfi şeyp* məqaləsində 1) misalında verilmiş şeypin paylanması ilə üst-üstə düşür. «Sahə üzrə» seyrəklənmə (məs., yalnız o üçbucaqlılar saxlanılır ki, onların daxilinə ω_1 -dən k sayda nöqtə düşür) sonsuz intensivliyə malik H. p.-ə gətirir və bu halda şeyp üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyulur (üçbucaqlılar olduqca «dar» olmamalıdır). Bundan sonra «tipik» şeypin paylanması «*Təsadüfi şeyp*» məqaləsinin 2) misalındakı ölçünün normalanmış daralması ilə verilir (bax, [1]).

2) ω_2 – müstəvidə düzxətlər Puasson prosesinin təsadüfi realizasiyası olsun. ω_2 -dən olan düzxətlər üçlüyü sonsuz intensivlikli üçbucaqlılar H. p. ξ_2 -ni əmələ gətirir. Əgər ω_2 -dən olan

k sayda düz xətlərlə kəşifən üçbucaqlılarla kifayətlənmək olarsa, onda səyrəklənmiş H. p.-in «tipik» üçbucaqlısının şeypinin paylanması «*Təsadüfi şeyp*» məqaləsinin 3) misalındakı şeypin paylanması ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Stochastic geometric statistics. Stereology, Lpz., 1984.

HƏNDƏSİ PROSES *изотроп « геометрический процесс изотропный; isotropic geometric process »* – bax, *Həndəsi proses*.

HƏNDƏSİ PROSES *стационар (bircins) « геометрический процесс стационарный (однородный); stationary (homogeneous) geometric process »* – bax, *Həndəsi proses*.

HƏNDƏSİLƏŞDİRİLMƏSİ, STATİSTİK NƏZƏRİYYƏNİN « геометризация статистической теории; geometrization of the statistical theory » – riyazi statistikanın əsas strukturlarını həndəsi obyektlər kimi öyrənən istiqamətdir. $P(\cdot)$ ehtimal paylanmaların nöqtələr rolunu oynayır. Belə

paylanmaların hər bir $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi [nəticələr (elementar hadisələr) fəzası Ω -nin eyni bir $\mathcal{A}$ hadisələr cəbrində] həndəsi fiqur təyin edir. Məsələn, skalyar və ya vektor θ parametridən hamar asılı ehtimal paylanmaları ailəsi hamar xətlər, səthlər kimi anlaşılır. Fiqurların inikası (ola bilər ki, çevrilməyən) statistik həlledici qaydalar kateqoriyası əmələ gətirən $\Pi: P(\cdot) \rightarrow$

$\rightarrow \int P(d\omega) \Pi(\omega, \cdot)$ statistik həlledici qaydaları ilə verilir. Eyni bir $\theta \in \Theta$ parametri ilə parametrləndirilmiş, ümumiyyətlə, müxtəlif $(\Omega^{(i)}, \mathcal{A}^{(i)})$ ölçülən fəzalarında verilmiş iki $\{P_\theta^{(i)}, \theta \in \Theta\}$, $i = 1, 2$ ailəsi üçün əgər eyni Π^{12} və Π^{21} həlledici qaydalar olarsa ki, ixtiyari $\theta \in \Theta$ üçün $P_\theta^{(1)} \Pi^{12} = P_\theta^{(2)}$,

$P_\theta^{(2)} \Pi^{21} = P_\theta^{(1)}$ bərabərliklərinin ödənilməsinə təmin etsin, onda $\{P_\theta^{(1)}, \theta \in \Theta\}$ və $\{P_\theta^{(2)}, \theta \in \Theta\}$ konqruent ailələr adlanır. Konqruentlik uyğun statistik modellərin statistik ekvivalentliyi ilə üst-üstə düşür. Məs., konqruent modellər sinfində ən sadə model ailənin kafi statistikasına gətirir. Konqruent ailələrdə üst-üstə düşən kəmiyyətlər – ailə invariantı anlayışı da yaranır. Bunlardan ən maraqlıları differensial – həndəsi invariantlardır. Məs., sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə differensial kvadratik forma vardır. Bu forma Fişer informasiya matrisi ilə təyin olunur və parametrlərin meyilsiz statistik qiymətlərinin aşağıdan dəqiqliyini ifadə edən Rao – Kramer bərabərsizliklərində yaranır. Bu forma informasiya Riman metriyasını da təyin edir. İnvariant əlaqələrin tam bir ailəsi mövcuddur və bunlardan ən maraqlısı (Riman mənada deyil!) geodeji əyrilər (xətlər) və tamamilə geodeji səthlər eksponensial paylanmalar ailələridir. Bu sonuncuların nəzəriyyəsinə nisbi entropiya (Kullbak – Leybler – Sanov yayıması) – Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantını ödəyən məsafə kvadratının yansımasının qeyri – simmetrik analoqu böyük rol oynayır.

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [2] Сенов Н. Н., «Oper. Forsch. Statist.», Ser. Statist., 1978, v. 9, № 2, p. 267–76; [3] Amari S h u n – I c h i, «Lect. Notes in Statist.», 1985, v. 28; [4] Geometrization of statistical theory Lancaster, 1987.

HƏSSASLIQ *кобуд xətalara « чувствительность к грубым ошибкам; gross-error sensitivity »* – bax, *Robast statistik qiymət*.

324 HİDRODİNAMİK

HİDRODİNAMİK LİMİT « *гидродинамический предел; hydrodynamical limit* » – bax, *Hidrodinamik limit keçidi*.

HİDRODİNAMİK LİMİT KEÇİDİ « *гидродинамический предельный переход; hydrodynamical limit approach / propagation of chaos* » – statistik mexanikanın *dinamik sisteminin* və ya qarşılıqlı təsirli *Markov prosesinin* doğruduğu ehtimal paylanmalarının orta xarakteristikalarının zaman üzrə evolyusiyasını təqribi təsvir etmək üçün istifadə olunan limit keçididir. Limitdə differensial və ya integro-differensial tənliklər alınır və bu tənliklər *hidrodinamik tənliklər* adlanır. H. l. k. ilk dəfə [4]-də Eyler hidrodinamik tənliyinin çıxarılışı üçün edilən cəhdə alınmışdır, lakin hazırkı dövrə qədər yalnız bəzi aşkar həll oluna bilən və buna görə də, «cırılmış» modellər üçün riyazi məqbul sayılan nəticələr alınmışdır, məs., qadağalarlı proses üçün hidrodinamik tənlik – *Bürgers tənliyidir*.

H. l. k.-nin riyazi tərfi olduqca böyükdür, odur ki, burada onun yalnız ideyası verilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ parametri daxil olunur, bu parametr tipik mikro- və makro-miqyasların münasibəti mənasını daşıyır.

$t = 0$ başlanğıc anında təsadüfi meydan üçün P_0^ε ehtimal pay-

lanmalarının ailəsinə baxılır, belə ki, P_0^ε qeyd olunmuş P_0^ε paylanmasının ε^{-1} dəfə dartılması nəticəsində alınır. Beləliklə,

P_0^ε -in vəziyyətləri (P_0 üzərinə qoyulan təbii kəsilməzlik məhdudiyyətləri) makromiqyasda «sanki translyasion invariant» olurlar, lakin bunlar makromiqyas yerindəyişmələrində olduqca dəyişə bilər. Daha sonra, başlanğıc şərti P_0^ε ilə evolyusiyaya baxı-

lır və P_t^ε ilə $\varepsilon^{-1}t$ anındakı (makrozaman keçdikdən sonra) və-

ziyyət işarə olunur. Əgər $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda P_t^ε üçün $\bar{P}_t$ limiti varsa, bu limite *hidrodinamik limit* deyilir.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84; [2] Bol-drighini C., Dobrushin R. L., Suhov Yu. M., «J. Stat. Phys.», 1983, v. 31, p. 577–615; [3] Nonequilibrium phenomena II. From stochastics to hydrodynamics, Amst. – N. Y., 1984, p. 123–294; [4] Morrey C., «Comm. Pure Appl. Math.», 1955, v. 8, p. 279–326; [5] Spohn H., «Rev. Modern Phys.», 1980, v. 52, p. 569–615; [6] Sznitman A. – S., «Probab. Theory and Related Fields», 1986, v. 71, p. 581–613.

HİDRODİNAMİK TƏNLİK « *гидродинамическое уравнение; hydrodynamical equation* » – bax, *Hidro-dinamik limit keçidi*.

HİDRODİNAMİK TƏNLİKLƏRİ « *гидродинамические уравнения; hydrodynamic equations* » – sıxılma-yan özlü mayenin axınına təsvir edən Navye – Stoks tənliklər sistemidir. H. t.-nin statistik həlli – Navye – Stoks sisteminin həllərində toplanmış ehtimal ölçüsü olub, aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial u}{\partial x^j} =$$

$$= v \Delta u + \nabla p(t, x) + f(t, x), \quad \operatorname{div} u = 0,$$

burada $u = (u^1, u^2, u^3)$ – sürət, p – təzyiq, f – xarici qüvvələrin sıxlığı, $v > 0$ özlülük əmsali, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ maye ilə doldurulmuş oblastdır. Bu oblastın sərhədi $\partial\Omega$ -da, adətən, yarışma

şərtləri verilir: $x = (x^1, x^2, x^3) \in \partial\Omega$, $u(t, x) = 0$, $t = 0$ olduqda isə başlanğıc şərti $u(t, x) = u_0(x)$ olur. $u_0(x) = u_0(x, \omega)$ ehtimal paylanması μ olan təsadüfi vektor meydana, $u(t, x, \omega)$ qeyd olunan məsələnin həlli olsun. Onda $u(t, x, \omega)$ üçün ehtimal paylanması təyin edən P ölçüsünə başlanğıc μ ölçüsünə müvafiq statistik həll deyilir.

HİLBERT ÇEVİRMƏSİ « Гильберта преобразование; Hilbert transformation » – bax, *Təsadüfi proses; kəsilmələr*.

HİLBERT TƏSADÜFİ FUNKSİYASI « гильбертова случайная функция; Hilbert random function » – bax, *Təsadüfi funksiya*.

HİLLE – İOSİDA TEOREMİ « Хилле – Иосида теорема; Hille – Iosida theorem » – xətti operatorun sıxlaşdırıcı semi – qrupun hansı şərtlərində doğuran operator olacağını təyin edən teoremdir.

X – Banax fəzası, A , $-X$ fəzasında ixtiyari xətti operator olsun.

T e o r e m. A operatorunun operatorların sıxlaşdırıcı T_t semi – qrupunun hər hansı kəsilməz X fəzasında doğuran operator olması üçün zəruri və kafidir ki:

- A operatorunun təyin olunma oblası D_A , X -də sıx olsun;
- $\lambda f - Af = g$ tənliyi ixtiyari $g \in X$ və $\lambda > 0$ üçün $f \in D_A$ həllinə malik olsun;
- ixtiyari $f \in D_A$, $\lambda > 0$ üçün $\|\lambda f - Af\| \geq \|\lambda f\|$ bərabərsizliyi ödənilsin.

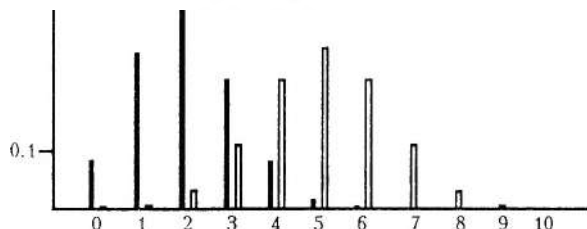
X^+ , $-X$ -də qapalı konus olsun (mənfi olmayan elementlərin konusu). Əgər $\lambda f - Af \in X^+$, $\lambda > 0$ münasibətindən $f \in X^+$ münasibəti alınarsa, onda $f \in X^+$ üçün $T_t f \in X^+$ münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Х и л л е Э., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1951; [2] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [4] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Т. Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

HİPERHƏNDƏSİ PAYLANMA « гипергеометрическое распределение; hypergeometric distribution » – $m = 0, 1, 2, \dots, n$ tam qiymətlərini

$$p_m = P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (*)$$

ehtimalları (bax, şəkil) ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır, burada M , N və n – tam mənfi olmayan ədədlərdir və $M \leq N$, $n \leq N$.



$n = 50$, $n = 10$, $M = 10$ və $M = 25$ qiymətlərində
hiperhəndəsi paylanma

H. p., adətən, qaytarmamaq şərtlə seçmə sxemi ilə bağlıdır, yəni (*) düsturu N sayda elementi olan ümumi çoxluqdan, M saydası «nişanlanmış», $N - M$ saydası «nişanlanmamış» olduğu halda, n saydası qaytarmamaq şərtlə çıxarıldıqda bunların yalnız m saydasının «nişanlanmış» olması ehtimalını ifadə edir. Bu halda, (*) ehtimalı yalnız

$$\max(0, M + n - N) \leq m \leq \min(n, M)$$

qiymətləri üçün təyin olunur. Lakin (*) düsturunu $m > n$ olduqda $C_n^m = 0$ qəbul edərək bütün $m \geq 0$ qiymətləri üçün də istifadə etmək olar, buna görə də, $p_m = 0$ bərabərliyi n həcmli seçimdə m sayda «nişanlanmış» elementlərin olmaması kimi anlaşılmalıdır. Bütün fəza üzrə ehtimalların qiymətlərinin cəmi 1-ə bərabərdir. $M/N = p$ işarələməsi apardıqda, (*) düsturu digər –

$$p_m = C_n^m \cdot A_{Np}^m \cdot A_{Nq}^{n-m} / A_N^n$$

formasında alınır, burada $A_N^m = C_N^m m!$, $p + q = 1$. Əgər p – sabit və $N \rightarrow \infty$ olarsa, onda

$$p_m \approx C_n^m p^m q^{n-m}$$

binomial paylanması alınır. H. p.-nin riyazi gözləməsi N -dən asılı deyildir və o, uyğun binomial paylanmanın riyazi gözləməsi $\mu = np$ ilə üst-üstə düşür. H. p.-nin dispersiyası $\sigma^2 = npq + (N - n)(N - 1)$ binomial paylanmanın dispersiyası npq -nə aşır.

$N \rightarrow \infty$ olduqda H. p.-nin ixtiyari tərtib momentləri binomial paylanmanın uyğun momentlərinin qiymətlərinə yaxınlaşır. $(\xi - \mu)/\sigma$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda standart normal paylanmaya yığılır ki, $N \rightarrow \infty$ olduqda $\mu \rightarrow \infty$ olsun. Bolşev approksimasiyası da yaxşı yaxınlaşma verir:

$$p_0 \approx \exp \left\{ -\frac{6nM}{3(2N - D - 1) + 1} \right\}.$$

H. p.-nin doğuran funksiyası

$$\psi(z) = \frac{A_{N-M}^n}{A_N^n} \sum_{j=0}^n \frac{A_M^j A_N^j}{A_{N-M+j-n}^j} \frac{z^j}{j!}.$$

Bərabərliyin sağ tərəfindəki sıra $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ hiperhəndəsi funksiyadır, burada $\alpha = -n$, $\beta = -M$, $\gamma = N - M - n + 1$ (H. p. adı da məhz bununla əlaqədar verilmişdir). Seçimi statistik araşdırma və statistik qəbul nəzarəti məsələlərində H. p. əsas paylanmalardandır.

(*) ehtimalı və uyğun paylanma funksiyası üçün geniş miqyaslı cədvəllər tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Lieberman G., Owen D., Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford, 1961; [2] О у э н Д. Б., Сборник статистических таблиц. Обработка таблиц, пер. с англ., М., 1966; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

HİPERQRUP « гипергруппа; hypergroup » – lokal kompakt $e\le K$ Hausdorf fəzasıdır ki, $K \times K$ -dan, K -da *ehtimal ölçülərinin* zəif topologiya ilə verilmiş $B(K)$ fəzasına kəsilməz $(x, y) \mapsto \delta_x \circ \delta_y$ inikası vardır, burada « $\circ$ » simvolu inikasların kompozisiyası işarəsidir.

Bu inikasdə aşağıdakı xassələr doğrudur:

- 1) bütün $x, y, z \in K$ üçün $\delta_x \circ (\delta_y \circ \delta_z) = (\delta_x \circ \delta_y) \circ \delta_z$ (burada $\delta_x, -x \in K$ nöqtəsində toplanmış ölçüdür);
- 2) bütün $x, y \in K$ üçün $\text{supp}(\delta_x \circ \delta_y)$ çoxluğu kompaktdır;
- 3) K -dan K -ya $e\le x \rightarrow x^-$ homomorfizmi vardır ki, $x^- = x$ və $(\delta_x \circ \delta_y)^- = \delta_{y^-} \circ \delta_{x^-}$ bütün $x, y \in K$ üçün ödənilir;
- 4) $e\le e \in K$ elementi vardır ki, $\delta_e \circ \delta_x = \delta_x \circ \delta_e = \delta_x$ bütün $x \in K$ üçün ödənilir;
- 5) ixtiyari $x, y \in K$ üçün $e \in \text{supp}(\delta_x \circ \delta_y)$ münasibəti $x = y^-$ münasibətinə ekvivalentdir;
- 6) $K * K$ -dan K -nın qapalı altçoxluqlarından ibarət, Maykl topologiyası ilə verilmiş $R(K)$ fəzasına $(x, y) \rightarrow \rightarrow \text{supp}(\delta_x \circ \delta_y)$ inikası kəsilməzdir.

$e\le$ gər bütün $x, y \in K$ üçün $\delta_x \circ \delta_y = \delta_y \circ \delta_x$ olarsa, K kommutativ hiperqrup adlanır; $e\le$ gər yalnız 1)–4) xassələri ödənilərsə, K zəif hiperqrup adlanır. Qeyd olunan tələblər [1]-də verilən hiperqrup aksiomatikasına cavab verir və bu aksiomatika H.-da ehtimalların öyrənilməsində daha çox istifadə olunur (bax, [2]). H.-a klassik misal lokal kompakt qrupun onun kompakt altqrupu üzrə bir-birilə ikili əlaqəli siniflər fəzasıdır.

Kommutativ H.-lar üçün xarakteristik çevirmələrin kəsilməzlik teoremlərinin müxtəlif variantları müəyyən edilmişdir. Burada ikili obyekt kimi, nöqtəbənöqtə vurmaya görə, H. daxil olunur. Belə, Pontryagin ikili xassəsinə analoji xassəli H.-lar $g \cup l \cup h i - p e r q r u p l a r$ adlanır (bax, [4], [5]-in xülasələri). H.-da nöqtəbənöqtə vurmanın sonsuz bölünən paylanmaları üçün Levi – Xinqin ifadəsinin analoqu alınmışdır. Funksiyaların polinomların ortoqonal sistemləri üzrə ayrılışında yaranan polinomial H.-lar belə oxşar H.-lara misalları almağa imkan yaradır. Ölçülərin ardınca artmaqla götürülən kompozisiyaları üçün limit qanunları kommutativ və qeyri – kommutativ H.-ların müxtəlif konkret halları üçün öyrənilir.

$e\le$ d.: [1] Jewett R. I., «Adv. Math.», 1975, v. 18, № 1, p. 1–101; [2] Spector R., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 497, p. 643–73; [3] Delsarte J., «C. r. Acad. sci. Paris», 1938, t. 206, p. 178–82; [4] Литвинов Г. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, М., 1985, с. 57–106; [5] Вайнерман Л. И., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 24, М., 1986, с. 165–205; [6] Heyer H., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1064, p. 481–550.

HİPER – YUNAN – LATIN KUBU « гипергреко – латинский куб; hyper – Greek – Latin cube » – bax, *Ortoqonal kublar*.

HİPER – YUNAN – LATIN KVADRATI « гипергреко – латинский квадрат; hyper – Greek – Latin square » – bax, *Ortoqonal kvadratlar*.

326 HİPERQRUP

HİSSƏVİ XƏTTİ AQRƏQAT « кусочно линейный агрегат; piecewise linear aggregate » – bax, *Hissəvi xətti proses*.

HİSSƏVİ XƏTTİ PROSES « кусочно линейный процесс; piecewise linear process » – aşağıdakı ümumi cəhətlərli $X(t)$ bircins Markov prosesinin bir qədər müxtəlif ifadəsi ilə anlaşılan termindir. $X(t)$ prosesi

$$X(t) = (\nu(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))$$

şəklində verilir, burada $\nu(t)$ – sonlu və ya hesabi sayda mümkün qiymətlər alan proses $[\nu(t), -X(t)]$ prosesinin baş komponentidir, $\xi_i(t)$ – hissəvi xətti qanunla dəyişən $e\le$ dədi komponentlərdir, $k = |\nu(t)|$ $[\nu(t)]$ vəziyyətinin rəngi $]-$ dəyişən tamqiymətli kəmiyyətdir. $X(t)$ prosesinin sıçrayışları ya özü-özünə, yaxud əlavə komponentlər vektoru $(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$ -nin uyğun fəzada hər hansı çoxüzlünün sərhədlərinə çatma anında baş verir. H. x. p.-in $e\le$ n çox yayılmış növü onunla xarakterizə olunur ki, $\xi(t) \geq 0$ və $\nu(t) = 0$ olduqda $\xi_j(t) = -\alpha_{ij}$ bərabərlikləri doğru olur, α_{ij} – mənfi olmayan sabitlərdir. Bu halda $\xi_j(t)$ – hər hansı t anından başlayan müəyyən bir əməliyyatın bu əməliyyat sona çatana qədər işləmə kəmiyyəti kimi, α_{ij} – həmin əməliyyatın yerinə yetirilmə sürəti kimi interpretasiya olunur. Belə prosesin sıçrayışları ya $\nu(t)$ prosesinin cari vəziyyəti ilə təyin olunan intensivliklə özü-özünə baş verir, ya da ki, hər hansı əlavə komponentin 0 qiymətini aldığı anında baş verir. H. x. p. *Xidmət sistemlərinin* ümumiləşmiş modeli kimi daxil edilmiş və xidmət sistemlərinin modeləşdirilməsinin əsası olmuşdur; H. x. p.-lərin dayanıqlılıq xassələri araşdırılmışdır.

Xidmət sistemlərinin H. x. p.-lərlə birbaşa təsviri $e\le$ vəzinə, $e\le$ dətən, sistemi hissə – hissə təsvir etməyə imkan verən hissəvi xətti aqrəqatlar yanaşmasından istifadə etmək, sonra bunları formal qaydalarla birləşdirmək məsləhətdir. *Hissəvi xətti aqrəqat* $e\le$ təsadüfi dəyişdiricidir ki, o, xaricdən siqnallar qəbul edir və bu qəbulətmə anları arasında intervallarda özünü H. x. p. kimi aparır. Hissəvi xətti aqrəqat qeyd olunan H. x. p.-in (onun vəziyyətinin) təyin etdiyi çıxış siqnallarını da istehsal edir. $e\le$ gər hissəvi xətti aqrəqatlardan ibarət sistemdə siqnallar bəzi aqrəqatlardan digərlərinə ötürülərsə, həm də xaricdən heç bir siqnal daxil olunmursa, belə sistem H. x. p.-lə təsvir olunur. Xidmət sistemlərini interpretasiya etdikdə aqrəqatların giriş və çıxış siqnalları tələblərin daxil olunması və xidmətin başa çatması ilə əlaqədardır.

$e\le$ d.: [1] Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н., Лекции по теории сложных систем, М., 1973; [2] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [3] Аврамчук Е. Ф., [и др.], Технология системного моделирования, М. – Берлин, 1988.

HİSTOQRAM « гистограмма; histogram » – eksperimental verilənlərin qrafik təsviri növlərindən biridir. H. aşağıdakı kimi qurulur. Hər hansı mütləq kəsilməz ξ təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş bütün $X_1, \dots, X_n$ qiymətləri diapozonu $x_1, \dots, x_{k+1}$ nöqtələrilə k sayda qruplanma intervallarına ($e\le$ dətən, bərabər) bölünür; $[x_i, x_{i+1})$ intervalında müşahidə olunan qiymətlərin sayına bərabər olan $m \cup t l \le q$

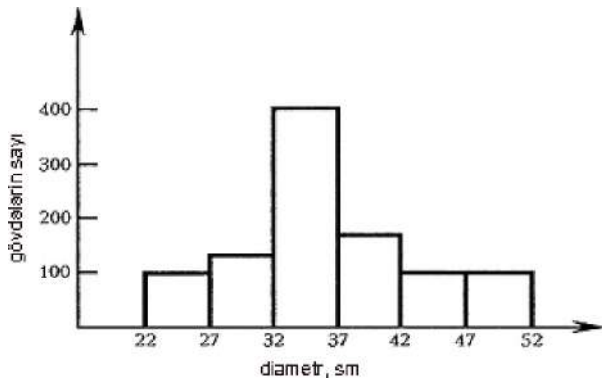
tezlik m_i , $i = 1, \dots, k$ və ya $h_i = (m_i/n) \cdot 100\%$ – nisbi tezliyi təyin olunur: absis oxunda $x_1, \dots, x_{k+1}$ nöqtələri qeyd olunur və hündürlükləri $m_i/(x_{i+1} - x_i)$ və ya $h_i/(x_{i+1} - x_i)$, oturmaqları isə $[x_i, x_{i+1}]$ olan düzbucaqlılar qurulur: odur ki, qurulmuş düzbucaqlının sahəsi ya mütləq və ya nisbi tezliyə bərabər olur, bu isə statistik verilənlərin H. vasitəsilə təsviridir.

$[x_i, x_{i+1})$ intervalları bərabər olduğu halda düzbucaqlıların hündürlükləri ya m_i və ya h_i -yə bərabər götürülür. Intervalların sayının seçilməsi ξ təsadüfi kəmiyyətinin naməlum paylanması qanunu və seçimin həcmindən asılıdır, odur ki, bu sayın seçilməsi üçün universal tövsiyyə yoxdur. Əksər hallarda $k \approx 1 + \log_2 n$ Sterces düsturundan istifadə olunur.

Məs., 1000 ədəd küknar ağacının gövdəsinin diametrinin ölçülməsi nəticəsində alınmış nəticələr aşağıda verilmişdir.

Diametr, sm.	22-27	27-32	32-37	37-42	42-47	47-52
Gövdələrin sayı (mütləq tezlik)	100	130	400	170	100	100

Bu misal üçün H. aşağıda təsvir olunmuşdur.



1000 küknar ağacının gövdəsinin diametrlərinin paylanması histogramı, 6 intervalla qruplaşdırılmışdır: intervalın uzunluğu 5 sm.

Vektor təsadüfi kəmiyyətlər üçün H. analoji qurulur. Diskret təsadüfi kəmiyyət üçün H. anlayışı mənə daşımır.

H. mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması sıxlığının qeyri – parametrik qiymətləndirmə üsullarından biridir. Bu üsul sıxlığın tarixən ilk və universal qiymətləndirilmə üsulu sayılır. Lakin H. metodu yüksək dəqiqliyə malik deyildir: məhdud təsadüfi kəmiyyətin L^2 metrikasında H.-in sıxlıq funksiyasının qrafikindən yayınması ehtimalı (əgər sıxlıq funksiyasının məhdud ikinci tərtib törəməsi varsa) ən yaxşı halda $n^{-1/3}$ tərtibə malikdir və bu qruplama intervallarının sayı $k \sim n^{1/3}$ olduğu haldadır; m – ölçülü vektor təsadüfi kəmiyyətin H.-nin yayınması ehtimalına görə $n^{-1/m+2}$ tərtibə təyin olunur və bu hal $k \sim n^{m/(m+2)}$ olduqda alınır (bax, [1]). Hamar qrafik üçün etibarlı oblastlar C metrikasında qurulmuşdur (bax, [2]). Hamar olmayan qrafiklər üçün (bax, [3]) L^1 metrikasında yığılma təyin olunmuşdur. Hal-hazırda daha dəqiq qiymətləndirmələr vardır (məs., Parzen – Rozenblattın nüvə tip statistik qiymətləri ilə, N. N. Çentsovun proyeksiyon statistik qiymətləri ilə).

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., 1972; [2] Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды, М., 1970; [3] Абу Джауде С., «Ann. Inst. H. Poincaré. B.», 1976, v. 12, p. 213–31.

HİTSUDA – SKOROXOD KONSTRUKSIYASI

«Хитуды – Скорохода конструкция; Hitsuda – Skorohod construction» – bax, *Genişləndirilmiş stoxastik integral*.

HODGES STATİSTİK QIYMƏTİ «Ходжеса оценка; Hodges estimator» – bax, *Supereffektiv statistik qiymət*.

HOLL TEOREMİ «Холла теорема; Hall theorem» – bax, *Kombinator analiz*.

HOLT – UİNTERS MODELİ «Хольта – Уинтерса модель; Holt – Winters model» – təkmilləşdirilmiş *Braun proqnozlaşdırma metodudur*. Xətti trend olduqda, t anında X_t prosesinin k vahid irəliyə proqnozu, H. – U. m.-nə müvafiq olaraq, $X_{t+k} = \{a_0(t) + a_1(t)k\} s(t+k-L)$ düsturu ilə hesablanır, burada $s(t)$ – periodik funksiya, L – bir dövr ərzində müşahidə olunanların sırasının nöqtələri sayıdır (məs., əgər verilənlər bir il müddətində hər ay toplanırsa, onda $L = 12$). Hər bir an üçün $a_0(t)$, $a_1(t)$, $s(t)$ funksiyaları aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$a_0(t) = \beta_1 \frac{x_t}{s(t-L)} + [(1-\beta_1)\{a_0(t-1) + a_1(t-1)\}],$$

$$a_1(t) = \beta_2 \{a_0(t) - a_0(t-1)\} + (1-\beta_2) a_1(t-1),$$

$$s(t) = \beta_3 \frac{x_t}{a_0(t)} + (1-\beta_3) s(t-L).$$

burada β_1 , β_2 , β_3 – modelin parametrləridir və bunları əvvəlcədən ya qiymətləndirmək və ya vermək lazımdır.

Əd.: [1] Holt C., «Carnegie Inst. Tech. Res. Mem.», 1957, № 2; [2] Winters P., «Manag. Sci.», 1960, v. 6, p. 324–42; [3] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

HOMOSKEDASTİK REQRESSİYA «гомоскедастическая регрессия; homoscedastic regression» – dispersiyaları üst-üstə düşən, xətalara qeyri – korrelyar *reqression eksperimentidir*.

HOTELLİNG KİTERİSİ «Хотеллинга критерий; Hotelling test».

T^2 – kriteri, H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. Cırlaşmayan, p – ölçülü normal $N(\mu, B)$ qanununun riyazi gözləmələrinin naməlum vektoru $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$ -nin əsl qiyməti ilə uzlaşan H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteridir. Bu normal qanunun kovariasion matrisi B -də naməlum $\mu_0 = (\mu_{10}, \dots, \mu_{p0})^T$ vektorudur. H. k. aşağıdakı nəticəyə əsaslanmışdır. Asılı olmayan, p – ölçülü $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi vektorlarının, $n-1 \geq p$, cırlaşmayan normal $N(\mu, B)$ qanununa tabe olduqları fərz olunur və fərz olunur ki,

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T S^{-1}(\bar{X} - \mu_0).$$

burada

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T$$

– namelun μ və B parametrləri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətlərdir. Onda

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2$$

statistikası p və $n-p$ serbestlik dərəcələri sayı ilə qeyri – mərkəzi Fişer F – paylanması tabedir və onun qeyri – mərkəzilik parametri –

$$n(\mu - \mu_0)^T B^{-1}(\mu - \mu_0)$$

şəklində ifadə olunur və T^2 statistikası Hotelling T^2 – paylanması qanununa tabedir, deyilir. Deməli, $H_1: \mu \neq \mu_0$ alternativinə qarşı $H_0: \mu = \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün cırlaşmayan p – ölçülü normal $N(\mu, B)$ qanununa tabe, asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ vektorlarının realizasiyaları üzrə F statistikasının qiymətini hesablamaq olar, belə ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, bu statistika serbestlik dərəcələri sayları p və $n-p$ olan mərkəzi F – paylanması qanununa tabedir. Mühümlük ölçüsü α olan H. k.-nə görə, əgər $F \geq F_{\alpha}(p, n-p)$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul olunmur, burada $F_{\alpha}(p, n-p)$ – F – paylanmanın yuxarı α – kvantilidir.

H. k. və doğruxaoxşarlıq nisbəti kriterisi arasında əlaqə vardır.

$$L(\mu, B) = L(X_1, \dots, X_n; \mu, B) = \frac{|B|^{-n/2}}{(2\pi)^{np/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^T B^{-1} (X_i - \mu) \right\}$$

– $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə hesablanmış doğruxaoxşarlıq funksiyası olsun. $H_1: \mu \neq \mu_0$ mürekkeb alternativinə qarşı $H_0: \mu = \mu_0$ mürekkeb hipotezinin yoxlanılması üçün doğruxaoxşarlıq nisbəti kriterisi

$$\lambda = \lambda(X_1, \dots, X_n) = \sup_B L(\mu_0, B) / \sup_{\mu, B} L(\mu, B)$$

statistikasına əsasən qurulmuşdur.

λ statistikası ilə T^2 və F statistikaları arasında aşağıdakı münasibətlər mövcuddur:

$$\lambda^{2/n} = (n-1)/(T^2 + n-1) = (n-p)/(pF + n-p).$$

$H_0: \mu = \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün H. k. oxşarlıq çevirmələrinə nəzərən invariant bütün kriterilər arasında müntəzəm ən güclü kriteridir (bax, Ən güclü kriteri, invariant kriteri).

Əd.: [1] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Р а о С. Р., Личнейные статистические методы и их применения, пер. с англ., 1968.

HOTELLİŒQ T^2 – PAYLANMA « Хотеллинга T^2 – распределение; Hotelling T^2 – distribution » – paylanma sıxlığı

328 HOTELLİŒQ

$$p(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2) x^{k/2-1} (1+x/n)^{-(n+1)/2}}{\Gamma((n-k+1)/2) \Gamma(k/2) n^{k/2}}$$

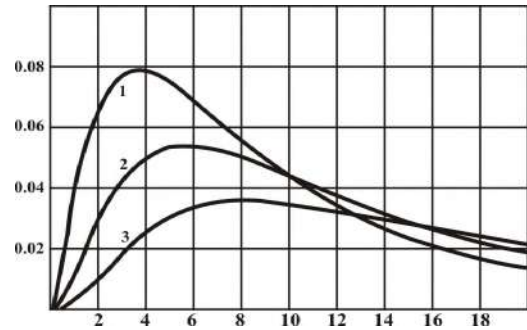
düsturu ilə təyin olunan, $(0, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*, burada n və k parametrləri serbestlik dərəcələri adlanır, $n \geq k \geq 1$. $k=1$ olduqda H. $T^2 - p$. Student paylanmasına gətirilir, ixtiyari $k>1$ qiymətində isə ona Student paylanmasının çoxölçülü ümumiləşməsi kimi baxmaq olar və bu aşağıdakı mənada anlaşılar. Əgər k – ölçülü Y təsadüfi vektoru orta qiymətlər vektorunun komponentləri sıfıra bərabər, kovariasion matrisi Ξ olan normal qanunla paylanmış olarsa və əgər

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^T Z_i$$

olarsa, Z_i təsadüfi vektorları öz aralarında və Y ilə asılı olmazlarsa və Y ilə eyni qanunla paylanmış olarlarsa, onda $T^2 = Y^T S^{-1} Y$ təsadüfi kəmiyyəti serbestlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər H. $T^2 - p$. ilə paylanmışdır (Y – vektor sütun, T – transponirlənmədir). Əgər $k=1$ olarsa,

$$T^2 = \frac{Y^2}{x_n^2/n} = t_n^2,$$

burada t_n təsadüfi kəmiyyəti serbestlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Student paylanmasına tabedir.



Hotelling paylanmasının sıxlığı $n=10$ olduqda: (1) $k=5$.

(2) $k=6$; (3) $k=7$.

Əgər T^2 təsadüfi kəmiyyətini təyin etdikdə, Y -in (ν, Ξ) parametrləri normal qanunla paylandığı fərz olunarsa, onda uyğun paylanma serbestlik dərəcəsi sayı n , qeyri – mərkəzilik parametri ν olan qeyri – mərkəzi H. $T^2 - p$. adlandırılır. H. $T^2 - p$. riyazi statistikada Student t – paylanması istifadə olunan halda, lakin çoxölçülü hal üçün istifadə edilir. Əgər müşahidə nəticələri $X_1, \dots, X_n$ – orta qiymətlər vektoru μ və cırlaşmayan kovariasion Ξ matrisinə malik normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar olarsa, onda

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)^T S^{-1}(\bar{X} - \mu)$$

statistikası serbestlik dərəcəsi sayı $n-1$ olan H. $T^2 - p$ -na tabedir, burada

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ və } S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T.$$

Bu fakt *Hotelling kriterisi* üçün əsas olmuşdur. Ədədi hesablamalar üçün beta – paylanma və ya Fişer F – paylanma cədvəllərindən istifadə olunur, çünki $\frac{n-k+1}{n^k} T^2$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları k və $n-k+1$ olan F – paylanma qanununa tabedir.

Bax, T^2 – statistika.

Əd.: [1] Hotelling H., «Ann. Math. Statist.», 1931, v. 2, p. 360–78; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

HOTELLİNG T^2 – STATİSTİKASI « Хотеллинг T^2 – статистика; Hotelling T^2 – statistic » – bax, T^2 – statistika.

HÖFDİNG ÖLÇÜSÜ « Хёфдингга мера; Hoeffding measure » – bax, *Rəng korrelyasiyası*.

HÖLDER BƏRABƏRSİZLİYİ « Гельдера неравенство; Hölder's inequality » – *təsadüfi kəmiyyətlərin momentləri üçün bərabərsizliklərdən biridir. [1]-də O. Hölder tərəfindən təklif olunmuş daha ümumi bərabərsizlikdən aşağıdakı nəticə alınır: ξ və η təsadüfi kəmiyyətlər, $r > 1$, $1/r + 1/s = 1$ olduqda,*

$$\mathbf{M}|\xi\eta| \leq (\mathbf{M}|\xi|^r)^{1/r} (\mathbf{M}|\eta|^s)^{1/s}$$

bərabərsizliyi doğrurur.

H. b.-dən *Bunyakovski bərabərsizliyi* alınır, yəni

$$\mathbf{M}|\xi\eta| \leq (\mathbf{M}\xi^2)^{1/2} (\mathbf{M}\eta^2)^{1/2}.$$

Əd.: [1] Holder O., «Nachr. Ges. Wiss. Gött.», 1889, № 2, S. 38–47; [2] Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

HÖRST FENOMENİ « Херста явление; Hurst phenomenon » – zaman sırasının kumulyativ cəmlərində toplananlar sayının artması ilə alınmış «genişlənmə» cəmlər ardıcılığının sürətli (sonlu dispersiyalı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin x_t sırasında uyğun artması ilə müqayisədə) artmasıdır. Bu fenomen H. Hörst tərəfindən (bax, [1], [2]) aşkar edilmişdir, o, Nil çayından başlayaraq, çay axınının, çay və göllərin səviyyəsinin, havanın temperaturu və təzyiqinin, ağac halqalarının qalınlığının, göl çöküntüləri layları və s.-nin birilik qiymətlərindən tərtib olunmuş 690 illik sıralar üçün «alınmış» genişlənmə (gətirilmiş açımı) sıraları arasındakı bu fenomenlə qarşılaşmışdır.

x_t , $t = 0, 1, \dots, n$ sırasının «alınmış» genişliyi (gətirilmiş açımı) (rus. приведенный размах; bu R/S – statistika kimi işərlənir) aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$V_n = R_n/S_n = \frac{\max_{0 \leq u \leq n} \left(\sum_{t=0}^u x_t - u \bar{x}_n \right) - \min_{0 \leq u \leq n} \left(\sum_{t=0}^u x_t - u \bar{x}_n \right)}{n^{-1} \sum_{t=0}^n x_t^2 - (\bar{x}_n)^2},$$

burada $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_n = n^{-1} \sum_{t=0}^n x_t$ (kesilməz t parametridən

asılı x_t sıraları üçün də «alınmış» genişlik (gətirilmiş açım) analogi təyin olunur; bax, məs., [3], [4]). Göstərmək olar ki, əgər x_t sonlu dispersiyalı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının müşahidə olunmuş qiymətləridir, onda $V_n \sim n^{1/2}$ münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq ödənilir (bax, [3], [5]). V_n qiymətləri, adətən, $c n^H$ funksiyasının qiymətləri ətrafında qiymətlər alır (deyişir), burada $c = \text{const}$, H isə əksər hallarda 0,5-dən çox olur (orta hesabla H -in qiyməti 0,74-ə yaxın olmuşdur). H kəmiyyəti bəzən Hörst parametri (və ya əmsali) adlandırılır.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər sırasını x_t stasionar ardıcılığı ilə (diskret zamanlı stasionar proseslə) əvəz etmək H. f.-nin izahı üçün ilk cəhdlərin hamısı uğursuz olmuşdu (bax, [6]). Qeyd etmək lazımdır ki, korrelyasiyalar (sonlu yaddaşa malik) ən sadə sonlu zamanlı stasionar proseslər üçün

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(k) = 2\pi f(0) < \infty$$

şərtini ödədiyindən [$B(k)$, – x_t prosesinin korrelyasion funksiyası, $f(\lambda)$ – onun spektral sıxlığıdır], həmişə $H = 0,5$ olur (bax, [3]). H. f. ödənilmədiyi model sıraya aid misallardan birinə [7], [8]-də baxılmışdır, bu y_t kəsri Braun hərəkətinin artımları $y_{t+1} - y_t$ kəmiyyətlərinin sırası x_t -dir, yəni üstlü struktur funksiyası –

$$D(\tau) = \mathbf{M}(y_{t+\tau} - y_t)^2 = C|\tau|^{2H}, \quad 1/2 < H < 1$$

olan stasionar artımları avtomodel Gauss prosesidir. Bu halda x_t – korrelyasion funksiyası cəmlənməyən

$$B(k) = 0,5 C \{ |k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \}$$

olan stasionar təsadüfi prosesdir, bu proses üçün Hörst parametri H -a bərabərdir (müşahidələr üzrə bu parametrin qiymətləndirilməsi haqqında, bax, [9]). Qeyd olunan modelin çay axınının və digər geofiziki zaman sıralarının və ya turbulent axında sürətin fluktuasiyaları sıralarının təsviri üçün tətbiqi haqqında bax, [10], [4]. [3]-də H. f. ödənilən avtomodel zaman proseslərinə aid bir sıra misallar (məs., stasionar artımları bezi qeyri – Gauss proseslərinin artımlarının sıraları üçün, sonsuz dispersiyalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün) göstərilmişdir. H. f. [11], [12]-də baxılmış $(1-B)^\delta x_t = a_t$, $0 < \delta < 1/2$ tənliyi ilə verilən stasionar kəsri tərtibli avtoregressiv proseslər üçün də ödənilir, burada $B_{x_t} = x_{t-1}$, a_t – dispersiyası sonlu σ_a^2 olan, orta qiyməti sıfıra bərabər, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, burada $f(\lambda) = (\sigma_a^2/2\pi)[4\sin^2 \lambda/2]^{-\delta}$, $H = \delta + 1/2$.

H. f. x_t zaman sırasının qeyri – stasionarlığı ilə izah oluna bilər. Qeyri stasionarlıq isə bir çox geofiziki müşahidələr sıralarında olur

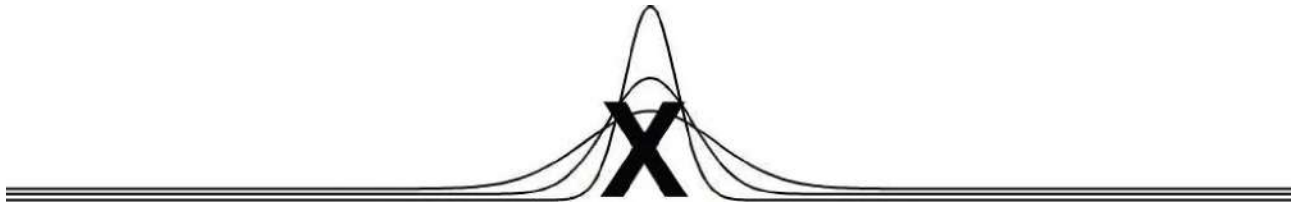
(bax, məs., [13]), burada $x_t = y_t + m_t$ şəklində misala baxılmışdır, y_t stasionar təsadüfi prosesdir və

$$\mathbf{M}y_t = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}y_{t+k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_y(k) = 0,$$

yəni y_t -nin yaddaşı sıfıra bərabərdir, m_t isə zamandan asılı trenddir və bu trend üçün H. f. ödənilir.

Əd.: [1] H u r s t H. E., «Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.», 1951, v. 116, p. 770–808; [2] H u r s t H. E., «Proc. Inst. Civil Engrs.», 1956, pt 1, v. 5, p. 519–90; [3] M a n d e l b r o t B., T a q q u M., «Bull. Intern. Statist. Inst.», 1979, v. 48, book 2, p. 69–104; [4] H e l -

l a n d K., V a n A t t a C., «J. Fluid Mech.», 1978, v. 85, pt 3, p. 573–89; [5] F e l l e r W., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 427–32; [6] L l o y d E. H., «Adv. in Hydrosoci.», 1967, v. 4, p. 281–339; [7] M a n d e l b r o t B., «C. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, № 12, p. 3274–77; [8] M a n d e l b r o t B., V a n N e s s J. W., «SIAM Rev.», 1968, v. 10, p. 422–37; [9] D a v i e s R., H a r t e S., «Biometrika», 1987, v. 7, № 1, p. 95–101; [10] M a n d e l b r o t B., W a l l i s S., «Water Resources Res.», 1969, v. 5, № 2, p. 228–67; [11] H o s k i n g J., «Biometrika», 1981, v. 68, № 1, p. 165–76; [12] A n d e l J., «Kybernetika», 1986, v. 22, № 2, p. 105–23; [13] K l e m e s V., «Water Resources Res.», 1974, v. 10, № 4, p. 675–88.



XALIS BEYES STRATEGİYASI « чистая байесовская стратегия; pure Bayes strategy » – bax, *Oyunu, iki şəxsin.*

XALIS STRATEGİYA « чистая стратегия; pure strategy » – bax, *Oyunu, iki şəxsin; Statistik oyun.*

XALIS VƏZİYYƏT « чистое состояние; pure state » – bax, *Sıxlıq operatoru.*

XAOS « хаос; chaos » – həmişə də dəqiq olmayan (və müxtəlif hallarda müxtəlif) məzmunlu, trayektoriyaları qeyri – dayanıqlılıq ilə şərtləndirilmiş dinamik sistemin (sistemin dinamikasında gözə çarpan rol oynayan bütün trayektoriyalar və ya onların hər hansı çoxluğunun) trayektoriyalarının kvazitəsədufi dəyişikliklərinin qeyri – formal təsvirində istifadə olunan ifadədir. Bu keyfiyyətə belə «mexanizmlə» təzahür edir. Fərz olunur ki, sistemin faza fəzasında faza nöqtəsi x t müddəti ərzində $\varphi_t(x)$ -ə keçir. x nöqtəsinin trayektoriyası prinsip etibarilə, özünün başlanğıc qiyməti x ilə tam mənası ilə təyin olunmasına baxmayaraq, əgər bu başlanğıc qiymət tam dəqiq deyil, yalnız δ tərtib xəta ilə (praktik olaraq bu qaçılmazdır) verilərsə, onda nöqtənin hərəkətinin nə cür davam edəcəyi (heç olmasa məhdud dəqiqliklə olsa belə) haqqında yalnız nisbətən kiçik zaman parçasında mülahizə yürütmək mümkündür. Doğrudan da, əgər trayektoriyalar olduqca güclü dayanıqsızlığı ilə fərqlənirsə [bu o mənada anlaşılar ki, iki yaxın x və y nöqtələri üçün $\varphi_t(x)$ və $\varphi_t(y)$ arasında məsafə zaman keçdikcə trayektoriyalar olduqca böyük məsafədə aralanana qədər (məs., eksponensial) sürətlə artır], onda heç olmasa, prinsip etibarilə $\varphi_t(x)$ -i tapmaq üçün olan qeyri – müəyyənlik t -nin artması ilə o qədər də sürətlə artır ki (çünki məlum deyildir ki, $\varphi_t(x)$ və ya $\varphi_t(y)$ reallaşacaq), bu da nöqtənin hərəkəti haqqında nisbətən böyük olmayan t -lər ($|\ln \delta|$ tərtib) üçün əvvəlcədən mülahizə yürütməyə imkan verə bilər. Bu sistemin evolyusiyasını təkrar müşahidə etdikdə (yeni onun vəziyyətinin dəyişməsinə) və hərəkət eyni başlanğıc nöqtəsindən (δ -ya qədər dəqiqliklə) başlayaraq müşahidə olunarsa, tez bir zaman ərzində ($|\ln \delta|$ tərtib müddət keçdikdən sonra) onun vəziyyəti (faza nöqtəsi $\varphi_t(y)$ -in vəziyyəti), ümumiyyətlə, birinci dəfə olduğundan tam fərqli olacaqdır, sanki sistemin evolyusiyası determinik deyildir. Başlanğıc x nöqtəsi vəziyyətindəki çox da böyük olmayan qeyri – müəyyənlik, zaman keçdikcə ələ bil ki, bütün faza fəzası üzrə və ya heç olmasa onun nəzərə çarpacaq hissəsi üzrə «yayılmış» olur. Daha ətraflı analiz göstərir ki, determinikləşmiş sistemlə, adətən, təsadüfiliqlə əlaqəli digər xassələr də imitasiya oluna bilərlər. Məs., «xaotiklik» xassələrindən biri kimi $\varphi_t(x)$ trayektoriyası boyunca ölçmələr aparən ölçmə cihazının ardıcıl göstəricilərinin A. N. Kolmoqorov mənada alqoritmik mürəkkəbliyini hesab etmək təbiidir (bax, [1]). Bu ardıcılıqlar, deyilən mənada, ardıcıl Bernulli sınaqları nəticələrinin yazılışı tipli «heqiqi» təsadüfi proseslər üçün olduğu kimi mürəkkəb ola bilər.

Dinamik sistemin konkret spesifikasiyasından onun trayektoriyalarının eksponensial dayanıqsız olub-olmaması asılı olur və əgər

trayektoriyalar eksponensial dayanıqsızdırlarsa, onda belə trayektoriyalar çoxluğu nə dərəcədə genişdir? Bu suala cavab bu və ya digər sistemin spesifikasiyasını əks etdirir (alınmış tədqiqatlar nəzərə alınmaqla).

Təsədufi proseslərin xassələrinin ən «uğurlu» imitasiyası, eksponensial dayanıqsızlıq bütün trayektoriyalara (qapalı faza çoxobrazlısında) aid olduqda alınır və eksponensial dayanıqsızlığı xarakterizə edən statistik qiymətlər, yeni «yaxın trayektoriyaların aralanmasını» xarakterizə edən statistik qiymətlər (texniki olaraq, tənliliklərin variasiyalarda həllərinin necə olması nəzərdə tutulur) bütün trayektoriyalar üzrə müntəzəm olur (A n o s o v s i s - t e m l e r i adlandırılan), xüsusilə də, əgər sistemin faza fəzasında hamar sıxlığa malik, «fiziki üstünlüklü» invariant μ ölçüsü varsa, «Sırf metriki» nöqtəyi – nəzərdən (ölçü nəzəriyyəsi mənasında), diskret zaman halında belə sistem Bernulli sınaqları təsadüfi prosesindən fərqlənir (bu sistem onun adı modelinə izomorfdur), kəsilməz zaman halında isə ona yaxın prosedən (B e r n u l l i a x ı n ı) fərqlənir (bax, [2], [3]). Digər tərəfdən, «sırf metrik» nöqtəyi – nəzərdən baxmayaraq, korrelyasiyaların azalma sürəti ilə maraqlanmaq olar, yeni t artdıqca «olduqca yaxşı» (məs., hamar) f , g funksiyaları üçün

$$\int f(\varphi_t(x)) g(x) d\mu$$
 kəmiyyəti (faza fəzası üzrə inteqral) ilə maraqlanmaq olar. Aydın olmuşdur ki, bunlar eksponensial azalır.

Təsədufi proseslərin xassələrini hiperbolik attraktorlar, yeni faza fəzasının invariant altçoxluqları da çox «uğurlu» imitasiya edirlər: bunlar yaxın trayektoriyaları müntəzəm eksponensial sürətlə özünə yaxınlaşdırır və bunların daxilində yaxın trayektoriyalar attraktor daxilində qalaraq müntəzəm eksponensial sürətlə uzaqlaşır. Bu halda, attraktorda «fiziki üstünlüklü» invariant μ ölçüsü haqqında yeni sual yaranır. SRB ölçüsü (Sinay – Ryuell – Bouen ölçüsü) belə ölçüdür; bu ölçü belə alınır: attraktorun hər hansı ətrafında μ_0 Lebeq ölçüsündən başlayaraq, onun t müddəti ərzində «evolyusiyasına» baxaraq (bu ölçü trayektoriya boyunca «üzərək» attraktora daha çox yaxınlaşaraq toplanır), $t \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçilir. Bu halda sonda sistemin xassələri haqqında SRB ölçüsünə nəzərən əvvəldə olduğu kimi nəticələr alınır (bax, [3]).

Hiperboliklik xassəsi azacıq zəiflədikdə söylənilənlər öz qüvvəsində qalır (lakin olduqca çox zəifləmədə nəticələr də zəif olur, bu da bəzi hallarda baxılan halın mahiyyəti ilə bağlı olur). Konform dinamikada bu xüsusilə yaxşı araşdırılmışdır (bax, [4]).

Zəif hiperboliklik daha çox olduqca xaotiklik haqqında müddəalar, artıq «metrik» xarakterli olur; bu halda trayektoriyaların bir-birinə dolaşılıqlığından (onların dayanıqsızlığından) əlavə, məlum mürəkkəbliyin təsdiqindən söhbət gedir. Belə nəticələrin böyük əksəriyyəti (həm ümumi, həm də konkret sistemlərə aid) homoklinik trayektoriyalarla bağlıdır (eyni hiperbolik periodik trayektoriyası olan dayanıqlı W^s və dayanıqsız W^u invariant çoxobrazlılarının kəsişdiyi trayektoriya homoklinik trayektoriya adlanır). W^s və W^u transversal kəsişdikləri halda, sistemdə ələ invariant hiperbolik çoxluqlar olur ki, bunların daxili

dinamikası əvvəlki hallarda olduğu kimi xaosit olur, lakin bunların Lebeq ölçüsü sıfıra bərabər olduğundan, bu mənada, onlar fəza fəzasının olduqca kiçik bir hissəsini tutur və bunların sistemin dinamikasına tam təsirindən inamla danışmaq olmur. Bununla belə, bunların digər trayektoriyaların «hərəkətinə» müəyyən dərəcədə təsiri olduğundan, şübhəsiz ki, bu anlamda onlar müəyyən qədər sistemi «xaositləşdirir». Sərbəstlik dərəcəsi $3/2$ olan Hamilton sistemləri üçün homoklinik trayektoriyalar sistemin inteqrallanan olmaması haqqında (yəni ikinci inteqralın olmaması haqqında) bezi teoremlərdə mühüm rol oynayır; bu da bir növ xaositlik kimi anlaşılr. (Dim. – ölçülər böyük olduğu hallarda mənzərə belə aydın olmur.) W^s və W^u -nun kəsişməsi qeyri – transversal olduqda, çox mürəkkəb vəziyyət (hələ indiyə qədər tam öyrənilməmiş) yaranır; burada çoxlu müxtəlif hallar olur. Bu hallardan bəzilərinə aydın olur ki, parametrdən asılı olan sistem üçün trayektoriyaların dinamikasının keyfiyyət mənzerəsi parametrin dəyişmələrinə olduqca həssas olur, bu şərtlə ki, parametr «olduqca böyük» çoxluqlarda dəyişsin (onun hansısa qiymətlərində deyil!) (bax, [5]). «Parametr üzrə müəyyən xaositlik» alınır.

Əd.: [1] Алексеев В. М., Символическая динамика [Одиннадцатая летняя математическая школа], К., 1976; [2] Орнштейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [3] Бруэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [4] Пейтген Х. О., Рихтер П. Х., Красота фракталов, пер. с англ., М., 1993; [5] Palis J., Takens F., Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, Cambridge, 1993.

XAOS bircins «**хаос** однородный; homogeneous **chaos**» – bax, *Bircins chaos*.

XARAKTERİSTİK ÇEVİRMƏ «**характеристическое преобразование; characteristic transform**» – bax, *M – sonsuz bölünən paylanma*.

XARAKTERİSTİK FUNKSIONAL «**характеристический функционал; characteristic functional**», ehtimal paylanmasının –

$$\hat{F}(g) = \int_T \exp(ig(x)) dF(x), \quad g \in T^*$$

bərabərliyi ilə təyin olunan funksionaldır, burada T – xətti topoloji fəza, T^* , – T -yə topoloji qoşma fəzadır. Ehtimal paylanması F -in müəyyən bir σ – cəbrdə ($\mathcal{B}$ -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə) təyin olunduğu və T^* -dan olan bütün g -lərin bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. X. f. anlayışını A. N. Kolmogorov [1]-də daxil etmişdir və bu anlayışla bağlı bütün əsas məsələlər onun adı ilə bağlıdır.

T – Banax fəzası, $\mathcal{B}$ – Borel σ – cəbri olsun. Onda

1) $\hat{F}(0) = 1$ və $\hat{F}$ müsbət müəyyəndir, yəni

$$\sum_{k,l=1}^n c_k \bar{c}_l \hat{F}(g_k - g_l) \geq 0$$

bərabərsizliyi $c_1, c_2, \dots, c_n$ kompleks ədədlərinin ixtiyari sonlu toplusu və T^* -dan olan ixtiyari $g_1, g_2, \dots, g_n$ elementləri üçün ödənilir;

332 XARAKTERİSTİK

2) $\hat{F}$ güclü topologiyada kəsilməzdir, T^* fəzasının $*$ – zəif topologiyasında sekvensial kəsilməzdir, yəni $*$ – zəif yığılmasının doğruduğu topologiyada (T^* -dan olan $\{f_n\}$ ardıcılığı hər bir $x \in T$ üçün $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olduğu halda $f \in T^*$ olan f -ə yığılır);

3) T^* -dan olan ixtiyari g, g_1, g_2 üçün

$$|\hat{F}(g)| \leq 1,$$

$$|\hat{F}(g_1) - \hat{F}(g_2)| \leq 2[1 - \operatorname{Re} \hat{F}(g_1 - g_2)];$$

4) $\hat{F}(-g) = \overline{\hat{F}(g)}$;

5) X. f. və ehtimal paylanmaları arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli;

6) iki ehtimal paylanmasının kompozisiyasının X. f. onların X. f.-lərinin hasilinə bərabərdir;

7) Əgər $K, -T$ -də ehtimal paylanmalarının zəif nisbi kompakt çoxluğudursa, onda $\{\hat{F}: F \in K\}$ X. f.-lər çoxluğu T^* fəzasının güclü topologiyasında müntəzəm kəsilməzdir;

8) əgər $\{F_n\}$ ehtimal paylanmaları ardıcılığı ehtimal paylanması F -ə zəif yığılırsa, onda $\{\hat{F}_n\}$ T^* -dan olan hər bir kompakt (və hətta hər bir məhdud) çoxluqda $\hat{F}$ -ya yığılır.

T^* -da hər bir kompleksqiymətli funksional 1) və 2) şərtlərini ödəyirsə, onda o, T -dən olan silindrik çoxluqların cəbrində promera, yəni mənfı olmayan sonlu – additiv çoxluq funksiyasını doğurur (bax, [2]).

İndiyə qədər hələ də həllini tapmayan mühüm problemlərdən biri T^* -da hər bir müsbət müəyyən kompleksqiymətli funksionalın müəyyən bir ehtimal paylanmasının X. f. olduğu haqqında zəruri və kafi şərtlərin axtarılmasıdır. Bu məsələ funksionala uyğun promeraanın $\mathcal{B}$ -də ehtimal ölçüsünə qədər davamı məsələsi ilə üst-üstə düşür. Fəzaların bəzi sinifləri üçün, o cümlədən, Hilbert və daha ümumi hesabı – Hilbert fəzaları üçün bu problem tamamilə həll olunmuşdur (bax, [4], [5]). Digər mühüm problem X. f.-in xassələrinə malik fəzaların həndəsəsinin təsvirindən ibarətdir. Məs., Minlos – Sazonov teoremi [6] məqaləsindəki nəticələrlə birlikdə X. f. terminlərində nüvə fəzalarını xarakterizə etməyə imkan verir.

X. f.-lərin tətbiqi və xassələri haqqında bax, [7].

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 178–79; [2] Mouriер E., «С. r. Acad. sci.», 1950, т. 231, р. 28–29; [3] Gross L., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1963, в. 46, р. 1–62; [4] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [5] Сазонов В. В., в сб.: Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике (1960), Вильнюс, 1962, с. 455–62; [6] Муштарий Д. X., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 66–77; [7] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984.

XARAKTERİSTİK FUNKSIONAL(ı) təsadüfi ölçünün «**характеристический функционал случайной меры; characteristic functional of a random measure**» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

XARAKTERİSTİK FUNKSIYA «**характеристическая функция; characteristic function**», μ ehtimal ölçüsünün Furey – Stilyes çeviməsi – z -in həqiqi qiymətlərində ($z \in \mathbb{R}^1$)

$$\varphi(z) = \mathbf{M}e^{iz\xi} = \mathbf{M}(\cos z\xi + i \sin z\xi) \quad (1)$$

münasibetlə təyin olunan kompleksqiymətli funksiyadır, ξ – təsadüfi kəmiyyətdir. $\varphi(z)$ bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və məhduddur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ olarsa,

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x) \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\varphi(z)$ X. f.-sı $F(x)$ funksiyasının Furiye – Stiltjes çevirməsidir;
 μ ehtimal ölçüsüdürsə, X. f.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(izx) d\mu(x) \quad (2')$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\mu_z(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}$, $B, - \mathbb{R}^1$ - də Borel çoxluğu.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} p(x) dx \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\varphi(z)$ X. f.-sı ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasının (əgər o varsa) sadəcə Furiye çevirməsidir.

ξ diskret təsadüfi kəmiyyət olarsa və o, $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$; $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$ paylanma qanunu ilə verilərsə, onda ξ -nin X. f.-sı

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \mathbf{M}e^{iz\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{izx_k} \mathbf{P}\{\xi = x_k\} = \\ &= \mathbf{M} \cos z\xi + i \mathbf{M} \sin z\xi \end{aligned} \quad (4)$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cos z\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos zx_k p_k, \\ \mathbf{M} \sin z\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin zx_k p_k. \end{aligned}$$

e^{izx} funksiyası kəsilməz və məhdud olduğundan ($|e^{izx}| = 1$) X. f.-nin (2) düsturu ilə verilmiş ifadəsindəki integral (riyazi gözlemə) sonludur.

Misallar 1. $\lambda > 0$ parametrlı Puasson qanunu ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı

$$\varphi(z) = \exp[\lambda(e^{iz} - 1)]$$

düsturu ilə hesablanır.

2. Bernulli qanunu ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı:

$$\varphi(z) = e^{iz} \cdot p + q = 1 + p(e^{iz} - 1)$$

kimi ifadə olunur, burada $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 - p = q$.

3. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\varphi(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{izb} - e^{iza}}{iz}.$$

Xüsusi halda ξ təsadüfi kəmiyyəti $[-a, a]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış olarsa, onda

$$\varphi(z) = \frac{\sin az}{az}$$

olur.

4. (a, σ) parametrlı normal paylanmanın X. f.

$$\varphi(z) = \exp\left\{iza - \frac{(\sigma z)^2}{2}\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Xüsusi halda, standart normal paylanmaya uyğun X. f.:

$$\varphi(z) = e^{-z^2/2} \text{ olur; } a=0, \sigma=1.$$

5. $\alpha > 0$ parametrlı üstlü qanunla paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.

$$\varphi(z) = \frac{\alpha}{\alpha - iz}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

6. Koşi qanunu ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

olarsa, onda onun X. f.:

$$\varphi(z) = e^{-a|z|};$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x - \theta)^2}$$

olarsa, onda

$$\varphi(z) = e^{-i\theta z - a|z|}$$

olur.

Xarakteristik funksiyanın xassələri. X. f.-nin bəzi xassələri aşağıdakılardır.

1°. ξ ixtiyari təsadüfi kəmiyyətdirsə, bütün heqiqi z -lər üçün $|\varphi(z)| \leq \varphi(0) = 1$.

2°. a və b sabit ədədlədirsə, $a\xi + b$ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı $\varphi_{a\xi+b}(z) = e^{izb} \varphi_{\xi}(az)$.

3°. $\varphi(-z) = \overline{\varphi(z)}$.

4°. $\varphi(z)$ bütün ədəd oxunda müntəzəm kəsilməz funksiyadır.

5°. n sayda asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlər cəminin X. f.-sı bu təsadüfi kəmiyyətlərin uyğun X. f.-lər – $\varphi_{\xi_1}(z), \dots, \varphi_{\xi_n}(z)$ -lərin hasilinə bərabərdir:

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(z) &= \mathbf{M} e^{iz(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = \\ &= \mathbf{M}(e^{iz\xi_1} \cdot e^{iz\xi_2} \cdot \dots \cdot e^{iz\xi_n}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(z).\end{aligned}$$

Xüsusi halda $\xi_1, \dots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(z) = [\varphi_{\xi_1}(z)]^n.$$

6°. $z_1, \dots, z_n$ ixtiyari həqiqi, $c_1, \dots, c_n$ ixtiyari kompleks ədədlər və n ixtiyari tamqiymətli müsbət ədəd olarsa, onda

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \varphi(z_k - z_r) c_k \bar{c}_r \geq 0.$$

7°. ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı bir $n \geq 1$ tərtib momenti, yeni $\mathbf{M}|\xi|^n$ vardırsa, $k \leq n$ şərtini ödəyən bütün k -lər üçün $\varphi(z)$ X. f.-sı k dəfə differensiallandı və

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(0) &= i^k \cdot \mathbf{M} \xi^k, \\ \varphi(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{(iz)^k}{k!} \mathbf{M} \xi^k + \frac{(iz)^n}{n!} \varepsilon_n(z)\end{aligned}$$

bərabərlikləri doğrudur, burada $|\varepsilon_n(z)| \leq 3\mathbf{M}|\xi|^n$ və $z \rightarrow 0$ olduqda $\varepsilon_n(z) \rightarrow 0$.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-nin loqarifminin – $f(z) = \ln \varphi(z)$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsi ətrafında k tərtib ($k \geq 1$ və $\mathbf{M}|\xi|^k < +\infty$ olarsa) kəsilməz törəməsi vardır; onda $f(z)$ -in k tərtib törəməsinin sıfır nöqtəsindəki qiyməti $f^{(k)}(0)$ -in $1/i^k$ -ya bərabərliyinə ξ -nin k tərtib *semi-invariant* (kumulyantı) deyilir. k tərtib *semi-invariant* s_k ilə işarə olunarsa,

$$\begin{aligned}s_k &= \frac{1}{i^k} [\ln \varphi(z)]_{z=0}^{(k)} = \frac{1}{i^k} f^{(k)}(0) = \\ &= \frac{1}{i^k} \left[\frac{d^k}{dz^k} \ln \varphi(z) \right]_{z=0}.\end{aligned}$$

k tərtib (k tam ədəddir) *semi-invariant* k tərtib moment və k tərtib momentdən kiçik bütün momentlərin rəasional funksiyası kimi ifadə olunur.

$$\mathbf{M} \xi = \frac{1}{i} f'(0),$$

$$\mathbf{D} \xi = -f''(0) \text{ olduğundan}$$

$$s_1 = \frac{1}{i} f'(0) = \mathbf{M} \xi, \quad s_2 = \frac{1}{i^2} f''(0) = \mathbf{D} \xi$$

olur, burada $\mathbf{M} \xi$ və $\mathbf{D} \xi$ uyğun olaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyasıdır.

m_k – ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib momenti olsun: $m_k = \mathbf{M} \xi^k$, $k=1, 2, \dots$. Onda

334 XARAKTERİSTİK

$$m_1 = s_1,$$

$$m_2 = s_2 + s_1^2,$$

$$m_3 = s_3 + 3s_1s_2 + s_1^3,$$

$$m_4 = s_4 + 3s_2^2 + 4s_1s_3 + 6s_1^2s_2 + s_1^4,$$

və

$$s_1 = m_1 = -\mathbf{M} \xi,$$

$$s_2 = m_2 - m_1^2 = \mathbf{D} \xi,$$

$$s_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$s_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4,$$

düsturları ilə ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib *semi-invariant*ları və k tərtib momentləri arasındakı münasibətlər ifadə olunur.

(a ; σ) parametrlili *normal qanun*la (*Qauss paylanması*) paylanmış təsadüfi kəmiyyətin üçüncü tərtibdən sonrakı bütün *semi-invariant*ları sıfır bərabərdir, yeni $k \geq 3$ olduqda $s_k = 0$:

$$s_1 = a, \quad s_2 = \sigma^2.$$

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası məlum olarsa, onun xarakteristik funksiyasını təyin etmək həmişə mümkündür. X. f. məlum olarsa, təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası bu X. f. ilə birqiymətli təyin olunur:

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-izx} - e^{-izy}}{iz} \cdot \varphi(z) dz. \quad (*)$$

Bu düstur *çevirmə düsturu* adlanır. Bəzən (*) düsturuna ekvivalent aşağıdakı düstur da verilir:

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \int \frac{e^{-izx} - e^{-izy}}{iz} \varphi(z) e^{-z^2 u^2} dz, \quad x < y.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi kəmiyyətin X. f., yalnız və yalnız, onun paylanma funksiyası simmetrik olduğu halda həqiqi-qiymətli və bu halda

$$\varphi(z) = \mathbf{M} \cos z \xi.$$

Hər hansı bir $\varphi(z)$ funksiyasının X. f. olub-olmadığını təyin etmək çətin məsələlərdən biridir. Belə tipli məsələlərlə əlaqədar alınmış nəticələrdən bəziləri aşağıda qeyd olunmuşdur.

1. $\varphi(0) = 1$ şərtini ödəyən kəsilməz $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{R}^1$) funksiyasının xarakteristik funksiya olması üçün ixtiyari həqiqi – qiymətli $z_1, \dots, z_n$ və ixtiyari kompleks qiymətli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $n=1, 2, \dots$ ədədləri üçün

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(z_i - z_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j \geq 0$$

şərtinin ödənilməsi, yeni onun müsbət – müəyyən olması zəruri və kifayətdir (*Boxner – Xinqin teoremi*).

2. Aşağıya qabarıq, cüt, kəsilməz $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{R}^1$) funksiyası:

1) $\varphi(z) \geq 0$;

2) $\varphi(0) = 1$;

3) $z \rightarrow \infty$ olduqda, $\varphi(z) \rightarrow 0$

şertlerini ödəyərsə, onda $\varphi(z)$ X. f.-dir (Poya teoremi, 1920).

3. $\varphi(z)$ X. f. $\exp \mathcal{P}(z)$ tipli funksiya olarsa ($\mathcal{P}(z)$ polinomdur), onda $\mathcal{P}(z)$ polinomunun dərəcəsi ikiden böyük ola bilməz (Martsinkeviç teoremi).

4. $\xi_1, \dots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $M\xi_n = 0$, $D\xi_n^2 = 1$, $F_{\xi_n}(x)$

$$\tilde{S}_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, $\varphi(z)$ isə ξ_i təsadüfi kəmiyyətinin X. f. olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $\{F_{\tilde{S}_n}(x), n \geq 1\}$ ardıcılığı (0; 1) parametrlili Gauss paylanmasına zəif yığılır.

İki X. f.-nin hasilini yenə də X. f.-dir. Təbii ki, bəzi X. f.-lər iki və ya ikiden artıq sayda X. f.-lənin hasilini ifadə olunur. Hər bir $f(t)$ X. f. $f_1(t) = e^{iat}$ (a həqiqidir) və $f_2(t) = f(x)e^{-iat}$ tipli iki X. f.-nin hasilini kimi ifadə oluna bilər.

X. f.-nin vuruqlarından biri e^{iat} şəklində olarsa, X. f.-nin iki X. f.-nin hasilini kimi ifadəsi trivial adlanır. Trivial hallardan fərqli olaraq, X. f.

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$$

şəklində $f_1(t)$ və $f_2(t)$ cırılmayan paylanmaların X. f.-lənin hasilini kimi ifadə olunarsa, X. f. ayrılan X. f. adlanır. Bu halda $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyaları $f(t)$ X. f.-nin komponentləri (və ya vuruqları) adlanır.

X. f. hasil şəklində yalnız trivial surətdə ifadə olunarsa, onda belə X. f. ayrılmayan X. f. adlanır. Məs., $F(x)$ sıfır diskret paylanma funksiyasıdır və bu paylanmanın yalnız iki kəsilmə nöqtəsi varsa, onda ona uyğun X. f. ayrılmayan X. f.-dir.

X. f.-nin ayrılışına aid A. Ya. Xinqin aşağıdakı nəticələri almışdır (bax, [1]).

a) Hər bir X. f. aşağıdakı xassələrə malik olan ikiden çox olmayan X. f.-lənin hasilini şəklində ifadə oluna bilər. Bunlardan biri ayrılmayan komponentlərə malik deyildir, digəri isə ayrılmayan vuruqların sonlu və ya hesabı ardıcılığının yığılan hasilidir.

b) Ayrılmayan komponentləri olmayan X. f.-lər sonsuz bölünəndirlər.

n - ölçülü $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin (təsadüfi vektorunun) X. f. $z = (z_1, \dots, z_n)$ həqiqi vektorunun funksiyası olan

$$\varphi_\xi(z) = M \exp [i(z_1 \xi_1 + \dots + z_n \xi_n)]$$

riyazi gözləməsinə deyilir. ξ -nin komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda n - ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin X. f.

$$\varphi_\xi(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(z_k)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Л о з в М., Теория вероятностей, М., 1962; [3] Ф е л -

л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [5] З о л о т а р е в В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

XARAKTERİSTİK FUNKSIYA а п а л и т и к « характеристическая функция аналитическая; analytic characteristic function » – bax, *Analitik xarakteristik funksiya*.

XARAKTERİSTİK FUNKSIYALAR METODU

« характеристических функций метод; characteristic functions method » – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas analitik metodlarından biridir. 19-cu əsrin sonunda A. M. Lyapunov bu metod ilə məşhur *Lyapunov teoremini* isbat etmişdir (bax, [1]). X. f. m.-nin əsas ideyası, müasir interpretasiyada, ehtimal paylanmaları P -lərin Furiye – Stilyes çevirmələri və bunlara analogi çevirmələrdən istifadə olunmadan ibarətdir.

Hər bir P üçün Furiye – Stilyes çevirmələri –

$$f(t, P) = \int e^{itx} P(dx)$$

funksiyalarına xarakteristik funksiyalar deyilir.

X. f. m. paylanmaların kompozisiyalarının analizində (və hər şeydən öncə, asimptotik analizdə) ən effektiv metod sayılır ki, bu da asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmalarının analizinə ekvivalentdir. Bu isə xarakteristik funksiyaların aşağıdakı şərtləri ilə əsaslandırılır:

1) P paylanması özünün uyğun xarakteristik funksiyası $f(t, P)$ ilə tam mənası ilə təyin olunur.

2) İxtiyari $P_1, P_2, \dots, P_n$ paylanmaları üçün

$$f(t, P_1 * P_2 * \dots * P_n) = f(t, P_1) f(t, P_2) \dots f(t, P_n)$$

bərabərliyi doğrudur.

3) Əgər P_n paylanmalar ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda P paylanmasına zəif yığılırsa ($P_n \xrightarrow{w} P$), onda $f(t, P_n) \rightarrow f(t, P)$ yığılması hər bir $t \in \mathbb{R}^1$ üçün ödənilir və bu yığılma hər bir $|t| \leq T$ məhdud intervalında müntəzəm yığılma olacaqdır.

4) Əgər $f(t, P_n)$ xarakteristik funksiyası $t=0$ nöqtəsində kəsilməz $g(t)$ funksiyasına yığılırsa, onda $g(t) = f(t, P)$ hər hansı P paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır və $P_n \xrightarrow{w} P$ (zəif yığılma).

Paylanmaların və onların uyğun xarakteristik funksiyalarının analitik xassələri bir-birilə sıx bağlıdır. Məs., P paylanmasının hamarlılığı (onun törəməsinin varlığı və onun törəmələrinin hansısa saydasının varlığı) $t \rightarrow \infty$ olduqda $f(t, P)$ funksiyasının sıfıra yığılma sürətində özünü əks etdirir, hansısa sayda P -nin momentlərinin varlığı uyğun $f(t, P)$ -nin hamarlılığını şərtləndirir, paylanmanın birzəvililik kriterisi xarakteristik funksiyalar terminləri ilə ifadə olunur və s.

X. f. m. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremləri nəzəriyyəsinin qurulmasında müvəffəqiyyətlə istifadə olunmuşdur (bax, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremləri*). Bu metoddan istifadə edilməklə limit teoremlərinin müxtəlif dəyişikmələri alınmışdır (bax, *Berri – Esseen bərabərsizliyi*, *Berri – Esseen teoremi*).

X. f. m.-nin geniş potensial imkanları onun müasir ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox bölmələrində müvəffəqiyyətlə tətbiq olunmasına şərait yaratmışdır (məs., şəxəllənən proseslər nəzəriyyəsində doğuran funksiyalar metodu formasında).

X. f. m. ideyası «ümumiləşmiş cəmləmə» modelində istifadə olunur, bu halda, hər hansı kommutativ qrup və ya semi – qrup əməlinin köməyiylə formalaşan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin «cəmlərinə» baxılır (paylanmalar fəzasında bu əməl – semi – qrup kommutativ əməli «ümumiləşmiş kompozisiya» əməlini doğurur). Bu modellərdə xarakteristik funksiyaların analoqu kimi

$$f(\theta, P) = \int q(\theta, x) P(dx)$$

integral çevirmələri götürülür. Burada θ dəyişəni müəyyən bir Θ çoxluğundan qiymətlər alır, bu çoxluq q çevirməsinin nüvəsi kimi istifadə olunan əmələ uyğun olaraq ciddiqlikə təyin olunur.

$f(\theta, P)$ «Xarakteristik funksiyası» 1) – 4) xassələrinə tamamilə uyğun olan xassələrə malikdir ki, bu da baxılan modele X. f. m.-nin tətbiq olunmasına əsas verir.

Əd.: [1] Ляпунов А. М., Избранные труды, М., 1948, с. 179–218, 221–50; [2] Лунин Е. Е. Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

XARAKTERİSTİK GÖSTƏRİCİ, DAYANIQLILIQ PARAMETRİ «характеристический показатель, параметр устойчивости; characteristic index, parameter of stable» – bax, *Dayanıqlı paylanma göstəricisi, Dayanıqlı paylanma*.

XARAKTERİSTİK OPERATOR(u) «характеристический оператор; characteristic operator» bir cins Markov prosesinin – nöqtənin sonsuz kiçik ətrafında gedışatını təsvir edən operatorudur. Daha dəqiq, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ – lokal kompakt Hausdorff fəzası E -də sağdan kəsilməz Markov prosesi olsun. $\tau_{\mathcal{A}}$ ilə $\mathcal{U}$ açıq çoxluğu üçün prosesin $\mathcal{U}$ çoxluğundan ilk çıxış anı işarə olunmuşdur. x nöqtəsində prosesin xarakteristik operatoru $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{\mathcal{U} \downarrow x} \frac{M_x f(x\tau_{\mathcal{U}}) - f(x)}{M_x \tau_{\mathcal{U}}}$$

limiti kimi təyin olunur, burada limit ələ açıq $\mathcal{U} \downarrow x$ çoxluqlarına görə götürülür ki, bunlar üçün limit altında ifadə sonlu olsun. Bu zaman əgər x nöqtəsində limit varsa, $f \in D_{\mathfrak{A}}(x)$, əgər bütün $x \in E$ nöqtələrində limit varsa, $f \in D_{\mathfrak{A}}$ olur [burada $D_{\mathfrak{A}}(x)$ $\mathfrak{A}$ operatorunun x nöqtəsində təyin olunma oblasıdır, $D_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{x \in E} D_{\mathfrak{A}}(x)$]. Bu tərif Markov proseslərinin daha geniş sinfi üçün də yayılır.

X. o. infinezimal operatorun genişlənmiş forması olub, prosesin sonsuzluğa ilk getmə anına qədər olan gedışatını təyin edir. X. o. qlobal minimum prinsipini ödəyir: əgər x_0 f funksiyasının qlobal minimum nöqtəsidir, onda $\mathfrak{A}f(x_0) \geq 0$. X. o. kəsilməz proseslər üçün lokaldir: $\mathfrak{A}f(x)$ x nöqtəsinin sonsuz kiçik ətrafında f funksiyasının qiymətləri üzrə təyin olunur. Bu halda X. o. lokal minimumu prinsipini ödəyir: f funksiyasının lokal

minimum nöqtəsində $\mathfrak{A}f(x_0) \geq 0$. $\mathbb{R}^d$ -də diffuzion proseslər üçün X. o. bütün məhdud ikiqat differensiallanan funksiyalarda təyin olunmuşdur və o, aşağıdakı kimi ifadə olunur (qınılmayan proseslər üçün):

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

burada $a_{ij}(x)$ – müsbət müəyyən matris (diffuziya matrisi),

$b_i(x)$ – aparıcı vektorudur.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

XARAKTERİZASİON TEOREMLƏR «характеризационные теоремы; characterization theorems» – təsadüfi kəmiyyətlər və ya təsadüfi vektorların *paylanma tipləri* və bu təsadüfi kəmiyyətlər və ya vektorların funksiyalarının ümumi xassələri arasında əlaqəni müəyyənləşdirən teoremlərdir.

Misal 1. X üçölçülü ələ təsadüfi vektor olsun ki:

1) onun üç qarşılıqlı ortoqonal oxlar üzərinə proyeksiyaları X_1 ,

X_2 , X_3 asılı olmasınlar və

2) X -in ehtimal paylanmasının sıxlığı $p(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

yalnız $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ cəmindən asılı olsun. Onda X normal paylanma qanununa tabedir və

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right\},$$

burada $\sigma > 0$ hər hansı sabitdir (qazın stasionar vəziyyətində molekulların sürətlərinin paylanması üçün Maksvell qanunudur).

Misal 2. $X \in \mathbb{R}^n$ komponentləri eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X = (X_1, \dots, X_n)$ olan təsadüfi vektor olsun. Əgər paylanma normal qanuna tabedirsə, onda

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

«empirik ortası» və

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

«empirik dispersiyası» asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Əksinə, bu kəmiyyətlər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda X normal paylanma qanununa tabedir.

Misal 3. $X_k \in \mathbb{R}^n$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan komponentləri vektor, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sıfırdan fərqli sabitlər olsun. Əgər $Y_1 = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ və $Y_2 = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, X normal qanunla paylanır. Bu hökm Darmua – Skitoviç teoremi adlanır. Xüsusi halda, $n=2$, $a_1=a_2=b_1=1$ və $b_2=-1$ olduqda, yəni $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$ olduqda, Bernşteyn teoremi alınır. a_i və b_j əmsalları üzərinə bəzi məhdudiyyətlər qoyaraq, Y_1 və Y_2 -nin asılı olmamalılığı şərtini onların eyni qanunla paylanan olduqları fərziyyəsi ilə əvəz etdikdə X vektorunun normal qanunla paylandığı haqqında hökm doğrudur. Bu müddəə Linnik teoremi adlanır.

Təsədüfi $X \in \mathbb{R}^n$ vektorunun paylanması belə karakterizasiya – iki $Q_1(X)$ və $Q_2(X)$ çoxhədlilərinin eyni qanunla paylanması və asılı olmamalıqı xassəli karakterizasiyası riyazi statistikada mühüm rol oynayan X. t.-lə yanaşı verilir.

Əd.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

XARAKTERİZASİON TEOREMLƏR Abel qruplarında ehtimal paylanmaları üçün «характеризационные теоремы для вероятностных распределений на абелевых группах; characterization theorems for probability distributions on Abelian groups» – təsadüfi kəmiyyətlərin bəzi funksiyalarının xassələri üzrə bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmaları haqqında informasiya verən teoremlərdir. Burada heqiqi ədəd oxunda çoxsaylı X. t.-dən (bax, [1]) Qauss paylanmasının karakterizasiya məsələlərinin qruplar üzrə analoqlarına baxılır və bu halda xətti statistikaların eyni paylanmaya malik olmaları və ya asılı olmamalıqı karakterizasiya olunur, belə ki, bu hal üçün alınan nəticələr nisbətən tamamlanmış karakter daşıyır.

G – lokal kompakt separabel Abel metrik qrupu, $\bar{G}$ – onun karakterlər qrupu, C_G – G qrupunun sıfırının komponenti, $\Gamma(G)$ – G -də Qauss paylanmalarının çoxluğu, $\Gamma^s(G)$ – G -də simmetrik Qauss paylanmalarının çoxluğu, $I(G)$ – G -də idempotent paylanmaların çoxluğu olsun. G qrupunun K kompakt altqrupunda Haar paylanması μ_K ilə işarə olunur; T – çevrənin fırlanmalar qrupudur.

$f_n: G \rightarrow G$ homomorfizminin $f_n(g) = ng$ (n natural ədəddir) və $f_n(G) = G^{(n)}$ düsturları ilə təyin olunduğu fərz olunur. Əgər $G^{(2)} = G$ olarsa, G qrupu Korvin qrupu adlanır.

Əgər qiymətləri G -dən, paylanmaları γ olan ele asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri olarsa ki, $X+Y$ və $X-Y$ də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, onda G qrupunda γ paylanması Bernşteyn mənasında Qauss paylanması adlanır. G qrupunda Bernşteyn mənasında Qauss paylanmaları çoxluğu $\Gamma_B(G)$ ilə işarə olunur. Fərz olunur ki, $I_B(G) = I(G) \cap \Gamma_B(G)$. μ_K paylanması $I_B(G)$ -yə, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, $K^{(2)} = K$ bərabərliyi ödənilsin. $\Gamma_B(G)$ çoxluğu semi – qrupdur (konvolusiyaya nəzərən) və $I_B(G) * \Gamma(G) \subset \Gamma_B(G)$ üzərindədir. $I_B(G) * \Gamma(G) = \Gamma_B(G)$ bərabərliyinin ödənilməsi G qruplarının tam təsviri belədir: ixtiyari $K \subset G$ kompakt Korvin altqrupu üçün G/K faktorqrupunun T^2 -na topoloji izomorf altqrupu yoxdur (bax, [2]). Əgər $\mu = \mu_K * \nu$ və $\nu \in \Gamma(G)$ olarsa, onda μ paylanması $K \subset G$ kompakt altqrupuna nəzərən invariant paylanmadır və μ G/K faktorqrupunda Qauss paylanması doğurur.

Heqiqi ədəd oxunda, əgər X və Y asılı olmayan (eyni qanunla paylanmış olmaları şərt deyildir) təsadüfi kəmiyyətlər və $X+Y$ və $X-Y$ də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda X və Y Qauss paylanması ilə paylanan təsadüfi kəmiyyətlərdir (Bernşteyn teoremi). Bu teoremin qruplar halı üçün analoqu aşağıdakı nəticədir. Fərz olunur ki, X və Y qiymətləri G -dən, paylanmaları μ və ν olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və fərz olunur ki, C_G qrupunun 2

tərtibdən elementləri yoxdur. Onda $X+Y$ və $X-Y$, yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, $\mu, \nu \in I_B(G) * \Gamma(G)$ və $\mu = \nu * E_g$ bərabərlikləri ödənilmiş olsun (bax, [2]). Bu teorem aşağıdakı mənasında dəqiqdir: əgər C_G qrupunun 2 tərtibdən elementləri varsa, onda qiymətləri G qrupundan olan, asılı olmayan və paylanmaları μ və ν olan ele X və Y təsadüfi kəmiyyətləri vardır ki, $Y, \nu \in I(G) * \Gamma(G)$, $X+Y$ və $X-Y$ isə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir (bax, [2]).

Klassik halda, əgər $X_j, j=1, 2, \dots, m$ $\mathbb{R}^1$ -də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $L_1 = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_m X_m$ və $L_2 = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_m X_m$ (bütün α_j, β_j -lər sıfırdan fərqlidirlər) asılı olmayan xətti formaladırsa, onda X_j təsadüfi kəmiyyətləri Qauss paylanmaları ilə paylanmışlar (Skitoviç – Darmuataoremi). Qruplar üçün bu teoremin analoqu aşağıdakı nəticədir. $X_j, j=1, 2, \dots, m$ qiymətləri G qrupundan olan, paylanmaları μ_j olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\{a_j\}_{j=1}^m, \{b_j\}_{j=1}^m$ G qrupu üçün məqbul tam ədədlər çoxluqları olsun [yeni ele ədədlər olsun ki, bütün j -lər üçün $G^{(j)} \neq \{0\}$] və $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ və $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_m X_m$ asılı olmayan xətti formalalar olsun. Onda əgər G qrupu

$$G \approx \mathbb{R}^n + D, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

şəklində qrupa topoloji izomorf olarsa, D isə burulmaz (rus. без кручения) diskret qrup olarsa, onda bütün j -lər üçün $\mu_j \in \Gamma(G)$. Əgər $G^{(2)} = \{0\}$ olarsa, onda bütün μ_j -lər cırlaşmış paylanmalardır. Əgər G modul 3 üzrə çıxıqlar qrupuna izomorf qrupdursa, onda ya bütün μ_j -lər cırlaşmış paylanmalardır, ya da ki, heç olmasa, ixtiyari iki j_1 və j_2 qiymətləri üçün $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = \mu_G$, digər μ_j -lər isə ixtiyari olur (bax, [3]).

Bu nəticə aşağıdakı mənasında dəqiqdir. Əgər G qrupu yuxarıda qeyd olunan qruplara topoloji izomorf deyildirsə, onda qiymətləri G qrupundan olan, paylanmaları μ_i olan $X_j, j=1, 2, \dots, m$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri və G qrupu üçün ele $\{a_j\}_{j=1}^m$ və $\{b_j\}_{j=1}^m$ – tam qrupların məqbul çoxluqları vardır ki, $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ və $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_m X_m$ xətti formaları asılı deyildirlər və j -nin bütün qiymətlərində $\mu_j \in I(G) * \Gamma(G)$ münasibəti doğrudur (bax, [3]).

Heqiqi ədədlər oxunda L_1 və L_2 xətti formalalarının asılı olmamalıqından alınır ki, baxılan paylanmaların karakteristik funksiyaları sıfıra bərabər olurlar. Qruplar halında bu, ümumiyyətlə, belə deyildir. $X_j, j=1, 2, \dots, m$ – qiymətləri G -dən olan asılı olmayan və paylanmaları μ_j olan, karakteristik funksiyaları sıfıra çevrilməyən təsadüfi kəmiyyətlər. $\{a_j\}_{j=1}^m, \{b_j\}_{j=1}^m$ – G üçün

tam ədədlərin məqbul çoxluqları olsun. Onda $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ və $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_m X_m$ xətti formalarının asılı olmamasından bütün j -lər üçün $\mu_j \in \Gamma(G)$ münasibətinin alınması üçün zəruri və kifədir ki, G burulmasız qrup olsun, yaxud $G^{(p)} = \{0\}$ olsun, burada p sadə ədəddir (bax, [3]).

$\text{Aut}(G)$, $-X$ qrupunun bütün topoloji avtomorfizmlərinin qrupu olsun. X_j , $j = 1, \dots, s$ paylanmaları μ_i , qiymətləri G qrupundan olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(G)$ olsun. Aşağıdakı məsələyə Skitoviç – Darmua teoreminin qruplar üçün analoqu kimi baxmaq olar. Hansı G qrupları üçün L_1 və L_2 xətti formalarının asılı olmamasından bütün j -lər üçün $\mu_j \in I(G) * \Gamma(G)$ xassəsi ödənilir? Qurye və Olkin isbat etmişlər ki, $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ bu xassəyə malikdirlər (bax, [1]). Bu xassəli kompakt Abel qruplarının tam təsviri aşağıdakı kimidir.

(I) Fərz olunur ki, G qrupu aşağıdakı qruplardan biri ilə izomorfudur:

$$(a) Z(2^{m_1}) \times \dots \times Z(2^{m_n}), \quad 0 \leq m_1 < \dots < m_n,$$

$$(b) \Delta_2 \times Z(2^{m_1}) \times \dots \times Z(2^{m_n}), \quad 0 \leq m_1 < \dots < m_n,$$

onda bütün μ_j -lər cırlaşmış paylanmalardır;

(II) fərz olunur ki, G qrupu $Z(3) \times G'$ qrupuna topoloji izomorfudur, burada G' (a) və ya (b)-dəki kimi qrupdur; onda ya bütün μ_j -lər cırlaşmış paylanmalardır, yaxud μ_j paylanmalarını μ'_j yerindəyişmələri ilə ələ əvəz etmək olar ki, heç olmasa iki μ'_{j_1} və μ'_{j_2} paylanmaları üçün $\mu'_{j_1} = \mu'_{j_2} = m_{Z(3)}$ bərabərliyi ödənilsin, digər μ'_j -lər ixtiyari olsun və $\sigma(\mu'_j)$ daşıyıcısının hamısı üçün isə $\sigma(\mu'_j) \subset Z(3)$ münasibəti ödənilsin, burada $Z(n)$ – modul n üzrə çıxıqlar qrupudur, Δ_2 , – 2-adik tam ədədlərin qrupudur (2 tam ədədin qrup cəmi ilə qrup).

Bu nəticə aşağıdakı mənada dəqiqdir. G kompakt Abel qrupudur, lakin yuxarıda qeyd olunmuş qaydalara izomorf deyildir. Onda paylanmaları μ_j , qiymətləri isə G qrupundan olan ələ asılı olmayan X_j təsadüfi kəmiyyətləri və $\delta_j \in \text{Aut}(G)$ avtomorfizmləri vardır ki, $L_1 = X_1 + \dots + X_s$ və $L_2 = \delta_1(X_1) + \dots + \delta_s(X_s)$ xətti formaları asılı olmayandırlar və bütün j -lər üçün $\mu_j \in I(X) * \Gamma(G)$.

$A = \{a_j\}_{j=0}^m$ tam ədədlərin ixtiyari çoxluğu, $\Gamma_A(G)$ G -də μ paylanmalarının sinfi olsun; μ -lər aşağıdakı xassələrə malikdirlər: X_j , $j = 1, 2, \dots, m$, $m \geq 2$ paylanmaları μ , qiymətləri G -dən olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $a_0 X_1$ və $a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ xətti formaları eyni qanunla paylanmışlar. $\mathfrak{M}(G)$ G qrupu üçün $A = \{a_j\}_{j=0}^m$ qarşılıqlı sadə ədədlərin –

$$a_0^2 = a_1^2 + \dots + a_m^2 \quad (2)$$

şərtini ödəyən ədədlərin məqbul çoxluqlarının çoxluğu olsun.

Klassik halda, əgər X_j , $j = 1, 2, \dots, m$ $\mathbb{R}^1$ -də eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $\{a_j\}_{j=0}^m$

(2) şərtini ödəyən heqiqi ədədlərdirsə və $a_0 X_1$ və $a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ xətti formaları eyni qanunla paylanmışlarsa, onda X_j Gauss paylanması ilə paylanmışdır (Poya – Linnik teoremi). Qruplar halında $I_A(G) = I(G) \cap \Gamma_A(G)$ olsun. Onda ixtiyari $A \in \mathfrak{M}(G)$ çoxluğu üçün G -də

$$I_A(G) * \Gamma^s(G) = \Gamma_A(G) \quad (3)$$

bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruri və kifədir ki, ya G qrupu (1) şəklində qrupa topoloji izomorf olsun, ya da ki, $G^{(p)} = \{0\}$ olsun, burada p sadə ədəddir (bax, [4]).

Əgər hər hansı $A \in \mathfrak{M}(G)$ üçün (3) bərabərliyi doğru olarsa, birləhli və xətti statistikanın eyni paylanmaya malik olduqları Gauss paylanmasının xarakterizasiyası mümkündür, deyilir. Belə G qruplarının sinfi aşağıdakı kimi təsvir olunur: hər hansı sadə p ədədi üçün C_G qrupunun p tərtib elementi yoxdur (bax, [5]).

$\Gamma_U(G)$ G -də Urbanik mənada Gauss paylanmaları çoxluğu olsun, yəni ələ μ paylanmalarının ki, bunlar ixtiyari $\bar{g} \in \bar{G}$ xarakteri ilə T -də Gauss paylanmasına çevrilirlər. Onda $\Gamma(G) \subset \Gamma_U(G)$. $\Gamma(G) = \Gamma_U(G)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruri və kifədir ki, ya $C_G \approx T$ ödənilsin və yaxud $\bar{G}$ qrupunun sıfır olmayan faktor qrupa qeyri – məhdud bölünən elementi olsun (bax, [6]).

Əgər $n_g = g_0$ tenliyi G -də ixtiyari istənilən qədər böyük natural n ədədləri üçün həll olunandırsa, $g_0 \neq 0$ elementi qeyri – məhdud bölünən element adlanır.

Əd.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [2] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 47–58; «Теория вероятн. и ее примен.», 1996, т. 41, в. 4, с. 901–06; [3] Фельдман Г. М., «Докл. АН СССР», 1988, т. 301, № 3, с. 558–60; [4] Фельдман Г. М., «Укр. матем. ж.», 1989, т. 41, № 8, с. 1112–18; «Укр. матем. ж.», 1990, т. 42, № 1, с. 139–42; [5] Фельдман Г. М., Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах, К., 1990; [6] Фельдман Г. М., «Studia Math.», 1982, в. 73, р. 81–86; [7] Рухин А. Л., «Матем. заметки», 1969, т. 6, № 3, с. 301–07; [8] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

XARAKTERİZASIYASI, PAYLANMALARIN « xarakterизация распределений; characterization of distributions » – paylanmalar çoxluğunun xassələrini bu paylanmaların hər hansı digər xassələri və onların xüsusi seçilmiş çevirmələrinin xassələrinin köməyiylə təsvir etmək üçün modeldir.

P. x.-na aid misallar. 1) Mənfii olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması mütləq kəsilməz paylanma olarsa və ixtiyari $x \geq 0$, $t > 0$ qiymətlərində

$$P\{\xi \geq x+t | \xi \geq x\} = P\{\xi \geq t\}$$

bərabərliyi ödənilərsə (keçmişin təsirsizlik xassəsi), onda ξ eksponensial qanunla paylanmışdır, yəni

$$P\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda t}, t \geq 0,$$

burada $\lambda > 0$ – hər hansı parametrdir.

2) Əgər ξ və η ehtimal təsadüfi kəmiyyətlərsə ki, $\xi + \eta$ və $\xi - \eta$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, onda ξ və η normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Xarakterizasiyanın ümumi modeli *Dayanıqlılıq (gü) stoxastik modelin və Dayanıqlılıq (gü) paylanmalarının xarakterizasiyasının* məqalələrində verilmişdir.

Bax, həm də *Xarakterizasiya teoremləri*.

Əd.: [1] Карац А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

XARİCETMƏ METODU « ИСКЛЮЧЕНИЯ МЕТОД; exclusion method » – bax, *Daxiletmə və xaricetmə metodu, Modeləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

XARİCİ ÖLÇÜ « внешняя мера; outer measure » – bax, *Ölçü.*

XƏTƏ « ошибка, погрешность; error » – bax, *Səhv, xəta, fərq; Sistemətik xəta, Standart xəta, Reprəzentativ xəta.*

XƏTƏ ehtimal olunan « **ошибка** вероятная; **probable error** » – bax, *Kvartil məsafə.*

XƏTƏ(sı) eksperimentin « **ошибка** эксперимента; **error of experiment** » – bax, *Statistik xəta, Təsədüfi xəta.*

XƏTƏ kvadratik orta « **ошибка** средняя квадратическая; mean root square **error** » – bax, *Kvadratik orta xəta.*

XƏTƏ sistemətik « **ошибка** систематическая; **systematic error** » – bax, *Sistemətik xəta.*

XƏTƏ standart « **ошибка** стандартная; **standard error** » – bax, *Standart xəta.*

XƏTƏ təsadüfi « **ошибка** случайная; **random error** » – bax, *Təsədüfi xəta.*

XƏTALAR İNTEQRALI « ошибок интеграл; error integral » – bax, *Ehtimali inteqral.*

XƏTALAR NƏZƏRİYYƏSİ « ошибок теория; theory of errors », Qauss xətalər nəzəriyyəsi, – riyazi statistikanın normal qanuna təbə seçmə üzərində işləmələrlə bağlı məsələsi ilə əlaqədar bir sıra klassik nəticələrinin ənənəvi adıdır. X. n.-nin əsasları K. Qauss (C. Gauss) tərəfindən işlənilmişdir. Bu nəzəriyyədə ingilis məktəbinin statistikləri U. Qosset (W. Gosset; Student, təxəllüsü Styudent, 1908) və R. Fişerin (R. Fisher, 1925) xidmətləri həlledici olmuşdur.

X. n. öz başlanğıcını fiziki məsələnin həllinin axtarışları ilə bağlı almışdır. Müşahidə olunan hər hansı fiziki parametrin əsl naməlum qiyməti (sabit qiyməti) kimi baxılan determinik α kəmiyyətinin ölçmə nəticələrinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ olduğu fərz olunur. Bu nəticələrin asılı olmayan identik sınaqlar seriyasında alındığı fərz olunur və α parametrinin naməlum əsl qiymətinə yaxın olan ehtimal qiymətinin qurulması tələb olunur ki, bu qiymət hər bir x_i nəticəsindən daha yaxşı olsun.

Bu məsələnin həlli üçün K. Qauss ehtimal modelindən istifadə etməyi təklif etmişdi və bu çərçivədə müşahidə nəticələri $x_1, \dots, x_n$ -lərə asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları kimi baxılır. Bu cür yanaşmada hər bir X_i müşahidəsini

$$X_i = a + b + \delta_i, i = 1, 2, \dots, n$$

cəmi şəklində ifadə etmək olar, burada a – ölçülən kəmiyyətin özü, $b = M(X_i - a)$ – cihazın metroloji qeyri – mükəmməlliyi ilə şərtləndirilən *sistemətik xəta* (meyl), δ_i *təsədüfi xətası* isə ayrı-ayrılıqda o qədər də mühüm olmayan və bir-birindən zəif asılı, nəzarət edilə bilməyən faktorların təsirindən yaranan xətdir; bu faktorlar cihazın eqrebinin titrəyişi, verilənlərin hesablanmasıda yol verilən və s. xətalər ola bilər, belə ki, bütün $\delta_1, \dots, \delta_n$ məğzən eyni qanunla paylanmış, riyazi gözləmələri $M\delta_i = 0$

olan, eyni bir dispersiyaya malik, yeni $\sigma^2 = D\delta_1 = \dots = D\delta_n$ naməlum dispersiyalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\delta_1, \dots, \delta_n$ təsadüfi xətalərinin yaranması səbəblərinə görə K. Qauss bu təsadüfi kəmiyyətlərin normal qanunla paylandığı kimi prinsipial fərziyyə qəbul edərək, bunu onunla əsaslandırmışdır ki, bir çox praktiki hallarda, bu təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün mərkəzi limit teoreminin tətbiq olunma şərtləri ödənilir. Bir qayda olaraq, parametrin etalon qiymətini ölçərək, uyğun düzəlişlər daxil etməklə, sistemətik xəta b -ni aradan qaldırmaq olur ki, bunun nəticəsində də sistemətik xəta olmayan ($b = 0$)

modelə baxmaq olur, yəni $X_i = a + \delta_i, i = 1, \dots, n$ olduğu halda. Yuxarıda qeyd olunan fərziyyələrə əsasən, bu halda $X_1, \dots, X_n$ müşahidələri üzrə qurulmuş doğruxaoxşarlıq funksiyası $p(X_1, \dots, X_n | a, \sigma^2) =$

$$p(X_1, \dots, X_n | a, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Müasir riyazi statistikada X. n.-nin belə ehtimal modeli asılı olmayan bərabərdeqiqlikli müşahidələrin Qauss modeli adlanır. X. n.-nin bu model çərçivəsində əsas məsələsi a və σ^2 üçün ən yaxşı statistik qiymətlərin qurulmasıdır. Asılı olmayan eynideqiqlikli müşahidələrin Qauss modelində

$$T = \left(\sum_i X_i, \sum_i X_i^2 \right)$$

statistikası kafi statistikadır. T kafi statistikasının funksiyaları olan

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ və } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$
 statistikaları

uyğun olaraq a və σ^2 üçün kvadratik riskin minimumu mənasında meylsiz statistik qiymətlərdir. $\bar{X}_n$ və S_n^2 statistik qiymətləri

stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\bar{X}_n$ a və $\frac{\sigma^2}{n}$

parametrlərlə normal qanuna, $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ olan χ^2 – paylanma qanununa tabedir.

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)/S_n$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ -ə bərabər Student paylanmasına tabedir, bu statistikadan praktikada a parametrinin naməlum əsl qiyməti üçün

interval statistik qiymətinin (etibarlı intervalın) qurulmasında istifadə olunur.

Asılı olmayan eynədəqiqlikli müşahidələrin Gauss modeli çox-seçimli və dəqiqliyi eyni olmayan müşahidələr üçün ümumiləşdirilir. X. n-nin ən tam inkişafı ən kiçik kvadratlar metodu da əks olunur; bu metodun özü də K. Gauss tərəfindən yaranmışdır.

Əd.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [2] Ливник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., Ошибок теория, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984.

XƏTALAR VEKTORU «ошибка вектор; vector of errors» – bax, *Faktor analiz*.

XƏTTİ APPROKSİMASIYA «линейная аппроксимация; linear approximation» – bax, *Xətti interpolasiya(sı) regressiya funksiyasının*.

XƏTTİ ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİY-YƏTLƏR «линейно независимые случайные величины; linearly independent random variables» –

$$P\{\omega: \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\omega) = 0\} = 1$$

bərabərliyinin yalnız bütün a_i -lər sıfıra bərabər olduqda ödənilməsinə təmin edən. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinə deyilir. Əgər $\{\xi_n(\omega)\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının ixtiyari sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlər toplusu X. a. o. t. k. olarsa, bu ardıcılıq *xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı* adlanır.

Əd.: [1] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, М., 1980.

XƏTTİ ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİY-YƏTLƏR ARDICILLIĞI «последовательность линейно независимых случайных величин; sequence of linearly independent random variables» – bax, *Xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər*.

XƏTTİ CƏBR stokastik «линейная алгебра стохастическая; stochastic linear algebra» – bax, *Stokastik xətti cəbr*.

XƏTTİ FİLTR «линейный фильтр; linear filter», xətti sistem – qiymətləri $L^2(\Omega)$ Hilbert fəzasından olan stasionar təsadüfi $\zeta(t) \in L^2(\Omega)$ prosesinin t parametrinin funksiyası kimi xətti çevirməsidir və aşağıdakı kimi təyin olunur:

Diskret zaman halında

$$Y(t) = A(\zeta(t)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a(t-s) \zeta(s)$$

və kəsilməz zaman halında

$$Y(t) = A(\zeta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-s) \zeta(s) ds,$$

burada $a(t)$ $(r \times k)$ – matrislərdir ki, diskret zaman halında

$$\sum_{t_1, t_2} a(t_1) B(t_2 - t_1) a^T(t_2) < \infty,$$

kəsilməz zaman halında isə

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1) B(t_2 - t_1) a(t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

şərtlərini ödəyirlər [r $Y(t)$ prosesinin dim. – ölçüsü, k $\zeta(t)$ – nin dim. – ölçüsüdür]. $B(t)$ isə $\zeta(t)$ prosesinin matris korrelyasion funksiyasıdır. Kompleksqiymətli $a(t)$ funksiyası impulsal keçid funksiyası (zaman xarakteristikası, filtrin «səda» (təsirə cavab) funksiyası) adlanır. $\varphi(\lambda)$ filtrin spektral (matris) xarakteristikası isə

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} a(t) \quad (\text{diskret zaman})$$

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} a(t) dt \quad (\text{kəsilməz zaman})$$

münasibətləri ilə bağlıdır.

$\zeta(t)$ prosesinin

$$\zeta(t) = \int e^{iu\lambda} \Phi(d\lambda)$$

spektral ifadəsindən istifadə edərək stasionar $Y(t)$ prosesini

$$Y(t) = \int e^{it\lambda} \varphi(\lambda) \Phi(d\lambda), \quad \varphi \in L^2$$

şəklində ifadə etmək olar. F_Y spektral ölçüsü (matris) $\zeta(t)$ prosesinin spektral ölçüsü F_ζ ilə $dF_Y(\lambda) = \varphi(\lambda) dF_\zeta(\lambda) \times \varphi^T(\lambda)$ münasibətilə bağlıdır. Bu ölçülər mütləq kəsilməz olduqları halda onların spektral sıxlıqları, analogi olaraq, uyğun münasibətlə ifadə olunur, $f_Y(\lambda) = \varphi(\lambda) f_\zeta(\lambda) \varphi^T(\lambda)$. Xüsusi halda, əgər $\zeta(t)$, $Y(t)$ skalyar proseslər olarsa, onda $f_Y(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_\zeta(\lambda)$ olur, burada $|\varphi(\lambda)|$ – filtrin λ tezliyində gücləndirmə əmsalı, $\arg \varphi(\lambda)$ – filtrin fazası, $|\varphi(\lambda)|^2$ – gücün gücləndirilməsi əmsalı adlanır.

Əgər $a(t) = 0$, $t < 0$ olarsa, X. f. fiziki mümkün (baş verəbilən) adlanır. Əgər stasionar proses standart, qeyri – korrelyar,

$$M\varepsilon(t) = 0, \quad M|\varepsilon(t)|^2 = s, \quad M\varepsilon(t)\varepsilon(s) = 0, \quad t \neq s$$

şərtlərlə verilən $\varepsilon(t)$ bəyaz küy ardıcılığından

$$Y(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a(t-s) \varepsilon(s)$$

fiziki mümkün xətti çevirməsi vasitəsilə alınarsa, o, xətti requlyar stasionar proses adlanır. $Y(t)$ -nin bu son ifadəsi Vold ayrılığı adlanır. Spektral ölçüsü F olan $Y(t)$ stasionar prosesi, yalnız və yalnız, o halda xətti requlyar prosesdir ki, F mütləq kəsilməz ölçü olsun və onun spektral sıxlığı

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty \quad (\text{diskret zaman})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(\lambda) \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} > -\infty \quad (\text{kesilməz zaman})$$

şərtlərini ödəsin. $[0, p]$ parçasından kənarda sıfıra bərabər, impulsal keçid funksiyası $a(t)$ olan X f.-in $\varepsilon(t)$ prosesinə tətbiqi

$$\zeta(t) = \sum_{s=t}^{t+p} a(t-s) \zeta(s)$$

prosesinin alınması ilə nəticələnir və bu halda bu proses p tərtib sürüşən orta proses adlanır, onun spektral sıxlığı

$$f_{\zeta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-i\lambda k} \right|^2$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $[0, q]$ parçasından kənarda sıfıra bərabər, impulsal keçid funksiyası olan X f.-in geniş mənada stasionar $Y(t)$ prosesinə tətbiqi $\varepsilon(t)$ beyaz küynün alınmasına səbəb olursa, onda belə $\zeta(t)$ prosesi q tərtib avtoregressiv proses adlanır. Məs.,

$$\zeta(t) + b_1 \zeta(t-1) + \dots + b_q \zeta(t-q) = \sigma^2 \varepsilon(t)$$

tənliyinin stasionar həlli belə proses o halda ola bilər ki, $Q(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_q z^q$ çoxhədlisinin bütün sıfırları vahid radiuslu dairedən kənarda yerləşsin və bu halda bu prosesin spektral sıxlığı

$$f_{\zeta}(\lambda) = \sigma^2 / 2\pi |Q(e^{-i\lambda})|^2$$

düsturu ilə ifadə olunur.

1-ci tərtib avtoregressiv proses Markov prosesidir. Avtoregressiv və sürüşən orta modellərinin kombinasiyası aşağıdakı tənliyə gətirir:

$$\zeta(t) + b_1 \zeta(t-1) + \dots + b_q \zeta(t-q) = \sum_{k=0}^p q_k \varepsilon(t-k).$$

Əgər $Q(z)$ çoxhədlisinin sıfırları vahid radiuslu dairedən kənarda yerləşsə, onda sonuncu tənliyin stasionar həlli vardır, bu həll (q, p) tərtib avtoregressiv sürüşən orta qarışıq prosesi, qısa şəkildə (q, p) tərtib ARSO – prosesi (rus. – APCC prosesi) adlanır.

Praktikada siqnalların ədədi filtrasıyada ARSO – prosesinin konkret əmsallarının seçilməsi hesabına alınan çoxsaylı X f.-lərdən tez-tez istifadə olunur (bax. [4] – [8]). Məs.,

$$\zeta(t) = \Phi(t-1) \zeta(t-1) + \varepsilon_1(t-1),$$

$$Y(t) = H(t) \zeta(t) + \varepsilon_2(t)$$

tənlikləri ilə təyin olunan Kalman filtri beləsidir. Məsələ $Y(t)$ -nin müşahidələri üzrə $\zeta(t)$ üçün ən yaxşı xətti statistik qiymətin alınmasından ibarətdir (bax. [7]).

Siqnalların ədədi filtrasıyası ilə bağlı çoxsaylı texniki və digər tətbiqlər üçün bax. [9], [10].

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Корольков В. С., [и др.] Спра-

вочник по теории вероятностей и математической статистике, 3 изд., М., 1987; [3] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [4] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980; [5] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [6] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [7] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [8] Отнес Р., Энноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [9] Рабинер Л., Голд Б., Теория и применение цифровой обработки сигналов, пер. с англ., М., 1978; [10] Handbook of statistics, v. 5, Time series in the time domains, Amst. – [a. o.], 1985.

XƏTTİ FUNKSIYA, meylsiz statistik qiymət almaq üçün «линейная функция, допускающая несмещенную оценку; estimable linear function» –

$$y = \Phi\theta + \varepsilon, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^N, \quad \theta \in \mathbb{R}^p,$$

$$M\varepsilon = 0, \quad \text{cov}\varepsilon = \sigma^2 I$$

xətti regression eksperimentinin naməlum parametrlərinin xətti forması $I^T\theta$ -dır ki, onun $A^T y$ forması vardır, $MA^T y = I^T\theta$. Əgər Φ regression eksperimentin matrisi maksimal $p \geq N$ rənginə malikdirsə, onda bütün $I^T\theta$ formaları belədir (qiymətləndirilən). $I^T\theta$ qiymətləndirilə biləndir və $\Phi I = 0$ şərtləri ekvivalentdir. Əgər $I^T\theta$ qiymətləndirilə biləndirsə və $\hat{\theta} = \Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y$ normal tənliklər sisteminin ixtiyari həllidirsə, onda $M^T \hat{\theta} = I^T \theta$, $D^T \hat{\theta} = \sigma^2 I^T (\Phi^T \Phi)^{-1}$ meylsiz statistik qiymətlər arasında minimaldır. Burada A^- , A -nın ixtiyari g – tersidir, yeni $AA^-A = A$ şərtini ödəyir. Məs., $y_j = \theta_0 + \theta_1 + \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, N$ olduqda və $y_j = \theta_0 + \theta_2 + \varepsilon_j$, $j = n+1, \dots, 2n$ olduqda münasibətlərlə verilən birləşdirilmiş model üçün $I_1\theta_1 + I_2\theta_2$ formasının qiymətləndirilməsi mümkündür $I_1 + I_2 = 0$ bərabərliyinə ekvivalentdir (belə forma kontrast adlandırılır).

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

XƏTTİ HİPOTEZ «линейная гипотеза; linear hypothesis» – riyazi statistikada istifadə olunan statistik hipotezdir: bu hipoteze görə n – ölçülü $N_n(a, \sigma^2 I)$ normal qanununun (I vahidi matrisdir) $s < n$ dim. – ölçülü $\Pi^s \subset \mathbb{R}^n$ xətti altfəzasında yerləşən riyazi gözleməsi a $r \leq s$ dim. – ölçülü $\Pi^r \subset \Pi^s$ xətti altfəzasındadır.

Riyazi statistikanın bir çox məsələlərinə kanonik şəkildə ifadə olunan X h.-in yoxlanılması məsələsi kimi baxmaq olur. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ komponentləri asılı olmayan, normal qanunla paylanmış təsadüfi vektor, $M\xi_i = a_i$, $i = 1, \dots, s$, $M\xi_i = 0$, əgər $i = s+1, \dots, n$ olarsa və $D\xi_i = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$ olsun. $a_1, \dots, a_s$, σ^2 naməlum parametrlərdir. Onda $a_1 = \dots = a_r = 0$,

$r < s < n$ olması haqqında irəli sürülən H_0 hipotezi kano-nik xətti hipotezdir.

Misal. $\eta_1, \dots, \eta_n$ və $\xi_1, \dots, \xi_m$ – $n+m$ sayda asılı olmayan uyğun olaraq, $N_1(a, \sigma^2)$ və $N_2(b, \sigma^2)$ normal qanunları ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun, a, b, σ^2 naməlum parametrlərdir. Onda $H_0: a=b=0$ hipotezi X. h.-dir, lakin $a_0 \neq b_0$ olduqda $a=a_0, b=b_0$ hipotezi X. h. deyildir.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

XƏTTİ İFADƏ OLUNABİLƏN TƏSADÜFİ PROSES « линейно представимый случайный процесс; linear filter of a random process » – bax, *Spektral nəzəriyyə*(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

XƏTTİ INTERPOLYASIYA(sı) regressiya funksiyasının « линейная интерполяция; функции регрессии; linear interpolation of a regression function » – hər hansı təsadüfi vektorun qiymətinin xətti proqnozunu qurmaq üçün müşahidə olunan təsadüfi vektorun xətti çevirməsinin nəticəsidir. X. i. regressiya funksiyasının xətti approksimasiyası da adlanır.

$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ təsadüfi vektorunun $X = (X_1, \dots, X_m)^T$ təsadüfi vektoruna regressiyası $M(Y|X)$ -in $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ funksiyası, $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ vasitəsilə verildiyi fərz olunur, yəni Y -in X -ə regressiyası tənliyi

$$M(Y|X) = f(X)$$

şəklindədir.

$\hat{Y} = f(X)$ statistikasına $f(x)$ regressiya funksiyasının köməyi ilə X təsadüfi vektorunun müşahidə olunmuş qiyməti üzrə Y təsadüfi vektorunun qiymətinin regression proqnozu deyilir. Əgər regressiya funksiyası $f(x)$ çox mürəkkəb olarsa, Y təsadüfi vektorunun qiymətini proqnozlaşdırmaq üçün $\hat{Y} = BX$ xətti çevirməsinin nəticəsi kimi təyin olunan, X vektoru üzrə $\hat{Y}$ -in xətti proqnozunu qurmaq olur, burada B , – $(m \times n)$ – dim. – ölçülü bütün düzbucaqlı matrislər çoxluğu $\mathfrak{M}$ -dən ixtiyari matrisdir. $\delta = Y - \hat{Y} = Y - BX$ fərqi X vektoru üzrə xətti B çəkili proqnoz xəttası adlanır. Xətti proqnozun keyfiyyəti onun ixtiyari $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ üçün

$$z^T M(\delta \delta^T) z = z^T M\{(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})^T\} z$$

düsturu ilə hesablanan kvadratik riski ilə təyin olunur. Y -in xətti proqnozu kimi ələ $\bar{Y}$ xətti proqnozunu seçmək lazımdır ki, onun kvadratik riski minimal olsun, yəni onun üçün

$$z^T M\{(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^T\} z \leq z^T M\{(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})^T\} z$$

bərabərsizliyi ixtiyari $z \in \mathbb{R}^n$ üçün ödənilsin. Göstərmək olur ki, $B = A$ olduqda $\bar{Y} = BX$ xətti proqnozu minimal kvadratik

riskə malikdir, bu halda regression əmsallar matrisi A $AM(XX^T) = M(YX^T)$ tənliyindən təyin olunur, $A \in \mathfrak{M}$.

$D = M(XX^T)$ dispersion matrisi cırlaşmayan olduğu halda, regression əmsalların ən yaxşı (kvadratik riskin minimumu mənada) proqnoz matrisi $A = M(YX)^T D^{-1}$ düsturu ilə verilir.

Beləliklə, ən yaxşı xətti proqnoz ələ regression əmsallar matrisi ilə təyin olunur ki, onun vasitəsilə, regressiya xətti olduğu halda, regressiya tənliyi yazılır. Bu mənada AX ifadəsi regressiya funksiyası $f(X) = M(Y|X)$ -in xətti approksimasiyası kimi anlaşılar. $f(X)$ regressiya funksiyasının belə X. i. nəticəsində

$\bar{Y} = AX$ proqnozu aşağıdakı xassələrə malik olur: 1) $M\delta = 0$ (n – dim. – ölçülü sıfır vektor); 2) $M(\delta X)^T = 0$ ($\mathfrak{M}$ -dən sıfır matris). İxtiyari regressiya halında Y vektorunu X. i. vasitəsilə $Y = AX + \delta$ cəmi şəklində ifadə etmək olar, AX proqnozu isə δ ilə korrelyar deyildir və $M\delta = 0$.

Bax, *Regression analiz*, *Xətti regressiya*, *Regressiya tənliyi*, *Regressiya*.

XƏTTİ KOD « линейный код; linear code » – bax, *Blok kod*.

XƏTTİ KORRELYASIYA « линейная корреляция; linear correlation » – X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında ələ korrelyasion asılılıqdır ki, $\eta_{Y|X}$ və $\eta_{X|Y}$

korrelyasion münasibətləri korrelyasiya əmsalının mütləq qiymətinə, yəni $|\rho|$ -ya bərabərdir, yəni regressiya əyrisi düz xətdir. Bir neçə təsadüfi kəmiyyət arasında X. k. regressiya səthi müstəvi olduğu halda analogi təyin olunur.

XƏTTİ KRİTERİ « линейный критерий; linear test » – regression eksperimentlərin planlaşdırılmasının əsas kriterilərindən biridir.

XƏTTİ RANQ STATİSTİKASI « линейная ранговая статистика; linear rank statistic » – bax, *Ranq statistikasi*.

XƏTTİ REQRESSION EKSPERİMENT « линейный регрессионный эксперимент; linear regression experiment » – bax, *Regression eksperiment*.

XƏTTİ REQRESSIYA « линейная регрессия; linear regression » – regressiya funksiyası xətti olan parabolik regressiyanın xüsusi halıdır. $X = (X_1, \dots, X_m)^T$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ təsadüfi vektorlar olsun. Əgər regressiya funksiyası $f(X) = M(Y|\bar{X})$, $f(X) = a + AX$ şəklində ifadə olunsay, Y -in X -ə regressiyası xətti regressiya adlanır, burada $a = MY - AMX$, $A = \|a_{ij}\|$, – $(n \times m)$ – dim. – ölçülü regression matrisidir. Əgər MX və MY uyğun olaraq, m və n dim. – ölçülü sıfır vektorlar olarsa, onda Y -in X -ə X. r.-sı halında regresiya funksiyası $f(X)$ olduqca sadə şəkildə olur: $f(X) = AX$. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, X. r. tənliyi həmişə

$$M(Y|X) = AX \quad (1)$$

şəklində olur, belə ki, əgər $M(Y|A) = a + AX$ olarsa,

$$Z = (1, X_1, \dots, X_m)^T, \quad B = \|a: A\|$$

olduğunu fərz edərək,

$$M(Y|X) = M(Y|Z) = BZ \quad (2)$$

tənliyini (2) şəklində almaq olur. (burada B matrisi A matrisinə soldan a sütununun əlavə olunması nəticəsində alınır). (1)-in ödənilməsinə fərz etmək, $MX = O_m$ və $MY = O_n$ olduğunu fərz etməyə eynigüclüdür, burada $O_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ sayda}})$. Daha sonra,

əgər Y -in X -ə regressiyası xətti olarsa, onda ümumi halda olduğu kimi Y təsadüfi vektorunun qiymətinin regression proqnozu $\hat{Y}$, $-\hat{Y} = AX$ düsturu ilə ifadə olunur və bu proqnozun xətası $\delta = Y - \hat{Y}$ aşağıdakı xassələrə malikdir: 1) $M(\delta|X) = M\delta = O_n$; 2) $M(X\delta^T|X) = M(X\delta^T) = O_{m \times n}$, burada $O_{m \times n}$ - bütün elementləri sıfıra bərabər olan $m \times n$ tərtib düzbucaqlı matrisdir (bu isə onu ifadə edir ki, proqnozlanacaq $Y = \hat{Y} + \delta$ vektoru riyazi gözlemləri sıfıra bərabər olan iki qeyri - korrelyar vektorun cəmi kimi ifadə olunur).

Regression A matrisinin ehtimali mənasını A -nın ödədiyi $AM(XX^T) = M(YX^T)$ tənliyi açıqlayır. Əgər X təsadüfi vektorunun dispersion matrisi $D = M(XX^T)$ cırlaşmayan olarsa, onda A regression matrisi $A = M(YX^T)D^{-1}$ düsturu ilə verilir.

X r. - X vektorunun müşahidə olunmuş qiyməti üzrə müşahidə olunmayan Y təsadüfi vektorunun qiymətinin ən sadə proqnozunun qurulması üçün praktikada tez-tez tətbiq olunan modeldir.

Bax, həm də *Regressiya tənliyi*, *Regressiya*, *Xətti interpolasiya(sı)* regressiya funksiyasının.

XƏTTİ REQULYAR STASİONAR PROSES «линейно регулярный стационарный процесс; linear regular stationary process» - bax, *Xətti filtr*.

XƏTTİ SİSTEM «линейная система; linear system» - bax, *Xətti filtr*.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT «линейная оценка; linear estimator» - müşahidə olunan *təsadüfi kəmiyyətlərin* xətti funksiyasıdır, bu funksiyadan analiz olunan stoxastik sxemin məlum parametrlərinin təqribi statistik qiyməti kimi (bu funksiyada müşahidə olunan kəmiyyətlərin konkret qiymətləri əvəz olunduqdan sonra) istifadə olunur. X , s. q.-lər sinfi «kompyuter erasına» qədər bu sinfə məxsus statistik qiymətlərin hesablanması sadəliyinə görə, parametrlərdən asılı statistik qiymətlər ailəsinin təyin olunması və sonradan da bu ailədən olan ən məqbul statistik qiymətin seçilməsinə görə mühüm rolə malik olmuşdur. Digər tərəfdən, X , s. q.-lər üçün, xüsusilə də, tutarlılıq, məylsizlik, effektivlik xassələrinin, uyğun etibarlı intervallların qurulması və s.-nin araşdırılma, sadəliklə statistik analiz olunur. Eyni zamanda, kifayət qədər geniş çərçivədə «ən məqbul» (məyyyəni menada) statistik qiymət axtarışı X , s. q.-lərin sinfindən olmayan statistik qiymətlərin tapılması ilə nəticələnmir. Məs., $Y = X\Theta + \varepsilon$ regression modelinin statistik analizi nəticəsində Θ parametri üçün statistik qiymətlərdən «ən məqbul» (ən kiçik kvadrlar metodu anlamında) olan $\hat{\Theta} = (X'X)^{-1}X'Y$ statistik qiymətidir və o, araşdırılan Y təsa-

düfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş qiymətlərinə görə xəttidir. Burada Y - araşdırılan, nəticələndirən təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunmuş y_i , $i = 1, \dots, n$ qiymətlərinin n - ölçülü sütun - vektorudur. X , - $n \times p$ - ölçülü (ranqı p -yə bərabər) x_i^k ,

$i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$ müşahidə olunan qiymətlərdən ibarət ele matrisdir ki, nəticələndirən Y təsadüfi kəmiyyəti p sayda təsadüfi olmayan faktor - arqumentlərdən asılıdır. Θ nəmulum Q_k parametrlərinin p - ölçülü sütun - vektoru, $k = 1, \dots, p$ və ε $M\varepsilon = 0$, $M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$ (I vahidi matrisdir) şərtlərini ödəyən qalıq komponentlərin n - ölçülü sütun vektorudur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT ən kiçik dispersiyalı «линейная оценка с наименьшей дисперсией; linear minimum variance estimator» - xətti regression $R(Y, \Phi, \sigma^2 w)$ eksperimentinin parametrlərinin xətti forması $I^T \hat{\Theta}$ -nin *məylsiz statistik qiymətidir*; baxılan eksperiment üçün müşahidələrin kovariasiya matrisi w müsbət müəyyən matrisdir (bu X , s. q. ən yaxşı xətti məylsiz statistik qiymət də adlanır). Ən kiçik dispersiyalı X , s. q. $\Phi I = 0$ olduqda mövcuddur və bu halda $I^T \hat{\Theta}$ -nin

ən kiçik kvadrlar statistik qiymətinə bərabərdir, burada $\hat{\Theta}$, - $\Phi^T w^{-1} \Phi = \Phi^T w^{-1} Y$ normal tənliklər sisteminin həllidir.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT məqbul «линейная оценка допустимая; admissible linear estimator» - bax, *Məqbul statistik qiymət xətti*.

XƏTTİ STOXASTİK DIFFERENSIAL TƏNLİK «линейное стохастическое дифференциальное уравнение; linear stochastic differential equation» - bax, *Stoxastik differensial tənlik*.

XƏTTİ STOXASTİK DIFFERENSIAL TƏNLİK; həllərin dayanıqlılığı «линейное стохастическое дифференциальное уравнение; устойчивость решений; linear stochastic differential equation; stability of solutions» - $t \rightarrow \infty$ olduqda *stoxastik differensial tənliyin* həllinin sıfıra yaxınlaşma şərtidir.

$\mathbb{R}^n$ -də İto X , s. d. t. üçün, yeni

$$dX(t) = B(t)X(t)dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t)X(t)dw_r(t) \quad (*)$$

şəklində tənlik üçün dayanıqlılığın determinə olunmuş nəzəriyyəsinin bir çox teoremlərinin analoqları doğrudur, burada B və σ_r , - $n \times n$ ölçülü matrislər, $X(t)$, - $\mathbb{R}^n$ -də vektor - sütun, $w_r(t)$ - asılı olmayan standart Viner prosesləridir. Əvvəla, məlumdur ki, (*) tənliyinin həllərinin momentləri adi differensial tənliklər sisteminə ödəyir. Buna görə də, p cüt olduğu halda X , s. d. t.-in p - dayanıqlılığı məsələsi determinə olunmuş

sistemin dayanıqlılığına getirilir. Daha sonra, (*) tənliyinin eksponensial p – dayanıqlılığı üçün zəruri (əmsallar üzərinə minimal şərtlərlə) və kafidir ki, x -ə görə bircins p tərtib $eV(t, x)$ funksiyası olsun ki, bu funksiya üçün bəzi $k_i > 0$ qiymətlərində

$$k_1 |x|^p \leq V(t, x) \leq k_2 |x|^p; \quad LV(t, x) \leq -k_3 |x|^p;$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \leq k_4 |x|^{p-1}; \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq k_4 |x|^{p-2}$$

şərtləri ödənilsin [L – (*) prosesinin doğuran differensial operatorudur].

t -dən asılı olmayan əmsallı (*) tənliyi üçün isbat olunmuşdur ki, ehtimala görə dayanıqlılıqdan olduqca kiçik $p > 0$ -lər üçün p – dayanıqlılıq alınır. Bu nəticə t üzrə tamamilə bircins olmayan müntəzəm dayanıqlı tənliklər üçün isbat olunmuşdur.

X. s. d. t.-lər üçün ehtimala görə dayanıqlılıq problemi $\mathbb{R}^n$ -də $|x|=1$ küresində köməkçi diffuzion prosesin invariant ölçüsü üzrə hər hansı funksiyanın integralının işarəsinin arəşdirilməsinə keçirilir. $n=2$ olduğu halda bu tənliyin əmsalları terminlərində ehtimala görə dayanıqlılıq üçün zəruri və kafi şərtləri almağa imkan verir (bax, [4]). Əmsalları bəzə küylərlə kükrəntilənən n – tərtib tənliklər üçün Raus – Qurvitsin kvadratik orta dayanıqlılıq kriterisinin analoqu məlumdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969.

XƏTTİ STOXAŞTİK PARABOLİK TƏNLİK ikinci tərtib « линейное стохастическое параболическое уравнение второго порядка; linear stochastic differential parabolic equation of second order » – ikinci tərtib xüsusi törəməli xətti stoxastik differensial tənlikdir, dissipativlik xassəsinə malik hər hansı stoxastik evolyusion tənliyə ekvivalentdir. İkinci tərtib X. s. p. t.-yə misal, məs., normalanmamış filtrasion sıxlıq üçün tənlik – Liuvill stoxastik differensial tənliyidir.

$$\begin{aligned} du(t, x) = & \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j}(t, x) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) u_{x_i}(t, x) + c(t, x) u(t, x) \right] dt + \\ & + \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, x) u_{x_j}(t, x) + h_i(t, x) u(t, x) \right] dw_i(t) \end{aligned}$$

stoxastik tənliyi üçün paraboliklik

$$\left\| a_{ij} - (1/2) \sum_i \sigma_{ii} \sigma_{jj} \right\|$$

matrisinin müsbət müəyyən olması xassəsinə ekvivalentdir, burada $w(t)$ – Viner prosesi, tənlikdəki əmsallar ölçülən məhdud funksiyalardır.

344 XƏTTİ

XƏTTİ TƏNLİK; Monte-Karlo metodu ilə həll « линейное уравнение; решение методом Монте-Карло; linear equation; Monte-Carlo solution of » – xətti tənliyin həllinin verilmiş funksional-larının statistik qiymətləri olan (meylsiz, asimptotik meylsiz) X_i , $i = 1, 2, \dots, m$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi modeləşdirilməsidir.

$$\phi = K\phi + f$$

şəklində tənliklərin həlli alqoritmləri daha çox yayılmışdır və riyazi fizikanın, iqtisadiyyatın və b. bir çox məsələlərində bunlardan istifadə olunur. K integral operatorudur. X_i statistik qiymətlərinin qurulması:

1) $\phi^n = K\phi^n + f$ – ardıcıl yaxınlaşmalarının bircins Markov zənciri ilə modifikasiyasının əlaqəsinə; X_i Markov zənciri trayektoriyalarının funksionallarıdır – Neyman – Ulam sxemi və onun ümumiləşmələri;

2) xüsusi törəməli tənliklərlə stoxastik differensial tənliklər arasında əlaqəyə;

3) xətti tənliklə təsvir olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bilavasitə ədədi simulyasiyasına əsaslanır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, М., 1975; [2] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения уравнений математической физики, М., 1984.

XƏTTİVARI MARKOV PROSESİ « линейчатый марковский процесс; Markov line-wise process » – ikikomponentli $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ Markov prosesidir, burada $X(t) = t - t_k$ birinci tip sıçrayış anı t_k -dan ($t_k \leq t < t_{k+1}$) sonra keçən müddətə uyğun komponent, $Y(t)$ isə hər bir (t_k, t_{k+1}) intervalında vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E} = \{i\}$ olan diskret bircins Markov prosesinə uyğun komponentdir. t_k anlarında ikinci komponentlərin dəyişiklikləri $\zeta(t_{k+1} - 0) = (y, i)$ vəziyyətindən ($0, j$) vəziyyətinə keçid ehtimalları P_{ij} -lərlə təyin

olunur. X. M. p.-ləri sinfi semi – Markov prosesləri sinfinin təbii ümumiləşməsidir. İlk ötürmə anının paylanması üçün stasionar ehtimalların hesablanması semi – Markov prosesləri üçün analoji xarakteristikaların hesablanmasından çətin deyildir. X. M. p. bəzi xidmət sistemlərinin və bərpalanabilən elementləri sistemlərin evolyusiyasını təsvir edir.

Əd.: [1] Беляев Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, в кн.: Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, Вильнюс, 1962, с. 309–23.

Xİ – DAĞILMA « хи – расходимость; chi – divergence » – bax. Informasion ölçü.

Xİ – KVADRAT KRİTERİ « хи – квадрат критерий; chi – square test », χ^2 -kriteri – statistik kriteridir.

$H_0: v = (v_1, \dots, v_k)$ – tezliklərin təsadüfi vektoru polinomial paylanma qanunu ilə paylanmışdır, – hipotezinin yoxlanılması üçün K. Pirson tərəfindən təklif olunmuşdur (K. Pearson, 1903).

n sayda asılı olmayan sınaqlar aparılır; hər bir sınaqda bir-birilə uyğun olmayan k sayda $E_1, \dots, E_k$ nəticələrindən yalnız və yalnız, biri baş verə bilər ($i \neq j$ olduqda $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, k}$). v_i – E_i nəticəsinin müşahidə olunduğu sınaqların

sayı olsun, $i = \overline{1, k}$. Bu halda v_i tezlikləri mənfə olmayan n_i qiymətlərini alır və $v = (v_1, \dots, v_k)$ vektoru polinomial paylanma qanununa tabedir, yeni

$$P\{v_1 = n_1, \dots, v_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

$$p_i = P(E_i), \quad i = \overline{1, k}.$$

p_i ehtimalları və v_i tezlikləri aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$$p_1 + \dots + p_k = 1, \quad v_1 + \dots + v_k = n, \quad k < n, \quad Mv_i = np_i,$$

$$Dv_i = np_i(1 - p_i), \quad \text{cov}(v_i, v_j) = np_i p_j, \quad i \neq j.$$

np_i hasilı v_i tezliklərinin orta və ya gözlənilən qiymətləri adlanır. Əgər p_i ehtimalları məlum olmazsa və bu ehtimalları $p_i = p_i^{(0)}, \dots, p_k = p_k^{(0)}$ ($p_i^{(0)} > 0, \sum_{i=1}^k p_i^{(0)} = 1$

şərtlərində) verilmiş qiymətləri alması hipotezi H_0 irəli sürülürsə, onda riyazi statistikada eksperiment nəticəsində v_i üçün alınmış qiymətlərlə bu hipotezin uzlaşdığını yoxlamaq məqsədilə statistika

$$X^2 = \sum_{i=1}^k (v_i - np_i^{(0)})^2 / np_i^{(0)} = -n + \sum_{i=1}^k v_i^2 / np_i^{(0)}$$

düsturu ilə verilən kriteriden istifadə etmək məqsədəuyğundur. H_0 hipotezinin yoxlanılması proseduru X^2 statistikasının eksperimental qiymətinin x kritik qiyməti ilə müəyyən bir qaydaya əsasən müqayisəsindən ibarətdir: əgər $X^2 \geq x$ olarsa, onda yoxlanılan H_0 hipotezi qəbul olunmur, əgər $X^2 < x$ olarsa, onda müşahidələrin nəticələrinin H_0 hipotezi ilə uzlaşmış olduğu qəbul olunur. x -in qiyməti ələ seçilir ki, H_0 hipotezi doğru olduğu halda, onun qəbul olunması ehtimalı verilmiş mühümlük ölçüsü α -nı ($0 < \alpha < 0.5$) aşmasın. Bundan əlavə, müəyyənlik üçün bir çox hallarda x -in diskret X^2 statistikasının

$$P\{X^2 \geq x | H_0\} \leq \alpha \quad (*)$$

berəbersizliyini ödəyən ən kiçik mümkün qiyməti olduğu hesab olunur. Verilmiş α -ya görə x -i hesablamaq üçün X^2 statistikasının dəqiq paylanmasından olduqca nadir hallarda istifadə olunur (bir qayda olaraq, yalnız k və n -in kiçik qiymətlərində), belə ki, bu paylanma çox mürəkkəb şəkildə ifadə olunur. Adətən, x x -in təqribi qiymətilə əvəz olunur; bu qiymət (*) bərabərsizliyinə analogi olan, sol tərəfi münasib təqribi ifadə ilə əvəzləmədən sonra alınmış bərabərsizliyin həllindən alınmış nəticə ilə təyin edilir. Belə approksimasiyalar **Pirson teoremi** ilə əsaslanır: əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda bütün gözlənilən $np_i^{(0)}$ tezlikləri sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda n , k və $p_i^{(0)}$ kəmiyyətlərinin dəyişməsindən asılı olmayaraq,

$$\sup_{|x| < \infty} |P\{X^2 \geq x | H_0\} - P_{k-1}(x)| \rightarrow 0 \quad ;$$

burada

$$P_{k-1}(x) = P\{\chi_{k-1}^2 \geq x\} = \frac{1}{2^{(k-1)/2} \Gamma((k-1)/2)} \int_x^\infty z^{(k-1)/2} e^{-z/2} dz$$

serbestlik dərəcəsi sayı $(k-1)$ -ə bərabər χ^2 - kvadrat paylanmanın ehtimal integralıdır (bax, [23]).

[11]-ə əsasən, əgər $\min_i np_i^{(0)} \geq 5$ olarsa, χ^2 - kvadrat approksimasiyasından istifadə etmək olar.

Ümumiyyətlə isə, bu teorem mühüm bir həl əhatə edir: sınaqların sayı n artdıqca $E_1, \dots, E_k$ hadisələrinin sayı k da artır, lakin sıfırdan fərqli $p_i^{(0)} = p_{in}^{(0)}$ ehtimalları n -dən asılıdır və $n \rightarrow \infty$ olduqda $k \rightarrow \infty$ olarsa, bu ehtimallar 0-a yaxınlaşa bilər. Lakin bununla belə $\min_i np_{in}^{(0)} \rightarrow \infty$ şərti ödənilərsə, onda

[2]-də göstərilirdi ki bu halda X^2 statistikasının limit paylanmasının normal approksimasiyası mümkündür və bu approksimasiya əsasən

$$\sup_{|x| < \infty} \left| \Phi\left(\frac{x - k + 1}{\sqrt{2(k-1)}}\right) - P\{X^2 < x | H_0\} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad k \rightarrow \infty;$$

burada $\Phi(\cdot)$ - standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır. Əgər $k > 30$, $\min_i np_{in}^{(0)} \geq 5$ olarsa, bu approksimasiyadan istifadə etmək məsləhətdir.

$\min_i np_{in}^{(0)} \rightarrow \infty$ şərti ödənilmədiyi halda X - k -nin tətbiq sahəsinə U. Kokran [11]-də və C. Yarnold [10]-də olduqca genişləndirmişlər. Məhz $k > 3$ olan sabit k üçün və n -in qeyri - məhdud artması ilə sıfırdan fərqli $p_m^{(0)}$ ehtimalları ələ dəyişir ki, $i = 1, 2, \dots, r$ qiymətlərində $np_m^{(0)} \rightarrow m_i$, $i = r+1, r+2, \dots, k$ qiymətlərində $np_m^{(0)} \rightarrow \infty$ olur; $m_1, m_2, \dots, m_r$ - müsbət ədədlərdir (bu belə anlaşılır ki, $i = 1, 2, \dots, r$ qiymətlərində $n \rightarrow \infty$ olduqda $p_m^{(0)} \rightarrow 0$ olur). Onda $H: p_i = p_{in}^{(0)}$ hipotezi limitdə doğru olduğu halda X^2 statistika $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_{i=1}^r (U_i - m_i)^2 / m_i + \chi_{k-r-1}^2$$

təsədüfi kəmiyyəti kimi paylanır, burada U_i - m_i parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. $U_1, \dots, U_r$,

χ_{k-r-1}^2 stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. X^2 - statistikasının limit yaxınlaşmasının bu approksimasiyasından $5r/k \leq \min_i np_m^{(0)} < 5$ və gözlənilən $np_m^{(0)}$ qiymətlərinin sayı i 5-dən kiçik olan r ədədinə bərabər olduğu halda istifadə olunur.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası $F(x, \theta)$ -in ($|x| < \infty$) kəsilməz funksiyalar ailəsi $\{F(x; \theta)\}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ ailəsindən olması haqqında müəkkəb H_0 hipotezini yoxlamaq məqsədilə analoji surətdə qurulmuş X - k. k. tipli kriteriden istifadə olunur. Bu halda həqiqi ox $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, ($x_0 = -\infty$, $x_k = +\infty$) nöqtələrilə k sayda ($k > m$) elə $(x_0, x_1], \dots, (x_{k-1}, x_k]$ yarımintervallarına bölünür ki, ixtiyari $i = 1, 2, \dots, k$ qiyməti üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$p_i(\theta) = \mathbf{P}\{X_i \in (x_{i-1}, x_i] | H_0\} > 0,$$

$p_1(\theta) + p_2(\theta) + \dots + p_k(\theta) = 1$ olsun və sonra bu yarımintervallar üzrə $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərini qruplaşdırmadan alınan $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ tezliklər vektoru müşahidə olunur. Tezliklər vektoru $\mathbf{v}$ üzrə Piron kvadratik forması –

$$X^2(\theta) = \sum_{i=1}^k [v_i - n p_i(\theta)]^2 / n p_i(\theta)$$

qurulur. H_0 hipotezini yoxlamaq üçün $X^2(\hat{\theta}_n)$ statistikəsindən istifadə olunur, burada $\hat{\theta}_n$ naməlum θ parametrinin xi – kvadrat minimumu metodu ilə hesablanmış statistik qiymətdir, yeni

$$X^2(\hat{\theta}_n) = \min_{\theta \in \Theta} X^2(\theta).$$

Əgər qruplama intervalları elə seçilmişlərsə ki, bütün p_i -lər sıfırdan fərqlidir ($p_i(\theta) > 0$), $\partial^2 p_i(\theta) / \partial \theta_u \partial \theta_v$ funksiyaları isə θ -ya görə kəsilməzdir ($i = 1, 2, \dots, k$; $u, v = 1, 2, \dots, m$) və $\|\partial p_i(\theta) / \partial \theta_u\|$ matrisinin rəngi m -ə bərabərdir, onda [19]-da Fişerin göstərdiyinə əsasən H_0 hipotezi doğru seçilmişsə, $X^2(\hat{\theta}_n)$ statistikasi $n \rightarrow \infty$ olduqda sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k - m - 1)$ olan xi – kvadrat paylanması ilə paylanır və bununla da, X - k. k. üzrə H_0 hipotezi yoxlanılır (bax, [1], [6], [8], [14], [17], [23]).

Əgər $X^2(\theta)$ statistikasında qruplaşma aparılmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üzrə maksimal doğruxşarlıq metodu ilə hesablanmış $\hat{\theta}_n$ statistik qiyməti yerinə qoyularsa [yeni $\hat{\theta}_n$, $-L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta)$, $f(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial x} F(x; \theta)$ doğruxşarlıq funksiyasının maksimum nöq-

təsidir], onda H_0 hipotezi doğru olduğu halda, $X^2(\hat{\theta}_n)$ statistikasi $n \rightarrow \infty$ olduqda limitdə

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{k-m-1}^2 + \mu_1 \xi_{k-m}^2 + \dots + \mu_m \xi_{k-1}^2$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə eyni olur (bax, [18]).

346 XI – KVADRAT

burada $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \sim \mathbf{M}_{\xi_1} = 0$, $\mathbf{D}_{\xi_1} = 1$ parametrlili normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\mu_1, \dots, \mu_m$

isə 0 və 1 arasında yerləşən və ümumiyyətlə də, naməlum parametrdən asılı ədədlərdir (bax, [18]). E. Leman və Q. Çernovun aldığı bu nəticədən (bax, [18]) belə qənaətə gəlmək olur ki, müəkkəb parametrik hipotezi yoxlama məsələsinə X - k. k.-nin tətbiqində maksimal doğruxşarlıq metodunun köməyi ilə hesablanan statistik qiymətlərdən istifadə edilməsi qeyri – standart (ümumi halda, naməlum parametrdən asılı olan) limit paylanmasının hesablanması ilə bağlı olan çətinliklər yaradır. Məhz R. Fişer [19], E. Leman və Q. Çernovun [18]-də aldığı nəticələrdən aydın oldu ki, Piron standart statistikasının limit paylanması dayanıqlı deyildir, naməlum parametrlərin qiymətləndirilmə metodlarından asılıdır və buna görə də, müəkkəb parametrik hipotezləri yoxlamaq üçün xi – kvadrat tipli ümumiləşmiş kriterilər adlanan kriterilərin qurulması məsələsi qarşıya çıxdı. Bu kriterilərin statistikaları Piron standart statistikasının özünəməxsus modifikasiyalardır ki, bunların limit paylanmaları xi – kvadrat paylanmaları sinfindəndir. Bu tipli kriterilər [3]-də: məs., normallığı, həmçinin yerindəyişmə və miqyas parametrlili ixtiyari kəsilməz paylanmaları yoxlamaq üçün: [13] və [16]-də seçmələrin birinsiliyi haqqında hipotezi yoxlama məsələsində, [15]-də müşahidələrin nəticələrinin Puasson binomial, mənfi binomial qanunla paylanması haqqında hipotezin yoxlanılması; [5], [7] – [9], [20]-də naməlum parametrlili ixtiyari $\sqrt{n}$ – tutarlı statistik qiymətlərinin istifadə edilməsində; [5], [12], [21]-də maksimal doğruxşarlıq metodu ilə hesablanmış statistikaların tətbiqində təklif olunmuşdur.

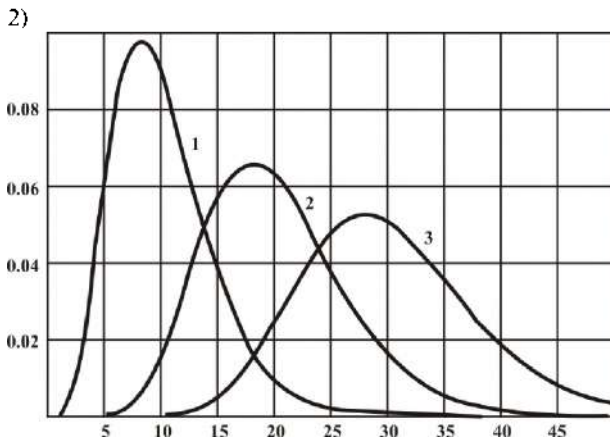
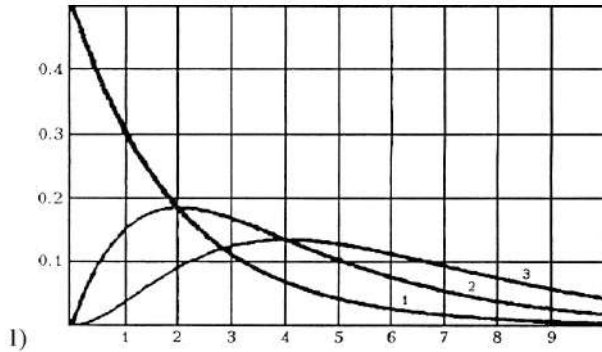
Xi – kvadrat tipli kriterilərin gücü və verilənlərin qruplaşma intervallarının sayının atılması məsələləri, məs., [2] – [5], [9], [14], [22], [23]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Чибриков Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 1, с. 3–20; [3] Никитин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 583–92; [4] Гринвуд П., Никитин М. С., в кн.: Проблемы теории вероятностных распределений, в. 10, Л., 1987, с. 49–71; [5] Frost F. C., «Centrum voor Wiskunde en Informatica», 1988, v. 48; [6] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [7] Джапаридзе К. О., Никитин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 886–88; [8] Lauter H., Pincus R., Mathematisch – statistische Datenanalyse, B., 1989; [9] McCulloch C. E., «Commun. Statist. P. A. Theory and Meth.», 1985, № 14 (3), p. 593–603; [10] Yarnold J. K., «JASA», 1970, v. 65, № 330, p. 864–86; [11] Cochran W. G., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, № 3, p. 315–45; [12] Никитин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 675–76; [13] Никитин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 2, с. 385–89; [14] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 375–78; [15] Боровков Л. Н., Мирвалев М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 481–94; [16] Боровков Л. Н., Никитин М. С., «Сердика. Българского математическо спасение», 1975, т. 1, с. 104–09; [17] Watson G. S., «Biometrics», 1959, v. 15, p. 440–67; [18] Chernoff H., Lehmann E. L., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, p. 579–86; [19] Fisher R. A., «J. Roy. Statist. Soc.», 1924, v. 87, p. 442–50; [20] Dudley R. M., в кн.: Banach center publication, v. 5, Warsz., 1979, p. 75–87; [21] Moore D. C., «JASA», 1977, v. 72, № 357, p. 131–37; [22] Kallenberg W. C. M., Oosterhoff J., Schriever B. F., «JASA», 1985, v. 80, № 392, p. 959–68; [23] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A guide to chi – square testing, N. Y., 1996.

XI – KVADRAT PAYLANMA « xi – квадрат распределение; chi – square distribution », χ^2 – paylanma, – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil) –

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-x/2} x^{n/2-1}$$

olan kəsilməz, $(0, \infty)$ -da təyin olunmuş ehtimal paylanmasıdır, burada n müsbət tam ədəd olub, sərbəstlik dərəcəsi sayı adlanır.



χ^2 - kvadrat paylanmanın sıxlıq funksiyası: 1) (1) $n = 2$; (2) $n = 4$; (3) $n = 6$ və 2) (1) $n = 10$; (2) $n = 20$; (3) $n = 30$

X - k. p. *qamma* paylanmanın xüsusi halıdır və onun bütün xassələrini ödəyir. *Pirson* paylanmaları ailəsinin III tipinin xüsusi halıdır. X - k. p.-nin paylanma funksiyası natamam (yanmıq) *qamma* - funksiyadır. X - k. p.-nin xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$ düsturu ilə ifadə olunur, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, n və $2n$ -ə bərabərdir. X - k. p.-lar ailəsi kompozisiya əməlinə görə qapalıdır.

Sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər X - k. p.-nin riyazi gözləmələri sıfır, dispersiyası vahidə bərabər eyni normal paylanmaya malik asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kvadratları cəminin paylanması kimi almaq olar, burada $\chi_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Normal paylanma ilə X - k. p.-nin bu əlaqəsi sonuncunun ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada oynadığı rolü təyin edir.

Bir çox paylanmalar X - k. p. vasitəsilə təyin olunur. Məs., komponentləri asılı olmayan, normal qanunla paylanmış $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ təsadüfi vektorunun uzunluğu - $\sqrt{\chi_n^2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması (bəzən *xi* - paylanma adlanır; bax.

Maksvell paylanması, Reley paylanması, Student paylanması, Fişer F - paylanma) belə paylanmadır. Bu paylanmalar, X - k. p. ilə birlikdə riyazi statistikada müşahidələrin normal qanunla paylanmış nəticələrinin müxtəlif statistikalarının seçimi paylanmalarını ifadə edir və onlardan interval statistik qiymətlərinin və statistik kriteriylərin təyin olunması üçün istifadə olunur. X - k. p. ilə əlaqədar xüsusilə seçilən, *Pirson* χ^2 - kvadrat statistikasına əsaslanan *xi* - kvadrat kriteridir.

Statistik hesablamalar üçün münasib sayılan X - k. p.-nin müfəssəl tərtib olunmuş cədvəlləri mövcuddur. n -in böyük qiymətlərində normal paylanma ilə aproksimasiyadan istifadə olunur: məs., *merkezi limit teoremine* əsasən $(\chi_n^2 - n)/\sqrt{2n}$ normalanmış təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

$n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\chi_n^2 < x\} \rightarrow \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(\sqrt{2n-1})$$

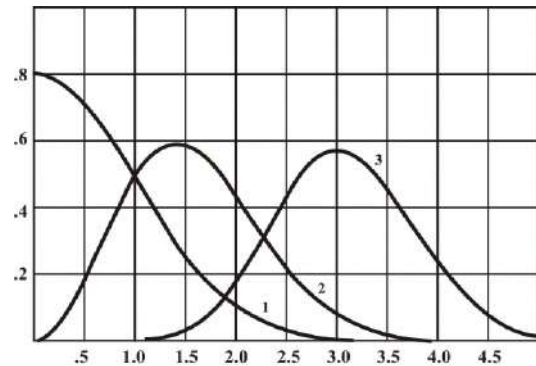
aproksimasiyası daha dəqiqdir, burada $\Phi(x)$ - standart normal paylanma funksiyasıdır. Bax, *Qeyri - merkezi xi - kvadrat paylanma*.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Lancaster Н., The chi-square distribution, N. Y., - [a. o.], 1969; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

χ^2 - PAYLANMA « xi - распределение; chi - distribution ». χ - paylanma, sərbəstlik dərəcəsi sayı n olan - paylanma sıxlığı

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2-1} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad n > 0$$

düsturu ilə təyin olunan (bax. şəkil), $(0, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır.



χ^2 - paylanmanın sıxlığı: (1) $n = 1$; (2) $n = 3$; (3) $n = 10$.

Xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sqrt{2}t)^k}{k!} \Gamma((n+k)/2)$$

düsturu ilə; momentləri:

$$m_k = 2^{k/2} \Gamma((n+k)/2) / \Gamma(n/2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Riyazi gözləməsi və dispersiyası, uyğun olaraq,

$$\sqrt{2} \Gamma((n+1)/2) / \Gamma(n/2) \text{ və } n + (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \right)^2$$

şəklindədir. Əgər $X_1, \dots, X_n$ standart normal qanunla paylanmış,

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ təsa-

düfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər X - p. ilə paylanır; $n=2$ olduqda X - p. *Reley paylanması*, $n=3$ olduqda isə *Maksvell paylanması*na gətirilir.

XİDMƏT QAYDASI «обслуживания дисциплина; queuing discipline» – xidmət kanalları üzrə tələblərin paylanması və xidmət sistemində (bax, *Növbə*) növbələrin təşkil olunmasını təyin edən qaydalar toplusudur. X. q. qaydanın işləməsi prosesinin məntiqi cəhətini əks etdirir. Xidmət sisteminin riyazi modellərində X. q., adətən, sonlu ehtimalı avtomat ilə təsvir olunur, yəni tələbin və cihazın seçilməsi yalnız xidmət kanallarında və növbədə olan tələblərin mövcud tərkibindən asılıdır. Daha müəkkəb sistemlərdə keyfiyyət xarakteristikaları da nəzərə alınır (gözləmə müddəti, xidmətlər və s.). Dar mənada X. q. kanalda xidmət başa çatdıqda növbədən tələbi seçmə üçün qaydadır. X. q.-ları: *düz* (növbə qaydasında), *invers* (tələblərin daxil olmasına əks qaydada), *təsadüfi* (tələb növbədən eyniehtimalı qanunla seçilən) kimi növlərə ayrılır.

XİDMƏT SİSTEMİ «обслуживания система; queuing system» – tələblərə (sifarişlərə, müştərilərə) xidmət üçün hər hansı m ($1 \leq m \leq \infty$) sayda kanaldan ibarət qurğudur; X. s.-nin riyazi nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyektidir. *Giriş axını* modeli, adətən, X. s. modelinə daxildir; giriş axınına hər hansı tələblər mənbəinin hasil etdiyi təsadüfi siqnallar ardıcılığı kimi göstərmək münasibdir. Əgər bu mənbəinin fəaliyyəti sistemin qalan hissəsinin işləməsindən asılı deyildirsə, X. s. *açıq xidmət sistemi* adlanır. Əksinə, *qapalı sistemlərdə* tələblər həmişə mövcud olub, vəziyyətlərin müxtəlif fazalarını keçirlər (xidmətolunma, gözləmə və s.). X. s. nəzəriyyəsinin nəticələrinin əksəriyyəti açıq sistemlərə aiddir (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; burada bunlardan ən sadəsi *klassik* adlandırılan sistemin təsnifatı verilmişdir). Qeyri – klassik X. s. nəzəriyyəsi 20-ci əsrin 50-ci illərində inkişaf etməyə başlamışdır.

Tətbiq üçün ən çox əhəmiyyət kəsb edən *prioritetli sistemlər* adlandırılan sistemlərdir. Bu sistemlərdə tələblər bir neçə sinfə: 1, 2, ..., m sayda sinflərə aid olur; i sinfindəki tələb $i+1, \dots, m$ sinflərindəki tələblərə görə prioritetlidir. Her bir sinfin tələbləri özünün növbəsini yaradır. Prioritetlərin əsas növləri mütləq və nisbi prioritetlərdir. *Mütləq prioritetdə* daha yüksək prioritetli sinfin tələbinin daxil olduğu anda daha aşağı prioritetli sinfin tələbinə xidmət dayandırılır və yeni daxil olmuş tələbə xidmət başlanır. Bütün prioritetli tələblərə xidmət olunduqdan sonra dayandırılmış xidmət davam etdirilir. Bu zaman bütün xidmətlərə ya yenidən başlanılır (təkrarlı mütləq prioritet), ya da ki, sərf olunmuş xidmət müddəti nəzərə alınır (yaddaşlı mütləq prioritet). *Nisbi prioritetdə* prioritetli tələbə daha aşağı prioritetli sinfin tələbinin cari xidməti qurtardıqdan sonra birinci xidmət edilir.

Növbə ilə bir-birini əvəz edən prioritetli X. s.-ndə bu və ya digər sinfə aid tələblərdən hansına üstünlük verilməsi xidmət prosesində dəyişir. Məs., verilən sinfin prioriteti sistemdə bu sinfdən tələb olana qədər saxlanıla bilər.

Dinamik prioritetlər növbə ilə bir-birini əvəz edən prioritetlər (rus. *чередующие приоритеты*) növüdür və belə prioritetdə tələblərin üstünlüyü cari şəraitin hər hansı kriterisindən asılı olaraq təyin olunur: məs., kanalın iş zonasında tələblər olduğu halda üstünlük gözləmə müddəti minimal resurslu tələbə verilə bilər.

Tələblərin ardıcıl surətdə bir neçə cihazdan keçdiyi *çoxfazlı sistemlər – şəbəkələrin xidmətinin* xüsusi halıdır (bax, *Xidmət sistemi* gözləməli, *birkanallı xidmətli*, *Xidmət sistemi* gözləməli, *çoxkanallı*, *Xidmət sistemi* imtinalarlı). X. s. nəzəriyyəsinin çoxsaylı tətbiqləri X. s.-nin spesifik modellərinin inkişafına səbəb olmuşdur: məs., kommunikasiyon sistemlərin; axın xətlərinin; ehtiyatları idarəetmə nəzəriyyəsinin; hesablama sistemlərinin; etibarlılıq nəzəriyyəsinin, müxtəlif nəqliyyat növlərinin və s.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [2] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979; [5] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979.

XİDMƏT SİSTEMİ *açıq «обслуживания система разамкнутая; open queuing system»* – bax, *Xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ *birxətli «обслуживания система однолинейная; single-server queuing system»* – bax, *Birxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ *birkanallı «обслуживания система одноканальная; single-channel queuing system»* – bax, *Birxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ *çoxxətli «обслуживания система многолинейная; multilinear queuing system»* – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ *çoxkanallı «обслуживания система многоканальная; multichannel queuing system»* – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ *çoxkaskadlı «обслуживания система многокаскадная; multicascade queuing system»* – bax, *Xidmət sistemi* imtinalarlı.

XİDMƏT SİSTEMİ; *dayanıqlılıq «обслуживания система; устойчивости; stability of a queuing system»* – bax, *Dayanıqlılıq (ğ)* xidmət sistemlərinin.

XİDMƏT SİSTEMİ *gözləməli, birkanallı «обслуживания система с ожиданием и одним каналом обслуживания; single-server queuing system»* – eyni zamanda xidmət olunacaq tələblərdən yalnız birinə xidmət mümkün olan sistemdə növbənin əmələ gəlməsi prosesinin riyazi modelidir. Düzgün qaydalı xidmətli $M|G|1$ sistemi nəzəriyyəsi (burada və sonra Kendall simvolikasından istifadə olunur; bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*) müəyyən olunmuş rejimdə A. Ya. Xinqin tərəfindən araşdırılmışdır (1932).

λ – giriş axını parametri, $\psi(s) = M \exp\{-s\eta\}$ olsun, burada η – tələbə xidmət müddətidir. Onda $\rho = \lambda \tau < 1$ olduqda tələbin gözləmə müddətinin stasionar paylanması Laplas çevirməsi –

$$\varphi(s) = (1-\rho) \left/ \left(1 - \frac{\lambda}{s} (1-\psi(s)) \right) \right., \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

Xinçin düsturu ilə təyin olunur, burada $\tau = \mathbf{M}\eta$.

Daha sonra, $\Gamma(s) = \mathbf{M} \exp \{-s\zeta\}$ olsun, ζ xidmət cihazının *məşğulluq periodudur*. ρ ixtiyari olduqda $\Gamma(s)$ funksiyası $\Gamma(s) = \psi(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))$ funksional tənliyinin $\operatorname{Re} s \geq 0$ halında yeganə məhdud həlli, $s > 0$ halında həqiqi həlli kimi bir qiymətli təyin olunur. *Daxil olunmuş Markov zəncirləri* metodu ilə müxtəlif *xidmət qaydalarında* $M|G|1$, $GI|M|1$, $E_k|G|1$,

$GI|E_k|1$ sistemlərinin stasionar və qeyri – stasionar xarakteristikaları tədqiq olunmuşdur. $GI|G|1$ sistemi təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsinin analitik metodları ilə öyrənilmişdir (bax, *Faktori-zasiya metodu*). Verilən sistemin fəaliyyəti və təsadüfi dolaşma arasında əlaqə Bixətli (birkanallı) *xidmət sistemi* məqaləsində verilmiş rekurrent münasibətin köməyi ilə təyin olunur.

Baxılan X. s.-ləri üçün nəticələrin əksəriyyəti *virtual gözləmə müddəti* metodu ilə tapılmışdır. Xidmət sisteminin analizinin asimptotik metodları da inkişaf etdirilmişdir. X. s.-lərinin *dayanıqlılıq* problemi də araşdırılmışdır. Giriş axını və xidmət müddəti sırf stasionar təsadüfi ardıcılıqlar olan sistemlər sinfi üçün erqodik nəzəriyyə inkişaf etdirilmişdir.

Əd.: [1] Климов Г. П., Стохастические системы обслуживания, М., 1966; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984; [4] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982.

XİDMƏT SİSTEMİ gözləməli, çoxkanallı «обслуживания система с ожиданием многоканальная; multiserver queueing system» – bir neçə kanalda (xətlərdə, cihazlarda) tələblərə eyni zamanda xidmət mümkün olan sistemdə növbə yaranma prosesinin riyazi modelidir. $GI|G|m$ sistemi bu növ klassik X. s.-dir (işarələmə *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi* məqaləsində verilmişdir). Bu sistemdə növbəni və gözləmə müddətini kəmiyyətcə xarakterizə edən proseslər çoxölçülü məhdud *təsadüfi dolaşmalarla* təsvir olunur. Belə ki, n -ci tələbi gözləmə müddəti w_n

$\min\{w_{n1}, \dots, w_{nm}\}$ kəmiyyətinə bərabərdir, burada w_{ni} – n -ci tələb daxil olduğu andan n -ci tələb də daxil olmaqla i -ci kanalı tələblərdən boşaldığı ana qədər keçən müddətdir. $\{w_{n1}, \dots, w_{nm}\}$ təsadüfi vektorları xidmət prosesinin daxil olunmuş Markov zəncirini yaradır.

a tələblərin daxilolma anları arasında intervalın orta müddəti, τ tələbə xidmət müddətinin orta qiyməti olsun. $\tau < ma$ olduqda, qeyd olunan təsadüfi ardıcılığın erqodik paylanması mövcuddur; gözləmə müddəti w_n -nin $n \rightarrow \infty$ olduqda özünün limit paylanması vardır. $\tau \geq ma$ olduqda, gözləmə müddətləri üçün ehtimala görə $w_n \rightarrow \infty$ münasibəti tələblərin daxil olma anları arasında intervallar a -ya bərabər və xidmət müddətləri ma -ya vahid ehtimalla bərabər olduğu hal istisna olunmaqla ödənilir.

$GI|G|m$ sisteminin əsas xarakteristikaları qapalı analitik şəkilə ifadə olunmur, lakin xidmət prosesinin, məs., ixtiyari zaman anında, xidmətə başlanan anda və xidmətin qurtardığı anda tələblər saylarının paylanmalarını kimi xarakteristikaları arasında erqodik

münasibətlər araşdırılmışdır. Xüsusi hallarda ($GI|M|m$, $GI|E_k|m$, $M|G|1$, $E_k|G|1$ və digər sistemlər üçün) analitik düsturlar vardır. Məs., $GI|M|m$ sisteminə hər hansı bir tələbin daxil olacağı ana qədər k sayda tələbin olduğu hadisəsinin stasionar ehtimalı p_k $k \geq m-1$ olduqda $p_k = A \omega^k$ düsturu ilə təyin olunur, burada A sabitdir, ω isə

$$\omega = \int e^{-(1-\omega)mx} dF(x)$$

tənliyinin köküdür, burada μ – xidmət müddətinin eksponensial paylanması parametri, $F(x)$ – tələblərin sistemə daxil olma anları arasında intervalın paylanma funksiyasıdır. $\rho = \tau/a < m$ olduqda $M|M|m$ sisteminə k sayda tələbin olduğu hadisəsinin stasionar ehtimalı π_k və gözləmə müddəti w -nin stasionar paylanması Kolmoqorov düsturları ilə verilir: xüsusi halda, $m=1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olarsa, $\pi_k = (1-\rho) \rho^{k-1}$, orta gözləmə müddəti isə $\rho \tau / (1-\rho)$ -ya bərabər olur. Çoxkanallı X. s.-ləri üçün əsas hesablama metodu xidmət sistemlərinin *statistik modeləşdirilməsidir*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Cooper R. B., Introduction to queueing theory, 2 ed., L., 1981.

XİDMƏT SİSTEMİ imtinalarlı «обслуживания система с отказами; queueing loss / balk / blocking system» – ehtimal *xidmət sistemidir* ki, bu sistemə tələb daxil olduğu anda onun daxil ola biləcəyi bütün kanallar (xətlər) məşğul olduğundan ona xidmət olunmur (sistem üçün bu tələb itir). İmtinalarlı X. s.-nin əsas xarakteristikası sistemin stasionar rejimində tələbə imtina ehtimalıdır. $M|M|m|0$ sistemi

ilk dəfə A. Erlanq (A. Erlang) və K. Palm (C. Palm) tərəfindən araşdırılmışdır (bax, *Erlanq düsturu*) və bu sistem *xidmət sistemi nəzəriyyəsinin* rabitə sistemlərinin hesablanması, xüsusilə də, telefon əlaqələri sistemlərinin çoxsaylı tətbiqləri üçün əsas olmuşdur. Digər klassik model qapalı xidmət sistemidir (bax, *Enqset düsturu*). Bu düsturların və onlara oxşar düsturların sistemin stasionar xarakteristikaları və imtina ehtimalı üçün ümumiləşmələri mövcuddur (bax, *Sevastyanov düsturu*, *Xidmət sistemi nəzəriyyəsi*; invariantlıq prinsipi). Ən sadə analitik şərtlərdə (keçmiş təsirsiz giriş axını, xidmət müddətinin üstlü paylanmalı olması kimi) Erlanq və Enqset sistemləri *doğum* və *ölüm prosesləri* metodları ilə araşdırılır.

Natamam girişli sistemlərin araşdırılmasında mühüm çətinliklər yaranır; belə sistemlər onunla xarakterizə olunur ki, sistemdə müxtəlif tipli tələblər olur və bu tələblərdən hər birinə girişlər mümkün olan kanallar çoxluğu uyğun tələb. Bu çoxluqlar bir qayda olaraq kəşşirlər; müxtəlif tipli tələblər üçün kanallara daxilolma prioritetləri verilir; bir kanaldan digər bir kanala o boşalan kimi tələblərin köçürülməsi mümkündür; başqa tələblər daxil olduqda bəzi tələblərə xidmətdən imtina da oluna bilər.

Çoxkaskadlı imtinalarlı X. s.-ləri də öyrənilir: bu halda tələb bir neçə sistemin (kaskadların) kanallarını eyni zamanda məşğul edə bilər. İmtinalarlı X. s.-nin riyazi modellərinin bu və

diger xüsusiyyətlərini real müəkkəb rabitə sistemlərindəki proseslər əks etdirir. İmtinalarlı X. s. nəzəriyyəsi real zaman miqyasında məsələlər həll edən hesablama kompleksinin işləmə modeli kimi də istifadə olunur. Təsadüfi prosesin sistemini təsvir edən, vəziyyətlərin çoxaldılmasının (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması) təqribi modellərinin istifadə olunmasına əsaslanaraq müəkkəb kommunikasiya şəbəkələrinin hesablanma nəzəriyyəsi yaradılmışdır (bax, [2]). İmtinalarlı X. s.-nin tədqiqatında kombinator – cəbri metodlar böyük rol oynayır. Məs., bu metodların köməyi ilə kommutasiyası müəkkəb strukturlu telefon şəbəkəsinə verilmiş sayda abonentlərin eyni zamanda qoşula bilməsinin prinsipial imkanı olduğunu araşdırmaq olur. Kanalların sayı çox olduqda imtina ehtimalının araşdırılmasının asimptotik metodları inkişaf etdirilmişdir. İmtinalarlı X. s. hesabı məsələlərinin həllində xidmət sisteminin *statistik modeləşdirilməsi* tətbiq olunur, adətən, bu prosesin vəziyyətlərinin təqribi və ya dəqiq çoxaldılmasından sonra edilir.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А., Массовое обслуживание в телефонии, М., 1968; [3] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

XİDMƏT SİSTEMİ qapalı « обслуживания система замкнутая; closed queuing system » – bax, *Xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ natamam girişli « обслуживания система неполнодоступная; partially available queuing system » – bax, *Xidmət sistemi* imtinalarlı.

XİDMƏT SİSTEMİ tam girişli « обслуживания система полностью доступная; fully accessible queuing system » – bax, *Xidmət sistemi nəzəriyyəsi*.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ « обслуживания систем теория; queuing theory », kütləvi xidmət nəzəriyyəsi, növbə nəzəriyyəsi – xidmət sistemlərinin rəşional qurulmasına tətbiqən *xidmət sistemlərində* təsadüfi prosesləri öyrənən tətbiqi nəzəri – ehtimali fəndir. A. Ya. Xinqin X. s. n.-nin praktiki istiqamətini belə müəyyən etmişdi: «Elmdə, insanların praktiki fəaliyyətində və məişətdə hər gün ele vəziyyətlər yaranır ki, hər hansı xüsusi xidmət növünə xidmət üçün kütləvi tələbat yaranır, lakin bu hallarda xidmət göstərən vahidlərin sayı məhdud olduğundan bunlar daxil olan tələbləri onlar daxil olduğu anlarda yerinə yetirə bilmir... əslində nəzəriyyə qarşısında belə bir əsas məsələ yaranır: xidmət göstərən vahidlərlə və xidmət keyfiyyəti arasında mümkün ola bilən dəqiqliklə qarşılıqlı asılılığı təyin etmək» (bax, [1]).

X. s. n. üzrə ilk işləri A. Erlanq (A. Erlang) 20-ci əsrin 20-ci illərində görmüşdür, bu işlər telefon sistemlərinin hesablamalarına həsr olunmuşdur. A. Ya. Xinqin 1932 – 33-cü illərdə *birkanallı gözləməli xidmət sistemlərinin* əsas məsələlərini həll edir. A. N. Kolmoqorov 1931-də *çoxkanallı, gözləməli xidmət sistemi* araşdırmışdı. B. V. Qnedenko 1934-də dəzgahların dayanıb işləməməsi məsələsini həll etmişdir. A. Ya. Xinqin X. s. n.-nin elmi əsaslarını yaratmış və onun əsas məsələlərinin həllinin analitik metodlarını göstərmişdir (1955; bax, [1]).

X. s. n.-nin ixtiyari məsələsində *xidmət sistemi* – adətən, real sistemlərdən götürülmüş, intuitiv anlaşılan terminlərin köməyi ilə təsvir olunan riyazi modeli verilir. Bu modelə xidmət olunaçaq tələblərin (sifarişlərin, istehsalçıların) giriş axınının təsviri; hər biri eyni zamanda bir tələbə xidmət göstərən xidmət kanallarının (cihazların, xətlərin) təsviri; tələbə xidmət müddətinin və *xidmət qaydasının* paylanmalarının təsviri daxildir. Bir qayda

olaraq, tam girişli sistemlərə – ixtiyari tələb ixtiyari boş kanalda xidmət olunan sistemlərə baxılır. Araşdırılan işlərin əksəriyyətində tələblərə xidmətin onların daxil olduğu qaydada aparıldığı fərz olunmuşdur (növbədəki tələbin inversiya qaydası ilə və təsadüfi seçilməsi qaydası da tədqiq olunmuşdur). Sistem kanallarının sayı m -dən asılı olaraq, sistemlər birkanallı ($m = 1$) və çoxkanallı ($m > 1$) sistemlərə ayrılır. Sonsuz saylı kanallarlı sistemlərə də baxılır. Əgər tələbin daxil olduğu anda bütün kanallar məşğul olarsa, onda bu tələb gözləmə üçün r yerli qurğuya göndərilir. Bu yerlərin hamısı boş olmadıqda tələbdən imtina olunur (yeni tələb itir). Ən geniş yayılmış sistemlər gözləməli ($r = \infty$) və imtinalarlı ($r = 0$) sistemlərdir.

Xidmət sisteminin analitik araşdırılma imkanları giriş axını və tələbin xidmət müddətinin paylanması haqqında analitik fərziyyələrdən olduqca asılıdır. 20-ci əsrin 50-ci illərinin ortalarından başlayaraq D. Kendallın (D. Kendall) təklif etdiyi sistemlərin təsnifatı ilə əlaqədar işlər çox yayılmışdır. Xidmət sistemi $A|B|m|r$ simvolları ilə kodlanır, burada m və r yuxarıda təyin olunmuş kəmiyyətlər, A – giriş axını simvolu, B – xidmət müddəti paylanmasının simvoludur. $A|B|m|\infty$ əvəzinə, adətən, $A|B|m$ simvolu yazılır. $A=GI$ (qısaltılmış – *general independent*) simvolu keçmiş məhdud təsirli giriş axınıni ifadə edir, $B=G$ (*general* sözündən) simvolu xidmət müddətinin ixtiyari paylanmaya malik olması kimi anlaşıılır. $A|B|$ əvəzinə M, E_k ,

D simvolları onu ifadə edir ki, tələblərin daxil olunma anları arasında intervallar (xidmət müddəti) uyğun olaraq, *üstlü paylanma, Erlanq paylanması* ilə paylanır. Bütün hallarda fərz olunur ki, tələblərin daxil olma anları arasında intervallar – Z_n -lər və xidmət müddətləri η_n -lər küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$M|M|m|r$ sistemlərinin elementar nəzəriyyəsi *doğum və ölüm proseslərinin* köməyi ilə qurulur. $v(t)$ t anında sistemdəki tələblərin (xidmət olunan və gözləmə qurğusunda olan) sayı olsun. Onda $v(t)$ $k > m$ olduqda $\lambda_k = \lambda$, $k \geq m + r$ olduqda $\lambda_k = 0$, $k \leq m$ olduqda $\mu_k = k\mu$, $k > m$ olduqda $\mu_k = m\mu$ parametrləri doğum və ölüm prosesidir, burada λ – giriş axınının parametri, μ – xidmət müddətinin eksponentsial paylanmasının parametri. Əgər $r < \infty$ və ya $\mu = \infty$ olarsa, t anında sistemdə k sayda tələbin olması ehtimalı $p_k(t)$ $t \rightarrow \infty$ olduqda erqodik paylanma əmələ gətirən π_k limitlərinə yığılır. Xüsusi halda, imtinalı sistem üçün bu ehtimal üçün *Erlanq düsturu* ödənilir. Giriş axınının ilk N tələbi üçün imtinaların erqodik orta qiymətinə bərabər imtina ehtimalı $N \rightarrow \infty$ olduqda π_{m+r} -ə bərabərdir. İmtinalı sistemlər üçün bu xarakteristika çox mühümdür. $r = \infty$ olduğu halda erqodik paylanma yalnız $\rho < m$ halında mövcuddur, burada $\rho = \lambda/\mu$; $v(t)$ stasionar proses olduğu halda sistemdə tələblərin orta sayı

$\rho \uparrow m$ olduqda ∞ -a yaxınlaşır. Bu nəticənin prinsipial tətbiqi əhəmiyyəti vardır; tələbin və xidmətin müntəzəm olmadığı şəraitdə sistemin $\lambda = m\mu$ tənliyi əsasında planlaşdırılması mümkün olmur, tələbatlarla müqayisədə sistemin müəyyən imkanları ehtiyatının olması zəruridir. $\rho < m$ olduqda növbə kəmiyyəti $v(t)$ -nin və gözləmə müddətinin erqodik paylanmaları Kolmoqorov düsturları ilə verilir (bax, *Xidmət sistemi gözləməli, çoxkanallı*). Müdaxilə olunmuş Markov zəncirləri metodu

(1953-də D. Kendall tərəfindən kəşf olunmuş) X. s. n. məsələləri dairəsini xeyli genişləndirdi: aydın oldu ki, Markov zəncirlərinin köməyi ilə xidmət sistemlərindəki bir çox Markov prosesləri olmayan prosesləri tədqiq etmək mümkündür. Bu metodu faktiki olaraq ilk dəfə A. Ya. Xinqin 20-ci əsrin 30-cu illərinin əvvəlində $M|G|1$ sistemi nəzəriyyəsini qurduqda tətbiq etmişdir.

X. s. n. aşağıdakı istiqamətlərdə inkişaf edir:

1. Struktur – mürəkkəb sistemlərin analitik tədqiqi. Bu istiqamət texnikanın, fizikanın, əməliyyatlar tədqiqinin mürəkkəb sistemlərinin riyazi nəzəriyyəsinin verilməsi zəruriliyi ilə sıx bağlıdır. Xidmət sistemlərini təsvir edən təsadüfi proseslərin (vəziyyətləri sayı hesabı Markov proses, semi – Markov prosesi və bunlarla bağlı xəttvari proses və bəzi başqa proseslərin) əsas sxemləri işlənmişdir və bu sxemlər çərçivəsində stasionar paylanmalar kimi interpretasiya olunan xidmət prosesinin əsas xarakteristikaları üçün, vəziyyətlər çoxluğunda qalma müddətinin paylanması üçün düsturların çıxarılış alqoritmləri vardır. Əsas etibarilə xidmət prosesini təyin edən təsadüfi kəmiyyətlərin (xidmət müddəti, tələblərin daxilolma anları arasında intervallar) xarakteristik funksiyalarının rəasional ifadələr şəklində düsturları geniş yayılmışdır. Belə düsturlar bixidmətedici kanallı prioritetli xidmət sistemlərinin bir çox sinfi üçün göstərilmişdir.

Informasiyanın EHM-da yenidən işlənilmə modeli olan dinamik prioritetli xidmət sistemləri öyrənilmişdir. EHM yaddaşının layihələndirilməsi ilə bağlı olaraq, gözləmə yerlərinin sayı məhdud olan prioritetli sistemlər araşdırılmışdır (bölünmüş və ya ümumi növbəli). *Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsi* məsələləri ilə bağlı etibarsız kanallı xidmət sistemləri də öyrənilir: kanalın imtinası prioritetli tələbin daxil olması kimi interpretasiya olunur. Tələblərin daxil olma anları arasındakı intervallar və xidmət müddətləri semi – Markov – asılıqlı sistemlər tədqiq olunur. Təkrarlanan çağırışlarlı sistemlərə və məşğulluq intervalının başlanğıcında xidmət olunan tələb xidmət müddətinin xüsusi paylanması ilə xarakterizə olunan sistemlərə bir sıra işlər həsr olunmuşdur. Xidmət qaydaları adi növbəlikdən fərqli sistemlərin fəaliyyətinə baxılır.

Klassik sistemlərdə prosesin erqodiklik şərti intuitiv aydın olduğu halda (bax, *Xidmət sistemi gözləməli çoxkanallı*) daha mürəkkəb sistemlər üçün bu şərtin çıxarılışı olduqca mürəkkəbdir. Belə sistemlərə xarakterik misal müxtəlif texnoloji proseslərin modeli olan blokrovkalı ardıcıl xidmət sistemidir. Qeyri – klassik, böyük tətbiqi əhəmiyyəti olan xidmət sistemlərdən zaman məhdudiyyətli sistemi qeyd etmək olar. Məhdudiyyətlərin olduğu ümumi sxemi ondan ibarətdir ki, gözləmə müddəti x -ə bərabər olduğu halda tələbə kanalda paylanma funksiyası $F(z|x)$ olan təsadüfi zaman ərzində xidmət olunur.

Belə sistemlərin erqodiklik şərtləri araşdırılmış, stasionar paylanma üçün tənliklərin aşkar həlli halları göstərilmişdir. X. s. n. məsələlərinin geniş sinfi xidmət sistemləri nəzəriyyəsində sərhəd məsələləri metodu ilə həll olunur (bax, *Xidmət sistemi gözləməli, birkanallı*).

2. Asimptotik nəticələr. Sistemin mürəkkəbləşməsi ilə, hətta onun xarakteristikaları üçün aşkar ifadələri prinsipial cəhətcə çıxarmaq mümkün olduqda belə, bu ifadələr analiz və hesablamalar üçün az yararlı olur. Buna görə də, parametrlərin bu və ya digər kritik qiymətlərində xidmət proseslərinin öyrənilməsinə uyğunlaşdırılmış X. s. n.-nin asimptotik metodları xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Ən tam nəzəriyyə yüklənmiş xidmət sistemləri üçün inkişaf etmişdir.

Diffuzion yaxınlaşma metodunun inkişafı, Yu. V. Proxorova məxsus olan $GI|G|1$ sistemləri ilə bağlı təsadüfi dolaşmaların asimptotik analizindən başlayan nəzəriyyə A. A. Borovkovun topalayıcı (korreksiyalayıcı) limit teoremləri ilə təkmilləşdi, bu teoremlər isə xidmət sistemi strukturuna nəzərən müəyyən limit münasibətlərinin invariantlığını aşkar etmişdi. A. A. Borovkov kanallar sayı çox olan sistemlərdə xidmət prosesinin aproksimasiyaları üzrə nəticələr də almışdır. Orta xidmət müddətinin tələblərin daxil

olma anları arasında orta zaman intervalına nisbətində kiçik kəmiyyət kimi baxılan kiçik yüklənməli sistemlər də tədqiqat üçün praktiki maraq obyektləridir. Belə sistemlər yüksək etibarlı sistemlərin təqribi hesablanma metodlarının qurulmasının əsasını təşkil edir (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi, Ehtiyatda saxlama*). X. s. n. məsələlərinin həllinin ədədi metodları da inkişaf etməkdədir.

Xidmət sisteminin araşdırılmasında güclü hesablama metodu kiçik parametr metodudur. Sistemin bəzi xarakteristikalarının digərlərinə nisbətən kiçik olduğu müşahidə olunduqda (məs., yüksək etibarlı sistemdə orta bərpa müddəti orta fasiləsiz işləmə müddəti ilə müqayisədə kiçikdir) «süretli» prosesləri «asta» proseslərdən ayırmaq mümkündür və bu da modelin olduqca sadələşməsinə səbəb olur. Kiçik parametr metodu nəzəriyyəsinə X. s. n. metodu kimi tətbiq edilən mühüm əhəmiyyətli nəticələr «çoxaltma» ideyalarına aid olmuşdu (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin çoxaldılması, Xidmət sistemi imtinalı*).

3. İnvariantlıq problemi. Xidmət sistemində giriş axınının çıxış axınına (tələblərə xidmətlərin sona çatdığı anlar çoxluğu) çevirən təsadüfi operator kimi baxmaq olar. Sistem vasitəsilə çevrilməyə nəzərən axının ehtimal xassələrinin invariantlığı olduqca mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Məs., $M|G|∞$ sistemi orta xidmət müddəti sonlu olduğu halda ən sadə axını eyni parametrlili ən sadə axına çevirir. $ρ ≤ m$ olduqda $M|M|m$ sistemi də bu xassəyə

malik olur. Axının invariantlıq xassəsi xidmət şəbəkələrinin (yeni elə sistemlərin ki, bu sistemlərdə müəyyən kanallarda xidmət olunan tələblərin digər kanallara ötürülməsi təmin olunsun) analizinin əsası sayılır.

Digər problem – xidmət sistemləri nəzəriyyəsidə invariantlıq problemi – xidmət xarakteristikalarının yalnız müəyyən edici təsadüfi kəmiyyətlərinin orta qiymətlərindən asılı olduğu şərtlərin aydınlaşdırılması ilə bağlıdır. B. A. Sevastyanovun fundamental nəticəsi (bax, *Sevastyanov düsturu*) ilə başlanan invariantlıq (qeyri – həssaslıq) nəzəriyyəsi ümumiləşmiş sxemlər sırasında zəruri və kafi şərtlərin alınmasına qədər başa çatdırılmışdır, digər tərəfdən isə bu nəzəriyyənin xidmət sistemlərinin xarakteristikaları üçün sadə analitik düsturların çıxarılması üçün imkanlarla əlaqəli olduğu aşkar edilmişdir (o cümlədən, etibarlılıq nəzəriyyəsi proseslərini təsvir edən sistemlərin xarakteristikaları üçün də).

4. Hədəslər axınının araşdırılması. Giriş axını nəzəriyyəsi A. Ya. Xinqin tərəfindən (1955) yaradılmışdır. Xüsusilə də, o, keçmiş təsirsiz giriş axınının və məhdud keçmiş – təsirsiz giriş axınının təsvirini müfəssəl surətdə vermişdir. *Palm funksiyalarını* daxil etmiş və *Palm düsturunu* əsaslandırılmışdır. Giriş axını nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafı axınların konstruktiv (ikinci dəfədən Puasson, semi – Markov axınları və s.) sxemlərinin tam bir sırası üçün yenidən işlənilmə və axınların ümumi siniflərinin yaranması ilə bağlı olmuşdur (bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*).

Axınlar müasir yanaşma nişanlanmış nöqtəvi proseslər bazasında erqodik X. s. n.-ni qurmağa imkan verir, buna görə isə müəyyən edici ardıcılıqların asılı olmamazlığı haqqında klassik fərziyyəni stasionar təsadüfi ardıcılığın olduqca ən ümumi xassə ilə əvəz etmək kifayətdir. Qeyd olunan sxem çərçivəsində aşağıdakılar əsaslandırılmışdır: intensivliyin qorunub saxlanması qanunu. Bu qanuna ən sadə misalı A. Ya. Xinqin 1932-də göstərmişdir ($M|G|1$ sistemində tələbin daxil olduğu andan əvvəlki anda tələblər sayının paylanması ilə tələbin xidmətindən bilavasitə sonrakı anda tələblər sayının paylanmasının üst-üstə düşməsi); $L = λw - L_{ittl}$ düsturu, burada L – növbənin orta qiyməti (xidmət olunan tələblər sayılmadan), $λ$ – giriş axını parametri, w – tələbin orta gözləmə müddətidir; A. Ya. Xinqinin «stasionar növbənin əsas qanunu» adlandırdığı xassə belə ifadə olunur: ən

sadə axın halında, müəyyən olunmuş rejimdə ixtiyari zaman anında xidmətlə bağlı prosesin (sistemdə tələblərin sayı, virtual gözləmə müddəti və b.) paylanması tələbin daxil olduğu andaki paylanma ilə üst-üstə düşür.

5. Erqodik teoremlər, dayanıqlılıq haqqında teoremlər. Xidmət sistemlərinin araşdırılmasında erqodiklik, adətən, erqodik Markov zəncirləri nəzəriyyəsinə alınır. Bir çox hallarda $M u s - t a f a t e o r e m i$ tətbiq olunur: əlaqəli vəziyyətləri və keçid ehtimalları p_{ik} olan qeyri – periodik hesabı Markov zəncirinin erqodikliyi üçün kafi şərt, ola bilsin ki, sonlu sayda qiymətlərdən başqa bütün i -lər üçün hər hansı mənfi olmayan $\{f_k\}$ ardıcılığı üçün
$$\sum_k (f_k - f_i) p_{ik} \leq -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$
 münasibətinin ödənilməsidir. Bu halda bütün i -lər üçün
$$\sum_k f_k p_{ik} < \infty$$
 olur. Çoxöl-

çülü Markov prosesləri təsvir olunan sistemlər üçün erqodiklik Sevastyanov teoremi ilə təyin olunur (1956).

Daxil olunmuş *bərpa prosesli* sistemlərin ($M | G | m | r$ tipli) erqodikliyi bərpa prosesləri metodu ilə araşdırılır. $x(t)$ sistemlə bağlı proses, $f(x)$ mənfi olmayan və $|x| \rightarrow \infty$ olduqda $f(x) \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən funksiya olarsa, xidmət sisteminin $t \geq 0$ olduqda $M f(x(t))$ -nin məhdudluğu tipli dayanıqlılıq xassəsi sınaq funksiyaları metodu ilə araşdırılır (bax, *Dayanıqlılıq teoremi; sınaq funksiyaları metodu*). Xidmət sistemi xarakteristikalarının müəyyənədi (idarəedici) ardıcılıqlara nəzərən kəsilməzliyinin öyrənilməsinə qeyd olunan metodlardan başqa metrik yanaşma da effektiv surətdə tətbiq olunur. *Yeniləşdirici hadisələr* metodu erqodiklik, dayanıqlılıq və kəsilməzlik problemlərinə yeganə bir yanaşma müəyyənləşdirmiş oldu. Bax, *Dayanıqlılıq teoremi* xidmət sistemi nəzəriyyəsinə.

6. Təsadüfi proseslərin konstruktiv sinifləri. Bir çox məsələlərin həllində, xüsusilə də, xidmət sistemlərinin modeləşdirilməsində konstruktiv verilən (yeni təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı vasitəsilə rekurrent düsturların köməyi ilə ifadə olunan) təsadüfi proseslərin qurulması məqsəduşğundur. Məs., bir çox qeyri – klassik xidmət sistemlərini və bütün klassik xidmət sistemlərini təsvir etməyə imkan verən model – *hissəvi xətti proses* sxemi buna misaldır. Bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi; əlavə dəyişənlər metodu*.

7. X. s. n.-nin analitik və ədədi metodları. Bu metodlar xidmət sistemlərinin nəticə etibarilə sonda optimizasiyasında istifadə olunur; idarəolunan Markov zəncirlərinə və idarəolunan Markov proseslərinə əsaslanan bu optimizasiya metodları intensiv surətdə, xüsusilə də, texniki sistemlərin istismarının optimizasiyasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Х и н ч и н А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н., Введение в теории массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [3] К л и м о в Г. П., Стохастические системы обслуживания, М., 1966; [4] Б о р о в к о в А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [5] Г н е д е н к о Б. В., [и др.,] Приоритетные системы обслуживания, М., 1973; [6] И в ч е н к о Г. И., К а ш т а н о в В. А., К о в а л е н к о И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982; [7] К л е й н р о к Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; *asimptotik metodlar « асимптотические методы теории обслуживания систем; asymptotic methods of queueing theory » – xidmət sistemlərinin öyrənilməsi*

üçün asimptotik qanunların (o cümlədən, ehtimal nəzəriyyəsinin limit qanunlarının) istifadəsidir. Araşdırma istiqamətlərini şərti olaraq ayırmaq olar, məqsəd – xidmət proseslərini onlar üçün məqbul yaxınlaşmaların tapılması yolu ilə öyrənməkdir.

1. Sistemin bu və ya digər xarakteristikasının paylanmasını (adətən, stasionar) təsvir edən aşkar düsturlar və ya tənliklərin asimptotik analizi. Belə analiz üçün belə aşkar düstur və ya tənliklərin varlığı və bundan başqa, sistemin özünün hər hansı kritik vəziyyətinə qeyri – məhdud yaxınlaşması fərz olunur. Məhz bu istiqamətdə yüklənmiş vəziyyətli birkanallı sistemlərin işləmə tərzı haqqında ilk nəticələr alınmış (bax, [1]), xidmət kanallarının sayı böyük olduqda imtinalarlı sistemlərin işləmə tərzı öyrənilmişdir (bax, [2], [3]). Bu zaman nisbətən sadə misallarda qeyd olunan qanunauyğunluqlar aşkar düsturların olmadığı daha ümumi şərtlərlə belə doğru olur.

2. İkinci istiqamət daha geniş olub, sistemi xarakterizə edən (yenə də sistemin özünün hər hansı kritik vəziyyətinə yaxınlaşdığı halda) təsadüfi proseslərin özlərinin limit yaxınlaşmalarının öyrənilməsi ilə bağlıdır. İsbat olunmuşdur ki (bax, [4]), qeyd olunmuş yüklənmiş sistemlərdə yaranan proseslərin əsasında Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipi durur. Bu prinsip imkan verir ki, təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğruduğu proseslər Viner prosesinin köməyi ilə təqribi təsvir edilsin.

İkinci istiqamətin əsas məqsədi toplayıcı limit teoremlərinin müəyyənləşdirilməsi və bu toplayıcı asimptotik qanunların (məs., növbənin normalanmış uzunluğunun diffuzion prosese yığılması haqqında qanun) ödənilməsi üçün ən geniş və ümumi şərtlərin aydınlaşdırılmasından ibarətdir. Bu istiqamətin metodları 1-ci bəndin metodlarından olduqca fərqlidir və bunlar, bir qayda olaraq, proseslər üçün ümumi yığılma teoremlərinə əsaslanır.

Kanalların sayı böyük, giriş axını intensiv olduğu halda çoxkanallı xidmət sistemlərinin öyrənilməsi deyilənlərə bir misaldır. Giriş axınının intensivliyi və kanalların sayı arasında münasibətdən asılı olaraq iş rejimi üç cür olur: «kritiküstü» (kanalların sayı asimptotik olaraq sonsuzluğa ekvivalentdir), «kritikaltı» (bütün kanalların demək olar ki, hamısı həmişə məşğuldur) və «kritik» – bu iki rejim arasındakı hal. Bu şərtlərdə məşğul xətlər sayını təsvir edən prosesin asimptotik cərəyanı tamamilə öyrənilə bilər. Limit prosesləri kimi olduqca mürəkkəb təbii proseslər alınır və bu zaman qeyd olunan üç rejimdə aşkar olunan qanunauyğunluqlar olduqca müxtəlif olur.

X. s. n.-də limit prosesləri kimi ən çox, demək olar ki, diffuzion Markov prosesləri yaranır. Diffuzion proseslərə yığılmanı öyrənən xidmət proseslərinin onların konkret təbiəti ilə bağlı olmayan ən ümumi riyazi modellərinə baxaraq, onları üçölçülü $\zeta(t) = \{e(t), r(t), s(t); t \geq 0\}$ təsadüfi prosesi kimi təyin etmək olar, burada bütün komponentlər mənfi deyildir, monotondur və $q(t) = e(t) - r(t) - s(t) \geq 0$ xassəsinə malikdirlər. $e(t)$ komponenti t anına qədər sistemə daxil olan çağırışların sayı, $r(t)$ komponenti t anına qədər imtina olunan çağırışların sayı, $s(t)$ isə sistemin xidmət göstərdiyi çağırışların sayıdır. Sistemin, adətən, «növbə prosesi» $q(t)$ və «imtinalar prosesi» $\pi(t) = r(t)/e(t)$ kimi xarakteristikaları öyrənilir.

Real sistemlərdə e, r, s komponentlərinin birgə paylanması onların «lokal» xassələrinin (xidmət sisteminin paylanması və s.) və həmçinin, xidmət proseslərinin təbiətini təyin edən bəzi alqoritmlərin göstərilməsi yolu ilə verilir. Asimptotik yanaşma nöqtəyi – nəzərdən $\zeta(t)$ prosesini nisbətən böyük zaman intervallarında e, r, s komponentlərinin artımlarının xassələrinin köməyi ilə xarakterizə etmək kifayət edir. Bu artımlar üzərinə qoyulan şərtlər, adətən, sadə və yoxlanılması mümkün olan formaya malik olur.

Bu zaman alınan nəticələrin ümumiliyi şübhəsiz ki, asimptotik yanaşmanın üstünlüyünü sübut edir (bax, [5]).

3. Üçüncü istiqamət bir qədər xüsusi xarakter daşıyır və bu istiqamət **dayanıqlılıq teoremləri** (və ya kəsilməzlik teoremləri) ilə bağlıdır. Mahiyyət etibarilə, bu halda da proseslər üçün limit teoremlərinə, lakin «toplayıcı» deyil, «individual» limit teoremlərinə baxılır. Məhz xidmət sistemlərinin verilən konkret sistmə yaxın olması (sistemi xarakterizə edən bu və ya digər prosesin paylanması mənada yaxın olması) üçün şərtlər müəyyənləşdirilir. «Dayanıqlılıq» termini onunla bağlıdır ki, dayanıqlı teoremlər sistem parametrlərinin məruz qaldığı kiçik dəyişikliklərdə stasionar xarakteristikaların kiçik dəyişiklikləri haqqında nəticə çıxarmağa imkan yaradır.

Dayanıqlılıq haqqında tədqiqatlar bir-birindən olduqca fərqli bir neçə müxtəlif yanaşmalarla aparılır. Məsələn, nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsi (bax, [6]), ümumi metrik yanaşma (bax, [7]), Lyapunov sınaq funksiyaları metodu (bax, [8]), «yaxınlıq nöqtələrinin» qurulma metodu (bax, [9]), yeniləşmələr metodu (bax, [5]).

4. Daha bir yanaşmanı da qeyd etmək lazımdır. Bu yanaşma müərkəb xidmət sistemləri (şəbəkələri) üçün məhlul modellərinin (limitlərin) qurulması ilə bağlıdır (bax, [10] – [11]). Məs., $q(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))$ 1, ..., d xidmət stansiyalarında növbələr uzunluqları vektoru və $N = \sum_{i=1}^d q_i(0) \rightarrow \infty$ olsun.

$N \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{1}{N} q(uN)$ proseslər ardıcılığının limiti olan $\zeta(u) = (\zeta_1(u), \dots, \zeta_d(u))$ prosesinə məhlul limiti deyilir. $\zeta(u)$ prosesləri əksər hallarda determinik, hissəvi xətti olub, birləşmiş qablar sisteminde məhlulun həcmnin dinamikasını təsvir edir və bu proseslər $q(t)$ proseslərinin erqodiklik şərtlərinin öyrənilməsində çox faydalı olur.

Asimptotik metodların daha geniş anlamında giriş axını üçün limit teoremlərini, erqodik teoremləri, stasionar paylanmaların axtarılması məsələlərini və b. bu metodlara aid etmək olar.

Əd.: [1] Kingman J. F. C., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1961, v. 57, p. 902–04; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 458–68; [4] Прохоров Ю. В., «Лит. матем. сб.», 1963, т. 3, № 1, с. 199–205; [5] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [6] Franken P., «Operationsforschung und Math. Stat.», 1970, № 2, S. 9–23; [7] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 834–47; [8] Калашников В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 1, с. 89–105; [9] Калашников В. В., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1980, с. 52–56; [10] Dai J. G., «Ann. Appl. Probab.», 1995, v. 5, p. 49–77; [11] Рыбко А. Н., Столяр А. Л., «Проблемы передачи информации», 1992, т. 28, с. 3–26.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; əlavə dəyişənlər metodu « обслуживания систем теория; метод дополнительных переменных; queueing theory; supplementary variables method » – *xidmət sisteminin* $\xi(t) = (v(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \dots)$ çoxölçülü Markov prosesi şəklində işləməsi modelinin qurulması metodudur, burada $v(t)$ – əsas dəyişəndir (sistemin makrovəziyyəti), $\xi_i(t)$, – t anında baş verən əməliyyatların yerinə yetirilməsini xarakterizə edən əlavə dəyişənlərdir. Məs., $M[G]n$ xidmət sistemi üçün (ən sadə giriş axını halında

gözləməyə malik n – xəttli sisteminin və xidmət müddəti paylanması ixtiyarı olduğu halda) $\xi(t)$ Markov prosesini aşağıdakı kimi təyin etmək olar: $\xi(t) = (v(t); \xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$, burada $v(t)$ – məşğul xətlərin sayı, $\xi_i(t)$, – i -ci xətt məşğul olduğu halda bu xətdə xidmətə başlanılan andan keçən müddətdir; əks halda $\xi_i(t) = 0$. Metod D. R. Koks (D. R. Cox, 1955) tərəfindən əsaslandırılmış, sonra isə B. A. Sevastyanovun işlərində inkişaf etdirilmişdir (bax, Sevastyanov düsturu).

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; invariantlıq problemi « обслуживания систем теория; проблема инвариантности; queueing theory; insensitivity problem/invariance problem », qeyri-həssaslıq problemi, *xidmət sisteminin* xarakteristikaları üzərinə qoyulan şərtlərin tapılması məsələsidir, bu şərtlər ödənildikdə vəziyyətlərin stasionar ehtimalları ilkin paylanma funksiyalarının növündən asılı olmayıb, sistemin orta xarakteristikaları terminlərlə təyin olunur. Bu sahədə ilk nəticələr Erlang sistemi üçün alınmışdır (bax, [1]). İ. N. Kovalenko etibarlılıq nəzəriyyəsinin olduqca ümumi sxemi üçün xidmət müddətinin paylanma funksiyasının növünə nəzərən vəziyyətlərin stasionar ehtimallarının invariantlığının zəruri və kafi şərtini almışdır (1961). Tələblərin daxilolma anları arasında intervallların asılı olduğu və xidmət müddətlərinin də asılı olduğu xidmət sisteminin vəziyyətlərinin stasionar ehtimallarının qeyri – həssaslığının cəbri kriteriləri də alınmışdır.

Əd.: [1] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİNİN STATİSTİK MODEL-LƏŞDİRİLMƏSİ « обслуживания система статистическое моделирование; statistical simulation of queueing systems » – bax, *Statistik modelləşdirilməsi* (si) xidmət sistemlərinin.

XİDMƏT ŞƏBƏKƏSİ « обслуживания сеть; queueing network » – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan *xidmət sistemlərinin* (qovşaqların, stansiyaların) toplusudur. Qarşılıqlı təsir qovşaqlar arasında çağırışların (sifarişlərin, tələblərin) hərəkət marşrutlarının; xidmət qaydalarının; xidmət müddətlərinin və s. verilməsi ilə təyin olunur. X. ş.-ləri açıq və qapalı olur.

Açıq X. ş. onunla xarakterizə olunur ki, bu şəbəkələrə xaricdən daxil olan çağırışlar axını vardır və çağırışlar şəbəkəni tərk etmək imkanına malikdirlər. Qapalı X. ş.-ndə bu elementlərin heç biri yoxdur, bunlarda qeyd olunmuş sayda çağırışlar daima sirkulyasiya edir.

Ən sadə qapalı şəbəkələr aşağıdakı kimi təsvir olunur. N sayda stansiyadan (qovşaqdan) ibarət xidmət sisteminde həmişə n sayda sifariş olur. j nömrəli xidmət sistemi paylanma funksiyası $G_j(x) = P\{\tau_j < x\}$, $j = 1, \dots, N$ olan asılı olmayan $\{\tau_j^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots$ (xidmət müddətlərinin) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı ilə idarəolunan gözləməli birkanallı sistemdir. Çağırışların bir stansiyadan digərinə keçməsi keçid ehtimallarının N tərtib $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ ayrılmayan matrisi ilə təyin olunur. i -ci stansiyada xidmət olunmuş çağırış xidmət olunmaq üçün π_{ij} ehtimalı ilə j -ci stansiyaya göndərilir. Əgər stansiya məşğul olarsa, çağırış növbəyə dayanır. Beləliklə, şəbəkənin təsadüfi proses kimi evolyusiyasının paylanması n , Π , G üçlüyü və şəbəkənin başlanğıc vəziyyəti ilə

tam mənası ilə təyin olunur, burada $G = (G_1, \dots, G_N)$ paylanma funksiyaları vektorudur.

Ən çox öyrənilmiş X. ş.-ləri xidmət müddətləri eksponensial qanuna tabe olan, yeni $G_j(x) = 1 - e^{-\mu_j x}$ olduğu şəbəkələrdir. Bu halda $q(t) = [q_2(t), \dots, q_N(t)]$ prosesi Markov prosesi olur, burada $q_j(t)$, j -ci stansiyada t anında növbənin uzunluğu, $q_1(t) = n - q_2(t) - \dots - q_N(t)$. Bu proses üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{q(t) = k\} = p_n(k), \quad k = (k_2, \dots, k_N), \quad (1)$$

limiti həmişə mövcuddur, burada

$$p_n(k) = c \prod_{i=1}^N (\pi_i / \mu_i)^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^N k_i = n,$$

c – normalayıcı vuruq, π_i , – Π matrisinin finit ehtimallarıdır (bax, [1] – [4]).

Ən sadə açıq X. ş.-ləri eyni Π matrisi və G vektoru olduğu halda, qapalı X. ş.-lərindən $\tau_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ intervallarından bir j , $j \geq 2$ sayılı stansiyaya π_j ehtimalı ilə daxil olan çağırışların giriş kanalına malik olması ilə fərqlənir. j -ci stansiyada xidmət olunmuş çağırış hər dəfə şəbəkəni π_{j1} ehtimalı ilə tərk edir.

Digər $N - 1$ sayda stansiyalarda (2-dən N -ciyə qədər) xidmət qapalı şəbəkədəki kimi aparılır. Belə açıq şəbəkənin evolusiyası Π , G cütleri və başlanğıc şərtlərlə tam mənası ilə təyin olunur. Açıq şəbəkəni «qapalı şəbəkə» kimi ifadə etmək olar ki, bu şəbəkədə $q_1(t) = \infty$ olduğu fərz olunur. Əgər

$G_j(x) = 1 - e^{-\mu_j x}$ olarsa, onda $q(t)$ prosesi qapalı şəbəkədə olduğu kimi Markov prosesi olacaqdır. Əgər bundan əlavə bütün $j \geq 2$ üçün

$$\pi_1 / \mu_1 > \pi_j / \mu_j \quad (2)$$

berabersizliyi ödənilərsə, onda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{q(t) = k\} = p(k) \quad (3)$$

limiti vardır, burada

$$p(k) = c \prod_{i=2}^N (\pi_i \mu_1 / \pi_1 \mu_i)^{k_i},$$

c – normalayıcı vuruqdur (bax, [1] – [4]).

(1) – (3) nəticələrinə analogi nəticələri çoxkanallı sistemlərdən ibarət şəbəkələr üçün də almaq olar (bax, [1] – [4]). (1), (3) limitlərinin varlığını $G_j(x)$ -in eksponensial olması fərziyyəsini qəbul etmədən də, (2) şərtini $\pi_1 M\tau_1 > \pi_j M\tau_j$, $j \geq 2$ berabersizlikləri ilə əvəz etməklə isbat etmək olar. Bu şərt ödənildikdə, $n \rightarrow \infty$ olarsa, $p_n(k) \rightarrow p(k)$ yığılmasını da, yeni qapalı şəbəkələrin açıq şəbəkələrə məlum mənada yığılmasını da isbat etmək olar (bax, [9]). Digər asimptotik nəticələr də alınmışdır (bax, [8], [9]).

Təbiiqədə təsadüf olunan X. ş.-ləri daha mürekkəb təbiətə malik ola bilər – çağırışlar müxtəlif tipli olur (hər bir tipe uyğun

xidmət müddətinin özünün paylanması olur). xidmət qaydaları başqa cür ola bilər, bir qovşaqdan digər qovşağa keçid ehtimalları daha uzaq keçmiş tarixindən asılı ola bilər və s. X. ş. nəzəriyyəsi *xidmət sistemi nəzəriyyəsinin* yeni, sürətli inkişaf edən bölməsidir. Bu nəzəriyyə 20-ci əsrin 60-cı illərində yaranmış, 70-ci illərə qədər informatika problemləri ilə əlaqədar formalaşmışdır; bu problemlər aparaturanın işləməsinin ehtimalı – zaman xarakteristikalarının təyini məsələləri, hesablama sistemlərinin proqram təminatı məsələləri, informasiya ötürmə şəbəkələri, EHM şəbəkələri və b. məsələləri ilə yaranmış problemlərdir. Xidmət sistemi nəzəriyyəsinin artıq mövcud olan metodları ilə yanaşı X. ş. Nəzəriyyəsində yeni ehtimal modelləri və məsələlərini doğuran özünəməxsus spesifik yanaşmalardan istifadə olunur (bax, [10] – [13]).

Əd.: [1] Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979; [2] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979; [3] Kelly F. P., Reversibility and stochastic Networks, N. Y., 1979; [4] Башарин Г. П., Толмачев А. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 21, М., 1983, с. 3–119; [5] Гнеденко В., Кониг Д., Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 2, B., 1984; [6] Franken P., [a. o.], Queues and point processes, B., 1981; [7] Goodman J., Massey W., «J. Appl. Probab.», 1984, v. 21, p. 860–69; [8] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [9] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1966; [10] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 474–90; 1987, т. 31, в. 2, с. 282–98; [11] Кельберт М. Я., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988, с. 3–96; [12] Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А., Анализ очередей в вычислительных сетях, М., 1989; [13] Dai I. G., «Ann. Appl. Probab.», 1995, v. 5, p. 49–77.

XİNÇİN BƏRABƏRSİZLİYİ asılı olmayan funksiyalar üçün «Хинчина неравенство для независимых функций: Khinchin inequality for independent random function» – asılı olmayan funksiyalar cəminin L_p – statistik qiymətidir.

f_k asılı olmayan funksiyalar sistemi və hər hansı $p > 2$ üçün

$$\sup \|f_k\|_{L_p} < \infty, \quad \int_0^1 f_k(t) dt = 0$$

olsun. Onda

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k \right\|_{L_p} \leq N \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2},$$

burada N , – c_k -lardan asılı olmayan sabitdir.

Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty,$$

$r_k = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ Rademacher funksiyası və $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t)$ olarsa, onda ixtiyari $p > 0$ üçün

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2}$$

münasibəti doğrudur, burada $B_p = (O\sqrt{p})$, $p \rightarrow \infty$ olduqda. Bu bərabərsizliyi A. Ya. Xinqin [1]-də isbat etmişdir. A_1 -in dəqiq qiyməti $1/\sqrt{2}$ -ə bərabərdir.

X. b.-nin analoqu Banax fəzalarında da doğrudur (bax, [4]). $0 < p, q < \infty$ olduqda $C(p, q)$ konstantı vardır ki, B Banax fəzasından olan ixtiyari x_k elementləri üçün

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_B \leq C(p, q) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_{L_p}$$

bərabərsizliyi doğrudur. X. b.-nin təbliqlərindən biri: əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty$$

şerti ödənilərsə, onda sanki bütün ± 1 toplulan üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

funksiyası bütün L_p -lərdə ($p < \infty$) aiddir.

Əd.: [1] Khinchin A., «Math. Z.», 1923, Bd. 18, S. 109–16; [2] Karlin S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 66, p. 44–64; [3] Галопкин В. Ф., «Успехи матем. наук.», 1966, т. 21, в. 6, с. 3–82; [4] Кахан Ж.-П., «Случайные функциональные ряды, пер. с англ.», М., 1973; [5] Зигмунд А., «Тригонометрические ряды, пер. с англ.», т. 1, М., 1965.

XİNÇİN DÜSTURU «Хинчина формула; Khinchin formula» – bax, *Virtual gözlemə müddəti. Xidmət sistemi* gözləməli, birkənallı.

XİNÇİN SPEKTRAL FUNKSİYASI «Хинчина спектральная функция; Khinchin spectral function» – bax, *Sonsuz bölünən paylanma*.

XİNÇİN TEOREMİ «Хинчина теорема; Khinchin theorem» – sonsuz kiçiklik şərtinə tabe olan asılı olmayan X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nm}$ cəmi haqqında limit teoremləri nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biridir. Xinqin teoreminə görə $S_n - A_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mümkün olan limit paylanmaları sinfi *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfi ilə üst-üstə düşür, A_n sabitlərdir. X. t.-nin xüsusi halı Q. M. Bavli tərəfindən alınmışdır (bax, [3]).

Bax, *Böyük ədədlər qanunu. Mərkəzi limit teoremi*.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Предельные законы для сумм независимых случайных величин», М. – Л., 1938; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин», М. – Л., 1949; [3] Бавли Г. М., «Матем. сб.», 1936, т. 1(43), с. 917–30.

XİNÇİN TEOREMİ ayrılış (faktorizasiya) haqqında «Хинчина теорема о разложении (факторизации); Khinchin factorization theorem» – ehtimal paylanmalar arifmetikasının ən mühüm nəticələrindən biridir. Əgər $H = H_1 * H_2$ ifadəsindən H_k ($k = 1, 2$) ya özü hər hansı çırılmış E_a paylanması olarsa və ya $H * E_a$ şəklində kompozisiya olarsa, H ayrılmayan paylanma adlanır. Əgər G paylanmasının ayrılmayan

komponentləri yoxdursa, G paylanması I_0 Linnik sinfindəndir. Xinqin teoreminde ([1]-də, bax, həm də [2]) hökm olunur ki, hər bir F paylanması $F = G * F_1 * F_2 \dots$ şəklində ifadə olunur, burada $G \in I_0$ və $F_1, F_2 \dots$ – ayrılmayan paylanmalardır (G kimi F_k -lər də cırılmış ola bilərlər).

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6–17; [2] Линник Ю. В., Островский И. В., «Разложение случайных величин и векторов», М., 1972.

XİNÇİN TEOREMİ xidmət sistemi nəzəriyyəsinə «Хинчина теорема в теории систем обслуживания; Khinchin theorem in the queueing theory» – 1) Δ uzunluqlu intervalda stasionar axında hadisələr sayı $\nu(\Delta)$ -nın

$$\lambda = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P\{\nu(\Delta) > 0\}$$

parametrinin varlığı haqqında X. t. (qeyd olunmuş limitdə $+\infty$ qiyməti istisna olunmur);

2) Puasson axınının ümumi halı haqqında X. t. – bax, *Puasson axını; aparıcı funksiya*;

3) Keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik stasionar axının ümumi halı haqqında X. t.: bu halda, sadə axın yaradan çağırış anlarında eyni qanunla paylanmış asılı olmayan tələblər daxil olur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., «Введение в теорию массового обслуживания», 2 изд., М., 1987.

XİNÇİN TEOREMİ stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinə «Хинчина теорема в теории стационарных случайных процессов; Khinchin theorem in the theory of stationary random processes», Viner – Xinqin teoremi, – kvadratik orta mənada kəsilməz $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ stasionar təsadüfi proseslərinin bütün mümkün olan $B(\tau) = M\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ korrelyasion funksiyaların toplusunun

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda) \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilən funksiyalar toplusu ilə üst-üstə düşməsi haqqında teoremdir; $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası adlanan $F(\lambda)$ məhdud, monoton azalmayan həqiqi funksiyadır. Bu formada X. t. 1934-də A. Ya. Xinqin tərəfindən (bax, [1]) isbat olunmuşdur. N. Viner (N. Wiener; bax, [2]) 1930-da təsadüfi olmayan $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ kompleks funksiyalar sinfinə baxmışdır ki,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)\overline{x(t)} dt = B(\tau) \quad (2)$$

limiti vardır və $B(\tau)$ τ -nın kəsilməz funksiyasıdır; bu halda o, $B(\tau)$ funksiyası üçün (1) ifadəsini almışdır (vahid ehtimalla $M\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ ilə üst-üstə düşən; bu şərtlə ki, $x(t)$ $\zeta(t)$

erqodik stasionar prosesinin realizasiyasıdır). N. Viner göstərmişdir ki, $F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ fərqi λ tezliklə oxunun $[\lambda_1, \lambda_2]$ intervalının $x(t)$ rəqsinin «intensivliyinə» (enerji və ya güc) bir əlavə kimi interpretasiya etmək olar.

Çox mühüm xüsusi bir halda, $B(\tau)$ funksiyası $|\tau| \rightarrow \infty$ olduqda olduqca sürətlə azaldıqda Furiye integralı şəklində aynılıqla ifadə olunduğundan, X. t. ilə bir hökm kimi ifadə olunur ki, stasionar prosesin korrelyasion funksiyası $B(\tau)$ -nin Furiye çevirməsi $f(\lambda)$ həmişə mənfə deyildir və bu halda $f(\lambda)d(\lambda)$ kiçik xüsusi $d\lambda$ intervalının $x(t)$ rəqsinin enerjisində əlavəsini təyin edir. X. t. bu sonuncu formada [3]-də 1914-də A. Eynşteyn tərəfindən isbat olunmuşdu və qiymətləndirilməyən bu iş tezliklə unudulmuşdur (bax, [4], [5]).

Stasionar proseslər haqqında X. t.-ni stasionar $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ardıcılığı üçün H. Vold [7]-də araşdırmışdır. Bu halda (1)-də integrallama sərhədləri $-\pi$ və π ilə əvəz olunmalıdır.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42–51; [2] В н е р Н., Интеграл Фурье и некоторые ее приложения, пер. с англ., М., 1963, гл. 4; [3] Е i n s t e i n А., «Arch. Sci. Phys. Natur.», 1914, Ser. 4, t. 37, p. 254–56; [4] Я г л о м А. М., «Пробл. передачи информ.», 1985, т. 21, в. 4, с. 101–07; [5] Я г л о м А. М., в кн.: Эйнштейновский сборник. 1982–1983, М., 1986, с. 25–56; [6] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981, с. 145–46; [7] W o l d Н., A study in the analysis of stationary time series. Uppsala, 1938.

XİNÇİN – KOLMOQOROV TEOREMİ « Хинчина – Колмогорова теорема; Khinchin – Kolmogorov theorem » – bax, *Rademacher ardıcılığı*.

XÜSUSİ KOHERENTLİK « частная когерентность; partial coherence » – bax, *Koherentlik*.

XÜSUSİ KORRELYASİON FUNKSİYA « частная корреляционная функция; partial correlation function » – tamqiymetli k arqumentinin funksiyası ϕ_{kk} -dir.

k -nin hər bir qiymətində ϕ_{kk} funksiyasının qiyməti artan $k = 1, 2, \dots$ tərtibli avtoregressiya modelləri ilə zaman sırasının ardıcıl approksimasiyasında avtoregressiyanın sonuncu əmsalının qiyməti ilə üst-üstə düşür. X_t (p, q) tərtib qarışıq avtoregressiv – sürüşən orta prosesi, yeni ARSO(p, q) – prosesi olsun: bu proses

$$\phi(B)(X_t - \mathbf{M}X_t) = \theta(B)A_t \quad (*)$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ – avtoregressiya operatoru, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ – sürüşən orta prosesi, $BX_t = X_{t-1}$, $\mathbf{M}X_t = X_t$ sırasının sabit orta qiyməti, A_t isə orta qiymətləri sıfıra bərabər, dispersiyası σ_a^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. k tərtibli avtoregressiv proses (AR – proses) modellərinin X_t sırası şəklində salınmasından alınan avtoregressiya əmsallarının ϕ_{kk} , $k = 1, 2, \dots$ ardıcılığına X. k. f. deyilir

(bax, [1]). Əgər (*)-da $q = 0$ olarsa, yeni X_t p tərtib avtoregressiv proses olarsa, onda $k > p$ olduqda $\phi_{kk} = 0$ olur. $p \neq 0$, $q \neq 0$ olduqda, $k > p$ olarsa, X. k. f. yalnız $\theta(B)$ operatoru ilə təyin olunur.

X. k. f. *parametrik modelin* tərtibinin seçilməsində, Boks – Cenkins metodunda ARISS – modellərinin və Boks – Cenkinsə görə *diagnostik yoxlamada* istifadə olunur.

Əd.: [1] Б о к с Д ж., Д ж е н к и н с Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974.

XÜSUSİ KORRELYASİYA ƏMSALI « частный коэффициент корреляции; partial correlation coefficient » – təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı çoxluğundan olan iki *təsadüfi kəmiyyət* arasında digər kəmiyyətlərin təsiri olmamaq şərti ilə xətti asılılıq ölçüsüdür. Daha dəqiq. fərz olunur ki,

$X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması $\mathbb{R}^n$ -də verilmişdir və $X_{1:34\dots n}^*$ və $X_{2:34\dots n}^*$ X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, $X_3, \dots, X_n$ kəmiyyətləri ilə ən yaxşı xətti yaxınlaşmalarıdır. Onda X_1 və X_2 arasında X. k. ə. $\rho_{12:34\dots n}$ kimi işarə olunur və o, $Y_1 = X_1 - X_{1:34\dots n}^*$ və $Y_2 = X_2 - X_{2:34\dots n}^*$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında adi *korrelyasiya əmsalı* kimi təyin olunur:

$$\rho_{12:34\dots n} = \frac{\mathbf{M}\{(Y_1 - \mathbf{M}Y_1)(Y_2 - \mathbf{M}Y_2)\}}{\sqrt{\mathbf{D}Y_1 \mathbf{D}Y_2}}.$$

Tərifdən aydındır ki, $-1 \leq \rho_{12:34\dots n} \leq 1$. X. k. ə. korrelyasion matrisin elementləri vasitəsilə ifadə olunur. $\rho = \|\rho_{ij}\|$ olsun, burada $\rho_{ij} = X_i$ və X_j təsadüfi kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalıdır və fərz olunur ki, ρ_{ij} $|\rho|$ determinantında ρ_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır, onda

$$\rho_{12:3\dots n} = -\frac{\rho_{12}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}}.$$

Məs., $n = 3$ olduqda

$$\rho_{12:3} = \frac{\rho_{12}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}.$$

$X_1, \dots, X_n$ çoxluğundan ixtiyari X_i və X_j kəmiyyətləri üçün X. k. ə. analoji təyin olunur. Ən ümumi halda X. k. ə. $\rho_{12:34\dots n}$ X_1 və X_2 arasında (tam) korrelyasiya əmsalı ρ_{12} -dən fərqli olur. $\rho_{12:34\dots n}$ və ρ_{12} arasında fərqi görə X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılığı haqqında mülahizə aparmaq olar və ya bunların asılılığının bu kəmiyyətlərdən hər birinin $X_3, \dots, X_n$ kəmiyyətlərindən asılılığının nəticəsi olduğu haqqında fikir yürütmək olar. Əgər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri cüt-cüt qeyri – korrelyar olarlarsa, onda X. k. ə.-lannın hamısı sıfıra bərabərdir.

X. k. ə.-nin seçimi variantı

$$r_{12:34\dots n} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}$$

statistikasıdır, burada R_{ij} , r_{ij} elementinin seçimi korrelyasiya emsalları r_{ij} -lərin $R = \| r_{ij} \|$ matrisinin determinantında cəbri təməlləndiricidir. Əgər müşahidə nəticələri asılı olmayan və normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $r_{12} \dots r_{n-1,n}$ statistikası ehtimal sıxlığı –

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((N-n+1)/2)}{\Gamma((N-n)/2)} (1-x^2)^{(N-n-2)/2},$$

$$-1 < x < 1$$

olan qanunla paylanır (N seçimin həcmidir). X. k. ə. haqqında hipotezi yoxlamaq üçün

$$t = \sqrt{N-n} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad r = r_{12} \dots r_{n-1,n}$$

statistikasının qeyd olunan şərtlər daxilində, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(N-n)$ olan Student paylanması malik olması faktından istifadə olunur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

XÜSUSİ / MARGİNAL PAYLANMA « частное / маргинальное распределение; marginal distribution » – bax, *Çoxölçülü paylanma*.

XÜSUSİ SEMİ – QRUPLARIN HESABI / АРИФМЕТИКА « специальных полугрупп арифметика; arithmetic of special semigroups » – ədəd oxu üzərində *ehtimal paylanmalar* hesabında Xinqin iki fundamental teoreminə analoji teoremlər yerinə yetən topoloji semi – qruplar nəzəriyyəsidir. X. s. h. $\mathbb{R}^n$ -də bütün ehtimal paylanmalarının konvolüsyon semi – qrupundan fərqli semi – qruplar və ya lokal kompakt Abel qruplarını öyrənir. X. s. h.-nin inkişafı 20-ci əsrin 60-cı illərindən D. Kendall və R. Deyvidsonun delfi semi – qrupları üzrə (bax, [1]) və K. Urbanikin ümumləşmiş konvolüsyonlar üzrə işləri ilə qədarlaşmışdır. X. s. h.-nin əsas nəticələri aşağıdakı siniflərin təsvirini verir: I – sonsuz bölünən elementlər (Levi – Xinqin düsturlarının analoqları) sinfi, I_0 – ayrılmayan bölünənləri olmayan elementlərin sinfi

($\mathbb{R}^n$ -də bütün paylanmaların konvolüsyon semi – qrupu üçün bu problem həll olunmamışdır; bax, *Sonsuz bölünən paylanma: ayrılış*). N – ayrılmayan elementlər sinfi. Ayrılışların dayanıqlılıq problemləri də araşdırılır.

M i s a l. Kinqmen p – funksiyalar semi – qrupu $\mathcal{P}$. $\zeta(t)$, $t \geq 0$, -0 və 1 qiymətlərini alan və bütün n və $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ qiymətlərində

$$\mathbf{P} \{ \zeta(t_1) = \dots = \zeta(t_n) = 1 \} = \prod_{i=1}^n \mathbf{P} \{ \zeta(t_i - t_{i-1}) = 1 \}$$

şərtini ödəyən təsadüfi proses olsun. $t \downarrow 0$ olduqda $p(t) \rightarrow 1$ şərtini ödəyən $p(t) = \mathbf{P} \{ \zeta(t) = 1 \}$ funksiyası p – funksiya adlanır. Bütün p – funksiyaların çoxluğu $\mathcal{P}$ vurma və nöqtəvi yığılmaya nəzərən topoloji semi – qrupdur. $\mathcal{P}$ -də Xinqin hər iki teoreminin analoqu yerinə yetir.

I sinfi

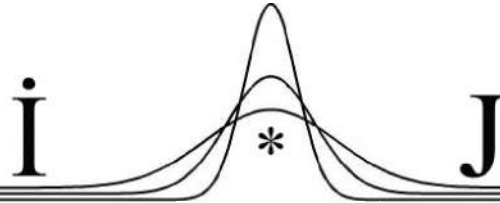
$$p(t) = \exp \left\{ \int_{-(0, \infty)} \frac{\min(t, x)}{1 - e^{-x}} m(dx) \right\}$$

şəklində funksiyalar çoxluğudur, burada m , $-(0, \infty]$ -də sonlu Borel ölçüsüdür, $I_0 = \{ e^{-\alpha t} : \alpha \geq 0 \}$, $-e^{-\alpha t}$ şəklində funksiyalar sinfidir; N sinfi G_δ tipli $\mathcal{P}$ -də sıx çoxluqdur.

Yuxarıda qeyd olunmuş mənada aşağıdakı semi – qrupların arifmetikasi öyrənilmişdir: 1) zəif yığılma topologiyası ilə verilmiş konvolüsyon semi – qruplar: $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$ -də sferik simmetrik paylanmalar; $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$ fəzasının fırlanmalarının $SO(n+1)$ qrupunda $SO(n)$ -ə nəzərən ikiterəfli invariant paylanmalar; Lobaçevski fəzasında fırlanmalara nəzərən invariant paylanmalar. 2) Hər bir elementlər üzrə yığılma topologiyası ilə verilən ardıcılıqların multiplikativ semi – qrupları: müsbət bərpə ardıcılıqları; Poya – Şur vuruqları ardıcılıqları; Yakobi çoxhədliləri üzrə inteqrallar ardıcılıqları. 3) Kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyası ilə verilən funksiyaların multiplikativ semi – qrupları: Yakobi çoxhədliləri, ikinci növ Lejandr funksiyaları üzrə mənfii olmayan əmsallı sıralarda ifadə olunan funksiyalar; Poya xarakteristik funksiyaları; zolaqda «zirvəli» funksiyalar, Levitan ümumləşmiş xarakteristik funksiyalar.

Əd.: [1] Stochastic analysis, L. – [a. o.], 1973; [2] Urbanik K., «Stud. math.», 1964, v. 23, № 3, p. 217–45; [3] Островский И. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30; [4] Чистяков В. П., «Теория вероят. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50; [5] Ruzsa I., Székely G., Algebraic probability theory, 1988.

XÜSUSİ SEMİMARTİNGAL « специальный семимартингал; special semimartingale » – bax, *Semimartinqal*.



İDARƏEDİCİ ARDICILLIQ « управляющая последовательность; control sequence » – bax. *Giriş axını*.

İDARƏETMƏ paylanmış parametrlərli sistemləri « управление системами с распределенными параметрами; control of the systems with distributed parameters » – evolyusiyaları xüsusi təoremlərli integral tənliklərle və digər funksional tənliklərle təsvir olunan sistemlərin idarə olunmasıdır. Paylanmış parametrlərli sistemləri $\bar{L}$ -nin stoxastik aspekti təsadüfi kükrəntilərə məruz qalan sistemlərlə bağlıdır. Bu halda idarə olunan proses xüsusi təoremlərli stoxastik differensial tənliklərle, integral və ya integro – differensial tənliklərle verilir. İ. adətən, ya şərhəd şərtinə daxildir və ya oblastın daxilində nöqtəvi İ.-dir. Problem itki funksiyalarının seçildiyi halda optimal İ.-nin tapılmasıdır; optimallığın zəruri və kafi şərtləri öyrənilir. Məs., paylanmış parametrlərli İ. sistemi kimi

$$d\Phi(t, x) = [L\Phi(t, x) + l(t, x)u(t, x)]dt + b(t, x)dw_t,$$

$$\Phi(t, x)|_{\partial D} = 0, \quad \Phi(0, x) = \Phi(x)$$

şəklində verilmiş xüsusi təoremlərli stoxastik differensial tənliyə baxılır [L – hamar elliptik operator, w – standart Viner prosesi, $\Phi(x)$ – Gauss meydanı, l və b – məlum funksiyalar, $t \in \mathbb{R}_+$,

$x \in D \subset \mathbb{R}^n$]. Tam və natamam verilənlər üzrə kvadratik itki funksionalı verildiyi halda u – optimal İ.-ni tapmaq tələb olunur.

Əd.: [1] Kushner H. J., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 4, p. 596–614; [2] Л и о н с Ж.-Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 15–46; [3] Bensoussan A., «J. Franklin Inst.», 1983, v. 315, p. 387–404; [4] Г л о н т и О. А., Исследования по теории условно – гауссовских процессов, Тб., 1985; [5] Л и о н с Ж.-Л., Управление сингулярными распределенными системами, пер. с франц., М., 1987.

İDARƏOLUNAN DİFFUZİON PROSES « управляемый диффузионный процесс; controlled diffusion process » – d – ölçülü $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında ələ kəsilməz idarə olunan təsadüfi prosesdir ki, idarəetmədən asılı olmayan hər hansı Viner prosesi üzrə stoxastik differensialana bilinir. İ. d. p. nəzəriyyəsi hərəkət tənliyi $dx_t = b(\alpha_t, s + t, x_t)dt$, $t \geq 0$ (α_t idarəedici parametrdir) şəklində olan hər hansı $x_t \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsinin determinik hərəkətini idarəetmə nəzəriyyəsinin ümumiləşməsi kimi yaranmışdır:

İ. d. p.-in formal təsviri İto stoxastik tənlikləri dilində verilir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$, – $\mathcal{A}$ -ya daxil olunmuş, genişləndirilə bilən tam $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrləri ailəsi olsun.

$w_t = (w_t^i, i = 1, \dots, d_1)$, – $t \geq 0$ olduqda $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də təyin olunmuş $\{\mathcal{A}_t\}$ -yə nəzərən d_1 – ölçülü Viner prosesi (yeni

w_t^i hər bir i qiymətində birölçülü kəsilməz standart Viner prosesləri, $w_t^1, \dots, w_t^{d_1}$ asılı olmayan proseslər, w_t^i ixtiyari t , i qiymətlərində $\mathcal{A}$ – ölçülən proseslər və $t, h \geq 0$ qiymətlərində $\{w_{t+h}^i - w_t^i, i = 1, \dots, d_1\}$ ($\mathcal{A}_t$)-dən asılı olmayan kəmiyyətlər) olsun. A -nın hər hansı separabel metrik fəza olduğu fərz olunur. $\alpha \in A$, $t \geq 0$, $x = (x^i, i = 1, \dots, d) \in \mathbb{R}^d$ olduqda $\sigma(\alpha, t, x)$, $b(\alpha, t, x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur; $\sigma(\alpha, t, x)$ ($d \times d_1$) – ölçülü matris, $b(\alpha, t, x)$ d – ölçülü vektordur. σ, b -nin α, t, x -in ələ Borel funksiyaları olduğu hesab edilir ki, onlar α, t -dən asılı olmayan sabitlə x -ə görə Lipsitz şərtini ödəsələr və $|\sigma^B(\alpha, t, 0)|$ və

$|b^i(\alpha, t, 0)|$ məhdud olsunlar. Qiymətlərini A -dan alan, $\{\mathcal{A}_t\}$ -yə nəzərən progressiv ölçülən ixtiyari $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ prosesi strategiya adlanır; $\mathfrak{A}$ bütün strategiyalar çoxluğudur. Bütün $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ qiymətləri üçün

$$dx_t = b(\alpha_t, s + t, x_t)dt + \sigma(\alpha_t, s + t, x_t)dw_t,$$

$$x_0 = x \quad (1)$$

– İto stoxastik tənliyinin həlli vardır və bu həll yeganədir (İto teoremi). Bu həll $x_t^{\alpha, s, x}$ ilə işarə olunur və idarə olunan diffuzion proses (diffuzion tipli idarə olunan proses) adlanır. $\mathfrak{A}$ strategiyalarından başqa strategiyaların digər siniflərinə də baxılır. $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan, $[0, \infty)$ -da kəsilməz funksiyalar fəzası olsun. $[0, \infty)$ yarımxə t zaman qiymətlərinin çoxluğu kimi anlaşılar. $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ -nin elementləri $x_{[0, \infty)}$ kimi işarə olunur. N_t $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş minimal σ – cəbr olsun və fərz olunur ki, s anında $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ fəzasının x_s ($x_{[0, \infty)}$ elementinin qiyməti) funksiyası $s \leq t$ olduqda N_t σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir. Qiymətləri A -dan olan $\alpha = \alpha_t(x_{[0, \infty)})$ funksiyası $\{N_t\}$ -yə nəzərən progressiv ölçülən olarsa və $\alpha_t = \alpha_t(x_{[0, \infty)})$ olduqda (1) tənliyinin heç olmasa $\{A_t\}$ -yə nəzərən progressiv ölçülən bir həlli varsa, $\alpha = \alpha_t(x_{[0, \infty)})$ funksiyasına, (s, x) nöqtəsində məqbul təbii strategiya deyilir. (s, x) nöqtəsində məqbul bütün təbii strategiyalar çoxluğu $\mathfrak{A}_T(s, x)$ ilə, onun $\alpha_t(x_t)$ tipli bütün təbii strategiyalarından ibarət

altçoxlugu – $\mathfrak{A}_{\mathcal{H}}(s, x)$ ilə işarə olunur və bu çoxluq (s, x) nöqtəsində məqbul Markov strategiyaları çoxluğu adlanır. Qəbul olunduğuna görə təbii strategiya $[0, t]$ müddəti ərzində x_t prosesinə müşahidələr əsasında t anı üçün idarəetməni, Markov strategiyası isə yalnız t anında prosesin müşahidəsi əsasında idarəetməni təyin edir. $\alpha \in \mathfrak{A}_T(s, x)$ olduqda [hətta $\alpha \in \mathfrak{A}_{\mathcal{H}}(s, x)$ olduqda belə] (1)-in həlli yeganə olmaya bilər. Buna görə də, hər bir $s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathfrak{A}_T(s, x)$ qiymətləri üçün (1) tənliyinin hər hansı bir həlli ixtiyari qaydada qeyd olunur və bu həll $x_t^{\alpha, s, x}$ ilə işarə olunur. Bundan sonra, $\beta_t(\omega) = \alpha_t(x_{[0, \infty)}^{\alpha, s, x}(\omega))$ düsturu üzrə $\mathfrak{A}_T(s, x) \subset \mathfrak{A}$ daxiletməsi təyin olunur ki, bu müdaxilədə $x_t^{\beta, s, x} = x_t^{\alpha, s, x}$ bərabərliyi (sanki yəqin) doğru olur.

İdarəetmənin məqsədi, bir qayda olaraq, $x_t^{\alpha, s, x}$ trayektoriyasının bu və ya digər funksionalının riyazi gözləməsinin maksimizasiya və ya minimizasiyasıdır. Ən ümumi məsələ aşağıda şərh olunur. $A \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ fəzasında $C^\alpha(t, x) \geq 0, f^\alpha(t, x)$ Borel funksiyalarının və $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ -də $g(t, x)$ Borel funksiyasının təyin olunduğu fərz olunur. $\alpha \in \mathfrak{A}, s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ üçün $(s+t, x_t^{\alpha, s, x})$ -nin Q -dən ilk çıxış anı

$$\begin{aligned} \varphi_t^{\alpha, s, x} &= \int_0^t C^{\alpha_r}(s+r, x_r^{\alpha, s, x}) dr, \\ v^\alpha(s, x) &= \\ &= \mathbf{M}_{s, x}^\alpha \left[\int_0^{\tau_Q} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t, x_t) dt + g(s+\tau_Q, x_{\tau_Q}) e^{-\varphi_{\tau_Q}} \right] \end{aligned}$$

münasibətlərlə təyin olunur, burada riyazi gözləmə işarəsindəki α, s, x indeksləri onu ifadə edir ki, onları riyazi gözləmə işarəsi altında mümkün olduğu yerdə yazmaq lazımdır. Onda $v^\alpha(s, x)$ -i maksimallaşdıran α strategiyasının tapılması məsələsi və

$$v(s, x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} v^\alpha(s, x) \quad (2)$$

– uduş funksiyasının (dəyərin) tapılması məsələsi yaranır. $v^\alpha(s, x) \geq v(s, x) - \varepsilon$ münasibətini ödəyən α strategiyaları (s, x) nöqtəsi üçün ε – optimal α – strategiyaları adlanır. 0 – startegiya, – optimal strategiya adlanır. Əgər (2)-də $\mathfrak{A}$ çoxluğu $\mathfrak{A}_T(s, x)$ ($\mathfrak{A}_{\mathcal{H}}(s, x)$) çoxluğu ilə əvəz olunarsa, onda uyğun sərhəd $v_T(s, x)$ ($v_{\mathcal{H}}(s, x)$) ilə işarə olunur. $\mathfrak{A}_{\mathcal{H}}(s, x) \subset \subset \mathfrak{A}_T(s, x) \subset \mathfrak{A}$ daxiletmələri ödənildiyindən $v_{\mathcal{H}}(s, x) \leq v_T(s, x) \leq v(s, x)$ münasibəti də doğrudur. Kifayət qədər geniş fərziyyələrlə məlumdur ki (bax, [1]), $v_T = v$ [bu doğrudur, məs., σ, b, c, f, g funksiyaları (α, x) üzrə kəsilməz, ixtiyari t qiymətində α -ya nəzərən x -ə görə müntəzəm kəsilməzdir və α, t, x -in bütün qiymətlərində c, f, g mütləq kəmiyyətləri $K(1+|x|)^m$ kəmiyyətini aşmırlar, K və

m isə α, t, x -dən asılı deyildirlər]. Kifayət qədər ümumi halda $v_{\mathcal{H}} = v$ bərabərliyinin ödənilməsi araşdırılmamışdır. Dinamik proqramlama ideyalarının formal tətbiqi Bellman prinsipi adlandırılan

$$\begin{aligned} v(s, x) &= \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_{s, x}^\alpha \times \\ &\times \left[\int_0^{\tau_Q} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t, x_t) dt + v(s+\tau_Q, x_{\tau_Q}) e^{-\varphi_{\tau_Q}} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

münasibətinə gətirir, burada $\tau^{\alpha, s, x}$ anları $\tau_Q^{\alpha, s, x}$ kəmiyyətini aşmayan, ixtiyari qaydada təyin olunmuş Markov anlarıdır. (3)-də τ əvəzinə $t \wedge \tau_Q = \min(t, \tau_Q)$ götürərək, $v(s+\tau, x_{\tau}) e^{-\varphi_{\tau}}$ -yə İto düsturunu tətbiq etdikdə, bəzi ciddi olmayan mülahizələrlə Bellman tənliyini –

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (L^\alpha v + f^\alpha) = 0 \quad (4)$$

tənliyini almaq olur, burada

$$\begin{aligned} L^\alpha v &= \frac{\partial v}{\partial s} + a_{ij}(\alpha, s, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ b_i(\alpha, s, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} - c^\alpha(s, x) v \end{aligned}$$

burada i, j indekslərinə görə 1-dən d -yə qədər cəmləmə fərz olunur,

$$a(\alpha, s, x) = (a_{ij}(\alpha, s, x)) = \sigma(\alpha, s, x) \sigma^*(\alpha, s, x) / 2$$

matris üçün ifadədir.

Bellman tənliyi İ. d. p. nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayır, belə ki, bir çox hallarda ehtimal olur ki, bu tənliyin kifayət qədər « yaxşı » sayılan həlli g -nin funksiyası ∂Q -yə bərabər olub, uduş funksiyasıdır, lakin eger hər bir (s, x) qiymətlərində $\alpha = \alpha^0(s, x)$

(4)-də yuxarı sərhədin alınmasını təmin edərsə və $\alpha_t^0 = \alpha^0(s_0+t, x_t)$ (s_0, x_0) -da məqbul Markov strategiyasıdırsa, onda $\alpha^0 = \{\alpha_t^0\}$ strategiyası (s_0, x_0) nöqtəsində optimal strategiyadır. Beləliklə, bəzən isbat etmək olur ki, $v_{\mathcal{H}}(s_0, x) = v(s_0, x_0)$ bərabərliyi doğrudur.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində metodları ilə isbat etmək olar ki, eger $Q = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d, T \leq \infty$ olarsa, kifayət qədər ümumi halda σ, b, c, f, g funksiyalarının hamarlılığı tipli bezi fərziyyələrlə uduş funksiyası v (4) tənliyini ödəyir (bax, [1]).

Hərəkəti idarəetmə məsələləri ilə yanaşı İ. d. p. nəzəriyyəsində bir və ya iki nəfərlə idarəolunan prosesin optimal dayanması haqqında məsələlərə də baxılır. Məs., $\alpha \in \mathfrak{A}$ və ixtiyari Markov anı τ üçün

$$\begin{aligned} v^{\alpha, \tau}(s, x) &= \mathbf{M}_{s, x}^\alpha \times \\ &\times \left[\int_0^{\tau_Q \wedge \tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t, x_t) dt + g(s+\tau_Q \wedge \tau, x_{\tau_Q \wedge \tau}) e^{-\varphi_{\tau_Q \wedge \tau}} \right]. \end{aligned}$$

İ. d. p.-lər nəzəriyyəsi idarəolunan, qismən müşahidəolunan prosesləri və təsadüfi prosesləri idarəetmə məsələlərini araşdırır. diffuzion tipli proseslərə müvafiq bu və ya digər verilmiş ölçülər sinfindən olan $(C[0, \infty), \mathbb{R}^d, N_\infty)$ fəzasında ölçünün seçilməsi ilə həyata keçirilən, təsadüfi prosesləri idarəetmə məsələlərini həyata edir.

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Fleming W. H., Rishel R. W., Deterministic and stochastic optimal control, В. – [а. о], 1975; [3] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 3, с. 450–93; [4] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [5] Wonham W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312–26; [6] Davis M. H. A., «SIAM J. Control», 1976, v. 14, № 1, p. 176–88.

İDARƏOLUNAN MARKOV PROSESİ «управляемый марковский процесс; controlled Markov process» – Markov strategiyasında Markov prosesinə çevrilən idarəolunan təsadüfi prosesdir, burada Markov strategiyası – prosesin hər bir baxılan anda vəziyyətindən asılı olaraq prosesin bu anda dəyişməsinin ehtimalı xarakteristikalarını təyin edən qaydadır. İdarəetmənin məqsədi, adətən, hər hansı funksionalın maksimizasiyasından ibarətdir. İ. M. p.-nin formal tərifində ixtiyari strategiya üzrə (və başlanğıc vəziyyətə görə) trayektoriyalar fəzasında müvafiq ehtimal ölçüsünün qurulması əks olunmalıdır. Belə qurulma müxtəlif xüsusi hallarda müxtəlif üsullarla yerinə yetirilir və hələ ki, bütün bu halları özündə əks etdirən ümumi konstruksiya yoxdur. Diskret zamanlı İ. M. p. (idarəolunan Markov zənciri) və kəsilməz zamanlı İ. M. p. və hissevi sabit trayektoriyalı İ. M. p.-ləri də qərar qəbulətmə Markov prosesləri adlanır; bu proseslər ardıcıl addımlar və ya sıçrayışlar üzrə induksiya ilə qurulur və İonesku – Tulci teoreminə əsaslanır (bax, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı idarəolunan sıçrayışvari proses). Kəsilməz trayektoriyalı İ. M. p.-lərinin geniş sinfi stokastik differensial tənliklərin köməyi ilə qurulur (bax, idarəolunan diffuzion proses); bu metod sıçrayışları diffuziya üçün də istifadə olunur, kiçik sıçrayışlar bu halda cəmlənir (bax, [4]). İ. M. p.-lərin xüsusi tipi impulsal idarəolunan proseslərdir (bax, [5], [6]); impulsal idarəetmə kəsilməz idarəetmə ilə birlikdə uzlaşa bilinir (bax, Kvizivariasion bərabərsizliklər). İ. M. p.-lərinin bir çoxu [7]-də təklif olunmuş martinqal ideologiyasından istifadə edən idarəolunan təsadüfi prosesin yeni konstruksiyası ilə ifadə olunur. Nəticədə verilən İ. M. p.-ləri (belə proseslərdə sistemin vəziyyəti yalnız qismən müşahidə olunur) və adaptiv İ. M. p.-ləri (bu proseslərdə idarəolunan obyektin bezi parametrləri məlum olmur) mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [2] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [3] Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [4] Прага-раускас Г., «Литов. матем. сб.», 1978, т. 18, в. 1, с. 147–67; [5] Звонкин А. К., «Матем. сб.», 1971, т. 86 (128), с. 611–21; [6] Bensoussan A., Lions J. L., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 134, p. 5–22; [7] Chitashvili R. J., «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 1021, p. 73–92.

İDARƏOLUNAN MARKOV ZƏNCİRİ «управляемая цепь Маркова; controlled Markov chain» – diskret zamanlı ele idarəolunan təsadüfi prosesdir ki, baxılan indiki məlum vəziyyətdə keçid funksiyası və məqbul idarəetmə çoxluqları keçmiş vəziyyətlər və idarəetmələrdən asılı olmur. Əksər hallarda İ. M. z. kimi təsadüfi prosesin özü deyil, yalnız uyğun idarəolunan obyekt anlaşılır; onda İ. M. z.-nin

paylanması P_x^π -nin (və bu paylanmaya uyğun riyazi gözləmə

M_x^π -nin) alınması üçün İ. M. z.-ndən başqa x başlanğıc vəziyyəti və π strategiyası da verilməlidir. İ. M. z. diskret zamanlı qərar qəbulətmə Markov prosesi kimi də adlandırılır. Stasionar dinamik proqramlama kimi də adlandırılan bircins İ. M. z. əsas maraq doğuran proseslərdəndir.

Ən sadə obyekt sonlu bircins İ. M. z.: 1) vəziyyətləri çoxluğu sonlu X ilə, 2) $x \in X$ vəziyyətində məqbul idarəetmələrin (qərarların) sonlu çoxluqları $A(x)$ ilə, 3) $a \in A(x)$ idarəetməsində x vəziyyətindən y vəziyyətinə keçid ehtimalları $p(y|x, a)$ ilə verilir. Tipik hallarda idarəetmənin məqsədi, ya

$$v^\pi(x) = M_x^\pi \sum_{i=1}^{\infty} r(x_{i-1}, a_i) \beta^{i-1} \quad (1)$$

– gözlənilən diskontlanmış gəlirin maksimizasiyası [$\beta \in (0, 1]$ konstantdır], yaxud bir addıma gözlənilən gəlirin orta qiyməti –

$$g^\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M_x^\pi \sum_{i=1}^n r(x_{i-1}, a_i) \quad (2)$$

funksiyasının maksimizasiyasıdır, burada $r(x, a)$, $a \in A(x)$, $x \in X$ – cari gəlir funksiyasıdır [daha ümumi halda $r(x_{i-1}, a_i, x_i)$ r üzrə ortalananmış baxılan $p(x_i|x_{i-1}, a_i)$ keçid ehtimallarına gətirilir]. Bütün π -lər üzrə v^π (və ya g^π) gəlirinin supremumu modelin dəyəri (qiyməti) adlanır və v ilə işarə olunur [və ya g ; g funksiyası limiti olmayan strategiyalar üçün (2)-də yuxarı və ya aşağı limitin götürülməsindən asılı deyildir].

Əsas nəticələr aşağıdakı operatorlar terminləri vasitəsilə ifadə olunur:

$$\begin{aligned} P^a f(x) &= \sum_{y \in X} f(y) p(y|x, a) \\ T_\beta^a f(x) &= r(x, a) + \beta P^a f(x), \quad a \in A(x) \\ P f(x) &= \sup_{a \in A(x)} P^a f(x), \\ T_\beta f(x) &= \sup_{a \in A(x)} T_\beta^a f(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

$\beta < 1$ olan (1) kriterisi halında v dəyəri $v = T_\beta v$ Bellman tənliyinin (və ya optimallıq tənliyinin) yeganə həllidir. (2) kriterisi halında g dəyəri

$$g = Pg, \quad h + g = T_1 h \quad (3)$$

optimallıq tənliklərini orta qiymətlə ödəyir (h X çoxluğunda köməkçi funksiyadır) və (3)-dən aydın olur ki, ixtiyari h funksiyası üçün g dəyərdir. Her iki halda optimallıq tənliklərində supremumu təmin edən $x \rightarrow A(x)$, $x \in X$ inikasının selektoru ϕ mövcuddur və ϕ stasionar optimal strategiya doğurur. v və g dəyərləri və optimal selektorlar, praktik olaraq, ardıcıl yaxınlaşmalar metodu və ya xətti proqramlama metodu ilə tapılır.

X hesabı vəziyyətlər çoxluğu və A hesabı olduğu halda $\bar{I}$. M. z.-ləri üçün həftə optimal strategiyalar əvəzinə ε – optimal strategiyalar götürdükdə belə yuxarıdakı nəticələri tamamilə almaq olmur (bax, [2], [3], [5], [7]); vəziyyətlər çoxluğunun hesabı olmadığı hallarda ölçülənliklə bağlı əlavə çətinliklər yaranır.

Bax, *İdarəolunan Markov prosesi diskret zamanlı, Dinamik proqramlama; həssas kriterilər.*

Əd.: [1] Хо в а р д Р.-А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [2] Ш и р я е в А. Н., «Trans. 4-th Prague Conf. Inform. Theory ...», 1967, с. 131–203; [3] Ды н к и н Е. Б., Ю ш к е в и ч А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [4] М а й н Х., О с а к и С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [5] Ф а й н б е р г Е. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 1, с. 71–82; [6] Ю ш к е в и ч А. А., Ч и т а ш в и л и Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [7] С о - н н и н И. М., Ф а й н б е р г Е. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 275, с. 806–09.

İDARƏOLUNAN OBYEKT «управляемый объект; controlled object» – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses, İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı.*

İDARƏOLUNAN SEMİ – MARKOV PROSESİ / semi-Markov qərar qəbul etmə prosesi «управляемый полумарковский процесс / полумарковский процесс принятия решений; controlled semi – Markov process / semi-Markov decision process» – sağdan kəsilməz, hissevi sabit $x(t)$, $t \geq 0$ trayektoriyalarlı *idarəolunan təsadüfi prosesdir*, bu prosesdə növbəti $a_1, a_2, \dots$ idarəetmələri ardıcıl sıçrayış anları $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ anlarında aparılır və $x(t_{n-1}) = a_n$ parametrlər cütü, keçmişdən asılı olmayaraq, növbəti sıçrayışa qədər $\tau = t_n - t_{n-1}$ müddəti və $x(t_n)$ növbəti vəziyyətinin birgə paylanması təyin edir. İ. s. – M. p. [1]-də U. Cuell tərəfindən öyrənilməyə başlanmışdır. Adətən, hesab olunur ki, $M\tau$ bütün vəziyyətlər və idarəetmələr üzrə məhduddur və bu halda toplam diskontlanmış gəlirin və ya gəlirin vahid zaman ərzində orta qiymətinin maksimizasiyası məsələsi qoyulur. Belə halda İ. s. – M. p. nəzəriyyəsi $\tau = 1$ olduqda İ. s. – M. p.-nin çevrildiği *idarəolunan Markov zənciri* nəzəriyyəsinə bir çox cəhətlərinə görə analoji olur.

Əd.: [1] J e w e l l W. S., «Operations Research», 1963, v. 11, p. 938–71; [2] М а й н Х., О с а к и С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [3] D e n a r d o E. V., F o x B. L., «SIAM J. Appl. Math.», 1968, v. 16, p. 468–87; [4] R o s s S. M., «J. Appl. Probab.», 1970, v. 7, p. 649–56; [5] Р о - м а н о в с к и й И. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 208–23; [6] Ю ш к е в и ч А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, с. 808–15.

İDARƏOLUNAN SIÇRAYIŞVARI MARKOV PROSESİ «управляемый скачкообразный марковский процесс; controlled Markov jump process» – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses.*

İDARƏOLUNAN SIÇRAYIŞVARI PROSES «управляемый скачкообразный процесс; controlled jump process» – hissevi sabit trayektoriyalarlı, kəsilməz zamanlı *idarəolunan təsadüfi prosesdir*. İ. s. p.-in trayektoriyalarının sağdan kəsilməz olduğu qəbul olunur. Adətən, fərz olunur ki, prosesin tarixi (Markov İ. s. p.-də – cari vəziyyət) və idarəetmə sıçrayışların infinitesimal ehtimalı xarakteristikalarına təsir edir. Bu halda (həm də məhdudiyyətlər olmadıqda) uyğun

idarəolunan obyekt aşağıdakı elementlərlə: 1) bütün bımüqtevi çoxluqları ölçülən çoxluqlar olan vəziyyətlərin ölçülən fəzası ($X, \mathfrak{X}$) ilə; 2) analoji ölçülən idarəetmələr fəzası ($A, \mathfrak{A}$) ilə; 3) başlanğıc vəziyyəti $x_0 \in X$ olduqda, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_1 > 0$) anlarında trayektoriyaların sıçrayışlarla $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) vəziyyətlərinə keçməsi şərtlə $a \in A$ idarəetməsində prosesin $t \geq 0$ anında x vəziyyətinin ölçülən sıxlıq funksiyası $q(t, x_0 t_1 x_1 \dots t_n x_n, a)$ ilə; 4) qeyd olunan şərtlərlə və $t_{n+1} = t$ şərtlə t_{n+1} anında $(n+1)$ -ci sıçrayışın vəziyyəti x_{n+1} -in ehtimal paylanması $Q(\Gamma | t, x_0 t_1 x_1 \dots$

$t_n x_n, a)$, yeni hər bir $\Gamma \in \mathfrak{X}$ üçün digər arqumentlər toplusundan ölçülən olaraq asılı, X -də ehtimal ölçüsü ilə verilir. Sıçrayışların çoxalmaması üçün, adətən, q sıxlıq funksiyasının məhdudduğu tələb olunur. Hər bir $x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \dots$ ardıcılığına $t_n \uparrow \infty$ olmaqla $\omega = \{x(t)\}$ trayektoriyası uyğun olur:

$$t_n \leq t < t_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots \text{ olduqda}$$

$$x(t) = x_n \quad (*)$$

(burada $t_0 = 0$ və hər hansı bir indeksdən başlayaraq t_n -lər $+\infty$ ola bilər), $\mathfrak{A}_t^-, t > 0$ $\Omega = \{\omega\}$ fəzasında minimal σ – cəbr olsun; bütün $x(s)$, $s < t$ trayektoriyaları $\mathfrak{A}_t^-$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən fərz olunur. Qiymətləri A -dan olan, $\{\mathfrak{A}_t^-\}_{t=0}$ axınına nəzərən progressiv ölçülən $a = \pi(t, \omega)$, $t > 0$, $\omega \in \Omega$ funksiyasına π strategiyası deyilir. Əslində $t_n(\omega) < t \leq t_{n+1}(\omega)$ olduqda $\pi(t, \omega) = \pi(x_0 t_1 x_1 \dots t_n x_n, t)$ və burada sağ tərəf arqumentlərin küllüsü üzrə ölçüləndir. İdarəolunan obyekt, başlanğıc vəziyyət $x \in X$ və π strategiyası üzrə İ. s. p., sözün əsl mənasında, $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesi kimi qurulur, bu prosesin ehtimal paylanması (*) düsturları ilə və

$$P_x^\pi \{x_0 = x\} = 1,$$

$$P_x^\pi \{t_{n+1} > t | x_0 t_1 x_1 \dots t_n x_n\} =$$

$$= \exp \left[- \int_{t_n}^t q(s, x_0 t_1 x_1 \dots t_n x_n, \pi(x_0 t_1 \dots x_n, s)) ds \right]$$

$$P_x^\pi \{x_{n+1} \in \Gamma | x_0 t_1 x_1 \dots t_n x_n t_{n+1}\} =$$

$$= Q(\Gamma | t_{n+1}, x_0 t_1 \dots x_n, \pi(x_0 t_1 \dots x_n, t_{n+1})), n = 0, 1, 2, \dots$$

şərtlərlə təyin olunur. İ. s. p. (daha dəqiq idarəolunan obyekt), q və Q $x_0 t_1 \dots x_n$ toplusunun yalnız x_n komponentindən asılı olarsa, bu proses Markov İ. s. p., eger bu şərtlərlə yanaşı t -dən asılı olmazsa, onda bircins Markov İ. s. p. adlanır. Birinci halda $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ prosesi $\pi(t, \omega) = \pi(t, x(t_-))$ Markov strategiyasında Markov prosesi, ikinci halda $\pi(t, \omega) = \pi(t, x(t_-))$ stasionar strategiyasında bircins Markov prosesi olur.

$$v^{\pi}(x) = \mathbf{M}_x^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \alpha(s, x(s), \pi(s)) ds} r(t, x(t), \pi(t)) dt$$

şəkilində kriterili (məqsəd funksionalı olan) Markov İ. s. p. bir çox cəhətlərinə görə gəlirli *idareolunan Markov zəncirinə*, xüsusilə də, X, A sonlu və bircins halındakı zəncirə oxşardır (bircins halda həm də α və r parametrləri t -dən asılı olmur), burada $\mathbf{M}_x^{\pi}$, $-\mathbf{P}_x^{\pi}$ ölçüsünə uyğun riyazi gözlemə, r – gəlir sürəti, $\alpha \geq 0$ – diskontlama parametridir. Məs.,

$$v(x) = v(0, x) = \sup_{\pi} v^{\pi}(x), \quad x \in X$$

gəliri daxil edilir və ixtiyari $t \geq 0$ anında başlayan proses üçün $v(t, x)$ analogi təyin olunur. Geniş şərtlərlə deyər

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \sup_{a \in A} [r(t, x, a) + q(t, x, a) \times \int_X [v(t, y) - v(t, x)] Q(dy | t, x, a) - \alpha(t, x, a) v(t, x)]$$

optimallıq tənliyini (və ya Bellman tənliyini) ödəyir.

İdarəetmələrin seçilməsində məhdudiyyətlər olan, randomlanmış strategiyaları, impulsal idarəetmələri, sıçrayışlar arasında determinə olunmuş aparılı, həmçinin natamam verilənli İ. s. p.-lərə də baxılır. İ. s. p.-in öyrənilməsində dinamik proqramlamadan başqa, martinqal yanaşma da tətbiq olunur. Sıçrayışları diffuziya ilə birləşən və ya kiçik sıçrayışları zaman üzrə hər yerdə sıx İ. s. p.-lər *idareolunan diffuzion proseslər* nəzəriyyəsində tətbiq olunan metodlara analogi metodlarla öyrənilir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [2] Юшкевич А. А., «Теория вероятн. нее примен.», 1980, т. 25, с. 247–70; [3] Duyn Schouten F. A. van der, Markov decision process..., Amst., 1983.

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ ARDICILLIQ «управляемая случайная последовательность; controlled random sequence» – bax. *idareolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES «управляемый случайный процесс; controlled random process» – ehtimali xarakteristikaları müşahidələr aparıldığı zaman dəyişə bilən *təsadüfi proses*dir; ehtimali xarakteristikalar idarəetmə keyfiyyətini təyin edən bu və ya digər funksionalın minimizasiyası (maksimizasiyası) nəticəsində dəyişir. İ. t. p.-lər verilmiş və təsviri qaydasına görə olduğu kimi idarəetmə məqsədlərinin tipi üzrə də fərqləndirilir (bax. *idareolunan diffuzion proses*, *idareolunan Markov proses*, *idareolunan sıçrayışvari proses*).

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı «управляемый случайный процесс с дискретным временем; controlled discrete time random process», idareolunan təsadüfi ardıcılıq – diskret zamanlı ele təsadüfi prosesdir ki, onun ehtimali xarakteristikaları hər bir addımda prosesin gedişinə müşahidədən asılı olaraq baxılan addım üçün idarəetmənin (qərar qəbulətmənin) seçilməsi ilə təyin olunur. Adətən, prosesdən və idarəetmədən asılı olan hər hansı funksionalın maksimizasiyası (minimizasiyası) məsələsi (kriteri adlandırılan) qoyulur. Məsələnin qoyuluşu ardıcıl analiz və oyunlar nəzəriyyəsinin təsiri nəticəsində yaranmışdır. İlk nəticələr dinamik proqramlamanın

stoxastik variantı kimi R. Bellman (R. Bellman) tərəfindən alınmışdır (bax. [1]); o, qərar qəbulətmə prosesi (Markov prosesi) terminini də təklif etmişdir (bax. [2]). Sonradan kəsilməz zaman halına analogi olaraq və mühəndis tətbiqləri baxımından diskret zamanlı stoxastik optimal idarəetmə adı da qəbul olunmuşdur. Markov diskret zamanlı İ. t. p.-ini elementar situasiyada P. Xovard [3]-də araşdırmışdır. Borel modellərini öyrənən D. Blekuell və R. Ştraux uyğun olaraq, [5] – [6] və [7]-də diskret zamanlı İ. t. p.-ə müasir yanaşmanın əsaslarını qoymuşlar. Məs., onlar ölçülən seçim teoremi vasitəsilə deskriptiv çoxluq nəzəriyyəsinin dərin nəticələrinin əlaqəsini aşkar etmişlər. Sonlu – additiv integralamadan istifadə edən L. Dyubins və L. Sevidc ölçülənlik problemlərinə digər yanaşma ilə diskret zamanlı İ. t. p.-i «qumar evi» terminləri ilə ifadə etmişlər (bax. [8]); burada həmçinin yuxarıdan semi – kəsilməz modellərin mühüm sinfinin öyrənilməsinə başlanılmışdır. Verilənləri sayı tam olmayan idarəetmə halı üçün əsas anlayışlar A. N. Şirayev (bax. [9], [10]) və Y. B. Dinkin (bax. [11]) tərəfindən daxil olunmuşdur. Qeyri – Markov diskret zamanlı İ. t. p.-lərin ətraflı analizinə [13]-də başlanmışdır. XX əsrin 70-ci illərindən başlayaraq diskret zamanlı İ. t. p. nəzəriyyəsi əsaslandırılma sahələrində və həmçinin struktur məsələlərdə intensiv surətdə yenidən inkişaf etməyə başlamışdır.

Tam informasiyalı diskret zamanlı İ. t. p., təsadüfi proses kimi idareolunan obyektin başlanğıc vəziyyətinin və strategiyanın verilməsi ilə təyin olunur (digər təyin edilmə variantları da mümkündür). İdarəolunan obyekt $Z = \{X, A, A(h)_{h \in H}, p\}$

aşağıdakı elementlərin toplusudur: 1) bütün birnöqtəli çoxluqları ölçülən $(X, \mathfrak{X})$ ölçülən vəziyyətlər fəzası; 2) analogi ölçülən idarəetmələr (qərarlar) fəzası $(A, \mathfrak{A})$; 3) rekurrent təyin olunan $H = \bigcup H_t, t = 0, 1, \dots$ tarixlər fəzası və $A(h), h \in H$ məqbul idarəetmələrinin boş olmayan çoxluqları ($H_0 = X$ fərz olunur), $D_{t+1} = \{(h, a) : a \in A(h), h \in H_t\}$, $- H_t \times A$ və $H_{t+1} = D_{t+1} \times X$ fəzalarında məhdudiyyətlərin ölçülən çoxluğu; $h \in H_t$ elementləri t anında tarixlər adlanır və h_t ilə işarə olunur:

$$h_t = x_0 a_1 x_1 \dots a_t x_t, \quad x_i, a_i \in X, \quad a_{t+1} \in A(x_0 a_1 \dots x_t), \quad 0 \leq i < t, \quad (1)$$

$a \in A(h_t)$ elementləri $t+1$ anında idarəetmələr adlanır və a_{t+1} -lə işarə olunur; 4) keçid funksiyası $p(\Gamma | ha), \Gamma \in \mathfrak{X}, h \in H, a \in A(h)$ – ixtiyari $ha \in D_{t+1}, t = 0, 1, 2, \dots$ üçün $(X, \mathfrak{X})$ -də ölçülən ehtimal ölçüsü, ixtiyari $\Gamma \in \mathfrak{X}$ üçün hər bir D_{t+1} -də ha cütünün ölçülən funksiyasının. Ixtiyari $x \in X$ nöqtəsi başlanğıc vəziyyətdir. π strategiyası ixtiyari $h_t, t \geq 0$ tarixində a_{t+1} -in seçilməsini təyin edir; təsadüfi seçim aparmaq mümkündür, belə ki, $\pi(\beta | h), \beta \in \mathfrak{A}, h \in H$ strategiyası formal olaraq, ixtiyari $h \in H$ üçün $A(h)$ -də toplanmış və ixtiyari $\beta \in \mathfrak{A}$ üçün hər bir $H(t)$ -də ($t \geq 0$) h üzrə ölçülən $(A, \mathfrak{A})$ -də ehtimal ölçüsüdür. $H(t)$ -də $\pi(\cdot | h)$ daralması $\pi_t(\cdot | h)$ kimi işarə olunur. [14], [20]-də göstərilmişdir ki, h üzrə ölçülənliyi daha zəif universal ölçülənlik

şerti ilə əvəz etdikdə strategiya anlayışını genişləndirmək bəzən məqsədə uyğun olur; belə π -lər universal ölçülən strategiyalar adlanır. Strategiyaların varlığı üçün hər bir t qiymətində nöqtəvi – çoxluq inikası $h \rightarrow A(h)$, $h \in H_t$ üçün ölçülən seçimin mümkünlüyü zəruri və kafidir [yeni bu inikası ölçülən selektorunun olması, başqa sözlə, $\varphi_t(h) \in A(h)$ olan $\varphi_t: H_t \rightarrow A$ inikasının varlığı]. Bu şərtin idarəolunan obyektlərin tərifində əks olunması təbii bir faktordur. Selektorların ixtiyarı $\{\varphi_t\}_{t \geq 1}$ toplusuna hər bir h_t tarixində $\varphi_t(h_t)$ idarəetməsindən istifadəni təyin edən randomlanmış $\pi_t(\beta|h) = 1_\beta(\varphi_t(h))$, $h \in H_t$, $t \geq 1$ strategiyası uyğundur; digər π -lər randomlanmış strategiyalar adlanır. H_∞ ilə (1) şəkilli sonsuz h_∞ ardıcılıqlarının – trayektoriyaların fəzası işarə olunur. İonesku Tulci teoreminin köməyi ilə ixtiyari $x \in X$ başlanğıc vəziyyəti və ixtiyari universal ölçülən π strategiyasına H_∞ -da ələ yeganə P_x^π ölçüsü qarşı qoyulur ki, o, aşağıdakı şərtləri ödəmiş olsun:

$$\left. \begin{aligned} P_x^\pi \{x_0 = x\} &= 1 \\ P_x^\pi \{a_{t+1} \in B | x_0 a_1 \dots x_t\} &= \pi(B | x_0 a_1 \dots x_t) \\ &\quad (P_x^\pi - \text{sanki yəqin}) \\ P_x^\pi \{x_{t+1} \in \Gamma | x_0 a_1 \dots x_t a_{t+1}\} &= p(\Gamma | x_0 a_1 \dots x_t a_{t+1}) \\ &\quad (P_x^\pi - \text{sanki yəqin}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$B \in \mathcal{A}, \quad \Gamma \in \mathcal{X}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$

$\{x_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$ təsadüfi prosesi ehtimal paylanması P_x^π , başlanğıc vəziyyəti x və universal ölçülən strategiyası π olan idarəolunan Z obyekti üçün alınmış diskret zamanlı i. t. p.-dir. P_x^π ölçüsünə müvafiq riyazi gözləmə M_x^π ilə işarə olunur.

Keçid funksiyası p əvəzinə bəzən sistemin tənliyi

$$x_{t+1} = f(h_t, a_{t+1}, \xi_{t+1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

verilir, burada $\{\xi_t\}_{t \geq 1}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Bu cür yanaşmanın geniş şərtlərdə yuxarıdakı tənflə eyni-güclü olduğu müəyyən olunur (bax, [19]).

Əgər

$$A(h_t) = A_t(x_t), \quad p(\cdot | h_t a_{t+1}) = p_t(\cdot | x_t a_{t+1}), \quad t \geq 0$$

olarsa, onda idarəolunan obyekt idarəolunan Markov zənciri adlanır [əgər $A_t(x) = A_x$, $p_t(\cdot | x a) = p(\cdot | x A)$, $a \in A(x)$, $x \in X$ olarsa, idarəolunan bircins Markov zənciri adlanır].

Əgər $\pi_t(\cdot | h_t) = \pi_t(\cdot | x_t)$, $t \geq 0$ olarsa, π Markov strategiyası, əgər bu şərtlə yanaşı $\pi_t(\cdot | x) = \pi(\cdot | x)$, $x \in X$ də olarsa, π stasionar Markov strategiyası adlanır. Əgər idarəolunan Markov zəncirinə Markov strategiyası (bircinslə – stasionar) tətbiq olunursa, onda $\{x_t\}_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesi Markov zənciri (bircins) olur.

Ən çox öyrənilən idarəetmə məsələsi

$$w^\pi(x) = M_x^\pi \Phi(h_\infty) \quad (3)$$

– gözlənilən gəlir kriterisinin maksimizasiyasıdır, burada Φ , H_∞ -da ölçülən (və ya heç olmasa universal ölçülən) funksionaldır; (Z, Φ) cütü model (3) funksiyası isə verilmiş modeldə π strategiyasının statistik qiyməti adlanır. Bəzən Φ əvəzinə yaxınlaşdırıcı $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ funksionallar ardıcılığına baxılır, strategiyanın statistik qiyməti kimi

$$w^\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_x^\pi \Phi_n(h_\infty)$$

kriterisi anlaşılır (maksimizasiya məsələsində aşağı limit yuxarı limitdən daha təbii bir faktordur, belə ki, o, n -in böyük qiymətlərində zəmanətlənmiş orta gəlirə uyğun olur). Ən mühüm misal bir addıma orta gəlir kriterisidir:

$$w^\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_x^\pi \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r(x_{t-1}, a_t)$$

(bax, idarəolunan Markov zənciri). Strategiyaların daxil olunan statistik qiymətlərinin məna daşımaları üçün model üzərində bu və ya digər cəmləmə şərtləri qoyulur.

Optimallığı əlamətlərini ifadə etmək məqsədilə P_x^π ölçüləri, M_x^π riyazi gözləmələri və (3) statistik qiymətlərini $x \in X \subset H$ üçün ixtiyari $h \in H$ tarixlərinə genişləndirmək məqsədə uyğundur. (2) tərifində x -i $h \in H_n$, $n > 0$ ilə əvəz etdikdə, birinci münasibət

$$P_h^\pi \{(x_0 a_1 \dots x_n) = h\} = 1$$

münasibətlə əvəz olunur, digərlərində $t \geq n$ hesab olunur.

Modelin dəyəri (və ya qiyməti)

$$w(h) = \sup_{\pi} w^\pi(h), \quad h \in H$$

kimi təyin olunur. H_t -də w və w^π daralmaları w_t və w_t^π kimi işarə olunur; əksər hallarda dəyər kimi yalnız w_0 anlaşılır. Sonradan $w(h)$ -in bütün h -lar üçün sonlu olduğu fərz olunur. Əgər $w^\pi(x) = w(x)$ olarsa, π $x \in X$ vəziyyətində optimal strategiya, bütün $x \in X$ üçün $w^\pi(x) = w(x)$ olarsa, π müntəzəm optimal strategiya, bütün $h \in H$ üçün $w^\pi(h) = w(h)$ olarsa, π – səbatlı (rus. неуклонно) optimal strategiya adlanır. Əgər $w^\pi(x) \geq w(x) - g(x)$, $x \in X$ bərabərsizliyi X -də ixtiyari $g \geq 0$ funksiyası üçün ödənilsə, π strategiyası g – optimal strategiya adlanır ($g = \text{const} = \varepsilon > 0$ olduqda alınan ε – optimal strategiyalar xüsusi seçilir). Praktiki məsələlərdə yalnız hər hansı vəziyyətdə optimal strategiyaya yaxın strategiyalar lazım olur, lakin dinamik proqramlaşdırmanın buradakı əsas metodu müntəzəm optimal, hətta səbatlı optimal strategiyalara yaxın strategiyaların cəlb olunmasını tələb edir və belə strategiyaların yerinə yetirir və buna görə də, bunlar ümumi nəzəriyyənin öyrənilməsi predmeti olmuşdur.

Φ funksionalı yalnız $h_N = h_N(h_\infty)$ -dan asılı olduqda ($N \leq \infty$) modelin üfûqü adlanır.

Ənənəvi dinamik proqramlaşdırma

$$\Phi(h_\infty) = \sum_{t=1}^{\infty} R_t(h_t), \quad (4)$$

burada R_t hər bir t addımında gəlir kimi interpretasiya olunur.

Əgər $R_t \geq 0$ ($R_t \leq 0$) bütün t -lər üçün ödənilərsə, onda model müsbət (mənfi) model adlanır. (4) funksionalları üçün $n \geq 0$ anından başlayaraq statistik qiymətlər və dəyərlər daxil olunur:

$$\bar{w}_n^\pi(h_n) = \mathbf{M}_h^\pi \sum_{t>n} R_t(h_t),$$

$$\bar{w}_n(h) = \sup_{\pi} \bar{w}_n^\pi(h), \quad h \in H_n.$$

Əgər Z idarəolunan Markov zənciridir və (4)-də

$$R_t(h_t) = \left[\prod_{i=1}^t \beta_i(x_{i-1} a_i x_i) \right] r_t(x_{t-1} a_t x_t), \quad t \geq 1$$

olarsa, model Markov modeli adlanır, $\beta_i > 0$.

Burada $r_t(xay)$ və $\beta_t(xay)$, $xay \in X \times A \times X$ – uyğun olaraq, cari ödəmə və t addımında diskontlama (və ya endirmə) əmsəlidir, adətən, $\beta_t \leq 1$ hesab olunur.

$$\bar{w}_n(h_n) = \left[\prod_{i=1}^n \beta_i(x_{i-1} a_i x_i) \right] v_n(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Markov modelində $v_n(x)$, $x \in X$, $-t = 0$ başlanğıc anı $t = n$ ilə əvəz olunduqda (Z, Φ) modelindən alınan model dəyəridir. Bircins Markov modelində (başqa cür stasionar dinamik proqramlaşmada) Z obyekt bircins idarəolunan Markov zənciridir, $r_t = r$ və $\beta_t = \beta$ funksiyaları isə t -dən asılı deyildir. Belə modeldə $v_n(x) = v(x) = w(x)$ n -dən asılı olmur. Bircins Markov zəncirində, adətən, $\beta = \text{const}$ olduğu fərz olunur; əgər $\beta < 1$ olarsa, (Z, Φ) diskontlu model, $\beta = 1$ olarsa, diskontsuz model adlanır. Z bircins idarəolunan Markov zənciri, $\beta_t \equiv 1$ və

$$r_t(xay) = \begin{cases} r(xay), & 1 \leq t \leq N \\ R(x), & t = N + 1 \\ 0, & t > N + 1 \end{cases}$$

olan qeyri – bircins Markov zənciri, o qədər də düzgün olmayaraq sonlu N üfüqlü bircins Markov modeli kimi adlandırılır. X -də R funksiyası final ödəmə adlanır.

Ümumi halda və (4) funksionallı modellərdə H_t -dəki funksiyalar H_{t-1} -dəki funksiyalara çevirən, Markov modellərində X -dəki funksiyalar X -dəki funksiyalara çevirən yenidənqiymətləndirmə operatorları mühüm rol oynayır. Uyğun modellərdə $t = 1, 2, \dots$ olduqda

$$\left. \begin{aligned} U_t^\alpha f(h) &= \int_X f(hay) p(dy | ha), \\ \bar{U}_t^\alpha f(h) &= \int_X [R_t(hay) + f(hay)] p(dy | ha) \end{aligned} \right\}$$

$$a \in A(h), \quad h \in H_{t-1},$$

$$T_t^\alpha f(x) = \int_X [r_t(xay) + \beta_t(xay)f(y)] p_t(dy | xa),$$

$$a \in A_t(x), \quad x \in X$$

olur.

Ümumi modeldə

$$U_t f(h) = \sup_{a \in A(h)} U_t^\alpha f(h),$$

$$U_t^\pi f(h) = \int_A U_t^\alpha f(h) \pi(da | h), \quad h \in H_{t-1}$$

götürülür, burada π – ixtiyari strategiyadır; (4) funksionallı modeldə U_t və U_t^π operatorları analoji qaydada daxil olunur. Markov modelində

$$T_t f(x) = \sup_{a \in A_t(x)} T_t^\alpha f(x),$$

$$T_t^\pi f(x) = \int_A T_t^\alpha f(x) \pi_t(da | x), \quad x \in X$$

götürülür, burada π – Markov strategiyasıdır (bircins Markov modelində $T_t^\alpha = T^\alpha$ və $T_t = T$ t -dən asılı deyildir). Dinamik proqramlaşma mülahizələri optimallıq tənliyinə (və ya Bellman tənliyinə) gətirilir və bu tənlik uyğun modellərdə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\left. \begin{aligned} w_{t-1}(h) &= U_t w_t(h), \\ \bar{w}_{t-1}(h) &= \bar{U}_t \bar{w}_t(h), \end{aligned} \right\} h \in H_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5)-(6)$$

$$v_{t-1}(x) = T_t v_t(x), \quad x \in X, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

bircins Markov modelində isə

$$v(x) = T v(x), \quad x \in X$$

kimi, nəhayət, sonlu üfüqlü bircins Markov modelində

$$v_{t-1}(x) = T v_t(x), \quad x \in X, \quad 1 \leq t \leq N \quad (8)$$

sistemi kimi ifadə olunur.

X qeyri – hesabi olduqda bu tənliklərin əsaslandırılması hətta sonlu üfüq üçün də trivial olmur. Lakin, əgər əvvəldən məlum olarsa ki, sonlu N üfüqündə dəyər optimallıq tənliklərini ödəyir, onda o, uyğun final şərtində $t = 1, 2, \dots, N$ olan bu tənliklərin yeganə həlli olur [(5) sistemi üçün $w_N = \Phi$, (6) sistemi üçün $\bar{w}_N = 0$, (7) sistemi üçün $v_N = 0$, (8) sistemi üçün $v_N = R$]. Sonlu üfüq olduqda optimallıq tənliklərinin həllinin varlığından bir çox hallarda həllin modelin dəyəri olduğu nəticəsinə gəlmək olur.

Optimal strategiyalar yenidənqiymətləndirmə operatoru terminləri ilə də xarakterizə olunur. İxtiyari sabitli π optimal strategiyası (Markov modelində Markov strategiyası)

364 İDARƏOLUNAN

$$\left. \begin{aligned} w_{t-1}(h) &= U_t^\pi w_t(h), \\ \bar{w}_{t-1}(h) &= \bar{U}_t^\pi \bar{w}_t(h), \end{aligned} \right\} h \in H_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$v_{t-1}(x) = T_t^\pi v_t(x), \quad x \in X, \quad t = 1, 2, \dots,$$

dəyərini qoruyur və yaxşılaşmayan strategiyadır, yeni

$$\left. \begin{aligned} w_{t-1}^\pi(h) &= U_t w_t^\pi(h), \\ \bar{w}_{t-1}^\pi(h) &= \bar{U}_t \bar{w}_t^\pi(h), \end{aligned} \right\} h \in H_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

$$v_{t-1}^\pi(x) = T_t v_t^\pi(x), \quad x \in X, \quad t = 1, 2, \dots$$

Sonlu üfüqdə bu şərtlərin hər biri strategiyanın səbatlı optimallığı üçün kifayətdir. Sonsuz üfüqdə strategiyanın səbatlı optimallığı üçün π -nin qoruyucu və düzəldici strategiya, yaxud yaxşılaşmayan və asimptotik müsbət statistik qiyməti olan strategiya olması zəruri və kafidir; (4) funksionalı modeller üçün bu şərtlər uyğun olaraq,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_h^\pi \bar{w}_n(h_n) &= 0, \quad h \in H \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_h^\sigma \bar{w}_n^\pi(h_n) &\geq 0, \quad \text{əgər } \bar{w}^\sigma(h) \neq \infty, \quad h \in H \text{ olarsa} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

şəklində ifadə olunur, burada σ ixtiyari strategiyadır. (9) düsturunu «=» işarəsi evəzinə « $\geq$ » işarəsi ilə həmişə doğrudur. Ona görə də, mənfi modeldə ixtiyari strategiya düzəldici strategiya olur, müsbət modeldə asimptotik müsbət statistik qiymətə malik olur.

Hesabi olmayan X , A fəzaları halında optimallıq tənliklərinin əsaslandırılması üçün modelin dəyəri w və ya v -nin (heç olmasa universal olaraq) ölçülən olduğunu və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε -optimal strategiyaların (heç olmasa universal ölçülən) olduğunu bilmək lazımdır. Bunların hər ikisi aşağıdakı iki sualı doğurur: 1) U_t və ya T_t operatorları funksiyaların ölçülənliyini (universal) saxlayırmı; 2) $h \rightarrow A(h)$, $h \in H_{t-1}$ inikasının ölçülən (universal) ele $a = \varphi_t(h)$ selektorları və ya $x \rightarrow A_t(x)$, $x \in X$ inikasının $a = \varphi_t(x)$ selektorları varmı ki, bunlar uyğun olaraq ixtiyari $\varepsilon > 0$ dəqiqliklə $a \in A(h)$ üzrə sanki bütün $h \in H_{t-1}$ üçün eyni zamanda $U_t^\pi w_t(h)$ kəmiyyətinə supremumu və ya $a \in A_t(x)$ üzrə sanki yəqin bütün $x \in X$ üçün eyni zamanda $T_t^\pi v_t(x)$ kəmiyyətinə supremumu təmin etsinlər.

Sonlu üfüqlü modellərdə hər iki suala müsbət cavab optimallıq tənliyinin çıxarılması üçün kifayətdir, sonsuz üfüqdə digər mülahizələrdən istifadə olunur. U_t və ya T_t operatorlarının funksiyaların bu və ya digər «yaxşı» sinfini invariant saxlayan və tələb olunan selektorlara malik olan müxtəlif tip modelləri məlumdur. Belə modellərdən mühümləri aşağıdakılardır. Yuxarıdan səmi-kəsilməz model (ən sadə variantda) aşağıdakı şərtlərlə təyin olunur: 1) X və A separabel metrik fəzalardır; 2) A kompaktdır və D_t , $t \geq 1$ çoxluqları qapalıdır; 3) p keçid funksiyası Feller funksiyasıdır, yəni $t = 1, 2, \dots$ olduqda, X -də ixtiyari f kəsilməz məhdud funksiyası üçün

$$F(ha) = \int_X f(x) p(dx|ha), \quad ha \in D_t$$

funksiyası D_t -də kəsilməzdir; 4) Φ funksionalı H_∞ -də yuxarıdan məhdud və yuxarıdan səmi-kəsilməzdir (fəzaların hasilində Tixonov topologiyasına baxılır); 5) (4) funksionalı halında R_t -dən olan hər bir funksiya da yuxarıdan məhdud və yuxarıdan səmi-kəsilməzdir.

Markov modelində β_t və r_t funksiyaları yuxarıdan məhdud-durlar, β_t kəsilməzdir, r_t isə yuxarıdan səmi-kəsilməzdir. Yuxarıdan səmi-kəsilməz modeldə w_t , $\bar{w}_t$ və ya v_t dəyərləri yuxarıdan məhdud və yuxarıdan səmi-kəsilməzdir (və buna görə də, ölçüləndir). U_t , $\bar{U}_t$ və ya T_t yuxarıdan səmi-kəsilməz funksiyaları belə funksiyalara çevirən operatorlardır, dəqiq supremumu təmin edən ölçülən φ_t selektorları da vardır; optimallıq tənliyi ödənilir və randomlanmayan səbatlı optimal strategiyalar (Markov modelində – Markov, bircins Markov modelində – stasionar strategiyalar) mövcuddur (son nəticələr [19], [23]-də alınmışdır). Borel modeli aşağıdakı şərtlərlə verilir: 1) X və A standart Borel fəzalardır; 2) D_t , $t \geq 1$ çoxluqları və $p(\Gamma|\cdot)$ keçid funksiyası Borel mənada ölçüləndir; 3) Φ funksionalı Borel – ölçülən funksionaldır; 3') (4) funksionalı halında R_t funksiyaları Borel – ölçülən funksiyalardır; 3'') Markov modelində β_t və r_t funksiyaları Borel – ölçülən funksiyalardır. Borel modelində U_t , $\bar{U}_t$ və ya T_t operatorlarının təsirindən sonra Borel funksiyaların sinfi invariant qalır, dəyər Borel funksiyası deyil, yalnız universal ölçülən ola bilər. Ölçülən φ_t selektorları isə, ümumiyyətlə, ε -a qədər dəqiqliklə h və ya x -in yalnız sanki hamısı üçün (lakin hamısı üçün deyil) supremumu təmin edir (H_{t-1} və ya X -də əvvəlcədən seçilmiş ixtiyari ölçü üzrə), optimallıq tənliyi doğrudur. Yuxarıdan səmi-analitik modeldə (Borel modeli xüsusi halı olan) daha çox sonuclanmış nəticələr alınır (bax, [14], [20], [24]); burada X , A , $A(h)$, P və β_t üzərinə qoyulan eyni şərtlər saxlanılır, Φ , R_t və ya r_t isə yuxarıdan səmi – analitik funksiyalar fərz olunur (belə funksiyalar üçün $\{z: f(z) > c\}$ sədlı çoxluqlar analitik çoxluqlardır).

Yuxarıdan səmi – analitik modeldə U_t , $\bar{U}_t$ və T_t operatorları yuxarıdan səmi – analitik funksiyaları elə yuxarıdan səmi – analitik funksiyalara çevirir, w_t , $\bar{w}_t$ dəyərləri və ya v_t yuxarıdan səmi – analitik funksiyalardır (buna görə də, universal ölçüləndir), H_{t-1} və ya X -də hər yerdə ε -a qədər dəqiqliklə uyğun supremumları təmin edən universal ölçülən φ_t selektorları vardır (supremumun alındığı h və x -lər üçün hətta supremumu hökmən təmin edən). Bu modeldə optimallıq tənliyi ödənilir və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε -optimal universal ölçülən strategiyalar vardır.

Bu və ya digər modellərdə hər hansı bir K sinfinin strategiyalarının kafiliyi sualı böyük maraq doğurur. Kafilik müxtəlif mənalarda anlaşılır: 1) w^π statistik qiymətlərinin $\pi \in K$ üzrə supremumu w dəyərinə (qiymətinə) bərabərdir; 2) K sinfinə daxil olan optimal (ε -optimal və s.) π strategiya vardır; 3) ixtiyari σ strategiyası üçün $w^\pi \geq w^\sigma$ şərtini ödəyən $\pi \in K$ strategiyası vardır və s. K sinfi kimi randomlanmamış

strategiyalar çoxluğuna, Markov, stasionar, semi – Markov (yəni x_0 və x_1 elementləri və h_t tarixindən asılı olan) strategiyalar çoxluqları və bəzi başqa çoxluqlara baxılır. Ölçülənlik şərti olmadığı hesabı fəzaları diskret zamanlı i. t. p. üçün bu suallar olduqca önə çəkilmişdir. Məs., mənfii bircins Markov modelində Markov statistikaları kafi olduğu halda, stasionar strategiyalar [1] anlamında kifayət olmur və ya müsbət bircins Markov modelində stasionar ε – optimal strategiyalar olmaya bilər, lakin stasionar εv – optimal strategiyalar mövcuddur. Belə növ nəticələr haqqında məlumatlar [25], [26]-də şərh olunmuşdur.

X və A -nın sonlu fəzalar olduğu bircins Markov modelləri üçün dəyər və optimal strategiyaların tapılması üçün hesablama alqoritmləri daha çox işlənmişdir. Bu ən əvvəl interaktiv qaydalar (üfün böyüdülməsindən və ya strategiyaların təcridcən yaxşılaşmasından ibarət) və xətti proqramlama metodlarıdır.

Natamam informasiyalı diskret zamanlı i. t. p.-də t anında x_t vəziyyəti (y_t, z_t) cütüdür, burada y_t müşahidə olunan, z_t müşahidə olunmayan komponentlərdir. $A(h_t)$ çoxluqları və $\pi(B|h_t)$ strategiyaları burada yalnız müşahidə olunan $y_0 a_1 \dots y_t$ tarixindən asılı olur. Başlanğıc vəziyyəti kimi (y, μ) cütü götürülür, burada μ müşahidə olunmayan z_0 komponentinin apriori paylanmasıdır. Bu cür Beyes yanaşmasında t anında z_t komponentlərinin μ_t paylanmaları kafi statistikalar olur və (y_t, z_t) -nin (y_t, μ_t) ilə formal əvəz olunması məsələni tam informasiyalı prosese gətirir. Bu nəticə natamam məlumatlar üzrə optimal idarəetmənin spesifik çətinliklərini aradan qaldırmır. Beyes yanaşmasından başqa minimaks yanaşma da mümkündür. Diskret zamanlı adaptiv i. t. p.-lər də araşdırılır ki, bu halda idarə olunan obyekt tam şəkildə məlum olmur və funksionalın maksimizasiyası obyektin parametrlərinin identifikasiyası ilə eyni zamanda həll olunur (bax, [21]).

Diskret zamanlı i. t. p.-in ümumi sxemi hər biri digərindən asılı olmayan tədqiqat oblasına çevrilən bir çox istiqamətləri əhatə edir. Bu (diskret zaman halında) ən yaxşı seçim məsələsi, optimal dayanma, ehtiyatları idarəetmə, ikiqollu bandit məsələsi, Kalman – Byusi filtri, iqtisadiyyatın ehtimal modelləridir.

Bax, *İdarə olunan Markov zənciri, Dinamik proqramlama, həssas kriterilər*.

Əd.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Беллман Р., «J. Math. Mech.», 1957, v. 6, p. 679–84; [3] Ховард Р.-А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [4] Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 719–26; [5] Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 226–35; [6] Blackwell D., «Proc. 5-th Berk. Symp.», 1967, v. 1, p. 415–18; [7] Strauch R. E., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, p. 871–90; [8] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must, N. Y., 1965; [9] Ширяев А. Н., «Trans. 3-rd Prague Conf. Inform. Theory...», 1964, p. 657–81; [10] Ширяев А. Н., «Trans. 4-th Prague Conf. Inform. Theory...», 1967, p. 131–203; [11] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, с. 3–18; [12] Крылов Н. В., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, с. 747–50; [13] Hinderer K., Foundations of non-stationary dynamic programming, B., 1970; [14] Blackwell D., Freedman D., Orkin M., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, p. 926–41; [15] Hordijk A., Dynamic programming and Markov potential theory, Amst., 1974; [16] Striebel C. H., Optimal control of discrete time stochastic systems, B., 1975; [17] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [18] Майн Х.,

О с а к и С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [19] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [20] Бертсекас Д., Шрив С., Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени, пер. с англ., М., 1985; [21] Срагович В. Г., Адаптивное управление, М., 1981; [22] Whittle P., Optimization over time, v. 1–2, N. Y., 1982–83; [23] Schall M., «Proc. 6-th Conf. Probab. Theory», Bus., 1981, p. 205–19; [24] Юшкевич А. А., Читашили Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [25] Файнберг Е. А., Сонин И. М., Statistics and control of stochastic processes: Steklov seminar 1984, N. Y., 1985, p. 69–101.

İDARƏOLUNMA « управляемость; controllability » – ixtiyari başlanğıc vəziyyətdən keçən müddət ərzində idarə olunan sistemin ixtiyari vəziyyətinə çatma bilinəmə mümkünlüyüdür. x , $-n$ – ölçülü vəziyyət vektoru, u , $-n$ – ölçülü idarəetmə vektoru, $A(t)$, $B(t)$ – uyğun olaraq, $n \times n$ və $n \times r$ – ölçülü matrislər olsun; $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ xətti sistemi $[s, t]$ zaman parçasında, yalnız və yalnız,

$$\int_s^t F(t, v) B(v) B^T(v) F^T(t, v) dv$$

matrisinin cırlaşmayan olduğu halında idarə olunan sistemdir (F sistemin keçid matrisidir).

Əgər A , B zamandan asılı olmayan sabitlərdirsə, onda

$$\text{rang} [BAB^T B \dots A^{n-1} B] = n$$

şərti idarə olunma şərti adlanır. Bu halda (A, B) matrislər cütü idarə olunan adlandırılır.

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bdw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli olan $x(t)$ Gauss prosesinin hər bir $t > 0$ qiymətində cırlaşmayan kovariasion matrisi, yalnız və yalnız, o halda vardır ki, (A, B) idarə olunan matrislər cütü olsun. İ. anlayışı Kalman – Byusi filtrinin asimptotik xassələrinin araşdırılmasında və sonsuz zaman intervalında stoxastik xətti sistemləri idarəetmə məsələlərində mühüm rola malikdir.

Əd.: [1] Kalman R. E., «Bol. Soc. Mat. Mexicana», 1960, v. 5, p. 102–19; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Дэвис М. Х. А., Линейное оценивание и стохастическое управление, пер. с англ., М., 1984.

İDEAL QAZ « идеальный газ; ideal gas » statistik mexanika da – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklərin sonsuz sistemidir (xarici meydan olmadığı halda sərbəst qaz nəzərdə tutulur). İ. q. üçün ehtimali terminologiyada Gibbs təsadüfi meydanı – hissəcikləri sıxlığı $\lambda > 0$ parametri ilə təyin olunan Puasson nöqtəvi prosesidir (λ -nın qiyməti Gibbs konfigurasiya paylanmasının ümumi tərifində z -in aktivliyi ilə üst-üstə düşür). Sürətlər nəzərə alındıqda bu proses eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $p \in \mathbb{R}^d$ nişanlarlı (impuls- larlı), $\mathbb{R}^d$ -də Puasson – nişanlanmış nöqtəvi təsadüfi meydanıdır. Impulsun «fərdi» («individual») paylanması paylanmasının sıxlığı

$$(2\pi\beta^{-1})^{-d/2} \exp\left(-\beta \|p\|^{d/2}\right)$$

olan Maksvell paylanmasıdır. Lakin i. q. halında Gibbs paylanması invariant ölçülər çoxluğunu tamamilə əhatə etmir (bax, *Dinamik sistem(i) statistik mexanikanın*): Maksvell paylanmasını ixtiyari impuls paylanması $\pi(dp)$ ilə əvəz

etmək olar, $p \in \mathbb{R}^d$. Belə invariant ölçülü l. q. dinamik sistemi sadəlik naminə l. q.-ın tarazlıqlı dinamik sistemi adlanır. Əgər π -nin sıfırda atomu yoxdursa, l. q.-ın tarazlıqlı dinamik sistemi K – sistemdir (bax, [1]) və bundan başqa, hətta B – sistemdir (bax, [2]). Əgər başlanğıc vəziyyəti μ əvəzinə M faza fəzasında ixtiyari, lakin bəzi «ortalama» və fəzavi korrelyasiyaların zəifləndirilməsi şərtlərini ödəyən ehtimal ölçüsü götürülərsə, onda $\mu_t = \mu_0 S_t$ ölçüsü $t \rightarrow \pm\infty$ olduqda təsvir olunmuş tip invariant ölçüyə yığılır. $\lambda > 0$ və $\pi(dp)$ parametrləri μ ölçüsü üzrə təyin olunurlar.

l. q. dinamik sistemine harmonik ossilyatorlar sistemi yaxındır, burada invariant ölçülər kimi uyğun spektral funksiyaları ilə Gauss paylanmaları iştirak edir (bax, [3]).

l. q. dinamik sistemi statistik mexanikanın tamamilə inteqrallanan sisteminin ən sadə misalıdır; digər misal $\mathbb{R}$ düzxətti üzərində bərk oxlu dinamik sistemdir ki (bax, [2], [4], [5]), bu sistemin araşdırılması l. q. araşdırılmasına gətirilə bilər. Son zamanlar l. q.-ın «kükrentilərinin» öyrənilməsinə başlanılmışdır (bax, [6], [7]). Lorens qazı xüsusilə qeyd olunmalıdır, belə ki, o, l. q. ilə müqayisədə daha güclü ergodik xassələri aşkar edir.

Əd.: [1] Волковысский К. Л., Синяй Я. Г., «Функц. анализ и его прилож.», 1971, т. 5, в. 3, с. 19–21; [2] Aizenman M., Goldstein S., Lebowitz J., «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 39, № 4, p. 289–301; [3] Lanford O., Lebowitz J., в кн.: Lecture Notes in Physics, v. 38, Berk. – [a. o.], 1975, p. 144–77; [4] Синяй Я. Г., «Функц. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, в. 1, с. 41–50; [5] Добрушин Р. Л., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 147–254; [6] «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 101, p. 363–82; [7] Malyshev V. A., Nikolaev I., «J. Stat. Phys.», 1984, v. 35, № 3–4, p. 375–79; [8] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 78, № 4, p. 479–97.

IDEAL METRIKA «идеальная метрика; ideal metric» s tertib ideal metrika – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathfrak{X}$ -də ehtimal metrikasıdır ki, $\mathfrak{X}$ -də hər hansı Ψ kommutativ əməlinə nəzərən requlyarlıq xassəsinə malikdir, yəni

$$\mu(X \Psi Z, Y \Psi Z) \leq \mu(X, Y) \quad (1)$$

və eyni zamanda müsbət ədədlərin multiplikativ qrupuna izomorf olan $T_c: \mathfrak{X} \leftrightarrow \mathfrak{X}$, $c > 0$ inikəs qrupu üçün s tertib bircins metrikadır, yəni

$$\mu(T_c X, T_c Y) = c^s \mu(X, Y). \quad (2)$$

Bu halda ehtimal metrikaları üçün tam mənada ehtimal metrikaları kimi sadə və mürekkəb l. m.-lar da təyin oluna bilər.

Misallər. Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda $T_c X = cX$ çevirməsi və $X \Psi Y = X + Y$ əməlinə nəzərən mürekkəb l. m. halında requlyarlıq «geniş» mənada, sadə l. m. halında «dar» mənada anlaşılır (Ehtimal metrika; requlyarlıq).

1. $\mu(X, Y) = \mathbf{M}|X - Y|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, – α tertib mürekkəb l. m.-dır.

2. $\mu_2(X, Y) = \sup \{ |\mathbf{M}((X+x)^s - (Y+x)^s)| : x \in \mathbb{R}^1 \}$, – s tertib sadə l. m.-dır (s tam ədəddir və ≥ 1). μ_2 metrikasının sonlu olması üçün zəruri şərt

$$\mathbf{M}(X^k - Y^k) = 0, \quad k = 1, \dots, s-1 \quad (3)$$

sistem tənliklərinin ödənilməsidir. (3) ödənilmədiyi halda l. m.

$$\mu_2 = |\mathbf{M}(X^s - Y^s)| \text{ düsturu ilə ifadə olunur. } \mu_2(X, Y) = 0$$

bərabərliyi isə $F_X = F_Y$ bərabərliyini doğurmur, burada F_X , – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

3. m tam ədəd və $0 < \gamma \leq 1$ olduqda, $s = m + \gamma > 0$ olsun. D_s , – m tertib töremləri olan,

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq |x - y|^\gamma, \quad x, y \in \mathbb{R}^1$$

şərtini ödəyən, $\mathbb{R}^1$ -də məhdud f funksiyalarının çoxluğu olsun;

$$\zeta_s(X, Y) = \sup \{ |\mathbf{M}(f(X) - f(Y))| : f \in D_s \}_s$$

s tertib sadə l. m.-dır. $s \geq 1$ tam ədəd olduqda bu metrika aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\zeta_s(X, Y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int \left| \int_{-\infty}^x (x-t)^{s-1} d(F_X(t) - F_Y(t)) \right| dx,$$

burada Γ – gamma funksiyadır.

4. f_X , – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası olsun. İxtiyari həqiqi s üçün

$$\mu_3(X, Y) = \sup \{ |t|^{-s} |f_X(t) - f_Y(t)| : \mathbb{R}^1 \}$$

– s tertib sadə l. m.-dır.

5. $L(X, Y)$ – Levi metrikası olsun, onda

$$\mu_4(X, Y) = \sup \left\{ \frac{2}{r^2} \int_0^r L(xX, xY) dx : r > 0 \right\}$$

birinci tertib sadə l. m.-dır. Əgər ρ müntəzəm metrika və $F_X^{-1}(x) = \sup \{ u : F_X(u) \leq x \}$, – F_X funksiyasına tərs funksiya olarsa, bu metrika digər şəkildə –

$$\mu_4(X, Y) = \rho(F_X^{-1}, F_Y^{-1})$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Digər modellərdə l. m.-ya aid misallar.

6. $\mu_5(X, Y) = \sup \{ |x|^s |F_X(x) - F_Y(x)| : x \in \mathbb{R}^1 \}$, $s \geq 0$ – $T_c X = cX$ çevirməsi və $X \Psi Y = \max(X, Y)$ əməlinə nəzərən s tertib sadə l. m.-dır.

7. $\mu_6(X, Y) = \sup \{ |t|^{-s} |W_X(t) - W_Y(t)| : t \in \mathbb{R}^1 \}$, $s \geq 0$ $T_c X = |x|^s \operatorname{sign} x$ çevirməsi və $X \Psi Y = XY$ əməlinə nəzərən sadə l. m.-dır, burada W_X , – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik çevirməsi, $\|\cdot\|$ – matrislər normasıdır.

8. Ehtimal metrikaları müxtəlif Ψ kommutativ əməllərinə nəzərən l. m. ola bilər. Mes., orta metrika $X \Psi Y = X + Y$, $X \Psi Y = \max(X, Y)$ əməllərinə və $T_c X = cX$ çevirməsinə nəzərən, $s = 1$ tertib sadə l. m.-dır.

l. m.-lar xətti modellərlə əlaqəli xarakterizasiya məsələlərində (xüsusilə də, limit teoremlərinin yığılma sürətinin qiymətləndirilməsində) dayanıqlılığı kəmiyyətə analiz etməkdə münasib aletdir.

$X_1, \dots, X_n, -M, X_1 = 0, M, X_1^2 = 1$ şərtlərini ödəyən eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $Y_1, \dots, Y_n$ – standart normal qanuna tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, $S_n^* = (Y_1 + \dots + Y_n)/\sqrt{n}$ normalanmış cəmlərinə baxılır. S_n^* kəmiyyətləri n -in bütün qiymətlərində standart normal qanunla paylanır. $s > 2$ olduqda ζ_s metrikasının semi – additivlik və bircinslilik xassəsindən istifadə etdikdə

$$\begin{aligned} \zeta_s(S_n, Y_1) &= \zeta_s((X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}, (Y_1 + \dots + Y_n)/\sqrt{n}) = \\ &= n^{-s/2} \zeta_s(X_1 + \dots + X_n, Y_1 + \dots + Y_n) \leq \\ &\leq n^{-s/2} \sum_{k=1}^n \zeta_s(X_k, Y_k) = n^{1-3/2} \zeta_s(X_1, Y_1) \end{aligned} \quad (4)$$

olduğu alınır.

Əgər $\zeta_s(X_1, Y_1)$ sonlu olarsa, buna görə isə (3) və $M|X|^s < \infty$ şərtlərinin ödənilməsi tələb olunur, onda (4) qiymətləndirilməsi məzmunlu xarakter daşıyır və ümumi vəziyyətdə $n \rightarrow \infty$ olduqda $\zeta_s(S_n, Y_1)$ -in dəyişmə qaydasını düzgün ifadə edir.

Əgər Ψ əməli $\mathcal{X}$ -də qrup xarakterli olarsa, onda bu əmələ bağlı $s=0$ tərtib μ i. m.- xəttili invariant metrikdir, bu isə aşağıdakı mənada anlaşıdır: ixtiyari sabit a və $c > 0$ üçün

$$\begin{aligned} \mu(T_c(X \Psi a), T_c(Y \Psi a)) &= \mu(X, Y) \\ X, Y &\in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Belə i. m.-lar limit teoremləri nəzəriyyəsində xüsusi maraq doğurur, belə ki, bunlardan istifadə etdikdə $U_n = T_{1/C_n} X_n \Psi a_n$, $V_n = T_{1/C_n} Y_n \Psi a_n$ – təsadüfi kəmiyyətlərinin çevrilmiş ardıcılıqlarından çevrilməmiş X_n , Y_n ardıcılıqlarına keçdikdə və əksinə, approksimasiyanın dəqiqliyi dəyişmir.

İndikator metrikası və tam variasiya metrikası yuxarıda təsvir edilmiş ixtiyari Ψ əməlləri və T_c çevirmələri üçün $s=0$ tərtib i. m.-dır. T_c avtomorfizmlər sistemi olarsa, yeni ixtiyari $X, Y \in \mathcal{X}$ üçün $T_c(X \Psi Y) = (T_c X) \Psi (T_c Y)$, $c > 0$ olarsa, seçilmiş T_c və Ψ əməlinə nəzərən arzuolunan tərtib i. m.-nin qurulması üçün universal üsullar məlumdur. Məs., $\nu \Psi$ və T_c çevirməsinə nəzərən δ tərtib i. m. olsun. Əgər ν «dar mənada» requlyarlıq xassəsinə malik olarsa, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ olduqda Z təsadüfi kəmiyyəti X və Y -dən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət olarsa,

$$\mu(X, Y) = q\{x^\gamma \nu(X \Psi T_x U, Y \Psi T_x U)\}$$

funksionalını qurmaq olar və $q(w)$ funksionalı isə mənfi olmayan $w(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$ funksiyalarının $\mathfrak{W}$ çoxluğunda təyin olunmuşdur və ixtiyari $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{W}$ üçün aşağıdakı xassələrə malikdir.

- 1) $q(w) \geq 0$, $q(0) = 0$;
- 2) $q(w_1) \leq q(w_1 + w_2) \leq q(w_1) + q(w_2)$;

$$3) q(w(nc)) \leq c^\alpha q(w(u)), \quad c > 0;$$

$$4) q(cw) \leq c^\beta q(w),$$

burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ sabitlərdir. Onda $\mu \nu$ metrikasında olduğu kimi requlyarlıq tipi olan $s = d + \beta(\gamma + \delta)$ tərtib sadə i. m.-dir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986, гл. 1.

IDEMPOTENT ÖLÇÜ qrupda «идемпотентная мера на группе: idempotent measure on a group» – lokal kompakt qrupda $\mu * \mu = \mu$ xassəli ehtimal ölçüsü μ -dür, $*$ simvolu qrupda ölçülərin kompozisiya əməli (konvolusiya) işarəsidir.

Lokal kompakt G qrupunda təyin olunmuş ehtimal ölçülərinin semi – qrupunda $\mu * \mu = \mu$ tənliyinin həlləri çoxluğu G qrupunun kompakt altqruplarında Haar paylanmalarından ibarətdir (bax, [1]). Deməli, kompakt qrupda qeyri – trivial idempotent ölçülər mövcuddur, məs., bütün qrupun Haar ölçüsü kimi, lakin lokal kompakt qeyri – periodik qrupda (yəni vahid olmayan kompakt altqruplara malik olmayan) yalnız trivial idempotent ölçü vardır və bu ölçü qrupun vahidində cırlaşan paylanma ilə üst-üstə düşür.

i. ö.-yə baxılması kompakt qruplarda ehtimal paylanmaları üçün limit teoremlərində onların yaranması və burada onların mühüm rol oynaması ilə bağlıdır.

G kompakt qrupunda daşıyıcısı G ilə üst-üstə düşən i. ö.-nün xarakteristik xassəsi G -nin ixtiyari elementinə sağdan (və ya soldan) vurulmaya görə invariantlıq xassəsidir. Belə xassəli skalyar vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə ölçü ixtiyari lokal kompakt qrupda da təyin olunur və bu ölçü (sağ və ya sol) Haar ölçüsü adlanır (bax, [2]).

Əd.: [1] Хейс Р. Х., Вероятностные меры на локально-компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его приложения, пер. с франц., М., 1950.

İFLAS MƏSƏLƏSİ «разорения задача; ruin problem / gambler's ruin problem» – təsadüfi dolaşmanın verilən intervaldan kənara çıxışı ilə bağlı məsələdir. $X_1, X_2, \dots$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

$$\tau = \tau(a, b) = \min\{n : S_n \notin (-a, b)\}$$

$S_1, S_2, \dots$ ardıcılığının $(-a, b)$ intervalından ilk çıxış anıdır. $-a < 0 < b$. Əgər $X_j \neq 0$ olarsa, onda $P\{\tau < \infty\} = 1$ bərabərliyi həmişə ödənilir. i. m. $P\{S_\tau \leq -a\}$, $P\{S_\tau \geq b\}$ və

$$P\{S_\tau \in A, \tau = n\}, \quad P\{S_n \in B, \tau > n\}, \quad (*)$$

$$A \subset (-\infty, -a) \cup [b, \infty), \quad B \subset (-a, b)$$

– birgə paylanmalarının və onların ədədi xarakteristikalarının tapılması ilə bağlıdır. Bu araşdırmaların mühümlüyü riyazi statistika (Kolmoqorov kriterisi, Kolmoqorov – Smirnov kriterisi, Ardıcıl analiz), xidmət sistemi nəzəriyyəsində (məhdudiyyətli sistemlər), sığorta məsələlərində, ehtiyatların qorunub-saxlanması və s.-də çoxsaylı tətbiqlərlə əsaslandırılır.

Tarixən bu məsələ ayrı-ayrı partiyalar ardıcılığından ibarət, neticesi birqiymətli təyin olunmayan oyunlarla bağlı yaranmışdır. Hər bir partiyada, digər partiyaların nəticələrindən asılı olmayaraq,

İKİQAT STOXAŞTİK MATRİS « ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА; doubly stochastic matrix » – sətir elementlərinin cəmi və eyni zamanda sütun elementlərinin cəmi də 1-ə bərabər olan, $\|p_{ij}\|$ stoxastik matrisinə deyilir:

bütün i -lər üçün $\sum_j p_{ij} = 1$,

bütün j -lər üçün $\sum_i p_{ij} = 1$.

Əgər keçid ehtimalları matrisi İ. s. m. olan bir cins Markov zəncirinin bütün vəziyyətləri qeyri – periodik mühüm vəziyyətlərin yeganə bir sinfini təşkil edərsə (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı), onda vəziyyətlər sayı sonlu olarsa, bütün final ehtimalları bir-birinə bərabər olur, lakin vəziyyətlər sayı sonsuz olarsa, onda bütün bu vəziyyətlər ya qayıdırsız və ya sıfır vəziyyətlərdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

***İKİQAT STOXAŞTİK PUASSON PROSESİ (KOKS PROSESİ) « ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС; doubly stochastic Poisson process »** – nüvə təbəqəsində, optikada, elektrofiziologiyada və digər sahələrdə istifadə olunan *təsadüfi prosesdir* ([1], [2], [3]). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – hər hansı ehtimal fəzası, $R = (-\infty, +\infty)$; $\mathcal{B}$, – R -in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr; M – tamqiymətli hesabi – additiv Borel ölçülərinin çoxluğu; $\mathcal{M}$ –

$$B = \{N(\cdot) : N(A_1) = r_1, \dots, N(A_k) = r_k\}, \quad k \geq 1,$$

$$r_1 \geq 0, \dots, r_k \geq 0,$$

$$A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

tipli silindrik çoxluqların doğurduğu uyğun σ – cəbr; $\mathcal{Q}(\cdot)$, – $\mathcal{F}$ -də təyin olunmuş P paylanmasının doğurduğu $\mathcal{M}$ -də təyin olunmuş paylanma olsun. Daha sonra, $N(\cdot)$ – sayıcı ölçü, $\Lambda(\cdot) = MN(\cdot) \in W$ – hesabi – additiv Borel ölçülərinin çoxluğu, $\mathcal{U}$ –

$$C = \{\Lambda(\cdot) : \Lambda(A_i) = x_i, i = 1, \dots, k\},$$

$$A_i \in \mathcal{B}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad x \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad k \geq 1$$

tipli silindrik çoxluqların doğurduğu, W -dan olan altçoxluqların σ – cəbri olsun.

Əgər ixtiyari məhdud $B \in \mathcal{B}$ çoxluğu üçün

$$P\{N(B) = k\} = \frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

olarsa, $N(\cdot)$ nöqtəvi prosesi intensivlik ölçüsü $\Lambda(\cdot) \in W$ olan *Puasson nöqtəvi prosesi* adlanır; $N(B_1), \dots, N(B_n)$, – $n \geq 1$, $B_i \in \mathcal{B}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ şərtlərilə verilən ixtiyari çoxluqlar üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Xüsusi halda, $\lambda < \infty$ intensivlikli stasionar Puasson prosesi üçün $\Lambda(B) = \lambda|B|$, $B \in \mathcal{B}$ olur, $|B|$ – B

çoxluğunun Lebeq ölçüsüdür. İxtiyari $\Lambda(\cdot) \in W$ üçün $\mathcal{M}$ -də təyin olunmuş və (1) münasibətini ödəyən nöqtəvi prosesin paylanması olan yeganə $\mathcal{Q}_\Lambda(\cdot)$ ölçüsü vardır (bax, [4]).

$\pi(\cdot)$, – $(W, \mathcal{U})$ -də təyin olunmuş hər hansı ehtimal ölçüsü olarsa, paylanması $\int_W \mathcal{Q}_\Lambda(\cdot) \pi(d\Lambda)$ olan $N(\cdot)$ nöqtəvi prosesinə *ikiqat stoxastik Puasson prosesi* (*Koks prosesi*, [1]) deyilir. Başqa sözlə, İ. s. P. p.-nin intensivlik ölçüsü $\Lambda(\cdot) \in W$ paylanması $\pi(\cdot)$ olan təsadüfi elementdir.

Əgər $N(\cdot)$ İ. s. P. p.-dirsə və $\Lambda(\cdot)$ təsadüfi ölçüsünün paylanması $\pi(\cdot)$ -dirsə, onda

$$\begin{aligned} P\{N(B) = k\} &= \int_W \frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)} \pi(d\Lambda) = \\ &= M \left\{ \frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)} \right\} \end{aligned}$$

bərabərliyi doğrudur.

M i s a l. $N(\cdot)$, – $t \geq 0$ qiymətlərində təyin olunmuş İ. s. P. p., $\Lambda(t) = \Lambda(0, t) = \xi G(t)$, $t \geq 0$; ξ – mənfi olmayan, paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \quad \Gamma(\beta+1) = \int_0^\infty t^\beta e^{-t} dt, \\ 0, & t < 0, \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

(Γ – p a y l a n m a) olan təsadüfi kəmiyyət. $G(t)$ – mənfi olmayan monoton artan funksiya, $G(0) = 0$ olsun. Onda paylanması

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{\alpha}{\alpha+G(t)} \right]^{\beta+1} \times \\ &\times \left[\frac{G(t)}{\alpha+G(t)} \right]^n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

münasibətilə verilən $N(t) = N(0, t)$, $t \geq 0$ prosesinə *bir cins olmayan Poya prosesi* deyilir.

İ. s. P. p.-ləri sinfi ilə digər proseslər sinifləri arasında əlaqələr mövcuddur.

İ. s. P. p.-ləri sinfinin digər proseslər sinfi ilə bezi əlaqəsi aşağıdakı nəticələrdə şərh olunmuşdur.

1. $\Lambda(\cdot)$ təsadüfi ölçüsü ilə təyin olunan İ. s. P. p., yalnız və yalnız, o halda *berpa prosesidir* ki, $\Lambda^{-1}(x)$ stasionar və *asılı olmayan artımlı təsadüfi proses* olsun. 2. Berpa prosesi, yalnız və yalnız, o halda İ. s. P. p.-dir ki,

$$f^*(s) = \frac{1}{1 - \ln g^*(s)}, \quad f_0^*(s) = g_0^*(s) f^*(s)$$

olsun, burada $g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $G(x)$ – hər hansı sonsuz bölünən paylanma funksiyası, $G(0) < 1$.

$g_0^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sz} dG_0(z)$ hər hansı $G_0(z)$ paylanma funksiyası

üçün təyin olunmuş funksiyalardır. 3. Bu iki ifadə

$$Me^{-s\Lambda^{-1}(0)} = g_0^*(s), \quad Me^{-s[\Lambda^{-1}(1) - \Lambda^{-1}(0)]} = g^*(s)$$

münasibətləri ilə əlaqəlidir.

4. Paylanma funksiyası $F(x)$ olan stasionar bərpa prosesi, yalnız və yalnız, o halda İ. S. P. p.-dir ki, $\lambda > 0$ və azalmayan

$$K(z), \quad z > 0, \quad \int_0^{+\infty} z dK(z) < +\infty \quad \text{varsa ki, ixtiyari } s \geq 0 \text{ üçün}$$

$$f^*(s) = \lambda \left[\lambda + s + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-sz}) dK(z) \right]^{-1} \quad (*)$$

bərabərliyi ödənilsin. Bu halda uyğun $\lambda(t)$ prosesi yalnız iki: λ və 0 qiymətlərini alır. Fərz olunur ki, (*) ödənilir və $K(+\infty) - K(0) < \infty$. Əgər $K = 0$ olarsa, onda λ intensivlikli Puasson prosesi alınır. Əgər $K > 0$ olarsa, onda

$$G(z) = \frac{K(z) - K(0)}{K} \quad \text{paylanma funksiyasıdır və bu halda}$$

$\lambda(t)$ prosesi λ və 0 qiymətlərinə intervallarda növbə ilə bərabər olur; bu intervalın uzunluğu $\lambda(t) = \lambda$ halında orta qiyməti $1/K$ -ya bərabər eksponensial paylanan təsadüfi kəmiyyətdir. $\lambda(t) = 0$ halında paylanma funksiyası $G(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник. К., 1983; [2] Snyder D. L., Random point process, L. etc: Wiley and Sons, 1975; [3] Grandell J., Doubly stochastic Poisson process. – Lect. Notes. Math., 1976; [4] Kerstan J., Mattes K., Mecke J., Unbegrenzt teilbare Punktprozesse, Berlin: Akad. – Verlag, 1974.

İKİQOLLU BANDİT «двурукий бандит; two-armed bandit» – informasiya natamam olduğu halda təsadüfi ardıcılığın optimal idarələnməsi məsələlərindən biridir. evristik olaraq aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər. İkiidareli qurğunun olduğu fərz olunur (ikiqollu avtomat). $t = 1, 2, \dots$ anlarından hər birində idarələrdən birindən istifadə oluna bilər və eğer j -ci idarədən istifadə olunursa, paylanması F_j olan təsadüfi kəmiyyət

müşahidə olunur; $j = 1, 2$. Hipotezlər fəzasında aprior paylanma verilir, yeni (F_1, F_2) cütlerinin bütün mümkün hallarının verildiyi fərz olunur. Baxılan anda hansı idarədən istifadə olunacağı yalnız aprior paylanmadan və əvvəlcə hansı idarələrin istifadə olunduğundan və bu zaman hansı qiymətlərin müşahidə olunduğundan asılıdır. Müşahidə olunmuş qiymətlər cəmlənir (ola bilsin ki, diskontlanaq). Cəmin qeyd olunmuş $u \leq \infty$ müddəti

erzindəki riyazi gözleməsinin maksimizasiyası tələb olunur.

Məsələnin həlli qaydalarından biri vəziyyətlərinə aposterior paylanmalar olan, tam informasiyalı Markov zəncirinin idarələnməsinə gətirmədən ibarətdir.

Adətən, Bernulli halına – müşahidəolunan kəmiyyətlər iki qiymət: 0 və 1 qiymətlərini aldığı hala baxılır. Bu halda aprior paylanma λ_1, λ_2 fəzasında verilir ki, bu cütler uyğun idarədən istifadə olunduqda müvəffəqiyyət (vahidlərin) ehtimalını təyin

edir. Bernulli halında asılı olmamazlıq halı (aprior paylanma elədir ki, λ_1 və λ_2 asılı olmayandırlar) və iki hipotez halı – hipotezlərdən birinin ehtimalının verildiyi və setirləri (λ_1, λ_2) -nin mümkün qiymətləri olan (2×2) – ölçülü matris olduğu hal, xüsusilə, maraqlıdır.

İ. b. məsələsi ilk dəfə [1]-də şərh olunmuşdur və burada əsas etibarilə Bernulli asılı olmamazlığı halına baxılmışdır. Əgər birinci hipotezə görə (λ_1, λ_2) cütü (λ, μ) -yə bərabər, ikinci hipotezə görə isə (M, λ) -yə bərabər olarsa, $M > \lambda$, onda birinci hipotezin aposterior ehtimalı $1/2$ -i aşmır (uzadıq görmə strategiyası). Bu sadə faktın ciddi isbatı [2]-də alınmışdır.

Çoxsaylı ümumiləşmələrdən maraqlısı bir neçə qol halı, kəsilməz zaman halı və minimaks yanaşmadır. Asılı olmayan bir neçə qol (Bernulli halı olmaya da bilər) və həndəsi diskontlama halında optimal idarə Gittins indeksinin (bax. [3]) köməyiylə aşkar şəkildə təyin olunur. [4]-də m qollu hala Bernulli halında n sayda diskontsuz hipotez olduqda baxılır və burada sonsuz zaman intervalında optimal stasionar (yalnız aposterior paylanmadan asılı) strategiyanın varlığı ilə bağlı, uyğun $(m \times n)$ tərtib matrislərin təsnifatı verilir. Burada kəsilməz zaman halı üçün $(m \times n)$ məsələsinin Puasson ümumiləşməsi verilir, bu halda Bernulli hadisələri axını əvəzinə Puasson axınına baxılır və (2×2) məsələsində optimal strategiyanın təsviri bu hal üçün verilir.

Bu tip məsələlərə maraq onunla izah olunur ki, belə məsələlər ən çox ayaq və sadə məsələlər olur və bu məsələlərdə prosesin parametrləri haqqında informasiyadan cəmi gəlir və uduş arasında münasibət haqqında sual yaranır.

Əd.: [1] Thompson W., «Biometrika», 1933, v. 25, p. 285–94; [2] Feldman D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 847–56; [3] Gittins J., Multi-armed bandit allocation indices, N. Y., 1983; [4] Пресман Э. Л., Соинин И. М., Последовательное управление по неполным данным, М., 1982; [5] Berry D., Fristedt B., Bandit problems, L. – N. Y., 1985.

İKİLİ MARKOV PROSESİ «двойственный марковский процесс; двойственный марковский процесс; dual Markov process» – Dual Markov prosesi ilə eynimənaldır.

İKİLİ SİMMETRİK KANAL «двоичный симметричный канал; binary symmetric channel» – yaddaşsız stasionar kanaldır, keçid ehtimalları matrisi

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

şəklindədir. $1-p$ və p kəmiyyətləri uyğun olaraq kanalın düzgün ötürmə ehtimalı və kanalın səhv etmə ehtimalı adlanır. İ. s. k. informasiya nəzəriyyəsinə mühüm və ən çox öyrənilən simmetrik kanaldır. İ. s. k. üçün kanalın ötürücülük qabiliyyəti

$$C = 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

İKİLİK VAHİD(i) informasiya miqdarının «двоичная единица количества информации; binary digit of an information quantity» – bax. Bit, Entropiya.

İKİNCİ LAPLAS QANUNU « второй закон Лапласа; Laplace second law / distribution » – bax. *Laplas paylanması*.

İKİÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « двумерное нормальное распределение; bivariate / two dimensional normal distribution » – X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə (ikiölçülü) ehtimal paylanmasıdır, uyğun xarakteristik funksiyası

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it^T m - \frac{1}{2} t^T C t \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $t = (t_1, t_2)$, $m = (m_1, m_2)$ – riyazi gözləmələr vektoru,

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasion matrisidir. Əgər $|\rho| < 1$ olarsa, onda İ. n. p.-nın sıxlıq funksiyası vardır və o,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur (şəkilə qrafiklər təsvir edilmişdir). $X_2 = x_2$ şərtinə nəzərən X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması sıxlığı

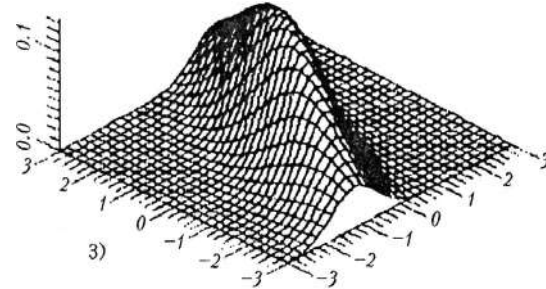
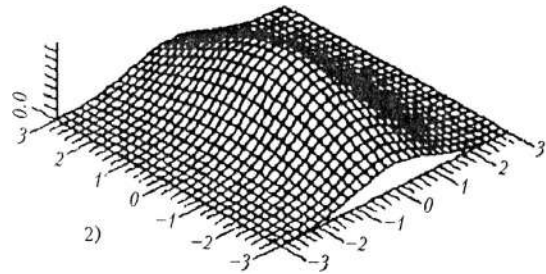
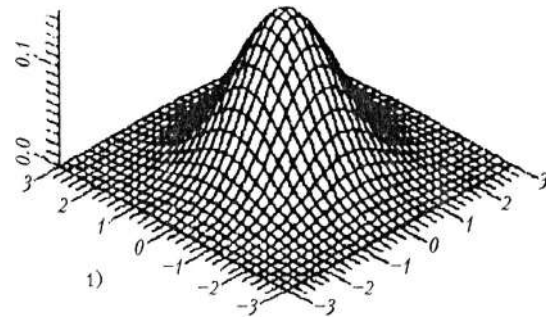
$$f(x_1 | X_2 = x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[x_1 - m_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - m_2) \right]^2 \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur. $|\rho| = 1$ olduqda bu paylanma cırılmış ikiölçülü normal paylanma adlanır. $m = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ olduğu halda ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanma funksiyası $F(x_1, x_2; \rho)$ aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$F(x_1, x_2; \rho) = P\{\xi_1 < x_1; \xi_2 < x_2\} = \Phi(x_1)\Phi(x_2) + \int_0^\rho f(x_1, x_2; \lambda) d\lambda.$$

Burada $f(x_1, x_2; \lambda)$, – $F(x_1, x_2; \lambda)$ -ya uyğun sıxlıq funksiyası. $\Phi(x)$ birölçülü standart normal paylanma funksiyasıdır.

372 İKİÖLÇÜLÜ



$m_1 = m_2 = 0$ olduqda, 1) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$; 2) $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$,

$\rho = 0$; 3) $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\rho = 0.8$ halları üçün ikiölçülü normal paylanmanın sıxlıq funksiyalarının qrafikləridir.

İ. n. p.-nin Ouen funksiyası vasitəsilə ifadəsi üçün bax, [1]. $F(x_1, x_2; \rho)$ -nın tetrahor funksiyalar üzrə ayrılığı

$$F(x_1, x_2; \rho) = \Phi(x)\Phi(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(x)\tau_k(y)\rho^k$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada

$$\tau_k(x) = (2\pi)^{-2} H_{k-1}(x) \exp(-x^2/2)/k!, \quad k=1, 2, \dots$$

$H_k(x)$ – Hermit çoxhədliləridir.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, М., 1962.

İKİSƏÇİMLİ T^2 – STATİSTİKASI « двухвыборочная T^2 – статистика; two-sample T^2 – statistic » – bax. T^2 – statistika.

İKİSƏÇİMLİ STUDENT KRİTERİSİ « двухвыборочный критерий Стьюдента; two-sample Student test » – bax, *Student kriterisi*.

İKİTƏRƏFLİ BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ

« двусторонний сдвиг Бернулли; two-sided Bernoulli shift » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi*.

İKİTƏRƏFLİ EKSPONENSİAL PAYLANMA

« двустороннее экспоненциальное распределение; double exponential distribution » – bax, *İkitərəfli üstlü paylanma*.

İKİTƏRƏFLİ ETİBARLI İNTERVAL « двусторонний доверительный интервал; two-sided confidence interval »

– bax, *Ardıcıl etibarlı sərhədlər*.

İKİTƏRƏFLİ HİPOTEZ « двусторонняя гипотеза; two-sided hypothesis »

– birölçülü θ parametrinin verilmiş intervalda yerləşmədiyi haqqında, yəni $H: \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$,

$\theta_1 < \theta_2$ şəklində *statistik hipotezdir*. Belə hipotezə misal: hər hansı qarışıqdakı inqrediyentin faizi haqqında verilən tələblər ödənilirmi? Burada birinci növ səhv ondan ibarət ola bilər ki, θ məqbul sayılsın (əslində bu qərar səhvdir). Birparametrlili eksponensial ailə üçün $K: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ alternativ hipotezinə qarşı H i. h.-nin yoxlanılması üçün *müntəzəm ən güclü kriteri* mövcuddur.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

İKİTƏRƏFLİ MARKOV PROSESİ « двусторонний марковский процесс; two-sided Markov process »

– bax, *Markov prosesi*.

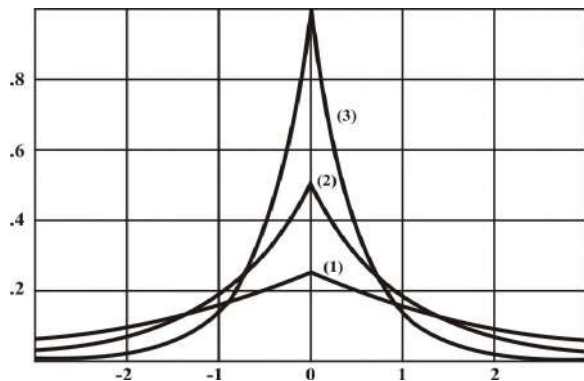
İKİTƏRƏFLİ STUDENT KRİTERİSİ « двусторонний критерий Стьюдента; two-sided Student test »

– bax, *Styudent kriterisi*.

İKİTƏRƏFLİ ÜSTLÜ PAYLANMA « двустороннее показательное распределение; double exponential distribution », ikiqat eksponensial paylanma, Laplas paylanması, Laplasın birinci qanunu, – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha|x-\beta|/2}$$

düsturu ilə təyin olunan, $(-\infty, +\infty)$ -da toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < \infty$ həqiqi parametrlərdir (bax, şəkil).



$\beta = 0$ halında (1) $\alpha = 0,5$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha = 2$ qiymətlərində ikiölçülü üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

İ. ü. p. yerinidəyişmə dəqiqliyi ilə *üstlü paylanmanın* özünün sifra görə əks olunmuş paylanma ilə kompozisiyasıdır, başqa sözlə, İ. ü. p. α parametrlili eyni üstlü qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə olunan, $\beta + \xi_1 - \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır.

İ. ü. p.-nin ixtiyari tərtib sonlu momentləri vardır; məs., bu paylanmanın riyazi gözləməsi β -ya, dispersiyası $2/\alpha^2$ -na, eksessi

$Es = 6\alpha - 3$ -ə bərabərdir. Onun xarakteristik funksiyası $f(t) = \alpha^2 e^{it\beta} / (t^2 + \alpha^2)$ kəmiyyətinə bərabərdir və $\beta = 0$ olduqda, *Koşi paylanmasının* sıxlıq funksiyası ilə vuruq dəqiqliyi ilə üst-üstə düşür.

İ. ü. p. *sonsuz bölünən paylanmadır*. Bu paylanma əksərən təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənməsi sxeminə limit paylanması kimi yaranır.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

İKİZİRVƏLİ PAYLANMA « двувёршинное распределение; bimodal distribution »

– bax, *Bimodal paylanma*.

İQLİM / KLİMAT « климат; climate » – bir neçə onilliklər ərəfəsində iqlim sisteminin keçdiyi (o cümlədən, atmosfer, Yer su örtüyü və qurunun üst fəaliyyət təbəqəsi də daxil olmaqla) vəziyyətlərin statistik ansamblıdır. İ.-in belə təyin edilməsində nəzərə alınır ki, atmosferin vəziyyətinə (bu vəziyyətlə hava anlayışı həmişə əlaqələndirilir) olduqca uzun zaman ərzində hidrosfer (ilk növbədə okeanlar), kriosfer (yerin buz və qar örtüyü) və torpaq örtüyü mühüm təsir göstərir (bəzən iqlim sistemində biosfer də aid edilir).

Atmosfer, okean və qurunun olduqca fəza qeyri – bircinsliliyi nəticəsində onların ani vəziyyətlərinin kifayət qədər tam xarakteristikası üçün fəza koordinatlarının funksiyalarından, yəni meydanlardan istifadə etmək lazımdır. Beləliklə, iqlim sisteminin ani vəziyyəti çoxkomponentli meydan kimi, i. s.ə çoxkomponentli təsadüfi meydan kimi anlaşıla bilər. İ.-in tam təsviri bu meydanın fəza – zaman nöqtələrinin bütün mümkün komponentlərinin qiymətləri üçün bütün sonluölçülü ehtimal paylanmalarının göstərilməsi ilə oluna bilər. Lakin praktikada İ.-i təsvir edərkən, adətən, *iqlim zaman sıralarının* yalnız birinci və ikinci momentləri, yəni onların orta qiymətləri, dispersiyaları və korrelyasiyon funksiyaları haqqında verilənlərlə kifayətlənir.

İ. – tərifi görə – tamamilə bütün Yer kürəsinə aid olan qlobal anlayışdır.

L o k a l i q l i m l ə r, yəni hər hansı məhdud oblastın nöqtələrində ehtimal paylanmaları qlobal iqlimin təzahürəldir. İ. dəyişiklikləri uzunillər üçün hesablanmış orta qiymətlərdən konkret illər üçün illik orta, mövsümi orta, aylıq orta qiymətlərdən – *iqlim normalarından* yayınmalıdır. İ. dəyişiklikləri müşahidələrin müxtəlif, onilliklərdən az olmayan dövrlərində alınmış çoxillik orta qiymətlər və iqlim sisteminin digər empirik xarakteristikaları arasında fərqlərlə təyin olunur.

Əd.: [1] М о н и н А. С., Ш и ш к о в Ю. А., История климата, Л., 1979; [2] М о н и н А. С., Введение в теорию климата, Л., 1982; [3] Физические основы теории климата и его моделирование, пер. с англ., Л., 1977; [4] The global climate, Camb., 1984.

İQLİM NORMASI « климатическая норма; climatic norm / long-rang averaged value »

– *iqlimin* çoxillik dövr üçün *iqlim zaman sıraları* üzrə qiymətləndirilən statistik xarakteristikasıdır. Əksər hallarda «İ. n.» anlayışı bəzi aylıq orta, mövsüm orta və illik orta xarakteristikalarının çoxillik orta qiymətləri üçün tətbiq olunur; lakin bəzən meteoroloji kəmiyyətlərin ekstremal

qiymətlərinin i. n.-na da baxılır. i. n., adətən, 30 – 100 il ərzində verilənlər üzrə aparılır. Beynəlxalq meteoroloji təşkilat i. n.-nı müstəqil surətdə otuzillik dövr, 1931 – 60-cı illər üçün təyin etməyi tövsiyyə etmişdir.

Əd.: [1] Методы климатологической обработки метеорологических наблюдений, Л., 1957.

İQLİM PROQNOZU « климатический прогноз; climate forecast » – bax, *Proqnozu. havanın*.

İQLİM SİSTEMİ « климатическая система; climatic system » – bax, *İqlim / klimat*.

İQLİM ZAMAN SİRALARI « климатические временные ряды; climatic time series » – bütün çoxillik müddət ərzində cihazlarla aparılan müşahidələrdə iqlim sisteminin vəziyyətini xarakterizə edən, *iqlim* haqqında fiziki kəmiyyətlər, yəni iqlim haqqında müşahidələrin verilənləridir. İ. z. s.-nin əksəriyyəti atmosfer (iqlim sisteminin ən dəyişən hissəsi) və okean xarakteristikalarına aiddir. Ayrı-ayrı meteoroloji stansiyalarda müşahidələrin İ. z. s. 250 illik müddəti əhatə edir. Şimal yarımkürəsinin bezi xarakteristikaları demək olar ki, 100 illik dövrü, cənub yarımkürəsinə və yüksəkliklərdə atmosfərə aid verilənlər 30 ilə yaxın müddəti əhatə edir. Dünyada toplanmış hidrometeoroloji informasiyanın (peykə müşahidələrsiz) həcmi $10^{12} - 10^{14}$ baytla qiymətləndirilir və bu həcm sürətlə artır. İ. z. s. haqqında məlumatlar dünya və milli meteoroloji mərkəzlərdə qorunub saxlanılır.

Əd.: [1] Груза Г. В., Рейтенбах Р. Г., Статистика и анализ гидрометеорологических данных, Л., 1982.

İQLİMİN STOXAŞTİK MODELƏRİ « климата стохастические модели; stochastic model of climate / climatic stochastic models » – bax, *Stoxastik modeller(i) iqlimin*.

İLK ÇATIM ANI / İLK ÇIXIŞ MÜDDƏTİ « первого достижения момент / первого выхода момент; first passage time / hitting time » – *Markov prosesinin* trayektoriyasının verilmiş vəziyyətlər çoxluğunda olması anları ailəsinin dəqiq aşağı sərhədidir. $\mathcal{E}$, ümumiyyətlə, $\zeta = (\zeta_t, \zeta_0, \mathcal{A}_t, P_x)$, $t \geq 0$ qatılan *Markov prosesinin* vəziyyətləri çoxluğu olsun. $A \subset \mathcal{E}$ çoxluğuna İ. ç. a. $T_A = \inf \{ t \geq 0; \zeta_t \in A \}$ münasibətilə, $t=0$ anından sonra isə $\tau_A = \inf \{ t > 0; \zeta_t \in A \}$ münasibətilə təyin olunur (burada $\zeta_0 = \inf \emptyset$). Sağ *Markov prosesini* və sanki *Borel çoxluğu A* üçün bu çatım anları *Markov anlarıdır* (bax, [1]). « *A* çoxluğuna İ. ç. a.» termini « $\mathcal{E} \setminus A$ çoxluğundan ilk çıxış anı» termininə ekvivalentdir.

ζ həqiqi proses olarsa, İ. ç. a.-na mühüm misal $T_{(a, b)}$ -dir; burada $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $T_{(a, \infty)}$ ζ prosesinin *a* həddindən ilk çıxış anıdır.

Əd.: [1] Gettoor R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

İLK ÇIXIŞ ANI « первого выхода момент / первого достижения момент; first exit time » – bax, *Markov prosesini* vəziyyətləri çoxluğu sonlu, *Markov prosesini* vəziyyətləri çoxluğu hesabı.

Əd.: [1] Gettoor R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

İLK ÇIXIŞ MÜDDƏTİ « первого выхода время; first exit time / hitting time » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

İLK DAXİLOLMA ANI / ÖTÜM ANI « первого попадания момент; first arrival time » – bax, *Markov prosesini* vəziyyətləri çoxluğu hesabı.

İLK KEÇMƏ ANI, SƏRHƏDİ « первого прохождения границы время; boundary hitting time / first passage / time for a boundary » – $\eta_g = \inf \{ t > 0; \zeta_t \geq g(t) \}$ münasibətilə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətdir.

ζ_t – baxılan təsadüfi proses, $\zeta_0 = 0$, $g(t)$ verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır (sərhəd), $g(0) > 0$. S. i. k. a. düzxətli sərhədlər üçün və $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k = \zeta_1 + \dots + \zeta_k$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi ilə təyin olunan $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ təsadüfi dolaşması üçün hər tərəfli araşdırılmışdır. $\eta(x) = \inf \{ k \geq 1: \zeta_k \geq x \}$ təsadüfi kəmiyyəti $g(t) = x = \text{const}$ düzxətli sərhədinin S. i. k. a. olsun. $|z| < 1$. Im $\lambda < 0$ olduqda

$$\mathbf{M}(z^{\eta(0+)}; \eta(0+) < \infty) = 1 - A_+(z, 0) \quad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x} d_x \mathbf{M}(z^{\eta(x)}; \eta(x) < \infty) = 1 - A_+(z, 0) / A_+(z, \lambda)$$

düsturları doğrudur (bax, [1] – [3]), burada

$$A_+(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{M}(e^{i\lambda \zeta_k}, \zeta_k > 0) \right\}$$

funksiyası $1 - z \mathbf{M} e^{i\lambda \zeta_1}$ faktorizasiya funksiyasının müsbət komponentidir (bax, *Faktorizasiya eynilikləri*). (1) düsturundan aydındır ki, ilk müsbət cəmin alındığı $\eta(0+)$ anı (bu an pille a nı adlanır), yalnız və yalnız, sanki yəqin sonlu o halda olur ki,

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \mathbf{P}\{\zeta_k > 0\}$ sırası dağılsın; bu sıranın dağılması üçün

$\mathbf{M}\zeta_1 \geq 0$ olması kifayətdir (bax, [1], [2]).

Əgər $\eta(0+)$ anı sonlu olarsa, onda: a) $\eta(0+)$ təsadüfi kəmiyyətinin α göstəricili ($0 < \alpha < 1$) spektral müsbət dayanıqlı qanunun cazibə oblastından olması üçün

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{\zeta_k > 0\}$$

limitinin varlığı zəruri və kifayətdir; b) $\eta(0+)$ anının normal paylanmanın normal cazibə oblastından olması üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (\mathbf{P}\{\zeta_k > 0\} - \alpha)$$

sırasının yığılması zəruri və kifayətdir (bax, [6]). $H(x) = \mathbf{M}\eta(x)$ funksiyası bərpə funksiyası adlanır. Əgər ζ_k toplananlarının hamısı mənfi olmazsa, onda

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_k \leq x\}.$$

Əgər $a = \mathbf{M}\zeta_1 > 0$ olarsa, onda $\eta(x)/x \rightarrow 1/a$ münasibəti sanki yəqin ödənilir və $x \rightarrow \infty$ olduqda $H(x)/x \rightarrow 1/a$ münasibəti ödənilir (bax, [1] – [3]).

$$\{\eta(x) \leq n\} = \{ \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \geq x \}$$

münasibətinin köməyi ilə isbat olunmuşdur ki, $x = x(n) \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\eta(x) \leq n\} = \sqrt{2/\pi} \int_{x/\sigma\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + o(1)$$

olur, burada $o(1)$ qiymətləndirilməsi x -ə görə müntəzəmdir.

Fərz olunur ki, K r a m e r şərti ödənilir, yeni elə $\delta > 0$ vardır ki, $|\lambda| \leq \delta$ olduqda $M \exp(\lambda \xi_1) < \infty$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $x \rightarrow \infty$ olduqda və ξ_1 -in paylanması hamar olması üçün məhdudiyyətlər olarsa,

$$P\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n^{3/2}} e^{-n\Lambda(x/n)} \Xi(1/n, x/n) \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln M e^{\lambda \xi_1}\}$; yayınmalar funksiyası, $\Xi(1/n, x/n)$ şəbəkəvari halda arifmetik struktura malik olan, $1/n, x/n$ mənfii olmayan qüvvət üstlərinə görə sıradır (bax, [4], [5]).

Əgər $M \xi_1 = 0$, $\sigma^2 = D \xi_1$, $0 < \sigma^2 < \infty$, $x/\sqrt{n} \rightarrow 0$ olarsa, onda $n\Lambda(x/n) \sim x^2/(2n\sigma^2) \rightarrow 0$ münasibəti ödənilir və (2)-dən

$$P\{\eta(x) = n\} \sim Cx/n^{3/2}$$

münasibəti alınır. Bu münasibət daha geniş şərtlərlə də doğrudur (bax, [7], [8]).

Əgər $f(t)$ kifayət dərəcədə hamar funksiya olarsa, $xg(t) = xf(t/x)$ sərhədi üçün S. i. k. a. paylanması asimptotik paylanması $x \rightarrow \infty$ olduqda hərtərəfli araşdırılmışdır. Əgər $a = M \xi_1 > 0$, $0 < \sigma^2 = D \xi_1 < \infty$, $y = at$ və $y = f(t)$ eyniləri z və $b = f'(z) < a$ nöqtəsində kəsişərsə, onda η_{xg} təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanması $\xi_k - b$ toplananları ilə doğrulan $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \xi_1 - b, \dots, \zeta_l = \xi_l - b, \dots, \zeta_k = \xi_1 + \dots + \xi_k - kb$ təsadüfi dolaşmasının S. i. k. a. - $\eta(xaz)$ ilə üst-üstə düşür. Bu isə $xaz/(a-b)$, $xaz\sigma^2/(a-b)^3$ parametrləri normal paylanmadır (bax, [1], [3]).

Əgər $y_1 < z < y_2$ olarsa, onda aydındır ki,

$$P\{\eta_{xg} < y_1 x\} \rightarrow 0, \quad P\{\eta_{xg} > y_2 x\} \rightarrow 0 \quad (3)$$

münasibətləri ödənilir.

Sərhəd məsələlərində böyük yayınmalar haqqında (3) ehtimal-larının asimptotikası ilə bağlı məsələlər araşdırılmışdır.

Markov zəncirləri üçün S. i. k. a. məsələləri də tədqiq olunmuşdur (bax, [9], [10]). Çoxölçülü təsadüfi dolaşmalar ([11], [13]), Gauss prosesləri üçün də bəzi nəticələr alınmışdır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [4] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645-94; [5] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5,

в. 2, с. 137-71; [6] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 4, с. 593-613; [7] Нагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410-11; [8] Алешкина-Виченне А. К., «Лит. матем. сб.», 1975, т. 15, № 1, с. 23-66; [9] Прессман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861-900; [10] Королюк В. С., Шуренков В. М., «Укр. матем. ж.», 1977, т. 29, № 4, с. 464-71; [11] Гафуров М. У., «Докл. АН СССР», 1980, т. 254, № 5, с. 1042-44; [12] Erdős P., Kac M., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 52, № 4, p. 292-302; [13] Боровков А. А., «Докл. РАН», 1997, т. 353, № 6, с. 711-13.

İLK QAYIDIŞ ANI « первого возвращения момента; first return time » – bax, *Markov prosesi və zıyyətləri çoxluğu hesabı*.

İLK MÜHÜM RƏQƏM QANUNU « первой значащей цифры закон; first significant digit law » – olduqca geniş müşahidələr nəticəsində alınan statistik məlumatların nəzərə çarpan empirik qanunauyğunluğudur, bu qanunauyğunluğa görə, ilk mühüm rəqəm $d = 1, 2, 3, \dots, 9$ qiymətini

təqribən $\lg \frac{d+1}{d}$ -yə bərabər tezliklə alır ($\lg$ – onluq loqarifmdir).

(bax, cədvəl 1.)

Cədvəl 1.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg \frac{d}{d+1}$	0,3010	0,1761	0,1249	0,0969	0,0792	0,0669	0,0580	0,0512	0,0458

İ. m. r. q.-nun kəşf olunma tarixi və əsaslandırılması [2] və [3]-də şərh olunmuş, orada bu qanunla əlaqədar geniş ədəbiyyat da verilmişdir.

Ayn-ayrı hallarda İ. m. r. q.-nun riyazi əsaslandırılması aşağıdakı mülahizələrə istinadlanır. Əgər ξ , $0 \leq \xi < 1$ [0, 1] parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\eta = 10^{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin ilk mühüm rəqəmi $\lg \frac{d+1}{d}$

ehtimalı ilə d -yə bərabərdir. Əgər ξ^* təsadüfi kəmiyyətdirsə və onun kəsir hissəsi $\xi = \{\xi^*\}$ [0, 1]-də təqribi olaraq müntəzəm qanunla paylanmışdırsa, onda ilk mühüm rəqəm $10^{\xi^*} d$ qiymətini $\lg \frac{d+1}{d}$ -yə yaxın ehtimal ilə alır. Bu halda,

ξ^* -nin kəsri hissəsinin paylanması təqribi olaraq müntəzəm paylanma olması *Puassonun cəmləmə düsturu* ilə təyin oluna bilər.

M i s a l 1. η təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_{\eta}(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^3 t \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln v - m)^2}{2\sigma^2} \right\}, & v > 0 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$$

olan loqarifmik normal qanunla paylanmış olduğu fərz edilir.

Onda $\lg \eta$ təsadüfi kəmiyyəti parametrləri $m/\lg e$ və $\sigma^2/\lg^2 e$ olan normal qanunla paylanmışdır və ilk mühüm rəqəmin d -yə bərabər olması ehtimalının qiyməti

$$p_d = \lg \frac{d+1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2k^2 \pi^2 \sigma^2 \lg^2 e) \times \\ \times \frac{\sin[2k\pi(\lg(d+1) - m \lg e)] - \sin[2k\pi(\lg d - m \lg e)]}{2k\pi}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Məs., $m = 0,46$, $\sigma = 1$ olduğu halda (parametrlərin bu qiymətləri [4]-dən götürülmüşdür, səh. 246). $p_d = \lg \frac{d+1}{d} + R_d$;

R_d -nin qiymətləri cədvəl 2-də verilmişdir.

Cədvəl 2.

d	1	2	3	4	5
R_d	$1,187 \cdot 10^{-2}$	$3,007 \cdot 10^{-3}$	$-3,146 \cdot 10^{-3}$	$-4,391 \cdot 10^{-3}$	$-3,674 \cdot 10^{-3}$
d	6	7	8	9	
R_d	$-2,450 \cdot 10^{-3}$	$-1,275 \cdot 10^{-3}$	$-3,254 \cdot 10^{-4}$	$3,767 \cdot 10^{-4}$	

Misal 2. $n = 1, 2, \dots, N$ olduqda 2^n qüvvətlər ardıcılığına baxılır. Əgər N kifayət qədər böyük olarsa, məs., $N = 100$ olarsa, onda 2^n ədədinin ilk mühüm rəqəmi d qiymətini $\lg \frac{d+1}{d}$ -ə bərabər tezliklə alır. Bu onunla əlaqədardır ki, $2^n = 10^{(n \lg 2)} \cdot 10^{[n \lg 2]}$ və $\{n\alpha\}$, $n = 1, 2, \dots, N$ kəsri hissələri α irrasional və $N \rightarrow \infty$ olduqda $[0, 1]$ -də asimptotik olaraq müntəzəm qanunla paylanmışdır, burada $[z]$, z ədədinin tam hissəsi, $\{z\}$ – onun kəsir hissəsidir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Раими Р. А., «Amer. Math. Monthly», 1976, v. 83, № 7, p. 521–37; [3] Hill T. P., «Statist. Sci.», 1995, v. 10, № 4, p. 354–63; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

İLKİN HİPOTEZ «нулевая гипотеза; null hypothesis» – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində iki *statistik hipotez*-dən biridir. İ. h., adətən, H_0 ilə işarə olunur və yoxlanılacaq müəyyən əsas fərziyyə mənasında anlaşılır. Formal olaraq, İ. h. onunla seçilir ki, birinci növ səhv ehtimalının (birinci növ səhv səhvi İ. h.-i qəbul etməməkdir) verilmiş $\alpha > 0$ (kiçik olan) ədədini (mühümlük ölçüsünü) aşmaması tələb olunur.

İLKİN / BAŞLANGIC PAYLANMA(SI) Markov zəncirinin (prosesinin) «начальное распределение цепи (процесса) Маркова; initial distribution of a Markov chain (process)» – Markov zəncirinin (prosesinin) s anında X_s vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır, burada $s = \min\{t: t \in T\}$, T zəncirin (prosesin) zaman parametrlərinin qiymətləri çoxluğudur. İ. t. b. p. keçid ehtimalları ilə birlikdə zəncirin (prosesin) sonluölçülü paylanmalarını, yəni $\{X_1, \dots, X_n\}$, $t_i \in T$ vektorunun paylanmasını təyin edir.

376 İLKİN

İLLÜSTRATİV DƏYİŞƏN «иллюстративная переменная; illustrative variable» – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

İMİTASİYASI, TƏSADÜFİ TƏZAHÜRÜN «имитация случайного явления; simulation of a random phenomenon» – təsadüfi təzahürün nəzəri olaraq verilmiş və ya eksperiment nəticəsində onun alınmış xarakteristikaları əsasında, xüsusi konstruksiya olunmuş qurğular vasitəsilə, yenidən ifadə olunmasıdır. T. t. i.-na sadə misal düzgün metal pulun atılması eksperimentinin eyniehtimal nəticələrinin imitasiyasıdır. EHM-nin köməyi ilə müxtəlif paylanma qanunları ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin imitasiyası *Monte – Karlo metodunun* əsasını təşkil edir (bax, *Ədədi simulyasiya(sı) təsadüfi təzahürün*).

İMMİQRASIYA şəxsləndən prosesdə «иммиграция в ветвящемся процессе; immigration in a branching process» – bax, *Şəxsləndən proses immiqrasiyalı*.

İMPULS ƏNGƏL «импульсная помеха; impulse noise» – *impuls küydür*.

İMPULS – FAZALI MODULYASIYA PROSESİ «импульсно – фазовой модуляции процесс; impulse – phase modulation process» – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

İMPULSAL – BƏRPA PROSESİ «импульсный процесс восстановления; impulse renewal process» – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

İMPULSAL KEÇİD FUNKSİYASI «импульсная переходная функция; impulse response function» – xətti sistemin (və ya xətti filtrin) – ele $h(u)$ funksiyasıdır ki, bu funksiya $\mathcal{L}$ xətti sisteminin çıxışında $y(t)$ funksiyasını onun girişindəki $x(t)$ funksiyası vasitəsilə

$$y(t) = \mathcal{L}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$$

düsturu ilə ifadə etməyə xidmət edir. Əgər $x(t)$ funksiyası hər hansı real fiziki kəmiyyətin zaman üzrə dəyişməsinə təsvir edirsə, $\mathcal{L}$ xətti sistemi isə fiziki elementlərin (məs., cərəyan və mexaniki) hər hansı çoxluğu şəklində reallaşdırıla bilinsə, onda İ. k. f. $h(u)$ aşağıdakı fiziki reallaşma şərtini ödəməlidir: yeni $h(u)$ $u < 0$ olduqda $h(u) = 0$ zəminlik şərtini – $y(t)$ -nin qiymətinin sistemin girişindəki funksiyanın sonrakı zaman anlarındakı qiymətlərindən asılı olmaması şərtini ödəməlidir (yeni sistemin çıxışına təsir onun girişinə verilən təsirə qədər yaranı bilməz). İ. k. f. adı olduğu kimi, ümumiləşmiş funksiya da ola bilər; məs., $x(t)$ -ni $x(t-\tau)$ funksiyasına çevirən sistemin İ. k. f. $\delta(u-\tau)$ δ – funksiyası ilə üst-üstə düşür.

$h(u)$ İ. k. f.-nin Furiye çevirməsi baxılan xətti sistemin ötürücü funksiyası $H(\omega)$ -dir. Bax, *Xətti filtr*.

İMPULSAL KÜY «импульсный шум; impulse noise», *impuls maneə*, – parametrləri (forma, davamiyyət, qonşu impulsar arasında intervallar və s.) təsadüfi kəmiyyətlər də ola bilən impulsar ardıcılığından ibarət maneədir. İ. k.-ün mühüm xüsusi halı *Puasson küyü*dür; bu halda hər bir zaman intervalında ayn-ayn impulsların baş verməsi anları

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bu təsadüfi kəmiyyətlər müntəzəm qanunla paylanır. Belə ki, hər bir intervalla baş verə biləcək impulsların sayı təsadüfi kəmiyyət olub, Puasson qanunu ilə paylanır (bax, [1]). İ. k. və impulsal təsadüfi prosesləri təsvir etmək üçün spektral nəzəriyyədən geniş istifadə olunur (bax, [2]). Puasson maneələrinə misal atmosfer və industrial engel-lərdir.

Əd.: [1] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 2, М., 1975.

İMPULSAL PROSES taktlı intervallarla modullanmış « **импульсный процесс с модулированными тактовыми интервалами**; **impulsive process with the modulated tacts by intervals** » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

İMPULSAL PROSES, SABİT TAKT İNTERVAL-LARLI « **импульсный процесс с постоянными тактовыми интервалами**; **impulse process with constant tact by intervals** » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

İMPULSAL PUASSON PROSESİ « **импульсный пуассоновский процесс**; **impulse Poisson process** », filtrlənmiş Puasson prosesi – impulsun baş vermə momentləri Puasson ardıcılığına uyğun *İmpulsal təsadüfi prosesdir*.

İMPULSAL SƏDA FUNKSİYASI « **импульсная функция отклика**; **impulse response function** » – bax, *Xətti filtr*.

İMPULSAL TƏSADÜFİ PROSES « **импульсный случайный процесс**; **impulse random process** » – bəzi xarakteristikaları (məs., amplitud, en, baş vermə anı) təsadüfi kəmiyyətlər olan impulsar ardıcılığından ibarət *təsadüfi prosesdir*. İ. t. p.-lərin geniş bir sinfi

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t-t_n, A_n) \quad (1)$$

düsturu ilə verilir, burada $\Gamma(t, A)$ – impulsun $A = (A_1, \dots, A_k)$ təsadüfi parametrindən asılı formasını müəyyən edən funksiya-dır; A impulsun ələ xarakteristikalarından təşkil olunur ki, bu xarakteristikalar təsadüfi qiymətlər alır və $t_n, n = \dots -1, 0, 1 \dots$ anları (adətən, bu anlar impulsun baş vermə anları adlanır) isə təsadüfi olduğu kimi, determinik də ola bilər. Bəzən daha ümumi olan

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(t-t_n, A_n) \quad (1a)$$

düsturu ilə ifadə olunan İ. t. p.-lərə də baxılır, yeni fərz olunur ki, n -ci impulsun forması n nömrəsi ilə qanunauyğun dəyişir. (1a) düsturunun tətbiqi məsələlərdə rast gəlinən digər modifikasiya (məs., [1]) impulsar qruplarının ardıcılığından təşkil olunmuş İ. t. p.-i ifadə edən düsturdur; lakin aşağıda yalnız ən sadə və geniş istifadə olunan (1) tipli İ. t. p.-lərə baxılır.

İ. t. p.-lər nəzəriyyəsinin tətbiqində (əsasən elektrotexnika və radioelektronikada), adətən, $\Gamma(t)$ funksiyasının müəyyən sonlu intervalladan kənarda sıfır çevrildiyini (deqiqliklə və ya yüksək dərəcədə deqiqliklə); $\{A_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ardıcılığının

vektor stasionar təsadüfi ardıcılığı (və ya hətta eyni qanun-la paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı) olduğunu; $\{t_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ ardıcılığının $\{A_n\}$ ardıcılığından asılı olmadığını hesab etmək olar. Bir çox hallarda $A_n = (A_n, B_n)$ -in ikiölçülü vektor olduğu halla da kifayətlənmək olur, burada A_n – n -ci impulsun amplitudu, B_n impulsun enidir, odur ki,

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma((t-t_n)/B_n). \quad (2)$$

Xüsusi halda, $B_n = \text{const}$ olduqda, yeni impulsun eni dəyişmədikdə, $\zeta(t)$ prosesi amplitud – modullanmış impulsal proses və ya amplitud – impulsal modulyasiya prosesi adlanır; eger bu halda A_n amplitudlarının hamısı eyni olarsa, lakin yalnız t_n zaman anları ardıcılığı təsadüfi olarsa, onda $\zeta(t)$ kəsri küy prosesi dir; eger bütün A_n amplitudları dəyişmərsə, lakin n -ci impulsun eni B_n təsadüfi olarsa, onda $\zeta(t)$ enliklə impulsal modulyasiya prosesidir və ya, başqa sözlə, impulsun davamiyyət üzrə modulyasiya prosesidir.

İ. t. p. nəzəriyyəsində $\{t_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ impulsun baş vermə anları ardıcılığının xüsusiyyəti mühüm rol oynayır. Tətbiqi məsələlərdə ələ $\zeta(t)$ İ. t. p.-lərinə təsadüf olunur ki, bu proseslərdə $\{t_n\}$ ardıcılığını λ intensivliyi (yeni vahid zaman ərzində t_n nöqtələrinin orta sayı λ -ya bərabər) ilə verilmiş Puasson nöqtələr sistemi hesab etmək olur, bu halda $\zeta(t)$ prosesi impulsal Puasson prosesi (və ya filtrlənmiş Puasson prosesi; bax, məs., [2]) adlanır. Əger $\{A_n; n = 0, \pm 1, \dots\}$ t_n nöqtələrinin Puasson ardıcılığından asılı olmayan stasionar təsadüfi ardıcılıqdırsa, onda Puasson İ. t. p. stasionar təsadüfi prosesdir. Puasson İ. t. p.-lərinin ümumiləşməsi ələ İ. t. p.-lərdir ki, $t_{n+1} - t_n$ fərqləri ehtimal paylanmaları ilə verilmiş (ümumiyyətlə isə, ixtiyari də ola bilər), asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu halda $\zeta(t)$ prosesi impulsal bərpə proses adlanır.

Elektro- və radiorabitədə ələ İ. t. p.-lər böyük rol oynayır ki, bu proseslərdə impulsar ciddi periodikliklə baş verir, yeni eyni bir T_0 zaman intervalından bir anlarda və ya ələ anlarda baş verir ki, bu anlar T_0 zaman intervalından bir rəqulyar olaraq, təkrarlanan anlarla sıx əlaqəli olsun, bu hallarda impulsun baş vermə anları t_n -ləri $t_n = nT_0 + \eta_n$ kimi ifadə etmək məqsədəuyğun olur. Əger $\eta_n = \eta = \text{const}$ (yeni impulsar ciddi periodikliklə baş verir) olarsa, onda $\zeta(t)$ İ. t. p. sabit takt intervallalı impulsal proses adlanır. Əger bu halda η qeyd olunmuş ədəd (məs., $\eta = 0$), $\{A_n\}$ – stasionar təsadüfi ardıcılıq olarsa, onda $\zeta(t)$ prosesi qeyri – stasionar periodik korrelyar (və ya eger $\{A_n\}$ dar mənada stasionar ardıcılıq olarsa, hətta periodik olaraq paylanmaya malik) prosesdir; bununla belə, eger η təsadüfi kəmiyyəti T_0 uzunluqlu

intervalda müntəzəm paylanmış olarsa, onda $\zeta(t)$ – stasionar prosesdir. η_n , $n = 0, \pm 1, \dots$, – $\{A_n\}$ ardıcılığından asılı olma-yan, orta qiyməti sıfıra bərabər stasionar ardıcılıqla olarsa, İ. t. p.-də periodik korrelyar prosesdir və o, takt intervallarla modulllanmış impulsal proses adlanır (t_n anlarının nT_0 -dan yayınmasının təsadüfi xarakterli olduğunu xüsusilə qeyd etmək istədikdə, bu proses impuls – fəzalı modulyasiya prosesi və impulsların vəziyyətlərinin modulyasiya prosesi adlanır). Elektro- və radorabitədə impuls modulyasiyasının (yəni İ. t. p.-ə aid modulyasiya; bax, məs., [1]) digər tiplərindən də istifadə olunur.

İ. t. p.-lərin müxtəlif modelləri üçün korrelyasion və spektral xarakteristikaların hesablamaları aparılmışdır.

Əd.: [1] Коновалов Г. В., Тарасенко Е. М., Импульсные случайные процессы в электросвязи, М., 1973; [2] Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, 2 изд., М., 1982; [3] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 1, М., 1974; [4] Рытов С. М., в кн.: Введение в статистическую радиофизику, 2 изд., ч. 1, М.; [5] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1–2, 1961–62; [6] Френкс Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974; [7] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983.

İMTİNA (SIRADAN ÇIXMA) «отказ; failure» – sistemin sıradan çıxması, işqabiliyyətini itirməsidir.

Bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*, *Dublaşdırma texnikada*.

İMTİNA AXTARIŞI «отказов поиск; failure hunting» – sıradan çıxmış elementin (və ya elementlərin) aşkar olunması və lokalizasiyası üçün diaqnostik prosedurdur. Prosedur testlər ardıcılığı və kombinasiyası kimi həyata keçirilir və onların hər birinin tətbiqi nəticəsində test tətbiq edilən elementlərin hər hansı bir çoxluğundan bütün elementlərin işqabiliyyətliliyini və ya heç olmazsa onlardan birinin imtina etməsini təyin etməyə xidmət edir. Adətən, testlərin aparılması vaxt itkisi və ya dəyər itkisinə səbəb olur və bununla əlaqədar olaraq, hər hansı bir kriteri üçün sisteme daxil olan elementlərin etibarlılığının ehtimal xarakteristikalarından asılı olaraq optimizasiya məsələləri həll olunur. Məsələlərin həllində dinamik proqramlama metodu, rekursiv metod, elementləri bir-bir ardıcıl yoxlama metodu və s. istifadə olunur.

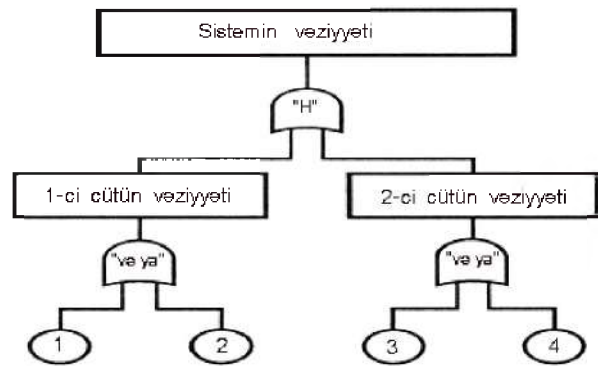
Əd.: [1] Надежность технических систем, М., 1985.

İMTİNA ÜÇÜN ORTA İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ «средняя наработка на отказ; average operating age to failure» – bərpaolunan sistemin işləmə müddətinin bu işləmə müddətindəki imtinaları sayının riyazi gözləməsinə nisbətidir.

Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin, Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNALAR AĞACI «отказов дерево; fault tree» – sistemin strukturunun *qrafik* təsviridir (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*). İ. a. sistemin imtinasına səbəb olan imtina edən elementlərin toplusunu aşkar etməyi sadələşdirir. Şəkilə dublanmış – iki cüt: 1, 2 və 3, 4 elementlərdən ibarət sistem üçün İ. a. təsvir olunmuşdur.

Hər bir cütdəki elementlərdən heç olmazsa bir element sıradan çıxdıqda sistem də sıradan çıxır. İ. a. sistemin etibarlılıq göstəricilərini hesablamaq üçün istifadə olunur.



Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

İMTİNASI, ELEMENTİN «отказ элемента; failure of element» – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNASI, SİSTEMİN «отказ системы; failure of system» – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNASIZ / FASILƏSİZ İŞLƏMƏ EHTİMALI «безотказной работы вероятность; probability of breakdown free / failure – free operation / survival function» – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNASIZ İŞLƏMƏ MÜDDƏTİNİN PAYLANMA FUNKSİYASI α_1 rejimində «безотказной работы продолжительности функция распределения в режиме α_1 ; distribution function of failure rate in the rejim α_1 » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNASIZLIQ «безотказность; failureless» – sistemin müəyyən müddət ərzində fasiləsiz olaraq işqabiliyyətliliyini saxlama xassəsidir. İ. etibarlılığın əsas xassəsidir. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin, Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNAYA QƏDƏR QAMMA – FAİZLİ İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ «гамма – процентная наработка до отказа; gamma – percent age operating before failure» – sistemin γ ehtimalı ilə fasiləsiz (sıradan çıxmadan) işləmə müddəti t_γ -dir, yəni $P(t_\gamma) = \gamma$. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin, Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

İMTİNAYA QƏDƏR ORTA İŞLƏNİLMƏ MÜDDƏTİ «средняя наработка до отказа; average operating age before failure» – sistemin ilk imtinasına qədər işləmə müddəti X -in riyazi gözləməsi MX -dir.

İNДЕКС(i) təsadüfi kəmiyyətin, paylanmanın «индекс случайной величины, индекс распределения; index of a random variable, index of a distribution» – ξ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanması* $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiyası vasitəsilə,

$$\Delta(\xi) = \sup \{h: \min(|f_\xi(t)|: |t| \leq h) > 0\}$$

bərabərliylə təyin olunan ədədi xarakteristikasıdır.

İ. anlayışı [1]-də ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $C_r(\xi)$ mərkəz və $B_r(\xi)$ səpələnmə anlayışları ilə yanaşı daxil olunmuşdur.

İxtiyari $0 < r < \Delta(\xi)$ üçün hər iki xarakteristika mövcuddur (bax, [2]).

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 5, с. 1010–12; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

İNDİKATOR(u) hadisənin «индикатор события; indicator of event», A hadisəsinin indikatoru –

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətdir.

İNDİKATOR DƏYİŞƏN «индикаторная переменная; indicator variable» – bax, Kovariasion analiz.

İNDİKATOR METRİKA «индикаторная метрика; indicator metric» –

$$i(X, Y) = MI(X \neq Y) = P\{X \neq Y\}$$

şəklində müəkkəb ehtimali metrikadır, burada I – hadisənin indikatorudur. İ. m. σ metrikasının tam variasiyası üçün protominimal metrikadır. Metrikanın tam variasiyası ehtimal nəzəriyyəsində metrik məsafələr metodunda (xüsusilə) və ideal metrikaların qurulmasında böyük əhəmiyyətə malikdir. İ. m., σ metrikası kimi, təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətləri fəzasının ixtiyari qarşılıqlı birqiymətli çevirmələrinə nəzərən invariantdır, yəni $i(T(X), T(Y)) = i(X, Y)$. İ. m.-sı Ki – Fan metrikası $\mathcal{H}$ ilə

$$\mathcal{H}(X, Y) \leq i(X, Y)$$

berəbersizliyi ilə bağlıdır.

İNDİKATORU, ÇOXLUĞUN «индикатор множества; indicator of set» – ixtiyari A çoxluğu üçün

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan, ω -nın funksiyası $I_A(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətdir. Əksinə, ω -nın funksiyası olan və ω -lar çoxluğunda yalnız 0 və 1 qiymətlərini alan hər bir funksiya bu ω -lar çoxluğunun indikatorudur. Aydın ki,

$$I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B, \quad I_A = I_B \Leftrightarrow A = B,$$

$$I_{AB} = 0 \Leftrightarrow AB = \emptyset,$$

$$I_\emptyset = 0, \quad I_\Omega = 1, \quad I_A + I_{\bar{A}} = 1$$

$$I \inf A_i = \inf I_{A_i}, \quad I \sup A_i = \sup I_{A_i},$$

$$I_{\bigcap A_n} = \prod I_{A_n}, \quad I_{\bigcup A_n} = \sum I_{A_n}$$

$$I_{\bigcup A_i} = I_{A_1} + (1 - I_{A_1})I_{A_2} + (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2})I_{A_3} + \dots,$$

$$I_{\liminf A_n} = \liminf I_{A_n},$$

$$I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n}, \quad I_{\lim A_n} = \lim I_{A_n}.$$

İxtiyari A təsadüfi hadisəsinin indikatorunun riyazi gözləməsi üçün

$$MI_A(\omega) = 1 \cdot P\{\omega \in A\} + 0 \cdot P\{\omega \in \bar{A}\} = P\{\omega \in A\}$$

münasibəti doğrudur.

İNDİVİDUAL ERQODİK TEOREM «индивидуальная эргодическая теорема; pointwise ergodic theorem» – bax, *Ergodik teoremlər*.

İNERSİON PROQNOZ «инерционный прогноз; persistent forecast» – bax, *Proqnozu, havanın*.

İNFINİTEZİMAL MATRİS «инфинитезимальная матрица; infinitesimal matrix» – bax, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu sonlu*.

İNFINİTEZİMAL OPERATOR «инфинитезимальный оператор, производящий оператор, генератор; generator / infinitesimal operator», doğuran operator, generator – 1) güclü infinitezimal operator – normalanmış fəzada xətti operatorların semi – qrupu P^t -də, $t \geq 0$ operatorudur, aşağıdakı kimi təyin olunur: fəzanın f elementi A operatorunun təyin olunma oblastı D_A -dəndir, əgər

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t f - f)$$

limiti normaya görə yığılma mənada vardırsa, bu limit f elementində Af operatorunun qiyməti kimi götürülür. İsbat olunur ki, İ. o. sıxan operatorlar semi – qrupunu onun təyin olunma oblastının tamamlayıcısında birqiymətli təyin edir.

2) Markov prosesləri nəzəriyyəsində məhdud, kəsilməz (və ya yalnız ölçülən) funksiyalar fəzasında operatorlar semi – qrupunun İ. o.-a baxılır və bu operator

$$P^t f(x) = M_x f(\zeta_t)$$

düsturu ilə verilir; (ζ_t, P_x) bircins Markov prosesinin İ. o.-u bu halda

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (M_x f(\zeta_t) - f(x))$$

düsturu ilə verilir, limit x -ə görə müntəzəm olmalıdır ($M_x, - P_x$ ehtimalına uyğun riyazi gözləmədir). ζ_t prosesi üzərinə qoyulan bezi zəif kəsilməzlik şərtlərilə İ. o. sonluölçülülüyə paylanmalar dəqiqliyi ilə prosesi birqiymətli olaraq təyin edir.

Ciddi Markov prosesi üçün İ. o. proseslə

$$M_x f(\zeta_t) - f(x) = M_x \int_0^t Af(\zeta_s) ds$$

münasibətilə əlaqəlidir: τ ele dayanma anıdır ki, $F_x(\tau) < \infty$, f isə $f \in D_A$ şərtini ödəməlidir (düstur Dinkin düsturu kimi də adlanır). Diffuzion proseslər üçün İ. o. 2-ci tərtib differensial operatorun daralmasıdır.

Qeyri – bircins $(\zeta_t, P_{x,t})$ Markov prosesi üçün İ. o.

$$A_t f(x) = \lim_{t' \downarrow t} (t' - t)^{-1} (M_{t,x} f(\zeta_{t'}) - f(x))$$

düsturu ilə təyin olunur: bu halda varlıq və yeganəlik məsələləri çox müəkkəbdir.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

3) Ölçülərin konvolüsyon semi-grupunun l.o. «И.о. сверточной подгруппы мер; infinitesimal operator / generator of a convolution of measures» – G qrupunda ölçülərin kəsilməz konvolüsyon semi – qrupu μ_t -yə müvafiq xətti operatorların kəsilməz $\{S_t, t \geq 0\}$ semi – qrupunun infinitezimal operatorudur.

Fərz olunur ki, $\{\mu_t, t \geq 0\}$ ehtimal ölçülərinin G qrupunda ele kəsilməz konvolüsyon semi – qrupdur ki, $\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t = \delta_e$ şərtini ödəyir, burada δ_e – G qrupunun vahidi e -də cırlaşmış ehtimal paylanmasıdır.

$t > 0$ olduqda hər bir μ_t ölçüsünə

$$S_t f(x) := \int_G f(x \cdot y) \mu_t(dy)$$

ehtimal operatoru qarşı qoyulur, burada f funksiyası G qrupunda kəsilməz məhdud funksiyaların Banax fəzası $\mathcal{B}(G)$ -dəndir. G -də bütün məhdud müntəzəm kəsilməz həqiqi funksiyaların Banax fəzası $\mathcal{E}_u(G)$ üzərinə məhdudiyyətlərlə $\{S_t, t > 0\}$ operatorlar ailəsi daraldıcı operatorların güclü kəsilməz semi – qrupunu əmələ gətirir. $S_t, t > 0$ semi – qrupunun

$$Nf(x) := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (S_t f(x) - f(x))$$

münasibətilə təyin olunan l. o.-u $N \in \mathcal{E}_u(G)$ -də sıx hər hansı D_N altfəzasından olan bütün f -lər üçün, $\{\mu_t, t \geq 0\}$ ölçülərinin G qrupunda konvolüsyon semi – qrupunun infinitezimal operatoru adlanır.

Ölçülərin konvolüsyon semi – qrupunun *doğuran funksionalı* $Af := Nf(e)$ qaydası ilə təyin olunur və l. o. ilə sıx əlaqəlidir. Aydındır ki, $Nf(x) = A(Z_x f)$, burada Z_x – G qrupunda x elementinə sol yerindəyişmə ilə doğurulan $\mathcal{B}(G)$ fəzasında xətti operatorudur. N operatoru və A funksionalı $S_t, t > 0$ semi – qrupunu (deməli, μ_t qrupunu da) birqiymətli təyin edir.

Bax, *Konvolüsyon semi – qrupu, ölçülərin; kanonik ifadə*.

Əd.: [1] Н о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

İNFINITEZİMAL SİSTEMİ, ÖLÇÜLƏRİN «ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА МЕР; infinitesimal system of measures» – G qrupunda $\mu_{nk}, k=1, \dots, k_n, n \geq 1$ ehtimal ölçülərinin aşağıdakı şərti ödəyən üçbucaq sistemidir: G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(G \setminus U) = 0.$$

Əgər $\hat{\mu}_{nk}(\gamma), \gamma \in \Gamma$, – μ_{nk} ehtimal paylanmalarının *Furye çevirməsidir*sə, onda $\{\mu_{nk}\}$ ölçülən sistemi, yalnız və yalnız, T_γ -nin ifadəsi fəzasından olan bütün n -lər üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \|\hat{\mu}_{nk}(\gamma)u - u\| = 0$$

münasibəti ödənildikdə infinitezimal sistemdir.

Əgər G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı və G qrupunun qeyd olunmuş (məxsusi) kompakt altqrupu K üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(G \setminus KU) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\mu_{nk}\}$ ölçülər sistemi K – kompakt – tozimal ölçülər sistemi adlanır.

Əd.: [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., 1965; [2] С о б к о Г. М., «Теория вероятн. в ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 549–57.

İNFORMANT «ИНФОРМАНТ; informant» – loqarifmik *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* qradientidir. l. anlayışı riyazi statistikanın parametrik məsələlərlə əlaqədar yaranmışdır. Aprior informasiyaya görə məlumdur ki, müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya proses $\{P^t, t \in \Theta\}$ ailəsindən olan $P^\theta(dw)$ ehtimal paylanması ilə ifadə olunur: t ədədi və ya vektor parametridir, θ -nın əsl qiyməti isə məlum deyildir. Apanılan müşahidənin (asılı olmayan müşahidələr seriyasının) nəticəsi ω (seriyanın nəticəsi $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}$) olmuşdur. Müşahidə nəticələrinə əsasən θ -nı qiymətləndirmək tələb olunur. Fərz olunur ki, $\{P^t\}$ ailəsi müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün mümkün nəticələri fəzası Ω -da təyin olunmuş $\mu(dw)$ ölçüsünə nəzərən $p(\omega; t)$ sıxlıq funksiyaların ailəsi ilə verilir. Ω diskret fəza olduğu halda $p(\omega; t)$ əvəzinə nəticələrin ehtimalları

$P^t(\omega)$ -lar götürülür. ω qeyd olunduqda $p(\omega; t)$ kəmiyyəti $t = (t_1, \dots, t_m)$ parametrlərinin funksiyası kimi *doğruyaoxşarlıq funksiyası*, bu funksiyanın natural loqarifmi – *loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyası* adlanır.

Hamar ailələr üçün l.-ı vektor kimi aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$\text{grad}_t \ln p(\omega; t) =$$

$$= \left(\frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_n} \right);$$

bu şəkildə l. loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasından fərqli olaraq μ ölçüsünün seçilməsindən asılı olmur. l. θ -nın qiymətləndirilməsi məsələsində müşahidələrdən alınan və eyni zamanda əvvəlcədən məlum olan, mühüm əhəmiyyət kəsb edən bütün informasiyanı özündə ehtiva edir. Bundan əlavə, o additivdir: asılı olmayan müşahidələrdə, yeni

$$p(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}; t) = \prod_{k=1}^N p_k(\omega^{(k)}; t)$$

olduqda l. cəmlənir:

$$\text{grad} \ln p(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}; t) = \sum_{k=1}^N \text{grad} \ln p_k(\omega^{(k)}; t).$$

Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində l.-in təsadüfi vektor-funksiya kimi xassələri mühüm əhəmiyyətə malikdir. Loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasının rəqulyar olduğu fərz olunarsa, məsələn, iki dəfə differensiallanan, törəmələrinin inteqrallanan və

parametre göre differensiallanma ilə nəticələr üzrə integrallanmanın yerlərini dəyişdirilmə şərtlərini ödədiyi halda bütün j, k qiymətlərində

$$\mathbf{M}_t \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} p(\omega; t) d\mu = 0,$$

$$-\mathbf{M}_t \frac{\partial^2 \ln p(\omega; t)}{\partial t_j \partial t_k} = \mathbf{I}_{jk}(t) = \mathbf{M}_t \frac{\partial \ln p}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p}{\partial t_k}$$

eynilikləri doğrudur. $\|\mathbf{I}_{jk}(t)\|_{j,k=1}^n$ kovariasion matrisi *informasiya matrisi* adlanır. Bu matris vasitəsilə θ parametrinin statistik qiymətlərinin dəqiqlik sərhədini təyin edən informasiya bərabərsizlikləri ifadə olunur.

θ parametrimin maksimal doğruxaoxşarlıq metodu ilə qiymətləndirdikdə müşahidə olunan ω nəticəsinə (və ya $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}$

seriyasına) qarşı eht $t = \theta^*(\omega)$ qiyməti götürülür ki, bu qiymət eht qiymətə ən yaxın – doğruxaoxşar olur. yeni o, doğruxaoxşarlıq funksiyası və loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyasının maksimum qiymətini təmin edir. Lakin alınan

$$\text{grad } \ln p(\omega; t) = 0$$

doğruxaoxşarlıq tənliliyinin $t = \theta^*$ -dan başqa əlavə eht kökləri ola bilər ki, bu köklər loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyasının lokal maksimumlarına (və ya minimumlarına) uyğun olur və bu halda bunlar nəzərə alınmamalıdır. Əgər $t = \theta$ qiymətinin hər hansı ətrafında

$$\det \|\mathbf{I}_{jk}(t)\| \neq 0$$

olarsa, onda θ -in qeyd olunmuş xassələrindən, müşahidələr sayı N artıqca, doğruxaoxşarlıq maksimumunun θ_N^* statistik qiymətinin asimptotik optimallığı alınır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

İNFORMASİON ARDICILLIQ « информационная последовательность; information sequence » – bax, *Konvolusion kod*.

İNFORMASİON DAYANIQLILIQ « информационная устойчивость; information stability » – böyük ədədlər qanununun nəzəri – informasiyon analoqudur.

$0 < I(Z^n; \tilde{Z}^n) < \infty$ şərtini ödəyən $(Z^n, \tilde{Z}^n)$ təsadüfi kəmiyyətlərin cütü ardıcılığı ixtiyari $\delta > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{i_{Z^n, \tilde{Z}^n}(Z^n; \tilde{Z}^n)}{I(Z^n; \tilde{Z}^n)} - 1 \right| < \delta \right\} = 1$$

münasibətini ödəyərse, o, *informasiyon dayanıqlı ardıcılığı* adlanır, burada $I(Z^n; \tilde{Z}^n)$ – informasiya miqdarı, $i_{Z^n, \tilde{Z}^n}(\cdot; \cdot)$ – informasiyon sıxlıq, yeni $i_{Z^n, \tilde{Z}^n}(\cdot; \cdot) = \log a_{Z^n, \tilde{Z}^n}(\cdot; \cdot)$, burada $a_{Z^n, \tilde{Z}^n}(\cdot; \cdot)$ – $(Z^n; \tilde{Z}^n)$ cütünün ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}_{Z^n, \tilde{Z}^n}$ -in Z^n və $\tilde{Z}^n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ölçülərinin hasil $\mathbf{P}_{Z^n} \times \mathbf{P}_{\tilde{Z}^n}$ -ə görə Radon – Nikodim törəməsidir.

θ -ın olması olduqca ümumi hallar üçün müəyyən olunmuşdur. Məs., vəziyyətləri sayı sonlu olan $(Z, \tilde{Z}) = \{(Z_j, \tilde{Z}_j), j = 1, 2, \dots\}$ stasionar erqodik proseslər cütünün parçaları cütü – $(Z^n, \tilde{Z}^n) = ((Z_1, \tilde{Z}_1), \dots, (Z_n, \tilde{Z}_n))$ ardıcılığı informasiyon dayanıqlıdır.

$I(Z^n; \tilde{Z}^n) \rightarrow \infty$ şərti $(Z^n, \tilde{Z}^n)$ cütü Gauss tipli olduğu halda θ -in üçün zəruri və kifayətdir.

$Z^n = \tilde{Z}^n$ olduğu halda, $I(Z^n; \tilde{Z}^n) = H(Z^n)$ Z^n təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır, entropik dayanıqlılıq asimptotik olaraq eynipaylanlıq xassəsinə çevrilir: yeni ixtiyari $\delta, \kappa > 0$ üçün eht $n_0(\delta, \kappa)$ vardır ki, bütün $n > n_0(\delta, \kappa)$ qiymətlərində

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{-\log \mathbf{P}(Z^n)}{n} - \frac{H(Z^n)}{n} \right| > \delta \right\} < \kappa$$

münasibəti ödənilir.

U^n məlumatlar mənbəsinin verildiyi fərz olunur; bu mənbə qiymətləri ölçülən $(\mathcal{X}^n, S_{\mathcal{X}^n})$ fəzasından, uyğun ehtimal paylanmalar $P_{\mathcal{X}^n}(\cdot) = p_n(\cdot)$ olan X^n məlumatını hasil edir, $(\tilde{\mathcal{X}}^n, S_{\tilde{\mathcal{X}}^n})$ – verilmiş məlumatın bərpə olunan qiymətlərinin ölçülən fəzasıdır.

$H_{\varepsilon_n}(X^n)$ isə X^n məlumatının ε_n – entropiyası olsun (bax, *Epsilon – entropiya*). Dəqiqlik şərti

$$\mathbf{M} p_n(X^n, \tilde{X}^n) \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \geq 0 \quad (*)$$

bərabərsizliyi ilə verilir, burada mənfi olmayan, ölçülən $p(x^n, \tilde{x}^n), x^n \in \mathcal{X}^n, \tilde{x}^n \in \tilde{\mathcal{X}}^n$ funksiyası təhrif ölçüsüdür. Əgər (*) bərabərsizliyini ödəyən, ehtimal paylanmalar $\mathbf{P}_{\mathcal{X}^n}(\cdot) = p_n(\cdot)$ olan $(X^n, \tilde{X}^n)$ təsadüfi kəmiyyətlər cütünün informasiyon dayanıqlı ardıcılığı varsa və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(X^n; \tilde{X}^n)}{H_{\varepsilon_n}(X^n)} = 1$$

münasibəti ödənilərsə, onda U^n informasiyon dayanıqlı mənbələr ardıcılığı adlanır.

(Q^n, V^n) rabitə kanalının verildiyi fərz olunur; $(\mathcal{X}^n, S_{\mathcal{X}^n})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}^n, S_{\tilde{\mathcal{X}}^n})$ uyğun olaraq, bu kanalın giriş və çıxış siqnallarının ölçülən fəzaları, $Q(y^n, A), y \in \mathcal{X}^n, A \in S_{\tilde{\mathcal{X}}^n}$ keçid funksiyası olsun. Kanalın giriş siqnallar fəzası $(\mathcal{X}^n, S_{\mathcal{X}^n})$ -də ehtimal paylanmaları V^n -lərin çoxluğunun verildiyi fərz olunur. $C(Q^n, V^n)$ isə (Q^n, V^n) kanalının ötürücülük qabiliyyəti olsun. Əgər ixtiyari $A \in S_{\tilde{\mathcal{X}}^n}$ çoxluğu üçün

$$\mathbf{P} \{ \tilde{Y}^n \in A | Y^n \} = Q(Y^n, A)$$

bərabərliyi ödənilərsə, Y^n və $\tilde{Y}^n$ təsadüfi kəmiyyətləri kanalla sanki yəqin əlaqələnməmişlər. Əgər rabitə kanalı ilə bağlı (Y^n , $\tilde{Y}^n$) təsadüfi kəmiyyətlər cütlerinin ələ informasiya dayanıqlı ardıcılığı varsa ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(Y^n; \tilde{Y}^n)}{C(Q^n, P^n)} = 1$$

münasibətini ödəsin, onda (Q^n, P^n) – informasiya dayanıqlı kanallar ardıcılığı adlanır.

Məlumatları və siqnalı təsadüfi proseslərin parçaları olan mənbə və kanallar ardıcılıqlarının geniş sinfi üçün İ. d. xassəsi ödənilir.

Əgər məlumatın ε – entropiyası kanalın ötürücülük qabiliyyətindən az olarsa, onda mənbə və kanalların İ. d.-i kanalla məlumatların ötürülməsi mümkünlüyünün asimptotik mənada zəruri və kafi şəhətdir.

Əd.: [1] В о л ь ф о в и ц Д ж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., «Успехи матем. науки», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] П и н с - к е р М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 1–201; [4] Ф а й н с т е й н А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

***İNFORMASİON EHTİYATDA SAXLAMA «информационное резервирование; informed redundancy»** – tipli İ. ə. s.-da (bax, *Ehtiyatda saxlama*) həddindən artıq informasiyanın yığıldığı nəzərdə tutulur və bu informasiyanın bir hissəsinin itkisi sistemin intinmasına səbəb olur.

İNFORMASİON KORRELYASIYA ƏMSALI «информационный коэффициент корреляции; informational correlation coefficient» – bir təsadüfi kəmiyyətdə informasiya miqdarı kəmiyyətinin digərinin funksiyası kimi

$$R(X, Y) = \sqrt{1 - e^{2I(X;Y)}}$$

düsturu ilə təyin olunan, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında asılılıq ölçüsüdür, burada $I(X;Y)$ – informasiya miqdarıdır.

İ. k. ə. $R(X, Y)$ -in xassələri asılılıq ölçüsü kimi X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılıq xarakteristikasını ifadə edən $I(X;Y)$ kəmiyyətinin xassələri ilə tam mənası ilə təyin olunur. Lakin İ. k. ə. R -dən adı korrelyasiya əmsalı ρ -nun informasiya analoqu kimi asılılıq ölçüsünü təyin etmək məqsədilə istifadənin bir üstünlüyü vardır: informasiya miqdarının xassələrinə əsasən $R = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda doğru olur. Əgər X və Y ikiölçülü normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bu iki əmsal üst-üstə düşür, yəni $R = \rho$ olur; belə ki, bu halda $I = -2^{-1} \ln(1 - \rho^2)$.

Təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılığın İ. k. ə. vasitəsilə praktiki cəhətdən araşdırılması – əlamətlərin qoşmalığı cədvəlləri tipli informasiya miqdarı üçün cədvəllərlə analizlə eynidir. R -ə analoq

seçimi əmsal $\hat{R} = \sqrt{1 - e^{-2\hat{I}}}$,

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \frac{n_{ij}}{n} \ln \frac{nn_{ij}}{n_i n_j}$$

informasiya statistikasından istifadə olunaraq hesablanır, n – müşahidələrin sayı, s və t – iki əlamətə görə qruplardakı siniflərin sayı, n_{ij} – (i, j) sinfində müşahidələrin sayıdır.

$$n_i = \sum_{j=1}^t n_{ij}, \quad n_j = \sum_{i=1}^s n_{ij}.$$

Beləliklə, seçimi İ. k. ə.-nin paylanması haqqında məsələ seçimi informasiyanın paylanması məsələsinə gətirilir. Seçimi informasiyanın asılılıq ölçüsü kimi analizi onunla mürəkkəbləşir ki, $\hat{I}$ statistikasi müşahidələrin qruplaşmasından olduqca asılı olur.

Əd.: [1] L i n f o o t E., «Information and Control», 1957, v. 1, № 1, p. 85–89; [2] К у л ь б а к С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967.

İNFORMASİON MATRİS «информационная матрица; information matrix», regression matrix – $y = \Phi\theta + \varepsilon$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in \mathbb{R}^p$, $M_\varepsilon = 0$,

$\text{cov}\hat{\theta}$ -ya tərs $\text{cov}\varepsilon = W^{-1}$ (əgər $\det \Xi \neq 0$ olarsa) *regression eksperimenti* üçün $\Xi = \Phi^T W \Phi$ matrisidir. $\hat{\theta}$ θ üçün ən yaxşı xətti meyilsiz statistik qiymətdir. İ. m.-in maksimizasiya məsələsi münasib mənada qoyulur (bax, məs., *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması, Ardıcıl planlaşdırılması eksperimenti*).

İNFORMASİON MATRİS Fişer informasiyası üzrə «информационная матрица; информация по Фишеру; information matrix; Fisher information» – *informantın* kovariasiyalar matrisidir. $P^t(d\omega)$ ehtimal paylanmalarının dominar ailəsi üçün bu paylanmaların sıxlıq funksiyaları $p(\omega; t)$ -lər $t = (t_1, \dots, t_m) \in \Theta$ vektor (xüsusi halda, ədədi) parametridən asılı olan olduqca hamar funksiyalar olduqda İ. m.-in elementləri $t = \theta$ olduğu halda

$$I_{jk}(\theta) = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} \Big|_{t=\theta} p(\omega; \theta) d\mu \quad (1)$$

integralı ilə təyin olunur, burada $j, k = 1, \dots, m$. t skalyar parametir olduqda İ. m. yeganə bir ədədlə informant dispersiyası ilə təsvir olunur.

$I(\theta)$ İ. m.-i mənfi olmayan

$$\sum_{j,k} I_{jk}(\theta) dt_j dt_k = \Delta_\theta \quad (2)$$

differensial kvadratik formasını təyin edir ki, bu da $\{P^t\}$ ailəsini Riman metriksinə ilə təmin edir. ω nəticələri fazası Ω sonlu olduqda

$$\Delta_P = \sum_j (dp_j)^2 / p_j; \quad p_j = P(\omega_j), \quad \omega_j \in \Omega$$

olur. Differensial kvadratik Fişer forması (2) sabit vuruq dəqiqliyi ilə statistik həllər qaydaları kateqoriyasına nəzərən invariant yeganə differensial kvadratik formadır. Buna görə də, bu forma bir çox statistik qanunauyğunluqların ifadə olunmasında yararlıdır.

Neticələrin Ω fəzasının ixtiyari ölçülən f inikası I m. $I^Q(\theta)$ olan $Q' = P' f^{-1}$ yeni hamar paylanmaları ailəsini doğurur. Bu halda I m. monoton artırır, yeni ixtiyari $z_1, \dots, z_m$ üçün

$$\sum_{j,k} I_{j,k}^Q z_j z_k \leq \sum_{j,k} I_{j,k}^P z_j z_k$$

olur. I m. additivlik xassəsinə də malikdir. Əgər $I^{(i)}(\theta)$ paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_i(\omega'; t)$ olan ailənin I m. idirsə, onda

$$p(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}; t) = \prod_{i=1}^N p_i(\omega^{(i)}; t)$$

ailəsi üçün $I_N(\theta) = \sum_i I^{(i)}(\theta)$ olur. Məs., N sayda asılı

olmayan eyni qanunla paylanmış sınaqlar olduğu halda $I_N(\theta) = N I(\theta)$. I m. paylanma qanununun parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələsində həlledici qaydaların dəqiqliyini xarakterizə etməyə imkan verir. Skalər t parametrlərinin ixtiyari $\tau(\omega) = \tau(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)})$ meylsiz statistik qiymətinin dispersiyası üçün $D_\theta \tau \geq [N I(\theta)]^{-1}$ bərabərsizliyi doğrudur. Vektor parametrlərin statistik qiymətləri üçün analoji matris informasiya bərabərsizliyi ödənilir. Onun skalər nəticəsi

$$M_\theta \sum_{j,k=1}^m [\tau_j(\omega) - \theta_j][\tau_k(\omega) - \theta_k] I_{j,k}(\theta) \geq m N^{-1} \quad (3)$$

bərabərsizliyindən aydındır ki, meylsiz qiymətləndirmə heç yerdə olduqca dəqiq ola bilməz. İxtiyari statistik qiymətlər üçün sonuncu müddəə doğru deyildir. Lakin, məs., orta dəqiqliyə məhdudiyyətlər qalır:

$$M_\theta M_\theta \langle \tau - \theta | I(\theta) | \tau - \theta \rangle \geq m N^{-1} + o(N^{-1}), \quad (4)$$

burada (3)-ün sol tərəfində M ortalaması ixtiyari kompakt $\Theta' \subset \Theta$ altoblastının invariant V həcmi üzrə aparılmışdır.

$$dV[\theta] = \sqrt{\det I(\theta)} d\theta_1 \dots d\theta_m$$

qalıq həddi Θ' -in ölçüsündən asılıdır. (4) bərabərsizlikləri asimptotik olaraq dəqiqdir və bu mənada maksimum doğruxoxşarlıq statistik qiyməti asimptotik optimal olur.

$\det I(\theta) = 0$ cırlaşma nöqtələrində parametrlərin birgə qiymətləndirilməsi çətinləşir; əgər hər hansı oblastda $\det I(\theta) = 0$ olarsa, onda birgə qiymətləndirilmə, ümumiyyətlə, mümkün deyildir. Beləliklə, R. Fişer kimi ehtiyatla demək olar ki, I m. paylanma qanununun parametrləri haqqında təsadüfi seçimdəki orta informasiya miqdarını təsvir edir (bax, [1]).

Əd.: [1] Fisher R. A., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1925, v. 22, p. 700–725; [2] Б а р р а Ж.-П., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [3] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972.

INFORMASION METRIKA(s) Riman «информационная метрика риманова; Riemann information metric» – bax, Riman informasiya metrikası.

INFORMASION MƏSAFƏ «информационное расстояние; information distance» – eyni $(\Omega, \mathcal{A})$

elementar nəticələr fəzasında P və Q ehtimalları ilə təyin olunmuş bütün təsadüfi hadisə və ya proseslər cütünün «oxşar olmadıqları» xarakterizə edən $J(P, Q)$ kəmiyyətidir. I m.-yə ehtimali məsafənin xüsusi halı kimi baxmaq olar. I m.-yə ən sadə misallar: tam variasiya metrikası –

$$\delta(P, Q) = \left\{ \int_{\Omega} |P(d\omega) - Q(d\omega)| \right\} \quad (1)$$

ehtimali metrikası və Fişerin informasiya Riman metrikasında Rao–Bhattacharyya məsafəsi –

$$S(P, Q) = 2 \arccos \int_{\Omega} \sqrt{P(d\omega) Q(d\omega)} \quad (2)$$

düsturu ilə təyin olunan ehtimal metrikalarıdır.

Asılı olmayan müşahidələr üzrə P və Q ehtimallarının müqayisəsi məsələsində eksperimentin informativlik ölçüləri ilə bağlı I m.-lər çox maraqlıdır (bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*). Müşahidə nəticələri üzərində işləyən statistik hər bir konkret məsələdə müşahidə olunmuş təsadüfi hadisə və ya proses haqqında nəticələr çıxmalıdır. Bu nəticələr, ümumiyyətlə, tamamilə dəqiq olmur, çünki müşahidələrin nəticələri təsadüfi olur. İntuitiv olaraq aydındır ki, hər bir seçim müəyyən miqdarda faydalı informasiya daşıyır və bununla yanaşı: A) müşahidə nəticələri üzərində işləyərkən informasiya yalnız itə bilər, B) asılı olmayan mənbələrdən alınan (məs., asılı olmayan seçimlərdən) informasiya cəmlənir. Beləliklə, əgər eksperimentin informativliyinə müşahidədəki orta informasiya miqdarı kimi baxılarsa, onda informativlik üçün A) və B) aksiomları ödənilir. Informasiya anlayışının intuitivliyinə baxmayaraq, bəzən A) və B) aksiomlarını ödəyən J kəmiyyətini göstərmək mümkündür ki, bu kəmiyyət informativlik kimi təbii olaraq qəbul olunmalıdır və o, müşahidələrin sayı artdıqca, statistik həllər məsələsində, nəticələrin orta dəqiqliyinin asimptotikasını təsvir edə bilər. Informativlik ədədi və ya matris kəmiyyət ola bilər [məs., Fişer informasiya matrisi; bax, (2)].

Neyman – Pirson nəzəriyyəsinə əsasən, hadisələr cəbri $\mathcal{A}$ olan, ω nəticələrinin Ω ümumi fəzasında verilmiş P və Q ehtimal paylanmalarının müxtəlifliyi haqqında bütün faydalı informasiya doğruxoxşarlıq nisbəti və onun loqarifmi

$$l(\omega) = \ln \frac{dP}{dQ}(\omega), \quad \omega \in \Omega \quad (3)$$

kəmiyyətində ehtiva olunur və sıfır ehtimalı nəticələr çoxluğundakı qiymətlər dəqiqliyi ilə təyin olunur.

$$I(P; Q) = \int_{\Omega} P(d\omega) = \int_{\Omega} \left[\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)} \ln \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)} \right] Q(d\omega) \quad (4)$$

münasibətindəki kəmiyyətin riyazi gözləməsi Q -yə qarşı P -nin xeyrinə orta fərqlənmə informasiyası adlanır (burada $0 \cdot \ln 0 = 0$ qəbul olunur); bu kəmiyyət eyni zamanda nisbi entropiya, Kullbak – Leybnits informasiya miqdarı, Kullbak – Leybler – Sanov informasiya yayılması kimi də adlandırılır. Mənfi olmayan (amma

sonsuzluq ola bilər) $I(P:Q)$ kəmiyyəti A) və B) aksiomlarını ödəyir. Bu kəmiyyət P -nin Q -dən birtərəfli fərqlənməsinin dəqiqliyini xarakterizə edir, asılı olmayan sınaqlar sayı N artdıqda 2-ci növ səhvin (yeni P hipotezi səhv olduğu halda, onun qəbul edilməsi) ehtimalı β_N -in azalması-nın maksimal tərtibini təyin edir. 1-ci növ səhv ehtimalı – mü-hümlük ölçüsü α_n -in ixtiyari qeyd olunmuş qiymətində, $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_N \leq \alpha_1 < 1$ olduqda

$$\ln \beta_N \sim -N I(P:Q)$$

münasibəti ödənilir. $0 < b_0 \leq \beta_N \leq b_1 \leq 1$ olduqda $I(Q:P)$ analoji kəmiyyəti də α_n -in azalmasının maksimal tərtibini təyin edir. «Oxşarlıq» münasibəti, məs., təsadüfi hadisə və ya proseslərin «oxşarlığı», ümumiyyətlə, simmetrik deyildir və bir qayda olaraq, $I(P:Q) \neq I(Q:P)$. P və Q -nün bir-birinə «oxşar» olmamasının təbii simmetrik xarakteristikası onların minimaks testlənməsində yaranır. Optimal test üçün

$$\begin{aligned} \ln \alpha_N &= \ln \beta_N \sim -N I_{PQ}, \\ I_{PQ} &= -\ln \min_{\alpha} \int_{\Omega} [P(d\omega)]^{\alpha} [Q(d\omega)]^{(1-\alpha)} = \\ &= \min_R \max \{ I(R:P), I(R:Q) \} \end{aligned}$$

münasibətləri doğrudur.

A) aksiomunun nəticələrindən biri

$$J(P, Q) \geq J(P\Pi, Q\Pi) \quad (5)$$

berəbersizliyi, Π – $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında ω nəticələrinə təbii qayda ilə ixtiyari statistik həlledici qaydadır. Bu berəbersizlikdən aydındır ki, A) aksiomunu ödəyən ixtiyari informasiya miqdarı J kateqoriyanın statistik həllər qaydalarına görə monoton invariantdır. (P, Q) cütlerinin belə invariantlarının tam sistemlərini

$$\mu^+(z) = \sup [P](A) - zQ(A): A \in \mathcal{A},$$

$$\mu^-(z) = -\inf [P](A) - zQ(A): A \in \mathcal{A}$$

variasiyaları təyin edir və bunlar vasitəsilə $0 \leq z \leq \infty$ olduqda (3) düsturundan $I(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti nəticələrin paylanması P (və ya Q) ilə tam mənası ilə təyin olunur. (1) və (2) daxil olmaqla, digər bütün monoton invariantları, həm də Çisarı informasiyon divergensiyalarını (bax, [3]) $\mu^+(z)$ və $\mu^-(z) = \mu^+(z) + z - 1$ vasitəsilə ifadə etmək olur, məs.:

$$I(P, Q) = \int_0^1 \mu^{(-)}(z) z^{-1} dz + \int_1^{\infty} \mu^{(+)}(z) z^{-1} dz.$$

Ixtiyari J l. m. müntəzəm struktur doğurur və $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında təyin olunmuş bütün ehtimal ölçülərinin hər bir $\text{cap}(\Omega, P)$ çoxluğunda uyğun müntəzəm τ_J topologiyasını təyin edir. Əgər J (5) münasibətini ödəyirsə, onda bu topologiya (1) variasiyası

üzrə yaranmış τ_{σ} topologiyasını majorlayır. Məs., əgər λ monoton informasiyon metrikadırsa, onda

$$\lambda(P, Q) \geq \frac{1}{8} \lambda(R_{0.5}, R_{0.25})^{\delta}(P, Q)$$

berəbersizliyi doğrudur, burada R_{θ} – ikiatomlu $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ fəzasında ehtimal paylanmasıdır və $R_{\theta}(\varepsilon_1) = \theta$, $R_{\theta}(\varepsilon_2) = 1 - \theta$, $0 \leq \theta \leq 1$.

B) aksiomuna əsasən, ortoqonal informativliklər katetlərin uzunluqlarının kvadratları kimi cəmlənir. Nə l. m.-lər, nə də onların kvadrları oxşar additivlik xassəsinə malik deyildirlər. (4) nisbi entropiyası üçün B) aksiomununun ödənilməsi $I(P:Q)$ -nü

Q -dən P -yə qədər məsafənin kvadratının yansıması qeyri – simmetrik analoji kimi interpretasiya etməyə əsas verir. Belə həndəsi interpretasiya statistikada bir sıra məsələlərdə təbii. Xüsusi halda, paylanmaların eksponensial ailəsi nəzəriyyəsində, nisbi entropiya üçün Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantı aşağıdakı kimi təyin olunur:

«qeyri – simmetrik» ortoqonallıq şərtində

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} I(\omega) [R(d\omega) + Q(d\omega)] &= \\ = \int_{\Omega} [\ln P(d\omega) - \ln Q(d\omega)] [R(d\omega) - Q(d\omega)] &= 0, \end{aligned}$$

$$I(R:P) = I(R:Q) + I(Q:P).$$

Oxşar xassə $\text{cap}(\Omega, P)$ çoxluqlarının ekvariant xətti əlaqəli-likləri nəzəriyyəsində də aşkar olunmuşdur (bax, [4]).

Bir-birinə olduqca yaxınlaşmaqda olan P və Q üçün $P=Q$ diaqonalında hamar, invariant informasiyon $J(P, Q)$ miqdarının baş hissəsi Fişer kvadratik forması vasitəsilə sabit $c(I)$ vuruğu dəqiqliyi ilə verilir. Nisbi entropiya üçün $c(J) = 0.5$.

Əd.: [1] Ку л ь б а к С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] Ч и с а р И., К е р - н е р Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [4] А м а - р и Ш у н и ч и, Differential-geometrical methods in statistics, B., 1985; [5] М о р о з о в а Е. А., Ч е н ц о в Н. Н., в кн. Probability theory and mathematical statistics, v. 2 (Vilnius, 1985), Utrecht, 1987, p. 287–310.

İNFORMASİON ÖLÇÜ «информационная мера; information measure» – təsadüfi hadisə və ya təsadüfi kəmiyyətin informativlik ölçüsüdür. Konkret haldan asılı olaraq müxtəlif l. ö.-lər istifadə olunur.

Diskret halda l. ö.-nün daxil olunduğu ümumi sxem ondan ibarətdir ki, hər bir elementar təsadüfi A hadisəsi üçün onun informativliyi $I(A)$ təyin olunur, yəni A hadisəsinin, doğrudan da, baş verdiyi haqqında alınmış informasiya kəmiyyətcə ifadə olunur və sonradan bu alınmış $I(A)$ kəmiyyətlərinin orta qiyməti müəyyən bir qayda ilə hesablanır. Bu halda, l. ö. anlayışı nəzəri – informasion anlayış kimi $I(A)$ -nın yalnız A_f hadisəsinin baş vermə ehtimalı $P(A) = p$ -dən asılı olmasına əsaslanır, yəni $I(A) = f(p)$. $f(p)$ funksiyası təbii olaraq müsbət funksiyadır [$0 \leq p \leq 1$ olduqda $f(p) \geq 0$: mənfəi informasiya mövcud deyildir] və monoton funksiya olmalıdır [$f(p)$ azalır: ehtimalı

daha az olan hadisə daha çox informativdir]. Sonlu sayda $x_1, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_1, \dots, p_n$ ehtimalları ilə alan diskret X təsadüfi kəmiyyətinin i. ö. $I(A_i)$ kəmiyyətlərinin orta qiymətinin müəyyən bir qayda ilə hesablanması yolu ilə təyin olunur. $A_i = \{X = x_i\}$ təsadüfi hadisədir. İnformasiya nəzəriyyəsində istifadə olunan i. ö. – X təsadüfi kəmiyyətinin i. ö. – Şennon entropiyası $H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i$ kəmiyyətdir ki, o,

$f(p) = -\log_2 p$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə bərabərdir.

Bu entropiyanın müxtəlif ümumiləşmələri bir sıra i. ö.-lərin alınmasına gətirir. Məs., sonlu seçim üzrə naməlum ehtimal paylanmalarının qiymətləndirilməsi kimi statistik məsələlərdə

$$I_f(P||Q) = \sum_i q_i f(p_i/q_i)$$

düsturu ilə ifadə olunan f – fərqlənmə (rus. f – расхождение) tez-tez təsadüf olunur, burada $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$ – ehtimal paylanmaları, $f(t)$ – ixtiyari qabaq funksiyadır. $f(t) = t \log t$ olduqda Kullbak – Leybler fərqlənməsi, $f(t) = (t-1)^2$ olduqda χ^2 – fərqlənmə, $f(t) = |t-1|$ olduqda isə iki ehtimal paylanması arasında variasiyaya görə məsafə alınır.

Riyazi gözləmə əvəzinə digər ortalanmalar götürdükdə, müxtəlif entropiyalar almaq olur. $\alpha \neq 1$ olduqda

$$H_\alpha(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_i p_i^\alpha \right)$$

α tərtib Renyi entropiyası alınır. Adətən, $H_1 = H$ – Şennon entropiyası qəbul edilir. $\alpha=0$ olduqda Renyi entropiyası

$$H_0(p_1, \dots, p_n) = \log_2 N(p_1, \dots, p_n)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $N(p_1, \dots, p_n)$ – $p_1, \dots, p_n$ ehtimalları arasında sıfır bərabər olmayan ehtimallar sayıdır. H_0 bəzən Hartli entropiyası da adlandırılır. α tərtib Renyi entropiyası məlumatlar mənbəsinin kodlanması nəzəriyyəsində ortaya çıxır, bu şərtlə ki, kodun xarakteristikası kimi α qüvvət üstlü kod sözü uzunluğunun orta qiyməti götürülür.

Digər bir ümumiləşmə

$$H(X; \alpha, \beta) = \frac{1}{2^{1-\beta}-1} \left[\sum_i (p_i^\alpha)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1 \right]$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta, \alpha \neq 1, \beta \neq 1$$

ifadəsile verilən α tərtib və β tipli entropiyadır.

Baxılan i. ö.-lərin əksəriyyəti kəsilməz paylanmalar üçün də təyin oluna bilər. Bu halda Şennon entropiyası əvəzinə differensial entropiya götürülür. $I_f(P||Q)$ f – fərqlənmə isə

$$I_f(P||Q) = \int q(x) f(p(x)/q(x)) d\mu(x)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $p(x), q(x)$, – P və Q paylanmalarının μ ölçüsünə görə sıxlıq funksiyalarıdır.

Əd.: [1] Aczel J., Daroczy Z., On measures of information and their characterizations, N. Y., 1975; [2] Csizsar I., «Trans. 7th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Process. Eur. Meet. Statist., 1974», 1978, v. B, p. 73–86.

İNFORMASİON SİXLİQ «информационная плотность; information density» – bax, *Informasion dayanıqlılıq*.

İNFORMASİON YAYINMA(sı) Kullbak – Leybler – Sanovun «информационное отклонение Кульбака – Лейблера – Санова; Kullback – Leibler – Sanov information» – bax, *Nisbi entropiya*.

İNFORMASIYA «информация; information» – bax, *Informasiya nəzəriyyəsi*.

İNFORMASIYA aprior «информация априор; aprior information» – bax, *Aprior informasiya*.

İNFORMASIYA MİQDARI «информации количество; amount of information» – bir təsadüfi kəmiyyətdə digərinə nəzərən olan informasiyanın nəzəri – informasion kəmiyyət ölçüsüdür.

X və Y hər hansı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olmuş, uyğun olaraq $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər; $P_{XY}(C)$, $C \in S_{\mathcal{X}} \times S_{\mathcal{Y}}$ və $P_X(A)$, $A \in S_{\mathcal{X}}$, $P_Y(B)$, $B \in S_{\mathcal{Y}}$ – uyğun olaraq, bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə (ikiölçülü) və marginal ehtimal paylanmaları olsun. *Informasiya miqdarı* $I(X:Y)$, eger P_{XY} ölçüsü $P_X \times P_Y$ düz hasilinə nəzərən mütləq kəsilməz olarsa,

$$I(X:Y) = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} a_{XY}(x, y) \log a_{XY}(x, y) P_X(dx) P_Y(dy)$$

düsturu ilə təyin olunur (loqarifmlər, adətən, 2 və ya e əsasına görə götürülür), burada a_{XY} – P_{XY} ölçüsünün $P_X \times P_Y$ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim sıxlığıdır. Əgər P_{XY} ölçüsü $P_X \times P_Y$ ölçülər hasilinə nəzərən mütləq kəsilməz olmazsa, onda tərifi görə $I(X:Y) = \infty$ qəbul olunur.

X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda i. m. $I(X:Y)$

$$I(X:Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $\{p_i\}$, $\{q_j\}$ və $\{p_{ij}\}$, – X , Y -in və (X, Y) cütünün uyğun ehtimal paylanmalarıdır. Məs., $I(X:X) = H(X)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır.

Əgər (X, Y) cütü mütləq kəsilməz ehtimal paylanma sıxlığı $p_{XY}(x, y)$ ilə verilsə, onda i. m.

$$I(X:Y) = \int p_{XY}(x, y) \log \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x) p_Y(y)} dx dy \quad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $p_X(x)$ və $p_Y(y)$, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun ehtimal paylanmalarının sıxlıq funksiyalarıdır. Məlumdur ki, ümumi halda

$$I(X:Y) = \sup I(\phi(X); \psi(Y)), \quad (2)$$

burada yuxarı sərhəd sonlu sayda qiymətləri olan bütün ölçülən $\phi(\cdot)$ və $\psi(\cdot)$ funksiyaları üzrə götürülür.

X , Y və Z diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda

$$I(X:Y|Z) = \sum_k r_k \sum_{i,j} p_{ijk} \log \frac{p_{ijk}}{p_{ik} q_{jk}}$$

berabərliyi ilə təyin olunan şərti informasiya miqdarından da istifadə olunur, burada $\{p_{ik}\}$, $\{q_{jk}\}$, $\{p_{ijk}\}$ – uyğun olaraq X , Y və (X, Y) cütünün Z -ə nəzərən şərti ehtimal paylanmaları, $\{r_k\}$, Z təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır. $I(X:Y|Z)$ üçün (1) və (2)-yə analogi hökmər doğrudur. İ. m.-nin əsas xassələrindən aşağıdakılar xüsusilə qeyd olunmalıdır:

1) $I(X:Y) = I(Y:X) \geq 0$; belə ki, bərabərlik X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda ödənilir;

2) X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda İ. m. və entropiyaları əlaqələndirən

$$\begin{aligned} I(X:Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) = \\ &= H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \end{aligned}$$

berabərliyi doğrudur; X və Y cütü mütləq kəsilməz paylanmaya malik olduğu halda

$$\begin{aligned} I(X:Y) &= h(X) + h(Y) - h(X, Y) = \\ &= h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X) \end{aligned}$$

analogi berabərliyi doğrudur ki, bu bərabərliklə İ. m. və *differential entropiya* arasında əlaqə ifadə olunur;

$$3) \quad I((X, Y):Z) = I(X:Z) + I(Y:Z|X)$$

«şərti informasiya» düsturu və

$$I((X, Z):Y) + I(X:Z) = I(X:(Z, Y)) + I(Y:Z)$$

«üçqat informasiya» düsturu doğrudur.

İ. m.-nin aşkar sürətdə hesablanması misal olaraq Gauss təsadüfi kəmiyyətləri üçün İ. m.-nin düsturu aşağıda verilmişdir. Əgər X və Y n – ölçülü Gauss təsadüfi kəmiyyətləri olarsa və (X, Y) cütü də Gauss paylanması ilə verilərsə, onda

$$I(X:Y) = -\frac{1}{2} \log \frac{D_{XY}}{D_X D_Y},$$

burada D_X , D_Y və D_{XY} – uyğun olaraq X , Y və (X, Y) cütünün korrelyasion matrislərinin determinantlarıdır. Xüsusi, birölçülü halda

$$I(X:Y) = -\frac{1}{2} \log(1 - r^2),$$

burada r , X və Y -in korrelyasiya əmsalidir. İ. m. anlayışı informasiya nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [4] Шеннон К., Математическая теория связи его в кн.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

İNFORMASIYA MİQDARI qeyri-parametrik «информационное количество непараметрическое; non-parametric Fisher information» – bax, Qeyri-parametrik qiymətləndirmə.

İNFORMASIYA NƏZƏRİYYƏSİ «информационная теория; information theory» – informasiyanın təsnifatı və onun ötürülməsi, qorunub saxlanması, seçilməsi metodlarının təsviri, keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi və optimizasiyası ilə bağlı tətbiqi riyaziyyat oblasıdır.

İ. n., əsas etibarilə, informasiyanın optimal ötürülmə nəzəriyyəsi kimi hesab olunur və riyazi ədəbiyyatda, adətən, bu sadəcə olaraq, İ. n. kimi adlandırılır. İ. n.-nin yaranması K. Şennonun (C. Shannon) adı ilə bağlıdır. O, 1948-də əvvəlcədən verilmiş keyfiyyətlə, kodlama və dekodlamanın optimal metodlarının tətbiqində informasiyanın ötürülməsi və qorunub saxlanılmasının mümkünlüyü probleminin ümumi həllini təklif etmişdir. Informasiyanın ötürülməsi və saxlanması ilə bağlı məsələlər mahiyyətə bir-birindən fərqlənir: informasiyanın qorunub saxlanılmasına fəzədə deyil, zamana görə informasiya ötürülməsi kimi baxmaq olar.

Informasiyanı ötürmə nəzəriyyəsinin əsas teoremləri, evvelər, varlıq teoremləri xarakterli daşıyırdı və bu teoremlərdə kodlama və dekodlama metodlarının varlığı isbat olunurdu, lakin bu metodların qurulması qaydalarına və praktiki realizasiyalara baxılırdı. Sonralar İ. n.-nin kodlama və dekodlamanın konkret və nisbətən sadə alqoritmlərinin qurulmasına həsr olunmuş istiqamətləri geniş sürətdə inkişaf etməyə başladı ki, bu alqoritmlər öz xarakteristikalarına görə mövcudluqları olduqları evvelər isbat olunmuş optimal alqoritmlərə yaxınlaşırdı. Bununla əlaqədar olaraq, İ. n.-nin yeni bir istiqaməti – kodların konkret qurulması metodlarını öyrənmə – kodlama nəzəriyyəsi yaranır və inkişaf etməyə başlayır; bu nəzəriyyədə verilən kodlama və dekodlama metodları çox da mürekkəb olmayıb, praktik cəhətdən reallaşan metodlardır. Müasir kodlama nəzəriyyəsində statistik metodlardan başqa kombinator metodlar, müasir cəbrin (qruplar nəzəriyyəsi, sonlu meydanlar nəzəriyyəsi, cəbri həndəsə) metodları həlledici rol oynamağa başladığından, kodlama nəzəriyyəsi bu ensiklopediya çərçivəsində verilməmişdir.

Texniki ədəbiyyatda İ. n.-nə *kanalın* giriş və çıxış siqnallarının seçilməsi və çevrilməsinə həsr olunmuş bütün araşdırmalar toplusu aid olunur; xüsusi halda rabitə kanallarında kodlama və dekodlamaya siqnalların modulyasiyası və demodulyasiyası ilə birlikdə baxılır. Bu istiqamətin müasir nöqtəyi – nezerden araşdırılmasını texniki rabitə məsələlərinə təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslərin statistikasının tətbiqi kimi interpretasiya etmək olar. İ. n.-nin problemlərinə A. N. Kolmoqorovun (bax, [7]) adı ilə bağlı alqoritmlər nəzəriyyəsi ideyalarına əsaslanan yanaşma böyük maraq doğurur.

İlk dəfə K. Şennon tərəfindən baxılan informasiya ötürülməsinin ümumi sxemi aşağıda şərh olunur. *Məlumatlar mənbəi* kanal üzrə qəbuləndə ötürülməli məlumat hasil edir. Adətən, fərz olunur ki, məlumat – ehtimal paylanması $p(\cdot)$, qiymətləri hər hansı $(\mathcal{X}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}})$ ölçülən fəzasında verilmiş, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş X təsadüfi kəmiyyətdir. Məs., $X = \{X(t), a \leq t \leq b\}$ diskret və ya kəsilməz zamanlı təsadüfi prosesdir, $X(t)$ isə hər hansı $(\mathcal{X}^0, \mathcal{S}_{\mathcal{X}^0})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır.

Diskret zaman halında $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ toplulanna (X^n ölçülən ($\mathcal{X}^n, S_{\mathcal{X}^n}$) fazasında, yeni ($\mathcal{X}^0, S_{\mathcal{X}^0}$) fazalannın n – qat hasilinde qiymetler alır) – girişdə n uzunluqlu məlumatlar parçaları deyilir. X_k isə k anında mənədən hasil olunan məlumat və ya sadəcə məlumat komponenti adlanır; $k = 1, \dots, n$.

Məlumat kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olduğu halda uyğun anlayışlar analoji təyin olunur. Çıxışdakı məlumat (ötürülmüş məlumatın bərpə olunmuşu), yeni ünvan olunan tərəfdən qəbul edilən məlumat, – eyni ($\Omega, \mathcal{A}, P$) ehtimal fazasında təyin olunmuş, ölçülən ($\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}}$) fazasından qiymətlər alan $\tilde{X}_k$ təsadüfi kəmiyyətdir.

Əgər $\tilde{X}$ diskret və ya kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olarsa, giriş məlumatına analoji olaraq, onun qiymətlərini ($\mathcal{X}^0, S_{\mathcal{X}^0}$) fazasından alan komponentləri üçün anlayışlar təyin olunur. Məlumatın rabitə kanalı üzrə ötürülməsinin keyfiyyət ölçüsü – *məlumatların bərpə olunma dəqiqliyidir*. Əgər məlumat ötürmə maneələri rabitə kanalı ilə aparılırsa, hətta $\mathcal{X}$ və $\tilde{\mathcal{X}}$ çoxluqları üst-üstə düşdükəri halda belə, bir qayda olaraq, mütləq dəqiqliyə nail olunmur. Yeni ötürülən və bərpə olunacaq məlumatların tamamilə üst-üstə düşməsinə nail olmaq mümkün olmur. İ. n.-ndə dəqiqlik üçün qoyulan tələblər, adətən, statistik izah olunur və bu zaman ötürülən və bərpə olunan ($X, \tilde{X}$) məlumatlar cütünün ($\mathcal{X} \times \tilde{\mathcal{X}}, S_{\mathcal{X}} \times S_{\tilde{\mathcal{X}}}$) ölçülən fəzalar hasilində mümkün olan birgə paylanmaları sinfi – W sinfi seçilir. W sinfi, adətən, mənfi olmayan ölçülən m – ölçülü $\rho(x, \tilde{x})$ vektor – funksiyası, $x \in \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ və komponentləri müsbət ε_j , $j = 1, 2, \dots, m$ olan $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ vasitəsilə verilir. Fərz olunur ki, ($X, \tilde{X}$) cütünün ehtimal paylanması yalnız o halda W sinfindəndir ki,

$$M\rho_j(X, \tilde{X}) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

münasibəti ödənilsin (adətən, $m = 1$ qəbul olunur).

Beləliklə, məlumatların bərpə olunma dəqiqliyinin şərtindən aydın olur ki, bərpə olunan məlumatlar ötürülən məlumatlardan nə dərəcədə fərqlənir; (1) şərtindən aydındır ki, bu fərq ε -u aşmır. Mənənin hasil etdiyi məlumatlar (Q, V) rabitə kanalı ilə ötürülür. (Q, V) kanalı iki – ($\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}$), ($\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$) ölçülən fəzaları, A qeyd olunduqda $S_{\tilde{\mathcal{Y}}} \sigma$ – cəbrinə nəzərən ölçülən və $y \in \mathcal{Y}$ qeyd olunduqda ($\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$) fazasında ehtimal ölçüsü olan keçid funksiyası $Q(y, A)$, $y \in \mathcal{Y}$, $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ və ($\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}$) fazasında ehtimal ölçülənin çoxluğu V ilə verilir. ($\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}$), ($\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$) fəzaları uyğun olaraq kanalın giriş və çıxış siqnalları fəzaları adlanır; $Q(y, A)$ – çıxış siqnallannın şərti ehtimalıdır, bu şərtlə ki, kanalın girişinə daxil olan siqnal y -dir; V – kanalın giriş siqnalının paylanması olan məhdudiyyəti təyin edir.

Əgər Y və $\tilde{Y}$ təsadüfi kəmiyyətləri ($\Omega, \mathcal{A}, P$) ehtimal fazasında təyin olunmuşlarsa və uyğun olaraq, ($\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}$) və ($\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$) fəzalarından qiymətlər alırlarsa, onda bu təsadüfi

kəmiyyətlər (Q, V) kanalı ilə əlaqəlidir, deyilir; $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ olan ixtiyari A çoxluğu üçün vahid ehtimalla

$$P\{\tilde{Y} \in A | Y\} = Q(Y, A) \quad (2)$$

olur və Y -in ehtimal paylanması V çoxluğundandır. V çoxluğu, adətən, $\pi(y) = (\pi_1(y), \dots, \pi_l(y))$, $y \in \mathcal{Y}$ ölçülən vektor – funksiyası və $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ vektoru vasitəsilə verilir; fərz olunur ki, Y -in paylanması V çoxluğuna yalnız o halda aid olur ki,

$$M\pi_j(Y) \leq \gamma_j, \quad j = 1, \dots, l \quad (3)$$

şərti ödənilsin.

Diskret kanallar halında ($\mathcal{Y}$ çoxluğu sonlu olduğu halda) V çoxluğu, bir qayda olaraq, bütün mümkün olan ehtimal paylanmaları çoxluğu ilə üst-üstə düşür, yeni hər hansı məhdudiyyətlər istisna olunur. Aydınlıq nöqtəyi – nəzərdən $\mathcal{Y}$ – ötürülən siqnallar çoxluğu, $\tilde{\mathcal{Y}}$ – qəbul olunan siqnallar çoxluğudur (bir çox məsələlərdə $\mathcal{Y}$ və $\tilde{\mathcal{Y}}$ fəzaları üst-üstə düşür). Əgər giriş siqnalı Y -in paylanması verilir, onda (2) münasibətinə əsasən çıxış siqnalı $\tilde{Y}$ -in paylanması tapmaq mümkün olur. V -yə məhdudiyyətin qoyulması onunla əlaqədardır ki, bir çox hallarda giriş siqnalının paylanmasının ixtiyari olduğu fərz olunur (məs., giriş siqnalının kvadratının orta qiymətinin verilmiş konstantı aşmadığı hal, yeni giriş siqnalının gücü və ya enerjisinə qoyulan məhdudiyyət verildiyi tipik hal).

Təbiiq məsələlərdə mühüm olan xüsusi hal, kanalın giriş və çıxış siqnalları heçiqi oxun hər hansı sonlu və ya sonsuz intervallında təyin olunmuş (diskret və ya kəsilməz zamanlı), uyğun olaraq ölçülən ($\mathcal{Y}^0, S_{\mathcal{Y}^0}$), ($\tilde{\mathcal{Y}}^0, S_{\tilde{\mathcal{Y}}^0}$) fəzalarından qiymətlər alan

$Y = \{Y(t)\}$, $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t)\}$ təsadüfi proseslər olduğu haldır. Əgər $Y = (Y_1, \dots, Y_n, \dots)$ və $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \dots)$ ehtimal ardıcılıqları olarsa ki, n -in ixtiyari $n = 1, 2, \dots$ qiymətində Y , $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ və $\tilde{Y}^n = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ üçlükleri Markov zənciri təşkil edir, onda uyğun kanal – qeyri-antisipativ kanal adlanır; aydındır ki, belə kanalla qeyd olunmuş anlamda kanallar ardıcılığı əlaqələndir, bunlar ilkin kanalın parçaları adlandırılır. Bu parçaların giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq, $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ və $\tilde{Y}^n = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ təsadüfi vektorlardır.

Girişdəki məlumatı rabitə kanalı ilə ötürülən siqnala, çıxışda qəbul olunmuş siqnalı isə bərpə olunacaq məlumata çevirmək üçün məlumatların kodlanma və dekodlanması aparılmalıdır. Kodlanma – qiymətləri $\mathcal{Y}$ -dən olan ölçülən x -in $f(x)$ funksiyasına deyilir, $x \in \mathcal{X}$, dekodlama isə qiymətləri $\tilde{\mathcal{X}}$ -dən olan, $\tilde{\mathcal{Y}}$ -də təyin olunmuş $\varphi(\tilde{y})$ funksiyasına deyilir, $f(x)$, $x \in \mathcal{X}$ funksiyasının qiymətləri çoxluğu, adətən, kodun ayrı-ayrı elementləri kod sözləri adlanır [adətən, $f(x)$ hər hansı sonlu çoxluğun, kod əlifbasının simvolları ardıcılığıdır]. Kodlama və dekodlama, yeni $f(x)$ və $\varphi(\tilde{y})$ onu ifadə edir ki, əgər mənə $x \in \mathcal{X}$ məlumatını hasil etmişdirsə, onda kanal ilə $y = f(x)$ siqnalı ötürülür; əgər çıxışda $\tilde{y}$ siqnalı qəbul olunmuşdursa, onda bu siqnal bərpə olunacaq $\tilde{x} = \varphi(\tilde{y})$ məlumatına dekodlanır.

İ. n.-ndə ekser hallarda *tesadüfi kodlamaya* baxılır; bu halda kod sözləri hər hansı statistik eksperiment nəticəsində seçilir. Tesadüfi kodlama – ehtimal paylanması ilə verilmiş statistik asılı olmayan *seçimdir*. Ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olan mənbənin hasil etdiyi məlumat, bərpə dəqiqliyi W olan (Q, V) kanalı üzrə, $f(\cdot)$ kodlaması və $\varphi(\cdot)$ dekodlamasından istifadə olunmaqla o halda ötürülə bilər ki, əgər Markov zənciri təşkil edən $X, Y, \tilde{Y}, \tilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri olarsa (qurmaq olarsa) ki, X -in ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olsun, $(X, \tilde{X})$ cütünün ehtimal paylanması W -dən olsun, $(Y, \tilde{Y})$ cütü (Q, V) kanalı ilə əlaqələnmiş və

$$Y = f(X), \quad \tilde{X} = \varphi(\tilde{Y}) \quad (4)$$

münasibətləri ödənilmiş olsun. (4) münasibətinə əsasən $X, Y, \tilde{Y}, \tilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin Markov zənciri emalə gətirməsi fərziyyəsi ilə fərziyyəyə gətirir ki, $\tilde{Y}$ -in şərti paylanması X və Y -in verilmiş qiymətlərində yalnız Y -dən asılıdır, yəni bu onu ifadə edir ki, məlumat ötürülməsində çıxış signalı yalnız giriş signalından asılıdır və o, məlumatın hansı qiymətinin bu signalı kodlandırılmasından asılı deyildir.

İ. n.-nin əsas problemini aşağıdakı qaydada ifadə etmək olar. Fərz olunur ki, məlumat $p(\cdot)$ ehtimal paylanması ilə hasil edən mənbə, bərpə dəqiqliyi şərtləri W , rabitə kanalı (Q, V) verilmişdir. Məsələnin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, kanal üzrə ötürmənin nə zaman mümkün olduğu təyin edilsin, yəni hansı şərtlər ödənilməlidir ki, bu şərtlərin ödənilməsi halında $f(\cdot)$ kodlaması və $\varphi(\cdot)$ dekodlaması mümkün olsun ki, mənbənin hasil etdiyi məlumat (Q, V) kanalı üzrə bərpə dəqiqliyi W ilə ötürülsün. $p(\cdot), W, (Q, V)$ üçün müxtəlif fərziyyələrlə bu məsələnin həlli, kodlama teoremləri və ya Şennon teoremi adlanır. Ötürmə mümkün olduğu halda, digər problemin yaranması da təbii: bu halda bu ötürməni təmin edən kodlama və dekodlamı sadə və effektiv surətdə qurmaq tələb olunur.

Qoyulmuş problemlərdən birincisinə cavabı ifadə etmək üçün K. Şennon [15]-də müəyyən kəmiyyətlər daxil etmişdir. Bunlardan əsasları – *informasiya miqdarı* $I(\cdot : \cdot)$; *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* $C = C(Q, V) = \sup I(Y : \tilde{Y})$ [burada yuxarı sərhəd (Q, V) kanalı ilə əlaqəli bütün $(Y, \tilde{Y})$ cütləri üzrə götürülür]; $H_W(p) = \inf I(X : \tilde{X})$ W – entropiya [1] şərti halında $H_\varepsilon(p) = H_W(p) - \varepsilon$ – entropiya daxil olunur]; burada infimum bütün $(X, \tilde{X})$ cütləri üzrə götürülür ki, $(X, \tilde{X})$ cütünün birgə ehtimal paylanması W -dən olsun; X -in ehtimal paylanması $p(\cdot)$ kimi kəmiyyətlərdir. Aşağıda verilən tərs Şennon teoremi doğrudur: əgər ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olan məlumat W dəqiqlik şərtlə (Q, V) kanalı üzrə ötürülə bilirsə, onda

$$H_W(p) \leq C(Q, V) \quad (5)$$

münasibəti doğrudur.

(5) şərti ödənilmədi halda informasiyanın ötürülməsi mümkün deyil üçün kafi şərtlər daha mürəkkəbdir. Bu şərtlər yalnız

müəyyən asimptotik mənada doğrudur, əsas fərziyyə ondan ibarətdir ki, $H_W(p) \rightarrow \infty$ olmalıdır, belə ki, (5) şərti yalnız kifayət qədər böyük həcmli informasiya ötürülməsi halında ola bilsin ki, zəruri və kafi ola bilər. Digər lazımlı fərziyyələr rəqulyarlıq fərziyyələri xarakteri daşıyır (böyük ədədlər qanunu tipli) və bunlar konkret hallarda, adətən, yerinə yetirilir. Ötürülmə mümkünliyünün kafi şərtlərini dəqiq təminlərlə ifadə etmək üçün bəzi əlavə anlayışlar tələb olunur.

Əgər (Q', V') kanalı ilə əlaqələnmiş $(Y', \tilde{Y}')$ informasiya – dayanıqlı təsadüfi kəmiyyətlər cütləri ardıcılığı varsa ki, bu ardıcılıq üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(Y' : \tilde{Y}')}{C(Q', V')} = 1$$

münasibəti ödənilsin, onda $C(Q', V') < \infty$ şərtlə verilən $\{(Q', V'), t = 1, 2, \dots\}$ kanallar ardıcılığı informasiya – dayanıqlı kanallar ardıcılığı adlanır.

Əgər X' -nin ehtimal paylanması $p'(\cdot)$ varsa, $(X', \tilde{X}')$ cütünün paylanması W' çoxluğundandırsa və

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(X' : \tilde{X}')}{H_{W'}(p')} = 1$$

münasibətinin ödənilməsinə təmin edən $(X', \tilde{X}')$ cütləri ardıcılığı varsa, ehtimal paylanması $p'(\cdot)$ olan, $H_{W'}(p') < \infty$ şərtini ödəyən dəqiqlik şərti W' olan məlumatlar ardıcılığı informasiya – dayanıqlı məlumatlar ardıcılığı adlanır.

Məlumatlar ardıcılığı və kanallar ardıcılığının informasiya dayanıqlılığı praktiki cəhətdən maraqlı xüsusi halların əksəriyyətində həmişə ödənilir: məs., $t \rightarrow \infty$ olduqda $C(Q', V') \rightarrow \infty$,

$H_{W'}(p') \rightarrow \infty$ münasibətləri ödənilən Gauss kanalları və Gauss mənbələri ardıcılıqları informasiya dayanıqlı ardıcılıqlardır.

V_δ ilə ehtimal paylamaları çoxluğu olsun ki, (3) münasibətində γ -nı $\gamma + \delta$ ilə əvəz etdikdə də bu münasibət ödənilsin, (1) münasibətində isə ε -ni $\varepsilon + \delta$, $\delta > 0$ ilə əvəz etdikdə alınan W_δ dəqiqlik şərti olsun. Bu halda kodlama teoremi (Şennon teoremi) aşağıdakı kimi ifadə olunur: ehtimal paylanması $p'(\cdot)$ və dəqiqlik şərti W' olan informasiya – dayanıqlı məlumatlar ardıcılığı və informasiya – dayanıqlı kanallar ardıcılığı (Q', V') verilir, bu kanallar üçün $\pi'(\cdot)$ və $p'(\cdot, \cdot)$ funksiyaları t -yə görə müntəzəm məhduddurlar, $t \rightarrow \infty$ olduqda $H_{W'}(p') \rightarrow \infty$ və

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(Q', V')}{H_{W'}(p')} > 1$$

şərtlərinin ödənilməsi fərz olunur, onda ixtiyari $\delta > 0$ üçün ε böyük t_0 qiyməti vardır ki, $t \geq t_0$ şərtini ödəyən bütün t qiymətlərində ehtimal paylanması $p'(\cdot)$ olan məlumat, (Q', V')

kanalı üzrə bərpə dəqiqliyi W'_ε ilə ötürülə bilər. Belə ifadədə

kodlama teoremi ümumi xarakter daşıyır. π' və $p'(\cdot)$ funksiya-larının məhdudluğu fərziyyəsini olduqca zəiflətmək mümkündür. Nəhayət, qeyd olunmuş teoremdə bəzi şərtlərlə W'_e -ni W' və V'_e -ni V' ilə əvəz etmək olar. Bu isə Gauss mənbələri və Gauss kanalları halında mümkündür.

Kanallar ardıcılığı qeyd olunmuş kanalın parçaları ardıcılığı, məlumatlar ardıcılığı isə komponentlər sayı artan (artan uzun-luqlu) qeyd olunmuş mənbənin məlumatlar parçalarının ardıcılığı halları tətbiq üçün ən maraqlı hallardır. Aşağıda bu hal üçün kodlama teoreminin variantı və onun əvvəlki formadan bir qədər fərqli çevirməsi ifadə olunmuşdur.

Diskret stasionar U mənbəsi vahid zaman erzinde bir simvol ötürmə sürəti ilə $X = \{X_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ məlumatını hasil edir; ayrı-ayrı komponentlər (X_k simvollar) M həcmli müəy-yən bir $\mathcal{X}^0$ əlifbasından qiymətlər alır. $\tilde{X} = \{\tilde{X}_k, k = \dots, -1, 0, +1, \dots\}$ məlumatının komponentləri də (adresat tərəfindən ali-nan məlumat nəzərdə tutulur) eyni $\mathcal{X}^0$ əlifbasından qiymətlər alır (yeni $\tilde{\mathcal{X}}^0 = \mathcal{X}^0$). Daha sonra fərz olunur ki, məlumat ötü-rülməsi üçün hər hansı τ zaman intervalı erzinde bir simvol ötürmə sürətli diskret stasionar yaddaşsız kanaldan istifadə olu-nur. Kanalın girişində siqnalın ehtimal paylanmasına məhdudiyyət qoyulmur. Fərz olunur ki, $L = L_N$ uzunluqlu məlumat parçası $X^L = (X_1, \dots, X_L)$ N uzunluqlu kanal parçası ilə yuxanda təsvir olunmuş tipli (bax, [4]) bəzi kodlama metodlarının köməyi-lə ötürülür; $N = [LL/\tau]$ ($[x]$, $-x$ ədədinin tam hissəsini ifadə edir). Əgər bu zaman $\tilde{X}^L = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_L)$ adresat tərəfindən alınmış uyğun məlumat parçası, $\hat{P}_e$ isə

$$\hat{P}_e = L^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{P} \{ \tilde{X}_i \neq X_i \}$$

düsturu ilə təyin olunan mənbənin hər hərfine orta xəta ehtimalı-dırsa, onda aşağıdakı teorem doğrudur. Kodlama teore-m i n ə çevirmə teoremi: $\bar{H}(U)$ verilmiş diskret stasionar mənbənin məlumatlar yaratma sürəti, C isə kanalın ötürücülük qabiliyyətidir, onda bütün L -lər üçün

$$\hat{P}_e \log(M-1) + h(\hat{P}_e) \geq \bar{H}(U) - \tau^{-1}C$$

berəbersizliyi ödənilir, burada $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \times \log_2 (1-x)$.

Beləliklə, məlumatları yaratma sürəti $\bar{H}(U)$ $\tau^{-1}C$ -dən (mənbənin hər bir hərfine kanalın ötürücülük qabiliyyətindən) böyük olarsa, onda ixtiyari L üçün mənbənin hər bir hərfine xətanın orta ehtimalı ixtiyari kodlama və dekodlama metodları üçün sıfırdan fərqli konstantla aşağıdan məhduddur və deməli, $L \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır. Teoremin tərs hökmünü ifadə etmək məqsədilə

$$R_N = \frac{\log_2 M^{L_N}}{N}$$

kəmiyyəti daxil olunur.

L_N/τ tam ədəd olduğu halda, R_N/τ nisbəti əlifbası M olan U mənbəsinin məlumatları hasil etmə sürəti $\bar{H}(U)$ ilə üst-üstə

düşür: mənbənin komponentləri isə asılı olmayan müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bundan başqa, $M = 2$ olarsa, onda $R_N = \tau$ ikilik simvolların sayıdır; bu simvol-lar da kanal üzrə bir simvolun ötürülməsi müddətində mənbənin hasil etdiyi siqnallardır. Mənbənin blok xətasının ehtimalı və blok xətasının orta ehtimalı uyğun olaraq

$$P_{e,x^L} = \mathbf{P}_{x^L} \{ \tilde{X}^L \neq X^L \}$$

$$\bar{P}_e = \sum_{x^L} \mathbf{P} \{ X^L = x^L \} P_{e,x^L} = \mathbf{P} \{ \tilde{X}^L \neq X^L \}$$

düsturları ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}_{x^L} \{ \cdot \}$, $-X^L = x^L \in \mathcal{X}^L$ şərtində şərti ehtimaldır. Aşağıdakı kodlama teoremi doğrudur: bütün N və $R < C$ olan ixtiyari R -lər üçün ele kod-lama və dekodlama metodu vardır ki, $R_n \leq R$ olduqda $x^L \in \mathcal{X}^L$ olan bütün x^L -lər üçün

$$P_{e,x^L} \leq \exp \{ -NE(R) \}$$

qiymətləndirilməsi təmin olunur (qiymətləndirilmə $\bar{P}_e$ üçün də doğrudur), lakin nəzərə alınmalıdır ki, $E(R)$ funksiyası müsbət, qabarıq və R -in artması ilə azalan funksiya (bax, *Səhv dekodlama ehtimalı*). Beləliklə, bu teorem onu ifadə edir ki, $R < C$ münasibətini ödəyən bütün R -lər üçün N artıqca səhv ehtimalı eksponensial sürətlə sıfıra yaxınlaşır. Bu teoremin şərtləri ödənildikdə gücləndirilmiş tərs kodlama teoremi doğrudur, yəni: $R > C$ şərtini ödəyən bütün R -lər üçün $N \rightarrow \infty$ olduqda $\bar{P}_e \rightarrow 1$ münasibəti doğrudur. Küysüz kanal halında, yəni $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}$, $Q(y, \{y\}) = 1$ və $C = \log_2 S$ ol-duğu halda, kodlama teoremləri məlumatlar mənbənin kodlama teoremlərinə çevrilir, burada S rabitə kanalının simvollar əlif-basının gücüdür.

Informasiya ötürməsinin real sistemlərində kodlama və dekod-lama *modulyasiya* və *demodulyasiya* ilə uyğunlaşdırılır, yeni kanalın giriş və çıxışındakı siqnalara kod simvolu kimi baxılan siqnalın qurulması ilə uyğunlaşdırılır.

Şennon teoremləri naməlum parametrlı kanallar və məlumatlar üçün ümumiləşdirilir. Belə ümumiləşmələrə maraq onunla əlaqə-dardır ki, praktikada, adətən, rabitə kanalı və məlumatlar mənbə-nin statistik parametrlərinin tamamilə məlum olduğu hesab olu-nur, belə ki, bu parametrlər ötürülmə prosesində dəyişə bilər. Buna görə də, məlumatlar mənbəi və rabitə kanalının mümkün ola bilən məlumat mənbələri və rabitə kanallarının sinfində olma-sını fərz etmək məqsədəuyğun olur. Bu zaman, baxılan sinfindən olan, mümkün ola bilən ən əlverişsiz mənbələr və kanallar üçün verilmiş ötürülmə metodunun keyfiyyəti qiymətləndirilir, ö t ü r - m ə keyfiyyəti üçün minimaks kriteri daxil edilir.

Şennon teoremləri mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün də, o cümlədən, çoxsaylı istifadə – terminallı mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün də şamil olunmuşdur. Məs., $k+1$ sayda $X^{(0)}$, $X^{(1)}, \dots, f_j(X^{(j)})$ terminalırlı mənbələr üçün hər bir $X^{(j)}$ mənbənin ayrı-ayrılıqda $Y^j = f_j(X^{(j)})$ kodlanması məsələsi qoyulur, ($j = 1, \dots, k$) və bu halda $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)})$ üzrə $X^{(0)}$ mənbəni verilən dəqiqliklə yenidən bərpa etməyə nail olunmalıdır.

Çoxsaylı istifadə – terminalı kanallar arasında çoxgirişli kanallar, çoxçıxışlı kanallar, tərs rabitəli kanallar, təsadüfi parametrlı kanallar fərqləndirilir.

Adi ötürmə sxeminə tamamilə tərs əlaqənin olması onu ifadə edir ki, t anında kanala girişdə $t' < t$ şərtini ödəyən bütün t' anlarında kanalın çıxışındakı siqnalların dəqiq qiymətləri məlumdur. Xüsusi halda, tərs əlaqəli yaddaşsız kanallar üçün əsas nəticə ondan ibarətdir ki, tərs əlaqənin varlığı yaddaşsız kanalın ötürücülük qabiliyyətini artırır, lakin kodlayıcı və dekodlayıcı qurğuların mürəkkəbliyini olduqca azaltmağa imkan yaradır.

Digər ümumiləşmələrdən sinxronizasiya xətaləri olan kanallar üzrə informasiya ötürməsinə qeyd etmək lazımdır, bu kanallarda sinxronizasiya ilə bağlı təsadüfi sıradan çıxışlar yaranır və bunun nəticəsində giriş və çıxış kanalları arasında birqiymətli uyğunluq pozulur.

Əd.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [2] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [5] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [6] Колмогоров А. Н., в кн.: Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 29–58; [7] Колмогоров А. Н., в кн.: Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 213–23; [8] Key papers in the development of information theory, N. Y., 1974; [9] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радио-техники, 2 изд., кн. 2, М., 1975; [10] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 3–202; [11] Файнштейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [12] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [13] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [14] Чисар И., Кернер Я., Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, пер. с англ., М., 1985; [15] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

INFORMASIYA ÖTÜRMƏ SÜRƏTİ «информационная скорость передачи; rate of information transmission» – rabitə kanalının giriş siqnalına nəzərən kanalın çıxış siqnalında vahid zaman ərzində informasiya miqdarını ifadə edən kəmiyyətdir. Giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq, $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t), -\infty < t < \infty\}$ və $\tilde{X} = \{\tilde{X}(t), -\infty < t < \infty\}$ təsadüfi prosesləri olan kanal üçün informasiya ötürmə sürəti –

$$R = \lim_{T \rightarrow \infty} (T - t)^{-1} \cdot I(Y_t^T : \tilde{Y}_t^T) \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunan kəmiyyətə deyilir, burada $I(Y_t^T : \tilde{Y}_t^T)$ – Y və $\tilde{Y}$ proseslərinin (t, T) parçaları arasındakı informasiya miqdarıdır. (*) limitinin varlığı isbat olunmuşdur, məs., giriş və çıxış siqnalları stasionar və stasionar əlaqəli təsadüfi proseslər olan kanalların geniş sinfi üçün bu limitin varlığı isbat olunmuşdur. Bəzi hallarda, məs., Gauss kanalları üçün i. ö. s.-ni aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 1–201.

INFORMATİVLİK «информативность; amount of information» – bax, *Informasion ölçü*.

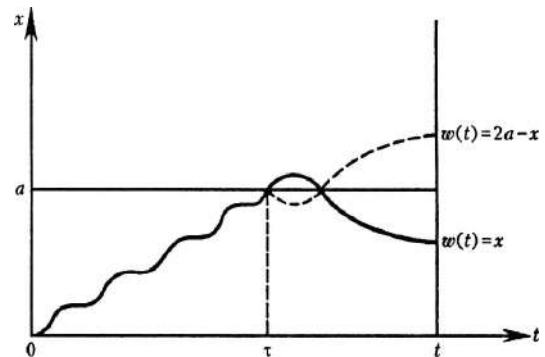
INFORMATİVLİK(y) dəyişənlər toplusunun «информативность набора переменных; informativity of set of variables» – q sayda əlamətlərin ilkin (apriori) $x = (x_1, \dots, x_p)$ çoxluğunun əlamətlərini və onların kombinasiyalarını ifadə edən p sayda dəyişənlərin $z = (z_1, \dots, z_q)$ toplusunun xassəsidir; müəyyən informativlik kriterisi $I_p(z)$ ilə kəmiyyətce ölçülür. Informativlik kriterisi statistik araşdırma məsələsinin məzmunlu qoyuluşundan asılı olaraq bu və ya digər qayda ilə dəyişənlər toplusunun i -ni formalaşdırır. Informativlik kriterisinin üç əsas qrupu mövcuddur. Birinci qrupa aid olan kriterilərdə z toplusu üzrə y kəmiyyət dəyişəninə regressiya proqnozunun keyfiyyəti qiymətləndirilir. İkinci qrupa z toplusu üzrə obyektin siniflərdən birinə aid edilməsi məsələsinin həllinin keyfiyyətini qiymətləndirən kriterilər daxildir. Nəhayət, üçüncü qrupa $p < q$ olduqda, z toplusu üzrə ilkin x əlamətlərinin dəyişənlərlə ne dərəcədə dəqiqliklə ifadə edildiyinin dəqiqliyini qiymətləndirən kriterilər aiddir.

İNİKAS PRİNSİPİ «отражения принцип; reflection principle» – Viner prosesi $w(t)$ -nin hər hansı a səddinə ilk çatım anı τ üçün ciddi Markov xassəsinin xüsusi halı olub, a nöqtəsinə nəzərən $w(t + s)$, $s \geq 0$ prosesinin paylanması simmetriyasından ibarətdir. Fərz olunur ki, $w(0) = 0$, $a > 0$ və $m^*(t) = \max_{0 \leq s \leq t} w(s)$, $t \geq 0$. Onda

$$P\{m^*(t) > a\} = P\{\tau < t\}. \quad (1)$$

(bax, şəkil). İ. p.-nə görə $w(\cdot)$ trayektoriyasının paylanması τ anından sonra a -ya nəzərən simmetrikdir (şəkilə bütöv və qırıq xətlər eyni ehtimaldır):

$$P\{w(t) > a | \tau < t\} = P\{w(t) < a | \tau < t\} = 1/2. \quad (2)$$



$w(t) > a$ olduqda $x < t$ olması zəruridir, onda

$$2P\{w(t) > a\} = P\{\tau < t\} P\{w(t) > a | \tau < t\}. \quad (3)$$

(1)–(3) bərabərliklərinə əsasən, Andre inikas prinsipi adlanan

$$P\{m^*(t) > a\} = 2P\{w(t) > a\}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan i. p. doğrudur. $m^*(t)$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$p(t, y) = 2\phi(t, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-y^2/2t}, \quad y \geq 0$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\varphi(t, x)$ funksiyası $w(t)$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasıdır. Bu mülahizələrə görə $w(t)$ və $m^*(t)$ -nin ikiölçülü paylanma qanunu alınır və a nöqtəsində udulan [yeni $m^*(t) < a$ şərti ilə] Viner prosesinin sıxlıq funksiyaları aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur, yəni:

$$p(t, x) = \varphi(t, x) - \varphi(t, 2a - x), \quad x < a,$$

və ya a nöqtəsində inikas ilə

$$p(t, x) = \varphi(t, x) + \varphi(t, 2a - x), \quad x < a.$$

İ. p.-nin çoxsaylı tətbiqi ilə $w(t)$, $m_*(t) = \min_{0 \leq s \leq t} w(s)$ və $m^*(t)$ kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını və $a > 0$ və $-c < 0$ nöqtələrində udulan Viner prosesinin [yeni $-c < m_*(t)$, $m^*(t) < a$ şərtlərlə] sıxlıq funksiyalarını tapmaq mümkün olur, yəni:

$$p(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\varphi(t, x - 2k(a+c)) - \varphi(t, 2a - x - 2k(a+c))], \quad -c < x < a$$

və ya $-c$ və a nöqtələrində inikas ilə

$$p(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\varphi(t, x - 2k(a+c)) + \varphi(t, 2a - x - 2k(a+c))], \quad -c < x < a.$$

Əd.: [1] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Теоремы и задачи о процессах Маркова, М., 1967.

İNTEQRAL BƏRPA TEOREMİ « интегральная теорема восстановления; integral renewal theorem » – bax, Bərpa teoremi.

İNTEQRAL ÇEVİRMƏ « интегральное преобразование; integral transform » – $\{P\}$ paylanmalar çoxluğunun (və ya onların uyğun $\{F\}$ paylanma funksiyalarının və ya hər hansı $\mathbb{R}^n$ fəzasında verilmiş paylanmaların sıxlıq funksiyaların $\{p\}$ çoxluqlarının) n kompleks dəyişəni $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ -in funksiyaların çoxluğu $\{\psi\}$ -yə

$$\psi(s) = U P(s) = \int_{\mathbb{R}^n} k(s, u) P(du) \quad (*)$$

münasibətilə ifadə olunan xətti qarşılıqlı birqiymətli U inikasıdır, burada $k, - \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ -də qeyd olunmuş funksiyadır (İ. ç.-nin nüvəsi). k nüvəsinin bu oblastda sinqulyar nöqtələri ola bilər və bu halda (*) inteqralı müəyyən bir xüsusi mənada anlaşılır (məs., baş qiymət mənasında). ψ funksiyası üzrə P paylanmasını (paylanma funksiyası F və ya sıxlıq funksiyası

p -ni) müəyyən etməyə imkan verən $(U^{-1}\psi)(u)$ tərs çevirməsinin aşkar ifadələri – çevirmə düsturları adlanır. İ. ç.-inə aid çevirmələr aşağıdakılardır:

1) Furiye – Stilyes çevirməsi (*характеристический функционал*), $k(s, u) = \exp(i(s, u))$, burada $(\cdot, \cdot)$ skalyar hasilə ifadə edir;

2) $\mathbb{R}^n$ -də Laplas – Stilyes çevirməsi, $k(s, u) = \exp(-(s, u))$;

3) Mellin – Stilyes çevirməsi ($n=1$), $k(s, u) = 0, u \leq 0, k(s, u) = u^s, u > 0$;

4) Hankel çevirməsi ($n=1$), $k(s, u) = 0, s \leq 0, k(s, u) = J_\nu(s, u)(su)^{1/2}, u > 0$, burada J_ν Bessel funksiyasıdır;

5) kosinus (sinus) çevirmə ($n=1$), $k(s, u) = 0, u \leq 0, k(s, u) = \cos su (\sin su), u > 0$.

İ. ç. ehtimal nəzəriyyəsində o halda xüsusi maraq kəsb edir ki, $\{P\}$ hər hansı $\diamond$ binar eməlinə görə Abel semi – qrupu olsun, nüvə isə ele seçilmiş olsun ki, U inikası $\{P\}$ -nin $\{\psi\}$ -yə izomorfizmini $U(P_1 \circ P_2)(s) = \psi_1(s)\psi_2(s)$ münasibətilə təmin etsin.

İ. ç.-lərinin əksəriyyəti bir-birilə əlaqədirlər (bax, [1], [2]). Bəzi hallarda İ. ç. anlayışı daha ümumi təbiətə malik fəzalarda (Hilbert, Banach, qruplar, semiqruplarda) təyin oluna bilər.

Əd.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М. – Л., 1948; [2] Золотарев В. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований, пер. с англ., т. 1–2, М., 1969–70.

İNTEQRAL EHTİMALİ « интеграл вероятности; probability integral », xətalər inteqralı, –

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad |x| < \infty$$

funksiyasıdır.

Ehtimal nəzəriyyəsində E. i. deyil,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})]$$

normal paylanma funksiyası istifadə olunur; bu inteqral Q a u s s ehtimal inteqralı adlanır. Riyazi gözləməsi 0, dispersiyası 1 olan ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $P\{|\xi| \leq t\} =$

$= \operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$. Bəzən aşağıdakı işarələmələr də istifadə olunur:

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x) = \operatorname{erf}(x).$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \operatorname{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt - 1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Erf}(x/\sqrt{2}).$$

Əd.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1974.

İNTEQRAL HƏNDƏSƏ « интегральная геометрия; integral geometry » – həndəsə və ölçü nəzəriyyəsinin qovuşmasında riyaziyyat bölməsidir, *həndəsi ehtimallar* və *həndəsi proseslər* məsələlərində bir aparat kimi istifadə olunur.

Müstəvi üzərində düz xətlər fəzasında ölçünün təyin olunması ideyası iynə haqqında *Byuffon məsələsində* öz əksini tapmışdır. Bu ideya sonradan C. Silvestr (J. Sylvester), H. Puankare (H. Poincaré), V. Blyaşke (W. Blaschke) və başqa alimlərin işlərində inkişaf etdirilmişdir. Ənənəyə görə İ. h.-də əsas tədqiqat obyektini əsas fəzədə təsir edən çevirmələr qrupuna nəzərən invariant həndəsi fiqurlar (düz xətlər, müstəvilər, qabarıq cisimlər və s.) fəzalarında ölçülərdir.

Ən çox istifadə olunan ölçülər $\mathbb{R}^n$ fəzasının Evklid hərəkətlərinin M_n qrupuna nəzərən invariant olan, $\mathbb{R}^n$ -in k – ölçülü müstəvilərinin ölçüləridir. k , n -in verilmiş qiymətlərində belə ölçü sabit vuruğa qədər dəqiqliklə yeganədir. Məs., müstəvi üzərində g düz xətləri fəzasında M_2 – invariant ölçünün elementi $dg = dp d\varphi$ kimi ifadə olunur, burada (p, φ) koordinat başlanğıcından g düz xətti üzərinə endirilmiş perpendikulyarların oturmaçığının polyar koordinatlarıdır.

Əgər ölçülərin invariantlığı yalnız $\mathbb{R}^n$ -in paralel yerindəyişmələr qrupu T_n -ə nəzərən tələb olunarsa, onda bu fəzalarda invariant ölçülərin yeganəlik xassəsi itir ($k=0$ halından başqa). Məs., düz xətlər fəzasında T_2 qrupuna nəzərən invariant ixtiyari ölçü $m(dg) = dp \mu(d\varphi)$ kimi ifadə olunur, burada μ , $[0, 2\pi]$ -də hər hansı bir ölçüdür (bax, *İntensivlik qızılqülü*). Əksinə, qeyd edilən faktorizasiya olunmuş tipli bütün ölçülər T_2 – invariantdır.

Əgər $\mathbb{R}^n$ -də həndəsi fiqurların fəzası $\mathcal{F}$ fəzaların hasil $H \times B$ şəklində göstərilərsə, onda $\mathcal{F}$ -də H – invariant ölçü iki vuruğa faktorizə olunur, bu vuruqlardan biri H qrupunun Haar ölçüsüdür (bax, *Təsədüfi şeyp*, burada $H=M_2$ və $H=A$, A vahid determinantlı matrislər qrupu olduğu hallar üçün faktorizasiya misalları araşdırılmışdır), burada H , $\mathbb{R}^n$ -in çevirmələrinin lokal kompakt qrupudur.

İ. h.-də invariant ölçülər üzrə inteqralların hesablanması xüsusi yer tutur (bax, *Riyazi stereologiya*). Invariant ölçülər üzrə inteqrallama həndəsi araşdırılmanın, o cümlədən, həndəsi bərabərsizliklərin müəyyənləşdirilməsi metodlarının araşdırılmasında effektiv vasitə olmuşdur (bax, [1]).

İ. h.-nin mühüm bölməsi **kombinator inteqral həndəsə**dir (bax, [4]), bu bölmə *Byuffon – Silvestr məsələsinin* həlli ilə bağlı inkişaf etmişdir (bax, [4]). Müstəvi üzərində düz xətlər fəzası G üçün bu nəzəriyyənin əsas nəticəsi aşağıda şərh olunmuşdur. G üçün model kimi polyusu xaric olunmuş, kənarında (ekvator) diametral qarşı yerləşən nöqtələri eyniləşdirilən yarımsfərə seçilir. Belə modelin yaxşı cəhəti ondan ibarətdir ki, müstəvi üzərində düz xətlər dəstəsinə, yəni $[P] = \{g \in G : g \text{ } P \in \mathbb{R}^2 \text{ nöqtəsindən keçir}\}$ çoxluqlarına böyük dairelərin qövsələri (geodeji) uyğun olur.

Ekvator üzərində yerləşən geodeji qövslərin uc nöqtələri eyniləşdirilir, nəticədə modeldəki hər $[P]$ dəstəsi qapalı əyri ilə təsvir

olunur. Hər iki – $[P_1]$ və $[P_2]$ dəstəsi bir nöqtədə kəşisir, bu nöqtəyə P_1, P_2 düz xətti uyğun olur. Müstəvidə iki nöqtə iynə adlanır və $v = \{P_1, P_2\}$ simvolu ilə işarə olunur, $[v]$ v iynəsinin P_1, P_2 uclarını ayıran düz xətlər çoxluğu, $[P_1]$ və $[P_2]$ dəstələri $[v] \subset G$ çoxluğunun sərhədini təşkil edirlər.

$G \setminus ([P_1] \cup [P_2])$ çoxluğu **təktəpə** adlanan iki bir-birilə əlaqəli komponentə ayrılır; bu komponentlərdən biri məhduddur (yəni onun tamamlayıcısı kompakt), digəri isə məhdud deyildir. Əgər A xaric edilmiş polyusun ətrafını özündə saxlayırsa, $A \subset G$ çoxluğu məhdud deyildir (bölünəndir: əgər polyusu örtürsə). $[v]$ əlaqəli və məhdud çoxluq olduğundan, onda onu polyusu örtməyən təktəpə ilə eyniləşdirmək lazımdır.

Müstəvidə tərəfləri a, b, c olan üçbucaqlıya baxılır. Üçbucaqlının hər hansı bir tərəfindən üçbucaqlıya daxil olan düz xəttin onun digər tərəflərindən birindən keçərək çıxmasını aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$I_{[c]}(g) = I_{[c] \cap [a]}(g) + I_{[c] \cap [b]}(g);$$

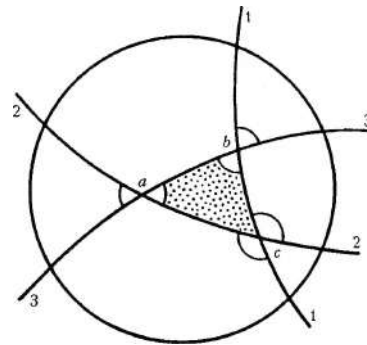
$$I_{[a]}(g) = I_{[a] \cap [b]}(g) + I_{[a] \cap [c]}(g);$$

$$I_{[b]}(g) = I_{[b] \cap [a]}(g) + I_{[b] \cap [c]}(g),$$

burada $I_A(g)$, $A \subset G$ çoxluğunun indikatorudur. Bu bərabərliklər (aşağıdakı indikatorlar üçün də analogi bərabərliklər) sonlu sayda dəstələrlə örtülə bilən düz xətlər çoxluğuna qədər dəqiqliklə doğrudur (baxılan halda üçbucaqlının üç təpəsinə uyğun dəstələrlə). Sonuncu iki bərabərliyin cəmindən birincisini çıxdıqda aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$2I_{[a] \cap [b]}(g) = I_{[a]}(g) + I_{[b]}(g) - I_{[c]}(g).$$

Şəkil 1-ə baxdıqda, modeldə bu bərabərliyi bilavasitə yoxlamaq olar və bu halda nəzərə alınmalıdır ki, ekvator birləşdirilmişdir (Şəkil 1-də polyus $[c]$ -nin tamamlayıcısında $[a] \cap [b]$ -dən xaricə yerləşir. $[a]$, $[b]$, $[c]$ çoxluqları qövslərlə işarə olunmuşdur). Şəkil 1-dən aydındır ki, modeldəki hər bir məhdud üçbucaqlının iki daxili bucağı məhdud təktəpələrə aiddir, üçüncü, daxili bucaq isə qeyri – məhdud təktəpəyə mənsubdur.



şəkil 1.

D baxılan modeldə qabarıq məhdud geodeji çoxbucaqlı, $\{\tau_i\}$, D -nin adi trianqulyasiya vasitəsilə bölündüyü üçbucaqlılar olsun. Yuxarıdakı düstur hər bir τ_i üçbucaqlısı üçün

$$2I_{\tau_i}(g) = I_{[a_i]}(g) + I_{[c_i]}(g) - 1$$

şəkilde ifadə olunur. burada $[a_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$, τ_i üçbucaqlısının daxili bucaqlarını özündə saxlayan təktəpələrdir. i üzrə cəmləmədə indikatorların additiv xassəsindən istifadə edərək

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i]}(g) - N$$

olduğu alınır, burada N trianqulyasiyada iştirak edən üçbucaqlıların sayı, $[d_i]$, $-D$ çoxbucaqlısının daxili bucaqlarını özündə saxlayan təktəpələrdir.

Fərz olunur ki, $\{[d_i]\} = \{[d_i']\} \cup \{[d_i'']\}$, $\{d_i'\}$ məhdud təktəpələr, $[d_i'']$ qeyri – məhdud təktəpələrdir. Müxtəlif $[d_i'']$ təktəpələr sayını r -lə, tamamlayıcısını isə yuxarı indeks c ilə işarə etdikdə,

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i]}(g) - \sum_i I_{[d_i'']} (g) + r - N$$

düsturu alınır, bu halda $r = N$. Bu ondan alınır ki, verilən d_i'' -in trianqulyasiyada bölündüyü təktəpələrdən yalnız biri məhdud olur (yeni yalnız bir təktəpə polyusu örtür). Beləliklə,

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i]}(g) - \sum_i I_{[d_i'']} (g).$$

Təsvir olunmuş çoxbucaqlılara oxşar çoxbucaqlılar, təbii surətdə, Byuffon halqaları adlanan halqaların atomları kimi yaranır (bax, aşağı və [3], [4]).

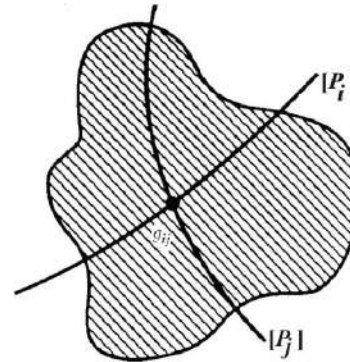
Müstəvidə $v_1, \dots, v_n$ iynələrinin qeyd olunduğu fərz olunur. Bunlara G fəzasında $[v_1], \dots, [v_n]$ çoxluqları uyğundur. $\mathfrak{A}\{v_i\}$ ilə bütün $[v_i]$ çoxluqlarını özündə saxlayan, G -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş minimal (sonlu) cəbr işarə olunmuşdur. $\mathfrak{A}\{v_i\}$ cəbrinin məhdud altçoxluqlarının halqasına Byuffon halqası deyilir və $\text{Br}\{v_i\}$ simvolu ilə işarə olunur. Əgər G fəzasında $m(\cdot)$ ölçüsü hər bir $P \in \mathbb{R}^2$ üçün $m([P]) = 0$ şərtini ödəyirsə, $m(\cdot)$ dəstəsiz ölçü adlanır. Aşağıdakı teorem doğrudur: G -də ixtiyari lokal sonlu dəstəsiz $m(\cdot)$ ölçüsü və hər bir $B \in \text{Br}\{v_i\}$ üçün

$$m(B) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) m([v_{ij}])$$

ifadəsi doğrudur, burada cəmləmə bütün $\{P_i, P_j\} = v_{ij}$ cütleri üzrə aparılır. $\{P_i\}$, $\{P_j\}$ iynəsinin ucları çoxluğu, $c_{ij}(B)$, $m(\cdot)$ ölçüsünün seçilməsindən asılı olmayan tamqiymətli əmsallardır.

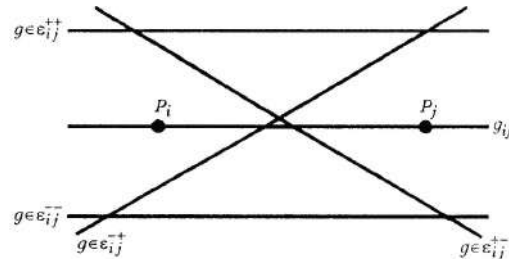
Əgər $\{P_i\}$ -nin heç bir üç nöqtəsi bir düz xətt üzərində yerləşmirsə, $c_{ij}(B)$ əmsallarının qiymətlərini aşağıdakı alqoritmə hesablamaq olar. ε_{ij} , $-P_i$ və P_j nöqtələrindən keçən $g_{ij} \in G$ düz xəttinin kifayət qədər kiçik ətrafı olsun. $\varepsilon \setminus ([P_i] \cup [P_j])$ çoxluğu bir-birilə əlaqəli olmayan dörd komponentə ayrılır: bu komponentlər g_{ij} düz xəttinin hissəvi ətrafları kimi adlandırılır (şəkil 2). Hissəvi ətraflardan ikisi, məs., ε_{ij}^{++} və

ε_{ij}^- qeyri – məhdud $[v_{ij}]^c$ təktəpəyə mənsubdur, digər hissəvi ətraflar, məs., ε_{ij}^{+-} və ε_{ij}^{-+} isə məhdud $[v_{ij}]^c$ təktəpəsinə mənsubdurlar. Şəkil 3-də



şəkil 2.

daxil olunmuş hissəvi ətraflardan hər birinin nümayəndələri təsvir edilmişdir, bunlar g_{ij} düz xəttinin kiçik «terpenişləri» ilə alınır.



şəkil 3.

$I_n(i^+, j^+)$ uyğun hissəvi ε_{ij}^{++} ətrafında $I_n(g)$ indikatorunun qiyməti olsun. Onda $c_{ij}(B)$ əmsali

$$c_{ij}(B) = I_B(i^+, j^+) + I_B(i^-, j^+) - I_B(i^-, j^-) - I_B(i^+, j^-)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Analoji kombinator ayrılışlar səthlərdə geodeji ayrılır fəzalarında, $\mathbb{R}^3$ -də müstəvilər fəzalarında, müstəvidə dairələr fəzalarında, $\mathbb{R}^3$ -də sferalar, $\mathbb{R}^3$ -də düz xətlər fəzalarında vardır.

Əd.: [1] Б л я ш к е В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 97–149; [2] С а н т а л о Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983.

İNTEQRAL LİMİT TEOREMİ «интегральная предельная теорема; integral limit theorem» – paylanma funksiyaların ardıcılığının bir paylanma funksiyasına və ya seçilmiş paylanma funksiyalar çoxluğuna müəyyən mənada yığılması haqqında müddəadır. Birinci hala aid *mərkəzi limit teoremini* misal göstərmək olar ki, burada yığılma *Levi metrikaçı* mənada və *müntəzəm metrika* mənada nəzərdə tutulur, orta *qiymət metrikaçı* və onun ümumiləşmələri mənada yığılma istifadə olunan *qlobal limit teoremi* də bu hala aiddir. İkinci hala aid misal *Kolmogorov – Arak teoremidir* (həm də onun analoglarıdır) ki, burada paylanmaların kompozisiyaları müntəzəm metrikada sonsuz bölünən qanunların bütün sinfi ilə yığılır. İ. İ. t. bir metrikadan

istifadə edilməklə, eyni zamanda digər metrika ilə bağlı *lokal limit teoremi* də ola bilər. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün İ. İ. t.-ində limit paylanması normal qanun və bu *tam variasiya metrikasından* (bax, [1]) istifadə olunduqda, İ. İ. t. paylanma sıxlıqları üçün orta qiymət metrikalı lokal limit teoremi olur, bu paylanmaların sıxlıq funksiyalarının varlığı asimptotik zəruri şərt olur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 3, с. 112.

İNTEQRAL MİQYAS(ı) korrelyasiyanın «интегральный масштаб корреляции; integral scale of correlation» – bax, *Korrelyasiya radiusu*.

İNTEQRAL STRUKTUR(u) ehtimali metrikasının «интегральная структура вероятностной метрики; integral structure of a probabilistic metric» – bax, *Ehtimal metrikası, struktur*.

İNTEQRAL, TRAYEKTORİYALAR ÜZRƏ «интеграл по траекториям; path integral» – bax, *Kontinual integral*.

İNTEQRALLANMA Бохнерə görə «интегрируемость по Бохнеру; Bochner integrability» – bax, *Bochner integrali*.

İNTEQRALLANMA Pettisə görə «интегрируемость по Петтису; Pettis integrability» – bax, *Pettis integrali*.

İNTEQRALLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESİN «интегрирование случайного процесса; integration of random process» – bax, *Təsadüfi proses, integrallanma*.

İNTEQRALLANMIŞ SPEKTR(i) qeyri-stasionar prosesin «проинтегрированный спектр нестационарного процесса; integrated spectrum of a nonstationary process» – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

İNTENSİVLİK «интенсивность; intensity» – 1) stasionar hadisələr axınının İ.-liyi – vahid zaman intervalında hadisələr sayının orta qiyməti λ -dır. t müddəti ərzində hadisələrin orta sayı λt -yə bərabərdir. Korolyuk teoreminə əsasən İ. stasionar axın parametrlərinə bərabərdir (bax, *Xinçin teoremi*). Xidmət sistemlərinin geniş sinfi üçün stasionar rejimin olması giriş axını və orta xidmət müddətinin intensivliyi terminləri ilə ifadə olunur. Qeyri – stasionar axın üçün $\lambda(t)$ ani intensivlik anlayışı daxil olunmuşdur. Ani intensivlik (a, b) intervalında axındakı hadisələr sayının

riyazi gözləməsi $\int_a^b \lambda(t) dt$ inteqralıdır. Ordinar axın halı üçün

axının k -intensivliyi anlayışı daxil olunmuşdur. k – intensivlik $\lambda_k(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$ ($t_1, t_1 + dt_1$), ..., ($t_k, t_k + dt_k$) intervallarının hər birində axın hadisələrinin baş vermə ehtimalıdır; $\lambda_k(t_1, \dots, t_k)$ – k – intensivlikdir.

2) İmtina intensivliyi – $\lambda(t) = F'(t) / [1 - F(t)]$ bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyadır, $F(t)$ hər hansı bir obyektin imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyasıdır.

394 İNTENSİVLİK

İNTENSİVLİK(yi) axının «интенсивность потока; intensity of flow» – bax, *Təsadüfi axın*.

İNTENSİVLİK ani «интенсивность мгновенная; instantaneous intensity» – bax, *İntensivlik*.

İNTENSİVLİK(yi) düz xətlər prosesinin «интенсивность процесса прямых; intensity of straight lines process» – bax, *Həndəsi proses, inteqral həndəsə*.

İNTENSİVLİK FUNKSIYASI, İMTİNANIN «интенсивности отказа функция; hazard function / hazard rate function / failure rate function» – differensiallanan paylanma funksiyası $F(t)$ üçün

$$\lambda(t) = f(t) / \bar{F}(t) \quad (*)$$

münasibətilə təyin olunan funksiyadır, burada $f(t) = dF(t) / dt$, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$. Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsində $\lambda(t)dt$ ehtimalı $(t, t + dt)$ intervalında imtinanın baş verdiyi t anına qədər imtina baş vermədiyi şərtinə nəzərən şərti ehtimalı ifadə edir. (*) münasibətindən

$$\bar{F}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\}$$

olduğu alınır. $F(t)$ eksponensial paylanma funksiyası olarsa,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda(t) \equiv \lambda$$

olur.

İNTENSİVLİK QIZILGÜLÜ «интенсивности роза; rose of intensities» – $\mathbb{R}^n$ -də ξ istiqamətində vahid uzunluqlu parçanı kəşən hipermüstəvilər çoxluğunun ölçüsünə bərabər $H(\xi)$ funksiyasıdır. Bu halda hipermüstəvilər fezasında ölçünün

lokal finit və $\mathbb{R}^n$ -də paralel yerindəyişmələrin T_n qrupuna nəzərən invariant ölçü olduğu fərz olunur. Belə ölçülər zəruri olaraq $m \times \mathcal{L}$ şəklində ifadə olunduğundan,

$$H(\xi) = \int_{S^{n-1}} \left| \cos \hat{\xi} \omega \right| m(d\omega)$$

olur, burada m – $(n-1)$ – ölçülü sferada hər hansı cüt ölçü, $\mathcal{L}$ – $\mathbb{R}^1$ -də Lebeq ölçüsü, S^{n-1} isə $\mathbb{R}^n$ -də $(n-1)$ – ölçülü sferadır.

$H(\xi)$ funksiyası, əksər hallarda, $\mathbb{R}^n$ -də ξ istiqamətində düz xətlər üzərində hipermüstəvilərin invariant prosesinin T_n kəsişmələri prosesinin intensivliyi kimi interpretasiya olunur. H verildikdə, m ölçüsünün tapılması *riyazi stereologiya*nın məsələlərindən biridir.

İntensivlik qızılqüllü kəmiyyəti riyazi stereologiya məsələlərində istifadə olunur.

Bax, *Riyazi stereologiya*.

Əd.: [1] Stoyan D., Mecke J., Stochastische Geometrie, B., 1983; [2] Schneider R., Weil W., в кн.: Convexity and its applications, Basel, 1983, p. 296–317.

İNTENSİVLİK ÖLÇÜSÜ «интенсивности мера; intensity measure» – bax, *Puasson ölçüsü*.

İNTENSİVLİYİ, LİF PROSESİNİN « **интенсивность процесса волокон**; **intensity of a fibre process** » – bax, *Riyazi stereologiya*.

İNTENSİVLİYİ, PROSESİN « **интенсивность процесса**; **intensity of process** » – bax, *Həndəsi proses, Nöqtevi proses*.

İTERDESİL AÇIM (GENİŞLİK) « **интердецильная размах (широта)**; **interdecile range** » – bax, *Desil*.

İTERDESİL GENİŞLİK « **интердецильная широта**; **interdecile range** » – bax, *Kvantil, Desil*.

İTERFERENS KANAL « **интерференционный канал**; **interference channel** » – informasiya nəzəriyyəsinə kanallar şəbəkəsinin məlumatları iki ötürücüdən iki qəbulediciyə ötürməsinə təsvir edən adı misallardan biridir. Kanallar şəbəkəsinin ümumi tərifinin terminologiyasında l k. iki girişə ($K=2$), iki çıxışa ($L=2$) malikdir və o, ikikomponentli mənbədən ($M=2$) informasiya ötürməsinə təsvir edir. İki kodlandırıcı qurğudan hər biri mənbədəki öz komponentini kodlandırır ($A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$). İki dekodlandırıcı qurğudan hər biri mənbədəki öz komponentini dekodlandırır ($B_1=\{1\}$, $B_2=\{2\}$) və bu zaman özünün kanaldan çıxışındakı məlumatlardan istifadə olunur ($C_1=\{1\}$, $C_2=\{2\}$). Ümumi l k. üçün kanalın ötürücülük qabiliyyəti oblastı hesablanmamışdır; bu oblastın yalnız bəzi sərhədləri və bəzi xüsusi kanallar (məs., Gauss kanalları) üçün nəticələr məlumdur.

Əd.: [1] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [2] Гельфанд С. И., Прелов В. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1978, т. 15, с. 123–62.

İNTERVAL STATİSTİK QIYMƏTİ « **интервальная оценка**; **interval estimator** » – *statistik qiymətdir*, qiymətləndirilən paramet və ya parametrik funksiya fəzasının nöqtələri çoxluqları (altçoxluqlar) bu statistik qiymətin həlləri ola bilər (bax, *Nöqtevi statistik qiymət*). l s. t.-lərdən, əsas etibarilə, onların etibarlılıq səddinin interpretasiyası ilə seçilən etibarlı intervallar (Neymana görə), fidusial intervallar (Fişerə görə), Beyeş etibarlı intervalları; müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanması kvantili üçün etibarlı intervallar kimi götürülən tolerant intervallar ən geniş yayılmış l s. q.-lərdəndir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

İNTERVAL VERİLƏNLƏRİNİN STATİSTİKASI « **интервальных данных статистика**; **interval data statistics** » – obyektləri qeyri – ədədi təbii *statistika* bölməsidir, bu bölmədə seçimin elementləri $\mathbb{R}^1$ -in intervallarıdır, məsələn, təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinə ölçmə xətlərinin əlavə olunmasından yaranan intervallar. l v. s. statistik prosedurların dayanıqlılığı (robastlığı) nəzəriyyəsinə daxildir (bax, [1]) və bu statistika interval riyaziyyatında da istifadə olunur (bax, [2]).

l v. s.-nda regression analizin problemləri, eksperimentin planlaşdırılması, alternativlərin müqayisəsi, interval qeyri – müəyyənliyi şəraitində qərarların qəbul edilməsi problemləri öyrənilmişdir (bax, [3] – [6]).

Seçimlərin həcmələrinin böyük, ölçmə xətlərinin kiçik olduğu hallarda interval verilənlərinin statistik analizinin asimptotik metodları inkişaf etdirilmişdir. Klassik riyazi statistikadan fərqli olaraq, bu metodlarda, əvvəlcə seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdırılır və yalnız sonra xətlər sıfıra kimi azaldılır. Araşdırmaların ümumi sxemi işlənilmişdir; bu sxemə l v. s.-nın iki əsas xarakteristikası

nın – notların (ilk verilənlərin interval şəklində olmasından yaranan statistikanın mümkün maksimal yayılması) və seçimin rəşional həcmnin (əgər bu həcm artıq götürülsə, qiymətləndirmə dəqiqliyini və hipotezlərin yoxlanılması ilə bağlı statistik nəticələrin dəqiqliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırmaq mümkün olmur) hesablanması daxil olan ümumi tədqiqat sxemi işlənmişdir (bax, [7]). Bu sxem qamma – paylanmanın parametrlərinin, riyazi gözləməsinin və dispersiyasının, median və variasiya əmsalının qiymətləndirilməsində (bax, [9], [10]) və normal paylanmanın parametrləri haqqında hipotezlərin Styudent kriterisi ilə yoxlanılması, iki seçimin bircinsliyi haqqında hipotezin Smirnov kriterisi ilə yoxlanılması üçün, additiv statistikaların xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi üçün tətbiq olunur.

Regression, diskriminant və klaster analizlərin əsas məsələlərinin qoyuluşlarında l v. s.-nın yanaşmaları işlənmişdir (bax, [8]).

l v. s.-nın bir çox müddəaları klassik riyazi statistikanın analoqlarından fərqlənir. Məs., tutarlı statistik qiymətlər mövcud deyildir: statistik qiymət xətasının kvadratının orta qiyməti, bir qayda olaraq, asimptotik olaraq, klassik nəzəriyyəyə görə hesablanan bu statistik qiymətin dispersiyası və notnun kvadratının cəminə bərabərdir. Momentlər metodu bəzən maksimal doğruluqsaşarlıq metodundan daha dəqiq olur (bax, [9], [10]). Nəticələrin dəqiqliyini artırmaq məqsədilə seçimin həcmi müəyyən həddən artıq götürmək məqsəduyğun deyildir.

l v. s.-nda klassik etibarlı intervallar notn kəmiyyəti qədər sağa və sola genişləndirilməlidir və seçimin həcmi artdıqca bunların uzunluğu sıfıra yaxınlaşır.

Klassik riyazi statistikanın bir çox məsələlərinə l v. s.-nın uyğun elə məsələlərini qarşı qoymaq olur ki, bu məsələlərdə seçimin elementləri – həqiqi ədədlər intervallarla əvəz olunur. l v. s.-nın alqoritmləri statistik proqram təminatına daxil olunur, bu alqoritmlər onların klassik riyazi statistikadan olan analoqlarına «paralel» sayılır. Bu isə müşahidə nəticələrindəki xətləri nəzərə almağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Шокин Ю. И., Интервальный анализ. Новосибирск, 1981; [3] Вошинин А. П., Метод оптимизации объектов по интервальным моделям целевой функции, М., 1987; [4] Вошинин А. П., Сотиров Г. П., Оптимизация в условиях неопределенности, М. – София, 1989; [5] Кузнецов В. П., Интервальные статистические модели, М., 1991; [6] Сборник трудов Международной конференции по интервальным и стохастическим методам в науке и технике (ИНТЕРВАЛ – 92), т. 1–2, М., 1992; [7] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1990, с. 89–99; [8] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1993, с. 149–58; [9] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1995, с. 114–24; [10] ГОСТ 11.011–83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма – распределения, М., 1984.

İNTERVALLAR ŞKALASI « **интервалов шкала**; **interval scale** » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

σ – **İNVARIANT HALQA** « σ – **инвариантное кольцо**; σ – **invariant ring** » – bax, *Ölçülü fəza*.

İNVARIANT KRİTERİ « **инвариантный критерий**; **invariant test** » – *invariant statistika* üzrə qurulmuş *statistik kriteridir*. Daha ətraflı: əgər bütün g -lər üçün $g\theta_0=\theta_0$ olarsa, $H_1:\theta\in\Theta\setminus\theta_0$ hipotezinə qarşı $H_0:\theta\in\theta_0$ hipotezinin

yoxlanılması məsələsi – paylanmaların bircins ailəsi üçün G qrupunun təsirinə nəzərən invariantdır. Əgər $\varphi(x)$ invariant statistikadırsa, $\varphi(x)$ invariant kriteridir. Verilmiş məsələnin $\bar{I}$. k.-sinin texniki cəhətdən rahat təsvirində maksimal invariant anlayışından istifadə olunur. $T(x)$ statistikasi invariant statistika olarsa və müxtəlif orbitlərdə müxtəlif qiymətlər alarsa, $T(x)$ maksimal invariantdır. $\bar{I}$. k. x -dən $T(x)$ vasitəsilə asılı olur.

Əgər G qrupu Θ -da tranzitiv təsir edirsə, onda müntəzəm ən güclü $\bar{I}$. k. mövcuddur və bu halda məsələ sadə alternativ hipotezə qarşı sadə hipotezin yoxlanılması məsələsinə çevrilir.

Praktiki cəhətdən mühüm bir çox misallar üçün ümumi halda kafi statistiklardan istifadə olunmaqla, müntəzəm ən güclü meyli $\bar{I}$. k.-lər qurulmuşdur. Əgər $\varphi(gx) = \varphi(x)$ bərabərliyi bütün g -lər üçün sanki yaqın ödənilərsə, $\varphi(x)$ kriterisi sanki yaqın invariant kriteri adlanır. Paylanmaların məhdud tam ailəsi üçün invariant güc funksiyalarına malik olan bütün kriterilər sinfində müntəzəm ən güclü kriteri olan müntəzəm ən güclü sanki invariant kriteri mövcuddur. Bu nəticə məhdud tam kafi statistika olduğu halda faydalıdır və statistika əsasən də, məsələ invariant məsələ olur.

$\bar{I}$. k. invariant etibarlı çoxluqlara uyğundur, bu çoxluqlar isə $gS(x) = S(gx)$ eynilikləri ilə xarakterizə olunur. Müntəzəm ən güclü $\bar{I}$. k.-lərdən müntəzəm ən deqiq etibarlı çoxluqların qurulmasında istifadə olunur və əksinə.

Optimal $\bar{I}$. k.-lər maksimumun xassəsidirlər. Hant – Steyn teoremi (bax, [1], [2]) hər bir φ kriterisi üçün

$$\inf_g M_{g\theta} \varphi(x) \leq M_0 \psi(x) \leq \sup_g M_{g\theta} \varphi(x)$$

bərabərsizliklərini sanki bütün θ -lar üçün ödəyən, sanki invariant ψ kriterisinin varlığını təmin edir. Belə müddəalar üçün mühüm şərt G qrupunda ehtimal ölçülərinin asimptotik sağinvariant ardıcılığının varlığı şərtidir.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] K i e f e r J., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 3, p. 573–601.

INVARIANT ÖLÇÜ « инвариантная мера; invariant measure » – 1) $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının özünə ölçülən T inikası üçün $\bar{I}$. ö. – $\mathcal{A}$ -da verilmiş μ ölçüsüdür ki, ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. T üçün ölçünün invariantlığı

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(Tx) d\mu(x)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

Bax. *Ölçülü fəza*.

2) $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$, $(X, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza olduqda, $P(x, A)$ stoxastik operatoru üçün $\bar{I}$. ö. μ $\mathcal{A}$ -da μ ölçüdür ki, ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(A) = \int_X P(x, A) d\mu(x).$$

Bax. *Stasionar paylanma(sı) bircins Markov zəncirinin*.

396 INVARIANT

σ – INVARIANT ÖLÇÜ « σ – инвариантная мера; σ – invariant measure » – bax. *Ölçülü fəza*.

INVARIANT PAYLANMA « инвариантное распределение; invariant distribution » – T həqiqi oxunda təyin olunmuş, bircins $X(t)$ Markov təsadüfi prosesinin $(\Omega, \mathcal{A})$ fəza fəzasında $P^0 = P^0(A)$ ehtimal paylanmasıdır. $X(t)$ prosesinin keçid funksiyası $P(t, x, A)$ ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ və $t \in T$ -lər üçün

$$P^0(A) = \int_{\Omega} P(t, x, A) P^0(dx) \quad (*)$$

münasibətini ödəyir. P^0 ehtimal paylanmasıdır ki, keçid funksiyası $P(t, x, A)$ və paylanmaları $P_t(A) = P\{\tilde{X}(t) \in A\} = P^0(A)$ olan bircins $\tilde{X}(t)$ Markov prosesi dar mənada stasionar prosesdir.

Yalnız və yalnız (*) münasibətini ödəyən $\bar{I}$. p. mövcud olduğu halda keçid funksiyası ilə verilmiş stasionar Markov prosesi mövcuddur. Əgər $X(t)$ prosesinin fəza fəzası sonlu olarsa, onda $\bar{I}$. p. həmişə vardır. Hesabi Ω çoxluğunda təyin olunmuş diskret zamanlı prosesin $\bar{I}$. p.-sinin varlığı üçün $\Psi \subset \Omega$ əlaqəli vəziyyətlər sinfinin mövcud olması şərtidir ki, ixtiyari $y_1 \in \Psi$ vəziyyətindən ixtiyari $y_2 \in \Psi$ vəziyyətinə orta keçid müddəti sonlu olsun (bax, [1]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 183–97; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

INVARIANT PAYLANMALAR AİLƏSİ « семейство инвариантных распределений; family of invariant distribution » – bax. *Fidusal paylanma*.

INVARIANT STATİSTİK QIYMƏT « инвариантная оценка; invariant estimator » – paylanmalar ailəsinin hər hansı (adətən, mane olan) parametrinə nəzərən invariant *statistik qiymətə* deyilir. Mane olan qrup parametrinin xaric edilməsi üçün istifadə olunur.

INVARIANT STATİSTİK STRUKTUR « инвариантная статистическая структура; invariance statistical structure » – bax. *Statistik məsələlər qrupları* da və bircins fəzalarda.

INVARIANT STATİSTİKA « инвариантная статистика; invariant statistic » – dəyişənlərin uzlaşdırılmış çevirmələrinə nəzərən invariant *statistikadır*; invariant statistik modeller nəzəriyyəsinin əsas anlayışıdır. Əgər x müşahidəsi və nəmulum θ parametrinə G qrupundan hər hansı bir g emeli tətbiq olunursa və bu qrupa nəzərən statistik model invariantdırsa və buna görə də, $x \mapsto gx$, $\theta \mapsto g\theta$ olursa, onda $t(x)$ statistikasının invariantlığı üçün

$$t(gx) = t(x)$$

eyniliyinin ödənilməsi tələb olunur.

Əd.: [1] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

INVARIANTLIQ statistik oyunlar nəzəriyyəsinə « инвариантность в теории статистических игр; invariance in the statistical game / decision theory » – yalnız invariant həlledici qaydalardan istifadə edilməsi hesabına bütün *həlledici qaydalar*

sinfinin daralması prinsipidir. Statistik hellin invariantlıq probleminin müəyyən olunması *statistik oyunun* tərifindəki $\mathcal{D}$ həllər fəzası, Θ parametrik fəzası və seçimi $\mathcal{X}$ fəzasının hər birində çevirmələr qrupları ilə əlaqədardır. Tərifdə fərz olunur ki, $\mathcal{X}$ fəzasının çevirmələrinin G qrupu vardır və bu qrupun vahidi – eynilik çevirməsi e -dir, qrup əməli kompozisiyadır, yeni $g_2 g_1 x$ -i $g_2(g_1 x)$ -ə çevirir, g^{-1} isə g -yə ters çevirmədir. Fərz olunur ki, G ölçülən qrupdur, yeni gX qiymətləri $\mathcal{X}$ -dən olan X təsadüfi kəmiyyətidir.

Əgər ixtiyari $g \in G$, $\theta \in \Theta$ üçün eht $\theta_g \in \Theta$ varsa ki, ixtiyari ölçülən A üçün

$$P_\theta(gX \in A) = P_{\theta_g}(X \in A) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda P_θ invariant ailedir.

Θ -nı özünə çevirən, $\bar{g}\theta = \theta_g$ bərabərliyi ilə təyin olunan $\bar{g}$ çevirmələri $\theta \rightarrow P_\theta$ inikasının qarşılıqlı birqiymətli inikas olduğu halında G qrupunu əmələ gətirir. Riyazi gözəlmələr terminləri ilə (1) şərti onu ifadə edir ki, ixtiyari inteqrallanan φ funksiyası üçün

$$M_\theta \varphi(gX) = M_{\bar{g}\theta} \varphi(X)$$

bərabərliyi doğrudur.

$(\mathcal{D}, \Theta, W), (X, P_\theta)$ statistik oyunu ilə bağlı statistik həllər problemi: P_θ ailesi G -yə nəzərən invariant olarsa, itki funksiyası w isə ixtiyari $\delta \in \mathcal{D}$, $g \in G$ üçün eht yeganə $\delta' \in \mathcal{D}$ həlli tapılırsa ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$w(\delta, \theta) = w(\delta', \bar{g}\theta) \quad (2)$$

bərabərliyini ödəsin – mənasında G qrupuna nəzərən invariant olarsa, G qrupuna nəzərən invariant problem adlanır.

g -yə görə birqiymətli təyin olunan δ' qiyməti aşağıda $g'\delta$ kimi işarə olunmuşdur.

$\mathcal{D}$ fəzasını özünə çevirən, G qrupunun doğurduğu g' çevirmələri G' qrupunu əmələ gətirir. Beləliklə, $\mathcal{X}$ -i özünə çevirən g çevirmələrinin əsas G qrupu ilə Θ və $\mathcal{D}$ fəzaları özündə çevirmələrinin iki $\bar{G}$ və G' qrupları bağlıdır. Eyni zamanda $g, \bar{g}$ və g' çevirmələrinin tətbiqi həll problemini dəyişmir (invariantlıq). Buna görə də, eht həlledici qaydalar seçilməlidir ki, bunlar ekvivalent həll probleminin birindən digərinə keçdikdə dəyişməsinlər.

Əgər $\delta(gX) = g'\delta(X)$ olarsa, invariant həll probleminin *həlledici funksiyası* $\delta(X)$ invariant *həlledici funksiya* adlanır. Randomlanmış invariant $\pi(X)$ qaydası invariant həlledici qaydalarda toplanmış ixtiyari paylanma kimi təyin olunur.

I. prinsipinin tətbiq məsələləri *ekvivariant statistik qiymətlərin* və *invariant kriterilərin* istifadə olunmasını verir. Bu xüsusi hallar müəyyən özünəməxsusluğa malikdir.

Qiymətləndirmə probleminə G' çevirmələr qrupu, ümumiyyətlə, daxil olunmur. Bu halda, $\mathcal{D}$ və Θ çoxluqları üst-üstə düşür və fərz olunur ki, $g'\delta = \bar{g}\delta$. Buna görə də, ekvivariant statistik qiymətlər $\theta^*(gX) = \bar{g}\theta^*(X)$ bərabərliyi ilə təyin olunurlar.

Hipotezləri yoxlama nəzəriyyəsində g' çevirməsinin ona eyniliklə bərabər $g' = e$ çevirməsinə bərabər olduğu fərz olunur, belə ki, invariant π kriterisi $\pi(gX) = \pi(X)$ münasibətilə təyin olunur. Bu halda $\{\theta \in \Theta_1\}$ və $\{\theta \in \Theta_2\}$ hipotezlərinin yoxlanılmasının invariantlıq problemi üçün də fərz olunmalıdır ki, $g\theta_i = \theta_i$, $i = 1, 2$ (bax, [2]).

Bu iki yanaşmada müəyyən fərqlər olması iki müxtəlif terminin – «ekvivariantlıq» (statistik qiymətlər üçün) və «invariantlıq» (hipotezlərin yoxlanılması üçün) terminlərinin istifadəsi, invariant həllər qaydalarının işarə olunması ilə izah olunur.

Əd.: [1] bax, *Kafilik statistik oyunlar nəzəriyyəsinə*.

INVARIANTLIQ (ğı) statistik prosedurun «инвариантность статистической процедуры: invariance of a statistical procedure» – hər hansı bir statistik məsələdə hər hansı *həlledici qaydanın* xassəsidir. Fərz olunur ki, G eht qrupdur ki, bu qrupa nəzərən statistik model invariantdır və o, mümkün həllər fəzası D -də təsir göstərir. Əgər $\delta(gx) = g\delta(x)$ eyniliyi ödənilərsə, $\delta(x)$ invariant statistik prosedurdur, deyilir; $g, - G$ qrupundan çevirmədir. Invariant statistik prosedurun mühüm xassəsi – itki funksiyasının invariantlığı halında da $R(\delta) = R(\delta|\theta) = ML(\delta(x)|\theta)$ risk funksiyasının $\theta \in \Theta$ naməlum parametri üzrə sabit olmasıdır; itki funksiyasının invariantlığı $L(gd|g\theta) = L(d|\theta)$ eyniliyinin ödənilməsi kimi anlaşılar. Bu zaman Θ -da G qrupunun təsirinin tranzitivliyi fərz olunur. Bu halda rəqulyarlıq şərtləri də ödənildikdə optimal invariant statistik prosedur mövcuddur.

Mühüm bir haldır ki, optimal invariant statistik prosedur minimum prosedurdur. Təsirin tranzitivliyi pozulduqda modifikasiyalanmış minimum xassəsi ödənilir. $G = \Theta$ olarsa, prosedurun varlığı və minimumluğu üçün kafi şərtləri aşağıdakılardır. Şərt 1: Hər hansı $c: X \rightarrow \Theta$ ölçülən inikası üçün $s(x) = c(x)^{-1}x$ statistikası invariantdır. Şərt 2: hər bir qeyd olunmuş $s(x)$ qiymətinə nəzərən $c(x)$ paylanması mövcuddur. Şərt 3: hər hansı $x \in X$ üçün $\theta x = x$ olarsa, bütün d -lər üçün $\theta d = d$ olur. Şərt 4: $L(d|\theta)$ funksiyası d üzrə aşağıdan semi-kesilməzdir və $d \rightarrow \infty$ olduqda $+\infty$ -a yaxınlaşır. Fərz olunur ki, D metrik fəzadır və $d \rightarrow \infty$ onu ifadə edir ki, d_n ardıcılığı hər bir kompakt sonlu zaman müddətinə tərk edir. Şərt 5: G -də ν_n ehtimal ölçülərinin hər hansı ardıcılığı üçün, bütün g -lər üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_B |\nu_n(Bg) - \nu_n(B)| = 0$$

münasibəti, yeni asimptotik sağinvariantlıq xassəsi ödənilir.

Qeyd olunan şərtlər ödənildikdə geniş mənada Bayes xassəsi, yeni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int R(\delta|\theta) \nu_n(d\theta) = R(\delta_0)$$

münasibəti də ödənilir, burada δ_0 optimal invariant statistik prosedurdur.

Θ -da ehtimal ölçülərinin çoxluğu ilə üst-üstə düşən, həllər fəzası D olan statistik prosedur kimi baxılan fidusial P_x^* paylanması

bütün α, β -lar üçün $L(\alpha|\beta) \geq L(\beta|\beta)$ tipli meyilsizlik xassəsinə malik olan $L(\alpha|\beta)$ itki funksiyaları üçün optimal invariant statistik prosedurdur. Əgər $L(\alpha|\beta)$ qiyməti P_α ölçüsünə nəzərən P_0 entropiyasına bərabər götürülərsə, bu belə itki funksiyasına maraqlı bir misaldır, burada

$$P_\alpha(B) = \int P_0(B) \alpha(d\theta) \quad \text{və}$$

$$L(\alpha|\beta) = \int L(\alpha|\theta) \beta(d\theta).$$

Əd.: [1] Климов Г. П., Кузьмин А. Д., «Теория вероят. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 309–31; [2] Wesler O., «Ann. Math. Statist.», 1959, v. 30, № 1, p. 1–20; [3] Кузьмин А. Д., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн.», 1977, № 2, с. 58–66.

INVARIANTLIQ PRİNSİPİ Banax fəzalarında «инвариантности принцип» в банаховых пространствах; **invariance principle** in Banach spaces – qiymətləri Banax fəzasından olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları üçün *invariantlıq prinsipidir*. $\{\xi_i\}$ – qiymətləri separabel Banax fəzası $(B, \|\cdot\|)$ -dən olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; fərz olunur ki, ξ_i -lərin riyazi gözləmələri sıfıra bərabərdir, normanın ikinci momentləri isə sonludur. Əgər ilkin ehtimal fəzasında ələ asılı olmayan mərkəzlənmiş $\{\eta_i\}$ Gauss təsadüfi kəmiyyətləri qurmaq olarsa ki, $\{\eta_i\}$ -lərin kovariasion operatorları $\{\xi_i\}$ -lərin kovariasion operatorları ilə eyni olsun və bu təsadüfi kəmiyyətlər üçün $\varepsilon > 0$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k (\xi_i - \eta_i) \right\| > \varepsilon \sqrt{n} \right\} = 0 \quad (*)$$

münasibəti ödənilsin, onda $\{\xi_i\}$ ardıcılığı üçün *invariantlıq prinsipi* ödənilir, deyilir.

Banax fəzalarında i. p. separabel olmayan Banax fəzaları üçün də yayılmışdır. Bu halda, (*) münasibətində ya xarici ölçü, ya da ki, norma üçün ölçülən majorantdan istifadə olunur (bax, [1], [2]). Təsadüfi proseslər üçün, o cümlədən, empirik proseslər və empirik ölçülər üçün Banax fəzalarında i. p.-nə misaldır (bax, *Yığılma(sı)* empirik ölçülərin və empirik proseslərin, [1], [2]).

Əd.: [1] Dudley R. M., Philipp W., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 62, H. 4, S. 509–52; [2] Борнсов И. С., «Тр. Новосибир. ин-та матем.», 1985, т. 5, с. 3–27; [3] Боровков А. А., Саханенко А. И., «Теория вероят. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 4, с. 734–44.

INVARIANTLIQ PRİNSİPİ xidmət sistemi nəzəriyyəsində «инвариантности проблема» в теории систем обслуживания; **insensitivity / invariance problem in theory** – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; invariantlıq problemi.

INVARIANTLIQ PRİNSİPİ sanki yəqin «инвариантности принцип» почти наверное; **strong / almost sure invariance principle** – təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl cəmlərinin doğrurduğu təsadüfi proseslərin Viner prosesinə sanki yəqin yığılma terminologiyasında yığılması

haqqında *limit teoremidir*. Əgər eyni bir ehtimal fəzasında $\zeta(\cdot)$ prosesi ilə ələ standart Viner prosesi $w(\cdot)$ qurmaq olarsa ki, $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$\zeta(t) - w(t) = O(v(t))$$

münasibəti ödənilsin, onda $v(\cdot)$ (təsadüfi olmayan) funksiyasına $\zeta(\cdot)$ və $w(\cdot)$ proseslərinin paylanmalarının yaxınlıq xarakteristikası kimi baxmaq olar.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər, $M\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$, $k \leq t < k+1$ olduqda

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i + (t-k)\xi_{k+1}$$

olsun. V. Ştrassen isbat etmişdir ki, $v(t) = o((t \ln \ln t)^{1/2})$ olarsa, (*) münasibəti doğrudur (bax, [1]). Bu fakt və Viner prosesi üçün təkrar loqarifm qanunundan $\zeta(\cdot)$ prosesi üçün təkrar loqarifm qanununun doğruluğu alınır, yəni

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \zeta(t) / (2t \ln \ln t)^{1/2} = 1 \right\} = 1.$$

Əgər $\alpha > 2$ olduqda $M|\xi_1|^\alpha < \infty$ olarsa, onda $v(t) = o(t^{1/2})$ olduqda (*) münasibəti doğrudur. Əgər hər hansı $t > 0$ qiymətində $M e^{t|\xi_1|} < \infty$ olarsa, onda $v(t) = \ln t$ olduqda (*) münasibəti doğrudur (bax, [2]). Bu nəticələri yaxşılaşdırmaq olmur. Qeyd olunmuş müddəaların martinqallar (bax, [1]) və qarışdırma şərtlərilə zəif asılı çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün (bax, [3]) müxtəlif ümumiləşmələri vardır. Bu istiqamətdə alınan bütün nəticələr əsasən *bir ehtimal fəzası metodunda* istifadə olunur.

Əd.: [1] Strassen V., «Proc. 5-th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab.», 1967, v. 2, № 1, p. 315–43; [2] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [3] Berkes I., Philipp W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 29–54.

INVARIANTLIQ PRİNSİPİ təsadüfi proseslər üçün «инвариантности принцип» для случайных процессов; **invariance principle for stochastic/random process** – təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri ardıcılıqlarının doğrurduğu təsadüfi proseslərin Viner prosesinə yığılması haqqında *limit teoremidir*. i. p. *Mərkəzi limit teoreminin* təbii ümumiləşməsidir. $\{X_j^{(n)}, j = 1, \dots, m_n\}$

$n = 1, 2, \dots$ hər bir seriyada asılı olmayan X_{jm} təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılıqlar seriyası olsun, belə ki, bütün n və j -lər üçün

$$M X_j^{(n)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{m_n} D X_j^{(n)} = 1.$$

$t_k^{(n)} = \sum_{j \leq k} D X_j^{(n)}$ olduqda $s_n = s_n(\cdot)$ qiymətləri

$$s_n(t_k^{(n)}) = \sum_{j \leq k} X_j^{(n)}$$

olan, $t_k^{(n)} \leq t \leq t_{k+1}^{(n)}$ olduqda xətti, kəsilməz təsadüfi sınıq xətt (təsadüfi proses). P_n isə müntəzəm normal və Borel σ – cəbri

kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ -də s_n prosesinin paylanması olsun; W -nin bu fəzada standart Viner prosesi w -nin paylanması olduğu fərz olunur.

$C[0, 1]$ fəzasında $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P_n \Rightarrow W \quad (1)$$

zəif yığılması üçün

$$\sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{M} \{ (X_j^{(n)})^2; |X_j^{(n)}| > \varepsilon \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \quad \varepsilon > 0$$

Lindeberg şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

(1) yığılması invariantlıq prinsipi kimi adlandırılır. Qeyd olunan nəticə Yu. V. Proxorova məxsusdur (bax, [2]).

Xüsusi halda, $X_j^{(n)} = X_j / n^{1/2}$ və $m_n = n$ olarsa, $X_1, X_2, \dots$

riyazi gözləmələri sıfır, dispersiyaları vahid olan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda, bu nəticə M. Donsker tərəfindən [1]-də daha əvvəl alınmışdır. «İ. p.» adı o faktı qeyd edir ki, limit paylanması W $\{X_j^{(n)}\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasından asılı olmur. İ. p. təsadüfi proseslər üçün ən çox tətbiq olunan limit teoremlərindən biridir. (1) yığılması bütün kəsilməz $f(\cdot)$ funksionalları üçün

$$\mathbf{P} \{ f(s_n) < u \} \Rightarrow \mathbf{P} \{ f(w) < u \} \quad (2)$$

şəklində də yazılır. $f(x) = x$ üçün (1) və (2)-dən Lindeberg formasında mərkəzi limit teoremi alınır. Hal-hazırda İ. p.-nin ümumiləşmələri $\{X_j^{(n)}\}$ kəmiyyətləri çoxölçülül, zəif asılı, marinqal-fərqlər əmələ gətirən və s. hallar üçün də məlumdur. (1) və (2)-yə mühüm əlavələr İ. p.-ndə yığılma sürətini müəyyənləşdirən münasibətlər və İ. p.-ndə böyük yayınmalar haqqında teoremlərdir (bax, *invariantlıq prinsipi*; yığılma sürəti).

Əd.: [1] Donsker M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 6, p. 1–12; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятностей и ее применения», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [3] Биллингслей П., «Сходимость вероятностных мер», пер. с англ., М., 1977.

INVARIANTLIQ PRİNSİPİ; yığılma sürəti «инвариантности принцип; скорость сходимости; invariance principle; rate of convergence» – təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğrduğu təsadüfi s_n sınıq xəttinin P_n paylanmalarının w Viner prosesinin paylanması W -yə yaxınlıq xarakterizasiyası ilə bağlı araşdırmaların istiqamətidir. Bu istiqamətdə alınmış nəticələrin ekseriyəti $C[0, 1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasında P_n və W paylanmaları arasında Levi – Proxorov məsafəsi üçün $\pi_n = \pi(P_n, W)$ statistik qiymətləridir. İlk belə statistik qiymət

$$L_\alpha^{(n)} \equiv \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{M} \left| \xi_j^{(n)} \right|^\alpha, \quad \alpha > 2$$

Lyapunov münasibəti terminləri ilə Y. V. Proxorov tərəfindən alınmış (bax, [1]) və (4)-də

$$\pi_n \leq C(\alpha) (L_\alpha^{(n)})^{1/(\alpha+1)}, \quad \alpha > 2 \quad (1)$$

statistik qiymətinə qədər hesablanmışdır.

($\xi_j^{(n)}$ toplananları haqqında *invariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün meq.-ne bax). Əgər $m_n = n$,

$\xi_j^{(n)} = \xi_j / \sqrt{n}$ və $\alpha > 2$ olduqda $\mathbf{M} \left| \xi_1 \right|^\alpha < \infty$, $\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\pi_n = o(n^{-(\alpha-2)/2(\alpha+1)}) \quad (2)$$

olur. Əgər hər hansı t üçün $\mathbf{M} e^{t|\xi_1|} < \infty$ olarsa, onda

$$\pi_n = O(n^{-1/2} \ln n) \quad (3)$$

olur. (1), (2), (3) statistik qiymətləri yaxşılaşmayan statistik qiymətlərdir. $\{\xi_j^{(n)}\}$ asılı təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda da nəticələr alınmışdır. Alınmış statistik qiymətlərin hesablanılmasında *bir ehtimal fəzası metodu* əsas bir üsul kimi istifadə olunmuşdur. Lakin digər yanaşmalar da məlumdur.

π_n məsafəsinin sıfır yığılma sürətinin tədqiqi ilə yanaşı P_n və W paylanmalarının yaxınlaşmasının öyrənilməsinin digər istiqamətləri də vardır. Məs.,

$$\Delta_n(B) \equiv \left| \mathbf{P} \{ s_n \in B \} - \mathbf{P} \{ w \in B \} \right|,$$

$$\Delta_n(f, u) \equiv \left| \mathbf{P} \{ f(s_n) < u \} - \mathbf{P} \{ f(w) < u \} \right|$$

xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi məsələləri bunlardır, burada B , – $C[0, 1]$ fəzasının Borel alt çoxluğu, $f(\cdot)$, – $C[0, 1]$ -də həqiqi ölçülən funksionaldır. Əgər B Lipsits çoxluğu, yəni

$$\mathbf{P} \{ w \in (\partial B)^{(\varepsilon)} \} \leq C_B \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

olarsa, onda $\Delta_n(B)$ xarakteristikasının qiymətləndirilməsi üçün

$$\Delta_n(B) \leq (1 + C_B) \pi_n \quad (4)$$

bərabərsizliyi faydalıdır, burada $(\partial B)^{(\varepsilon)}$, – B çoxluğunun ∂B sərhədinin ε – ətrafıdır.

Analoji olaraq, əgər $f(\cdot)$ funksionalı

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq C_1(f) \|x - y\|,$$

$$x, y \in C[0, 1]$$

Lipsits şərtini ödəyərsə, $f(w)$ paylanması $C_2(f)$ konstantı ilə məhdud sıxlıq funksiyasına malik olarsa, onda

$$\Delta_n(f, u) \leq (1 + C_1(f) C_2(f)) \pi_n \quad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(4) və (5) bərabərsizlikləri və (1), (2) və ya (3) münasibətlərindən $\Delta_n(B)$ və $\Delta_n(f, u)$ üçün yaxşılaşdırıla bilən məlum statistik qiymətlər almaq olar. Məs., əgər B Lipsits çoxluğu varsa, onda

$$\Delta_n(B) \leq C(B, \alpha) (L_\alpha^{(n)})^{1/\alpha} \ln(1 + (L_\alpha^{(n)})^{1/\alpha}), \quad \alpha > 2$$

bərabərsizliyi doğrudur.

$$f(x) \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} x(t)$$

ve

$$f(x) = \int_0^1 g(x(t), t) dt$$

funksionalları üçün daha dəqiq statistik qiymətlər alınmışdır.

Əgər $B = \{x \in C[0, 1]: g_-(t) \leq x(t) \leq g_+(t), t \in [0, 1]\}$

$$|g_{\pm}(t+h) - g_{\pm}(t)| \leq Kh, \quad 0 \leq t \leq t+h \leq 1$$

Lipşits şərtini ödəyən sərhədləri olan zolaqdırsa, $m_n = n$,

$\xi_j = \sqrt{n} \zeta_j^{(n)}$ bütün $j = 1, \dots, n$ qiymətlərində eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\Delta_n(B) \leq C_{\text{abs}}(K+1) M \left| \xi_1 \right|^3 / n^{1/2}$$

berəbersizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [4] Саханенко А. И., «Тр. Ин-та математики СО АН СССР», 1985, т. 5, с. 27–44.

INVERSIYA « инверсия; inversion » – bax, Yerdəyişmə.

IONESKU TULÇI TEOREMİ « Ионеску Тулчи теорема; Ionescu Tulcea theorem » – ölçülən fəzaların hesabı hasilində şərti paylanmalar toplusu üzrə ehtimal ölçüsünün qurulmasının əsaslandırılması üçün teoremdir. $(S_n, \mathcal{A}_n)$ – ixtiyari ölçülən fəzalar, $p_n(x_0, x_1, \dots, dx_{n+1}) - (S_0 \times S_1 \times \dots \times S_n, \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ fəzasından $(S_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots$ fəzasına keçid ehtimalları (keçid funksiyası, stoxastik nüvə) olsun. [1]-də isbat olunmuş İ. T. t.-ndə $(\Omega, \mathcal{A}) = (S_0 \times S_1 \times \dots, \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \dots)$ – fəzaların sonsuz hasilində, hər bir $x \in S_0$ üçün ehtimal $P(x, d\omega)$ ehtimal ölçüsünün varlığı hökm olunur ki, hər bir n üçün bu ölçünün $(S_0 \times \dots \times S_n)$ fəzasına proyeksiyası

$$1_x(dx_0) p_0(x_0, dx_1) p_1(x_0, x_1, dx_2) \dots p_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, dx_n)$$

ölçüsü ilə üst-üstə düşür. $P(x, d\omega)$ ölçüsü x -ə görə $\mathcal{A}_0$ – ölçüləndir. İ. T. t.-ndən diskret zamanlı təsadüfi proseslərin trayektoriyaları fəzasında ölçünün qurulması üçün, o cümlədən, $t = 0, 1, 2, \dots$ diskret zamanlı Markov prosesi, həmçinin keçmişdən ixtiyari asılıqla verilən təsadüfi prosesin, məs., strategiyası ilə verilmiş diskret zamanlı idarəolunan təsadüfi prosesin trayektoriyaları fəzasında ölçünün qurulması üçün istifadə olunur. $P(x, d\omega)$ -nı S_0 -da ehtimal ölçüsü $\mu(dx)$ -ə görə integraldıqda, ilkin paylanması μ və keçid ehtimallarının verilmiş toplusu ilə təyin olunan təsadüfi prosesin ölçüsü alınır.

Əd.: [1] Ionescu Tulcea C. T., «Atti Acad. Naz. Lincei Rend.», 1949, v. 7, p. 208–11; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

400 İONESKU

İRREGULYAR NÖQTƏ « иррегулярная точка; irregular point » – bax, *Rəqulyar nöqtə* çoxluq üçün, *Limit teoremləri* Markov prosesində nisbətlər üçün.

İSTİQAMƏT QIZILGÜLÜ « направления роза; rose of direction » – bax, *Həndəsi proses*.

İSTİQAMƏTLƏNDİRİCİ STATİSTİKA « направляющая статистика; direction statistic » – bax, *Kanonik və natural parametrizasiya*.

İSTİQAMƏTLƏNMİŞ ÇOXLUQ « направленное множество; directed set » – bax, *Şəbəkə(s)i* ölçülərin.

İŞARƏ METODU, KORRELYASİON ANALİZİN « знаковый метод корреляционного анализа; sign method of correlation analysis » – bax, *Polyar korrelyasion funksiya*.

İŞARƏLƏR KRİTERİSİ « знаков критерий; sign test » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin (n ; $p = 1/2$) parametrləri binomial paylanma qanununa tabe olması haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *qeyri-parametrik kriteridir*. Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda

$$P\{\mu \leq k | n, 1/2\} = \sum_{i=0}^k C_n^i (1/2)^n = I_{0.5}(n-k, k+1),$$

$$k = 0, 1, \dots, n;$$

burada

$$I_z(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^z t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$B(a, b)$ beta funksiyadır. İ. k.-ne əsasən *mühümlük ölçüsü* $0 < \alpha \leq 0.5$ berəbersizliyini ödəyən α olan H_0 hipotezi

$$\min\{\mu, n-\mu\} \leq m$$

olduğu halda, qəbul olunmur, burada $m = m(\alpha, n)$ İ. k.-nin kritik qiymətidir və

$$\sum_{i=0}^m C_n^i (1/2)^n \leq \alpha/2, \quad \sum_{i=0}^{m+1} C_n^i (1/2)^n > \alpha/2$$

berəbersizliklərinin tamqiymətli həllidir. İ. k.-ni eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin naməlum kesilməz paylanmasının sıfır görə simmetrik olması, yeni ixtiyari həqiqi x ədədi üçün

$$P\{\xi_i < -x\} = P\{\xi_i > x\}$$

bərabərliyinin doğruluğu haqqında irəli sürülən H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq etmək olar.

Bu halda İ. k.

$$\mu = \sum_{i=1}^n \delta(\xi_i), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x > 0, \\ 0, & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$$

statistikasına əsaslanır, belə ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, μ statistikası (n ; $p = 0.5$) parametrləri binomial qanunla paylanır.

İ. k. asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin naməlum kəsilməz paylanması medianının ξ_0 -a bərabər olması haqqında irəli sürülən H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün də analogi istifadə olunur; bu halda $\eta_1 = \xi_1 - \xi_0, \dots, \eta_n = \xi_n - \xi_0$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün analogi olaraq ξ statistikası təyin olunur.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

İŞARƏVİ – İNVARİANT AİLƏ(si) **təsadüfi kəmiyyətlərin « законноинвариантное семейство случайных величин; sign – invariant family of random variables »** – **təsadüfi kəmiyyətlərin** ehl bir ailəsidir ki, bu ailədən olan təsadüfi kəmiyyətlərin işarələrinin ixtiyari qoyuluşunda onların paylanmaları dəyişmir. Daha dəqiq, ölçülən vektor fəzasında təsadüfi elementlərin sonlu $(X_1, \dots, X_n)$ ailəsi üçün, əgər $\theta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$ ədədlərinin ixtiyari toplusu üçün təsadüfi $(X_1, \dots, X_n)$ və $(\theta_1 X_1, \dots, \theta_n X_n)$ elementləri eyni qanunla paylanmış olarsa, bu ailə işarəvi-invariant ailə adlanır. Əgər təsadüfi elementlərin sonsuz $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailəsinin ixtiyari sonlu altailəsi l. - i. a. olarsa, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ l. - i. a. adlanır. l. - i. a.-ə aid geniş yayılmış misal simmetrik təsadüfi elementlər ailəsidir. Separabel normalanmış fəzədə təsadüfi elementlərin işarəvi – invariant ardıcılığından təşkil olunmuş sıra ehtimala görə yığılarsa, onda bu sıra sanki yəqin yığılır.

İŞARƏVİ KORRELYASIYA FUNKSIYASI « **знаковая корреляционная функция; sign correlation function** » – bax. *Polyar korrelyasion funksiya*.

İTKİ FUNKSIYASI « **потерь функция; loss function** » – Θ parametrik fəzasının həllər (qərarlar) fəzası D -yə düz hasil $\Theta \times D$ -də təyin olunan, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanma parametrlərinin əsl qiyməti θ -ya bərabər olduqda ($\theta \in \Theta$) qəbul edilən d qərarını ($d \in D$) qəbul edən statistik itkilərini ifadə edən (məyyyəni ölçü vahidlərlə) $L(\theta, d)$ funksiyasıdır. Ənənəvi l. f.-ləri:

θ vektor parametrləri ($\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$) qiymətləndirmə nəzəriyyəsində ($D = \Theta$) kvadratik itki funksiyası – $L(\theta, d) = \|\theta - d\|^2$ düsturu ilə ifadə olunur,

$H_i: \theta \in \Theta_i$, $i = 1, \dots, k$ hipotezlərini müqayisə məsələlərində 0–1 tipli itki funksiyası

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \theta \in \Theta_i, d = d_i, i = 1, \dots, k; \\ 1, & \text{əks halda} \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur; d_i , – H_i hipotezinin doğruluğu haqqında qərar.

Bax, *Statistik oyun*.

Əd.: [1] В а л ь д А., Статистические решающие функции, пер. с англ., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522.

İTO DÜSTURU « **Ито формула; Ito formula** », dəyişənləri əvəzetmə düsturu, – $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ trayektoriyaları sağdan kəsilməz, soldan limitləri olan **semimartinqal** və $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$ olduqda $(f(\zeta_t))_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı düsturla ifadəsidir:

$$f(\zeta_t) = f(\zeta_0) + \int_0^t f'(\zeta_s) d\zeta_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(\zeta_s) d\langle \zeta^c, \zeta^c \rangle_s + \sum_{s \leq t} [f(\zeta_s) - f(\zeta_{s-}) - f'(\zeta_s)(\zeta_s - \zeta_{s-})].$$

Sağ tərəfdə sonuncu cəmdəki toplananların sayı hesabıdan artıq deyildir, sıra 1 ehtimalla mütləq yığılır, $d\zeta$ üzrə inteqral ζ semimartinqalı üzrə stoxastik inteqraldır, $d\langle \zeta^c, \zeta^c \rangle$

üzrə inteqral, $\langle \zeta^c, \zeta^c \rangle$ prosesi üzrə Lebeq – Stilyes inteqralıdır. $\langle \zeta^c, \zeta^c \rangle$ prosesi m^2 submartinqalı üçün Dub – Meyer

aynılışındakı prosedir, burada m^c , – $\zeta = m + A$ semimartinqalının aynılışında martinqalın kəsilməz həddi m -dir, A isə məhdud variasiyalı prosedir. ζ Viner prosesi olduğu hal üçün $(\langle \zeta^c, \zeta^c \rangle_t \equiv t)$ olduğu halda) düsturu K. İto isbat etmişdir (bax, [1]).

Əd.: [1] И т о К., «Математика», 1959, т. 3, № 5, с. 131–41; [2] D e l l a c h e r i e C., M e y e r P. A., Probabilites et potentiel, pt. 2, ch. 5–8. Theorie des martingales, P., 1980.

İTO İFADƏSİ « **Ито представление; Ito representation** » – qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan, stoxastik kəsilməz, sanki yəqin sağdan kəsilməz asılı olmayan artımları $\zeta(t)$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı şəkildə ifadəsidir:

$$\zeta(t) = \zeta_c(t) + \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(\mu - \nu)(dt, dx) + \int_0^t \int_{|x| > 1} x \mu(dt, dx), \quad (*)$$

burada $\zeta_c(t)$ – asılı olmayan artımları kəsilməz Gauss prosedir, $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d))$ fəzasında təyin olunmuş $\mu(\omega, dt, dx)$ Puasson ölçüsündən asılı deyildir və bu ölçü $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları üzrə aşağıdakı kimi qurulmuşdur:

$$\mu(\omega, A) = \sum_{i \geq 0} I(\Delta \zeta(t) \neq 0) I((t, \Delta \zeta(t)) \in A),$$

$$\Delta \zeta(t) = \zeta(t) - \zeta(t-0), \quad \nu(A) = \mathbf{M} \mu(\omega, A).$$

Asılı olmayan artımlı prosesin strukturunun sıçrayışlar ölçüsü μ -nün köməyi ilə tədqiqi K. İto tərəfindən [2]-də təklif olunmuşdur; o, ilk dəfə (*) ifadəsinə yaxın bir ifadə almışdır.

Əd.: [1] Ито К., «Japan. J. Math.», 1942, v. 18, № 2, p. 261–301; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

İTO PROSESİ « Ито процесс; Ito process » –

$$\zeta_t = \zeta_0 + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t b(s, \omega) dw_s, \quad t \in [0, T] \quad (*)$$

şəklində *tesadüfi prosesdir*, burada w – hər hansı $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$ σ – cəbri ilə uzlaşdırılmış Viner prosesi, a və b , – $\mathbb{A}$ ilə uzlaşmış *elə proseslərdir* ki, $a(\cdot, \omega) \in L^1([0, T])$, $b(\cdot, \omega) \in L^2([0, T])$ münasibətləri sanki bütün ω -lar üçün ödənilir. Bu zaman Viner prosesi də $\mathbb{A}$ axını ilə uzlaşmış hesab olunur, *əgər* bundan başqa bütün $t \in [0, T]$ üçün $w(t)$ $\mathcal{A}_t$ – ölçülən olarsa, $h > 0$, $s \in [0, T - h]$ olduqda, $w(s + h) - w(s)$ artımının $\mathcal{A}_s$ σ – cəbrindən asılı olmama şərti ödənilir. Bu şərt ödənildikdə, (*) bərabərliyinin sağ tərəfindəki integral *İto stoxastik integralı* adlanır.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

İTO STOXAŞTİK İNTEQRALI « Ито стохастический интеграл; Ito stochastic integral » – *bax. Stoxastik integral.*

İTO – NİŞİO TEOREMİ « Ито – Нисно теорема; Ito – Nishio theorem » – *bax. Tesadüfi proses: tra-yektoriyaların rəqulyarlığı.*

İTO – VENTSEL DÜSTURU « Ито – Вентцеля формула; Ito – Wentzel formula » – *parametrdən asılı semimartinqalda dəyişən digər stoxastik differensialı mümkün semimartinqalla əvəz etdikdə, həmin semimartinqalın stoxastik differensialının hesablanması üçün düsturdur.*

$f(t, x)$ aşağıdakı şəkildə stoxastik differensialı mümkün olan

$$df(t, x) = \mathcal{F}(t, x) dt + H(t, x) dw(t)$$

semimartinqal olsun, burada $w(t)$, – $\{\mathcal{A}_t\}$ σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən Viner prosesi, $\mathcal{F}(t, x)$ və $H(t, x)$ – bu ailə ilə uzlaşan *tesadüfi (ölçülən) funksiyalardır*. $\xi(t)$, – $\{\mathcal{A}_t\}$ ailəsinə nəzərən

$$d\xi(t) = b(t) dt + \sigma(t) dw(t)$$

stoxastik differensialı mümkün olan semimartinqal olsun. Onda f , $\mathcal{F}$, H funksiyalarının hamarlığı haqqında təbii fərziyyələrle

$$\begin{aligned} df(t, \xi(t)) &= \mathcal{F}(t, \xi(t)) dt + \\ &+ \left\{ \sum_i H_i(t, \xi(t)) dw_i(t) + \sum_i b_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, \xi(t)) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma^i(t) \sigma^j(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(t, \xi(t)) + f(t, \xi(t)) \right\} \end{aligned}$$

402 İTO – VENTSEL

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i,j} \sigma^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} H_j(t, \xi(t)) \left\{ dt + \right. \\ &\left. + \sum_{i,j} \sigma^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, \xi(t)) dw_j(t) \right\} \end{aligned}$$

düsturu doğrudur.

Bu düstur *İto düsturunun* ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 390–93; [2] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1938, с. 208.

İYERARX PROSEDURLARI, TƏSNİFATIN « иерархические процедуры классификации; hierarchical classification procedures » – *təsnif olunan*

N sayda obyektlər arasında, yaxınlıq matrisi D əsasında obyektlərin ardıcıl birləşdirilməsindən ibarət prosedurlardır və bu matris ya obyekti xarakterizə edən dəyişənlərin qiymətləri əsasında yaxınlıq ölçülərinin hesablanması yolu ilə və ya eksperimentlərdən bilavasitə alınır. Prosedurun aparılmasından alınan nəticələr N obyektin hər dəfə daha böyük siniflərə və ya k l a s - t e r l e r e $N - 1$ sayda birləşmələrinin ardıcılığını qrafik təsvir edən dendogram şəklində göstərilir. Birinci addımda bir-birinə ən yaxın iki obyekt birləşdirilir. Bu zaman yaxınlıq matrisi dəyişir: bu matrisdən birləşdirilən obyektlərə qədər olan məsafələr xaric olunur və birləşmə nəticəsində alınan klasterə qədər məsafələr əlavə olunur, yeni matrisin dim. – ölçüsü bir vahid azalır. İkinci və sonrakı addımlarda təsvir olunan əməliyyatlar yalnız bir fərqlə təkrar olunur ki, yalnız obyektlər deyil, klasterlər də birləşə bilər. Birləşmə nəticəsində alınan klasterə qədər digər obyektlərdən və ya klasterlərdən olan məsafələr müxtəlif üsullarla hesablanırlar. Seçilmiş üsuldən asılı olaraq, alqoritmlər – «orta əlaqəli», «yaxın qonşu», «uzaq qonşu» və s. kimi alqoritmlərə ayrılır. Ən çox istifadə olunan orta əlaqəli alqoritmdir. Belə alqoritmde ixtiyari k klasterindən i və j klasterlərinin birləşməsindən alınan $i + j$ klasterinə qədər məsafə (yaxınlıq), bu klasterlərə daxil olan obyektlərin sayı uyğun olaraq, n_i və n_j olduqda

$$d_{k,i+j} = (n_i d_{ki} + n_j d_{kj}) / (n_i + n_j)$$

düsturu ilə hesablanır, burada d_{ki} və d_{kj} , – k klasterindən i və j klasterlərinə qədər olan məsafələrdir. T. i. p.-nin müxtəlif metodları mövcuddur.

Əd.: [1] Дюрбан Б., Оделл П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977.

İYNE « игла; needle » – *bax. İnteqral həndəsə.*

İZİNQ MODELİ « Изинга модель; Ising model » – *statistik mexanikanın ən sadə və ən yaxşı öyrənilmiş şəbəkəvari modelidir. d – ölçülü İ. m.-ndə dipollar d – ölçülü tamqiymətli şəbəkənin $t \in \mathbb{Z}^d$ düyünlərində yerləşir, vəziyyətlər fəzası $\{x_s\}$ isə iki $\{-1, +1\}$ elementlərindən ibarətdir. Ehtimal paylanması potensialı U olan Gibbs paylanmasıdır:*

$$U_{(s,t)}(x_s, x_t) = -J x_s x_t, \quad |s - t| = 1,$$

$$U_{(s)}(x_s) = -h x_s, \quad s, t \in \mathbb{Z}^d,$$

digər hallarda isə U sıfıra bərabərdir, h parametri x a r i c i m a q n i t s a h ə s i adlanır. Vəziyyətləri $\{y_s\}$ və potensialı

aşağıdakı münasibətlərlə verilən U olan i. m.-ni şəbəkəvari qaz kimi təsvir etmək olar:

$$\bar{U}_{(s,t)}(y_s, y_t) = -4I y_s y_t, \quad |s-t|=1, \quad s, t \in \mathbb{Z}^d$$

$$\bar{U}_{(s)}(y_s) = -(4dI + h)y_s, \quad y_s, y_t \in \{0, 1\}.$$

$I > 0$ olduqda ferromagnit i. m., $I < 0$ olduqda anti-ferromagnit i. m. adlanır.

Ferromagnit i. m. üçün Li – Yang teoremi və bir çox korrelyasion bərabərsizliklər doğrudur.

Ferromagnit i. m.-nin öyrənilməsinə [1]-dəki işlə başlanılmışdır, burada $d = 2$ halında $f_d(\beta, h = 0)$ limit sərhəd enerjisi üçün aşkar düstur alınmışdır. Aydın olmuşdur ki, f_2 funksiyası

$\beta_{cr}(2) = \ln(\sqrt{2} + 1)$ nöqtəsində 2-ci növ faza keçidində uyğun yeganə xüsusiyyətə malikdir. $d > 2$ olduqda $f_d(\beta, h = 0)$ funksiyalarının da heç olmasa bir kritik $\beta_{cr}(d)$ nöqtəsi olur. $\beta_d(\beta, h)$ funksiyasının h parametrindən asılılığı haqqında məlumdur ki (bax, [2]), $d \geq 2$, $\beta \gg 1$ olduqda $h = 0$ nöqtəsi mahiyyətə xüsusi nöqtədir. $d = 1$ olduqda $f_1(\beta, h)$ funksiyası aşkar hesablanır və $\beta > 0$, $-\infty < h < \infty$ dəyişənlərinin hər ikisi üzrə analitiktir.

Ferromagnit i. m.-nin Gibbs vəziyyətlərinin strukturu aşağıdakı kimidir. $h \neq 0$ olduqda və $h = 0$, $\beta < \beta_{cr}(d)$ olduqda bu modeldə yeganə Gibbs meydanı vardır. Bu vəziyyət üzrə orta qiymətlər $\langle \cdot \rangle^{h, \beta}$ kimi işarə olunur. Bu vəziyyət korrelyasiyaların azalma sürətinin eksponensial olması ilə səciyyəvidir.

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm} \langle \cdot \rangle^{h, \beta} = \langle \cdot \rangle_{\pm}^{\beta}$$

limitləri Gibbs vəziyyətləri olub, β ters temperaturunun qiymətinə və $\beta > \beta_{cr}(d)$ olduqda $h = 0$ halına uyğundurlar və üst-üstə düşümlər. Bundan başqa,

$$\langle x_0 \rangle_+^{\beta} = -\langle x_0 \rangle_-^{\beta} > 0, \quad \langle x_0 \rangle_+^{\beta} \rightarrow +1, \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

Bu hökm konturların daxil olması və Payerls metodunun (bax, [3] – [6]) tətbiq olunması vasitəsilə istifadə olunur. $\langle \cdot \rangle_+^{\beta}$, $\langle \cdot \rangle_-^{\beta}$ vəziyyətləri invariantdırlar və digər ixtiyari translyasion invariant vəziyyət bu vəziyyətlərin qəbəri xətti kombinasiyasıdır. $d = 2$, $h = 0$ olduqda qeyri – translyasion invariant vəziyyətlər yoxdur (bax, [7], [8]). $d \geq 3$, $h = 0$ olduqda «fazaların ayrılmasına» uyğun vəziyyətlər yaranır. Məs., əgər $\beta > \beta_r(d) \geq \beta_{cr}(d)$ olarsa,

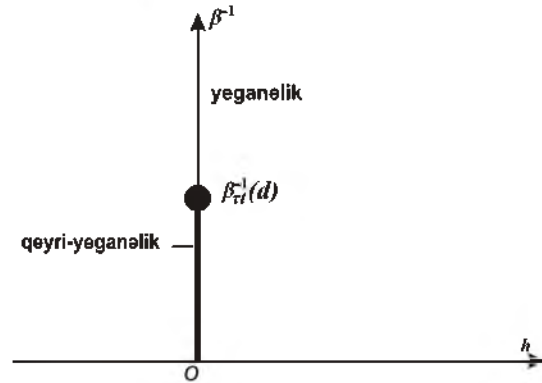
$$\langle x_i \rangle^{\pm \beta} \begin{cases} > 0, & i^{(1)} \geq 0, \\ < 0, & i^{(1)} < 0 \end{cases}$$

olan $\langle \cdot \rangle^{\pm \beta}$ vəziyyəti vardır. $d \geq 4$, $\beta_r(3) > \beta_{cr}(3)$ olduqda $\beta_r(d) = \beta_{cr}(d)$ olması hipotezi isbat olunmamışdır. $\beta_r(d)$ -nin qiyməti faza keçidinin kələ-kötürlənmə nöqtəsi (rus. точка ошершавливания) adlanır. i. m.-ndə bütün Gibbs

paylanmalar çoxluğunun strukturunun tam təsviri hələ ki, yoxdur (bax, [10]).

Kritik $\beta_{cr}(d)$ nöqtəsində də yeganə Gibbs vəziyyəti vardır. Lakin bu vəziyyət üçün korrelyasiyaların azalma sürəti yalnız üstlü olur. Fərz olunur ki, burada qeyri – trivial limit avtomodel təsadüfi meydanları yarana bilər.

Nəhayət, $d = 1$ olduqda i. m.-ndə Gibbs vəziyyəti parametrlərin ixtiyari qiymətləri üçün yeganədir. Ferromagnit i. m.-nin faza diaqramı $d \geq 2$ halı üçün şəkildə verilmişdir.



Antiferromagnit i. m. üçün Gibbs vəziyyətlərinin strukturu tamamilə fərqlidir.

Əd.: [1] Onsager L., «Phys. Rev.», 1944, v. 65, № 2, p. 117–49; [2] Isakov S. N., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 95, № 4, 427–43; [3] Peierls R., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1936, v. 32, № 3, p. 477–81; [4] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 209–30; [5] Griffiths R., «Phys. Rev.», 1964, v. 136A, № 2, p. 437–39; [6] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М, 1980; [7] Aizenman M., «Comm. Math. Phys.», 1980, v. 73, № 1, p. 83–94; [8] Higuchi Y., в кн.: Random fields, v. 1, Amst. – N. Y. – Oxf., 1981, p. 517–34; [9] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 619–39; [10] Dobrushin R. L., Shlosman S. B., «Sov. Sci. Rev.», 1985, v. C5, p. 53–195.

İZİNVERMƏ QABİLİYYƏTİ « разрешающая способность; rezolution » – bax. *Faktor eksperiment.*

İZOMORFİZMİ, DİNAMİK SİSTEMLƏRİN metrik « изоморфизм динамических систем метрический; metric isomorphism of dynamical systems » – iki dinamik sistemdən birinin faza fazasının digərinin faza fazasına uyğun gələn surətdə inikası ilə keçməsi xassəsidir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ və $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1)$ ölçülü fazalar olsun. Əgər ele $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega_1$ ölçülən inikası vardırsa ki,

$$1) \varphi \Omega = \Omega_1;$$

$$2) \varphi \text{ çevrilendir və } \varphi^{-1} \text{ ters çevirməsi ölçülendir,}$$

$$3) \varphi \text{ inikası } \mathbf{P} \text{ ölçüsünü } \mathbf{P}_1 \text{ ölçüsünə çevirir, yeni}$$

$$\mathbf{P}(\varphi^{-1}A_1) = \mathbf{P}_1(A_1) \text{ münasibəti ixtiyari } A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ üçün ödənilir,}$$

4) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də təsir edən $\{T^t\}$ dinamik sistemini (diskret və ya kəsilməz zamanlı) φ inikası $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1)$ -də təsir edən $\{T_1^t\}$ dinamik sistemine çevirirsə, yeni bütün t qiymətlərində və $\mathbf{P}$ – sanki bütün $\omega \in \Omega$ -lar üçün (sıfır ölçülü istisna çoxluq

t -dən asılı ola bilər) $\varphi T' \omega = T'_1 \varphi \omega$ olarsa, $\{T'\}$ dinamik sistemi $\{T'_1\}$ dinamik sistemine izomorfdur. Adətən, izomorfizm və mod 0 izomorfizm arasında fərq qoyulmur; mod 0 izomorfizminin tərifi qeyd olunan izomorfizmin tərifindən onunla fərqlənir ki, Ω , Ω_1 fəzaları burada uyğun olaraq, $\{T'\}$ – və $\{T'_1\}$ – invariant tam ölçülü ixtiyari çoxluqlarla əvəz olunur.

1), 3), 4) şərtləri ödənildikdə, $\{T'_1\}$ dinamik sistemi $\{T'\}$ dinamik sisteminin homomorf obrazı (və ya faktor sistemi) adlanır. İki sistemdən hər biri digərinin homomorf obrazı olarsa, bu sistemlər zəif homomorf sistemlər adlanır (bax, [1]).

Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası və ζ bu fəzada təyin olunmuş ixtiyari təsadüfi kəmiyyədirsə, onda ζ_t təsadüfi prosesinin realizasiyalan fəzasında yerindəyişmələr $\{T'\}$ sisteminin homomorf obrazı olan $\{T'_1\}$ dinamik sistemini əmələ gətirir, burada $\zeta_t(\omega) = \zeta(T'\omega)$, $\omega \in \Omega$. Bu sistemlər, yalnız və yalnız, o halda izomorfdurlar ki, bütün ζ_t -lərin doğurduğu σ – cəbr sıfır ölçülü çoxluq dəqiqliyi ilə $\mathcal{A}$ ilə üst-üstə düşsün. Belə hal, bir qayda olaraq, qiymətləri çoxluğu hesabı, bezi hallarda isə sonlu olan ζ təsadüfi kəmiyyətlərinin sinfində alınə bilini (bax, [2] – [4]). Əgər $\{T'\}$ sisteminin özü hər hansı dar mənada stasionar Y_t təsadüfi prosesinin realizasiyalan fəzasında yerindəyişmələr nəticəsində doğurulmuş olarsa, onda $\{T'\}$ -ni $\{T'_1\}$ -ə keçirən inikasa ζ_t prosesinin realizasiyalan ilə Y_t prosesinin realizasiyalanının yerindəyişməsi ilə uzlaşdırılmış kodlama (stasionar) kimi baxmaq olar. Əgər bu halda birqiymətli dekodlama sanki yəqin mümkün olarsa, onda izomorfizm vardır.

Dinamik sistemin homomorf obrazına keçdikdə, *erqodiklik*, *qanışdırma*, *çoxqat qanışdırma*, K – *qanışma* kimi xassələr saxlanılır, *entropiya* isə artır; ixtiyari *Bernulli yerindəyişməsinin* obrazı hər hansı Bernulli yerindəyişməsinə izomorfdur (bax, [5], [8]).

Dinamik sistemin xassələri və bu sistemin doğurduğu obyektlər (məs., entropiya və spektr kimi) izomorf sistemlərdə üst-üstə düşdüyündən, bunlar *metrik invariantlar* adlanır. D. s. m. i. problemi ondan ibarətdir ki, bu və ya digər sistemlər sinfi üçün tam və kifayət qədər aydın invariantlar toplusunu tapmaq mümkün olsun. Diskret spektrli dinamik sistem üçün belə toplu bir spektrdən (bax, [6]), Bernulli yerindəyişmələri üçün entropiyadan ibarət olur (bax, [7], [8]); dinamik sistemlərin bezi digər sinifləri üçün invariantların tam toplusu məlumdur (bax, [8] – [10]).

Əd.: [1] С в н а й Я. Г., «Доклады АН СССР», 1962, т. 147, № 4, 797–800; [2] Р о х л и н В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1963, № 1, с. 26–32; 1965, № 13, с. 68–72; [3] К r i e g e r W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 149, № 2, p. 453–64; [4] K r e n g e l U., «J. Math. Anal. and Appl.», 1971, v. 35, № 3, p. 611–20; [5] O r n s t e i n D., «Adv. Math.», 1970, v. 5, № 3, p. 349–64; [6] N e u m a n n J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 3, p. 587–642; [7] O r n s t e i n D., «Adv. Math.», 1970, v. 4, № 3, p. 337–52; [8] О р н с т е й н Д., Эргодическая теория. Случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [9] А б р а м о в Л. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 513–30; [10] В е р ш н и к А. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 2, с. 255–57.

404 İZOTROP

İZOTROP SONLU FƏZA « *изотропное конечное пространство; isotropic random space* » – bax, *Monoton paylanma*.

İZOTROP TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « *изотропное случайное множество; isotropic random set* » – bütün mümkün ola bilən ortoqonal çevirmələrdə paylanması dəyişməz qalan Evklid fəzasında *təsadüfi çoxluq*dur.

İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « *изотропное случайное поле; isotropic random field* » – müəyyən xarakteristikalan qeyd olunmuş nöqtə ətrafında fırlanmalar qrupuna nəzərən invariant olan Evklid fəzasında *təsadüfi funksiyadır*. Adətən, ilk iki moment – orta qiymət və kovariasiya funksiyasının invariantlığı fərz olunur. Koordinat başlanğıcı ətrafında ixtiyari g fırlanması üçün $MX(t) = MX(gt)$,

$MX(t)X(s) = MX(gt)X(gs)$ şərtlərini ödəyən $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ təsadüfi funksiyası *izotrop təsadüfi meydan* adlanır. İ. t. m.

$$X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{h(m,n)} X_m^t(r) S_m^t(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$$

berabərliyi ilə ifadə olunə bilini, burada $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, – t nöqtəsinin sferik koordinatları, $S_m^t(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, – m üstlü sferik harmoniklər, $h(m, n)$ belə harmoniklərin sayı, $S_m^t(r)$ ele qarşılıqlı qeyri – korrelyar təsadüfi proseslər toplusudur ki, bunlar üçün

$$MX_m^t(r)X_{m_1}^t(s) = b_m(r, s) \delta_m^{m_1} \delta_t^t \quad (*)$$

berabərliyi ödənilir, burada δ_t^j Kroneker simvolu, $b_m(r, s)$ isə $m \neq 0$ olduqda

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) b_m(r, s) < +\infty, \quad b_m(0, s) = 0$$

şərtlərini ödəyən müsbət-müəyyən nüvələr ardıcılığıdır. İ. t. m. müstəvidə

$$X(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \{X_k^1(r) \cos k\varphi + X_k^2(r) \sin k\varphi\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $X_k^l(r)$, $l=1, 2$ (*) şərtini ödəyən təsadüfi proseslər ardıcılığıdır. Bircins və izotrop təsadüfi meydan, çoxparametrlili Levi Braun hərəkəti İ. t. m.-lər sinfindədir.

Əd.: [1] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980.

İZOTROP TƏSADÜFİ PROSES « *изотропный случайный процесс; isotropic random process* » asılı olmayan artımlı – riyazi gözləməsi

sıfıra bərabər, kumulyantı $K(z)$ yalnız $|z| = \sqrt{\sum_{k=1}^l z_k^2}$ kəmiyyəti

yətidən asılı olan, $\mathbb{R}^d$ -dən qiymətlər alan bircins $X(t)$ *təsadüfi*

prosesidir, bu $X(t)$ -nin paylanması ixtiyari anda $\mathbb{R}^d$ -də koordinat başlanğıcı ətrafında fırlanmalara nəzərən *i n v a r i a n t* olması kimi anlaşılr. Kumulyantı $K(z) = -|z|^2$ olan d – ölçülü $X(t) = \{w_1(t), \dots, w_d(t)\}$ Viner prosesi, kumulyantı $K(z) = -c|z|^{\gamma/2}$, $c > 0$, $0 < \gamma < 2$ olan γ üstlü d – ölçülü dayanıqlı izotrop proses belə proseslərdəndir.

JİRİNA PROSESİ « Ирджины процесс; Jirina process » – vəziyyətləri çoxluğu $[0, \infty)$ olan, keçid operatorları ailəsi $t > 0$ müddəti ərzində şaxələnmə şərtini ödəyən, yeni

konvolyusiya əməlinə nəzərən birparametrik semi – qrup əmələ gətirən (parametr mənfi olmayan ədədlərin additiv semi – qrupuna aid ilkin vəziyyətdir) *Markov prosesidir*. M. Jirina tərəfindən, [1]-də daxil edilmiş bu proses bəzi seriyalar sxeminə adi şaxələnən proseslər üçün limit prosesidir. Bu istiqamətdə sonrakı ümumiləşmələr, qiymətləri ölçülər fəzasından olan, verilmiş fəzada şaxələnən təsadüfi proseslərdir.

Əd.: [1] J i r i n a M., «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, № 2, с. 292–313.

JORDAN AYRILIŞI « Жордана разложения; Jordan decomposition » – bax, *Atom*.

KAFİ STATİSTİK QIYMƏT « достаточная оценка; sufficient estimator » – kafi statistikanın funksiyası olan statistik qiymətdir. Kafi statistika tamamilə məlum olduğu halda K. s. q. özünün riyazi gözləməsinin ixtiyari qəbəri itki funksiyasına nəzərən optimal meylsiz statistik qiymətdir. K. s. q.-lər çoxluğu riskin qəbəri itki funksiyası ilə təyin olunduğu halda tam sinif təşkil edir.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

KAFİ STATİSTİKA « достаточная статистика; sufficient statistics » – şərti ehtimal paylanması baxılan ailənin bütün paylanmaları üçün eyni olan statistikadır. Beləliklə, K. s.-nin «hüduqları müstəvisində» araşdırılan ailənin paylanmaları bir-birindən fərqlənmir və ailənin parametri haqqında statistik nəticələr üçün K. s. əksər hallarda daha da mürəkkəb təbiətli ilkin müşahidədə olduğu qədər də informativdir. Bu fakt K. s. vasitəsilə müşahidələrin reduksiya prinsipini izah edir.

$\mathcal{P} = \{P_\theta\}$, x müşahidələrinin $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ölçülən çoxluğunda ehtimal paylanmaları ailəsi, M_θ , P_θ paylanmasına nəzərən şərti riyazi gözləmə olsun. Ailənin $\theta \in \Theta$ parametri ixtiyari təbiətlidir. Əgər $M_\theta[\varphi] < \infty$, $\theta \in \Theta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\varphi(x)$ funksiyası (ölçülən) üçün θ -dan asılı olmayan $\hat{\varphi}(t)$ funksiyası varsa ki,

$$M_\theta(\varphi|T) = \hat{\varphi} \quad (*)$$

bərabərliyi P_θ -ya nəzərən şərti yaqın (vahid ehtimalla) ödənilsin, $\theta \in \Theta$, onda t qiymətləri ölçülən $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ fəzasından olan T statistikasını $\mathcal{P}$ ailəsi üçün kafi statistika adlanır.

Əgər $\mathcal{P}$ ailəsi dominar ailədirsə, yeni bütün P_θ , $\theta \in \Theta$ paylanmaları hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə görə mütləq kəsilməzdirsə, onda T statistikasının məqbuluq kriterisi faktorizasiya teoremi adlanan teoremlə ifadə olunur (bax, [2]): T statistikasını, yalnız və yalnız, o halda $\mathcal{P}$ ailəsi üçün K. s.-dir ki, $p(x; \theta) = dP_\theta/d\mu$ sıxlıq funksiyaları μ -yə nəzərən sanki yaqın

$$p(x; \theta) = R(T(x); \theta)r(x)$$

şəklində faktorizasiya oluna bilsin.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində K. s.-nin rolu Rao – Blekuel teoremi (bax, [2]) ilə təyin olunur: əgər $g = g(x)$ parametrik $\gamma = \gamma(\theta)$ funksiyasının statistik qiymətidirsə və itki funksiyası $\rho(g, \gamma)$ birinci arqumentinə görə qəbərdirsə, onda $\bar{g} = \bar{g}(t)$ statistik qiyməti vardır ki,

$$M_\theta \rho(\bar{g}, \gamma(\theta)) \leq M_\theta \rho(g, \gamma(\theta)), \quad \theta \in \Theta$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Başqa sözlə, K. s.-dan asılı, itki funksiyası qəbəri statistik qiymətlər sinfi tam sinfidir. Dominar ailələr üçün R. Bahadur tərəfindən alınmış, K. s.-ni xarakterizə edən tərs nəticə də doğrudur (bax, [2]). Əgər $\mathcal{P} \neq T$ K. s.-na nəzərən tam sinfidirsə, onda Rao – Blekuel teoremi optimal meylsiz qiymətləndirmə məsələsini həll edir.

Fərz olunur ki, $\mathcal{P}$ dominar ailədir və Θ parametrik çoxluğu ədəd oxunun intervalıdır. Onda $\mathcal{P}$ ailəsi üzərinə qoyulan ümumi şərtlərlə

$$I(\theta) = M_\theta(\partial \ln p(x; \theta) / \partial \theta)^2$$

– Fişer informasiyası təyin etmək olar; bu informasiya $\rho(x; \theta)$ sıxlıq funksiyalı müşahidədir və o, T statistikasından olan (ixtiyari) $I_T(\theta)$ Fişer informasiyasına analojidir. $I_T(\theta) \leq I(\theta)$ bərabərsizliyi həmişə doğrudur, bu bərabərsizlikdə bütün $\theta \in \Theta$ qiymətləri üçün bərabərlik hali, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, T K. s. olsun (bax, [1]). Bu riyazi dəqiq xülasə müşahidədən alınmış bütün informasiyanın yalnız K. s.-də cəmləşməsi prinsipinin ifadəsidir.

Əgər $\mathcal{P}$ prodakt – ailədirsə, yeni P_θ sıxlıq funksiyası $f(y; \theta)$ hər hansı «birölçülül» ailədən olduqda, sıxlıq funksiyası

$$p(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta) \text{ olan } (y_1, \dots, y_n) = x \text{ tekrar seçiminin}$$

paylanmasıdır, onda təbii olaraq, $f(y; \theta)$ -lərlə maraqlanmaq gərəkdir ki, onlar üçün $\mathcal{P}$ -nin trivial olmayan K. s.-sı vardır (kobud deyimdə, seçimin özünə heç bir ətrafda ekvivalent olmayan).

Bəle vəziyyət rəqulyarlıq tipli müəyyən şərtlərdə, yalnız seçimlərin eksponensial paylanmaları ailəsindən olduğu halda mümkündür.

Verilmiş $\mathcal{P}$ ailəsi üçün K. s.-lər ailəsinin, əgər $T_1 = h(T_2)$ olarsa, $T_1 < T_2$ təbii qaydası ilə nizamlanması hökm deyildir. Lakin, əgər $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ Borel çoxluqları σ – cəbri Evklid fəzası, $\mathcal{P}$ ailəsi isə dominar olarsa, onda minimal K. s. həmişə vardır. Rəqulyar prodakt – ailə üçün minimal K. s. $T(x)$ həmişə hər hansı bir m qiymətində

$$T = \left(\sum_{i=1}^n t_1(y_i), \dots, \sum_{i=1}^n t_m(y_i) \right)$$

toplam statistikasını şəklində olur.

K. s. üçün qeyri – ortodoks təriflər də mövcuddur. Məs., Bayes tərfi: θ parametrinin aprior paylanması ixtiyari olduqda, aposterior paylanma yalnız T vasitəsilə x müşahidəsindən asılı olarsa,

T statistikası $\mathcal{P}$ ailəsi üçün K. s.-dir. Kifayət qədər ümumi şərtlərlə K. s.-nin Beyes tərifini (*) münasibətilə verilmiş tərifə ekvivalentdir.

Bütün riyazi statistika üçün fundamental K. s. konsepsiyası R. Fişerə məxsusdur. Onun tərəfindən «K. s.» termini daxil olunmuş, faktorizasiya teoreminin variantı C. Neyman (J. Neyman) tərəfindən 1935-də verilmişdir. İxtiyari dominar ailə üçün bu teorem C. Halmos (P. Halmos) və L. Sevic (L. Savage) tərəfindən 1949-da isbat edilmişdir. Minimal K. s. anlayışı E. Leman və H. Şeffe (H. Scheffé) tərəfindən daxil olunmuşdur. K. s.-nin tərifinə Beyes yanaşması A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur.

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [2] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Леман Э., Теория статистических оценок, пер. с англ., М., 1991; [5] Bahadur R. R., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 3, p. 490–97; [6] Fisher R. A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1922, v. 222, p. 309–68.

KAFİ STATİSTİKA minimal «достаточная статистика» минимальная; minimal sufficient statistic» – bax, *Minimal kafi statistika*.

KAFİ STATİSTİKA zəruri «достаточная статистика» необходимая; necessary sufficient statistic» – bax, *Minimal kafi statistika*.

KAFİ TOPOLOGİYA «достаточная топология; sufficient topology» – lokal qabarıq fəzaya qoşma fəzada aşağıdakı şərti ödəyən topologiyadır. Əgər sıfırda vahidə bərabər olan hər hansı müsbət müəyyən funksional bu topologiyada kəsilməz olarsa, onda bu funksional hər hansı ehtimal ölçüsünün xarakteristik funksionalıdır. T fəzasına qoşma T_k^* fəzasında nöqtəvi yığılma topologiyası $\sigma(T^*, T)$ K. t.-dir; bu topologiyada kəsilməz müsbət müəyyən funksiyalara sonluölçülül altfəzaların hesabı birləşmələrində toplanmış ölçülər uyğun olur. K. t.-ya digər misal T^* -da Sazonov topologiyasıdır. Əgər K. t. eyni zamanda zəruri topologiyadırsa, onda bu topologiya məqbul topologiyadır. Sonsuzölçülü Banax fəzasında K. t.-dan güclü topologiya yoxdur.

Əd.: [1] Вершик А. М., Судаков В. Н., «Записки научных семинаров ЛОМИ», 1969, т. 12, с. 7–67; [2] Муштарин Д. Х., Вероятности и топология в банаховых пространствах, Казань, 1989.

KAFİLİK statistik oyunlar nəzəriyyəsinə «достаточность» в теории статистических игр; sufficiency in the game theory» – yalnız kafi statistikələrdən istifadə olunması hesabına bütün həlledici qaydalar sinfinin daralması prinsipidir. P_θ paylanmasıdan olan X seçiminin verildiyi fəzə olunur, $\theta \in \Theta$, S , – θ parametri üçün kafi statistika olsun. Θ parametrik çoxluğunda ixtiyari Q aprior paylanması üçün aposterior paylanma seçimindən yalnız S vasitəsilə asılı olacaqdır. Beyes prinsipinə uyğun olaraq (bax, *Statistik oyun*), Beyes minimaks strategiyaları və tam sinif strategiyaları yalnız S -in funksiyaları olacaqdır. Bu onu ifadə edir ki, K. prinsipi istifadə edildikdə heç bir yaxşılaşmayan strategiya kenarda qalmır.

$w(\delta, \theta) = w(\delta - \theta)$ şəklində $w(\delta, \theta)$ itki funksiyası halında θ ($\Theta \subset \mathbb{R}^k$) parametrinin qiymətləndirilməsi məsələlərində K. prinsipinə tam sinfi effektiv xarakterizə etməyə imkan yaradan

daha konstruktiv forma vermək olar, burada $w(u)$, – $\mathbb{R}^k$ -da qabarıq funksiyadır.

Doğrudan da, aşağıdakı müddə doğrudur: ixtiyari $\theta^* = \delta(X)$ həlledici funksiyası (statistik qiyməti) üçün $\theta \in \Theta$ ixtiyari qiymətində θ^* -dan pis olmayan $\theta_S^* = M_\theta(\theta^*/S)$ statistik qiyməti vardır, yəni

$$M_\theta w(\theta_S^* - \theta) \leq M_\theta w(\theta^* - \theta).$$

Əgər S kafi statistikası tam statistika olarsa, onda meylsiz statistik qiymətlər sinfində müntəzəm ən yaxşı statistik qiyməti bir qiymətli olaraq təyin etmək olur.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Боровков А. А., Математическая статистика. (Дополнительные главы), М., 1984.

KAHAN DARALMA PRİNSİPİ «Кахана принцип сжатия; Kahane's contraction principle» – təsadüfi sıralar üçün müqayisə prinsipidir: əgər $\{X_k\}$ separabel Banax fəzası B -də asılı olmayan simmetrik təsadüfi elementlərin ardıcılığı, $\{\lambda_k\}$ heqiqi ədədlərin məhdud ardıcılığı olarsa və

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ sırası } B\text{-də sanki yəqin yığılarsa, onda } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k$$

$$\text{sırası da } B\text{-də sanki yəqin yığılır. Əgər } \left\{ \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1 \right\}$$

ardıcılığı B -də sanki yəqin məhdud olarsa, onda

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k, n \geq 1 \right\} \text{ ardıcılığı da } B\text{-də sanki yəqin məhdud-}$$

dur. Rademaher təsadüfi ardıcılıqları üçün K. d. p. təsadüfi Furiyе sıralarının məhdudluğu və yığılma problemlərinin öyrənilməsində, [1]-də C. – P. Kahan tərəfindən müəyyən olunmuşdur və sistemlik tətbiq olunmuşdur. Sonralar bu prinsip bir çox alimlər tərəfindən dəqiqləşdirilmiş və ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [2] Hoffman-Jørgensen J., «Studia Math.», 1974, v. 52, № 2, p. 159–89.

KALİBRLƏMƏ MODELİ statistik mexanikanın «калибровочная модель» статистической механики; gauge model of statistical mechanics» – kvant Evklid kalibrənmə meydanının ələ şəkəbəvari modelidir, bu modelin öyrənilməsi münasib Gibbs statistik ansamblının qurulmasına və öyrənilməsinə kimi sadələşdirilir.

Kompakt kalibrəlmələr qrupu G ilə verilən şəkəbəvari kalibrənmə meydanının konfigurasiyası d -ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəkəbəsinin (istiqamətlənmiş) τ tillərinin çoxluğunda təyin olunmuş, G qrupundan qiymətlər alan və $g_{-\tau} = g_{\tau}^{-1}$ şərtini ödəyən $g = \{g_{\tau}\}$ funksiyasına deyilir, burada $(-\tau)$, – $\mathbb{Z}^d$ -nin τ istiqamətinə əks istiqamətli tildir. Tillərin ixtiyari sonlu çoxluğu Λ üçün Λ -da «meydan əməli» (rus. «действие поля») $S_{\Lambda}(g)$

$$S(g) = \sum_{p \in \mathcal{P} \subset \Lambda} f(g_p) \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada cəmlənmə $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin iki ölçülü (istiqamətlənmiş) p üzəri üzrə aparılır, bu üzərin sərhədləri Λ -dandır, $g_p = \prod_{\tau \in \partial p} g_\tau$ və burada vurma əməli p üzünün sərhədinin hər hansı birindən keçilmək qaydası ilə aparılır, f funksiyası isə G -nin qoşma elementlərinin siniflərində sabit olan, $f(g) = f(g^{-1})$ şərtini ödəyən, G -də verilmiş funksiyadır. (*)-nın köməyi ilə meydanın konfigurasiyalının fəzası Ω -da

$$d\mu_\Lambda / d\mu^0 = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp \{-S_\Lambda(g)\}$$

düsturu vasitəsilə sonlu Gibbs paylanması μ_Λ daxil olunur, burada $d\mu^0 = \prod_\tau dx_\tau$, - G -də normalanmış χ Haar ölçüsünün hesabı sayda ekzemplarlarının (bütün istiqamətlənmiş tiller üzrə) hasilidir, Z_Λ normalayıcı vuruqdur. $\mu = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda$ - limit Gibbs paylanması (*) əməli ilə kalibrənmə meydanını təyin edir (Yanq - Mills meydanı; bax, [1]). (*)-dakı f funksiyası əksər hallarda

$$f(g) = (\chi_\alpha(g) + \chi_\alpha(g^{-1})) / e^2$$

şəklində seçilir, burada χ_α , - G qrupunun hər hansı «ən sadə» ayrılmayan ifadəsinin xarakteridir, e - qarşılıqlı təsir konstantıdır (Vilson əməli; bax, [2]).

Oxşar surətdə daha ümumi kalibrənmə modelləri daxil olunur və araşdırılır; belə modellər «materiya meydanı» $\varphi = \{\varphi_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ olan kalibrənmə meydanının qarşılıqlı təsirini təsvir edir, burada φ_x , - G qrupunun $g \rightarrow U_g$ ifadəsi təsir edən hər hansı $\mathcal{M}$ fəzasından qiymətlər alır (Higgs modeli; bax, [1]).

Yanq - Mills kalibrənmə meydanı (həm də Higgs modelindəki meydanlar)

$$g_\tau \rightarrow \gamma(x_1) g_\tau \gamma^{-1}(x_2), \quad \tau = \{x_1, x_2\}$$

kalibrənmə çevirmələrinin qrupuna nəzərən invariantdır (və $\varphi_x \rightarrow u_{\gamma(x)} \varphi_x$ Higgs modellərində «materiya meydanı» üçün, burada $\gamma = \{\gamma_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ - qiymətləri G -dən olan $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində ixtiyari funksiyadır. Kalibrənmə modellərində çox zəngin simmetriya qrupu olduğundan, bir sıra spesifik hadisə və proseslər baş verir ki, bunlar kvant meydan nəzəriyyəsinin bir çox fiziki effektlərini izah etməyə imkan verir.

Əd.: [1] Зайлер Э., Калибровочные теории, пер. с англ., М., 1985; [2] Wilson K., «Phys. Rev.», D., 1974, v. 10, № 8, p. 2445-59; [3] Osterwalder K., Seiler E., «Ann. Phys.», 1978, v. 110, № 2, p. 440-71.

KALMAN FİLTİRİ « Калмана фильтр; Kalman filter » - $w = \{w(t), t \geq 0\}$ Viner prosesi üzrə

$$d\zeta_t = a(t)\zeta_t dt + b(t)dw_t$$

İto stoxastik tənliyi ilə təyin olunan $\zeta = \{\zeta_t, t \geq 0\}$ Gauss diffuzion prosesində ζ_t (prosesin t anındakı qiyməti - təsadüfi

kəmiyyət) üçün $Y_s, 0 \leq s \leq t$ müşahidələri üzrə kvadratik orta mənada statistik $\pi_t(Y)$ qiymətinin hesablanması algoritimidir. Bu halda $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ prosesi üçün w Viner prosesindən asılı olmayaraq, $\tilde{w} = \{\tilde{w}_t, t \geq 0\}$ Viner prosesi üzrə

$$dY_t = A(t)\zeta_t dt + B(t)d\omega_t$$

İto differensialı təyin oluna bilinir və $t > 0$,

$$\int_0^t [|a(s)| + A^2(s)] ds < \infty, \quad \inf_{t \geq 0} B^2(t) > 0$$

olması şərti ilə ζ ilə birgə Gauss prosesidir; bu proses

$$d\pi_t(Y) = a(t)\pi_t(Y)dt + \frac{P_t A(t)}{B^2(t)} [dY_t - A(t)\pi_t(Y)dt] \quad (1)$$

$$\frac{dP_t}{dt} = 2a(t)P_t + b^2(t) - \frac{P_t^2 A^2(t)}{B^2(t)} \quad (2)$$

tənlikləri vasitəsilə verilir. (1) və (2) tənlikləri

$$\left. \begin{aligned} \pi_0(Y) &= \mathbf{M}\zeta_0 + \frac{\text{cov}(\zeta_0, Y_0)}{\text{cov}(Y_0, Y_0)} (Y_0 - \mathbf{M}Y_0), \\ P_0 &= \text{cov}(\zeta_0, \zeta_0) - \frac{\text{cov}^2(\zeta_0, Y_0)}{\text{cov}(Y_0, Y_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərlə həll olunur; burada $\frac{0}{0} = 0$,

$$P_t = \mathbf{M}(\zeta_t - \pi_t(Y))^2.$$

Əgər ζ və Y prosesləri qeyri - korrelyar geniş mənada w və $\tilde{w}$ Viner prosesləri ilə qeyd olunmuş münasibətlərlə təyin olunarsa və ζ_0, Y_0 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikinci momentləri vardırsa, $w, \tilde{w}$ ilə qeyri - korrelyardılarsa, onda (1) və (2) tənlikləri (3) başlanğıc şərtlərlə yalnız kvadratik orta mənada xətti optimal $\pi_t(Y)$ statistik qiymətini və qiymətləndirmənin kvadratik orta xətası P_t -ni təyin edir.

Bax, Xətti filtr.

Əd.: [1] Калман Р. Е., Бьюси Р. С., «Технич. механика», сер. Д., 1961, № 1, с. 123-41; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

KALMAN - BYUSİ METODU « Калмана - Бьюси метод; Kalman - Busy method » - bax, Təsadüfi proses; filtrasiya.

KANAL additiv küylü « канал с аддитивным шумом; channel with additive noise » - ötürülən signal üzərinə asılı olmayan additiv maneə əlavə olunan rabitə kanalıdır. Additiv küylü K. halında çıxış signalı $\tilde{Y} = Y + Z$ şəklində olur, burada Y - giriş signalı, Z isə additiv küy adlanan Y -dən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdir (və ya təsadüfi prosesdir). Adətən, Z təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmış olduğu halda (və ya Z Gauss prosesi olduqda) additiv küylü K.-lara baxılır. Çoxötürücü additiv küylü K. və çoxgirişli additiv küylü K. analoji təyin olunur. Məs., çoxgirişli (ikigirişli) additiv küylü K. $\tilde{Y} = Y_1 + Y_2 + Z$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada Y_1 və Y_2 uyğun olaraq kanalın birinci və ikinci girişindəki siqnallar, Z isə Y_1 və Y_2 -dən asılı olmayan additiv küydür.

Əd.: [1] Галлер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

KANAL asimmetrik « **канал** асимметрический; asymmetric channel » – bax, *Genişyaımlı kanal*.

KANAL asinxron « **канал** асинхронный; asynchronous channel » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

KANAL birgins « **канал** однородный; homogeneous channel » – bax, *Kanal yaddaşsız*.

KANAL çoxgirişli « **канал** множественного доступа; multiple access channel » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

KANAL çoxkomponentli « **канал** многокомпонентный; multiterminal channel » – bax, *Çoxkomponentli kanal*.

KANAL çoxtərəfli « **канал** многосторонний; multiway channel » – bax, *Çoxtərəfli kanal*.

KANAL determinik « **канал** детерминированный; deterministic channel » – bax, *Determinik kanal*.

KANAL genişyaımlı « **канал** широковещательный; broadcast channel » – bax, *Genişyaımlı kanal*.

KANAL ikilik simmetrik « **канал** двоичный-симметричный; binary symmetric channel » – bax, *İkilik simmetrik kanal*.

KANAL interferens « **канал** интерференционный; interference channel » – bax, *İnterferens kanal*.

KANAL kvant rabitə kanalı « **канал** связи квантовый; quantum communication channel » – bax, *Kvant rabitə kanalı*.

KANAL(1) Gauss « **канал** гауссовский; Gaussian channel » – bax, *Gauss kanalı*.

KANAL qeyri-antisipativ « **канал** безпредвосхищения; non-antisipativ channel » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*.

KANAL; ötürücülük qabiliyyəti « **канал**; пропускная способность; channel capacity » – rabitə kanalı ilə informasiyanın maksimal mümkün sürətlə ötürülmə imkanlarının nəzəri – informasiya ölçüsü olub, kanalın əsas xarakteristikalarından biridir.

Bax, *Ötürücülük, qabiliyyəti kanalı*.

KANAL pisləşmiş « **канал** ухудшенный; degraded channel » – bax, *Genişyaımlı kanal*.

KANAL; rabitə kanalı « **канал** связь; communication channel » – real rabitə kanalının riyazi təsvirində istifadə edilən nəzəri – informasiya terminidir, yeni fiziki rabitə xətti və ötürücüdən qəbulediciyə qədər siqnallar yayılan mühit ilə məlumatların ötürücüdən qəbulediciyə qədər ötürülməsi üçün texniki qurğular toplusudur. Rabitə K. informasiyanın ötürmə nəzəriyyəsində baxılan informasiyanı ötürmə sistemlərinin əsas tərkib hissələrindən biridir.

Ötürücüdən qəbulediciyə informasiyanın bir istiqamətdə ötürülməsi üçün bir ötürücü və bir qəbuledicidən ibarət rabitə K.: – iki $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$, $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ ölçülən fəzalar (yeni uyğun olaraq ötürülən və qəbuledici ilə qəbul edilən siqnallar fəzaları); qeyd olunmuş $A \in S_{\tilde{\mathcal{X}}}$ üçün $S_{\mathcal{X}} - \sigma$ – cəbrinə nəzərən ölçülən və qeyd

olunmuş $x \in X$ üçün $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ fəzasında ehtimal ölçüsü olan $Q(x, A)$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in S_{\tilde{\mathcal{X}}}$ keçid funksiyası və $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ fəzasında bütün ehtimal ölçülərinin fəzasında V altçoxluğundan ibarət toplusu ilə verilir. $Q(x, A)$ funksiyası ötürücünün ötürdüyü siqnalın x olduğu şərtinə nəzərən qəbuledicinin qəbul etdiyi siqnalın şərti paylanmasıdır, V isə ötürücü ilə ötürülən siqnalın paylanmasına məhdudiyyəti təyin edir. Her hansı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş X və $\tilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ fəzalarından qiymətlər alırsa və ixtiyari $A \in S_{\tilde{\mathcal{X}}}$ üçün $P\{\tilde{X} \in A | X = x\} = Q(x, A)$ şərti ehtimalı sanki yəqin və X -in paylanması V çoxluğundandır, X və $\tilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri (Q, V) kanalı ilə əlaqəlidir, deyilir.

Təbiiq məsələlərdə ən çoxu $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}})$ $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş ölçülən funksiyalar fəzaları olduqda və bu funksiyalar ölçülən silindrik çoxluqların doğurduğu σ – cəbrləri ilə verilmiş hər hansı $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər aldığı hallardakı rabitə R. k.-larına baxılır. Bu halda

$$(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}}) = (\mathcal{Y}[a, b], S_{\mathcal{Y}[a, b]}),$$

$$(\tilde{\mathcal{X}}, S_{\tilde{\mathcal{X}}}) = (\tilde{\mathcal{Y}}[a, b], S_{\tilde{\mathcal{Y}}[a, b]})$$

işarələmələri qəbul edilir və $[a, b]$ parçasında kəsilməz zamanlı rabitə K.-na baxılır;

$$Y = \{Y(t), t \in [a, b]\} \quad \text{və} \quad \tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t), t \in [a, b]\},$$

uyğun olaraq $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi proseslərdir, $Y(t)$ və $\tilde{Y}(t)$ isə uyğun olaraq t anında ötürülmüş və qəbul olunmuş siqnal kimi interpretasiya olunur.

Analoji olaraq, diskret zamanlı K.-ın giriş və çıxışında siqnallar, komponentləri uyğun olaraq $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ və $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan $Y_k^n = (Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_n)$ və $\tilde{Y}_k^n = (\tilde{Y}_k, \tilde{Y}_{k+1}, \dots, \tilde{Y}_n)$ təsadüfi vektorlardır, bu halda Y_j və $\tilde{Y}_j$, – $j\tau$ anında ötürülmüş və qəbul edilmiş siqnallardır və $\tau = \text{const}$ rabitə K. ilə ötürülən iki ardıcıl siqnal arasındakı müddətdir.

Bir çox hallarda yarısonsuz və ya $(-\infty, \infty)$ intervalında kəsilməz və ya diskret t zamanlı rabitə K.-larına da baxılır.

R. k.-ları Q şərti paylanmalarının növündən və V -nin məhdudiyyətlərindən asılı olaraq müxtəlif siniflərə bölünür (bax, məs., *Kanal yaddaşsız, Kanal sonlu yaddaşlı, Kanal*

vəziyyətləri sayı sonlu və s.). Rabitə K.-nin əsas xarakteristikası kanalın ötürücülük qabiliyyətidir ki, bu isə rabitə K. ilə ötürülən informasiyanın mümkün ola bilən maksimal sürəti ilə xarakterizə olunur (bax, *Informasiyanın ötürülmə sürəti*).

Rabitə K.-nin yuxarıda verilmiş tərifinin informasiya ötürülməsinin daha ümumi və mürekkəb sistemlərinə uyğun müxtəlif ümumiləşmələri mümkündür (bax, məs., *Kanal tərs rabitəli. Çoxkomponentli kanal, Çoxtərəfli kanal*).

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] Файнштейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [7] Чисар Н., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., 1985; [8] Шеннон К., Работы по теории и кибернетике, пер. с англ., 1963, с. 243–332.

KANAL semideterminik «kanal полудетерминированный; semideterministic channel» – bax, *Semideterminik kanal*.

KANAL sıfır xətalı «kanal с нулевой ошибкой; zero-error channel» – bax, *Ötürücülük qabiliyyəti kanalın*.

KANAL simmetrik «kanal симметричный; symmetric channel» – bax, *Simmetrik kanal*.

KANAL sinxron «kanal синхронный; synchronous channel» – bax, *Çoxgirişli kanal*.

KANAL sinxronizasiya xətəli «kanal с ошибками синхронизации; channel with synchronization» – giriş və çıxışında siqnalların düzgün növbələnmədiyi *rabite kanalıdır*. Diskret zamanlı rabitə kanalları üçün simvolların əvəz olunması, itməsi və yerdəyişmələri – sinxronizasiya xətəlidir. Əgər kanalın çıxışında $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ ardıcılığı –

$j < i$ olduqda $n' = n - c$ və $c = 1$, $\tilde{y}_j = y_j$;

$j > i$ olduqda $c = -1$, $\tilde{y}_i = a$, $\tilde{y}_{i+1} = y_i$, $\tilde{y}_{j-c} = y_j$

– şərtlə alınmışdırsa, onda rabitə kanalının girişində daxil olan $(y_1, \dots, y_n)$ ardıcılığında i -ci simvol ötürülərkən itmişdir. (a simvolu ilə əvəz olunma) deyilir.

Sinxronizasiya xətalı olan K. modellərindən ən sadəsi – t , $t = 0, 1, \dots$ anlarında y_i simvolunun ötürülməsi ilə əlaqədar p , p_- və p_+ ehtimalları ilə bir-birindən asılı olmayan üç hadisədən biri baş verə bilər: simvol düzgün ötürülmüşdür; simvol itmişdir; $p(a)$ ehtimalı ilə a simvolu əvəz olunmuşdur, belə ki, y_i simvolu $t+1$ anında ötürülməlidir. Sinxronizasiya xətalı K.-in daha mürekkəb modelləri ötürüləcək elementin (simvolların yerdəyişmələrinə uyğun) təsadüfi seçilməsi olan, ötürüləcək simvolun təhrifi olan modellərdir.

Sinxronizasiya xətalı K. bir riyazi model kimi elm və texnikanın müxtəlif sahələrində: rabitə texnikasında, informatikada, EHM şəbəkələrində və s. sahələrdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Стинфлер Дж. Дж., Теория синхронной связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Левенштейн В. И., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 845–848; [3] Мизин И. А., Богатырев В. А., Кулешов А. П., Сети коммутации пакетов, М.,

1986; [4] Добрушин Р. Л., «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, № 4, с. 18–36; [5] Стамблер С. З., «Проблемы передачи информации», 1970, т. 6, № 3, с. 43–49.

KANAL sonlu yaddaşlı «kanal с конечной памятью; finite-memory channel» – ixtiyari t və $\tau > 0$ qiymətlərində $[t, t + \tau]$ intervalındakı çıxış siqnallarının statistik xassələri yalnız $(t - m, t + \tau)$ intervalındakı giriş siqnallarından asılı olan rabitə *kanalıdır*, bu şərtlə ki, zaman uzunluğu heç olmasa m -ə bərabər intervallarda baxılan hadisələr, şərti asılı olmayan hadisələr (girişdə siqnalların verilmiş qiymətlərində) olsun. Aşağıda diskret zamanlı K. halında sonlu yaddaşlı stasionar kanalın ciddi tənfi verilir, bu kanalın giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq $Y = (\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots)$ və $\tilde{Y} = (\dots, \tilde{Y}_{-1}, \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \dots)$ təsadüfi ardıcılıqlardır, Y_i və $\tilde{Y}_i$

komponentləri uyğun olaraq $\mathcal{Y}$ və $\tilde{\mathcal{Y}}$ sonlu çoxluqlardan qiymətlər alırlar. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilsə, belə kanal sonlu yaddaşlı kanal adlanır:

1) ele qeyd olunmuş müsbət m ədədi vardır ki, ixtiyari $y'_i = y_i \in \mathcal{Y}$, $i = t - m, \dots, t + n - 1$ qiymətlərində ixtiyari $\tilde{y}_t, \dots, \tilde{y}_{t+n-1} \in \tilde{\mathcal{Y}}$ qiymətləri üçün

$$\begin{aligned} P\{\tilde{Y}_t = \tilde{y}_t, \dots, \tilde{Y}_{t+n-1} = \tilde{y}_{t+n-1} | Y_k = y_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots\} = \\ = P\{\tilde{Y}_t = \tilde{y}_t, \dots, \tilde{Y}_{t+n-1} = \tilde{y}_{t+n-1} | Y_k = y'_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots\} \end{aligned}$$

bərabərliyi ödənilir;

2) $j + m < k$ olduqda ixtiyari $\tilde{y}_t, \dots, \tilde{y}_j \in \tilde{\mathcal{Y}}$ və $\tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_n \in \tilde{\mathcal{Y}}$ qiymətləri və bütün $y_l \in \mathcal{Y}$, $l = \dots, -1, 0, 1, \dots$ qiymətləri üçün

$$\begin{aligned} P\{\tilde{Y}_t = \tilde{y}_t, \dots, \tilde{Y}_j = \tilde{y}_j; \\ \tilde{Y}_k = \tilde{y}_k, \dots, \tilde{Y}_n = \tilde{y}_n | \tilde{Y}_l = \tilde{y}_l, l = \dots, -1, 0, 1, \dots\} = \\ = P\{\tilde{Y}_t = \tilde{y}_t, \dots, \tilde{Y}_j = \tilde{y}_j | \tilde{Y}_l = \tilde{y}_l, l = \dots, -1, 0, 1, \dots\} \times \\ \times P\{\tilde{Y}_k = \tilde{y}_k, \dots, \tilde{Y}_n = \tilde{y}_n | \tilde{Y}_l = \tilde{y}_l, l = \dots, -1, 0, 1, \dots\} \end{aligned}$$

münasibəti doğrudur.

Verilmiş kanal üçün yuxarıdakı iki şərti ödəyən ən kiçik m kəmiyyəti kanalın yaddaş (müddəti) kəmiyyəti adlanır, $m = 0$ olduqda, yəni sıfır yaddaşlı kanal, sadəcə yaddaşsız kanal adlanır.

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Файнштейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [3] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 17–75.

KANAL stasionar «kanal стационарный; stationary channel» – bax, *Kanal yaddaşsız*.

KANAL; şəbəkə «kanal; сеть; network of channel» – bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi*.

KANAL tərs rabitəli «kanal с обратной связью; channel with feedback» – kanalın girişində ixtiyari zaman anında, kanalın bu ana qədər çıxışında alınmış siqnallar haqqında müəyyən informasiya məlum olan *rabite kanalıdır*; bu informasiya kanalla ötürüləcək növbəti siqnalın seçilməsində istifadə oluna bilər. Yaddaşsız kanal üçün tərs rabitəli K.-in ötürücülük qabiliyyəti elə bu kanalın tərs rabitəli olmadığı haldakı ötürücülük qabiliyyəti ilə üst-üstə düşür. Ümumi halda tərs rabitenin olması K.-in ötürücülük qabiliyyətini

artıra bilər. Bezi çoxtərəfli K.-lar üçün ters rabitenin olması ötürücülük qabiliyyəti oblastını həтта yaddaşsız halda belə artırır. Ters rabitenin olması, yüksək effektiv kodlama və dekodlama alqoritmlərinin qurulmasını olduqca sadələşdirməyə imkan verir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 464–87; [2] Турин Д.ж., Лекции о цифровой связи, пер. с англ., М., 1972.

KANAL vəziyyətləri sayı sonlu «канал с конечным числом состояний; channel with finite number of states» – mümkün vəziyyətləri sayı sonlu kanalın t anında çıxış signalının statistik xassələri elə bu anda kanala giriş signalı və əvvəlki zaman anında kanalın vəziyyəti ilə təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Vəziyyətləri sayı sonlu K.-ı sonlu ehtimal avtomatı ilə verilmiş kanal kimi də təyin etmək olar.

Diskret zamanlı, giriş və çıxış signalının komponentlərinin qiymətlərinin sonlu fəzaları $\mathcal{Y}$ və $\mathcal{Z}$ olan vəziyyətləri sayı sonlu bircins kanalın ciddi tərifinə aşağıda şərh olunmuşdur.

$\mathcal{P}$ – K.-ın vəziyyətləri çoxluğu adlanan sonlu çoxluq olduqda, $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$, $y \in \mathcal{Y}$, $\tilde{y} \in \mathcal{Z}$, $s', s'' \in \mathcal{P}$ funksiyalarının və $\{p_{s_0}, s_0 \in \mathcal{P}\}$ ehtimal paylanmalarının verildiyi fərz olunur. $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$ funksiyası k anında vəziyyətləri sayı sonlu K.-ın çıxışında $\tilde{y}$ signalının alınacağı və kanalın s'' vəziyyətinə keçəcəyinin, y signalı ötürüldüyü halda və əvvəlki $(k-1)$ anında kanalın s' vəziyyətində olması şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır. $\{p_{s_0}, s_0 \in \mathcal{P}\}$ paylanması başlanğıc 0 anında K.-ın başlanğıc vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır. $Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n)$ funksiyasının aşağıdakı bərabərliklərlə rekurrent olaraq təyin olunduğu fərz edilir:

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n) = \sum_{s_{n-1} \in \mathcal{P}} q(y_n, s_{n-1}; \tilde{y}_n, s_n) Q_{n-1}(y^{n-1}, s_0; \tilde{y}^{n-1}, s_{n-1})$$

$$Q_1(y, s_0; \tilde{y}, s_1) = q(y, s_0; \tilde{y}, s_1),$$

$$y^n = (y_1, \dots, y_n), \quad y^{n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1}), \quad y_i \in \mathcal{Y},$$

$$\tilde{y}^n = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n), \quad \tilde{y}^{n-1} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}),$$

$$\tilde{y}_i \in \mathcal{Z}, \quad i = 1, \dots, n; \quad s_k \in \mathcal{P}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n) = \sum_{s_n \in \mathcal{P}} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n)$$

olsun. Onda vəziyyətləri sayı sonlu K.-ın n uzunluqlu parçasının keçid funksiyası $Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \mathbf{P}\{\tilde{Y}^n = \tilde{y}^n | Y^n = y^n\}$ ixtiyari n üçün tərifə görə

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \sum_{s_0 \in \mathcal{P}} p_{s_0} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ və $\tilde{Y}^n = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ K.-ın giriş və çıxış signalının n uzunluqlu parçasıdır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации, пер. с англ., М., 1974; [2] Вольфовиц Д.ж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967.

KANAL yaddaşsız «канал без памяти; memoryless channel» – ixtiyari qeyd olunmuş anda signalın çıxışdakı statistik xassələri yalnız bu anda girişdə ötürülmüş signal ilə təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Giriş və çıxış signalı $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ və $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots)$ təsadüfi ardıcılıqları olan diskret zamanlı rabitə K.-ı üçün

$$\mathbf{P}\{\tilde{Y}_1 = \tilde{y}_1, \dots, \tilde{Y}_n = \tilde{y}_n | Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\} = \mathbf{P}\{\tilde{Y}_1 = \tilde{y}_1 | Y_1 = y_1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\{\tilde{Y}_n = \tilde{y}_n | Y_n = y_n\}$$

bərabərliyi ixtiyari n və ixtiyari $y_i \in \mathcal{Y}$, $\tilde{y}_i \in \mathcal{Z}$, $i = 1, \dots, n$ qiymətlərində ödənilsə, belə kanal yaddaşsız kanal adlanır, burada Y_i və $\tilde{Y}_i$, $i, j = 1, 2, \dots$ uyğun olaraq $\mathcal{Y}$ və $\mathcal{Z}$ sonlu çoxluqlarından qiymətlər alır. «Yaddaşsız» sözü o faktı vurğulayır ki, kanal növbəti ötürmədə əvvəlki ötürmələrin nəticələrini xatırlamır. Əgər $\mathbf{P}\{\tilde{Y}_i = \tilde{y}_i | Y_i = y_i\}$ şərti ehtimalları i -dən asılı olmazsa, yaddaşsız K. *stasionar* (və ya bircins) yaddaşsız kanal adlanır. Stasionar yaddaşsız K. sonlu və ya hesabi $\mathcal{Y}$ və $\mathcal{Z}$ sonlu çoxluqları ilə

$$\|q(y, \tilde{y})\|, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad \tilde{y} \in \mathcal{Z}$$

keçid matrisləri ilə tamamilə təyin olunur, burada $q(y, \tilde{y}) = \mathbf{P}\{\tilde{Y}_i = \tilde{y} | Y_i = y\}$, $i = 1, 2, \dots$.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

KANONİK KƏMİYYƏT «каноническая величина; canonical variable» – bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi*.

KANONİK KORRELYASIYA «каноническая корреляция; canonical correlation» – təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunun xətti funksiyaları arasında, korrelyasiya əmsallarının maksimal mümkün qiymətlərlə xarakterizə olunan *korrelyasiya*dır. K. k. nəzəriyyəsində $\xi_1, \dots, \xi_s$ və $\xi_{s+1}, \dots, \xi_{s+t}$, $s \leq t$ təsadüfi kəmiyyətləri xətti olaraq kanonik təsadüfi kəmiyyətlər adlanan elə $\eta_1, \dots, \eta_s$ və $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+t}$ kəmiyyətlərinə çevrilir ki:

1) η_i təsadüfi kəmiyyətlərinin hamısının riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası 1-ə bərabərdir, 2) iki çoxluqdan hər birində η_i kəmiyyətləri korrelyar deyildir, 3) birinci çoxluqdan ixtiyari η kəmiyyəti ikinci çoxluqdan bir təsadüfi kəmiyyətlə korrelyardır, 4) müxtəlif çoxluqlardan olan η təsadüfi kəmiyyətləri arasında sıfırdan fərqli korrelyasiya əmsalları maksimal qiymətə malikdir.

$s = 1$ olduğu xüsusi halda, K. k. ξ_1 və $\xi_2, \dots, \xi_{s+t}$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında toplam korrelyasiyadır. Kanonik təsadüfi kəmiyyətlərə çevirmə kvadratik formaların kanonik şəkə çevrilməsi cəbri məsələsinə uyğundur. K. k. analiz edildiyi zaman ola bilər ki, iki çoxluq arasında qarşılıqlı əlaqə bir neçə kanonik təsadüfi kəmiyyət arasındakı korrelyasiya ilə tamamilə ifadə oluna bilsin.

Bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi*.

Əd.: [1] Hotelling N., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический

анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

KANONİK KORRELYASIYA ƏMSALLARI « канонические коэффициенты корреляции; canonical correlation coefficients » – $\xi_1, \dots, \xi_s$ və $\xi_{s+1}, \dots, \xi_{s+t}$, $s \leq t$ təsadüfi kəmiyyətlərinin iki çoxluqlarının xətti funksiyaları –

$$U = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_s \xi_s \quad \text{və} \quad V = \beta_1 \xi_{s+1} + \dots + \beta_t \xi_{s+t}$$

arasındakı korrelyasiya əmsallarının maksimal qiymətləridir; U və V – uyğun olaraq, $\xi_1, \dots, \xi_s$ və $\xi_{s+1}, \dots, \xi_{s+t}$ təsadüfi kəmiyyətləri toplusunu üçün kanonik təsadüfi kəmiyyətlərdir (bax, Kanonik korrelyasiya). $MU = MV = 0$ və $MU^2 = MV^2 = 1$ şərtləri daxilində U və V arasında korrelyasiya əmsalının maksimal qiymətinin təyin edilməsi məsələsi Laqranjin qeyri-müəyyən vuruqlar metodu ilə həll olunur. K. k. ə.

$$\begin{vmatrix} -\lambda \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda \Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0$$

tənliyinin $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0$ şərtini ödəyən kökləridir; Σ_{11} və Σ_{22} – uyğun olaraq, $\xi_1, \dots, \xi_s$ və $\xi_{s+1}, \dots, \xi_{s+t}$ kəmiyyətlərinin kovariasion matrisləridir. $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ isə 1-ci və 2-ci çoxluğun kəmiyyətləri arasındakı kovariasiyalar matrisidir. Bu halda tənliyin r -ci kökü bu çoxluqlar arasındakı r -ci kanonik korrelyasiya əmsalı adlanır və bu əmsal ehtimalən kanonik təsadüfi kəmiyyətlərin xətti funksiyaları cütü $U^{(r)}$ və $V^{(r)}$ arasındakı korrelyasiya əmsallarının maksimal qiymətinə bərabərdir ki, bu kəmiyyətlərin hər birinin dispersiyası 1-ə bərabərdir və hər biri U və V -nin ilk $r-1$ sayda cütü ilə korrelyar deyildir. $U^{(r)}$ və $V^{(r)}$ xətti funksiyalarının əmsalları $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \dots, \alpha_s^{(r)})^T$, $\beta^{(r)} = (\beta_1^{(r)}, \dots, \beta_t^{(r)})^T$

$$\begin{vmatrix} -\lambda \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda \Sigma_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = 0$$

tənliyini $\lambda = \lambda_r$ şərtlə ödəyir.

KANONİK KORRELYASIYALAR ANALİZİ « канонических корреляций анализ; canonical correlation analysis » – riyazi gözleməsi sıfır bərabər, kovariasion matrisi $c = M(x x^T)$ olan $x^T = (x_1^T, x_2^T)$ təsadüfi vektorunun altvektorları $x_1^T = (x_1, \dots, x_n)^T$ və $x_2^T = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$ arasında qarşılıqlı əlaqənin tədqiqidir. K. k. a.-də kanonik kəmiyyətlər adlanan kəmiyyətlər hər bir altçoxluğun elementlərinin xətti kombinasiyaları olan $\xi = x_1^T a$ və $\eta = x_2^T b$ və bunlar arasında cütlük korrelyasiya əmsalı, yəni

$$\rho = \frac{M(\xi \eta)}{\sqrt{M(\xi^2)M(\eta^2)}} = \frac{a^T c_{12} b}{\sqrt{(a^T c_{11} a)(b^T c_{22} b)}} \quad (1)$$

412 KANONİK

kanonik korrelyasiyası təyin olunur, burada c_{11} və c_{22} – qrupdaxili kovariasiyalar matrisləri, c_{12} isə qruplar arasındakı kovariasiyalar matrisi, yəni x vektorunun iki altvektora bölgüsünə uyğun olan bloklardır (c matrisinin blokları). $a^T = (a_1, \dots, a_n)$ və $b^T = (b_1, \dots, b_m)$ əmsallar ehtimalən təyin olunur ki, (1)-in aqreqat əlamətləri arasında (1) korrelyasiyası maksimal olsun (ξ və η -nin normalanmış dispersiyaları 1-ə bərabər olmaq şərtlə). Onda (1) kanonik korrelyasiyası

$$\rho = a^T c_{12} b - \frac{\lambda}{2} (a^T c_{11} a - 1) - \frac{\mu}{2} (b^T c_{22} b - 1) \rightarrow \max \quad (2)$$

funksionalı şəklində ifadə olunur, burada λ və μ – qeyri-müəyyən Laqranj vuruqlarıdır. (2)-nin həllindən, $\lambda = \mu$ və

$$a = \frac{1}{\lambda} c_{11}^{-1} c_{12} b, \quad b = \frac{1}{\lambda} c_{22}^{-1} c_{21} a \quad (3)$$

münasibətləri alınır, burada $c_{21} = c_{12}^T$. (3)-lə bağlı olaraq

$$c_{11}^{-1} c_{12} c_{22}^{-1} c_{21} a = \lambda^2 a, \quad c_{22}^{-1} c_{21} c_{11}^{-1} c_{12} b = \lambda^2 b \quad (4)$$

xüsusi qiymətləri üçün məsələlər qoyulur.

(1) və (2)-nin ekstremal qiymətləri $\rho_i = \sqrt{\lambda_i^2} = a_i^T c_{12} b_i$ -yə bərabərdir. $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_n^2$ nizamlanmasında kanonik korrelyasiyanın birinci əmsalı $\rho_1 = \sqrt{\lambda_1^2}$ -ə bərabər olur, uyğun a_1 və b_1 vektorları isə ilk ξ_1 və η_1 kanonik kəmiyyətlərini yaradır. İkinci və sonrakı kanonik korrelyasiyalar əvvəlki kombinasiyalar ilə korrelyar olmayan və korrelyasiya əmsalı qiymətə sonrakı olan, qalmış qrupdaxili korrelyasiyanı izah edən, xətti kombinasiyalar ilə təyin olunur (bax, Kanonik korrelyasiya). Sıfır bərabər olmayan kanonik korrelyasiyaların sayı $\min(n, m)$ -dən artıq deyildir. Praktiki kovariasiyalar matrislərinin seçimi analoqları istifadə olunur, (4) məsələlərindən dim. – ölçüsü kiçik olan bir məsələ həll olunur, (3) üzrə vektorların ikinci toplusu tapılır. K. k. a.-in bir sıra modifikasiyaları işlənmişdir.

Əd.: [1] Hotelling N., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Van den Wollenberg A. L., «Psychometrika», 1977, v. 42, № 2, p. 207–19; [4] Дубровский С. А., Прикладной многомерный статистический анализ, М., 1982; [5] Липовецкий С. С., «Заводская лаборатория», 1984, № 10, с. 50–56.

KANONİK KORRELYASIYALAR VƏ KƏMİYYƏTLƏR « канонических корреляций и величин; canonical correlations and variables » – bax, Təsədüfi proses; kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər.

KANONİK ÖLÇ(ÜL)MƏ « каноническое измерение; canonical measurement » – bax, Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.

KANONİK PARAMETR « канонический параметр; canonical parameter », eksponensial paylanmalar ailəsi parametri. – bax, Kanonik və natural parametrizasiya.

KANONİK PAYLANMA « каноническое распределение; canonical distribution » – Gibbs paylanmasının sinonimidir. Hissəciklərin sayı qeyd olunduqda, şərtli paylanma kimi təyin olunan kiçik kanonik ansamblda Gibbs paylanması və hissəciklərin sayı təsadüfi olan böyük kanonik ansamblda təyin olunan Gibbs paylanması bir-birilə fərqli paylanmalardır.

KANONİK SPEKTRAL TƏNLİK « каноническое спектральное уравнение; canonical spectral equation » – simmetrik təsadüfi matrislər üçün limit spektral $\mu(x)$ funksiyasının Stilyes çevirməsi üçün tənlikdir.

$$\Xi_n = \left\| \xi_{ij}^{(n)} - \alpha_{ij}^{(n)} \right\|$$

simmetrik matrisinin eyni ehtimal fəzasında verilmiş, $\xi_{ij}^{(n)}$, $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ – asılı olmayan təsadüfi elementlərinin ehtimalla görə sonsuz kiçik olduqları və $K_n(u, v, z)$ funksiyalarının $K(u, v, z)$ funksiyasına zəif yığıldığı fərz olunur, burada

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \int_{|x| < \tau} x dP \{ \xi_{ij}^{(n)} < n \},$$

$\tau > 0$ – sabit ədəd, $i/n \leq u < (i+1)/n$, $j/n \leq v < (j+1)/n$ olduqda

$$K_n(u, v, z) = n \int_{-\infty}^z \frac{y^2}{1+y^2} dP \{ \xi_{ij}^{(n)} - \alpha_{ij}^{(n)} < y \};$$

$K(u, v, z)$, $-0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ oblastında u və v üzrə kəsilməz, z üzrə məhdud variasiyalı və azalmayan funksiyadır,

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(\lambda_k - x),$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0 \text{ olduqda,} \\ 1, & y < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və λ_k , $-\Xi_n$ matrisinin məxsusi qiymətləridir. Onda 1 ehtimalla $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ münasibəti təsadüfi olmayan spektral $\mu(x)$ funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində ödənilir, $\mu(x)$ -in Stilyes çevirməsi –

$$\int (1+itx)^{-1} d\mu(x) = \lim_{a \downarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 x dG_a(x, z, t) dz$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $G_a(x, z, t)$, $-x \in \mathbb{R}$ görə ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $|t| < \infty$) paylanma funksiyasıdır, kəsilməzlik nöqtələrində

$$G_a(x, z, t) = P \{ [1 + t^2 \xi_a(G_a(\cdot, \cdot, t), z)]^{-1} < x \}$$

kanonik spektral tənliyini ödəyir, $\xi_a(G_a(\cdot, \cdot, t), z)$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün Laplas çevirməsi tapılır (bax, [1]).

K. s. t.-in həlli vardır və bu həll ixtiyari qeyd olunmuş $0 \leq z \leq 1$, $|t| < \infty$ qiymətlərində x üzrə ($0 \leq x \leq 1$) paylanma funksiyası olan $G(x, z, t)$ funksiyalarının L sinfində yeganədir və ixtiyari tam $k > 0$ və $0 \leq z \leq 1$ üçün

$$\int_0^1 x^k dG(x, z, t)$$

funksiyaları t üzrə (ola bilər ki, sıfır nöqtəsi istisna olmaqla) analitik funksiyalardır.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

KANONİK VƏ NATURAL PARAMETRİZASIYA « каноническая и натуральная параметризация; canonical and mean – value parameterization », eksponensial ehtimal paylanmaları ailəsinin K. və n. p.-sı – ailənin bir-birilə Lejandr çevirməsi ilə bağlı, affin çevirməsi dəqiqliyiylə təyin olunmuş fəzasında μ ölçüsü ilə dominarlanmış ehtimal paylanmaları $\{P_s, s \in \text{Dom } \gamma \subset \mathbb{R}^n\}$ ailəsi γ , əgər $dP_s/d\mu$ sıxlıq funksiyaları ailəsi ilə

$$p(\omega, s) = p_0(\omega) \exp[s^i q_i(\omega) - \Psi(s)] \quad (1)$$

kanonik şəkildə ifadə olunarsa, bu ailə – kanonik parametri s olan istiqamətləndirici statistikalar $q_1(\omega), \dots, q_n(\omega)$ olan eksponensial ailə adlanır, burada aşağı və yuxarı indeksləri üst-üstə düşən indekslər üzrə cəmlənmə fərz olunur, $\Psi(s)$ – normalaşdırıcı bölünən loqarifmidir, yəni

$$\Psi(s) = \ln \int p_0(\omega) \exp[s^i q_i(\omega)] \mu(d\omega) \quad (2)$$

və $\text{Dom } \gamma$ (2) ifadəsindəki integralın sonlu olduğu bütün $s \in \mathbb{R}^n$ qiymətlərindən ibarətdir.

$\text{Dom } \gamma$ çoxluğu hökmən qabarıqdır, belə ki, analitik $\Psi(s)$ funksiyası qabarıqdır (bax, [1]), lakin ola bilər ki, $\dim \text{Dom } \gamma < n$ və hətta $\text{Dom } \gamma = \emptyset$, $\dim \text{Dom } \gamma = n$ və $l(\omega) = 1$, $q_1(\omega), \dots, q_n(\omega)$ statistikaları mod μ xətti asılı deyildirlər, odur ki, sıxlıq funksiyası ilə kanonik parametr arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. (1) ifadəsində bağlı $t = (t_1, \dots, t_n)(s)$ vektorunun komponentləri

$$t_j(s) = \int_{\Omega} q_j(\omega) P_s(d\omega) = (\partial/\partial s^j) \Psi(s) \Big|_{s=s} \quad (3)$$

olarsa, t vektoru natural parametr adlanır. $\Psi(s)$ ciddi qabarıq olduğundan s və t arasında uyğunluq int $\text{Dom } \gamma$ -da qarşılıqlı birqiymətlidir. Natural parametrizasiyanın statistik mənası aşağıdakı teoremdən aydın olur: əgər $P_s \{ \cdot \}$ ehtimal paylanmalarının hamar ailəsinin $t = (t_1, \dots, t_n)$ parametri üçün $q(\omega)$ effektiv statistik qiyməti varsa, onda ehtimal paylanmaları ailəsi (2) kanonik istiqamətləndirici $q(\omega) = (q_1(\omega), \dots, q_n(\omega))$

statistikası olan eksponensial ailedir, t (3) ifadəsinə görə $q(\omega)$ -ya uyğun ailenin natural parametrizasiyasıdır (bax, [2], [3]).

$0 \in \text{Dom } \gamma$ olduqda (bunu kanonik parametrizasiyanın yerini-dəyişməsi ilə almaq olur: $s \rightarrow s' = s - \sigma$) sıxlıq funksiyalarının standart ifadəsi daha sadə, yeni

$$p(\omega, s) = p(\omega, 0) \exp[s^i q_i(\omega, 0) - I(\mathbf{P}_0 : \mathbf{P}_s)] \quad (4)$$

olur, burada normalaşdırıcı bölənün loqarifmi $\mathbf{P}_s$ -ə nəzərən $\mathbf{P}_0$ -ın nisbi entropiyası ilə üst-üstə düşür və $q_i(\omega, 0) = (\partial/\partial s^i) \ln p(\omega, s)|_{s=0}$ isə ilkin $q_i(\omega)$ -lardan sabit toplananla fərqlənir.

Eksponensial ailələr statistik həlledici qaydalar kateqoriyasına nəzərən və şərti paylanmalara keçidə nəzərən ekvivalentdir. K. və n. p. yalnız kovariasion matrisi və parametri – riyazi göz-ləmələr vektoru qeyd olunmuş normal paylanmalar üçün üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Л е м а н Ж., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] B a r n d o r f f - N i e l s e n O., Information and exponential families in statistical theory, N. Y., 1979; [4] A m a r i S., Differential-geometrical methods in statistics, N. Y. – L., 1985; [5] Х и н ч и н А. Я., Математические основания статистической механики, М. – Л., 1943; [6] У л е н - б е к Д. Ж., Ф о р д Д. Ж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

KANTOR PAYLANMASI « Кантора распределение; Cantor's distribution » – $(0, 1)$ intervalında toplanmış kəsilməz *sinqulyar paylanmadır* və

$$\eta = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i} / 2^{2i}$$

təsədüfi kəmiyyətinin paylanması kimi təyin olunur, burada ξ_i – qarşılıqlı asılı olmayan, $1/2$ ehtimalı ilə 0 və 1 qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$$\eta^* = (3/2) \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i-1} / 2^{2i-1}$$

təsədüfi kəmiyyətinin paylanması da K. p.-dir.

$A \neq 0$ və B sabit olduqda $A\eta + B$ tipli təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları da Kantor paylanması tipli olub, $\mathbb{R}^1$ -in sonlu intervalında toplanmış kəsilməz *sinqulyar paylanma*-lardır.

$(0, 1)$ -də müntəzəm paylanmanı iki K. p.-nin kompozisiyası

kimi ifadə etmək mümkündür: $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i / 2^i$ təsadüfi kəmiyyəti

$(0, 1)$ -də müntəzəm paylanma qanunu ilə paylanmışdır, lakin bununla belə $u = \eta/3 + 2\eta^*/3$.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

414 KANTOR

KANTOROVİÇ METRİKASI « Канторовича метрика; Kantorovich metric » – aşağıdakı konstruksiya ilə təyin olunan sadə *ehtimal metrikasıdır*. $(X, \mathcal{L})$ – ölçülən fəza, d isə X -də ele metrika olsun ki, d -yə nəzərən Borel çoxluqlarının P çoxluğu $(X, \mathcal{L})$ -də bütün ehtimal ölçülərinin fəzası olsun. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in P$ olduqda **Kantoroviç metrikası** (məsafəsi)

$$\mu(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf_{X \times X} \int d(x_1, x_2) H(dx_1, dx_2) \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada infimum uyğun marginal ölçüləri $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ -yə bərabər olan, $(X, \mathcal{L}) \times (X, \mathcal{L})$ -də bütün H ehtimal ölçülərinin çoxluğu üzrə götürülür. Beləliklə, μ metrikası (1) münasibətindəki integralla ifadə olunan mürekkəb metrikaya nəzərən *minimal metrikadır*. Bu məsafə xətti proqramlaşdırmanın nəqliyyat məsələsi terminlərində aşağıdakı interpretasiya ilə bağlı L. V. Kantoroviç tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. Əgər $\mathbf{P}$ – yüklərin yola salınma məntəqələrində bunların paylanması, $\mathbf{Q}$ – yüklərin çatdığı məntəqələrdəki paylanması, $d(x_1, x_2)$ – x_1 məntəqəsindən x_2 məntəqəsinə daşınma xərcini xarakterizə edərsə, onda μ optimal daşınma planı üçün daşınma xərcidir. Zəif əlavə məhdudiyyətlər qoyulduqda Kantoroviç məsafəsi digər şəkildə aşağıdakı formada yazılır:

$$\mu(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sup \left| \int_X f(x) (\mathbf{P}(dx) - \mathbf{Q}(dx)) \right|, \quad (2)$$

burada supremum $|f(x) - f(y)| \leq d(x_1, x_2)$, $x, y \in X$ şəklində Lipsitz şərtini ödəyən, X -də verilən bütün məhdud f funksiyaları üzrə götürülür. Əgər X – kompakt və $\mathcal{L}$ – X -də Borel σ – cəbrdirsə, μ metrikası *zəif yığılma* topologiyasını doğurur. Bu hal üçün (2) ifadəsini L. V. Kantoroviç [1]-də isbat etmişdir. Hal-hazırda (2) müddəası əksər hallarda **Kantoroviç teoremi** adlandırılır, bu teorem olduqca daha ümumi fərziyyələrlə isbat olunmuşdur (bax, [4], [2]).

μ -nün qiymətinin aşkar tapılması mümkün olan hallar çox deyildir. Məs., əgər d – $\mathbb{R}^n$ -də Evklid fəzası və $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$ olarsa, onda $\mu(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = a$. Əgər $d(x, y) = I(x \neq y)$ olarsa (I indikator funksiyasıdır), onda μ *tam variasiya metrikası* olur. Bununla belə Kantoroviç məsafəsi bir çox ehtimal konstruksiyaları üçün çox faydalı olmuşdur, belə ki, onu yuxarıdan asanlıqla qiymətləndirmək olur: buna görə hər hansı H ölçüsünü vermək kifayətdir. Məs., bu məsafə Gibbs təsadüfi meydanlarının yeganəliyi kriterlərində tətbiq olunur (bax, [3]).

K. m. bir çox müəlliflər tərəfindən istifadə olunmuşdur və yəni-dən kəşf olunmuşdur. Bununla bağlı olaraq, riyazi ədəbiyyatda müxtəlif adlarla ifadə olunur.

Əd.: [1] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–29; [2] Рачев С. Т., «Теория вероятности и примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 625–53; [3] Dobruschin R. L., Shlosman S. B., «Progr. in Phys.», 1985, v. 10, p. 347–70; [4] Szulga A., «Теория вероятности и примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 401–05.

KANTOROVİÇ MƏSAFƏSİ « Канторовича расстояние; Kantorovich distance » – bax, *Kantoroviç metrikası*.

KANTOROVİÇ TEOREMİ « Канторовича теорема; Kantorovich theorem » – bax, *Kantorovich metrikası*.

KARATEODORİ TEOREMİ ölçülər haqqında « Каратеодори теорема о мере; Caratheodory theorem » – bax, *Davamlılaşma, ölçünün*

KARLEMAN KRİTERİSİ « Карлемана критерий; Carleman criterion » – bax, *Qüvvət üstlü momentlər problemi*.

KARLEMAN ŞƏRTİ « Карлемана условие; Carleman condition » – bax, *Moment*.

KARUNEN TEOREMİ « Карунена теорема; Karhunen theorem » – təsadüfi funksiyaların ümumiləşmiş *spektral ayrılışı* haqqında teoremdir: $m(S)$, $S \in \mathcal{B}$ – hər hansı $(A, \mathcal{B}, m)$ ölçülən fəzasında mənfi olmayan ölçü, $\{\psi(t; a)\}$, $t \in T$ parametridən asılı, $L^2(m)$ fəzasından olan, $a \in A$ dəyişənin funksiyaları ailəsi olduqda, $B(t, s) = \mathbf{M}X(t)\overline{X(s)}$ – ixtiyari $T = \{t\}$ çoxluğunda verilmiş kompleks $X(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasion funksiyası

$$B(t, s) = \int_A \psi(t; a) \overline{\psi(s; a)} m(da) \quad (1)$$

şəklində ifadə olunarsa, onda $X(t)$ təsadüfi funksiyası

$$X(t) = \int_A \psi(t; a) Z(da) \quad (2)$$

stoxastik integral şəklində ifadə oluna bilər, burada $Z(da)$, A -da ele təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M} Z(S_1) \overline{Z(S_2)} = m(S_1 \cap S_2)$. Tərsinə, $X(t)$ təsadüfi funksiyası (2) şəklində ifadə olunarsa, onda onun korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ (1) şəklində ifadə oluna bilinir. $Z(S)$ təsadüfi ölçüsünün qiymətləri $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyasının qiymətlərinin xətti H_X örtüyünə, yalnız və yalnız, o halda aiddir ki, $\{\psi(t; a), t \in T\}$ funksiyalar ailəsi $L^2(m)$ -də sıx aile olsun.

Bu teorem K. Karunene məxsusdur (bax, [1], həm də [2] – [4]). Bu teoremin çoxölçülü ümumiləşməsi vardır (bax, [2], [3]). K. t.-nin digər ümumiləşməsi təsadüfi funksiyaların ifadə olunması haqqında *Kramer teoremidir*.

Misallər. 1) $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ – diskret zamanlı ele stasionar təsadüfi proses olsun ki, $|\tau| \geq n$ olduqda $\mathbf{M}X(t+\tau)\overline{X(t)} = B(\tau) = 0$. Bu halda

$$B(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-\tau} b_{k+\tau} \overline{b_k}, & \tau = 0, 1, \dots, n \text{ olduqda,} \\ 0, & \tau > n \text{ olduqda} \end{cases} \quad (3)$$

münasibətlərini ödəyən $b_0, b_1, \dots, b_n$ kompleks ədədləri həmişə vardır (bax, [5]). $B(-\tau) = \overline{B(\tau)}$ olduğundan, (3) düsturunu

$$\mathbf{M}X(t)\overline{X(s)} = B(t-s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{t-j} \overline{b_{s-j}}, \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

şəklində yazmaq olar (burada $s < 0$ və ya $s > n$ olduqda, $b_s = 0$), bu düstur isə (1)-in xüsusi halıdır ki, bu halda hər iki T və A çoxluqları bütün tam ədədlərin çoxluğudur. K. t.-inə əsasən

$$X(t) = \sum_{k=0}^n b_k Z(t-k), \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

burada $\mathbf{M}Z(t)\overline{Z(s)} = \delta_{ts}$ (yəni $Z(t)$ diskret zamanlı bəyaz küydür). Əgər $|\tau| > n$ olduqda $B(\tau) = 0$ olarsa, onda $X(t)$ diskret zamanlı sürüşən orta prosesidir.

2) $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ – kəsilməz zamanlı stasionar təsadüfi proses. $f(\lambda)$ – prosesin spektral sıxlığı olsun, $g(\lambda)$ ele ixtiyari funksiyadır ki, $|g(\lambda)|^2 = f(\lambda)$. $b(t)$, $-g(s)$ funksiyasının (L^2 fəzasından olan) Furje çevirməsi olsun; bu halda $X(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(\tau)$ -nın spektral ayrılışı və Planşerel tənliyindən istifadə edərək göstərmək olur ki,

$$\mathbf{M}X(t)\overline{X(s)} = B(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-u) \overline{b(s-u)} du. \quad (4)$$

(4) düsturu (1)-in xüsusi halıdır ki, bu halda $A = (-\infty, \infty)$, m – Lebeq ölçüsüdür; buna görə də,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-u) dZ(u)$$

olduğu alınır, burada $\mathbf{M} dZ(u) \overline{dZ(v)} = \delta(u-v) du dv$, yəni $Z(u)$ standart Viner prosesidir. Spektral sıxlığa malik standart proses, həmişə kəsilməz zamanlı itirərlili sürüşən orta prosesidir. Əgər $f(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-1} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty \quad (5)$$

berəbersizliyini ödəyirsə, onda Peli – Viner teoreminə əsasən (bax, [6]) $g(\lambda)$ funksiyasını ele seçmək olar ki, onun Furje çevirməsi $b(t)$ mənfi yarımoxda sıfır çevrilsin; (5) şərti ödənilərsə, spektral sıxlığı $f(\lambda)$ -ya bərabər stasionar təsadüfi proses birtərəfli sürüşən orta proses kimi ifadə oluna bilər.

K. t.-nin digər tətbiqləri də mövcuddur (bax, məs., *Spektral ayrılışı*) təsadüfi funksiyasının).

Əd.: [1] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A», 1947, Bd1, № 37, S. 3–79; [2] Гнхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971, с. 292–4; [3] Гнхман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977, с. 269–71; [4] Rao M. M., в кн.: Handbook of Statistics, v. 5, Amst., 1985, p. 279–310; [5] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976, с. 252–53; [6] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964, с. 32.

KARUNEN – LOEV AYRILIŞI « Карунена – Лозва разложение; Karhunen – Loeve expansion », ortoqonal ayrılış, ortoqonal sıraya ayrılış, təsadüfi prosesin K. – L. a. – $a \leq t \leq b$ sonlu

intervalında verilmiş kvadratik orta menada kəsilməz, ixtiyari kompleks $X(t)$ təsadüfi prosesinin

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \psi_k(t) Z_k$$

şəklində ifadəsədir, burada sağ tərəfdəki cəm kvadratik orta mənada yığılır, $\psi_k(t)$, $k=1, 2, \dots$, –

$$\int_a^b B(t, s) \psi(s) ds = \lambda \psi(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

interqal tənliyinin məxsusi funksiyalarının ortonormalanmış sistemi $[B(t, s) = \mathbf{M} X(t) \overline{X(s)}]$, – $X(t)$ -nin korrelyasion funksiyasıdır, λ_k , $k=1, 2, \dots$, – $\psi_k(t)$ funksiyalarına uyğun məxsusi qiymətlər,

$$Z_k = (\lambda_k)^{-1/2} \int_a^b X(t) \overline{\psi_k(t)} dt, \quad k=1, 2, \dots$$

– $\mathbf{M} Z_k \overline{Z_j} = \delta_{kj}$ şərtini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdir. K. – L. a. çoxölçülü statistik analizdə istifadə olunan, baş komponentlər üzrə ayrılışın sonsuzölçülü hal üçün ümumiləşməsidir; bu ayrılış bir-birindən asılı olmayaraq bir çox tədqiqatçılar tərəfindən alınmasına baxmayaraq (bax, məs., [1] – [6]), adətən, bunlardan ikisinin adı ilə adlandırılmışdır. (1) və (2) düsturlarındakı sonlu $a \leq t \leq b$ intervalında verilən $X(t)$ təsadüfi prosesini $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyası ilə evəz etmək olar, burada T – ixtiyari əlaqəli kompakt topoloji fəza, Lebeq ölçüsü ds ilə T -də ixtiyari $m(ds)$ ölçüsü ilə ələdir ki, T -nin bütün açıq altçoxluqları ölçüləndir və müsbət ölçüyə malikdirlər. Məs., $X(t) \in \mathbb{R}^n$ fəzasının əlaqəli məhdud çoxluğunda təsadüfi meydan kimi, ds isə $m(s)ds = m(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n$ ölçüsü kimi interpretasiya oluna bilər. Əgər $X(t)$ – riyazi gözləməsi sıfıra bərabər heqiqi Gauss prosesi olarsa, onda Z_k , $k=1, 2, \dots$ – normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu halda (1)-in sağ tərəfindəki sıra artıq 1 ehtimalla yığılır (bax, məs., [7], [8]).

K. – L. a.-nın bir sıra mühəndis tətbiqləri vardır (bax, məs., [9] – [13]). Meteorologiya məsələlərində də bu ayrılışlar geniş tətbiq olunur (bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*).

Misallər. 1) $B(t, s) = \min(t, s)$, $a=0$, $b=1$ olsun. Onda (2) tənliyi sərhəd şərtləri $\psi(0)=0$, $\psi'(1)=1$ olan $\lambda \psi''(t) + \psi(t) = 0$ differensial tənliyinə gətirilə bilər, bu halda K. – L. a. aşağıdakı şəkildə olur:

$$X(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((k-1/2)\pi t)}{(k-1/2)\pi t} Z_k. \quad (3)$$

$X(t)$ Viner prosesi olduğu xüsusi halda (3) ayrılışı N. Viner (N. Wiener) tərəfindən 20-ci əsrin 30-cu illərində bir qədər başqa formada alınmışdır (bax, məs., [14]).

2) Əgər $B(t, s) = \exp[-\alpha(t-s)]$, $a=-T$, $b=T$ olarsa, onda (2) tənliyi sərhəd şərtləri $\psi'(T) + \alpha \psi(T) = 0$,

$\psi'(-T) - \alpha \psi(-T) = 0$ olan $\psi''(t) + [\alpha(2 - \alpha \lambda)/\lambda] \times \psi(t) = 0$ differensial tənliyinə gətirilə bilər. Buna görə də, bu halda K. – L. a.

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos a_k t Z_k^{(1)} + B_k \sin b_k t Z_k^{(2)})$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada A_k və B_k – normalayıcı sabitlərdir, $\mathbf{M} Z_k^{(p)} \overline{Z_j^{(q)}} = \delta_{pq} \delta_{kj}$, a_k və b_k , $k=1, 2, \dots$ – $a_k \operatorname{ctg} T a_k = \alpha$, $b_k \operatorname{ctg} T b_k = \alpha$ transsendent tənliklərinin həllidir.

Digər bezi misallar [9] – [13], [15], [16]-də şərh olunmuşdur. Spektral sıxlığı $f(\lambda)$ rəasional olan stasionar təsadüfi $X(t)$ proseslərinə tətbiqdə (2) integral tənliyinin ümumi həll metodu [17]-də təklif olunmuş, sonradan [15] və [18]-də sadələşdirilmişdir.

Əd.: [1] K o s a m b i D. D., «J. Indian Math. Soc.», 1943, v. 7, p. 76–88; [2] K a r h u n e n K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A», 1946, Bd 1, № 34, p. 3–7; [3] L o e v e M., «Rev. Sci.», 1946, v. 84, p. 195–206; [4] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 499–502; [5] П у г а ч е в В. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, т. 17, № 5, с. 401–20; [6] О б у х о в А. М., «Тр. Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, в. 24, с. 3–42; [7] Г н и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977, с. 257–58; [8] Г н и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971, с. 275–79; [9] П у г а ч е в В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [10] Д а в е н п о р т В. Б., Р у т В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [11] М и д д л т о н Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [12] Х е л с т р о м К., Статистическая теория обнаружения сигналов, пер. с англ., М., 1963; [13] В а н Т р и с Г., Теория обнаружения оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [14] В и н е р Н., П э л и Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964, с. 215–29; [15] Ф о р т у с М. И., «Изв. АН СССР. Сер. физики атмосф. и океана», 1973, т. 9, № 1, с. 34–46; [16] Ф о р т у с М. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1977, в. 16, с. 135–41; [17] Г е л ь ф а н д И. М., Я г л о м А. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 1, с. 3–52; [18] S l e p i a n D., K a d o t a T. T., «SIAM J. Appl. Math.», 1969, v. 17, p. 1102–17.

KARUNEN – LOEV AYRILIŞI diskret «Карунена – Лозва разложения дискретное discrete Karhunen – Loeve decomposition» – kovariasion matrisin məxsusi vektorları üzrə təsadüfi vektorun ayrılışdır. Əlamətlərin seçilməsi məsələlərində, yeni ilkin ölçmələrin daha effektivliyinə əvəzlənməsində istifadə olunur. x , – n – ölçülü təsadüfi vektor olsun. Onda aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$x = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i = \Phi y$$

burada $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$. Φ matrisi determinantlı matrisdir və n sayda xətti asılı olmayan vektor sütundan ibarətdir, yeni $\det \Phi \neq 0$. Beləliklə, Φ -in sütunlarının xətti kombinasiyaları x -i özündə saxlayan n – ölçülü fəza əmələ gətirir. Φ -in sütunları bazis vektorlar adlanır. Fərz olunur ki, bunlar ortonormalanmışlar, onda y vektorunun komponentləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$y_i = \Phi_i x, \quad i=1, \dots, n.$$

Deməli, y təsadüfi x vektorunun ortoqonal çevirməsidir və təsadüfi vektordur. y vektorunun hər bir komponenti əlamət olub, x -in ifadəsində əks olunur.

y vektorunun m komponentinin təyin olunduğu fərz olunur, $m < n$. Əgər (x -in qiymətləndirilməsi üçün) y -in hesablanmış komponentləri konstantlarla əvəz olunursa, onda

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^m y_i \Phi_i + \sum_{i=m+1}^n b_i \Phi_i.$$

Qiymətləndirmə xətası

$$\Delta x = \sum_{i=m+1}^n (y_i - b_i) \Phi_i$$

ifadəsi ilə təyin olunur. m komponentdən ibarət altçoxlğun effektivliyinin ölçülməsi üçün kriteri kimi Δx -in kvadratının orta qiymətindən istifadə olunur:

$$\varepsilon^2(m) = M \{ \|\Delta x\|^2 \} = \sum_{i=m+1}^n M \{ (y_i - b_i)^2 \}.$$

Konstantların qiymətlərinin və bazis vektorların hər bir toplusuna $\varepsilon^2(m)$ -in müəyyən bir qiyməti uyğun olur. b_i konstantlarının optimal seçimi aşağıdakı kimi aparılır:

$$b_i = M y_i = \Phi_i^T M x,$$

onda kvadratik orta xəta

$$\varepsilon^2(m) = \sum_{i=m+1}^n \Phi_i^T \Xi \Phi_i$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada Ξ – kovariasion matrisdir. Φ matrisinin optimal seçilməsi $\Xi \Phi_i = \lambda_i \Phi_i$ şərtini ödəyir, yəni optimal bazis vektorlar Ξ matrisinin məxsusi vektorudur.

Beləliklə, minimal kvadratik orta xəta $\varepsilon_{\text{opt}}^2(m) = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i$ olur.

Əd.: [1] Фукунга К., Введение в статистическую теорию распознавания образов, пер. с англ., М., 1979.

KASKAD DESİMASİYA « каскадная децимация; cascade decimation » – bax, *Desimasiya*.

KASKAD KOD « каскадный код; cascade cod » – B əlifbası üzərində V blok kodundan A əlifbasının hərflərinin U blok kodunun sözlərinə əvəz olunması ilə alınan, A əlifbası üzərində blok kodudur. Bu zaman B -nin U kodlarına kodlanmasındakı əvəz olunmalar, V kodunun müxtəlif mövqələrində duran hərflər üçün müxtəlif ola bilər (U kodlarının özü də). Kodlama və dekodlamanın n üzrə polinomial *mürəkkəbliyi* halında (bax, [1], [2]) kod məsafəsinin xətti artmasını (kod uzunluğu n üzrə) və səhv dekodlama ehtimalının (n üzrə) eksponensial azalmasını (yaddaşsız kanalın ötürücülük qabiliyyətindən kiçik olan bütün sürətlər üçün) təmin edən K. k.-un varlığı isbat olunmuşdur. Məlum olan yaxşı kodlardan bir çoxu K. k.-lardır və ya onların ümumiləşmələridir (bax, [3]), bu kodlar informasiyanın ötürülməsi və qorunub saxlanılması sistemlərində geniş tətbiq olunur.

K. k.-lar D. Forni tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Ф о р н и Д., Каскадные коды, пер. с англ., М., 1970; [2] З я б л о в В. В., «Проблемы передачи информации», 1971,

т. 7, № 1, с. 5–13; [3] З н о в о в е в В. А., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, № 1, с. 5–15.

KATEQORİK HAVA PROQNOZU « категорический прогноз погоды; categorical weather forecast » – mümkün olan xətalara özündə əks etdirməyən proqnozdur və bu proqnoz yalnız meteoroloji kəmiyyətin öngörül qiyməti və ya havanın gözəlinen tipi (məs., yağintılı olub-olmayacağı) haqqında məlumat verir.

K. h. p.-ları özünü yüz faiz doğrultmur və şərti proqnozlar adlandırılır. Bütün məlum proqnoz metodları, praktik olaraq, yalnız şərti hava proqnozlarını verməyə imkan yaradır. Mümkün ola bilən xətlər və öngörül tip əvəzinə havanın digər tiplərinin (fazaların) baş verməsi ehtimalları haqqında proqnozistə məlum informasiyaların yoxluğu K. h. p.-nın dəyərini azaldır. Buna görə də, istehsal fəaliyyətinin planlaşdırılmasında istifadə olunan, daha da əsaslandırılmış sayılan ehtimalı hava proqnozu metodlarının işlənilməsi istiqamətində cəhdlər edilir.

KEÇİD EHTİMALI Markov zəncirində « переходная вероятность в цепи Маркова; transition probability in a Markov chain » – bax, *Ehtimal, keçid ehtimalı*.

KEÇİD EHTİMALI SİXLİĞİ « перехода плотность вероятности; transition rate / density » – bax, *Sıxlıq(ğ)ı* keçid ehtimallarının.

KEÇİD FUNKSİYASI « переходная функция; transition function » Markov prosesinin – Markov prosesinin başlanğıc zaman anı və başlanğıc vəziyyətindən asılı olmaqla müəyyən vəziyyətlər çoxluğuna daxil olması ehtimalını təyin edən funksiyadır. Dəqiq ifadə ilə bu funksiya aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ – ölçülən fəza olsun. $p(s, x; t, \Gamma)$, $s < t \in (-\infty, \infty)$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ funksiyası x -ə görə ölçüləndirsə, Γ -yə görə subehtimal ölçüdürsə və ixtiyari $s < t < u$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ üçün

$$\int p(s, x; t, dy) p(t, y; u, \Gamma) = p(s, x; u, \Gamma) \quad (*)$$

– Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyirsə, $p(s, x; t, \Gamma)$ -yə keçid funksiyası deyilir. $p(s, x; t, \mathcal{E}) \equiv 1$ olarsa, K. f. Markov K. f. və ya konservativ K. f., əks halda isə submarkov K. f. adlanır. Əgər $\lim_{t \rightarrow s} p(s, x; t, \mathcal{E}) \equiv 1$ olarsa, K. f. normal K. f. adlanır.

ζ_t , – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də verilmiş, qiymətləri $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -dən olan Markov xassəli təsadüfi proses olsun. Əgər

$$P \{ \zeta_t \in \Gamma | \zeta_s \} = p(s, \zeta_s; t, \Gamma)$$

bərabərliyi P – sanki yəqin ödənilirsə, onda $p(s, x; t, \Gamma)$ Markov K. f. ζ_t prosesinin keçid funksiyasıdır, deyilir.

Əgər $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ Borel σ – cəbrli tam separabel metrik fəzadırsa, onda ixtiyari Markov K. f.-na müəyyən bir Markov prosesi uyğundur və əksinə ixtiyari Markov prosesinə müəyyən bir K. f. uyğundur (bax, [1] – [3]). Əgər qırılan proseslərə də baxılarsa, bu mülahizələr submarkov K. f.-ları üçün də doğru olur.

Verilmiş K. f. üçün trayektoriyalarının xassələri məlum Markov prosesinin varlığı şərtləri [4], [5]-də (bax, *Markov prosesi*) şərh olunmuşdur.

$\mathcal{E}$ hesabı və ya sonlu çoxluq olarsa, K. f.

$$P(s, t) = \|p_{ij}(s, t)\|$$

matrisi şəklində verilir; $i, j \in \mathcal{E}$, $p_{ij}(s, t) = p(s, i; t, \{j\})$.

K. f. anlayışı, təbii olaraq, hər hansı $I \subset (-\infty, \infty)$ altçoxluğundan (məs., tam ədədlər çoxluğundan) yalnız s, t üçün təyin olunmuş funksiyalar üçün də təyin olunur.

K. f. $p(s, x; t, \Gamma)$ ilə aşağıdakı düsturlarla verilən P_t^s , $s < t$ operatorlarını əlaqələndirmək olar:

$$P_t^s f(x) = \int_{\mathcal{E}} p(s, x; t, dy) f(y)$$

düsturu ilə məhdud ölçülən funksiyalara təsir edən və

$$\mu P_t^s(\Gamma) = \int_{\mathcal{E}} \mu(dx) p(s, x; t, \Gamma)$$

düsturu ilə σ – sonlu ölçülərə təsir edən operatorları.

K. f. yalnız s, t arqumentlərinin fərqiindən asılı olarsa, yeni $p(s, x; t, \Gamma) \equiv p(t - s, x; \Gamma)$ şəklində ifadə olunarsa, onda o, bircins K. f. adlanır. Bircins K. f. üçün $P_t^s = P_{t-s}$ işarələməsindən istifadə olunur; P_t^s operatorlar təminlərlə (*) tənliyi $P_t^s P_u^t = P_u^s$ şəklində, bircins halda isə $P_t P_s = P_{t+s}$ şəklində yazılır; yeni P_t operatorları Markov semi – qrupu təşkil edir.

$\mathcal{E}$ – topoloji fəza, $\mathcal{B}$, – $\mathcal{E}$ -də Borel σ – cəbri olsun. Əgər ixtiyari açıq U çoxluğu və ixtiyari $x \in U$ üçün $\lim_{t \downarrow s} p(s, x; t, U) = 1$ olarsa, K. f. stoxastik kəsilməz K. f. adlanır. Əgər K. f.-na uyğun P_t^s operatorları məhdud kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirirsə (uyğun olaraq, məhdud ölçülən funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirirsə), onda K. f. Feller K. f. (uyğun olaraq, güclü Feller K. f.) adlanır. Feller K. f.-na ciddi Markov prosesləri uyğundur.

Bircins K. f.-nin təsviri və şərhinin mühüm elementi onun infinitezimal operatoru və rezolventidir (bax, Markov prosesi; rezolvent).

Əd.: [1] Н е в ѝ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 389–93; [4] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [5] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

KEÇİD İNTENSİVLİYİ «перехода интенсивность; infinitesimal transition rate» – bax, Sıxlıq(ğı) keçid ehtimallarının.

KEÇİD MATRİSİ «переходная матрица; transition matrix» – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabı bircins Markov zəncirinin keçid ehtimallarından təşkil olunmuş

$P = \|p_{ij}\|$ kvadrat matrisdir. K. m.-lərinin çoxluğu ixtiyari i qiymətində $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$ şərtlərlə təyin olunan stoxastik matrislər çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

418 KEÇİD

Bircins Markov zənciri üçün P^n K. m.-nin natural qüvvət üstlü elementləri i vəziyyətindən j vəziyyətinə n addım keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$ -lərdir. Əgər E zəncirin vəziyyətləri çoxluğu sonludursa və mühüm $C_1, \dots, C_k$ sinifləri və qeyri – mühüm R sinfindən ibarətdirsə, onda K. m. vəziyyətləri yenidən nömrələmə nəticəsində

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & P_k \\ \hline & Q \end{pmatrix}$$

şəklinə gətirilir, burada $P_1, \dots, P_k$ – uyğun $C_1, \dots, C_k$ siniflərində Markov zəncirinin keçid matrisləri, Q blokunun sırtları isə qeyri-mühüm vəziyyətlərə uyğundur.

Bəzən K. m. vəziyyətləri sonlu və ya hesabı kəsilməz zamanlı Markov prosesinin keçid funksiyasına da deyilir.

KEÇİD SİXLİĞİ «переходная плотность; transition density» – Markov prosesinin keçid funksiyası və ya Markov zəncirinin keçid ehtimalı $p(s, x; t, \Gamma)$ -nin hər hansı σ – sonlu $\lambda(\Gamma)$ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim törəməsi $f(s, x; t, y)$ -dir, bu şərtlə ki, $p(s, x; t, \cdot)$ ölçülərinin $s < t$ olduqda λ -ya nəzərən mütləq kəsilməz olduğu fərz olunur [$s < t$ zaman parametrisinin dəyişmə əbəstə T -yə daxildir, $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ – prosesin fəza fəzasıdır]. Beləliklə,

$$p(s, x; t, \Gamma) = \int_{\Gamma} f(s, x; t, y) \lambda(dy),$$

$$s < t, x \in \mathcal{E}, \Gamma \in \mathcal{B}; \quad (1)$$

məs.,

$$\int_{\mathcal{E}} f(s, x; t, y) \lambda(dy) \leq 1, \quad s < t, x \in \mathcal{E}. \quad (2)$$

Adətən, tələb olunur ki: 1) K. s. mənfi olmasın; 2) K. s. (x, y) -ə görə $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ – ölçülən olsun; 3) K. s.

$$f(s, x; u, y) = \int_{\mathcal{E}} f(s, x; t, z) f(t, z; u, y) \lambda(dz) \quad (3)$$

– Kolmoqorov – Çepmen tənliyini bütün $s < t < u$, $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$ qiymətlərində ödəsin [keçid funksiyasının tərifindən 1) və 3) şərtləri λ – sanki bütün y -lər üçün alınır]. 1) – 3) şərtləri ödəndiyi halda (2) xassələrinə malik olan ixtiyari f funksiyasına (1) düsturuna əsasən keçid funksiyası uyğun olur. Bircins halda K. s. $f(t, x, y) = f(s, x; s + t, y)$ funksiyasına deyilir.

KEMENİ MEDİANI «Кемени медиана; Kemeny median» – *Kemeni məsafəsi* vasitəsilə, müəyyən binar münasibətlərlə (tolerantlıqlar, rəqlənmələr, bölgülər və s.) $\{C\}$ fəzasında təyin olunan seçimi ortadır. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \{C\}$ seçimi üçün *Kemeni medianı*

$$\sum_{i=1}^n d(A_i, A^*) = \min_{A \in \{C\}} \sum_{i=1}^n d(A_i, A)$$

münasibətini ödəyən $A^* \in \{C\}$ binar münasibətdir, burada $d(A_i, A)$, $- \{C\}$ -dən olan A_i və A binar münasibətləri arasında Kemeni məsafəsidir. K. m. ilk dəfə rəqlənmələr fəzaları üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]). K. m. *binar münasibətlər statistikasında* öyrənilən əsas obyektəndir (bax, [2]).

Əd.: [1] К е м е н и Дж., С н е л л Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер. с англ., М., 1972; [2] О р л о в А. И., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 58–92.

KEMENİ MƏSƏFƏSİ « *Кемени расстояние; Kemeny distance* » – sonlu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ çoxluğunda A və B binar münasibətləri arasında məsafədir. K. m.-ni təyin etmək üçün X çoxluğunda binar C münasibətlərinin toplusu $\{C\}$ və $(k \times k)$ – tərtib $\|f_{ij}(C)\|$ $(0, 1)$ – matrislərinin çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiyəmli uyğunluqdan istifadə olunur və bu uyğunluqda $f_{ij}(C) = 1$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, x_i və x_j C münasibətində olsunlar; $f_{ij}(C) = 0$ bərabərliyi isə əks halda doğru olur. K. m.

$$d(A, B) = \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}(A) - f_{ij}(B)|$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və o, rəqləmə fəzasına müəyyən aksiomlar sistemi ilə daxil olunmuşdur (bax, [1]). K. m.-ni almaq üçün analoji aksiomlar sistemi bir qədər sonralar tolerantlıq, bölgələr fəzaları və b. üçün də təklif olunmuşdur (bax, [2]). K. m. qeyri – ədədi təbiiyyətli obyektlər *statistikasında* geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] К е м е н и Дж., С н е л л Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер. с англ., М., 1972; [2] О р л о в А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

KEMPBELL ÖLÇÜSÜ « *Кэмпбелла мера; Campbell measure* » – nöqtəvi prosesin moment ölçüsünü ümumiləşdirən, təsadüfi nöqtəvi prosesin ədədi xarakteristikası olan ölçüdür.

$$\Phi(\cdot) = \sum_{a \in S_\Phi} \Phi(\{a\}) \delta_a(\cdot)$$

– ədəd oxunda verilmiş Φ təsadüfi nöqtəvi prosesinin realizasiyası, $S_\Phi = \{a: \Phi(\{a\}) > 0\} \subset \mathbb{R}^1$ olsun, burada $\delta_a(\cdot)$, $- a$ nöqtəsində toplanmış vahidi ölçüdür. Realizasiyalan

$$\Phi^\Lambda(\cdot) = \sum_{a \in S_\Phi} \Phi(\{a\}) \delta_{a\Phi(\cdot)}(\cdot)$$

şəklində olan yeni nöqtəvi prosese baxılır. Φ^Λ prosesi $\mathbb{R}^1$ -də verilən ele nişanlanmış nöqtəvi proses kimi anlaşılır ki, bu prosesin hər bir $a \in S_\Phi$ nöqtəsində nişan əvəzinə bütün $\Phi(\cdot)$ realizasiyasına baxılır. Φ^Λ prosesi $\mathfrak{A}^\Lambda = A^\Lambda \cap \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$ σ – cəbrinin məhdud altçoxluqlarında təyin olunmuşdur, burada $A^\Lambda = \{(a, \varphi(\cdot)): a \in \mathbb{R}^1, \varphi(\cdot) \in M, a \in S_\Phi\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$, $- \mathbb{R}^1$ -də Borel çoxluqlarının σ – cəbri, M , $- (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B})$ -də

lokal məhdud $\varphi(\cdot)$ sayıcı ölçülər çoxluğu, $\mathfrak{M}$, $- M$ -də, $\{\varphi(\cdot): \varphi(B) = k, B \in \mathfrak{B}\} \subset M$ altçoxluqlarının doğruduğu altçoxluqlar σ – cəbri.

Φ nöqtəvi təsadüfi prosesinin $(M, \mathfrak{M})$ -də ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ ilə təyin olunduğu fərz olunur. Φ^Λ prosesinin *moment ölçüsü* $- C_P(\cdot)$ К е м п б е л л ö l ç ü s ü d ü r, yeni ixtiyari $K \in \mathfrak{A}^\Lambda$ üçün $C_P(K)$ kəmiyyəti Φ^Λ prosesinin K altçoxluğundakı nöqtələrinin orta sayına bərabərdir. Əgər $K = A^\Lambda \cap B \times M$ olarsa, onda $C_P(K) = \mathbf{M}_P \Phi(B)$ olur, yəni $C_P(K)$ ilkin təsadüfi Φ nöqtəvi prosesinin K -dəki nöqtələrinin orta sayına bərabərdir.

İxtiyar $\mathfrak{A}^\Lambda$ – ölçülən, mənfə olmayan $f(c)$, $c = (a, \Phi) \in A^\Lambda$ funksiyası üçün

$$\mathbf{M}_P \int_K f(c) \Phi(da) = \int_K f(c) C_P(dc)$$

bərabərliyi doğrudur, bu isə *Kempbell teoreminin* ümumiləşməsidir.

K. ö. vəziyyətlərinin fəza fəzası tam separabel metrik fəza olan nişanlanmış nöqtəvi proseslər üçün də ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

KEMPBELL TEOREMİ « *Кэмпбелла теорема; Campbell theorem* » – təsadüfi nöqtəvi prosesin realizasiyası üzrə *stoxastik integralin* orta qiymətini təyin edən teoremdir. $\Lambda(\cdot)$, $- \Phi$ təsadüfi nöqtəvi prosesinin *moment ölçüsü*,

Φ prosesinin vəziyyətlərinin fəza fəzası $(A, \mathfrak{A})$ -nın məhdud ölçülən B çoxluqları üçün $\Lambda(B) < \infty$ olsun. Onda ixtiyari $\mathfrak{A}$ – ölçülən $f(a)$, $a \in A$ mənfə olmayan funksiyası və $B \in \mathfrak{A}$ üçün

$$\mathbf{M} \int_B f(a) \Phi(da) = \int_B f(a) \Lambda(da)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bax, *Kesri küy prosesi*.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

KENDALL ƏMSALI rəng korrelyasiyasının « *Кендалла коэффициент ранговой корреляции; Kendall rank correlation coefficient* » – müşahidə olunan X və Y *təsadüfi kəmiyyətləri* (əlamətləri) üçün alınmış $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ seçim elementlərinin rəngləşdirilməsinə əsaslanan, bu təsadüfi kəmiyyətlərin asılılığının seçimi ölçülərindən biridir. Beləliklə, rəng korrelyasiyasının K. ə. rəng statistikalarına aid olub,

$$\tau = 2S(r_1, \dots, r_n)/n(n-1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada r_i , $- Y$ -in rəngi olub, ele (X, Y) cütünə aiddir ki, bu cütdə X -in rəngi i -yə bərabərdir, $S = 2N - n(n-1)/2$, N seçimin ele elementləri sayıdır ki,

bunlar üçün eyni zamanda $j > i$ və $r_j > r_i$ şərtləri ödənilir. $-1 \leq \tau \leq 1$ bərabərliyi həmişə ödənilir. Rəng korrelyasiyasının K. ə. M. Kendall tərəfindən geniş istifadə olunmuşdur (M. Kendall, bax, [1]).

Rəng korrelyasiyasının K. ə. təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamalılığı hipotezlərinin yoxlanılması üçün istifadə olunur. Əgər asılı olmamalılığı hipotezi doğrudursa, onda $M\tau = 0$ və $D\tau = 2(2n+5)/9n(n-1)$ olur. Kiçik həcmli seçimlər halında ($4 \leq n \leq 10$) asılı olmamalılığı statistik hipotezi xüsusi cədvəllər vasitəsilə yoxlanılır (bax, [3]). $n > 10$ olduqda τ -nın paylanması üçün normal yaxınlaşmadan istifadə olunur: əgər

$$|\tau| > u_{\alpha/2} \sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)}$$

olarsa, onda asılı olmamalılığı haqqında hipotez qəbul olunmur, əks halda isə qəbul olunur. Burada α – mühümlük ölçüsüdür. $u_{\alpha/2}$ – normal paylanmanın $100 \cdot \alpha/2$ faiz nöqtəsidir. Rəng korrelyasiyasının K. ə. digər ixtiyari rəng statistikası kimi, iki keyfiyyət əlamətlərinin asılılığının aşkar edilməsi üçün də istifadə oluna bilər, lakin bu halda seçimin elementlərini bu əlamətlərə görə nizamlamaq mümkün olarsa. Əgər X , Y korrelyasiya əmsalı ρ -ya bərabər ikiölçülü normal qanunla paylanmışlarsa, onda rəng korrelyasiyasının K. ə. arasında əlaqə $M\tau = 2\pi^{-1} \arcsin \rho$ şəklində olur.

Bax, *Spirmen əmsalı rəng korrelyasiyasının Rəng kriterisi*.

Əd.: [1] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

KEPSTR « КЕПСТР; KEPSTR – Kolmogorov equation Power Series Time Response » – diskret zamanlı $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ *regulyar stasionar təsadüfi prosesinin* KEPSTR-i –

$$\exp \{ v_0 + v_1(z) + \dots \} = a_0 + a_1 z + \dots \quad (1)$$

şərtindən təyin olunan $\{v_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ ədədlər ardıcılığıdır, burada $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ – $\zeta(t)$ üçün Vold ayrılışının əmsallarıdır, z – kompleks dəyişəndir, $|z| < 1$.

$\{v_k\}$ ardıcılığı stasionar təsadüfi ardıcılıqlar nəzəriyyəsinin qurulması üçün D. Seqyö və A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1] – [3]). (1) münasibəti bu nəzəriyyədə mühüm rol oynayır və Kolmoqorov tənliyi adlanır. $f(\lambda)$ *regulyar stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral sıxlığı* olsun. Onda

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(e^{-i\lambda})|^2, \quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (2)$$

ifadəsi doğrudur, burada $\{a_k\}$, – $\zeta(t)$ üçün Vold ayrılışının əmsallarıdır. (2)-ni (1)-də yerinə yazdıqda K.-i $\ln \Phi(z)$ funksiyasının

$$\ln \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k \quad (3)$$

qüvvət sırasına ayrılışının əmsalları ardıcılığı kimi təyin etmək olur. (3) ayrılışı Kolmoqorov tənliyinin qüvvət sırası adlanır. (3) münasibəti $\{v_k\}$ ardıcılığını hər hansı xətti filtrin impuls keçid funksiyası kimi, $\ln \Phi(z)$ -i isə uyğun tezlik xarakteristikası kimi interpretasiya etməyə əsas verir.

20-ci əsrin 60-cı illərindən başlayaraq, K. bir çox mütəxəssislərin diqqətini yalnız onun təsadüfi ardıcılıqların fundamental nəzəriyyəsində istifadə olunması ilə deyil, həm də bir çox məsələlərin həlli üçün, ilk növbədə geofiziki məlumatların ədədi işlənilməsi məsələlərinin həlli üçün faydalı bir vasitə kimi cəlb etmişdir. Tətbiq nöqtəyi – nəzərdə K.-in əsas xassəsi belə ifadə olunur: müşahidə olunan signalın iki ardıcılığın kompozisiyası –

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta(k) Y(t-k)$$

olduğu fərz olunur. Onda $R(t)$ signalının K.-i $\zeta(t)$ və $Y(t)$

ardıcılıqlarının K.-lərinin cəminə bərabərdir: $\hat{v}_k^{(R)} = v_k^{(\zeta)} + v_k^{(Y)}$,

$k = 0, 1, \dots$. Əgər, məs., konvolýusiya məsələsini, yeni kompozisiyanın komponentlərindən birini [məs., $\zeta(t)$ -ni] müşahidələr üzrə bərpa etmə məsələsini həll etmək tələb olunursa, onda K.-in statistik qiymətlərinin $\{\hat{v}_0^{(R)}, \dots, \hat{v}_N^{(R)}\}$

ardıcılığı filtrasiya olunur (kepstral oblastda), bu şərtlə ki, $v_k^{(Y)}$ toplananı nəzərə alınmır. Sonra isə filtrlənmiş K.-dən əksinə – zaman oblastına keçirilir (bax, [4], [5]).

Tətbiqi araşdırmalara həsr olunmuş ədəbiyyatda əksər hallarda [4]-də olduğu kimi $\ln f(\lambda) = 2 \ln |\Phi(e^{-i\lambda})|$ funksiyasının Furiye sırasına ayrılışı əmsalları *kepstr* adlandırılır.

Əd.: [1] Szegő G., «Math. Ann.», 1915, Bd 76, S. 490–503; [2] Kolmogorov A. N., «C. r. Acad. sci.», 1939, t. 208, p. 2043–45; [3] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 215–63; [4] Bogert B., Neale J. M., Tukey J., «Proc. Simp. Time Ser. Analysis», N. Y., 1963, p. 209–43; [5] Оппенгейм А., Шафер Р., Цифровая обработка сигналов, пер. с англ., М., 1979.

KEPTEYN PAYLANMALARI « Кептейна распределения; Kepteyn distributions » – qiymətləri çoxsaylı zəif asılı səbəblərin təsirinin nəticəsi olan, lakin bilavasitə çox sayda kəmiyyətlər cəmi olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının təsviri üçün C. Kepteyn (1916) tərəfindən təklif olunmuş *paylanmalar* ailəsidir. Olduqca ümumi şərtlərlə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması o halda K. p. ailəsindəndir ki, hər hansı $G(\xi)$ funksiyası normal paylanmaya malik olsun. Məs., verilən səbəbin təsir effekti artıq təsadüfi kəmiyyətin almış olduğu qiymətə mütənəsisb olarsa, onda $G(\xi) = \ln \xi$ olur və loqarifmik normal paylanma alınır.

Əd.: [1] Арлей Н., Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951.

KESTEN AMENABELLİK KRİTERİSİ « Кестена критерий аменабельности; Kesten condition / criterion of amenability » – bax, *Təsadüfi dolaşma qrupda*.

KEYFİYYƏTÇƏ DAYANIQLILIQ (ğı) stoxastik modellerin « качественная устойчивость стохастических моделей; qualitative stability of stochastic models » – ehtimal nəzəriyyəsinin approksimasiya məsələlərində istifadə olunan anlayışdır. Bu məsələlər

aşağıda təsvir olunan uyğun xarakterizasiya məsələləri ilə bilavasitə və ya digər şəkildə bağlıdır. $\mathcal{X} = \{x\}$ və $\mathcal{Y} = \{y\}$ – elementləri təsadüfi kəmiyyətlər, onların toplusları və ya onlara uyğun paylanmalar ola bilən hər hansı çoxluqlar olsun. $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ inikası və hər hansı $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{Y}$ çoxluqlarının verildiyi fərz olunur, $J^{-1}\mathcal{L}$ isə $\mathcal{L}$ çoxluğunun $\mathcal{X}$ -ə tam proobrazıdır. Əgər $\mathcal{L} = \mathcal{A} \cap (J^{-1}\mathcal{L})$ çoxluğu tələb olunan hər hansı xassələrə malik olarsa, onda onun təsvirini

$$x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (x \in \mathcal{A}, Jx \in \mathcal{L}) \quad (1)$$

formasında münasibət ilə ifadə etmək olar.

Əgər $\mathcal{X}$ və $\mathcal{Y}$ -də $\mu(x', x'')$ və $\nu(y', y'')$ məsafələri verilmişdirsə, onda (1) münasibəti aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mu(x, \mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow \mu(x, \mathcal{A}) + \nu(Jx, \mathcal{L}) = 0,$$

burada

$$\mu(x, \mathcal{L}) = \inf(\mu(x, x') : x' \in \mathcal{L}).$$

$\mathcal{D} = (J\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}$ çoxluğunun xarakterizasiyası məsələsi formal olaraq bir qədər başqa cürdür, lakin əgər J inikasının birqismətli olmadığı fərz olunarsa, onda bu çoxluğun xarakterizasiyası $\mathcal{L}$ -in təsviri məsələsindən fərqlənir.

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}; J, \mathcal{A}, \mathcal{L})$ modelində $\mathcal{L}$ -in keyfiyyət cəə dayanıqlılığı

$$\mu(x, \mathcal{L}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mu(x, \mathcal{A}) + \nu(Jx, \mathcal{L}) \rightarrow 0 \quad (2)$$

münasibətinin ödənilməsi kimi anlaşılar. (2)-dəki ikitərəfli implikasiya $\mathcal{L}$ çoxluğunun xarakterizasiyasının dayanıqlılığına uyğundur. (2) xassəsinin olub-olmaması, tamamilə, seçilmiş məsafələrin xassələrindən asılıdır. K. d. effektinin dəyişməsi ona müvafiq kəmiyyət statistik qiymətləridir (bax, *Dayanıqlılıq (ğ)*) stoxastik modelin; kəmiyyəti statistik qiymətlər).

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.» 1976, т. 101, № 3, с. 416–54.

KEYFİYYƏTLİ ROBASTLIQ « *качественная робастность; qualitative robustness* » – bax, *Robast statistik qiymət*.

KƏMİYYƏT ROBASTLIĞI « *количественная робастность; quantitative robustness* » – bax, *Robast statistik qiymət*.

KƏMİYYƏT CƏ DAYANIQLILIQ (ğ) stoxastik modellərin « *количественная устойчивость стохастических моделей; quantitative stability of stochastic models* » – bax, *Dayanıqlılıq (ğ)* stoxastik modelin; kəmiyyət statistik qiymətlər.

KƏNAR FUNKSIYA « *крайняя функция; extreme function* » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün*.

***KƏSİK – EKVİVALENT TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICIQLILARI** « *остаточно-эквивалентные случайных величин последовательность; remot – equivalence sequences* » – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət*.

***KƏSİK PAYLANMA** « *усеченное распределение; truncated distribution* » – ehtimal *paylanmasıdır*, verilən paylanmadan hər hansı qeyd olunmuş parçadan kənarda toplanmış kütlənin bu parçaya köçürülməsi yolu ilə alınır. Fərz olunur ki, ədəd oxunda ehtimal paylanması paylanma funksiyası $F(x)$ ilə verilmişdir. F -ə uyğun kəsik paylanma paylanma funksiyası

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } x \leq a, \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & \text{əgər } a < x \leq b, \\ 1, & \text{əgər } x > b, a < b \end{cases} \quad (1)$$

münasibətlə təyin olunan paylanmaya deyilir.

$a = -\infty$ ($b = \infty$) xüsusi halında K. p. sağdan (soldan)

kəsik paylanma adlanır.

(1)-lə yanaşı aşağıdakı münasibətlərlə verilən K. p.-lərə də baxılır:

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } x \leq a, \\ F(x) - F(a), & \text{əgər } a < x \leq c, \\ F(x) + 1 - F(b), & \text{əgər } c < x \leq b, \\ 1, & \text{əgər } x > b \text{ olarsa} \end{cases} \quad (2)$$

və ya

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } x < a, \\ F(x), & \text{əgər } a \leq x < b, \\ 1, & \text{əgər } x \geq b \text{ olarsa.} \end{cases} \quad (3)$$

$[a, b]$ parçasından kənarda toplanmış [1]-dəki kütlə bütün $[a, b]$ parçasında paylanır, (2)-də $c \in [a, b]$ nöqtəsinə keçir ($a < 0 < b$ olduqda c əvəzinə əksər hallarda $c = 0$ götürülür), (3)-də isə bu kütlə kənar a və b nöqtələrinə keçir.

(1) şəklində K. p.-ni aşağıdakı kimi interpretasiya etmək olar. X' paylanma funksiyası $F(x)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda K. p. $a < X \leq b$ şərtinə nəzərən X' təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması ilə üst-üstə düşür.

K. p. anlayışı *kəsik təsadüfi kəmiyyət* anlayışı ilə sıx bağlıdır. X^h -in paylanması X -in paylanmasına nəzərən (3) şəklində K. p.-dir ($a = -h$, $b = h$, $c = 0$).

Kəsmə əməliyyatı – K. p. və ya kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə keçmə – olduqca geniş yayılmış texniki üsuldur. Bu əməliyyat nəticəsində «ilk paylanma» bir qədər dəyişməklə, analitik xassə almaqla – bütün momentlərin varlığını.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [4] Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

KƏSİK SEÇİM « *усеченная выборка; truncated sample* », I tip senzurlanma – F paylanmasına mensub asılı olmayan təkrarlanan $X_1, \dots, X_n$ seçiminin qiymətlərinin heqiqi oxun hər hansı L alt çoxluğundan olan hədlərdən ibarət seçimdir. Əgər $L = (-\infty, a]$ (və ya $L = [a, +\infty)$)

olursa, seçim a nöqtəsində sağdan (soldan) kəsilməmişdir. Seçimin kəsilməsinə seçim «müşahidəolunan» hədlərinin paylanması «kesik» paylanma olur; yeni əgər $P\{X_1 \in L\} \neq 0$ olarsa, $F/P\{X_1 \in L\}$ olur.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы в связи, пер. с англ., М., 1973.

KƏSİK TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « усеченная случайная величина; truncated random variable » – ξ təsadüfi kəmiyyətlə sonlu $c > 0$ nöqtəsində

$$\xi_{<c} = \begin{cases} \xi, & \text{əgər } |\xi| < c \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əgər } |\xi| \geq c \text{ olarsa.} \end{cases} \quad (*)$$

münasibətlə bağlı məhdud $\xi_{<c}$ təsadüfi kəmiyyətlə deyilir, (*)

münasibətlə təyin olunan $\xi_{<c}$, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin c nöq-

təsində kəsidi (və ya budanmasıdır). ξ təsadüfi kəmiyyətinin

$\xi_{<c}$ K. t. k. ilə evəz olunması budama metodu adlanır. $\xi_{<c}$ K. t. k.

və ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyaları $F_{\xi}(x)$ və

$F_{\xi_{<c}}(x)$ bir-birilə aşağıdakı münasibətlə bağlıdır:

$$F_{\xi_{<c}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \xi < -c, \\ F_{\xi}(x) - F_{\xi}(-c-0), & \text{əgər } -c \leq x \leq 0, \\ F_{\xi}(x) + 1 - F_{\xi}(c), & \text{əgər } 0 \leq x \leq c, \\ 1, & \text{əgər } x \geq c \text{ olarsa.} \end{cases}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətlə uyğun K. t. k.-dən böyük ədədlər qanununun və limit teoremlərinin isbatında istifadə olunur.

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F -dirsə, onda $\xi_{<c}$ K. t. k.-nin bütün momentləri, yeni

$$M_{\xi_{<c}}^{\xi} = \int_{|x|<c} x dF, \quad M_{\xi_{<c}}^{\xi^2} = \int_{|x|<c} x^2 dF, \dots$$

vardır və sonludur. c -ni həmişə ehtimalı böyük etmək olar ki, $P\{\xi \neq \xi_{<c}\} = P\{|\xi| \geq c\}$ ehtimalını ixtiyari qədər kiçik etmək

mümkün olsun. Hətta $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün uyğun olaraq, həmişə olduqca böyük qiymətli eht. $c_1, c_2, \dots$

seçmək mümkündür ki, $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\xi_k \neq \xi_{k,c_k}\})$ ehtimalını ixtiyari

qədər kiçik etmək mümkündür olsun; doğrudan da, məs., əgər $P\{|\xi_k| \geq c_k\} < \varepsilon/2^k$ münasibətini təmin edən c_k seçmək mümkün olarsa, onda

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\xi_k \neq \xi_{k,c_k}\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\{|\xi_k| \geq c_k\} < \varepsilon$$

münasibəti alınır.

Beləliklə, hər bir hesabi saylı təsadüfi kəmiyyətlər ailəsinə uyğun olaraq, bu ailədən ixtiyari kiçik ehtimallı hadisə qədər fərqlənən məhdud təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi qarşı olar. Əgər təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının, əsas etibarilə, limit xassələri

araşdırılırsa, onda yuxarıda qeyd olunan «ixtiyari kiçik ehtimal» tələbinə ehtiyac olmur. Aşağıdakı mülahizələr bunu təsdiq edir.

$\{\xi_n\}$ və $\{\xi'_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları bir-birindən yalnız sonlu sayda elementləri ilə sanki yaqin fərqlənirsə, başqa sözlə, əgər bütün ω -lar ($\omega \in \Omega$) üçün eht. sonlu $n(\omega)$ ədədi olarsa ki, $n \geq n(\omega)$ olduqda, $\{\xi_n(\omega)\}$ və $\{\xi'_n(\omega)\}$ ardıcılıqları üst-üstə düşərsə, bu ardıcılıqlara kəsik-ekvivalent (qalıq-ekvivalent) ardıcılıqlar deyilir; yeni simvolik olaraq

$$P\{\omega: \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega) \text{ sonsuz say dəfə}\} = 0.$$

Əgər $\{\xi_n\}$ və $\{\xi'_n\}$ ardıcılıqları eyni bir hadisədə (çoxtuqda) sıfır ehtimalı hadisə dəqiqliyiylə yığılırsa, onda bu ardıcılıqlar ekvi-

valent – yığılan ardıcılıqlar adlanır. $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad S'_n = \sum_{k=1}^n \xi'_k$

olsun.

$$P\{\omega: \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega) \text{ sonsuz say dəfə}\} =$$

$$= \lim_n P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega: \xi_k(\omega) \neq \xi'_k(\omega)\}\right\} \leq \\ \leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega: \xi_k(\omega) \neq \xi'_k(\omega)\}$$

münasibətindən aşağıdakı ekvivalentlik lemması alınır:

$$\text{Əgər } \sum_n P\{\omega: \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega)\} \text{ sırası yığılırsa, onda } \{\xi_n\}$$

və $\{\xi'_n\}$ kəsik-ekvivalent ardıcılıqlardır, buna görə də, $\sum \xi_n$ və

$\sum \xi'_n$ ekvivalent – yığılan sıralardır, $\frac{S_n}{b_n}$ və $\frac{S'_n}{b_n}$ ardıcılıqları

$b_n \rightarrow \infty$ olduqda eyni bir hadisədə sıfır ehtimalı hadisə dəqiqliyiylə eyni bir limitə yığılır.

Əd.: [1] Л о в М., Теория вероятностей, М., 1962.

KƏSİLMƏZ AXIN « непрерывный поток; continuous flow » – ölçülü $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzasının axın olan

$\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ avtomorfizmlərinin eht. ailəsidir ki, ixtiyari

$f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ funksiyası üçün $\mathbb{R} \rightarrow L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ inikası,

$t \in \mathbb{R}$ olduqda, $g(x) = f(T^t x)$, $x \in X$ münasibətinə kəsilməz surətdə çevrilir.

σ – KƏSİLMƏZ FUNKSIYA « σ – непрерывная функция; σ – continuous function » – bax, σ – Ölçülən funksiya.

KƏSİLMƏZ PAYLANMA « непрерывное распределение; continuous distribution » – atomları olmayan ehtimal paylanmasıdır (bax, Atomik paylanma). Ehtimal paylanması düzxətdə, yalnız və yalnız, o halda K. p.-dir ki, onun uyğun paylanma funksiyası kəsilməz olsun. K. p. – mütləq kəsilməz (bu – K. p.-lər sinfinin ən mühüm altsinfidir), singulyar və ya mütləq kəsilməz və singulyar paylanmaların qarışığı ola bilər.

K. p., bəzən, mütləq kəsilməz paylanma adlandırılır.

KƏSİLMƏZ SEMİ – QRUP « непрерывная полу-группа; continuous semi-group » – bax, Semi – grup.

KƏSİŞMƏ(Sİ) / HASİL(i) təsadüfi hadisələrin «пересечение (произведение, совмещение) случайных событий; crossing of random events» – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B təsadüfi hadisələrindən hər ikisi baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir, $A \cap B$ və ya $\inf(A, B)$ kimi işarə olunur.

A_i – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisə, $i \in J$, J isə i -nin qiymətlər aldığı ixtiyari çoxluqdur. A_i hadisələrinin kəsişməsi hadisəsi – $\bigcap_{i \in J} A_i$.

yalnız və yalnız, A_i hadisələrinin hamısı baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir.

Ω – elementar hadisələr fəzası, A – müşahidə oluna bilən ixtiyari təsadüfi hadisədirsə ($A \subset \Omega$), onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap \Omega = A,$$

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

Əgər $C \subset A \cap B$ olarsa, onda $C \subset A$, $C \subset B$ münasibətləri doğrudur, yəni $A \cap B$ hadisəsi A və B hadisələrinin dəqiq aşağı sərhədidir. Hadisələr üçün kəsişmə əməli

kommutativlik: $A \cap B = B \cap A$;

assosiativlik: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

distributivlik: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

idempotentlik: $A \cap A = A$

kassələrə tabədir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. К., 1979; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, М., 1969.

KƏSKİN FƏRQLƏNƏN MÜŞAHİDƏLƏR. а с м а - е н м е л е р « резко выделяющиеся наблюдения.

выбросы; outliers» – seçimin elementlərinin əsas toplusundan kəskin sürətdə fərqlənən müşahidələrdir. Bunlar, adətən, kobud xətlər kimi anlaşılar, belə ki, bu xətlər təsadüfən düzgün hesablanılmama nəticəsində, ölçmə cihazının göstəricilərinin düzgün oxunulmaması və s. nəticəsində yaranır. Əgər bu xətlər aşkar olunmazsa bunlar son nəticənin olduqca güclü təhrifinə səbəb ola bilər. Ən məqsəduyğun hesab olunan üsul kobud xətlərin aşkar edib, onları aradan qaldırmaq, müşahidələrin bilavasitə analizi, onların diqqətlə yoxlanılmasıdır. Statistik metodlardan yalnız şübhə yaradan hallarda istifadə etmək olar. Kobud xətləri aradan qaldırmaq üçün statistik metodların iki sinfi vardır. Bunlardan birincisi (klassik) kobud xətlərin (anomal müşahidələrin) aşkar olunması üçün bir sıra kriterilər sinfidir, ikincisi (ənənəvi) hər hansı bir kriteri baxımından K. f. m. hesab edilən müşahidələrin «atılması», sonra isə maraq doğuran parametrləri qiymətləndirmək üçün statistik metodların sinfidir.

K. f. m.-in «atılmasını», parametrlərin növbəti qiymətləndirilməsində ənənəvi mühümlük ölçülərində deyil, hər hansı mənada optimal sayılan statistik qiymətlərin verdiyi ölçülərdə aparmaq məqsəduyğundur. Adətən, K. f. m.-in hamısından imtina etmək lazım deyildir, əksər hallarda, bu müşahidələri kiçik çəkili götürdükdə yaxşı statistik qiymətlər alınır. Normal qanunlu çoxluqlarda kobud xətlərin aradan qaldırılması üçün məşhur kriterilər E. Pirson (E. Pearson), N. V. Smirnov, F. Qrabbs (F. Grubbs), F. Anskomba (F. Anscombe) məxsusdur (bax, [1], [2]).

Eksponensial qanunlu çoxluqlar üçün K. f. m.-in atılması kriteriləri A. Lorent (A. Lorent) və A. Basu (A. Basu) tərəfindən işlənilmişdir (bax, [1], [3]). Bu kriterilər qaydalı statistikalara, həmçinin

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

statistikalarına əsaslanır, burada $x_1, \dots, x_n$ – müşahidə olunan seçimdir. K. f. m.-lərdən azad olmaq məqsədilə K. f. m.-lərə az həssas statistik qiymətlərdən – robust statistik qiymətlərdən istifadə olunur. Robast prosedurlarda K. f. m., bir qayda olaraq atılmır, bunlar «tipik» müşahidələrdən fərqli olaraq, az çəki ilə götürülür (bax, [4]). Robastlıq nəzəriyyəsində K. f. m.-in təsviri üçün kobud xətlər modelindən istifadə olunur. Ənənəvi $\bar{x}$ və s^2 statistikaları əvəzinə, median tipli robust statistikalarından istifadə edərkən K. f. m.-in atılması üçün kriterilər təklif olunmuşdur (bax, [3]). Smirnov – Pirson statistikası – $\max |x_i - \bar{x}|/s$ kəmiyyətinin robust variantı –

$$\frac{\max |x_i - \text{med}\{x_i\}|}{\text{med}\{x_i - \text{med}\{x_i\}|}$$

şəklindədir, burada $\text{med}\{x_i\}$, – $x_1, \dots, x_n$ müşahidələrinin seçimi medianıdır.

Əd.: [1] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] С м о л я к С. А., Т и т а - р е н к о Б. П., Устойчивые методы оценивания, М., 1980; [4] Х ю б е р П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984.

KƏSMƏ METODU « у с е ч е н и я м е т о д ; truncation method » – ehtimal nəzəriyyəsi teoremlərinin isbat metodudur. İlkin təsadüfi kəmiyyətlə yanaşı kəsik təsadüfi kəmiyyətlərin daxil olunmasına əsaslanır. İxtiyari X təsadüfi kəmiyyətinə $c > 0$ olduqda

$$\hat{X} = \begin{cases} X, & \text{əgər } |X| \leq c, \\ 0, & \text{əgər } |X| > c \text{ olarsa} \end{cases}$$

təsadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulması – ixtiyari tərtib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlərlə iş görmək və ilkin kəmiyyətlərin uyğun momentləri olmadıqda bunlara kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə tətbiq olunan nəticələri tətbiq etmək mümkün olmadığından, kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə bu nəticələri tətbiq etmək imkanını yaradır. Bu metod ehtimali bərabərsizliklər və limit teoremlərinin isbatlarında geniş istifadə olunur.

KƏSRİ BƏYAZ KÜY « д р о б н ы й б е л ы й ш у м ; fractional white noise », kəsri Braun hərəkəti – birinci tərtib stasionar artımları, orta qiyməti sıfıra bərabər, üstlü struktur funksiyası

$$D(\tau) = M \left| \zeta(t+\tau) - \zeta(t) \right|^2 = C |\tau|^m, \quad 0 < m \leq 2$$

olan, $m < 2$ olduqda, $D(\tau)$ -ya müvafiq spektral sıxlıq funksiyası

$$f(\lambda) = C_1 \lambda^{-1-m}, \quad C_1 = (2\pi)^{-1} \Gamma(1+m) \sin \frac{\pi m}{2} C$$

düsturu ilə ifadə olunan $\zeta(t)$ avtomodel Qauss prosesidir. K. b. k.-ü Viner prosesindən (yəni Braun hərəkəti prosesindən)

kəsr tərtibli inteqrallama ilə almaq mümkündür; bu proses avtomodel təsadüfi prosesdir, belə ki, $\zeta(t)$ -nin artımlarının ehtimal paylanmaları ixtiyari $h > 0$ qiymətində $t \rightarrow ht$,

$\zeta \rightarrow h^{-m/2} \zeta$ oxşarlıq çevirmələrinə nəzərən invariantdır. Bezen, $n > 3$ olduqda üstlü spektral sıxlıq funksiyası $f(\lambda) = C_1 \lambda^{-n}$ olan yüksək tərtibli stasionar artımlı avtomodel Gauss prosesləri və spektral sıxlıq funksiyası $f(\lambda) = C_1 \lambda^{-n}$, $n < -1$ olan ümumiləşmiş stasionar Gauss prosesləri də K. b. k. prosesləri adlanır.

Əd.: [1] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1955, т. 19, с. 319–44; [2] Mandelbrot B. B., Van Ness J. W., «SIAM Rev.», 1968, v. 10, № 4, p. 422–37.

KƏSRİ BRAUN HƏRƏKƏTİ «дробное броуновское движение; fractional Brownian motion» – bax. *Kəsri bəyaz küy*.

KƏSRİ FAKTOR EKSPERİMENT «дробный факторный эксперимент; fractional factorial experiment» – ölçmələr sayı tam faktor eksperimentdəkindən az olan, yeni $s_1, s_2, \dots, s_m$ -dən az olan faktor eksperimentdir, burada s_i – i -ci faktorun səviyyələri sayı, m – faktorların sayıdır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

KƏSRİ FAKTOR PLAN «дробный факторный план; fractional factorial design» – bax. *Planlaşdırılması, eksperimentin*.

KƏSRİ KÜY PROSESİ «дробного шума процесс; shot noise process» –

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t - t_n) \quad (1)$$

tipli impulsal təsadüfi prosesdir, burada $\Gamma(t)$ – kvadratı ilə inteqrallanan, verilmiş həqiqi inteqrallanan funksiya, t_n ,

$n = 0, 1, \dots$ – nöqtələrin təsadüfi ardıcılığıdır (adətən, impulsların baş vermə anları Пуассон ardıcılığı fərz olunan). K. k. p. radiotexnikada kəsri küyü – elektron lampının çıxışında katodla qızan elektronların emissiyasının xüsusiyyətindən yaranan, cərəyanın nizamsız fluktuasiyalarını təsvir etmək üçün geniş istifadə olunur (bax. məs., [1] – [3]). $\{t_n\}$ nöqtələrin Пуассон ardıcılığıdırsa, $\zeta(t)$ -nin riyazi gözləməsi və dispersiyası

$$\mathbf{M} \zeta(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) dt \quad (2)$$

$$\mathbf{D} \zeta(t) = \mathbf{M} [\zeta(t) - \mathbf{M} \zeta(t)]^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^2(t) dt \quad (3)$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada λ – vahid zaman ərzində t_n nöqtələrinin sayının orta qiymətidir. Bu düsturları N. Kempbell [4]-də almışdır və çox vaxt bunlar Kempbell teoremi adlandırılır (bax. [3]; [5]). (2) və (3) düsturlarının ümumiləşmiş ifadələri – amplitudları eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan amplitud – modeləşmiş prosesin riyazi gözləməsi və korrelyasiya funksiyası üçün düsturlardır, bu amplitudlar isə impulsların baş vermə anlarının Пуассон ardıcılığına müvafiq

amplitudlardır. K. k. p. $\zeta(t)$ -nin birölçülü ehtimal paylanması və $\zeta(t)$ -nin ixtiyari tərtib semiinvariantlarının düsturları ilə [3]-də tanış olmaq olar.

Əd.: [1] Давенпорт В. Б., Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [2] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [3] Rice S. O., «Bell System Techn. J.», 1944, v. 23, № 3, p. 282–332; [4] Campbell N., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1909, v. 15, p. 117–36; 310–28; [5] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956.

Kİ FAN METRİKASI «Ки Фан метрика; Ky Fan metric» – ehtimalla görə yığılma topologiyasını reallaşdıran mürekkəb ehtimal metriki. Qiymətləri hər hansı separabel (U, d) metrik fəzasından olan ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün bu metrika

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \inf \{ \varepsilon : \mathbf{P}(d(\xi, \eta) > \varepsilon) < \varepsilon \}$$

münasibətilə təyin olunur. Levi – Proxorov metriksinə görə K. F. m. protominimal metrikdir (bax, *Ştrassen teoremi*).

KİÇİK KANONİK ANSAMBL «малый канонический ансамбль; small canonical ensemble» – bax, *Gibbs paylanması*.

KİÇİK YAYINMALAR təsadüfi proseslər və dolaşmalar üçün «малые отклонения для случайных процессов и блужданий; small deviations for random processes and walks» – Y , – $(X, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında təsadüfi proses və ya dolaşmaya uyğun təsadüfi element olarsa, $G \in \mathcal{B}$ və $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\mathbf{P}\{Y \in \varepsilon G\} \rightarrow 0$ şərtini ödəyən $\{Y \in \varepsilon G\}$ şəklində hadisələrdir. K. y. ehtimalları haqqında teoremlər funksional fəzalarda lokal teoremlər rolunu oynayır və Çjun formasında təkrar loqarifm qanunu tipli teoremlərin isbatı üçün mühüm əhəmiyyətə malikdir (bax. [1]).

G oblastları

$$G = G(g^-, g^+) = \{f = f(t) : g^-(t) < f(t) < g^+(t)\},$$

$$g^-(0) < 0 < g^+(0), \quad g^-(t) < g^+(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

münasibətlərlə təyin olunan zolaqlar olduqda, K. y. ehtimalları daha çox öyrənilmişdir. Əgər $Y = w = w(t)$ standart Viner prosesi $[0, 1]$ parçasında verilmişdirsə və $g^\pm(t)$ funksiyaları olduqca hamardırlarsa, onda

$$\mathbf{P}\{w \in \varepsilon G(g^-, g^+)\} \sim c \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2} \int_0^1 (g^+(t) - g^-(t))^2 dt \right\}$$

münasibəti doğrudur, burada $c = c(g^-, g^+)$ konstantı aşkar şəkildə tapılmışdır (bax. [2], [4]).

$Y = s_n = s_n(t)$, – $(k/n, S_k/\sigma\sqrt{n})$, $k = 0, 1, \dots, n$ nöqtələri üzrə qurulmuş təsadüfi sınıq xətt olsun; $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ və X_k toplananları asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\mathbf{M} X_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D} X_1$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Əgər $g^\pm(t) \equiv a^\pm \equiv \text{const}$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə $\mathbf{P}\{s_n \in \varepsilon G\}$ ehtimalının asimptotikası $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$,

$\varepsilon\sqrt{n} \rightarrow \infty$ yayınmalarının bütün spektri üçün tapılmışdır (bax, [1]):

$$P\{\varepsilon a^{-}\sqrt{n} < S_k < \varepsilon a^{+}\sqrt{n}, k=1, \dots, n\} \sim c\mathcal{N}(\varepsilon\sqrt{n}(a^{+}-a^{-})/2)$$

burada $\lambda(a)$, $-T_a\varphi(x) = M\{\varphi(X_1/a+x), |X_1/a+x| < 1\}$ operatorunun modula görə maksimal məxsusi ədəddir; bu halda $a \rightarrow \infty$ olduqda $\ln \lambda(a) \sim -\pi^2\sigma^2/8a^2$. Əgər $g^{\pm}(t)$ sərhədləri əyriləli olarsa, onda K. y. ehtimallarının kobud (loqarifmik) asimptotikası üçün ixtiyari $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon\sqrt{n} \rightarrow \infty$ şərtlərini ödəyən ixtiyari ε , n üçün

$$\ln P\{s_n \in \varepsilon G(g^{-}, g^{+})\} \sim \ln P\{w \in \varepsilon G(g^{-}, g^{+})\}$$

müddəası doğrudur (bax, [3], [5]).

Gauss təsadüfi proseslərinin müəyyən bir sinfinin zolaqları üçün (bax, [4], [6]) və Hilbert fəzasında kürelər üçün (bax, [7]) K. y. ehtimallarının asimptotikası məlumdur.

Əd.: [1] Могульский А. А., «Тр. Ин-та матем. СО АН СССР», 1985, т. 5, с. 45–56; [2] Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1982, т. 23, № 3, с. 161–74; [3] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 755–65; [4] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1981, т. 29, № 2, с. 291–301; [5] Новиков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1980, т. 44, № 4, с. 868–85; [6] Сытая Г. Н., в кн.: Аналитические методы в теории вероятностей, К., 1979, с. 95–98; [7] Сытая Г. Н., в сб.: Теория случайных процессов. Республиканский межведомственный сборник, К., 1974, в. 2, с. 93–104.

KİFER – VEYS MƏSƏLƏSİ «Кифера – Вейса задача; Kiefer – Weiss problem» – bax, *Ardıcıl yoxlanılması, hipotezlerin*.

KİFER – VOLFOVİTS PROSEDURU stoxastik approximasıyanın «Кифера – Вольфовица процедура стохастической аппроксимации; Kiefer – Wolfowitz procedure of stochastic approximation» – naməlum *reqressiya* funksiyasının ekstremum nöqələrinə tapmaq üçün prosedurdur. J. Kifer və J. Volfovits stoxastik approximasıyanın *Robbins – Monro proseduru* ideyasına əsaslanaraq, naməlum reqressiya funksiyasının maksimum nöqtələrinin tapılması ilə əlaqədar aşağıdakı məsələyə baxmışlar (bax, [1]). $R(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $-x = x_0$ nöqtəsində yeganə maksimuma malik, kəsilməz differensiallanan reqressiya funksiyası olsun. Məsələ ondan ibarətdir ki, $G(n, x)$ orta qiymətləri sıfıra bərabər təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $Y(n, x) = R(x) + G(n, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ asılı olmayan ölçmələri üzrə x_0 kəmiyyəti tapılmalıdır. Məsələnin həlli üçün aşağıdakı prosedur təklif olunmuşdur (K. – V. p.):

$$\begin{aligned} X(1) &= x, X(n+1) - X(n) = \\ &= \frac{a(n)}{c(n)} [Y(n+1, X(n) + c(n)) - Y(n+1, X(n) - c(n))], (*) \end{aligned}$$

burada x – ixtiyari başlanğıc nöqtə, $a(n)$ və $c(n)$ – hər hansı xüsusi olaraq seçilən ardıcılıqlardır. İsbat olunmuşdur ki, $R(x)$ və $G(n, x)$ üzərinə qoyulan bəzi şərtlərlə (*) K. – V. p. n artdıqca ehtimalla görə x_0 -a yığılır. Məs., X_n -in x_0 -a 1 ehtimalla yığıldığı isbat olunmuşdur (bax, [3]). Xüsusi surətdə

normalanmış $X(n) - x_0$ prosesinin paylanmalarının xassələri öyrənilmişdir (bax, [4] – [6]).

Əd.: [1] Kiefer J., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, № 3, p. 462–66; [2] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [3] Blum J., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, № 4, p. 737–44; [4] Derman C., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 532–36; [5] Dupac V., «Casopis pestov. mat.», 1957, v. 82, p. 47–75; [6] Sacks J., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 2, p. 373–405.

KİMYƏVİ POTENSİAL «химический потенциал; chemical potential» – bax, *Potensial(i) Gibbs meydanının*.

KİNETİK KÖÇÜRTMƏ TƏNLİYİ bir hissəcik halında paylanma funksiyası üçün «кинетическое уравнение переноса для одночастичной функции распределения; kinetic transfer equation for one-particle distribution function» – qeyri – tarazlıqlı statistik fizikada kinetik nəzəriyyənin əsas tənliklərindən biridir. Kinetik qaz nəzəriyyəsinə Boltzman tənlikləri, Vlasov tənlikləri, plazma fizikasında Balesku – Lenard tənliyi, neytronlar, fotonlar, elektron və s. kimi hissəciklərin müxtəlif köçürmə tənlikləri – mühüm K. k. t.-ləridir.

Hissəciyin faza fəzası $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının oblası olduğu halda, az qarışıq olan hissəciklər mühitində K. k. t.-lərinin çoxunu asimptotik olaraq, $Af = g$ şəklində, hər hansı xətti A operatoru ilə stasionar köçürmə prosesi üçün [və adətən, $(\partial/\partial f)f + Af = g$ şəklində qeyri – stasionar proses üçün] ehtimal sıxlığı f və ya x -in üçün uyğun sərhəd şərtlərlə

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [(\partial/\partial x^i) a^i(x) f] - \sum_{i,j=1}^n [(\partial^2/\partial x^i \partial x^j) b^{ij}(x) f] + \\ + \lambda(x) f - \int f(x') \mathcal{K}(x', x) dx' = (Af)(x) \quad (*) \end{aligned}$$

tənliyi şəklində yazmaq olar. $A = D + \Lambda - K$ ayrılışından differensial D operatorunun 1-ci və 2-ci tərtib hədləri uyğun olaraq, hamar (orta) hərəkəti və hissəciklərin kəsilməz diffuziyasını təsvir edir, toqquşmalar tezliyi $\lambda(x)$ -ə vurma operatoru Λ kəsilməz hərəkətin stoxastik qınılma (hissəciklərin udulma, səpələnmə və ya bölünməsi aktında) qanununu, K integral operatorunun nüvəsi $\mathcal{K}(x', x)$ səpələnmə və bölünmə (əgər varsa) qanununu təyin edir. Qoşma A^* operatoru (bax, *Qoşma köçürmə məsələsi*) əmsallar və nüvə üzərində təbii şərtlərlə, $\mathbb{R}^n$ -də zaman üzrə birincis qınılan Markov prosesi $X(t)$ -nin (bu şəxələnmə proses ola bilər) infinitezimal operatorudur. Bu halda D operatoru $Y(t)$ kəsilməz Markov prosesinin infinitezimal operatoru olur. $X(t)$ prosesinin trayektoriyaları $Y(t)$, $t_{n-1} < t < t_n$ Markov prosesinin $t_1, \dots, t_n, \dots$ anlarında iki ardıcıl sıçrayışları arasında mühitin hissəcikləri ilə toqquşmalarında yaranan trayektoriyanın parçalarından ibarətdir. Sıçrayışlar (və artımlar) kəmiyyətinin statistikası $X(t_n - 0) \rightarrow X(t_n + 0)$ $\mathcal{K}$ nüvəsi ilə (və ya onun uyğun toplananlara dekompozisiyası ilə) təyin olunur, sıçrayışlar arasındakı zaman müddətinin statistikası $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ $Y(t)$ Markov prosesinin (bax, yuxarı) trayekto-

riyalarında $Y(t_{n-1}) = X(t_{n-1} + 0)$ şərti ödənilməklə multiplikativ integralla təyin olunur; yeni

$$P\{\tau_n > t\} = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(Y(t_{n-1} + s)) ds\right\}.$$

Beləliklə, şəxələnen olmayan proseslər üçün $A^* = D^* + \Lambda - K$ operatoru köçürmə prosesinin tam stoxastik differensial təsvirini verir (bax, [4]). K. k. t.-nin belə ehtimali şərhli köçürmə məsələlərinin *statistik modeləşdirilməsi* üçün əsas olur. (*) K. k. t. ilə köçürmənin təsviri Payerls tənliyi (ümumiləşmiş) ilə bağlıdır. Bir qayda olaraq, (*) K. k. t.-nin tətbiqində hədlərin bir hissəsi iştirak etmir, məs., səpələnmə ya xalis sıçrayışvari və ya xalis diffuzion fərz olunur.

Əd.: [1] Ахмезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [2] Сипин В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [3] Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [4] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967, с. 5–52; [5] Кинетическое уравнение, Матем. энц., т. 2, М., 1979; [6] Переноса уравнения, Матем. энц., т. 4, М., 1984; [7] Переноса излучения теория, Матем. энц., т. 4, М., 1984.

KLARK DÜSTURU « Кларка формула; Clark formula » – $w = (w_t)_{t \in [0, 1]}$ Viner prosesinin hamar $f(w)$ funksionalını stoxastik integral şəklində ifadə edən düsturdur. Əgər f funksionalı $C_{[0, 1]}$ kəsilməz funksiyalar fəzasında Freşe mənada differensiallanan olarsa və müəyyən artım şərtlərini ödəyərsə, $\lambda(dt, x)$ isə Riss teoreminə görə $f'(x)$ (x nöqtəsində Freşe törəməsi) xətti funksionalına uyğun, $[0, 1]$ -də ölçülərsə, onda

$$f(w) = Ef(w) + \int_0^1 E[\lambda([t, 1], w) | \mathcal{F}_t^w] dw_t.$$

Bəzən

$$\xi = E\xi + \int_0^1 \varphi_t dw_t$$

ifadəsi də K. d. adlandırılır, bu ifadə ixtiyari kvadratik integrallanan $\xi = g(w)$ təsadüfi kəmiyyəti üçün doğrudur, burada uzlaşdırılmış $\varphi = (\varphi_t)$ prosesi

$$E \int_0^1 \varphi_t^2 dt < \infty$$

şərti ödənildikdə, birqiymətli təyin olunur.

Əd.: [1] Clark J. M. C., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 4, p. 1282–95.

KLASSİFİKATOR « классификатор; classifier » – təsnifat məsələlərində, diskriminant analiz və obrazların müəyyənləşdirilməsi məsələlərində yaranan statistik *helledici qayda-nın* xüsusi halıdır. Sözün dar mənasında K. signalları, obrazları təsnifedici texniki qurğudur.

KLASTER « кластер; cluster » – bax, *İyerarx prosedurları, təsnifatın*.

426 KLAS TER

KLASTER – ANALİZ « кластер – анализ; cluster analysis » – verilənlərin bu və ya digər çoxluqlarının əsası olan iyerarxları (bölgüləri) formalaşdıraraq və ya aşkara çıxaran hesablama prosedurları toplusudur. Bu bölgüləri reallaşdıraraq alqoritmlər, bir qayda olaraq, iki əsas addımdan ibarətdir: metrikanın və ya oxşarlıq göstəricilərinin hesablanması və klasterlərin addım-baddım qurulması. K. – a. məsələləri iki əsas tipə ayrılır. Birinci tip məsələlər n obyektəndən ibarət I çoxluğunun $m < n$, m klasterə bölünməsi tipli məsələlərdir, yeni klasterlərin sayını apriori seçmək olar və bu say əvvəlcədən verilə bilər. İkinci tipdə klasterlərin sayı çoxluğun klasterlərə bölünmə prosesində, hər hansı məqsədli funksiyanın optimizasiyasına əsaslanaraq təyin olunur.

Əd.: [1] Дюран Б., Оделл П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Классификация и кластер, пер. с англ., М., 1980.

KLASTER MODEL « кластерная модель; cluster model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

KLASTER – PROSEDUR « кластер – процедура; cluster procedure » – verilən metrika mənasında bir-birinə yaxın yerləşən iki obyektin (klasterin) bir klasterə birləşdirilməsi prosedurudur. Bu onunla nəticələnir ki, obyektlərin əvvəlki sayı azalır və bunların sayı $(n - 1)$ -ə bərabər olur, belə ki, bir klaster iki obyektəndən ibarət olub, digər $n - 2$ sayda klasterlərin hər birində bir obyekt olur. K. - p. klasterlərin biraddımla qurulmasında tətbiq olunur.

Əd.: [1] Дюран Б., Оделл П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Классификация и кластер, пер. с англ., М., 1980.

KLASTERLƏRƏ AYRILIŞ METODU « кластерных разложений метод; method of cluster expansion » – statistik fizika və kvant meydan nəzəriyyəsində fiziki sistem və meydanların tədqiqatında tətbiq olunan analitik metodlardan biridir. $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}^d \text{ və ya } t \in \mathbb{Z}^d\}$, $-d$ – ölçülü $\mathbb{R}^d$ fəzasında (və ya d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində) təyin olunmuş təsadüfi meydan, $f_A, A \subset \mathbb{R}^d (A \subset \mathbb{Z}^d)$ – meydanın lokal funksionalı olsun (yeni məhdud A çoxluğunda yalnız konfigurasiyaların qiymətlərindən asılı olan, meydan konfigurasiyasının funksiyası olsun). Bu funksionalın orta qiyməti $\langle f_A \rangle$ -nin klaster ayrılışı

$$\langle f_A \rangle = \sum_R b_R(f_A) \quad (1)$$

şəklində ifadəyə deyilir, burada cəmləmə müəyyən «yaxşı görünən» R indekslərinin toplusu üzrə aparılır, $b_R(f_A)$ kəmiyyətləri isə f_A -nın qiymətləri və meydanı təyin edən «parametrin» qiymətinə görə «olduqca aşkar şəkildə» ifadə olunurlar. (Məs., ən tipik sayılan Gibbs təsadüfi meydan halında «parametr» qarşılıqlı təsir potensialıdır; bax, [1]). (1)-ə analogi klaster ayrılışlarını təsadüfi meydanın digər xarakteristikaları üçün də almaq olar (məs., Gibbs təsadüfi meydanları üçün xüsusi entropiya, xüsusi sərbəst enerji, vakuum vəziyyəti üzrə $\langle \rangle$ orta qiymətləri üçün də).

Daha ətraflı, bax, В. и М. С. Э., М., 1999, səh. 232.

Əd.: [1] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [2] Глимм Дж., Джеффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [4] Ициксон К., Зюбер Ж. Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

KOBUD XƏTALAR MODELİ « модель грубых ошибок; rough errors model » – bax, *Robast qiymət*.

KOD « код; code » – A əlifbasında bütün sözlər çoxluğu-nun ixtiyari altçoxluğu. İnformasiya nəzəriyyəsində A əlifbası kimi rabitə kanalının girişində siqnallar çoxluğu $\mathcal{X}$ seçilir və baxılan K -lara müəyyən məhdudiyyətlərlə K -un bezi funksio-nallarının optimizasiya məsələləri araşdırılır.

Əsas məsələlər: 1) K -un birqiymətli dekodlanması şərti ilə onun orta uzunluğunun minimizasiyası; 2) *səhv dekodlama ehtimalı*-nın minimizasiyası; 3) K -ların müxtəlif siniflərində *kod məsafəsi*-nin maksimizasiyası kimi məsələlərdir. Əlifbada $A = \{0, 1\}$ olduğu hallara, yeni ikilik kodlara daha çox baxılır.

Birinci məsələ məlumatlar mənbəinin *kodlanması* problemine aiddir. Bu problemin həllinin bezi prinsipial anları yaddaşsız diskret məlumatlar mənbəinin ikilik kodlanması misalında göstərilmiş-dir; bu halda mənbəinin bir-birindən asılı olmadan $p_1, \dots, p_m$ ehti-malları ilə uyğun olaraq $x_1, \dots, x_m$ məlumatlarını doğurduğu fərz olunur. Hər bir x_i məlumatına l_i uzunluqlu $y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(l_i)})$ kod sözü qarşı qoyulur (yəni x_i kodlaşdırılır). Birqiymətli dekodlanma şərtindən (yəni ixtiyari ardıcılıq ard-ardınca gələn kod sözlərinə birdən artıq olmayan yeganə üsulla bölünə bilər) aydındır ki, $\sum 2^{-l_i} \leq 1$ bərabərsizliyi ödənilir (Kraft – Mak-

Millan bərabərsizliyi) və orta uzunluq $l = \sum p_i l_i$ mənbəinin entropiyası $H = -\sum p_i \log_2 p_i$ -dən kiçik deyildir.

l -in H -a yaxınlaşması üçün təyin edilən məlum konstruksiya-ların *kodlar* adlandırılmasına baxmayaraq, bu konstruksiya-lara *kodlanma* kimi baxmaq düzgün olardı, belə ki, orta uzunluqlu K -un funksionalı üçün hansı məlumata hansı kod sözünün uyğun olması mühümdür.

İkinci məsələnin həllində səhvləri korrektleyici K -lar mühüm rol oynayır. Məs., additiv küylü kanal halında (giriş əlif-basının çıxış əlifbası ilə üst-üstə düşdüyü və Abel qrupu strukturu olduğu halında) deyilir ki, « y signalı ötürüldükdə $e = \tilde{y} - y \neq 0$ xətası baş vermişdir», burada $\tilde{y}$ rabitə kanalının çıxışındakı signaldır. Onda tərifi görə C kodu xətalara hər hansı E çoxluğunun səhvlərini korrektleyir, bu şərtlə ki, $c + e = c' + e'$ bərabərliyindən $c = c'$ olduğu alınsın ($c, c' \in C, e, e' \in E$). Belə kanallar üçün səhv dekodlama ehtimalı kiçik olan K -un qurulması, mahiyyətə, verilən kanal üçün «tipik» səhvlər çoxluğu E -nin səhvlərini korrektleyici K -un qurulmasına gətirilir. Məs., ikilik simmetrik kanal üçün «tipik» çoxluq kimi səhvlər çoxluğu E_t -ni götürmək olar ki, bu səhvlər kod sözünün mövqelərindən t -dən artıq saydasına aid olmur. C kodu ilə E_t səhvlər çoxluğunda səhvlərin korreктlenməsi – E_t -nin kod məsafəsinin Hemming metrikası ilə uzunluğu $2t+1$ -dən az olmur və belə K , t sayda səhv korrektleyici kod adlanır. $t \leq \delta n$ sayda səhvlər düzəldən, n uzunluqlu yaxşı ikilik blok K -un sürəti R_δ^2 üçün

$$R_\delta \geq 1 - h_2(\delta)$$

Varşamov–Hilbert bərabərsizliyi doğrudur, burada

$$h_2(x) = x \log_2(q-1) - (x \log_2 x + (1-x) \log_2(1-x)).$$

Əgər Varşamov – Hilbert sərhədi asimptotik dəqiq olarsa (bu geniş yayılmış hipotezdir), onda ikilik giriş əlifbası olan yaddaşsız ixtiyari diskret kanal üçün etibarlılıq funksiyasının məlum aşağı

sərhədinin dəqiqliyi nəticə kimi alınır (bax, *Səhv dekodlama ehtimalı*).

Rabitə kanallarının bir çox tipləri üçün ikinci və qismən üçüncü məsələnin həlli münasib ansamblda (ehtimal fəzasında) araşdırılan funksionalın orta qiymətinin hesablanmasına əsaslanır (bax, *Təsədüfi kodlar* (n)ma). Bu halda olduqca tipik hal səhv kodlama ehtimalının və kod məsafələrinin ya «orta hesabla», ya da «sanki hamısı» üçün doğru olan qiymətlərinin konstruktiv metodlarla alınmadığı bir haldır. $q \geq 49$ olduqda q -lük K -lar üçün ($A = \{0, 1, \dots, q-1\}$ olduqda) Varşamov – Hilbert sərhədi-

nin yaxşılaşması istisna haldır, lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu $R_\delta^{(q)} \geq 1 - h_q(2\delta)$ sərhədi xətti K -ların «sanki hamısı» üçün dəqiqdir.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Чисар И., Кер-нер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [4] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., Теория кодов, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1979; [5] Гопла В. Д., «Докл. АН СССР», 1981, т. 259, № 6, с. 1289–90; [6] Влэдуч С. Г., Кацман Г. Л., Цфасман М. А., «Проблема передачи информации», 1984, т. 20, № 1, с. 47–55.

KOD ağacvari « код древовидный; tree code » – bax, *Ağacvari kod*.

KOD(u) blok « код блоковый; block code » – bax, *Blok kod*.

KOD xətti « код линейный; linear code » – bax, *Blok kod*.

KOD(u) kaskad « код каскадный; cascade code » – bax, *Kaskad kod*.

KOD konvolyusion « код сверточный; convolutional code » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD qeyri-müntəzəm « код неравномерный; variable-length code » – bax, *Qeyri-müntəzəm kod*.

KOD qruplu « код групповой; group code » – bax, *Blok kod*.

KOD rekurrent « код рекуррентный; recurrent code » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD; sürət « код; скорости; code rate » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD şəbəkəvari « код решетчатый; trellis code » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD şəbəkəvari xətti « код решетчатый линейный; trellis linear code » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD tsiklik « код циклический; cyclic code » – bax, *Blok kod*.

KOD uzunluğu « код длина; code length » – bax, *Blok kod*.

KOD; yaddaş « код; память; code memory » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD ARDICILLIĞI « кодовая последовательность; code sequence » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD MƏSAFƏSİ « кодовое расстояние; code distance » – *kodun* müxtəlif sözləri arasında məsafələrdən minimumudur. Giriş və çıxış əlifbaları üst-üstə düşən rabitə kanalında əgər giriş signalı y və çıxış signalı $\tilde{y}$ arasında $d(y, \tilde{y})$ məsafəsi K m.-nin yansıdan kiçik olarsa, onda kod məlumatı düzgün bərpa edə bilər (dekodlaya bilər).

Kodlama nəzəriyyəsində sözlər fəzasında araşdırılan metrikalar müəyyən rabitə kanalları ilə əlaqədardır. Məs., $y = (y_1, \dots, y_n)$ və $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ sözlərində üst-üstə düşməyən mövqələrin sayı kimi təyin olunan **Hemming metrikası** $d_H(y, \tilde{y})$ və ikilik simmetrik kanalın keçid funksiyası $p(\tilde{y}|y)$

$$p(\tilde{y}|y) = p^{d_H(y, \tilde{y})} (1-p)^{n-d_H(y, \tilde{y})}$$

münasibətlə əlaqədardır; buradan aydındır ki, məs., $p < 1/2$ olduqda, doğruluq xətliliyi maksimumu üzrə və məsafənin minimumu üzrə dekodlamalar üst-üstə düşür.

Digər metrikalarda – Evklid, Li, asimmetrik, paket, arifmetik və s. kimi metrikalarda da K m. öyrənilmişdir. Kod sürəti qeyd olunduğu halda K m.-nin asimptotikası *səhv dekodlama ehtimalının* eksponensial azalma xarakteri ilə sıx əlaqədardır. Hal-hazırda yuxarıda qeyd olunan metrikaların heç biri üçün K m.-nin dəqiq asimptotikası məlum deyildir (bununla belə, Hemming metrikası halında bu asimptotika «sanki bütün» xətti kodlar üçün məlumdur).

Əd.: [1] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [2] Левенштейн В. И., «Проблемы кибернетики», 1983, в. 40, с. 43–110; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

KOD SÖZ « кодовое слово; code word » – bax, *informasiya nəzəriyyəsi*.

KODER « кодер; coder » – bax, *Konvolutsion kod*.

KODLAMA baxışla « кодирование с подглядыванием; eribbing encoding » – bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi*.

KODLA(N)MA « кодирование; encoding » – $\mathcal{X}$ çoxluğunun $\mathcal{Y}$ əlifbasının sözləri çoxluğuna inikasıdır. *Informasiya nəzəriyyəsində* $\mathcal{X}$ məlumatlar mənbəinin doğruluğu hər hansı çoxluq $\mathcal{Y}$ rabitə kanalının girişində signalın çoxluğu olduğu halda K araşdırılır. *Informasiya nəzəriyyəsində* həll olunacaq məsələlərdən asılı olaraq müxtəlif K -lar istifadə olunur: məlumatlar mənbəinin *kodlanması*, *təsadüfi kodlanma*, *universal kodlanma*.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

KODLA(N)MA ehtimali (stoxastik) « кодирование вероятностное (стохастическое); stochastic source encoding » – bax, *Kodlanma(sı)* məlumatlar mənbəinin.

KODLA(N)MA kombinator « кодирование комбинаторное; combinatorial encoding » – bax, *Kodlanma(sı)* məlumatlar mənbəinin.

KODLA(N)MA; mürəkkəbliк « кодирование; сложности; complexity of coding » – bax, *Mürəkkəbliк(yi)* kodlama və dekodlamanın.

KODLA(N)MA təsadüfi « кодирование случайное; random encoding » – bax, *Təsadüfi kodlanma*.

KODLA(N)MA universal « кодирование универсальное; universal encoding » – bax, *Universal kodlanma*.

KODLA(N)MA baxışla « кодирование с подглядыванием; eribbing encoding » – kodlayıcı qurğular arasında müxtəlif tip əlaqələr daxil edilməsi mümkün olan *kodlamadır*.

Bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*.

KODLAMA **TEOREMLƏRİ** « кодирования теоремы; coding theorems » – bax, *Informasiya nəzəriyyəsi*.

KODLANMA(sı) əlavə informasiyalı mənbənin « кодирование источника с дополнительной информацией; source encoding with side information » – çoxkomponentli məlumatlar mənbəinin kodlanma məsələlərindən biridir. Ümumi sxemin terminlərində (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi*) bu məsələ aşağıdakı şəkildə ifadə olunur. İki komponentli $U = (X_1, X_2)$ mənbəinə ($M=2$) baxılır. $A_1 = \{1\}$ və $A_2 = \{2\}$ çoxluqları ilə verilən iki kodlayıcı qurğu ($K=2$) və $B_1 = \{1\}$, $C_1 = \{1, 2\}$ çoxluqları ilə verilən bir dekodlayıcı qurğu ($J=1$) vardır.

Beləliklə, dekodlayıcı qurğu yalnız X_1 komponentini bərpa etməlidir. X_2 komponenti isə köməkçi komponentdir (əlavə informasiya). U – ehtimal paylanması $p(x_1, x_2)$ ilə verilən, yaddaşsız, diskret stasionar iki komponentli mənbə olduqda kodlamanın məqbul sürətlər oblastı $\mathfrak{R} = \{(R_1, R_2)\}$ aşağıdakı qayda ilə hesablanmışdır. $\mathfrak{P}$, – (X_1, X_2, V) təsadüfi kəmiyyətlərinin üçlüyü çoxluğu olsun və $p(x_1, x_2)$ isə (X_1, X_2) -nin paylanması, $X_1 - X_2 - V$ -nin Markov zənciri (yəni X_1, V_2, X_2 verildiyi halda şərti asılı deyildirlər) əmələ gətirdiyi fərz olunur və V -nin aldığı qiymətlərin sayı $a+2$ -dən çox deyildir, burada a ədədi U mənbəinin X_2 komponentinin qiymətləri sayıdır. H şərti entropiya, I qarşılıqlı informasiya olduqda (bax, *Informasiya miqdarı*) $(X_1, X_2, V) \in \mathfrak{P}$ üçün

$$\mathfrak{R}(X_1, X_2, V) = \{(R_1, R_2) : R_1 \geq H(x_1/V), R_2 \geq I(X_2; V)\}$$

olsun. Onda

$$\mathfrak{R} = \text{co}(U(X_1, X_2, V) \in \mathfrak{P} \mathfrak{R}(X_1, X_2, V))$$

berabərliyi doğrudur, burada co – qapanq örtüyün işaresidir.

Təsvir olunan məsələnin bir sıra ümumləşmələri araşdırılmışdır. Məs., əlavə informasiyalı mənbənin K -na Gauss mənbələri üçün baxılmışdır, məlumatların ümumi dəqiqlik kriterisi ilə bərpasına da baxılmışdır.

Əd.: [1] Гельфанд С. И., Прелов В. В., в кн.: Итоги науки. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 15, М., 1978, с. 123–62; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Ahlswede R., Körner J., «IEEE Trans. Inf. Theory», 1975, v. IT 21, № 6, p. 629–37; [4] Wyner A., «IEEE Trans. Inf. Theory», № 3, p. 294–300.

KODLANMA(sı) məlumatlar mənbəinin « кодирование источника сообщений; source encoding » – informasiya nəzəriyyəsinin informasiyanın uğurla camlaşdırılmasını (kompakt ifadə edilməsini) öyrənən bölməsi.

dir. Məlumatlar mənbəi iki növə ayrılır: ilkin əlifbanın bütün sözlər çoxluğunun hər hansı altçoxluğunu doğuran kombinator məlumatlar mənbəi və bu sözləri müəyyən ehtimallarla doğuran ehtimali (stoxastik) məlumatlar mənbəi. Məlumatlar mənbəinin K – doğurulmuş sözlərin çıxış əlifbasının sözlərinə eynilə (inyektiv) inikasıdır; C dəyəri ehtimali mənbə üçün bir giriş hərfinə uyğun çıxış hərflərinin orta sayı, kombinator mənbə üçün isə maksimal saydır. Məlumatlar mənbəinin K nəzəriyyəsinin əsas faktı: C dəyərinin infimumu mənbənin entropiyası H -ə bərabərdir ($\inf C = H$); bu fakt mənbələrin geniş sinfi və K üçün isbat olunmuşdur. C dəyəri H entropiyasına yaxın kodların qurulması metodları işlənmişdir. Məlumatlar mənbəinin K nəzəriyyəsi informasiyanın kompüterdə yerləşdirilməsində və rabitə praktikasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

KOHERENTLİK « когерентность; coherency » – iki $X(t)$ və $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$ stasionar təsadüfi proseslərinin uzlaşmasının, bu proseslər arasında xətti asılılıqdan (bax, Xətti filtr) yayınmasını ölçən xarakteristikadır. Xətlər sırası

$$Z(t) = Y(t) - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u)X(u), \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |a(u)| < \infty$$

(diskret zaman halında) və

$$Z(t) = Y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)X(u)du, \quad -\infty < t < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(u)| du < \infty$$

(kəsilməz zaman halında) $Y(t)$ və $X(t)$ sıraları arasındakı xətti asılılıqdan yayınmanı xarakterizə edir. $Z(t)$ prosesinin spektral sıxlığı

$$f_{ZZ}(\lambda) = f_{YY}(\lambda) \left[1 - \frac{|f_{YX}(\lambda)|^2}{f_{XX}(\lambda)f_{YY}(\lambda)} \right], \quad -\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f_{XX}(\lambda)$, $f_{YY}(\lambda)$ və $f_{YX}(\lambda)$ – uyğun olaraq, $X(t)$ və $Y(t)$ skalyar proseslərinin spektral sıxlığı və qarşılıqlı spektral sıxlıq funksiyalarıdır.

$$K_{YX}(\lambda) = \frac{f_{YX}(\lambda)}{[f_{XX}(\lambda)f_{YY}(\lambda)]^{1/2}}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

funksiyası koherentlik funksiyası və ya koherentlik spektri adlanır; ədəbiyyatda bəzən bu funksiya koherentlik də adlanır.

Əgər $K_{YX}(\lambda) \equiv 1$ və ya $K_{YX}(\lambda) \equiv -1$ olarsa, onda xətlər sırası $Z(t)$ -nin olmadığını ifadə edir, bu isə $X(t)$ və $Y(t)$ zaman sıralarının xətti asılılığına dəlalət edir. Əgər $K_{YX}(\lambda) \equiv 0$ olarsa, onda $Y(t)$ sırası filtrin çıxışında xətlər sırası $Z(t)$ ilə üst-üstə düşür və bu halda xətti asılılıq yoxdur. $0 < |K_{YX}(\lambda)|^2 < 1$ halında aralıq vəziyyət olur.

$K_{YX}(\lambda)$ funksiyası tezlik oblastında korrelyasiya funksiyasının kompleks ümumiləşməsidir və

$$K_{YX}(\lambda) = |K_{YX}(\lambda)| e^{iF_{YX}(\lambda)}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

şəklində ifadə oluna bilər;

$$F_{YX}(\lambda) = \arctg \left(-\frac{\operatorname{Im} f_{YX}(\lambda)}{\operatorname{Re} f_{YX}(\lambda)} \right)$$

funksiyası faza adlanır. $X(t)$ və $Y(t)$ prosesləri xətti asılı olduqda faza ya $F_{YX}(\lambda) \equiv 0$ və ya $F_{YX}(\lambda) \equiv \pm \pi$ qiymətlərini, xətti asılılıq olmadığı halda isə $F_{YX}(\lambda) = \pm \pi/2$ qiymətini alır. $X(t)$ və $Y(t)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$ seçimləri üzrə K funksiyasının tutarlı və meylsiz statistik qiyməti

$$\hat{K}_{YX}(\lambda) = \hat{f}_{YX}(\lambda) [\hat{f}_{XX}(\lambda) \hat{f}_{YY}(\lambda)]^{-1/2} \quad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur; $\hat{f}_{YX}(\lambda)$, $\hat{f}_{XX}(\lambda)$, $\hat{f}_{YY}(\lambda)$ spektral sıxlığın asimptotik tutarlı və asimptotik meylsiz qeyri – parametrik statistik qiymətləridir.

Koherentlik əmsalı və ya koherentlik spektrinin modulunun kvadratı $X(t)$ və $Y(t)$ skalyar proseslərinin iki tezlik komponentləri arasındakı λ tezliyində korrelyasiyanı xarakterizə edir və $0 \leq |K_{YX}(\lambda)|^2 \leq 1$ bərabərsizliklərini ödəyir.

$X(t)$ və $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots, N-1$ seçimləri üzrə K əmsalının asimptotik tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiyməti

$$|K_{YX}(\lambda)|^2 = \left| \hat{f}_{YX}(\lambda) \right|^2 \left| \hat{f}_{XX}(\lambda) \hat{f}_{YY}(\lambda) \right|^{-1} \quad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Birölçülü $Y(t)$ prosesi üçün (və ya çoxölçülü prosesin ayrılıqda götürülmüş hər bir komponenti üçün) və r – ölçülü $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ vektor prosesi üçün toplam koherentlik (рус. множественная когерентность)

$$|K_{YX}(\lambda)|^2 = f_{YX}(\lambda) f_{XX}^{-1}(\lambda) f_{XY}(\lambda) f_{YY}^{-1}(\lambda), \quad (3)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $f_{YX}(\lambda)$, $f_{XY}(\lambda)$, $f_{XX}(\lambda)$ və $f_{YY}(\lambda)$ – $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı spektral sıxlıqlarının matrisləridir, $f_{XX}(\lambda)$, $f_{YY}(\lambda)$ – $X(t)$ prosesinin spektral sıxlığının orlaşmayan matrisidir, $f_{YY}(\lambda) > 0$ isə $Y(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır.

Toplam K üçün statistik qiymət K əmsalının statistik qiymətinə analoji olaraq (3) matrisinin hər bir elementi üçün təyin olunur və o, (2) statistik qiymətinə xas olan bütün xassələri ödəyir.

Xüsusi koherentlik $Y(t)$ -dən xətti filtr vasitəsilə r – ölçülü $X(t)$ sırasının xətti təsirinin xaric edilməsindən sonra s – ölçülü $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ sırasının komponentləri arasında xətti asılılığı təyin edən funksiyadır, yeni

$$Z(t) = Y(t) - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)X(t-u), \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

$$MY(t)=0, \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} |a(u)| < \infty.$$

Əgər kovariasiya funksiyaları $C_{XX}(u)$ və $C_{YY}(u)$ mütləq cəmlənən, spektral sıxlıq matrisi $f_{XX}(\lambda)$ cırılmaayan olarsa, onda xüsusi K.

$$K_{Y_a Y_b X}(\lambda) = f_{Y_a Y_b X}(\lambda) [f_{Y_a Y_a X}(\lambda) f_{Y_b Y_b X}(\lambda)]^{-1/2}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f_{Y_i Y_j X}(\lambda) = f_{Z_i Z_j X}(\lambda)$, $i, j = a, b$ xüsusi spektral sıxlıq. $Y_a(t)$ və $Y_b(t)$ – s – ölçülü $Y(t)$ sırasının komponentləridir. $K_{Y_a Y_b X}(\lambda)$, $f_{Y_a Y_b X}(\lambda)$, $f_{Y_a Y_a X}(\lambda)$, $f_{Y_b Y_b X}(\lambda)$ funksiyaları onu ifadə edir ki, $Y_a(t)$ və $Y_b(t)$ sıraları arasında zamana görə invariant münasibətin olması bu sıraların hər birinin $Y(t)$ sırası ilə xətti əlaqəsinin olmasından nə dərəcədə asılıdır. Xüsusi K. üçün statistik qiymət (1) düsturuna əsasən analoji olaraq, $Z(t)$ və $Y(t)$ sıraları üçün təyin edilir və eyni xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [3] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, М., 1972; [4] Отнес Р., Энноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [5] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

KOHERENTLİK ƏMSALI « когерентности коэффициент; coherence coefficient » – bax. *Koherentlik*.

KOHERENTLİK SPEKTRİ « когерентности спектр; coherence spectrum » – bax. *Koherentlik*.

KOKRAN TEOREMİ « Кокрана теорема; Cochran theorem » – bax. *Dispersion analiz*.

KOKS NÖQTƏVİ PROSESİ « Кокса точечный процесс; Cox point process » – *nöqtəvi Puasson proseslərinin qarışığı olan təsadüfi nöqtəvi prosesdir*. $P_{\Lambda}(\cdot)$ lokal məhdud sayıcı ölçülər çoxluğu $(M, \mathfrak{M})$ -də ehtimal paylanması olsun; bu paylanma moment ölçüsü $\Lambda(\cdot)$ olan nöqtəvi Puasson prosesini təyin edir, $G(\cdot)$ isə $(A, \mathfrak{A})$ faza fəzasında bütün lokal məhdud ölçülər çoxluğunda ehtimal paylanması olsun. Onda bu paylanmanın qarışığı

$$Q(\cdot) = \int P_{\Lambda}(\cdot) G(d\Lambda)$$

K. n. p.-ni təyin edir: bu proses ikiqat stoxastik nöqtəvi Puasson prosesi, yeni moment ölçüsü Λ – təsadüfi ölçü olan nöqtəvi Puasson prosesi kimi anlaşıla bilər.

Əgər təsadüfi nöqtəvi prosesin paylanması Q ixtiyari $c \in (0, 1)$ qiymətində c ehtimalı ilə hər hansı nöqtəvi təsadüfi prosesin realizasiyalarının nöqtələrinin asılı olmayan kəsilmələri nəticəsində alınarsa, onda Q paylanması K. n. p.-ni təyin edir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [2] Гранделл J., Doubly stochastic Poisson processes, B. – [a. o.], 1976.

430 KOKS

KOKS PROSESİ « Кокса процесс; Cox process » – bax. *Həndəsi proses*.

KOLMOQOROV AKSIOMATİKASI ehtimal nəzəriyyəsinin «Колмогорова аксиоматика теория вероятностей; Kolmogorov's axiomatics of the probability» – *ehtimal nəzəriyyəsinə* müasir riyaziyyatda qəbul edilmiş üslub vermiş, ehtimal modellərinin riyazi şərh üçün ümumən qəbul olunmuş, ən geniş yayılmış yanaşmadır. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlaşdırılması problemi D. Hilbertin (D. Hilbert) 8 avqust 1900-də riyaziyyatçıların Parisdə keçirilmiş II Beynəlxalq konqresindəki məşhur məruzəsindəki 6-cı problemə (bax, [1]) formalaşmışdır və bu problemə şərh olunan «... artıq riyaziyyat görkəmli rol oynayır: bu ilk növbədə ehtimal nəzəriyyəsi və mexanikadır. ...» fikri bəlkə də ehtimal nəzəriyyəsinin mükəmməl aksiomatikasının yaranması üçün bir təkan rolunu oynamışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik şərhinə bir çox alimlər: Q. Bohlmann (1908, [2]), S. N. Bernşteyn (1917, [3]), R. Mizes (1919, [4]; 1928, [5]), A. Lomnitski (1923, [6]) ehtimal nəzəriyyəsinin ölçü nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi barədə E. Borelin (E. Borel) ideyaları əsasında müxtəlif cəhdlər etmişlər. 1929-da (bax, [7]) və sona çatdırılmış formada 1933-də (bax, [8]) A. N. Kolmoqorov çoxluqlar nəzəriyyəsi, ölçü və inteqrallama nəzəriyyələrinin ümumi ideyaları və funksiyalar nəzəriyyəsinə yeni nöqtəyi – nəzərdən yanaşaraq, müasir ehtimal nəzəriyyəsinin, ehtimal modeli anlayışını (məntiqi nöqtəyi – nəzərdən, ümumiyyətlə, yeganə olmayan aksiomlar sistemini) formalaşdırmışdır; bu aksiomatika sadə olduğu qədər, o dərəcədə də ümididir ki o, ehtimal nəzəriyyəsinin klassik bölmələrini əhatə etməklə yanaşı, onun yeni fəsilələrinin yaranmasına, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin yaranmasına təməl qoymuş oldu.

Kolmoqorov aksiomatikası sisteminin əsası $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası anlayışından ibarətdir. Bu fəza üç obyektəndən ibarətdir:

1) $\Omega = \{\omega\}$ – «aksiomlaşdırılan ehtimal modelində» bütün mümkün ola bilən nəticələrin çoxluğu – elementar nəticələr (hadisələr) fəzası;

2) $\mathcal{A}$ – Ω -nin hadisə kimi interpretasiya olunan altçoxluqlarından ($A \subseteq \Omega$) təşkil olunmuş, inkar əməli və hesabi sayda birləşmə əməlinə görə, təbii tələb olunan, qapalı boş olmayan bir sinif (yeni $\mathcal{A}$ – Ω -nin altçoxluqlarının σ – cəbridir);

3) P – hesabi – additiv mənfii olmayan və vahidlə normalanmış çoxluq funksiyasıdır: $A \in \mathcal{A}$ olduqda $P = P(A)$ [yeni $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{A}$, cüt-cüt uyuşmayan hadisələr ardıcılığı üçün

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1; \quad P(A)$$

A hadisəsinin ehtimalı adlanır. [Bezi hallarda genişlənmiş $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal modellərinə baxılır, bu halda: $\mathcal{A}$ cəbr, P isə sonlu – additiv mənfii olmayan normalanmış funksiyadır və $A \in \mathcal{A}$, $P = P(A)$].

Kolmoqorov aksiomlar sistemi ziddiyyətli deyildir və bütün bu aksiomlara təbə olan real obyektlər kifayət qədərdir.

Kolmoqorov aksiomlar sistemi ehtimal nəzəriyyəsinin ehtimal riyazi təməlidir ki, bu aksiomatika müasir riyaziyyatın bütün sahələrindən, o cümlədən, ölçü nəzəriyyəsinə, funksiyaların metrik nəzəriyyəsinə istifadə etməyə imkan verir. 20-ci əsrin 60-cı illərdə A. N. Kolmoqorovun təşəbbüsü ilə alqoritmlər nəzəriyyəsi baxımından «təsadüflilik» anlayışına yeni bir yanaşmanın əsası qoyulmuşdur (bax, [8] – [10]).

Əd.: [1] Проблемы Гильберта, М., 1969; [2] B o h l m a n n G., «Atti IV Congr. Intern. Math. (Roma, 6-11 Apr., 1908)», 1909, v. 3, p. 244-78; [3] Б е р н ш т е й н С. Н., «Сообщ., Харьк. матем. обществу», 1917, т. 15, с. 209-74; [4] M i s e s R., «Math. Z.», 1919, Bd 5, S. 52-99; [5] M i s e s R., Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit, W., 1928; [6] L o m n i c k i A., «Fundam. math.», 1923, t. 4, p. 34-71; [7] К о л м о г о р о в А. Н., кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 48-57; [8] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [9] К о л м о г о р о в А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1974; [10] К о л м о г о р о в А. Н., Успенский В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 3, с. 425-55.

KOLMOGOROV BƏRABƏRSİZLİYİ « Kolmogorova неравенство; Kolmogorov inequality » – əgər $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ dispersiyaları sonlu olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{k=1}^m (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k.$$

Tərs K. b.: əgər $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ c ədədi ilə sanki yaqın məhdud asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərsə, yeni $k = 1, 2, \dots$ qiymətlərində $|\xi_k| \leq c$ bərabərsizliyi sanki yaqın ödənilsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{k=1}^m (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{\sum_{k=1}^n D\xi_k}.$$

Her iki bərabərsizlik 1928-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən yuxarıda verilmiş formada isbat olunmuşdur.

K. b. və tərs K. b.-nin böyük ədədlər qanununun isbatında, təkrar loqarifm qanununun isbatında, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən təşkil olunmuş sıraların sanki yaqın yığılma şərtlərinin araşdırılmasında çoxsaylı tətbiqləri məlumdur. *Kolmoqorovun üç sıra haqqında teoremi* də bu bərabərsizliklər vasitəsilə isbat olunur.

1) K. b. - n i n ü m u m i l e ş m e l e r i . K. b.-nin bir sıra ümumiləşmələri mövcuddur. Aşağıda bunlardan ikisi şərh olunur. İxtiyari $r < n$ və $0 < c_n \leq c_{n-1} \leq \dots \leq c_1$ qiymətlərində

$$P \left\{ \max_{r \leq m \leq n} c_m \left| \sum_{k=1}^m (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(c_r \sum_{k=1}^r D\xi_k + \sum_{k=r+1}^n c_k D\xi_k \right).$$

K. b.-nin bu ümumiləşməsi ilk dəfə [3]-də nəşr olunmuşdur (bax, [2]).

K. b.-nin digər ümumiləşməsi

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{k=1}^m (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon + c \right\} \leq \frac{1}{1 - \alpha} P \left\{ \left| \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right\}$$

bərabərsizliyi, bu şərtlə ki,

$$P \left\{ \left| \sum_{k=r}^n (\xi_k - M\xi_k) \right| > c \right\} \leq \alpha < 1, \quad r = 1, \dots, n$$

olsun.

2) Təsadüfi elementlər üçün K. b. – Banax fəzasında təsadüfi elementlər üçün K. b.-nin (və tərs K. b.-nin) ümumiləşməsidir. Bu bərabərsizliklərin hər ikisi Hilbert fəzası halında qüvvədə olur (bu halda mütləq qiyməti norma ilə əvəz etmək kifayətdir, bax, [6]). Lakin Banax fəzasının ümumi halında bərabərsizliklərin formaları bir qədər dəyişir.

$X_1, \dots, X_n, \dots \in \mathbb{B}$ Banax fəzasında asılı olmayan separabelqiymətli güclü ikinci tərtibli təsadüfi elementlər, $M\|X_k\|^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. Onda hər bir $\varepsilon > 0$ üçün

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{k=1}^m (X_k - MX_k) \right\| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^2$$

K. b. doğrudur (bax, [8] və [7]).

Əgər $\mathbb{B}$ sabitinin tipi C -yə bərabər olan 2 tip Banax fəzasıdırsa, onda sonuncu bərabərsizlikdən

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{k=1}^m (X_k - MX_k) \right\| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n M\|X_k\|^2 \quad (1)$$

olduğu alınır.

Tərsi də doğrudur: əgər hər hansı bir $C > 0$ sabiti və $\mathbb{B}$ Banax fəzasında $M\|X_k\|^2 < \infty$ şərtini ödəyən separabelqiymətli asılı olmayan $X_1, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi elementlər ardıcılığı üçün (1) bərabərsizliyi doğrudursa, onda $\mathbb{B}$ 2 tip fəzadır.

2. Buna görə də, 2 tip fəza üçün (və yalnız belə fəzalar üçün) «Üç sıra» haqqında Kolmoqorov teoreminin kafilik hissəsi qüvvədə qalır.

$X_1, \dots, X_n, \dots \in \mathbb{B}$ Banax fəzasında separabelqiymətli asılı olmayan n təsadüfi kəmiyyətlər olsun ki, hər hansı bir $c > 0$ üçün $\|X_k\| \leq c$, $k = 1, 2, \dots$ münasibəti sanki yaqın ödənilsin. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün tərs K. b. doğrudur (bax, [9], [7]):

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{k=1}^m (X_k - MX_k) \right\| \geq \varepsilon \right\} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\varepsilon + c)^2 + \varepsilon^2}{M \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^2} \right).$$

Bu bərabərsizlikdən alınır ki, əgər $\mathbb{B}$ sabitinin kotipi K -ya bərabər olan 2 kotip Banax fəzasıdırsa, onda

$$P \left\{ \max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{k=1}^m (X_k - MX_k) \right\| \geq \varepsilon \right\} \geq \frac{1}{2} \left(1 - K \frac{(\varepsilon + c)^2 + \varepsilon^2}{\sum_{k=1}^n M \|X_k\|^2} \right) \quad (2)$$

berəbərsizliyi doğrudur və tərsinə, əgər $\mathbb{B}$ Banax fəzası və $\varepsilon > 0$ sabiti varsa ki, $\mathbb{B}$ -də hər bir separabelqiyəmətlili asılı olmayan $X_1, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi elementləri üçün $\|X_k\| \leq 1$,

$k=1, 2, \dots$ olduqda, $c=1$ halı üçün (2) berəbərsizliyi doğru olarsa, onda $\mathbb{B} - 2$ kotip fəzadır. Buna görə də, «Üç sıra» haqqında Kolmoqorov teoreminin berəbərsizlik hissəsi 2 kotip fəzalar üçün (və yalnız belə fəzalar üçün) doğrudur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 20–34; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Hajek J., Renyi A., «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», 1955, t. 6, № 3–4, p. 281–83; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [5] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [6] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [7] Вахания Н. Н., Тарнеладзе В. И., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985; [8] Jain N. C., в кн.: Probability in Banach spaces. Proceedings 1975, В. – [a. o.], 1976, p. 113–30; [9] Acosta A. de, Samur J., «Studia Math.», 1979, v. 66, p. 143–60.

KOLMOGOROV DÜSTURU « Kolmogorova formulya; Kolmogorov's formula » – Levi – Xinqin kanonik ifadəsinin təsvirinin xüsusi halıdır. $\mathfrak{G}$ sonsuz bölünən paylanmalar çoxluğundan ikinci momentləri sonlu olan paylanmaların $\mathfrak{G}_0$ altçoxluğunu fərqləndirən düsturdur. Əgər $f \in F$ paylanmasının xarakteristik funksiyasıdırsa, onda $F \in \mathfrak{G}_0$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, f xarakteristik funksiyası aşağıdakı düstur ilə ifadə olunsun:

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int (e^{itx} - 1 - itx) \frac{dK(x)}{x^2} \right\}$$

burada $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $K(x) = \lambda U(x)$, $\lambda \geq 0$ və $U \in \mathbb{R}^1$ -də hər hansı paylanma funksiyasıdır. 1932-də isbat olunmuş (bax, [1]) K. d. B. de Finetti tərəfindən [2]-də qoyulmuş $\mathfrak{G}$ çoxluğunun təsviri probleminin həllində ilk ciddi irəliləyiş olmuşdur. Əgər $F \in \mathfrak{G}_0$ olarsa, onda

$$\int x dF(x) = \gamma, \quad \int x^2 dF(x) - \gamma^2 = \lambda$$

berəbərsizlikləri doğrudur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 117–23; [2] Finetti B. de, «Rend. Reali Accad. naz. Lincei», ser. 6, 1929, v. 10, p. 163–68.

KOLMOGOROV KRİTERİSİ « Kolmogorova kriteriy; Kolmogorov test » – tam mənası ilə təyin olunmuş kəsilməz paylanma funksiyası [məs., $F(\cdot)$] məlum olan ümumi çoxluqdan skalyar seçim aparılması hipotezinin yoxlaması

üçün statistik kriteridir. n – seçimin həcmi, $F_n(\cdot)$ – seçimin paylanma funksiyası, $G(\cdot)$ – əsl paylanma funksiyası olsun. K. k. $G \equiv F$ hipotezini yoxlamaq məqsədilə tətbiq olunur.

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

Kolmoqorov statistikasi (K. k. statistikasi) adlanır.

Qeyd olunan hipotezlə D_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması seçimin əsl paylanmasından asılı olmur (başqa sözlə, D_n statistikasi hipotezə əsasən sərbəst paylanır – $G \equiv F$ eyniliyinin təsirindən azad olduğu nəzərdə tutulur). Qeyd olunmuş hipotezlə və $n \rightarrow \infty$ olduqda D_n statistikasi sıfıra yaxınlaşır. Buna görə də, əksər hallarda paylanmasının cırlaşmayan limiti olan, $\sqrt{n} D_n$ statistikasından istifadə olunur.

1933-də A. N. Kolmoqorov isbat etmişdir ki, $z > 0$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D_n < z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

(bax, [1]).

Əgər $G \neq F$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda D_n statistikasi üçün

$$D_n \rightarrow \sup_x |G(x) - F(x)| > 0$$

münasibəti ödənilir, odur ki, $\sqrt{n} D_n \rightarrow \infty$. Bu xassələrdən belə bir qayda alınır: əgər D_n statistikasi üçün müşahidələr nəticəsində alınmış qiymət çox böyük olarsa, onda $G \equiv F$ hipotezi qəbul olunmur.

Qeyd olunmuş hipotezlə D_n (və ya $\sqrt{n} D_n$) statistikasının faiz nöqtələri üçün cədvəllər, hal-hazırda həm kiçik, həm də böyük həcmli seçimlər üçün tərtib olunmuşdur (bax, məs., [2]). Qeyd olunmuş hipotezlə paylanması praktik olaraq n -dən asılı olmayan D_n statistikasının modifikasiyası təklif olunmuşdur (bax, [3]) və bu hal üçün də faiz nöqtələri cədvəli tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Pearson E. S., Hartley H. O. (eds.) Biometrika tables for statisticians, v. 2, Camb., 1972.

KOLMOGOROV METRİKASI « Kolmogorova metrika; Kolmogorov metric » – bax, Müntəzəm metrika.

KOLMOGOROV MODELİ « Kolmogorova model; Kolmogorov model » – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış artan cəmlər sxemini və Puasson teoreminə istifadə olunan sxemi (bax, Limit teoremləri) ümumiləşdirən modeldir. A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1932–33-cü illərdə təklif olunmuşdur.

KOLMOGOROV OXŞARLIQ HİPOTEZİ « Kolmogorova гипотеза подобия; Kolmogorov's similarity hypothesis » – bax, Kolmoqorovun üçdə iki qanunu.

KOLMOGOROV ORTA KƏMİYYƏTLƏRİ « Kolmogorova средние; Kolmogorov means » həqiqi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri üçün

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi \left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n} \right) \quad (*)$$

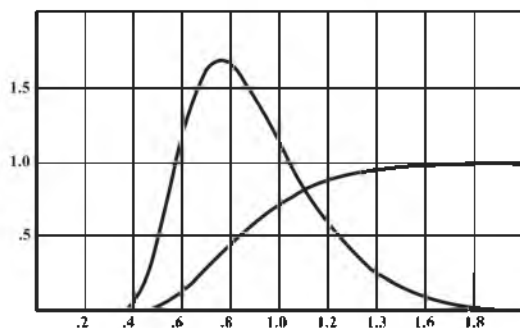
şeklinde kəsilməz cıddı monoton funksiya, ψ , φ -yə ters funksiyadır. $\varphi(x) = x$ olduqda ədədi orta, $\varphi(x) = \log x$ olduqda həndəsi orta, $\varphi(x) = x^{-1}$ olduqda harmonik orta, $\varphi(x) = x^2$ olduqda kvadratik orta, $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ olduqda isə qüvvət üstlü orta alınır. A. N. Kolmoqorov 1930-da göstərmişdir ki (bax, [1]), ixtiyari orta kəmiyyət – $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası, bu funksiya hər bir x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ üzrə kəsilməz, monoton, simmetrik olan ele funksiya olarsa ki, eyni ədədlərin orta qiyməti onların ümumi qiymətinə bərabər olsun, qiymətlərin hər hansı qrupunu isə onların öz orta qiyməti ilə, ümumi ortanı dəyişmədən əvəz etmək mümkün olarsa, – (*) düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математика и механика, М., 1985, с. 136–38.

KOLMOQOROV PAYLANMASI « Колмогорова распределение; Kolmogorov distribution » –

$$\lambda_n = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

statistikasının paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda yaxınlaşdığı limit paylanmasıdır,



Kolmoqorov paylanmasının paylanma funksiyası və sıxlıq funksiyasının qrafiki.

burada $F_n(x)$ – kəsilməz olan nəzəri paylanma funksiyası $F(x)$ üçün meylsiz nöqtəvi statistik qiymət seçimi paylanma funksiyasıdır. K. p. F -dən asılı deyildir.

KOLMOQOROV STATİSTİKASI « Колмогорова статистика; Kolmogorov statistic » – bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*.

KOLMOQOROV ŞƏRTİ « Колмогорова условие; Kolmogorov condition » – bax, *Böyük dim. – ölçülər effekti*, *Kolmoqorov teoremi* seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında.

KOLMOQOROV TEOREMİ seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında « **Колмогорова теорема о непрерывности выборочных функций; Kolmogorov theorem on continuity of sample functions** » – A. N. Kolmoqorovun 1934-də isbat etdiyi və [1]-də nəşr olunmuş aşağıdakı teoremdir: $\zeta(t)$

$[0, 1]$ parçasında təyin olunmuş,

$$M|\zeta(t) - \zeta(s)|^p \leq k|t - s|^q \quad (*)$$

(burada $p > 0$, $q > 1$, $k > 0$ sabitlərdir) Kolmoqorov şərtini ödəyən *tesadüfi funksiya* olsun; onda $\zeta(t)$ -yə ekvivalent ele $\tilde{\zeta}(t)$ *tesadüfi funksiyası* vardır ki, onun trayektoriyaları sanki yaqın kəsilməzdir (yəni bütün t qiymətlərində $P\{\zeta(t) = \tilde{\zeta}(t)\} = 1$ bərabərliyi doğrudur).

Bu teoremin böyük əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, birinci, *tesadüfi proseslər nəzəriyyəsinin fundamental faktı* qeyd olunmuşdur, ikincisi isə teoremin (*) münasibətilə verilən şərti yoxlama üçün çox rahatdır. Bu sonuncu şərt K. t.-nin ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələrində, xüsusilə də, limit teoremlərinin isbatında mühüm tətbiqi əhəmiyyəti olmuşdur.

(*) şərtinin kafi olub, zəruri olmaması bir sıra elmi işlərin yaranmasına səbəb olmuşdur və bu işlərin müəllifləri həmin şərti yaxşılaşdırmağa səy göstərərək onu zəruri şərtə gətirməyə çalışmışlar. Sonralar (bax, [6] – [8]) bu tip nəticələr və daxiləlmə teoremləri arasında hamar funksiyalar üçün əlaqənin olduğu aşkar edilmişdir. Bu sahədə bir sıra nəticələr alınmışdır. məs., $\varphi(t)$ mənfi olmayan, azalmayan kəsilməz funksiya,

$$\varphi(0) = 0, \varphi(h_1 + h_2) \leq \varphi(h_1) + \varphi(h_2),$$

və

$$\zeta_{p,k}^\varphi = \left\{ \zeta(t) : \sup M^{1/p} |\Delta_h^k \zeta(t)|^p = O(\varphi(\delta)), \delta \searrow 0 \right\}$$

olsun, burada supremum $0 < h < \delta$, $t, t + k\delta \in [0, 1]$ olduqda təyin olunur.

$$\Delta_h \zeta(t) = \zeta(t+h) - \zeta(t), \Delta_h^k = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} \zeta(t))$$

isə $[0, 1]$ parçasında $\zeta(t)$ separabel *tesadüfi proseslər* sinfidir, onda ixtiyari $\zeta(t) \in \zeta_{p,k}^\varphi$ prosesinin seçimi funksiyalarının 1 ehtimala kəsilməz olması üçün

$$\int_0^1 \frac{\varphi(h)}{h^{1+1/p}} dh < \infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

Xüsusi halda $\varphi(h) = h(1+\alpha)/p$, $\alpha > 0$, $k=1$ olduqda kafilik hökmü K. t.-də vardır (bax, *Seçimi kəsilməzlik(yi) təsadüfi prosesin*).

Əd.: [1] Slutsky E., «Giorn. Inst. italiano degli Attuari», 1937, № 8, p. 193–96; [2] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Dudley R., «Ann. Probab.», 1973, v. 1, № 1, p. 66–103; [4] Fernique X., Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, в кн.: Lecture Notes in Mathematics, v. 480, B. – Hdib. – N.Y., 1975; [5] Pisier G., «Sem. d'anal. Fonct.», 1979–1980, Exp. XIII–XIV, P., 1980; [6] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 468–80; [7] Ибрагимов И., «С. г. Acad. sci.», 1979, т. 289А, p. 545–47; [8] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–49.

KOLMOQOROV TEOREMİ sonluölçülü paylanmalar haqqında « **Колмогорова теорема о конечномерных распределениях; Kolmogorov theorem on finite dimensional distributions / Kolmogorov extension theorem** » – *tesadüfi proseslər* nəzəriyyəsinin əsas teoremlərindən biridir. T indekslərin ixtiyari çoxluğu olsun və hər bir $t \in T$ indeksi üçün $\mathbb{R}_t$ $\mathbb{R}$ ədəd oxunu ifadə etmiş olsun. Cüt-cüt müxtəlif $t_i, 1 \leq i \leq n$ indekslərinin hər bir boş olmayan sonlu $\alpha = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ çoxluğuna $\mathbb{R}^\alpha = \mathbb{R}_{t_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{t_n}$ Ekvilid fəzasında verilmiş Borel ehtimal ölçüsü μ_α -nın uyğun olduğu və bütün bu ölçülər ailəsi üçün isə aşağıdakı uzlaşma şərtinin ödənilməsi fərz olunur: $\beta \subset \gamma$ şərtini ödəyən ixtiyari $\beta = \{u_1, \dots, u_k\} \subset T, \gamma = \{v_1, \dots, v_m\} \subset T$ çoxluqları və $\mathbb{R}^\beta$ Ekvilid fəzasında ixtiyari B Borel çoxluğu üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$\begin{aligned} \mu_\beta(\{(x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) : (x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) \in B\}) = \\ = \mu_\gamma(\{(x_{v_1}, \dots, x_{v_m}) : (x_{v_1}, \dots, x_{v_m}) \in B\}). \end{aligned}$$

Onda $\mathbb{R}^T$ fəzasının silindrik σ – cəbrində μ ölçüsü vardır ki, bu ölçü yeganədir və

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}) = \mu_\alpha(A)$$

bərabərliyi. T -dən olan cüt-cüt müxtəlif indekslərin boş olmayan $\alpha = \{t_1, \dots, t_n\}$ çoxluğu və ixtiyari $A \subset \mathbb{R}^\alpha$ Borel çoxluğu üçün doğrudur. μ_α ölçüləri μ ölçüsünün sonluölçülü paylanmaları adlanır.

K. t. ölçü nəzəriyyəsinin teoremi kimi hesab edilmir. Bu teoremin isbatında topoloji kompaktlıq mülahizələrindən istifadə olunur. Lakin çoxluqların abstrakt kompakt sinfi anlayışını daxil edərək sırf ölçü nəzəriyyəsi üçün də K. t.-ni ümumi şəkildə ifadə edib, onu isbat etmək olur.

Əgər K. t.-ndə indekslər çoxluğu T hesabi olarsa, onda μ ölçüsü $\mathbb{R}^T$ fəzasının Borel σ – cəbrində təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

KOLMOQOROV TEOREMİ uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında « **Колмогорова теорема о согласованных распределениях; Kolmogorov theorem of consistent distributions** » – bax, *Ehtimal fəzası*.

KOLMOQOROV TEOREMİ «üç sıra» haqqında « **Колмогорова теорема о трех рядах; Kolmogorov three-series theorem** »: $\xi_1, \xi_2, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi – $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ sırasının vahid ehtimalla

yığılması üçün bütün $c > 0$ qiymətlərində

$$\sum_n \mathbf{P}\{|\xi_n| > c\} < \infty.$$

434 KOLMOQOROV

$$\sum_n \mathbf{M} \xi_n I_{\{|\xi_n| \leq c\}},$$

$$\sum_n \mathbf{M} \left| \xi_n I_{\{|\xi_n| \leq c\}} - \mathbf{M} \xi_n I_{\{|\xi_n| \leq c\}} \right|^2 < \infty$$

sıralarının yığılması zəruri;

Her hansı $c > 0$ qiymətləri üçün yığılması kafidir, burada I_A – A hadisəsinin indikatorudur.

Teorem 1928-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən isbat olunmuşdur (bax, [1]). Bu teorem *Kolmoqorov bərabərsizliyi* vasitəsilə isbat olunur. Hilbert fəzası halında da K. t. dəyişiklik olmadan doğrudur (bu halda yalnız mütləq qiymətlər norma ilə əvəz olunur). 2 tip Banax fəzaları halında «Üç sıra» haqqında K. t.-nin yalnız kafilik hissəsi doğrudur (bax, [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей в математической статистике, М., 1986, с. 20–34; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Асоста А. де, Samur J., «Studia Math.», 1979, v. 66, p. 143–60; [4] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

KOLMOQOROV TƏNLİKLƏRİ « **Колмогорова уравнения; Kolmogorov equations** » – *Markov prosesi*-nin keçid funksiyası və ya keçid sıxlıq funksiyasının zamana görə tələməsinə verilmiş an üçün bu funksiyaların qiymətləri və prosesin infinitesimal xarakteristikaları ilə ifadə edən tənliklərdir. Tənliklər 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]) və kəsilməz zamanlı Markov prosesi nəzəriyyəsinin əsaslarını qoyulmuşdur. Bəzi xüsusi hallar əvvəllər məlum idi (bax, misal 2). Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinin qurulması və burada araşdırılmasında K. t. semi – qruplar nəzəriyyəsi və stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsinin metodlarının tətbiq olunmasına qədər əsas vasitə idi. Markov proseslərinin tədqiqində K. t. indi də birinci dərəcəli əhəmiyyətə malikdir.

Müxtəlif quruluşlu Markov prosesləri üçün K. t.-ləri müxtəlif növlü xətti tənliklərdir. Bu halda 1-ci tərtib adi differensial tənliklər sistemi, 2-ci tərtib xüsusi tələməli parabolik tipli differensial tənliklər, integro – differensial tənliklər (bax, misallar, 1–3) ola bilər. Qeyd olunan variantların kombinasiyaları və qarışma halları da mümkündür (bax, əgər proses deterministik olarsa). Müxtəlif tipli Markov prosesləri üçün K. t.-ni aşağıdakı ümumi sxem əhatə edir. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəza fəzasında $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t^{\zeta}, \mathbf{P}_{s,x})$ Markov prosesinin $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüsünə nəzərən riyazi gözləməsi $\mathbf{M}_{s,x}$ olsun. ζ proseslərinin geniş bir sinfi üçün $\Phi \zeta$ prosesinin trayektoriyalarının $\mathcal{A}_1^{\infty}$ – ölçülən ixtiyari məhdud funksionalı olduqda

$$u(s, x) = \mathbf{M}_{s,x} \Phi, \quad s \leq t, x \in \mathcal{E} \quad (1)$$

(t qeyd olunmuş zamandır) funksiyası

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = L_s u(s, x), \quad s < t, x \in \mathcal{E} \quad (2)$$

tərs Kolmoqorov tənliyini ödəyir, L_s – x arqumentinin funksiyalarına təsir edən xətti operatorudur, bəzən infinitesimal operator və ya doğuran operator və ya da s anında ζ prosesinin generatoru adlandırılır. ζ bircins proses olarsa, onda L_s s -dən asılı olmur. Ən «yaxşı» hallarda $\{L_s\}$ operatorlar ailəsi ζ prosesinin keçid ehtimallarını birqiymətli təyin edir. Xüsusi halda, əgər $\Phi = 1_{\Gamma}(\zeta_t)$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ olarsa, onda

$$u(s, x) = \mathbf{P}_{s,x} \{ \zeta_t \in \Gamma \} = p(s, x, t, \Gamma) \quad (3)$$

və (2) p keçid funksiyası üçün tərs K. t. olur.

$s = t$ olduqda, (1)-dən (2) tənliyinin (3) həlli üçün sonuncu $u(t, x) = 1_\Gamma(x)$ şərti alınır və beləliklə, keçid ehtimalı p üçün s və x -in funksiyası kimi Koşi məsələsi alınır (zaman s götürülür). X prosesinin keçid sıxlıq funksiyası

$$u(s, x) = \frac{p(s, x; t, dy)}{\mu(dy)} = f(s, x; t, y), \quad y \in \mathcal{E} \quad (4)$$

üçün tərs K. t. p keçid funksiyası üçün (2) tənliyinin hər iki tərəfini μ -yə görə differensiallama nəticəsində formal olaraq alınır (bütün $p(s, x; t, \cdot)$, $s < t$, $x \in \mathcal{E}$ ölçüləri $\mathcal{E}$ -də təyin olunmuş «standart» μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdir). (2) tənliyinin həlli (4) üçün son şərt, $s \rightarrow t$ olduqda sıxlığı $u(s, x)$ olan ölçünün y nöqtəsində toplanmış vahidi ölçüyə çevrilməsidir. Əslinə qaldıqda, (1) düsturu (2) tənliyinin həllini uyğun sərhəd şərtlərlə, yalnız $s < t$ yarımmüstəvisində deyil, digər ümumi fəza – zaman oblastlarında da təyin edir. Differensial tənliklərin ehtimali həlli də buna əsaslanır.

Kolmoqorov düz tənliyi tərs tənliyin ikili variantı olan,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = L_t^* v(t, y), \quad t > s, \quad y \in \mathcal{E} \quad (5)$$

tənliyidir, burada L_t^* , $-L_t$ operatoruna qoşma operatorudur (s qeyd olunmuş zamandır). Bu halda, ehtimali baxımdan heller sinfi (2) tənliyi halında olduğundan daha dar sinfidir. Fərz olunur ki, $\{v_t\}$, $t \geq s$ ölçülər ailəsi ($\mathcal{E}, \mathcal{B}$) fəzasında ζ prosesi ilə

$$v_t(\Gamma) = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}_{s,x} \{ \zeta_t \in \Gamma \} v_s(dx), \quad t \geq s, \quad \Gamma \in \mathcal{B}$$

münasibətilə uzlaşır. Onda ζ prosesinin geniş sinfi üçün (5) tənliyini ya

$$v(t, y) = v_t(\{y\}) = \int_{\mathcal{E}} p(s, x, t, y) v_s(dx) \quad (6)$$

funksiyası (əgər $\mathcal{E}$ diskret fəzadırsa), ya da

$$v(t, y) = \frac{v_t(dy)}{\mu(dy)} = \int_{\mathcal{E}} f(s, x; t, y) v_s(dx) \quad (7)$$

funksiyası ödəyir (əgər $\mathcal{E}$ kəsilməz fəzadırsa və $p(s, x; t, \cdot)$, $t > s$ «standart» μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdirsə). Əgər v_s x nöqtəsində toplanmış vahidi ölçüdürsə, onda (6)-da $v(t, y) = p(s, x; t, y)$, (7)-də isə $v(t, x) = f(s, x; t, y)$ olur və (5) tənliyi keçid ehtimalı və ya keçid sıxlıq funksiyası üçün Kolmoqorov düz tənliyinə çevrilir; birinci halda (5) tənliyinə başlanğıc şərt kimi $v(s, x) = 1_\Gamma(x)$, ikinci halda isə $f(s, x; t, \cdot)$ sıxlıqlı ölçü $t \rightarrow s$ olduqda x -də toplanmış vahidi ölçü əlavə olunur. (5) tənliyi ζ prosesilə uzlaşmış başlanğıc v_s ölçüləri olmayan (bunlar bəzən ζ

prosesi üçün giriş qanunu adlanır) $\{v_t\}$ ölçülər axınlarına da şamil olunur.

Misal 1 (sonlu və ya hesabi ζ prosesi). Əgər $\mathcal{E}$ fəzası sonlu və ya hesabıdırsa, onda ζ prosesinin keçid funksiyası

$$P(s, t) = \|p_{xy}(s, t)\|$$

keçid matrisinə getirilir, burada $p_{xy}(s, t) = \mathbf{P}_{s,x} \{ \zeta_t = y \}$, $s \leq t$, $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$. ζ prosesinin infinitezimal xarakteristikaları: çıxış ehtimalı sıxlıqları

$$q(s, x) = -q_{xx}(s) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbf{P}_{s,x} \{ \zeta_t \neq x \}, \quad x \in \mathcal{E} \quad (8)$$

və keçid ehtimalı sıxlıqları

$$q_{xy}(s) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbf{P}_{s,x} \{ \zeta_t = y \}, \quad x \neq y \in \mathcal{E} \quad (9)$$

funksiyalandır. Reqlıyar halda $\sum_y q_{xy}(s) = 0$. K. t.-ndən hər

biri (2) və ya (5) uyğun olaraq: t və y qeyd olunduqda keçid ehtimalları ailəsi $\{p_{xy}(s, t)\}$, $s \leq t$, $x \in \mathcal{E}$ üçün və ya s və x qeyd olunduqda $\{p_{xy}(s, t)\}$, $s \leq t$, $y \in \mathcal{E}$ keçid ehtimalları ailəsi üçün adi differensial tənliklərin qapalı sistemlərinə ayrılır; bunlar da hamısı birlikdə matris formasında kompakt ifadə olunur.

$Q(s) = \|q_{xy}(s)\|$ olsun. K. t. tərs sistemi $\mathbf{P}(t, t) = 1$ son şərtlə

$$-\frac{\partial \mathbf{P}(s, t)}{\partial t} = Q(s) \mathbf{P}(s, t), \quad s \leq t \quad (10)$$

düz sistemi, $\mathbf{P}(s, s) = \mathbf{I}$ başlanğıc şərtlə,

$$\frac{\partial \mathbf{P}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(s, t) Q(t), \quad t \geq s \quad (11)$$

münasibətlərlə ifadə olunur ($\mathbf{I}$ vahidi matrisdir).

(8) və (9) limitlərinin varlığı haqqında (10) və (11) sistemlərinin hər birinin doğruluğu, bunların əvvəlcədən verilmiş Q matrisləri üçün hellerinin varlığı və yeganəliyi haqqında məsələlər ən çox birçins proseslər üçün araşdırılmışdır (bax, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu sonlu, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabi).

Misal 2 (ζ diffuzion prosesi). $\zeta_t = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t))$ keçid sıxlığı (Lebeq ölçüsünə nəzərən) $f(s, x; t, y)$, $s < t$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olan $\mathbb{R}^n$ -də Markov prosesi olsun. İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbf{P}_{s,x} \{ |\zeta_t - x| \geq \varepsilon \} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

münasibəti s və x -ə görə müntəzəm ödənilərsə, ζ_t prosesinin kəsilməz olduğunu hesab etmək olar və bu halda onun infinitezimal xarakteristikaları (ε ədədindən asılı olmayaraq) – a p a r t e m s a l l a r t

$$a_i(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbf{M}_{s,x} [\zeta_i(t) - x_i]_E, \\ x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n \quad (12)$$

və diffuziya əmsalları

$$b_{ij}(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbf{M}_{s,x} [\zeta_i(t) - x_i]_E [\zeta_j(t) - x_j]_E, \\ i, j = 1, \dots, n \quad (13)$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada

$$[c]_E = \begin{cases} c, & \text{əgər } |c| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{əgər } |c| > \varepsilon. \end{cases}$$

(12) və (13) limitlərindəki yığılmanın müntəzəm olduğu və f sıxlıq funksiyasının kifayət qədər hamar olduğu fərz olunduqda, bu sıxlıq s və x -in funksiyası kimi t və y -in qeyd olunmuş qiymətlərində tərs K. t.-ni, yeni son şərti $f(t, x, t, y) = \delta(x - y)$ olan,

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i(s, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad s < t, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (14)$$

tənliyini ödəyir, burada $\delta(x)$, $-\mathbb{R}^n$ -də ümumiləşmiş Dirak funksiyasıdır və t və y -in funksiyası kimi s və x -in qeyd olunmuş qiymətlərində, Kolmoqorov düz tənliyini (Fokker – Plank tənliyini), yeni başlanğıc şərti $f(t, x, t, y) = \delta(y - x)$ olan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i(t, y) f] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} [b_{ij}(t, y) f], \quad t \geq s, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

tənliyini ödəyir.

Xüsusi təoremlə differensial tənliklər terminologiyasında f sıxılığı (14), (15) parabolik tənliklərinin fundamental həllidir. (14)-ü y -ə görə inteqrallayaraq keçid ehtimalı üçün

$$p(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} f(s, x, t, y) dy$$

düsturu alınır. Xüsusi halda, $n=1$, $a_1=0$, $b_{11}=1$ olarsa, ζ Viner prosesidir və bu halda keçid sıxlığı

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-(y-x)^2/2(t-s)}$$

düsturu ilə ifadə olunur, (14) və (15)-lə ifadə olunan K. t. isə istilikkeçirmənin klassik tənliyinə çevrilir, yeni

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

olur.

436 KOLMOQOROV

K. t.-nin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsi ilk dəfə hərtərəfli V. Feller tərəfindən araşdırılmışdır (bax, [2]). Diffuziya prosesini (12)–(14) şərtlərilə verməyərək, onu a_i və b_{ij} əmsallarına görə

stoxastik differensial tənliklər vasitəsilə də qurmaq olar. Bu istiqamətdə K. t. həllərinin varlığı haqqında yeni nəticələr alınır.

Tarixi qeydlər. A. N. Kolmoqorovun 1931-dəki bu sahədəki əsaslandırılmış işlərinə qədər (bax, [1]), (14) və (15) tənlikləri yalnız zamandan asılı əmsallarla çox da əsaslandırılmıyaraq, L. Başelye tərəfindən araşdırılmış və həll olunmuşdu (bax, [4], [5]). Digər tərəfdən (15) düz tənliyi A. N. Kolmoqorova qədər bir sıra fiziki işlərdə meydana gəlmişdi: Braun hərəkəti üzrə A. Eynşteyn və M. Smoluxovskinin (bax, [6] və [8]) işləri; şüalanma sahəsində elektrik dimexdanının cərəyan etməsi haqqında A. Fokkerin (bax, [8]); kvant nəzəriyyəsi üzrə M. Plankin (bax, [9]) işlərində. Fizikada (15) tənliyi, bilavasitə, sonuncu iki alimin adı ilə bağlıdır.

Misal 3 (sıçrayışvari ζ prosesi). Bu halda misal 1-də olduğu kimi sonlu (8) limitləri vardır, lakin keçid ehtimal sıxlıqları (9) əvəzinə sıçrayışların lokal

$$\pi(s, x, \Gamma) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbf{P}_{s,x} \{\zeta_t \neq x, \zeta_t \in \Gamma\}}{\mathbf{P}_{s,x} \{\zeta_t \neq x\}}, \quad x \in E, \Gamma \in \mathcal{B}$$

ölçülərinin varlığı qəbul olunur və tələb olunur ki, bu ölçülər Γ üzrə ehtimal ölçüləri olsun. Reqlulyar halda keçid funksiyası p üçün son şərti $p(t, x; t, \Gamma) = \mathbf{1}_{\Gamma}(x)$ olan (t və $\Gamma \in \mathcal{B}$ qeyd olunmuşdur)

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = q(s, x) \left[\int_E p(s, z; t, \Gamma) \pi(s, x, dz) - p(s, x; t, \Gamma) \right], \\ s \leq t, x \in E$$

inteqro – differensial Kolmoqorov tərs tənliyi və başlanğıc şərti $p(s, x; s, \Gamma) = \mathbf{1}_{\Gamma}(x)$ olan

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int_{\Gamma} q(t, z) p(s, x; t, dz) + \\ + \int_E q(t, z) \pi(t, z, \Gamma) p(s, x; t, dz), \quad t \geq s, \Gamma \in \mathcal{B}$$

Kolmoqorov düz tənliyi doğrudur. Mütləq kəsilməzlik halında, uyğun şərtlərlə, bu tənlikləri (4) keçid sıxlıqları üçün analogi tənliklərlə əvəz etmək mümkündür. Sıçrayışlar arasında diffuziyalı Markov proseslərində (2)-dəki L_s operatorları 2 və 3-cü misallardakı operatorların xətti kombinasiyalarıdır.

Əd. [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей в математической статистике, М., 1986, с. 60–105; [2] Феллер В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 57–96; [3] Гнхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2., М., 1973; [4] Bachelier L., «Ann. sci. Ecole norm. super.», 1900, t. 17, p. 21–86; [5] Bachelier L., «Ann. sci. Ecole norm. super.», 1910, t. 27, p. 339–60; [6] Einstein A., «Ann. Phys.», 1905, Bd 17, S. 549–60; [7] Smoluchowski M., «Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie (A)», 1913, p. 418–34; [8] Fokker A. D., «Ann. Phys.», 1914, Bd 43, S. 810–20; [9] Planck M., «Sitzungsber. Akad., Wiss.», 1917, S. 324–41.

KOLMOQOROV TƏNLİKLƏRİ ikinci momentlər üçün « Колмогорова уравнения для вторых моментов; Kolmogorov equations for second moments » – $n=2$ və 3 olduqda lokal izotrop

turbulentliyin sürət meydanı üçün $\langle [u_L(x+r, t) - u_L(x, t)]^n \rangle$ eninə (r -ə nəzərən) struktur funksiyalarını əlaqələndirən tənliklərdir:

$$D_{LLL}(r) - v \partial D_{LL}(r) / \partial r = -4\varepsilon r / 5.$$

Burada ε – turbulent enerjinin dissipasiya sürəti, v özlülükdür (A. N. Kolmogorov, 1941, bax, [1]). İzotropluq fərz olunmadığı hal üçün bu hökmü A. S. Monin [2]-də isbat etmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математическая механика, М., 1985, с. 290–293; [2] Мо н и н А. С., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 3, с. 515–18.

KOLMOGOROV TƏNLİYİ düz « Колмогорова уравнение прямое; Kolmogorov forward equation » – bax, Kolmogorov tənlikləri, Statistik hidromexanika.

KOLMOGOROV TƏNLİYİ tərs « Колмогорова уравнение обратное; Kolmogorov backward equation » – bax, Kolmogorov tənlikləri, Təsadüfi proses asılı olmayan artımlarla, Statistik hidromexanika.

KOLMOGOROV ÜÇDƏ İKİ QANUNU « Колмогорова закон двух третей; Kolmogorov's two-thirds law » – miqyasları r olan inersion intervalda yayılmış turbulentliyin statistik strukturunun yeganə ε parametri ilə təyin olunmasını ifadə edən Kolmogorovun oxşarlıq hipotezinin nəticəsi olan,

$$D(r) = \langle [u(x+r, t) - u(x, t)]^2 \rangle = C(\varepsilon r)^{2/3} \quad (*)$$

münasibətidir. ε – turbulent enerjinin özüllü dissipasiyasının orta sürəti, C – ədədi konstant, $<$ mötərizəsi isə ortalamanı ifadə edir. K. ü. i. q.-nun dəfələrlə empirik yoxlanılması nəzəriyyə ilə eksperimentin yaxşı uzlaşdığını təsdiq etmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303; т. 31, № 2, с. 99–101 (Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 281–87. Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 264–67).

KOLMOGOROV – ARAK TEOREMİ « Колмогорова – Арака теорема; Kolmogorov – Arak theorem » – ixtiyari F paylanma funksiyasının n – qat kompozisiyası F^{n*} -nin sonsuz bölünən paylanmalar çoxluğu $\mathfrak{G}$ -ya yaxınlığının statistik qiyməti – $\rho(F^n, \mathfrak{G})$ kəmiyyətidir (müntəzəm ρ metrikası mənasında).

$$\Delta_n = \sup \{ \rho(F^{n*}, \mathfrak{G}) : F \}$$

kəmiyyətinin qiymətləndirilmə məsələsi [1]-də A. N. Kolmogorov tərəfindən qoyulmuşdur. Burada isbat olunmuşdur ki,

$$\Delta_n \leq C n^{-1/5},$$

burada C – mütləq sabitdir. Sonradan bu qiymət bir sıra müəlliflər tərəfindən yaxşılaşdırılmış və dəqiqləşdirilmişdir. Məs., L. D. Meşalkin isbat etmişdir ki,

$$\Delta_n \geq C' n^{-2/3} (\log n)^{-4}.$$

T. Arak [2]-də müəyyən mənada, problemi sona çatdıraraq, isbat etmişdir ki,

$$C_1 n^{-2/3} \leq \Delta_n \leq C n^{-2/3}$$

burada C' müsbət mütləq sabitdir. Analoji problematikanın inkişafı haqqında, bax, [3], [4].

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 4, с. 426–36; [2] А р а к Т., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 2, с. 225–45; [3] А р а к Т., З а й ц е в А. Ю., Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 174, с. 3–212; [4] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в.1, с. 178–89.

KOLMOGOROV – DEYEV ŞƏRTİ « Колмогорова – Деева условие; Kolmogorov – Deev condition » – bax, Ümumi statistik analizi, müşahidələrin.

KOLMOGOROV – DUB BƏRABƏRSİZLİYİ « Колмогорова – Дуба неравенство; Kolmogorov – Doob inequality » – bax, Dub bərabərsizlikləri.

KOLMOGOROV – DUB BƏRABƏRSİZLİYİ kva-zimartinqallar üçün « Колмогорова – Дуба неравенство для квазимартингал; Kolmogorov – Doob inequality for quasi-martingales » – bax, Kvazimartinqal.

KOLMOGOROV – PETROVSKİ MƏSƏLƏSİ « Колмогорова – Петровского задача; Kolmogorov – Petrovsky problem » – bax, Sərhəd məsələləri təsadüfi dolaşmalar üçün.

KOLMOGOROV – SMIRNOV KRİTERİSİ « Колмогорова – Смирнова критерий; Kolmogorov – Smirnov test » – statistikaları empirik və nəzəri paylanma funksiyaları və ya onların statistik qiymətləri arasındakı fərqi maksimal (minimal) qiymətilə ifadə olunan, statistik kriterilər üçün ümumiləşdirilmiş addır. K. – S. k. bir, iki və bir neçə seçim üçün tətbiq olunur.

Bir seçim üçün K. – S. k. $F_n(x)$ kəsilməz $G(x)$ paylanma funksiyalı n həcmli skalyar seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $F(x)$ verilmiş paylanma funksiyası olsun. $H : G(x) \equiv F(x)$ hipotezinin yoxlanılması fərz olunur.

$$D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)],$$

$$D_n^- = -\inf_x [F_n(x) - F(x)],$$

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

kəmiyyətləri Kolmogorov–Smirnov statistikaları adlanır. Daha dəqiq: D_n^+ , D_n^- – Smirnov statistikaları (birseçimli, bax, [4]), D_n – Kolmogorov statistika sıdır (bax, [2]). Əgər statistika üçün eksperiment nəticəsində alınmış qiymət olduqca böyük olarsa (H hipotezi nöqtəyi – nəzərinə doğruxoxşar olmayandırsa), onda H hipotezi qəbul olunmur. H hipotezi şərtində D_n^+ , D_n^- , D_n statistikalarının paylanmaları ilkin paylanma funksiyasının konkret nə cür olmasından asılı olmur (əgər ilkin paylanma funksiyası kəsilməz olarsa); bu halda D_n^+ , D_n^- statistikalarının paylanmaları üst-üstə düşür. D_n^+ , D_n^- statistikaları üçün (irəli sürülmüş hipotezdə) faiz nöqtələri cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, məs., [1]).

D_n statistikasına əsaslanan kriteri bütün $G \neq F$ alternativ hipotezlərinə qarşı tutarlı kriteridir; D_n^+ statistikasına əsaslanan kriteri $G \geq F$ alternativlərinə qarşı tutarlı kriteridir (analoji olaraq, D_n^- $F \geq G$ hipotezlərinə qarşı).

n -in böyük qiymətlərində ($n \geq 100$) D_n^+ , D_n^- , D_n statistikalarının faiz nöqtələrini hesablamaq üçün asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə etmək olar ki, bu halda $\beta > 0$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n^+ > \beta\} = e^{-\beta^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n > \beta\} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 \beta^2}$$

asimptotik qiymətləri alınır.

Yuxarıda qeyd olunan hipotezin yoxlanılması üçün istifadədən başqa, Kolmoqorov – Smimov statistikaları esl paylanma funksiyasının etibarlı sərhədlərini də təyin etməyə imkan verir. Məs., G üçün ikiterəfli etibarlı sərhədlər (etibarlılıq əmsali $1-\alpha$ olduğu halda) aşağıdakı şəkildə olur:

$$\{G(x) : |F_n(x) - G(x)| < D_{n,1-\alpha}\},$$

burada $D_{n,1-\alpha}$ – D_n təsadüfi kəmiyyətinin $1-\alpha$ səviyyəli kvantilidir. D_n^+ , D_n^- statistikaları vasitəsilə G üçün biterəfli etibarlı sərhədlər analoji qaydada təyin olunur.

Praktikada, əksər hallarda, verilmiş seçimin bu və ya digər tip paylanmalı olması, yeni onun paylanma funksiyasının sonluölçülülüyü parametrlə qədər dəqiqliklə məlum olması haqqında hipotezin yoxlanılması tələb olunur (əgər hipotez doğru seçilmişdirsə, sonrakı statistik nəticələr üçün müvafiq olan analitik düsturlardan istifadə etmək olar). $F(x, \theta)$ – hipotetik paylanma funksiyası, θ –

naməlum parametrlər, $\hat{\theta}$ – bu parametrlərin müşahidə nəticəsindəki seçim üzrə alınmış statistik qiyməti olsun. Əksər hallarda, $\hat{\theta}$ kimi maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti götürülür.

Klassik Kolmoqorov – Smimov statistikalarına analoji modifikasiya olunmuş Kolmoqorov – Smimov statistikaları aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$\hat{D}_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x, \hat{\theta})],$$

$$\hat{D}_n^- = \sup_x [F_n(x) - F(x, \hat{\theta})],$$

Qeyd etmək lazımdır ki, $\hat{D}_n^+$ və $\hat{D}_n^-$ statistikalarının paylanmaları onların klassik prototiplərinin paylanmaları ilə üst-üstə düşmür. Hətta bu paylanmalar $F(x, \theta)$ funksiyasının ifadəsindən, ümumiyyətlə isə, θ parametrlərinin esl qiymətindən asılı olur. Bir sıra praktiki mühüm paylanmalar ailəsi üçün (normal, üstlü və s., miqyas – yerinidəyişməli ailələr) və parametrlərin təbii (ekvivariant) statistik qiymətləri üçün θ parametrlərdən asılılıq yox olur.

$\hat{D}_n^+$, $\hat{D}_n^-$, $\hat{D}_n$ statistikalarının paylanma funksiyaları və faiz nöqtələrinin analitik hesablanması üçün ümumi metodlar yoxdur. $F(x, \theta)$ paylanmalarının bir sıra ailələri üçün mövcud cədvəllər EHM-da Monte – Karlo metodu ilə modeləşdirmə ilə alınmışdır və

$\hat{\theta}$ statistik qiyməti kimi isə maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti götürülmüşdür. n -in böyük qiymətləri üçün asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə etmək olar. Məs., [5]-də aşağıdakı təqribi düstur kimi düsturlar alınmışdır. $\beta > 0$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} \hat{D}_n^+ > \beta\} \approx a e^{-b\beta^2},$$

burada a, b – müəyyən sabitlərdir. Mövcud cədvəllərlə müqayisədən aydın olmuşdur ki, $n \geq 100$ və $\leq 0,20$ olan ehtimallar üçün bu düsturlar məqbulsayılan dəqiqliyi verir (β -nin artması ilə artan). Xüsusi halda, normal Φ paylanmalı seçim üçün, hər iki parametrlə seçim üzrə təyin olunduğu halda, n -in böyük qiymətlərində yuxarı kritik qiymətlərin tapılması üçün

$$P\left\{\sqrt{n} \sup_x \left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)\right| > \beta\right\} \approx 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\pi-2}} \exp\left(-\frac{2\pi}{\pi-2} \beta^2\right)$$

təqribi düsturundan istifadə etmək olar. Burada $\bar{x}, s^2$ – uyğun olaraq, empirik paylanma funksiyası $F_n(x)$ -in qurulduğu seçimin orta qiyməti və dispersiyasıdır.

İkiseçimli və çoxseçimli K. – S. k.-ləri əsas etibarilə bircinslik haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. $F_m(x)$ və $G_n(x)$ – iki asılı olmayan, m və n həcmli seçimlər üzrə qurulmuş seçimi paylanma funksiyaları, bunların nəzəri paylanma funksiyaları isə uyğun olaraq, $F(x)$ və $G(x)$ olsun. Bircinslik hipotezi $H: F(x) \equiv G(x)$ olsun. İkiseçimli Smimov kriterisi

$$D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

statistikasına əsaslanır ($D_{m,n}^+$ və $D_{m,n}^-$ üçün statistikalar analoji təyin olunur). Sınaqda $D_{m,n}$ statistikası üçün alınmış qiymət böyük olduğu halda, H hipotezi qəbul olunmamalıdır. $F \neq G$ hipotezinə hər bir alternativ üçün kriteri tutarlıdır. Hipotez şərtində $D_{m,n}$ statistikasının paylanması, $F=G$ paylanma funksiyası kəsilməz olduğu halda, ümumi paylanma funksiyası F -dən asılı olmur. Bu halda faiz nöqtələrinin hesablanması müəkkəb kombinatorika məsələsi olur ki, onun həlli üçün çox cəhdlər edilmişdir. Hal-hazırda bu istiqamətdə ətraflı cədvəllər, alqoritmlər və EHM

üçün proqramlar vardır. $m, n \rightarrow \infty$ olduqda, $\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}$

və $\sqrt{n} D_n$ statistikaları asimptotik olaraq eyni qanunla paylanmışlar (uyğun hipotezlərdə). $\sqrt{n} D_n$ -in asimptotik paylanması yuxarıda verilmişdir.

Çoxölçülülük seçimləri üçün bircinsliyin K. – S. k. ilə yoxlanılması da analojidir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [3] С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика, Избр. труды, М., 1970, с. 117–27, 133–59; [4] Т ю р и н Ю. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1984, т. 48, № 6, с. 1314–43; [5] Т и м о н и н В. И., Ч е р н о м о р д и к О. М., «Тео-

рия вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 572–73; [6] Pearson E. S., Hartley H. O. (eds.), Biometrika tables for statisticians, v. 2, Camb., 1972.

KOLMOGOROV – SMIRNOV STATİSTİKASI
« Колмогорова – Смирнова статистика; Kolmogorov – Smirnov statistic » – bax, *Kolmogorov – Smirnov kriterisi*.

KOMBİNATOR ANALİZ « комбинаторный анализ; combinatorial analysis », kombinator riyaziyyat, kombinatorika, – hər hansı, adətən, sonlu çoxluğun hissələrinin verilmiş qaydalara uyğun olaraq seçilməsi və yerləşdirilməsi məsələlərinin həllinə həsr olunmuş riyaziyyat bölməsidir. Hər bir belə qayda ilkin çoxluğun elementlərinin hər hansı kombinator konfigurasiya adlandırılan konstruksiyasının xarakterik cəhətlərini təyin edir. Buna görə də, K. a.-in məqsədinin kombinator konfigurasiyaların öyrənilməsi olduğunu söyləmək olar. Bu isə kombinator konfigurasiyaların varlığı məsələlərini, onların qurulması alqoritmlərini, belə alqoritmlərin optimizasiyasını, hesablama məsələlərinin həllinin, o cümlədən, verilmiş sinfin konfigurasiyaları sayının təyin olunmasını əhatə edir. Kombinator konfigurasiyalara ən sadə misallar *birleşmələr* (kombinezonlar), *yerleşmələr* (aranjemanlar) və *yerdeyishmələrdir* (permutasiyonlardır). n elementli Ω çoxluğu n – çoxluq adlanır; onun ixtiyari m – altçoxluğu, $m \leq n$, m – həcmli birleşmə adlanır. n müxtəlif elementdən m həcmli birleşmələrin sayı

$$C(n, m) = C_n^m = \binom{n}{m} = n(n-1)\dots(n-m+1)/m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

düsturu ilə təyin olunur.

$$(1+t)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m t^m, \quad C_n^0 = 1$$

düsturu Nyuton binom düsturu, C_n^m ədədləri binomial əmsallar adlanır. Nizamlanmış m – altçoxluq m – ölçülü yerleşmə adlanır. n müxtəlif elementli çoxluğun m həcmli yerleşmələrinin sayı

$$A(n, m) = A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$$

ədədinə bərabərdir. $m=n$ olduqda, yerleşmə Ω çoxluğunun elementlərinin yerdeyishməsidir. Belə yerdeyishmələrin sayı

$$P(n) = P_n = n!, \quad 0! = 1$$

düsturu ilə təyin olunur.

K. a.-in əsas anlayışlarının yaranması və inkişafı riyaziyyatın cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi kimi bölmələrinin inkişafı ilə paralel olmuşdur. Hələ Qədim Şərqi riyaziyyatçılarına birleşmələr sayının binomial əmsallarla ifadəsi və qüvvət üstü natural n ədədinə bərabər olan Nyuton binom düsturu məlum idi. K. a. riyaziyyatın bölməsi kimi qumar oyunları ilə bağlı B. Paskalın (B. Pascal) və P. Fermanın (P. Fermat) işləri əlaqədar yaranmışdır. Bu işlər ehtimal nəzəriyyəsinin əsasını təşkil etməklə yanaşı, eyni zamanda sonlu çoxluğun elementlərinin kombinasiyaları sayının təyin edilmə prinsiplərini əhatə edərək, bununla da K. a.-in ehtimal nəzəriyyəsi ilə ənənəvi əlaqəsini müəyyən etmişdir.

Q. Leybnits (G. Leibniz) «Ars combinatoria» («Kombinator bacarıq») adlı dissertasiyası ilə kombinator metodların sistematik inkişafında böyük rol oynamışdır, deyəsən, «kombinator» termini də ilk dəfə burada daxil olunmuşdur. K. a.-in özünü təsbit

etməsində Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Fərziyyə etmələr bacarığı») adlı işi mühüm rol oynamışdır; bu iş ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına həsr olunmuş, bir sıra kombinator anlayışlar burada ətraflı şərh olunmuş, onların ehtimalları hesablanması üçün təbiiqləri göstərilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, Q. Leybnits və Ya. Bernullinin işləri kombinator metodlar riyaziyyatın müstəqil bir sahəsinə çevrilmiş oldu.

Kombinator metodların inkişafında L. Eylerin (L. Euler) böyük xidməti olmuşdur. Onun bölgülərlə və natural ədədlərin toplananlara kompozisiyaları ilə bağlı işləri kombinator konfigurasiyaların əsas hesablama metodlarından biri – doğuran funksiyalar metodunun əsası qoyuldu.

K. a.-ə marağın təzədən yaranması 20-ci əsrin 50-ci illərindən başlayır ki, bu da kibernetika və diskret riyaziyyatın, elektron-hesablama texnikasının geniş istifadə edilməsi ilə bağlı olmuşdur. Bu zaman *klassik kombinator məsələlərə* maraq artmış, çoxlu yeni problemlər qoyulmuşdur.

Araşdırma istiqamətlərinin formalaşmasına, sonradan iki faktor təsir göstərmişdir: bir tərəfdən araşdırma obyektinin seçilməsi, digər tərəfdən öyrənilən obyektin mürəkkəbliyin dərəcəsi asılı olan məqsədin qısaca dürrüst ifadə olunması. Əgər tədqiq olunan konfigurasiya ödənilməsi aydın olmayan şərtlər sistemi ilə təyin olunursa, onda tədqiqatın məqsədi konfigurasiyanın varlığı şərtlərinin müəyyən edilməsi və onun qurulması alqoritminin tərtib olunmasından ibarətdir.

K. a.-in inkişafda olan bölməsi blok – sxem nəzəriyyəsidir (bax, [2], [3], [11]); bu bölmənin əsas problemləri təsnifatla, varlıq şərtlərlə və blok – sxemlərin bezi siniflərinin qurulması metodları ilə bağlıdır. Blok – sxemin xüsusi halı tənləşdirilmiş natamam blok – sxemlər və ya (b, v, r, k, λ) – konfigurasiyalarıdır ki, bunlar hər hansı v çoxluğunun b, k – altçoxluqları kimi (bunlar bloklar adlandırılır), hər bir elementin yalnız r blokda, iki müxtəlif element cütünün isə yalnız λ blokda olması şərtlə təyin olunur. $b=v$ olarsa, aydındır ki, $r=k(b, v, r, k, \lambda)$ – konfigurasiyası, (v, k, λ) – konfigurasiya və ya simmetrik tənləşdirilmiş natamam blok – sxem adlanır. Hətta (v, k, λ) – konfigurasiyaları üçün bunların varlığı haqqında zəruri və kafi şərtlər haqqında suala hələlik cavab verilməmişdir. (v, k, λ) – konfigurasiyalarının varlığı üçün zəruridir ki, v cüt olduqda, $k-\lambda$ kvadrat, v tək ədəd olduqda isə $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2} \lambda y^2$ tənliyinin həlli tam və eyni zamanda sıfır bərabər olmayan x, y, z ədədləri olsun.

$v = n^2 + n + 1, k = n + 1, \lambda = 1$ olduqda (v, k, λ) – konfigurasiyası n tərtib proyektiv müstəvi olub, sonlu sayda nöqtələr və insidentlik şərtləri ilə verilmiş düzxətlərdən ibarət sonlu həndəsənin xüsusi halıdır. Hər bir $(n-1)$ tərtib proyektiv müstəviyə qarşılıqlı birqıymətli olaraq, $(n-1)$ sayda cüt-cüt ortoqonal n tərtib *latin kvadratlarını* uyğun qoymaq olar. n tərtib proyektiv müstəvinin varlığı üçün $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ olduqda, $n = a^2 + b^2$ bərabərliyini ödəyən a və b tam ədədlərinin olması zəruridir. n tərtib proyektiv müstəvilərin varlığı haqqında sual yalnız, $n = p^\alpha$, p sadə ədəd, α isə natural ədəd olan halda müsbət həll olunmuşdur. Hətta $n = 10$ olduqda, bu sual öz cavabını tapmamışdır. Bu suallar çərçivəsində, $n = 4k + 2, k = 1, 2, \dots$ tərtib ortoqonal latin

kvadratların cütünün mövcud olmaması haqqında Eyler hipotezini $k > 1$ halında inkar edən nəticə alınmışdır.

K. a.-in digər istiqaməti seçim haqqında teoremlərlə bağlıdır. Bu istiqamətdə alınmış bir sıra nəticələrin əsasını **Holl teoremi** (Hall theorem) təşkil edir, bu teorem X çoxluğunun $(X_1, \dots, X_n)$ altçoxluqları ailəsinin müxtəlif təmsilçiləri (transversalları) sisteminin varlığı, yəni $(x_1, \dots, x_n)$ elementlər sisteminin varlığı haqqındadır: $i \neq j$ olduqda $x_i \in X_i$ və $x_i \neq x_j$ şərtlərini ödəyən transversal, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$ şərtini ödəyən ixtiyari $i_1, \dots, i_k$ üçün $|X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_k}| \geq k$ olsun, burada $|Y|$ – Y çoxluğunun elementlərinin sayıdır. Holl teoremindən latın kvadratının varlığı haqqında teorem alınır: $(k \times n)$ – ölçülü ixtiyari latın kvadratını n tərtib latın kvadratına qədər tamamlamaq olar, $1 \leq k \leq n-1$. Holl teoreminin digər nəticəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: mənfi olmayan ixtiyari $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$ matrisini

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} = t > 0$$

olarsa,

$$A = \alpha_1 \Pi_1 + \dots + \alpha_s \Pi_s$$

şəklində ifadə etmək olar, burada $\Pi_1, \dots, \Pi_s$ – n tərtib əvəzləmə matrisləridir və $s \leq (n-1)^2 + 1$. Holl teoremindən belə bir teorem də alınır ki, bütün müsbət elementlərdən tərtib olunmuş mənfi olmayan matrisin sətir və sütunlarının minimal sayı onun ele müsbət elementlərinin maksimal sayına bərabərdir ki, bu elementlərdən heç bir ikisi eyni bir sətirdə və ya eyni bir sütunda yerləşmiş olmasın. Bu teoremə analoji – hissevi nizamlanmış çoxluqların ekstremal xassəsini müəyyən edən teoremdə hökm olunur ki, kəsişməyən zəncirlərin minimal sayı cüt-cüt müqayisə olunmayan elementlərdən ibarət altçoxluğun maksimal gücü ilə üst-üstə düşür. Aşağıdakı nəticə də ekstremal xassə daşıyır (**Ramsey teoremi**): əgər X n – çoxluğu üçün r elementli bütün C_n^r sayda birləşmələri təşkil edərək, onları k sayda kəsişməyən siniflərə ayırıqda, tam m ədədi üçün ele $n_0 = n_0(m, r, k)$ ədədi vardır ki, $n \geq n_0$ olduqda, bu siniflər arasında X -in m elementli $Y \subset X$ altçoxluğunu özündə saxlayan C_m^r birləşmələrinin hamısına aid olduğu sinif tamaq olar.

Ekstremal sayılan **kommiyovajor məsələsində** n sayda şəhərin hər birində olaraq əvvəlki şəhərə ən qısa yolla qayıtmaq üçün marşrut seçilməsi tələb olunur, bu şərtlə ki, şəhərlər arasında məsafələr məlum olsun. Bu məsələ neqliyyat şəbəkələrinin öyrənilməsində tətbiq edilir. Ekstremal xüsusiyyətli kombinator məsələlər şəbəkələrdə axınlar nəzəriyyəsində və qraflar nəzəriyyəsində yaranır.

K. a.-in əsas hissəsini **hesablama məsələləri** təşkil edir. Bu məsələlərin həllində ya verilmiş sinifdən kombinator konfigurasiyaların seçilməsi metodu göstərilir, ya onların sayı təyin olunur, ya da ki, bunların hər ikisi edilir. Hesablama məsələsinin tipik nəticələri aşağıdakılardır:

k tsikli n dərəcəli əvəzləmələrin sayı $|S(n, k)|$ ədədinə bərabərdir, $S(n, k)$ 1-ci növ Stirling ədədi olub,

$$x(x-1) \dots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

n elementli çoxluğun k sayda altçoxluqlara bölgüsü sayı 2-ci növ Stirling ədədi $\sigma(n, k)$ -ya bərabərdir və

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n;$$

n sayda müxtəlif oyuqda m sayda müxtəlif əşyanın, bütün oyuqlar dolu olması şərtlə, yerləşmələrinin sayı $n! \sigma(m, n)$ ədədinə bərabərdir.

Hesablama məsələlərinin həlli üçün faydalı vasitə – **matris permanenti**dir. Elementləri hər hansı halqadan olan $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $n \leq m$ matrisinin permanenti

$$\text{per } A = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada cəmləmə m müxtəlif elementdən n həcmli bütün mümkün yerləşmələr üzrə aparılır. Sonlu çoxluğun altçoxluqlarının ixtiyari ailəsinin transversallarının sayı – uyğun insidentlik matrisinin permanentinə bərabərdir.

Məhdud pozisiyalı yerdəyişmələrin sayının təyin olunması üzrə məsələlərin tam bir sinfi permanentlərin hesablanmasına gətirilir. Bu məsələlər rahatlıq məqsədilə, bəzən, $n \times n$ ölçülü şahmat lövhəsində qarşılıqlı hücum vəziyyətində olmayan fiqurların yerləşdirilməsi məsələsi kimi də ifadə olunur. Matrislərin bəzi siniflərinin permanentlərinin təyin olunması ilə dimerlər haqqında məsələnin variantları da bağlıdır, dimerlər adsorbsiyanın öyrənilməsində yaranır və məsələ də bu halda atomların hər hansı müstəvidə ikiatomlu molekullara birləşmə üsullarının sayını təyin etməkdən ibarət olur. Bu məsələlərin həlli, determinantlara yaxın, matrislərin müəyyən funksiyaları – pfaffianlar vasitəsilə alına bilər. Latın düzbucaqlarının (kvadratlarının) sayı haqqında problem də bəzi $(0, 1)$ matrislərinin permanentlərinin effektiv həll metodlarının üzərində işlənilmə ilə bağlıdır.

Permanentlərin hesablanması üçün

$$\text{per } A = \sum_{k=m-n}^m (-1)^{k-m+n} C_k^{m-n} S_k,$$

düsturundan istifadə olunur.

$$S_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^m a_{il} - \sum_{r=1}^k a_{ij_r} \right).$$

Matrislərin bəzi siniflərində permanent kəmiyyətini qiymətləndirən çoxsaylı bərabərsizliklər vardır. Maraqlı doğuran məsələlərdən biri də mənfi olmayan matrislərin bu və ya digər siniflərində permanentin ekstremal qiymətlərinin təyin olunmasıdır. İkiqat stoxastik matrislər sinfi üçün belə məsələ 1980-də Q. P. Yeqoriçev və həm də D. İ. Falikman (bax, [7]) tərəfindən həll olunmuşdur; onlar isbat etmişlər ki, n tərtib ikiqat stoxastik matrisin permanentinin minimumu $n!/n^n$ -ə bərabərdir. Bu da hələ 1926-da

B. Van der Vardenin (B. Van der Waerden) irəli sürdüyü məşhur hipotezi təsdiq etmiş oldu.

Hesablama məsələlərinin həllində *doğuran funksiyalar* metodu böyük rol oynayır.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

doğuran funksiyası elementləri hər hansı meydandan olan $(a_0, a_1, \dots)$ ardıcılığına uyğun, formal qüvvət üstlü sıra kimi götürülür. Belə təriflə verilən doğuran funksiyalar hesablama məsələlərinin həllində rekurrent münasibətlər və sonlu fərqlər tənlilikləri metodları ilə yanaşı effektiv surətdə istifadə olunur. Asimptotik düsturların doğuran funksiyalar kimi alınmasında, adətən, heçiqi və ya kompleks dəyişənli analitik funksiyalardan istifadə olunur. Sonuncu halda əmsalların ifadələrinin tapılması üçün Koşi inteqral düsturundan istifadə olunur.

İnsidentlik cəbrlərinə baxılmaqla və hissəvi nizamlanmış çoxluqlarda (bax, məs., [1]) Mobius funksiyalarından istifadə edilməklə bağlı olan hesablama metodlarının mümkün unifikasiyalari istiqamətində nəticələr alınmışdır. Hesablama məsələlərinin həllində obyektlərin fərqlənməməzlik anlayışının düstür və səlis ifadə olunması mühüm rol oynayır. Bu məqsədlə obyektlərin hər hansı əvəzləmələr qrupuna nəzərən ekvivalentlik anlayışı ilə doğuran funksiyalar metodunun tətbiqi birlikdə P o y a h e s a b l a m a nə z e r i y y ə s i n i n ə s a s ı n ı t ə ş k i l e t m i ş d i r (b a x , [1 1]). Bu nəzəriyyənin məzisi aşağıdakı kimidir. $|X| = m$, $|Y| = n$ olsun.

$f: X \rightarrow Y$ konfigurasiyalarının çoxluğu Y^X -ə baxılır. X çoxluğunda əvəzləmələr qrupu A təsir göstərir və bu qrup Y^X -də $\sim$ ekvivalentlik münasibətini təyin edir ki, eger ele $\alpha \in A$ olarsa ki, bütün $x \in X$ üçün $f(\alpha(x)) = f_1(x)$ olsun, onda $f \sim f_1$ olur; $f, f_1 \in Y^X$. Hər bir $y \in Y$ üçün $[y] = (s_1, \dots, s_k)$ xarakteristikası ona qarşı qoyulur, burada $s_i, i = 1, \dots, k$ – Abel qrupunun elementləridir. f konfigurasiyasının xarakteristikası

$$[f] = \sum_{x \in X} [f(x)]$$

bərabərliyi ilə verilir. Əgər $a(s_1, \dots, s_k)$, y -in ($y \in Y$) xarakteristikasının verilmiş qiymətləri elementlərinin sayı və $b_m(s_1, \dots, s_k)$ – ekvivalent olmayan f konfigurasiyalannın sayıdırsa, $f \in Y^X$,

$$F(y_1, \dots, y_k) = \sum_{(s_1, \dots, s_k)} a(s_1, \dots, s_k) y_1^{s_1} \dots y_k^{s_k},$$

$$\Phi_m(y_1, \dots, y_k) = \sum_{(s_1, \dots, s_k)} b_m(s_1, \dots, s_k) y_1^{s_1} \dots y_k^{s_k}$$

olduqda, onda P o y a t e o r e m i n d e hökm olunur ki,

$$\Phi_m(y_1, \dots, y_k) = Z(F(y_1, \dots, y_k), F(y_1^2, \dots, y_k^2), \dots, F(y_1^m, \dots, y_k^m))$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $Z, - A$ qrupunun tsiklik indeks i olub,

$$Z(t_1, \dots, t_m; A) = \sum_{j_1 + 2j_2 + \dots + mj_m = n} C(j_1, \dots, j_m; A) t_1^{j_1} \dots t_m^{j_m}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, $C(j_1, \dots, j_m; A)$, – A qrupunun $\{1^{j_1} 2^{j_2} \dots m^{j_m}\}$ tsiklik sinfinin elementləri sayıdır. Bu teorem

B e r n s a y d l e m m a s ı n a ə s a s l a n ı r , b u l e m m a y a g ö r e ə v ə z l ə m ə l e r i n A qrupu ilə X çoxluğunda təyin olunan ekvivalentlik siniflərinin sayı $N(A)$

$$N(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha)$$

düsturu ilə verilir, burada $j_1(\alpha)$, – $\alpha \in A$ vahidi tsikllərinin sayıdır. Poya nəzəriyyəsi qraflar nəzəriyyəsinin hesablama məsələlərinin həllində və karbon kimyəvi birləşmələrinin hesablanmasında tətbiq olunur. Uyğun olaraq, X və Y -də təsir göstərən G və H qruplarının konfigurasiyalarının ekvivalentliyi halında Poya teoreminin ümumiləşməsi vardır (bax, [4], [11]). Bu şəkildə teorem, məs., izomorf olmayan abstrakt avtomatların sayını təyin etmək üçün tətbiq olunur.

Əgər $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{a_1, \dots, a_n\}$ və $\sigma: X \rightarrow Y$ olarsa, α_j isə obraz kimi α_j dəfə istifadə olunarsa, onda

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}], \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$$

ifadəsi σ -nin ilkin spesifikasiyası adlanır. Əgər $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərində β_0 sayda sıfır, β_1 sayda vahid və s. varsa, onda

$$[[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]], \beta_0 + \dots + \beta_m = n, \beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$$

ifadəsi ikinci spesifikasiya adlanır. $\sigma: X \rightarrow Y$ konfigurasiyalannın ekvivalentliyini təyin edən G və H qruplarının müəyyən spesifikasiyası halında ekvivalent olmayan konfigurasiyalann hesablanması üçün doğuran funksiyalann qurulması qaydasını göstərmək olur. Bu qayda ü m u m i k o m b i n a t o r s x e m adlandırılır və dörd xüsusi hala ayrılır; bu da G və H qruplarının uyğun dərəcəli vahidi E qrupunun və ya simmetrik S_n qrupunun hansı qiymətlər almasına uyğun olaraq edilir. Bu xüsusi hallar məlum kombinator sxemlərin əksəriyyəti üçün modelldir (bax, [10], [11]).

1. K o m m u t a t i v q e y r i - s i m m e t r i k n - b a z i s : $G = S_m$, $H = E$. Eyni əşyaların müxtəlif oyuqlara birləşmələri, yertəşmələri sxemlərini modelldir.

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}],$$

$$\alpha_i \in \Lambda_i \subseteq N_0 = \{0, 1, \dots\}, \Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$$

şərtlərlə təyin olunan, ekvivalent olmayan σ konfigurasiyalannın təyin olunması üçün doğuran funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\Phi(t; x_1, \dots, x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} (t x_j)^{\alpha_j}.$$

2. Q e y r i - k o m m u t a t i v q e y r i - s i m m e t r i k n - b a z i s : $G = E$, $H = E$. Müxtəlif əşyaların müxtəlif oyuqlara birləşmələri, yertəşmələri sxemlərini modelldir.

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}],$$

$$\alpha_i \in \Lambda_i, \Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$$

şərtlərlə təyin olunan, ekvivalent olmayan σ konfigurasiyalarnın hesablanması üçün doğuran funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tilde{\Phi}(t; x_1, \dots, x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!} x_j^{\alpha_j}.$$

3. Kommutativ simmetrik n – bazis: $G = S_m$, $H = S_n$. Eyni eşyalarn eyni oyuqlara yerləşdirilməsi, natural ədədlərin ayrılışlarının hesablanması sxemlərini modeləşdirir.

$$[[\sigma]] = [[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]],$$

$$\beta_j \in \Lambda_j, \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$$

şərtlərlə verilən σ konfigurasiyalarnın hesablanması

$$\Psi(t; x_1, \dots, \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} (x_j t^j)^{\beta_j}$$

şəklində doğuran funksiya istifadəyə əsaslanır.

4. Qeyri-kommutativ simmetrik n – bazis: $G = E$, $H = S_n$. Sonlu çoxluqların bloklara bölgülərini, müxtəlif eşyalarn eyni olan oyuqlara yerləşdirilməsi sxemlərini modeləşdirir.

$$[[\sigma]] = [0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]],$$

$$\beta_j \in \Lambda_j, \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$$

şərtlərlə verilən σ konfigurasiyalarnın hesablanması

$$\tilde{\Psi}(t; x_1, \dots, \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}$$

şəklində doğuran funksiya istifadəyə əsaslanır.

K. a.-də asimptotik metodlar əsas yer tutur. Bunlar həm mürekkəb sonlu ifadələri bu ifadədəki parametrlərin qiymətləri böyük olduğu halda sadələşdirmək üçün, həm də dəqiq düsturlar məlum olmadıqda, başqa yollarla, təqribi düsturları almaq üçün tətbiq olunur. Hesablama xarakterli kombinator məsələni bəzən hər hansı təsadüfi kəmiyyətin paylanması xarakteristikasının tapılması məsələsi kimi də ifadə etmək məqsədəuyğundur. Belə interpretasiya ehtimal nəzəriyyəsinin inkişaf etmiş aparatından istifadə etməyə, asimptotikalarnın tapılması üçün isə limit teoremlərindən istifadə etməyə imkan yaradır. Bu nöqtəyi – nəzərdən, eşyalarn oyuqlara təsadüfi qaydada yerləşdirilməsi, çoxluqların təsadüfi bölgüləri, təsadüfi əvəzləmələrin tsiklik strukturları, təsadüfi qraflarn müxtəlif sinifləri, o cümlədən, inikaslar qrafları da daxil olmaqla ətraflı araşdırılmışdır (bax, [9], [10]).

Simmetrik qrup və semi – qrupların kombinator xassələrinin öyrənilməsində ehtimali yanaşma tətbiq olunur. $n \rightarrow \infty$ olduqda, simmetrik S_n qrupunun təsadüfi elementinin tərtibinin limit paylanması, onun təsadüfi elementlərlə doğurulması ehtimalının asimptotikası araşdırılmışdır. Təsadüfi mənfi olmayan matrislərin bezi sinifləri üçün matrisdə sıfırlı xətlərin və permanentlərin sayının paylanması öyrənilmiş, belə matrislərin primitivliyi ehtimalı qiymətləndirilmişdir. Kombinator konfigurasiyalarnın konstruksiya edilmədən varlığını isbat etmək üçün bezen, xüsusi ehtimal qaydası istifadə olunur. Bu qaydanın

mahiyyəti hər hansı bir hadisənin ehtimalının qiymətləndirilməsinin köməyiylə konfigurasiyalarn varlığının müəyyən olunmasından ibarətdir (bax, [7]).

Bax, həmçinin *Ehtimal kombinatorikası*.

Əd.: [1] Р и о р д а н Д ж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Р а й з е р Г.-Д ж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Х а р а р и Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [5] Х а р а р и Ф., П а л м е р Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977; [6] Э р д е ш П., С п е н с е р Д ж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [7] М и н к Х., Перманенты, пер. с англ., М., 1982; [8] Г у л - д е н Я. П., Д ж е к с о н Д., Перечислительная комбинаторика, пер. с англ., М., 1990; [9] К о л ч и н В. Ф., Ч и с т я к о в В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 11, М., 1974, с. 5–45; [10] С а ч к о в В. Н., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. Семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 146–64; [11] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

КОМБИНАТОР ƏDƏDLƏR « комбинаторные числа; combinatorial numbers » – kombinatorikanın

müxtəlif saytəyinetmə məsələlərində yaranan, ədədi kəmiyyətlərin böyük toplusunu özündə birləşdirən termindir. Bir qayda olaraq, bu kəmiyyətlər aşkar interpretasiya (çox halda birqiymətli olmayaraq) olunur, bu interpretasiya verilən sinfin konfigurasiyalarna gətirən, hər hansı, adətən, sonlu çoxluğun elementlərinin seçilməsi və yerləşməsi üsullarının sayı (və ya hər hansı obyektlər çoxluğunun bu və ya digər xassəli obyektlərinin sayı) terminlərində ifadə olunur.

K. ə.-ə ən sadə misallar *birleşmələrin, yerleşmələrin* (rus. размещения) və *yerdeyishmələrin* (rus. перестановка) saylarıdır. Ω , – N sayda müxtəlif elementdən ibarət çoxluq olsun; bu çoxluğun altçoxluqları *birleşmələr* adlanır; Ω çoxluğunun n həcmli müxtəlif birleşmələrinin sayı

$$C_N^n = \binom{N}{n} = N(N-1) \dots (N-n+1)/n! = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

düsturu ilə təyin olunur. Ω -nın müxtəlif elementlərindən təşkil olunan nizamlanmış toplular *yerleşmələr* adlanır; n həcmli (elementli) müxtəlif yerleşmələrin sayı

$$A_N^n = n! C_N^n = (N)_n = N(N-1) \dots (N-n+1)$$

düsturu ilə hesablanır. $n = N$ olduqda yerleşmələr (çoxluğun elementlərinin bütün mümkün olan müxtəlif yerleşmələri) *yerdeyishmələr* (*permutasiyonlar*) adlanır. N elementli çoxluğun bütün mümkün yerdeyishmələrinin sayı

$$P_N = N!$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər elementlər məhdudluq qoyulmadan təkrarlana bilinsə, onda N müxtəlif elementli çoxluğun n elementli bütün birleşmələrinin sayı C_{N+n-1}^n ədədine, n həcmli bütün nizamlanmış toplularının sayı N^n -ə bərabərdir (bax, [3]).

Bu ədədlər müxtəlif hadisələrin ehtimalının tapılmasında, ehtimalın klassik tərif sxeminə geniş istifadə olunur. Məs., urda 1, 2, ..., N ədədləri ilə nizamlanmış kürəciklər varsa, bu kürəciklərin M saydası ağ rəngli, $N-M$ saydası isə qara rənglidirsə, onda urdan ixtiyari qaydada çıxarılmış n sayda kürəciyin m saydasının ağ rəngli olması ehtimalı

$$\frac{C_n^m A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

(qaytarmamaq şərt ilə sxemi) ədədinə bərabərdir, əgər küreciklər qaytarmaq şərt ilə sxemi üzrə seçilsə, onda bu ehtimal

$$\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N} \right)^m \left(1 - \frac{M}{N} \right)^{n-m}$$

ədədinə bərabərdir.

Xüsusi sayılan K. ə.-dən ən çox istifadə olunanı – $\Delta^k 0^n$ M o r - q a n ə d ə d l ə r i [Δ – fərq operatorudur: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$]:

$$\Delta^k 0^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n.$$

uyğun olaraq, 1-ci və 2-ci nö v S t i r l i n q ə d ə d l ə r i $S(n, k)$ və $\sigma(n, k)$ və

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

– B e l l ə d ə d l ə r i d i r, Bell ədədlərinin kombinator interretasiyalarından biri: n elementli çoxluğun kəsişməyən altçoxluqlara müxtəlif bölgülərinin sayıdır.

K. ə.-in xassələrinin araşdırılmasında rekurrent münasibətlər və sonlu fərqlər tənliklər metodları ilə paralel olaraq, doğuran funksiyalar metodlarından da geniş istifadə olunur. Bir çox hallarda obyektlərin baxılan çoxluğunda münasib ehtimal modeli qurmaq olur və bununla da hesablanma xarakterli kombinator məsələni uyğun təsadüfi kəmiyyətin paylanması müəyyənləşdirilməsi məsələsi kimi ifadə etmək olur. Belə interpretasiya K. ə.-in öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif metodlarını (məs., limit teoremlərini) tətbiq etməyə imkan yaradır.

Ə d .: [1] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения, М., 1982.

KOMBİNATOR İNTEQRAL HƏNDƏSƏ « комбинаторная интегральная геометрия; combinatorial integral geometry » – bax, *İnteqral həndəsə*.

KOMBİNATOR KODLAMA « комбинаторное кодирование; combinatorial coding » – bax, *Kodlaşdırma* ($la(n)ma(s)$) məlumatlar mənbəinin.

KOMBİNATOR KONFIGURASIYA « комбинаторная конфигурация; combinatorial configuration » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATOR MƏSƏLƏLƏR klassik « комбинаторные задачи классические; classical combinatorial problems » – elementləri tapmaca tipli, əyləncə məzmunlu hər hansı qısa və dürtüst ifadə oluna bilən sonlu çoxluğun elementlərinin seçilmə və yerləşməsi məsələləridir.

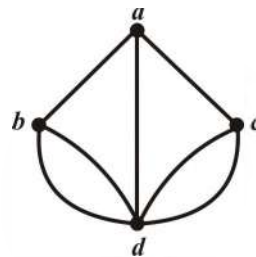
Klassik K. m.-dən biri, hələ Qədim Şərq əfsanələrində də adı çəkilən şəhərli kvadratin qurulması məsələsidir. Bu məsələdə n^2 sayda ilk natural ədədlərin $n \times n$ kvadratında ehtimal qaydada düzülmesi tələb olunur ki, sətirlər, sütunlar və diaqonallar üzrə ədədlərin cəmi eyni bir ədədə bərabər olsun. Məs., $n = 3$ olduqda şəhərli kvadrat

4	9	2
3	5	7
8	1	6

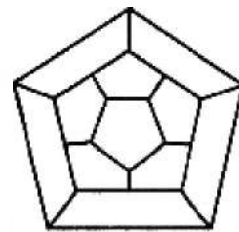
şəklində olur. Belə kvadratların qurulması üçün bir sıra metodlar məlumdur (bax, məs., [1]). $n > 4$ olduqda n tərtib şəhərli kvadratlar sayını təyin etmək çətin və hələ də həlli tapılmamış məsələlərdən biri hesab olunur.

Bir sıra K. m.-ə L. Eyler (L. Euler) tərəfindən baxılmışdır. Bunlardan biri 36 zabıt haqqında məsələdir; bu məsələdə 6×6 ölçülü kvadratin oyuqlarında (kare) 6 müxtəlif polkdan 6 müxtəlif hərbi rütbəli 36 zabiti ehtimal yerləşdirmək tələb olunur ki, hər bir sütun (kolonna) və hər bir cərgədə hər bir rütbədən və hər bir polkdan, yalnız və yalnız, bir zabıt olsun. $n \times n$ ölçülü, 1, 2, ..., n elementlərindən ibarət kvadratin hər bir sətir və sütununda yerləşən elementləri müxtəlif olarsa, belə kvadrat latin kvadratı adlanır. İki latin kvadratını üst-üstə qoyduqda oyuqlardakı bütün n^2 sayda elementlər cütürləri müxtəlif olarsa, bunlar ortoqonal latin kvadratı adlanır. 36 zabıt haqqında məsələ 6 tərtib ortoqonal latin kvadratlarının cütünün varlığı haqqında məsələyə ekvivalentdir. L. Eyler $n = 4k + 2$ tərtib, $k = 1, 2, \dots$ ortoqonal latin kvadratlarının mövcud olmaması haqqında hipotezi söyləmişdir. 1900-də Q. Tarri (G. Tarry) bu hipotezi $n = 6$ olduqda təsdiq etmişdir və bununla da o, 36 zabıt haqqında məsələnin həlli olmadığını isbat etmiş oldu. 1959-60-cı illərdə hər bir $n = 4k + 2$, $k = 2, 3, \dots$ üçün ortoqonal latin kvadratları cütünün varlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur (bax, [2]).

L. Eyler tərəfindən baxılan digər məsələ k e n i q s b e r q k ö r p ü l e r i haqqında məsələdir. Bu məsələ aşağıdakı kimi ifadə olunur. Çayın sahillərini və bu çayda yerləşən iki adanı yeddi körpü birləşdirir, bu çay şəhərin içərisindən keçir. Hər bir körpüdən yalnız bir dəfə keçərək əvvəlki nöqtəyə qayıtmaq olarmı? Bu məsələni şəkil 1-də təpələri qurunu təsvir edən qrafın bütün tərəflərindən yalnız bir dəfə keçmək şərt ilə başlanğıc nöqtəyə qayıtmaq mümkünlüyü haqqında qoyulan məsələ kimi ifadə etmək olar. Əgər qrafda belə keçilmə mümkün olarsa, belə qraf E y l e r t s i k l i n e malikdir, deyir. L. Eyler göstərmişdir ki, qraf Eyler tsikline, yalnız və yalnız, o halda malikdir ki, o, əlaqəli qrafdır və onun hər təpəsindən çıxan tiliarının sayı cütdür. Şəkil 1-də təsvir olunan qraf bu tələbi ödəmədiyindən kenişsərk körpüləri haqqında məsələnin həlli yoxdur. Başlanğıc nöqtə ilə sonda qayıdış nöqtəsinin üst-üstə düşməsi şərti qoyulmadığı halda belə, bu məsələnin həlli yoxdur. Bu halda qrafda Eyler zəncirinin varlığı haqqında sual qoymaq olar. Qraf, yalnız və yalnız, o halda E y l e r z ə n c i r i n e malikdir ki, o, əlaqəli qrafdır və onun tək sayda tiliar çıxan təpələrinin sayı ya 0 və ya 2-yə bərabərdir. Şəkil 1-dəki qraf bu şərti də ödəmir (bax, [3]).



Şəkil 1



Şəkil 2

1859-da U. Hamilton (W. Hamilton) «Dövrü – alem səyahəti» oyununu fikirləşmişdir, burada şəkil 2-də təsvir olunmuş qrafın bütün təpələrdən (şəhərlərdən) keçən ələ yolun tapılması məsələsi qoyulur ki, hər bir təpədən yalnız bir dəfə keçilsin və sonda başlanğıc təpəyə qayıdılısın. Bu xassəli yollara malik qraflardakı yollar Hamilton tsiklləri adlanır. Qrafda Hamilton tsikllərinin varlığının zəruri və kafi şərtləri hələ ki, məlum deyildir (bax, [3]).

Qrafda Hamilton tsiklləri haqqında məsələnin müxtəlif ümumiləşmələri vardır. Ümumiləşmələrdən biri kommiyo ya jör (ticarət agentı) məsələsidir, bu məsələnin əməliyyatlar tədqiqində bir sıra tətbiqləri, xüsusi halda, bezi nəqliyyat problemlərinin həllində tətbiqləri vardır. Bu məsələ aşağıdakı kimi qoyulur: bir neçə şəhər və bunlar arasında məsafələr məlum olduğu halda, bütün şəhərlərdən keçmək və ilk dəfə çıxılmış şəhərə qayıtmaq şərtlə ən qısa yolu müəyyən etmək tələb olunur.

1847-də R. Kirkman (R. Kirkman) 15 məktəbli haqqında məsələ qoymuş və onu həll etmişdir. Hər gün hər qrupda 3 məktəbli olmaqla 5 qrupa bölünərək gəzintiyə çıxmalıdırlar. Bu zaman bu gəzintilər üçün siyahı tərtib olunduqda nəzərə alınmalıdır ki, hər bir məktəbli yeddi gün ərzində yalnız bir dəfə bir qrupda başqa qrupların hər biri ilə eyni zamanda iştirak edə bilər. Bu məsələ Ya. Şteyner (J. Steiner, 1853) tərəfindən qoyulmuş, üçlük sistemlərinin qurulması məsələsi ilə bağlıdır. v tərtib Şteyner üçlüklər sistemi v elementli çoxluqdan ələ üçlük toplusuna deyilir ki, hər elementlər cütü hökmən bir üçlüyə daxil olsun. Şteyner üçlük sistemi $v \leq 15$ üçün təsvir olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, $v = 3, 7, 9$ olduqda üçlük sistemi ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganədir (v sayda elementin əvəz olunması, üçlük yerdəyişməsi), $v = 13$ halında ekvivalent olmayan iki üçlük sistemi vardır; $v = 15$ olduqda belə üçlüklərin sayı 80-ə bərabərdir. $v > 15$ olduqda Şteyner üçlüklərinin müxtəlif sistemlərin sayı, hələ ki, məlum deyildir. $v > 3$ olduqda Şteyner üçlük sistemi natamam qismən tarazlaşdırılmış blok-sxemin xüsusi halıdır.

Görüş haqqında klassik məsələ aşağıdakı kimi ifadə olunur. Hər birində müxtəlif n kart olan iki eyni oyun kartı dəsti vardır. Birinci və ikinci kart dəstinin uyğun kartların müqayisəsində üst-üstə düşmə sayı r olduqda belə kartların yerləşmə sayı $D_{n,r}$ -i tapmaq tələb olunur. $r = 0, 1, \dots, n$. $r = 0$ olduğu xüsusi hal P. Monmor (P. Montmort, 1708) tərəfindən ilk dəfə araşdırılmışdır. L. Eyler, $D_{n,0}$ kəmiyyətinin təyin olunmasına ekvivalent məsələni, baş diaqonal elementləri ilə ümumi elementləri olmayan determinantın hədləri sayı məsələsini tədqiq etmişdir.

Görüş məsələsi kombinator analizin məhdud pozisiyalarlı yerdəyişmələri ilə bağlı bölməsinin yaranmasında əsas rol oynamışdır. X çoxluğunda təsir göstərən n dərəcəli əvəzləmələrin çoxluğu S_n -də ρ məsafəsini aşağıdakı münasibətlə daxil etmək olar;

$$\rho(s, s') = |\{x: s(x) \neq s'(x), x \in X\}|, \quad s, s' \in S_n.$$

Onda

$$D_{nr} = |\{s: \rho(s, s') = n - r, s \in S_n\}|,$$

belə ki,

$$D_{nr} = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad r = 0, \dots, n.$$

444 KOMBİNATOR

Əvəzləmələr arasında məsafələr terminlərində digər klassik K. m.-ni, adətən, ailə cütlləri məsələsi adlandırılan məsələni ifadə etmək olur. Bu məsələdə dairəvi miz arxasında $2n$ sayda yerdə n sayda ailə cütllərinin oturması üçün müxtəlif hallarda ələlərinin sayını tapmaq tələb olunur ki, bu hallardan heç birində ərle arvad yanaşı oturmasın. Bu kəmiyyət M_n ilə işarə olunarsa,

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot U_n, \quad U_n = |\{s: \rho(s, e) = n, \rho(s, c) = n, s \in S_n\}|$$

e – vahid əvəzləmə, $c = (1, 2, \dots, n)$.

$$U_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k (n-k)!$$

düsturu alınmışdır.

Əgər

$$U_n(s_1, s_2) = |\{s: \rho(s, s_1) = n, \rho(s, s_2) = n, s \in S_n\}|,$$

olarsa, $U_n(s_1, s_2)$ kəmiyyəti yalnız $s_1^{-1}s_2$ -nin tsikl strukturundan asılı olur və Çebişev çoxhədlilərindən istifadə olunmaqla düstur şəklində ifadə oluna bilər (bax, [4]).

Qeyd olunmuş məsələlərlə sıx bağlı olan problem $k \times n$ latın düzbucaqlıların sayı L_{kn} və Latın kvadratların sayı L_n -i təyin etmək problemidir. Latın düzbucaqlısı $k \times n$ n dərəcəli $s_1, s_2, \dots, s_k$ əvəzləmələrinin ələ nizamlanmış toplusudur ki, $i \neq j$ olduqda, $\rho(s_i, s_j) = n$. İsbat olunmuşdur ki,

$$L_{1n} = n!, \quad L_{2n} = D_n n!, \quad D_n = D_{n0}.$$

$$L_{3n} = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^k D_k D_{n-k} U_{n-2k}.$$

$$U_0 = D_0 = 1;$$

$k < n^{1/3-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ olduqda və $n \rightarrow \infty$ olduqda $\delta_n \rightarrow 0$ olarsa,

$$L_{kn} = (n!)^k e - C_k^2 (1 + \delta_n).$$

n tərtib latın kvadratların sayı $n = 9$ qiymətləri üçün məlumdur (bax, Latın kvadratı).

Natural n ədədinin toplananlara ayrılışı sayı haqqında məsələyə ilk dəfə Q. Leybnitsin (G. Leibniz) Y. Bemulliye (J. Bernoulli) 1669-da yazdığı məktubda toxunulmuşdur. Lakin belə tip məsələlərin tam bir sinfinin həll metodları L. Eyler tərəfindən heyatə keçirilmişdir. Bu məqsədlə o, sonsuz hasillər şəklində verilən doğuran funksiyalardan effektiv istifadə etmişdir. Xüsusilə də, o isbat etmişdir ki, $m + n$ ədədinin n sayda toplanana ayrılışı sayı m -in ən çox n sayda toplanana ayrılışı sayına bərabərdir, m -in n -i aşmayan sayda toplananlara ayrılışı sayına bərabərdir və $m + C_{n+1}^2$ ədədinin n müxtəlif toplanana ayrılışı sayına bərabərdir.

Yerləşmələr haqqında klassik məsələ – m sayda müxtəlif eşyanın n sayda müxtəlif oyuqda verilməsi r sayda boş oyuq olması şərtlə yerləşdirilməsi üçün bütün mümkün olan halların sayı $C_{nm}(r)$ ədədinin təyin olunması məsələsidir. $C_{nm}(r)$ üçün aşağıdakı düstur alınmışdır:

$$C_{nm}(r) = C_n^r \Delta^{n-r} 0^m, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

burada

$$\Delta^k 0^m = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^m$$

Morqan ededidir (bax, *Kombinator ededler*).

Burada araşdırmalar nəzəri – ehtimal tətbiqlər planında, müxtəlif ümumiləşmələr və modifikasiyalar daxil olunmaqla aparılmışdır. Bu araşdırmaların ən maraqlı hissəsi m və n qeyri – məhdud artdığı halda müxtəlif asimptotik nəticələrin alınması ilə əlaqədardır.

Əd.: [1] Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [4] Рнордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Хара-ри Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

KOMBİNATOR RİYAZİYYAT « комбинаторная математика; combinatorial mathematics » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATORİKA « комбинаторика; combinatorics » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATORİKA, EHTİMALİ « комбинаторика вероятностная; probabilistic combinatorial » – bax, *Ehtimal kombinatorikası*.

КОМПАКТ « компакт; compact » – hər bir hesabi açıq örtüyü sonlu altörtüyə malik olan topoloji fəzanın altçoxludur. K topoloji $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ fəzasında altçoxluc. G_i açıq çoxluqlarının hesabi toplusu $\{G_j\} \subseteq \mathfrak{G}$ K -nin örtüyü, yəni $K \subseteq \bigcup_i G_i$ ol-

sun. Əgər K kompaktdırsa, onda ehtimal n vardır ki, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$

münasibəti doğrudur. Bu xassə ona ekvivalentdir ki, K -nin hər bir sonsuz altçoxlusunun limit nöqtəsi vardır. K -nin qapanması kompakt olarsa, K nisbi kompakt çoxluq adlanır. $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ σ – topoloji fəza olarsa, K -nin tərifı dəyişmir; lakin bu halda K -nin qapalı çoxluq olması vacib deyildir, bundan başqa, o, Borel σ – cəbrindən də olmaya bilər.

Bəzən «kompaktlıq» terminindən bikompaktlığın işarələnməsi məqsədilə istifadə olunur. Metrik fəza üçün hər iki anlayış üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

КОМПАКТ ÖLÇÜ « компактная мера; compact measure » – bax, *Mükəmməl ölçü*.

КОМПАКТ ТƏKRAR LOQARİFM QANUNU « компактный закон повторного логарифма; compact law of an iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqaritm qanunu Banax fəzasında*.

КОМПАКТİFİKASİYASI, FAZA FƏZASININ « компактификация фазового пространства; state space compactification » – bax, *Markov prosesi; fəza fəzasının kompaktifikasiyası*.

μ – **КОМПАКТЛИQ « μ – компактность; μ – compactness »** – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu $\mathcal{X}$ -in altçoxlucu $\mathfrak{A}$ -nın aşağıdakı xassəsidir: ixtiyari $\{X_n\} \subset \mathfrak{A}$ ardıcılığından ehtimal $\{X_n\}$

altardıcılığı seçmək və $X_0 \in \mathcal{X}$ tapmaq olur ki, $\mathcal{X}$ -də seçilmiş μ ehtimal metrikası mənasında, $n \rightarrow \infty$ olduqda, $\mu(X_n, X_0) \rightarrow 0$ münasibəti ödənilir. μ – K - anlayışının istifadə edildiyi bir sıra ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərinin spesifikasiyasına görə X_0 -in $\mathfrak{A}$ -ya daxil olması şərti metrik fəzalarda analogi kompaktlıq anlayışından fərqli olaraq tələb olunmur. Əgər μ sadə ehtimal metrikasıdırsa, μ – K - əslində marginal paylanmalar çoxluğu $\mathcal{P} = \{P_X : X \in \mathfrak{A}\}$ -in xassəsini təsvir edir. μ $\mathcal{P} = \{P_X : X \in \mathcal{X}\}$ fəzasında zəif topologiya reallaşdıran ehtimal metrikasıdırsa, onda μ – K - anlayışı zəif nisbi kompaktlıq anlayışı ilə eynigüclüdür.

КОМПАКТЛИQ (ğ) ölçülər ailəsinin « компактность семейства мер; compactness of a family of measures » – zəif topologiyada ölçülərin kompaktlığıdır. $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ – normal σ – topoloji fəza və $\mathcal{M}$ – bu fəzada verilmiş ölçülər fəzası olsun. Əgər $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ ehtimal ölçüləri fəzası olarsa və $\mathcal{P}$ fəzasından olan ölçülərdən təşkil olunmuş ixtiyari (P_θ) ölçülər şəbəkəsi hər hansı $P \in \mathcal{P}$ ölçüsünə yığılan altşəbəkəyə malik olarsa, onda $\mathcal{P}$ kompakt ölçülər ailəsi adlanır. Əgər $\mathcal{P}$ -dən olan ölçülərdən ibarət ixtiyari (P_θ) ölçülər şəbəkəsinin $\mathcal{M}$ fəzasında hər hansı P ölçüsünə zəif yığılan altşəbəkəsi varsa, $\mathcal{P}$ nisbi kompakt ölçülər ailəsi adlanır. P ölçüsü $\mathcal{P}$ -nin limit nöqtəsi adlanır.

$\mathfrak{G}$ – $\mathcal{X}$ σ – fəzasının Borel cəbrində bütün ümumiləşmiş yüklərinin fəzasıdırsa, onda ixtiyari ehtimal ölçüləri ailəsi $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{G}$

$\mathfrak{G}$ -da nisbi kompakt ölçülər ailəsidir və bu xassə o mənada anlaşılır ki, $\mathcal{P}$ -dən olan hər bir şəbəkənin $\mathfrak{G}$ -dan olan hər hansı yükə zəif yığılan altşəbəkəsi vardır. Bu halda $\mathcal{P}$ -nin limit nöqtələri hesabi – additiv olmaya bilər. Bu fakt qoşma fəzada kürenin $*$ – zəif kompaktlığı haqqında teoremin nəticəsidir (bax, [1]). Beləliklə, ölçülər ailəsi $\mathcal{P}$ -nin zəif kompaktlığı $\mathcal{P}$ üçün limit nöqtələrinin hesabi – additivliyinin ödənilməsinə gətirilir. $\mathcal{P}$ -nin bütün limit nöqtələrinin hesabi – additiv ölçülər olmasını aşağıdakı şərt təmin edir. Bu şərt bütün müsbət yüklərin hesabi – additivlik kriterisinə əsaslanır (bax, [2]). $\mathcal{P}$ ölçülər ailəsinin bütün limit nöqtələrinin hesabi – additiv ölçülər olması üçün $\mathcal{X}$ σ – fəzasının $\{G_i\} \subseteq \mathfrak{G}$ açıq çoxluqları ilə ixtiyari hesabi örtüyü üçün

$$\lim_N \sup_{P \in \mathcal{P}} P \left\{ \mathcal{X} \setminus \bigcup_{i=1}^N G_i \right\} = 0 \quad (*)$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

(*) şərti $\mathcal{P}$ -dən olan bütün ölçülərin müntəzəm hesabi – additiv olması tələbi kimi anlaşılmalıdır.

İlkin şəbəkənin ixtiyari altşəbəkəsindən yığılan altşəbəkə seçmək olarsa, ehtimal ölçüləri şəbəkəsi (P_θ) zəif kompakt adlanır. Kompakt ölçülər şəbəkəsi (P_θ) -nin kompaktlığı üçün ölçülər ailəsi üçün qeyd olunan kriteriyə analogi kriteri ifadə etmək olar. Bu halda (*) bərabərsizliyini

$$\lim_N \lim_{\theta} \sup P_\theta \left\{ \mathcal{X} \setminus \bigcup_{i=1}^N G_i \right\} = 0$$

bərabərliyi ilə əvəz etmək lazımdır.

Limit nöqtələri ailəsinin və ya ölçülər şəbəkəsinin hesabı – additivliyi təmin edən daha çox tətbiq olunan şərtlərdən biri bu ailə və ya şəbəkənin sıxlığı şərtidir.

Ehtimal ölçüləri şəbəkəsinin kompaktlığından baxılan şəbəkənin bu ölçülərdən təşkil olunan ölçülər ailələrinin kompaktlığını hökm etmək olmaz. Lakin şəbəkə (P_n) ardıcılığı olarsa, bu ardıcılığın K. və ardıcılığın təşkil olunduğu ölçülər ailəsinin K. ekvivalentdir.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Ерохин В. Д., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 175–80; [3] Боровков А. А., Ресерс К. Е. А., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [4] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

KOMPENSATOR « компенсатор; compensator », dual öngörül proyeksiya, – asılı olmayan artımlı təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində orta qiymətə analogi müəyyən anlamda onun ümumiləşməsi olan müasir stoxastik analizdə analogi rol oynayan xarakteristikadır.

$\mathcal{D}$ – sağdan kəsilməz σ – cəbrlər axını $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ ilə verilmiş, tam ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də təyin olunmuş, sağdan kəsilməz artan $\zeta = \{\zeta_t, t \geq 0\}$, $\zeta_0 = 0$ prosesləri çoxluğu olsun və $\mathcal{A}_0$ σ – cəbri $\mathcal{A}$ -dəki bütün sıfır ehtimallı çoxluqları özündə saxlayır. Əgər $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$ Markov anları ardıcılığı varsa ki, bu ardıcılığın ixtiyari həddi üçün $M\zeta_{T_n} < \infty$ ödənilsin, onda ζ prosesi lokal inteqrallanan proses adlanır. $\mathcal{Q}_{loc,0}$ $\mathcal{D}$ çoxluğunun bütün lokal inteqrallanan proseslərdən ibarət çoxluq olsun. Onda ixtiyari $\zeta \in \mathcal{Q}_{loc,0}$ prosesi üçün ele yeganə öngörül $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_t, t \geq 0\}$, $\tilde{\zeta}_0 = 0$ prosesi vardır ki,

$$M \int_{[0,\infty)} Y_t d\zeta_t = M \int_{[0,\infty)} Y_t d\tilde{\zeta}_t$$

münasibəti ixtiyari mənfi olmayan öngörül Y prosesi üçün doğrudur. $\tilde{\zeta}$ prosesi ζ prosesinin kompensatoru adlanır. ζ prosesi uzlaşmış proses olduğu halda, $\zeta - \tilde{\zeta}$ prosesi lokal martinqaldır. Əgər ζ asılı olmayan artımlı prosesdirsə, $\mathbb{A}$ σ – cəbrlər axını isə ζ -in doğurduğu σ – cəbrlər axınıdırsa, onda K. prosesin orta qiyməti ilə üst-üstə düşür, yeni $\tilde{\zeta}_t = M\zeta_t$ olur.

Semimartinqallar nəzəriyyəsində K. böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi və bu kimi anlayışlara analoglarda istifadə olunur. K.-un xassələrinin ilkin prosesin xassələrlə əlaqəsini ifadə edən ən sadə nəticə aşağıdakı hökmə ifadə olunur: $\zeta \in \mathcal{Q}_{loc,0}$,

$$M \sup_{t \geq 0} (\zeta_t - \tilde{\zeta}_t) < \infty$$

olsun, onda

$$\{\zeta_\infty < \infty\} = \{\tilde{\zeta}_\infty < \infty\} \quad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, yeni (*) bərabərliyinin sağ və sol tərəflərindəki hadisələr vahid ehtimalla ekvivalentdir.

Diskret zaman halında (bu hal ümumi sxemə daxildir, lakin o halda ki, prosesləri və axını ele qurmaq mümkün olsun ki, onlar

$[n, n+1)$ intervalllarında sabit olsunlar) artan $\zeta = \{\zeta_n, n \geq 1\}$, $\zeta_0 = 0$ prosesinin kompensatoru

$$\tilde{\zeta}_n = \sum_{k=1}^n M(\zeta_k - \zeta_{k-1} | \mathcal{A}_{k-1})$$

düsturu ilə aşkar şəkildə ifadə olunur.

Əgər $\{\Gamma_k\}$ ölçülən çoxluqlar ardıcılığı, $\mathcal{A}_k = \sigma\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$

olarsa, onda (*) münasibətindən $P\left\{\sum_k I_{\Gamma_k} = \infty\right\} = 1$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda alınır ki,

$P\left\{\sum_k P(\Gamma_k | \mathcal{A}_{k-1}) = \infty\right\} = 1$ olsun (külliyyatca asılı olmayan

Γ_k çoxluqları üçün klassik Borel – Kantelli lemmasına çevrilən Borel – Kantelli – Levi lemması).

$\mathcal{Q}_{loc,0}$ çoxluğundan olan iki ζ^1 və ζ^2 proseslərinin fərqi kimi ifadə olunan ζ prosesi üçün $\tilde{\zeta}$ K.-u bu proseslərin K.-larının fərqi $\tilde{\zeta}^1 - \tilde{\zeta}^2$ -yə bərabər fərz olunur.

$(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_\mathcal{E})$ -də verilmiş $\mu = \mu(\omega; dt, dx)$ təsadüfi ölçüsü üçün kompensator $\nu = \nu(\omega; dt, dx)$ təsadüfi ölçüsünə deyilir ki, ixtiyari mənfi olmayan $\mathcal{P} \times \mathcal{B}_\mathcal{E}$ – ölçülən $Y = Y(\omega, t, x)$ funksiyası üçün $(\mathcal{P}, \Omega \times \mathbb{R}_+)$ -də öngörül σ –

cəbrdir) $\int \int_{[0,t]} Y(s, x) \nu(ds, dx)$ prosesi öngörül prosesdir

(yeni ν öngörül təsadüfi ölçüdür) və artan $\int \int_{[0,t]} Y(s, x) \mu(ds, dx)$ prosesinin kompensatorudur.

X semimartinqalının sıçrayışlarının ölçüsünün K.-u X -in öngörül xarakteristikalarının tripletinin tərkibinə daxildir.

Bax, *Artan təsadüfi proses, Stoxastik integral martinqal ölçüsü üzrə*.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., «Матем. сб.», 1978, т. 107, № 3, с. 364–415; [3] Jacod J., Calcul stochastique et problème de martingales, B. – [a. o.], 1979.

KOMPENSATOR(u) nöqtəvi prosesin « компенсатор точечного процесса; compensator of a point process » – (T_n) öngörül, sağdan kəsilməz artan,

$$N_t = \sum_{n \geq 1} I_{(T_n \leq t)} \text{ sayıcı prosesinin kompensatoru olan}$$

$\zeta = \{\zeta_t\}_{t \geq 0}$ nöqtəvi prosesidir (multivariant nöqtəvi proses halında sıçrayışlar ölçüsü μ -nün kompensatoru olan öngörül ν təsadüfi ölçüsüdür).

Nöqtəvi proseslərin martinqal nəzəriyyəsində K. mühüm rolə malikdir. K. təsadüfi proseslərin geniş bir sinfi üçün prosesin paylanması və paylanmaların yığılmasını əlverişli şəkildə birləşdirən təyin edən bir xarakteristikadır. Nöqtəvi prosesinin kompensatorunun sıçrayışının ölçüsü $\Delta\zeta_t = \zeta_t - \tilde{\zeta}_t$ vahidi aşmır. Əgər K.-un hesablandığı $\{\zeta_t\}_{t \geq 0}$ σ – cəbrlər axını sayıcı prosesin özünün doğurduğu axındırsa, onda K.-u T_n anlarının şərti paylanması

$F_n(dt) = F_n(dt; T_1, \dots, T_{n-1})$ vasitəsilə, $T_1, \dots, T_{n-1}$ -lərin qeyd olunduqları şərtlə, aşkar surətdə ifadə edən düstur vardır; yeni

$$\zeta_t = \sum_{n \geq 1} \int_{[0, t \wedge T_{n+1}]} \frac{F_n(ds)}{F_n([s, \infty])}.$$

Yalnız asılı olmayan artımları sayıcı proseslərin K.-u vardır və bunlar determinik funksiyalar olub, orta qiymətlə üst-üstə düşür, yeni $\zeta_t = M N_t$.

Paylanmalar arasında məsafələrin statistik qiymətləri üçün, mütləq kəsilməzlik üçün, zəif və güclü yığılmalar üçün, bir paylanmanın digər paylanmaya görə Radon – Nikodim törəməsinin düsturu üçün K. terminləri sadə ifadələr alınmışdır.

Əgər P və $\tilde{P}$ – sayıcı proseslərin realizasiyaları fəzasında ζ və $\tilde{\zeta}$ üçün iki ehtimal ölçüsüdürsə və bu ölçülər ζ və $\tilde{\zeta}$ K.-na uyğun ölçülədirsə, onda $\tilde{P} \ll P$ ($\tilde{P}$ ölçüsü P -yə nəzərən mütləq kəsilməzdir) münasibəti, yalnız və yalnız, o vaxt ödənilir ki, aşağıdakı üç şərt $\tilde{P}$ – sanki yəqin ödənilsin:

- 1) $\tilde{\zeta} \ll \zeta$,
- 2) $\sum_{t \geq 0} I_{\{\Delta \zeta_t = 1, \Delta \tilde{\zeta}_t < 1\}} = 0$,
- 3) $h_\infty < \infty$,

burada

$$h_t = \frac{1}{2} \int_{[0, t]} \left(\sqrt{\lambda_s} - \sqrt{\tilde{\lambda}_s} \right)^2 dC_s + \frac{1}{2} \sum_{s < t} \left(\sqrt{1 - \Delta \zeta_s} - \sqrt{1 - \Delta \tilde{\zeta}_s} \right)^2,$$

$$C = (\zeta + \tilde{\zeta})/2, \lambda = d\zeta/dC, \tilde{\lambda} = d\tilde{\zeta}/dC$$

P və $\tilde{P}$ ölçüləri arasında variasiyalara görə məsafələrin statistik qiyməti üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$2(1 - \sqrt{\text{Mexp}\{-h_\infty\}}) \leq \text{var}(P - \tilde{P}) \leq 4M\sqrt{h_\infty},$$

$$\text{var}(P - \tilde{P}) \leq 2M \text{var}_\infty(\zeta - \tilde{\zeta}).$$

Limit teoreminə aid misal: ζ^n – asılı olmayan artımlı sayıcı N prosesinin orta qiyməti, ζ^n isə N^n sayıcı prosesinin K.-u olsun və hər bir $t \in \mathbb{R}_+$ üçün

$$\zeta_t^n \rightarrow \zeta_t, \sum_{s \leq t} (\Delta \zeta_s^n)^2 \rightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta \zeta_s)^2$$

münasibətləri təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının zəif yığılması anlamında ödənilmiş olsun. Onda N^n proseslərinin sonluölçülülüyü paylanmaları N prosesinin sonluölçülülüyü paylanmalarına zəif yığılır.

Nöqtəvi proseslərin araşdırılmasında K. anlayışından istifadə riyazi statistika, kütləvi xidmət, etibarlılıq nəzəriyyəsi, optimal idarəetmənin bir sıra məsələlərinin həllində olduqca faydalıdır.

Əd.: [1] J a c o d J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 31, H. 3, S. 235–53; [2] К а б а н о в Ю. М., Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 288–319; [3] К а б а н о в Ю. М., Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., «Докл. АН СССР», 1984, т. 278, № 2, с. 265–68; [4] B r e m a u d P., Point processes and queues martingale dynamics,

N. Y. – [а. о.], 1981; [5] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

KOMPLEKS DEMODULYASIYA « комплексная демодуляция; complex demodulation » – aşağıtezlilikli xətti filtdən ixtiyari λ_0 tezliyində mərkəzlənmiş yeni filtrlərin alınması üçün istifadə olunan qaydadır. İmpulsal səda (ekstəsir) funksiyaları $a(u)$ və $a(u)e^{i\lambda_0 u}$ olan ötürücü $\varphi(\lambda)$ və $\varphi_1(\lambda)$ funksiyaları $\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda + \lambda_0)$ münasibətilə bağlıdır.

Əgər impulsal səda funksiyası $a(u)$, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a(u)| < \infty$ olan

xətti filtrin girişinə $M\zeta'(t) = 0$, $D\zeta'(t) = \sigma^2$ şərtlərini ödəyən $\zeta'(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stasionar təsadüfi ardıcılığı daxil olurssa, onda belə filtrin çıxışında kompleksqiymətli

$$Y(t, \lambda_0) = e^{i\lambda_0 t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \zeta'(u) e^{-i\lambda_0 u} = R(t, \lambda_0) e^{i(t, \lambda_0)}$$

ardıcılığı alınır; bu ardıcılığın modulu

$$R(t, \lambda_0) = [(\text{Re } Y(t, \lambda_0))^2 + (\text{Im } Y(t, \lambda_0))^2]^{1/2},$$

fazası isə

$$\theta(t, \lambda_0) = \arctg \left(-\frac{\text{Im } Y(t, \lambda_0)}{\text{Re } Y(t, \lambda_0)} \right)$$

düsturları ilə təyin olunur.

$|R(t, \lambda_0)|$ funksiyası ani spektral sıxlığı (ani spektr, ani amplitud spektr), $\theta(t, \lambda_0)$ isə ani fazanı ifadə edir və bunlar spektral sıxlıq və fazadan zaman asılılıqları ilə fərqlənir.

Əd.: [1] Б р и л л и н д ж е р Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Г р е н д ж е р Г., Х а т а н а к а М., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., М., 1972; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

KOMPLEKS GAUSS PROSESİ « комплексный гауссовский процесс; complex Gaussian process » – bax, Gauss prosesi.

KOMPONENT ANALİZ « компонентный анализ; component analysis » – bax, Dispersion analiz.

KOMPOZİSIYA « композиция / свертка; composition / convolution » – paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F_\xi(x)$ və $F_\eta(x)$ olan asılı olmayan ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanma funksiyasına deyilir;

$$F_{\xi+\eta}(z) = P\{\xi + \eta < z\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(z-y) dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\eta(z-y) dF_\xi(y). \quad (*)$$

Əgər ξ və η -nin paylanmalarının sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq $p_\xi(x)$ və $p_\eta(x)$ olarsa, K. düsturu analoji qaydada təyin olunur:

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) p_{\eta}(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\eta}(x) p_{\xi}(z-x) dx.$$

K. düsturu (*) simvolik olaraq $F_{\xi+\eta} = F_{\xi} * F_{\eta}$ kimi işarə olunur.
K. üçün vurma əməlinin əsas xassələri ödənilir:

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1;$$

$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) * F_3 = \alpha_1 (F_1 * F_3) + \alpha_2 (F_2 * F_3), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1;$$

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3).$$

Unimodal paylanmaların K. ümumi halda unimodal olmaya da bilər (bax. [2]).

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985; [2] Стоянов Й., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

KOMPOZİSİYA(sı) paylanmaların « композиция распределений; composition of distributions » – bax. *Kompozisiya*.

KOMPOZİSİYA METODU « композиционный метод; method of composition / convolutions » – ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremlərinin* isbat metodlarından (xarakteristik funksiyalar metodu ilə yanaşı) biridir. Əsas etibarilə yığılma sürətinin qiymətlərinin qurulması üçün istifadə olunur.

$H, F_1, G_1, \dots, F_n, G_n, - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında ölçülər və $H, G_1, \dots, G_n$ ölçüləri – P ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olsun. Hər hansı $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\left(\prod_{i=1}^n F_i - \prod_{i=1}^n G_i \right) (A)$$

ifadəsi induksiya üzrə qiymətləndirilir. Hamarlama bərabərsizliyinin köməyiylə

$$\left(\prod_{i=1}^n F_i - \prod_{i=1}^n G_i \right) * H(A)$$

fərqlərin qiymətinə keçərək, sonra

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^n F_i - \prod_{i=1}^n G_i \right) * H = \\ &= \sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} F_j - \prod_{j=1}^{i-1} G_j \right) * (F_i - G_i) * \prod_{j=i+1}^n G_j * H + \\ &+ \sum_{i=1}^n (F_i - G_i) * \prod_{j=1(j \neq i)}^n G_j * H + \\ &+ \left(\prod_{j=1}^{n-1} F_j - \prod_{j=1}^{n-1} G_j \right) * (F_n - G_n) * H \end{aligned}$$

münasibəti tətbiq olunur. Toplananları qiymətləndirdikdə induktiv fərziyyədən və $H, G_1, \dots, G_n$ ölçülərinin P ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzliyindən istifadə edilir.

448 KOMPOZİSİYA

Əd.: [1] Bergstrom H., Limit theorems for convolutions, N. Y. – L., 1963; [2] Sazonov V. V., Normal approximation-some recent advances, B., 1981 (Lecture Notes in Math., v. 879).

KOMPOZİSİYALI SEMİ – QRUP « полугруппа со сверткой; semi-group with composition » – bax, *Semi-group*.

KOMPOZİSİYASI, STOXASTİK NÜVƏLƏRİN « свертка стохастических ядер; composition of stochastic kernels » – bax, *Stoxastik / ehtimali nüvə*.

KONFIGURASIYA « конфигурация; configuration » – bax, *Kombinator analiz, Kalibrleme modeli statistik mexanikanın*.

KONFLİKT « конфликт; conflict » – bax, *Çoxgirişlilik*.

KONFLYUENT ANALİZ « конфлюентный анализ; confluence analysis » – $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ kəmiyyət dəyişənlərinin (təsadüfi və ya təsadüfi olmayan) özlərinin deyil,

$$\tilde{X}_i^{(s)} = X_i^{(s)} + \varepsilon_i^{(s)}, \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

təsadüfi kəmiyyətləri müşahidə olunduqda, $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ dəyişənləri arasında apriori postulat kimi qəbul ediləcək funksional əlaqələrin analizinə aid olan, riyazi statistika metodlarının toplusudur, burada $\varepsilon_i^{(s)}$, – i -ci müşahidədə $X^{(s)}$ dəyişəninə $\tilde{X}_i^{(s)}$ ölçməsinə təsadüfi xəta, n – müşahidələrin ümumi sayıdır. Bu zaman fərz olunur ki, müşahidə olunmayan $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ dəyişənləri arasında araşdırılan funksional («struktur») münasibətlər ümumi şəkildə verilmişdir. K. a.-in məsələsinə araşdırılan «struktur» münasibətlər tənliklərində iştirak edən parametrlərin naməlum qiymətləri üçün statistik qiymətlərin qurulması, həm də analiz olunan əlaqələrin təbiəti haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilərin qurulması kimi məsələlər aiddir.

K. a.-in nəzəri və tətbiqi aspektlərinin işlənilməsi əsas etibarilə, araşdırılan struktur münasibətlərin xətti şəkildə ifadəsinə (və ya ilkin dəyişənlərin münasib çevirmələrdə xəttişədirilmiş şəklinə) tətbiq edilməklə apanılır. K. a.-in xətti model çərçivəsində p sayda dəyişənlər arasında m sayda xətti əlaqənin ($m < p$) apriori postulat kimi qəbul edilməsini $p-m$ sayda «ümumi» ele $Y^{(1)}, \dots, Y^{(p-m)}$ faktorlarının varlığı haqqında fərziyyə kimi ifadə etmək olar ki,

$$X^{(s)} = \lambda_{s,1} Y^{(1)} + \dots + \lambda_{s,p-m} Y^{(p-m)}, \quad s=1, \dots, p \quad (2)$$

münasibətləri ödənilsin, belə ki, $\Lambda = \|\lambda_{sk}\|$ matrisinin rəngi ($p-m$)-ə bərabərdir, $s=1, \dots, p$, $k=1, \dots, p-m$.

K. a. modelinin (1) – (2) şəklində parametrizasiyası λ_{sk} parametrlərinin naməlum qiymətlərinin statistik qiymətləndirilməsini və bunlarla bağlı hipotezlərin statistik yoxlanılması haqqında əsas məsələləri mehz bunlarla bağlı terminlərlə ifadə etməyə imkan verir. (1) – (2) modeli formal olaraq, *faktor analiz* modeli kimi təsir bağışlayır, lakin K. a. və faktor analizin məsələləri demək olar ki, kəsişmir; əgər K. a.-in məqsədi $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ dəyişənləri arasında mövcud olan struktur münasibətləri təsvir etməkdirsə, faktor analizdə əsas məsələ $Y^{(1)}, \dots, Y^{(p-m)}$ ümumi faktorlarının qurulması və interpretasiyasından ibarətdir. Bununla yanaşı, K. a. və regression analiz məsələlərinin yaxın xarakterli olması qeyd olunmalıdır. K. a.-in bezi xüsusi sxemləri regression analiz sxemi

çərçivəsində ifadə olunur [məs., (1) müşahidələri üzrə xəta ilə ölçülən $X^{(1)}$ dəyişəninin, xətasız ölçülən digər dəyişənlərdən yeganə asılılığını aydınlaşdırmaq tələb olunarsa].

Əd.: [1] F r i s c h R., Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934; [2] K o o p m a n s T. C., Linear Regression Analysis of Economic Time Series, Haarlem, 1937; [3] К е н д а л л М. Д ж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973, гл. 29; [4] М а л е н в о Э., Статистические методы эконометрии, в. 1, пер. с франц., М., 1975, гл. 10.

KONKORDASIYA ƏMSALI « конкордации коэффициент; concordance coefficient » – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

KONSENTRASIYA FUNKSIYASI « концентрация функция; concentration function », paylanma funksiyası F olan *təsadüfi kəmiyyət*

$$Q(l; F) = \sup \{F(x+l+0) - F(x) : x \in \mathbb{R}^1\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan *L e v i k o n s e n t r a s i y a f u n k s i y a s ı* dır. Hər bir *K. f.* $Q(x; F)$, $G(x+y) \leq G(x) + G(y)$, $x, y \geq 0$ bərabərsizliyini ödəyən, $x \geq 0$ yarımxunda, hər hansı paylanma funksiyası $G(x)$ -dir. Tərsi də doğrudur (bax, [1]). *K. f.* asılı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlər cəminin* paylanma xassələrinin araşdırılmasında istifadə olunur (bax, [2]). *K. f.* *P. Levi* tərəfindən [3]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Х е н г а р т н е р В., Т е о д о р е с к у Р., Функции концентрации, пер. с англ., М., 1980; [2] Е s s e e n С.-G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, № 4, S. 290–308; [3] L e v y P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937.

KONSERVATİV KEÇİD FUNKSIYASI « консервативная переходная функция; Markov / conservative transition function » – bax, *Keçid funksiyası*.

KONSERVATİV / İNFİNİTEZİMAL MATRİS « консервативная матрица; conservative / infinitesimal matrix » – bax, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabı*.

KONSERVATİV ZOLAQ « консервативная полоса; conservative band » – bax, *Etibarlı zolaq*.

KONSTRUKTİV KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ « конструктивная квантовая теория поля; constructive quantum field theory » – müasir riyazi fizikanın oblasıdır, kvant meydanının müxtəlif modellərinin qurulması və araşdırılması ilə məşğuldur.

Müasir kvant meydan nəzəriyyəsi – 20-ci əsrin 50-ci illərinin əvvəllərində elektromagnit sahəsinin elektronlar meydanı ilə qarşılıqlı təsirini təsvir edən nəzəriyyə kvant elektrodinamikası üzrə *R. Feynman*, *F. Dayson*, *Yu. Şvinger* və b. işlərlə yaranmışdır (bax, [1]). Bu qarşılıqlı təsir kəmiyyəti kiçik olduğundan onun müxtəlif effektləri (səpələnmə proseslərinin amplitudları, əlaqəli vəziyyətlərin kütlələrinin spektri) bu işlərdə *kükrentilər* nəzəriyyəsinin köməyi ilə hesablanırdı. Lakin ilk dəfə *R. Feynman* (bax, [2]) tərəfindən daxil olunmuş səpələnmə operatorları adlandırılan operatorlar üçün *kükrentilər* nəzəriyyəsinin formal sıralarının özlərinin hər bir toplananında dağılan inteqralı («dağılanlıq») vardır və qeyd olunan işlərdə əsas nailiyyət bu «dağılanlıqların» fiziki izahı və «yeniden normalanma» ardıcıl prosedurunun qurulması – *kükrentilər* nəzəriyyəsinin sırasının bütün toplananlarındakı «dağılanlıqların» aradan qaldırılmasıdır. Bu üsullar sonralar təkmilləşdirilmiş və digər meydan modellərinə tətbiq olunmuşdur (bax, [3]). Elementar hissəciklər nəzəriyyəsində bir çox maraqlı təzahürlər

virtuoz texnika vasitəsilə izah olunduğundan və öncədən söylənilməsinə baxmayaraq, məs., kvant meydanının riyazi obyekt kimi nə olduğu, dağılanlığının riyazi izahı hələ ki, verilməmişdir.

Bu suala cavabın tapılması üçün edilən səylər 20-ci əsrin 60-cı illərində riyazi fizikada iki istiqamətin – aksiomatik və konstruktiv meydan nəzəriyyələrinin yaranmasına səbəb oldu. Aksiomatik yanaşmada kvant meydanı atributları və xassələri hər hansı müddəalar toplusu ilə kvant fiziki sistemi kimi tamamilə abstrakt şəkildə daxil olunur, sonra isə bu müddəalardan bir sıra dəyərli nəticələr alınmışdır (bax, [4]). Konstruktiv meydan nəzəriyyəsində isə kvant meydanlarının konkret meydanları qurulur və öyrənilir. Bu halda əvvəlcə sadələşdirilmiş bir qayda olaraq ikiölçülü (birölçülü fəza və üstəgəl zaman) modellər qurulur ki, bunun əsasında daha mürəkkəb dördölçülü kvant meydanı modelləri öyrənilir. Konstruktiv nəzəriyyənin əvvəlki mərhələsində adı – *H a m i l t o n s t r a t e g i y a s ı* adlandırılan strategiyaya riayət olunurdu: meydanın hamiltonianının qurulması (müvafiq Hilbert fəzasında özü-özünə qoşma semi – məhdud operator kimi) və bu hamiltonianın doğurduğu dinamika və səpələnmənin araşdırılmasına. Kvant meydanlarının öyrənilməsinə sonralar, 20-ci əsrin 70-ci illərinin əvvəllərində digər daha güclü və səmərəli yanaşma yarandı; bu yanaşma adətən, *M a r k o v s t r a t e g i y a s ı* adlanır və burada bir sıra əvvəlki ideyalar və üsullardan da istifadə olunmuşdur. Bu proqram üçün ilk addım [5] və [6]-da atılmışdır: bunlarda dördölçülü Minkovski fəzasında kvant meydanı onun xəyali zamanda «davamı» ilə – dördölçülü Evklid fəzası ilə əlaqədar olan köməkçi obyektlə – *k v a n t E v k l i d m e y d a n ı* adlandırılan «meydanla» əvəz olunurdu. Sonradan qeyd olunmuşdur ki (bax, [7]), Evklid

meydanı öz xassələrinə görə $\mathbb{R}^4$ -də ümumiləşmiş təsadüfi meydana oxşayır və daha sonra isbat olunmuşdur ki, translyasion invariantlıq və kovariantlıq xassələrinə malik olan ixtiyari Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanı Evklid kvant meydanı əmələ gətirir. Sərbəst (qarşılıqlıtesirsiz) skalyar bozon kvant meydanına uyğun, kovariasion operatoru $(-\Delta+1)^{-1}$ olan (Δ – Laplas operatorudur) Qauss Markov meydanı ətraflı araşdırılmışdır, sonra Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanı $\{\varphi(x), x \in \mathbb{R}^2\}$

şəklində, $\mathbb{R}^2$ -də özü-özünə təsir edən Evklid kvant bozon meydanı qurulmuşdur, bu meydan isə sərbəst meydanın Qauss meydanının Gibbs yenidənqurması şəklində $\int \varphi^4 dx$ qarşılıqlı

təsirinin köməyi ilə alınmışdır. Bu qaydada «sərbəst» meydanın Gibbs yenidənqurmasının köməyi ilə «qarşılıqlıtesirli» təsadüfi meydanının qurulması – Markov strategiyasının əsasını təşkil edərək – bir tərəfdən Feynman – Kas düsturundan görünür (bax, [3]), yeni kvant meydanının

$$\int e^{iS(\varphi)} \prod_{x \in \mathbb{R}^d} d\varphi(x)$$

funksional inteqralı terminlərində təsvirdən aydın olur [$S(\varphi)$ meydanın klassik təsiridir]; bu təsvir isə formal – evritik səviyyədə, meydan nəzəriyyəsində 20-ci əsrin 50-ci illərinin ortalarından başlayaraq tətbiq olunurdu. Nəhayət, təsadüfi meydanların Gibbs yenidənqurması anlayışı (statistik fizikadan götürülmüş) kvant nəzəriyyəsinə bir sıra qaydaların və statistik fizikanın ideyalarının daxil edilməsinə imkan yaratdı. Bu işlərdən sonra, Markov strategiyasına riayət olunaraq, çoxsaylı araşdırmalarla bağlı işlərdə kvant meydan nəzəriyyəsinin bir çox ikiölçülü modelləri quruldu və öyrənilirdi (bax, [2]). Bəzi üçölçülü modellərin qurulduğuna baxmayaraq, «əsl» dördölçülü modellər hələ də qurulmamışdır. Renormalizasion çevirmələr metodunun köməyi ilə dördölçülü

modellərə uyğun təsadüfi meydanların qurulması istiqamətində cəhdlər edilir (bax, [10]).

Əd.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Новейшее развитие квантовой электродинамики. [пер. с англ.], М., 1954; [3] Ицниксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [4] Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [5] Schwinger J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1958, v. 44, p. 956–65; [6] Nakano T., «Progress Theor. Phys.», 1959, v. 21, p. 241–59; [7] Simanzik K., «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 510–25; [8] Nelson E., «J. Funct. Analysis», 1973, v. 12, p. 97–112, 211–27; [9] Глимм Дж., Джафффе А., Спенсер Т., в кн.: Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977, с. 169–258; [10] Малышев В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 111–86; [11] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [12] Глимм Дж., Джафффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984.

KONTAKTLAR PROSESİ « контактов процесс; contact process » – bax, *Markov prosesi qarşıqlıqlı təsirli*.

KONTİQUAL ALTERNATİVLƏR « континуальные альтернативы; contiguous alternatives » – hipotezlərin müqayisəsinin asimptotik məsələsində alternativ hipotezlər ardıcılıqlarının xassəsidir, müqayisə olunacaq hipotezlərə uyğun ehtimal ölçüləri ardıcılığının kontiquallığından ibarətdir. Hipotezlərin müqayisə olunması üçün asimptotik məsələdə K. a.-ə baxılması, məsələnin həllini olduqca sadələşdirir və sona çatdırılmış aşkar nəticələrin alınmasına imkan yaradır. İllüstrasiya məqsədilə, parametrik statistik hipotezlərin müqayisə olunması üçün ele asimptotik məsələyə baxmaq olar ki, alternativlərin kontiquallıq xassəsi müqayisə olunacaq hipotezlərə uyğun parametrlərin qiymətlərinin müəyyən yaxınlaşma sürətində ödənilsin (bax, [1], [2]).

$X^{(n)} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ naməlum k – ölçülü ξ parametridən asılı, P_ξ paylanmasından təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1: \xi \neq 0$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \xi = 0$ ilkin hipotezi yoxlanılır. Asimptotik qoyuluşda (seçimin həcmi n qeyd olduğu halda) (H_0, H_1) hipotezlərinin müqayisə olunması məsələsinə ele $\{H_0, H_{1n}\}$ hipotezlərinin müqayisə olunması məsələləri ardıcılığının bir həddi kimi baxılır ki, bunlar seçimin artmaqda olan n həcmələrinə uyğun götürülür və bu məsələdə $X^{(n)}$ seçimi $(H_{1n}$ alternativ hipotezinin doğru olduğu halında), $H_{1n}: \xi_n \neq 0$ alternativ hipotezində, P_{ξ_n} paylanmasından alınmalıdır. H_0 və H_1 hipotezlərində $X^{(n)}$ seçiminin uyğun paylanmaları olan $\{P_0^{(n)}\}$ və $\{P_{\xi_n}^{(n)}\}$ ölçülər ardıcılıqları, ξ_n parametridin qiyməti müəyyən bir sürətlə sıfıra yaxınlaşdıqda, kontiqual ardıcılıqlar olacaqdır (bax, *Kontiquallıq*). Adətən, requlyar halda $\xi_n = O(n^{-1/2})$ olur və onda K. a. olaraq, $H_{1n}: \xi = \xi_n = \lambda \times n^{-1/2}$ hipotezlər ardıcılığına baxılır, burada $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Baxılan məsələdə K. a. şərtlərində ele $\{\varphi_n(X^{(n)})\}$ kriterilər ardıcılığına baxmaqla kifayətlənmək olar ki, bu kriterilər $X^{(n)}$ seçiminə yalnız

$$Y_n = Y_n(X^{(n)}) = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n y(X_i) \equiv \left. \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(x, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

– asimptotik kafi statistikasının qiymətindən asılı olsunlar, burada $p(x, \xi), - \{P_\xi, \xi \in \mathbb{R}^k\}$ ölçülər ailəsi üçün dominar olan, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən P_ξ ölçüsünün sıxlığıdır. Y_n statistikas (seçimin paylanması $P_{\lambda_n-1/2}^{(n)}$ olduqda) $(\Sigma\lambda, \Sigma)$ parametrləri asimptotik normal paylanmaya malikdir, burada $\Sigma = \mathbf{M}\{(y(X_1))(y(X_1))^T\}$ ilkin hipotezde Fişer kovariansion matrisidir.

İlkin asimptotik məsələ ilə yanaşı hipotezlərin yoxlanılmasının limit məsələsinə baxmaq olar: $(\Sigma\lambda, \Sigma)$ parametrləri k – ölçülü normal paylanmaya tabe Y təsadüfi vektorunun birçə müşahidəsi üzrə $\bar{H}_1: \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ alternativ hipotezinə qarşı

$\bar{H}_0: \lambda = 0$ hipotezini yoxlamaq. Əgər limit məsələsində $\varphi(y)$ hər hansı mənada optimal kriteri olarsa, onda ilkin

asimptotik məsələdə $\{\varphi_n(X^{(n)}) \equiv \varphi(Y_n(X^{(n)}))\}$ kriterilər ardıcılığı uyğun asimptotik optimallıq xassəsinə malik olacaqdır (bax, [3], [5]). Asimptotik ayrılıqları nəzərə alan və əngəlləyici parametrləri məsələdə daha ümumi nəticələr [6] – [8]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Le Cam L., «Univ. Calif. Publ. in Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 73–98; [2] Le Cam L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [3] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [4] Русах Дж., Континуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [5] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [6] Бернштейн А. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 3–18; [7] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91; [8] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 67–80.

KONTİNUAL İNTEQRAL « континуальный интеграл; path integral » funksional integral, trayektoriyalar üzrə integral, $-\{\zeta(t), 0 \leq t \leq T\}$ təsadüfi prosesinin trayektoriyalarının kvaziölçü təyin olunmuş fəzası üzrə ümumiləşmiş integraldır; kvaziölçü prosesin $x_1 = \zeta(t_1), \dots, x_n = \zeta(t_n)$ qiymətlərinin $\zeta^{(t_1, \dots, t_n)}$ altfəzalarında uzlaşdırılmış sonluölçülülük (ola bilər ki, mənfi də olmayan) $q(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ çəki funksiyalarının ailəsi ilə verilir. Bütün nizamlanmış $\{0 \leq t_1 < \dots < t_n < T\}, n \in \mathbb{N}$ toplularının filtri üzrə

$\int \dots \int F(x(\cdot | x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)) q(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n$ çoxqat integrallarının limiti kimi təyin olunur, burada $F[\cdot]$ – integrallanan funksional, $x(\cdot | x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ – təpələri $(t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ olan hissəvi xətti funksiyadır (və ya $\zeta^{[0, T]}$ -yə $\zeta^{(t_1, \dots, t_n)}$ -in digər daxil olmasıdır). q -lərin hamısı mənfi olmayan və normalanmış olarsa, K. i. $x(\cdot)$ trayektoriyalar fəzasında ehtimal ölçüsü üzrə adi Lebeq integralıdır. Sıxlıqlar

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n p(x_j - x_{j-1}; t_j - t_{j-1})$$

düsturu ilə verilən ölçü ilə Viner integralı buna misaldır, burada $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $p(y; \theta) = (2\pi\theta)^{-1/2} \exp(y^2/2\theta)$ birölçülü Braun hərəkətinin (prosesinin) trayektoriyaları üzrə integraldır. Eksponentin qüvvət üstündəki t zaman parametrisini, formal olaraq xəyali it ilə əvəz etdikdə, bu integral kvant fizikasında geniş istifadə olunan Feynman integralına çevrilir. K. i.-in hesablanması üçün analitik hesablamalarla yanaşı Monte – Karlo metodundan da istifadə olunur.

Əd.: [1] В и н е р Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961; [2] Ф е й н м а н Р., Х и б с А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, пер. с англ., М., 1968; [3] М и г д а л А. А., «Ж. эксперим. и теоретич. физики», 1975, т. 69, с. 810–22; [4] Я н о в и ч Л. А., Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, Минск, 1976.

KONTİQUALLIQ « контигуальность; contiguity », ehtimal ölçüləri ardıcılığıının asimptotik yaxınlığı xassəsidir, ixtiyari hadisələr ardıcılıqlarının bu ölçülər ardıcılıqları ilə təyin olunan ehtimallarının asimptotik kiçikliyinin ekvivalentliyini eksi etdirir.

($\mathcal{X}, \mathcal{A}_n$) – ölçülən fəzalar ardıcılığı, $\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ – bu fəzalarda ehtimal ölçüləri ardıcılıqları olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari $\{A_n \in \mathcal{A}_n\}$ hadisələri üçün $P_n\{A_n\} \rightarrow 0$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilərsə ki, $P'_n\{A_n\} \rightarrow 0$ münasibəti ödənilsin, onda $\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ – **kontıqual ardıcılıqlar** adlanır.

$\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ ölçülər ardıcılıqlarının yuxarıda qeyd olunan asimptotik yaxınlığı xassəsi onların L^1 – normasında yaxınlığından zəifdir: əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $\|P_n - P'_n\| \rightarrow 0$ olarsa ($\|P_n - P'_n\| = P_n$ və P'_n ölçüləri arasında variasiya üzrə məsafədir), onda $\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ ölçülər ardıcılıqları kontıqual ardıcılıqlardır; ümumi halda tərsi doğru deyildir. $\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ ölçülər ardıcılıqlarının kontıquallığından P_n və P'_n ölçülərinin mütləq kəsilməzliyini hökm etmək olmaz (heç olmasa n -in böyük qiymətləri üçün belə), lakin ehtimal qarşılıqlı mütləq kəsilməz $\{Q_n\}$ və $\{Q'_n\}$ ölçülər ardıcılıqları qurmaq olar ki, bunlar üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\|P_n - Q_n\| + \|P'_n - Q'_n\| \rightarrow 0$ münasibəti ödənilir.

Ölçülər ardıcılıqlarının K.-nin bir sıra ekvivalent tərifləri mövcuddur və bu təriflər bu ölçülərin doğruxaoxşarlıq nisbətinin necür olması ilə bağlıdır. p_n və p'_n , P_n və P'_n ölçülərinin bunlar üçün dominar olan hər hansı ölçüyə nəzərən sıxlıqları olsun (məs., P_n və P'_n ölçüləri) və Λ_n bu sıxlıqların müsbət olduğu çoxluqda $\ln p'_n / p_n$ –ə bərabər olan doğruxaoxşarlıq nisbəti loqarifminin statistikasındır və bu statistika ixtiyari qaydada qeyd olunan çoxluğun tamamlayıcısında (ölçülən) təyin olunur. Onda $\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ ölçülər ardıcılıqlarının K. P_n və P'_n statistikalarda Λ_n statistikasının uyğun $L_n = \mathcal{L}\{\Lambda_n | P_n\}$ və $L'_n = \mathcal{L}\{\Lambda_n | P'_n\}$ paylanmaları ardıcılıqlarının nisbi kompaktlığına ekvivalentdir (bu sonuncu $\{L_n\}$ və $\{L'_n\}$ ardıcılıqlarından hər hansı L və L' ehtimal paylanmalarına zəif yığılan altardıcılıq seçmək mümkünlüyünü ifadə edir). K.-in digər xarakteris-

tikası yalnız $\{L_n\}$ paylanmalar ardıcılıqlarının nisbi kompaktlığı ilə ifadə olunur, lakin bu halda uyğun limit paylanması L üçün $\int \exp(\lambda) L(d\lambda) = 1$ münasibəti ödənilir.

«K.» anlayışı asimptotik riyazi statistikada geniş istifadə olunur. Məs., H_n və H'_n statistik hipotezlərinin asimptotik müqayisəsi məsələlərində (müşahidələrin paylanmaları P_n və P'_n haqqında) alternativ H'_n hipotezi doğru olduğu halda $n \rightarrow \infty$ olduqda müxtəlif statistikaların asimptotik paylanmalarının tapılması (və bir nəticə kimi, bu statistikalar əsaslanan asimptotik güclü kriterlərin tapılması), üçüncü Le Kam lemmasından istifadə edildikdə olduqca asanlaşır ($\{P_n\}$ və $\{P'_n\}$ ölçülər ardıcılıqları K. ardıcılıqları olduqda).

$\{T_n\}$ ehtimal statistikalar ardıcılığı olsun ki, $\{H_n\}$ hipotezlərinin doğru olduğu halda (T_n, Λ_n) vektorlar ardıcılığı $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$ parametrləri asimptotik normal qanunla paylanmış olsun və $\mu_2 = -\sigma_2^2/2$ (K. nəticəsi). Onda $\{H'_n\}$ alternativ hipotezlərinin doğru olduğu halda bu vektorlar ardıcılığı $(\mu_1 + \sigma_{12}, -\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$ parametrləri asimptotik normal qanunla paylanır.

«K.» anlayışı L. Le Kam tərəfindən daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] L e C a m L., «Univ. Calif. Publ. in Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 73–98; [2] L e C a m L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [3] Р у с а с Д ж., Контıгуальность вероятностных мер. Применение к статистике, пер. с англ., М., 1975; [4] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

KONTRAST « контраст; contrast » – *regression eksperimentin* θ parametrisinin komponentlərinin $\sum_{i=1}^p l_i \theta_i$ ($\sum_{i=1}^p l_i = 0$)

şəklində xətti formasıdır (bax, *Blok plan*).

KONVOLYUSION (u) ehtimal ölçülərinin «свертка вероятностных мер; convolution of probability measures» ölçülən $(G, \mathcal{B})$ qrupunda μ_1 və μ_2 ehtimal ölçülərinin konvolýusionu – $(g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2$ inikasında $\mu_1 \times \mu_2$ hasilinin obrazı olan $\mu_1 * \mu_2$ ölçüsüdür, yəni hər bir $B \in \mathcal{B}$ üçün

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \mu_1 \times \mu_2\{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 + g_2 \in B\}.$$

Sonlu ölçülər üçün də K. eynilə təyin olunur. Bir çox hallarda E. ö. k.-nin tərfi aşağıdakı bərabərliklər ilə verilir:

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \int_G \mu_1(B-x) d\mu_2(x) = \int_G \mu_2(-x+B) d\mu_1(x)$$

$$B \in \mathcal{B}.$$

Əgər ξ_1, ξ_2 paylanmaları uyğun olaraq μ_1 və μ_2 olan G -də asılı olmayan təsadüfi elementlər olarsa, $\xi_1 + \xi_2$ cəminin paylanması $\mu_1 * \mu_2$ olacaqdır. K. assosiativ eməldir; əgər G qrupu kommutativ olarsa, bu eməl kommutativ eməldir.

Əgər $G = \mathbb{R}^n$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsünə nəzərən mütəqə kəsilməz ölçülər və Lebeq ölçüsünə nəzərən, uyğun olaraq f_1 və f_2 sıxlıq funksiyalarına malik olarlarsa, onda $\mu_1 * \mu_2$ K. Lebeq ölçüsünə nəzərən mütəqə kəsilməzdir və bu ölçüyə nəzərən sıxlığa malikdir və bu sıxlıq f_1 və f_2 sıxlıqlarının K.-dur. yeni

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y)f_2(y)dy, \quad \text{sanki bütün } x \in \mathbb{R}^n \text{ üçün.}$$

K. anlayışı topoloji qrupda τ hamar və Radon ehtimal ölçüləri üçün də təyin olunur.

KONVOLYUSION KOD «сверточный код; convolutional code», ağacvari xətti kod, şəbəkəvari xətti kod, rekurrent kod, – bütün yarınsuz ardıcılıqlar (informasiya ardıcılıqları) çoxluğunun özünə xətti inikasından alınan, əlifba əvəzinə $GF(q)$ meydanı ilə sonsuz uzunluqlu sözlər çoxluğudur (kod ardıcılıqları çoxluğu). Xətti inikas aşağıdakı xassəyə malik olmalıdır: ek_0 və $n_0 \geq k_0$ natural ədədləri tapılar ki, ixtiyari tam M üçün ilk Mk_0 simvollarında üst-üstə düşən iki informasiya ardıcılığı iki kod ardıcılığına inikas olunur və bu ardıcılıqlar ilk Mn_0 sayda simvollarla üst-üstə düşür. $R = k_0/n_0$ kəmiyyəti kodun sürəti adlanır.

Xətti inikaslar sinfinin biri aşağıdakı qaydada qurulur: Elementləri $GF(q)$ -dən olan $k_0 \times n_0$ ölçülü $G_0, G_1, \dots, G_m$ matrisləri verilir. Informasiya ardıcılıqları $x = (x_0, x_1, \dots)$ şəklində ifadə olunur; x_i , – k_0 ölçülü sütun – vektorlardır. Kod ardıcılıqları $y = (y_0, y_1, \dots)$ şəklində ifadə olunur; y_i , – n_0 – ölçülü sətir – vektorlardır. Onda

$$y_i = \sum_{s=0}^m x_{i-s} G_s, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

Beləliklə, kod ardıcılığı informasiya ardıcılığı və qeyd olunmuş matrislər ardıcılığının konvolysiyasının hesablanması nəticəsində alınır və «K. k.» adı da bununla izah olunur. m ədədinə ($G_0 \neq 0, G_m \neq 0$ olduqda) kod yaddaşı deyilir. $n = (m+1)n_0$ kod məhdudiyyəti uzunluğu adlanır. (*) ilə təyin olunan kodlar zaman üzrə sabit kodlar adlandırılır. (*)-da hər bir i üçün G_{si} ($s = 0, 1, \dots, m$) matrislərinin müxtəlif toplusları istifadə olunan kodlar daha ümumdür və onlar zaman üzrə dəyişən kodlar adlanır. (*)-dakı hesablamalar praktikada registr və cəmleyicilər vasitəsilə reallaşdırılır və bununla əlaqədar olaraq, K. k.-un yoxlayıcı çoxhedlilər adlandırılan digər təsvirindən də bir çox hallarda istifadə olunur.

K. k.-a ağacvari kod kimi baxmaq olar. Bu halda kod ağacı sonsuz olur; ilkin kökdən başlayaraq hər bir düyündən n_0 uzunluqlu vektorlarla nişanlanmış q^{k_0} sayda tildən ibarət eyni toplular çıxır; kod xəttidir, yeni yolların cəmi də yoldur; kökdən başlayan ixtiyari yol – kod ardıcılığıdır.

K. k.-a şəbəkəvari kod kimi, yeni sağdan yarınsuz düzbucaqlı şəbəkənin düyünlərində təpələri yerləşən xüsusi istiqamətlənmiş qrafdakı yolların çoxluğu kimi baxmaq olar. Şəbəkənin hər bir sütunundakı düyünlərin sayı sonludur. Sütundakı hər bir düyün kodların müəyyən bir vəziyyətlə eyniləşdirilir. Bu

anlayışın izahı (*)-dan anlaşılır və G_s matrislərinin verilməsi toplusu üçün tapılmalıdır ki, y_i bloku informasiya $x_{i-1}, \dots, x_{i-m}$ bloklarının əvvəlki hansı ilk koordinatlarından asılıdır. Əgər faktik olaraq birinci koordinata görə x_{i-m} blokundan asılılıq varsa, lakin

$x_{i-m+1}, \dots, x_{i-m}$ bloklarından asılılıq yoxdursa, onda birinci koordinat üzrə kodların yaddaşı m_1 -ə bərabərdir, deyilir və ya deyilir ki, ilk koordinatların qorunub saxlanması üçün kodlamada m_1 dərəcəli registr istifadə olunur. Digər informasiya bloklar üçün $m_2, \dots, m_{k_0}$ yaddaşı analoji təyin olunur. Beləliklə, kodlamada əvvəlki m blokdan olan simvolların $v = m_1 + m_2 + \dots + m_{k_0}$ sayda qiyməti qorunub saxlanılır. Bu toplu – kodların vəziyyəti adlanır. Müxtəlif vəziyyətlərin sayı, deməli, şəbəkənin hər bir sütunundakı düyünlərin sayı da q^v -yə bərabərdir. Düyün sonrakı sütundakı düyünlə til vasitəsilə, bunlara uyğun vəziyyətlərdən keçid olduğu halda, tilə birləşir. Hər bir düyündən sonrakı sütunun q^{k_0} sayda düyününə keçid mümkündür; hər bir düyünə əvvəlki sütundan q^{k_0} sayda til daxil olur (bu ilk m sütuna aid deyildir). Hər bir til (*) ilə hesablanmış n_0 uzunluqlu vektorla nişanlanır. İxtiyari çatla bilinən düyünə birinci sütunun yuxarı düyündən yol müəyyən kod ardıcılığının başlanğıc hissəsidir.

K. k.-un şəbəkəvari kod kimi təsviri bezi dekodlama prosedurlarında, məs., Viterbi dekodlama alqoritmində istifadə olunur (bax, [1]) və bu alqoritm praktikada kod məhdudiyyəti uzunluğu az olduğu hallarda ən yaxşı və geniş istifadə olunan sayılır.

Əd.: [1] Б л е й х у т Р., Теория и практика кодов, контролируемых ошибок, пер. с англ., М., 1986.

KONVOLYUSION SEMİ – QRP(u) ehtimal ölçülərinin «сверточная полугруппа вероятностных мер; convolution semigroup of probability measures on a group» lokal kompakt G qrupunda ehtimal ölçülərinin $e \in S := (\mu_t, t \in D)$ ailəsidir ki, $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$, burada $t, s \in D$; $*$ – G qrupunda ehtimal ölçülərinin konvolysiyası əməlidir. Burada D , – $\mathbb{R}_+^*$ semi – qrupunda bütün müsbət həqiqi ədədlərin toplama əməli ilə e sıx altsemi – qrupudur ki, bütün $t, s \in D$ üçün $t < s$ şərtindən $s - t \in D$ olduğu alınır.

D kimi adətən, bütün müsbət rəşional ədədlər çoxluğu $\mathbb{Q}_+^*$ və ya $\mathbb{R}_+^*$ götürülür. Əgər G qrupunda $e \in \mu_0$ ehtimal ölçüsü varsa ki, $t \in D$, $t \rightarrow 0$ olduqda $\mu_t \rightarrow \mu_0$ münasibəti zəif yığılma mənasında ödənilsin, onda S K. s. kəsilməz adlanır. Bu halda D çoxluğunu $D_0 = D \cup \{0\}$ ilə əvəz etmək olar və hesab etmək olar ki, $S := (\mu_t, t \in D_0)$. μ_0 ölçüsü G qrupunda idempotent ölçü olacaqdır və buna görə də, bu ölçü qrupunun hər hansı kompakt H altqrupunun Haar ölçüsü ω_H ilə üst-üstə düşür. Bu halda K. s.-un kəsilməzliyi konvolysion semi – qrupun H – kəsilməzliyi kimi adlandırılır. μ_0 ölçüsü S semi – qrupunun vahididir, yeni ixtiyari $t \in D_0$ üçün $\mu_0 * \mu_t = \mu_t * \mu_0 = \mu_t$.

Əgər S lokal kompakt G qrupunda kəsilməz K. s.-dursa, onda G qrupunda ν_t , $t \in \mathbb{R}_+^*$ K. s. vardır ki, bütün $t \in D_0$ üçün $\nu_t = \mu_t$. μ_t , $t \in D_0$ kəsilməz K. s. üçün bütün μ_t ölçüləri G qrupunda sonsuz bölünən paylanmalardır.

Her bir $\{\mu_t, t \in D\}$ K. s. ile G qrupunda bütün məhdud funksiyaların Banax fəzası $\mathcal{B}(G)$ -də S_t xətti operatorlarının semi – qrupunu

$$S_t f(x) = \int_G f(xy) \mu_t(dy), f \in \mathcal{B}(G)$$

qaydası ilə əlaqələndirmək olar. Bütün S_t operatorları normalan I -yə bərabər, məhdud xətti operatorlardır. K. s. μ_t , yalnız və yalnız, o halda kəsilməzdir ki, $\{S_t\}$ semi – qrupu güclü kəsilməz olsun. $\{\mu_t\}$ və $\{S_t\}$, $t \in D$ semi – qrupları bir-birini birqiytməli təyin edir.

Bax, *Infinitesimal operator, Sonsuz bölünən paylanma qrupda; daxilolma problemi.*

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

KONVOLYUSION SEMİ – QRUPU, ÖLÇÜLƏRİN; kanonik ifadə «сверточная полугруппа мер; каноническое представление; canonical representation of **convolution semigroup of measure**» – qrupda ehtimal ölçülərinin kəsilməz *konvolyusion semi* – qrupunun *doğuran funksionalının* ehtimal ifadəsidir ki, bu ifadə $\mathbb{R}^d$ -də sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasının loqarifminin *Levi – Xinqin kanonik ifadəsinə* analojiqdir.

G – lokal kompakt qrup, $D(G)$ – G -də sonsuz differensiallanan kompakt daşıyıcıya malik bütün həqiqi funksiyaların fəzası, L – $D(G)$ fəzasında həqiqi xətti funksional olsun. $f(x) \geq 0$, $x \in G$, $f(e) = 0$ şərtini ödəyən bütün $f \in D(G)$ üçün $L(f) \geq 0$ olarsa, L sanki müsbət funksional adlanır; $g^*(x) = g(x^{-1})$ olsun, əgər bütün $f, g \in D(G)$ üçün L sanki müsbət funksional olarsa və $L(fg^*) = L(f)g(e) - f(e)L(g)$ münasibəti ödənilərsə, L primitiv forma; əgər L sanki müsbət funksional olarsa və $L(fg) + L(fg^*) = 2[L(f)g(e) + f(e)L(g)]$ münasibəti ödənilərsə, kvadratik forma; I_E , $E \subset G$ çoxluğunun indikatoru olduqda, G qrupunun vahidinin hər hansı U ətrafı və $K = \{f \in D(G) : I_U \leq f \leq I_G\}$ fəzası üçün $\sup \{L(f) : f \in K\} = 0$ olarsa, onda L normalanmış funksional adlanır. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, $\Gamma : D(G) \rightarrow D(G)$ xətti inikası G qrupunun Levi inikası adlanır:

a) ixtiyari primitiv forma L və ixtiyari $f \in D(G)$ üçün $L(f - \Gamma(f)) = 0$; b) Γ^* qoşma operator olduqda bütün $f \in D(G)$ üçün $\Gamma^*(f) = -\Gamma(f)$; c) $f \rightarrow \Gamma(f)(x)$ bütün $x \in G$ üçün $D(G)$ -də primitiv funksiyadır. Levi inikası hər bir lokal kompakt qrupda mövcuddur. Əgər G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafında $\eta(G \setminus U) < \infty$ və bütün $f \in D(G)$, $f(x) \geq 0$ və $f(e) = 0$ üçün

$$\int_{G^*} f(x) \eta(dx) < \infty$$

olarsa, $G^* = G \setminus \{e\}$ fəzasında η ölçüsü *Levi ölçüsü* adlanır.

μ_t , $t \geq 0$, – G qrupunda ehtimal ölçülərinin doğuran funksionalı A olan ehtimal kəsilməz konvolyusion semi – qrupu olsun ki, $t \rightarrow 0$ olduqda $\mu_t \rightarrow \delta_e$ olsun. Onda: 1) $D(G) \subset D_A$; 2) A , – $D(G)$ -də sanki müsbət normalanmış funksionaldır; 3) əgər G qrupunun Levi inikası Γ verilmişdirsə, onda $D(G)$ -də ehtimal ψ_1 primitiv forması, ψ_2 kvadratik forması və G -də ehtimal Levi ölçüsü η vardır ki, A funksionalı (ψ_1, ψ_2, η) üçlüyü ilə bütün $f \in D(G)$ üçün

$$A(f) = \psi_1(f) + \psi_2(f) + \int_{G^*} [f(x) - f(e) - \Gamma(f)(x)] \eta(dx) \quad (*)$$

düsturu ilə kanonik ifadə oluna bilər; 4) η və ψ_2 forması μ_t , $t \geq 0$ semi – qrupu ilə yeganə surətdə təyin olunurlar; 5) kompakt daşıyıcıya malik, G^* -də bütün kəsilməz f -lər üçün

$$\int_{G^*} f d\eta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_G f d\mu_t$$

münasibəti ödənilir.

(*) ifadəsi kəsilməz konvolyusion semi – qrupun doğuran funksionalı üçün *Levi – Xinqin kanonik ifadəsi* adlanır. Əksinə, əgər G qrupunun verilmiş Γ Levi inikası, ψ_1 primitiv forması, $D(G)$ -də ψ_2 kvadratik forması və G -də Levi ölçüsü η üçün $L \in D^*(G)$ xətti funksionalı (*) düsturu ilə təyin olunmuşdursa, onda L sanki müsbət, $D(G)$ -də normalanmış funksionaldır və doğuran funksionalı A , infinitesimal operatoru N olan yeganə kəsilməz konvolyusion μ_t , $t \geq 0$ semi – qrupu vardır və $D(G)$ -də A -nın məhdud forması L ilə üst-üstə düşür.

G , – dim. – ölçüsü olan Li qrupu, $\mathcal{L}(G)$ – onun uyğun Li cəbri, $\{Y_1, \dots, Y_d\}$ – bu cəbrin bazisi olsun. Əgər $y_i^* = -y_i$ və $(Y_i Y_j)(e) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, d$ olarsa, $D(G)$ -də olan funksiyalar çoxluğu $\{y_1, \dots, y_d\}$ G -də $\{Y_1, \dots, Y_d\}$ bazisinə nəzərən koordinat sistemi adlanır. $D(G)$ -də ixtiyari primitiv ψ_1 forması və kvadratik ψ_2 forması üçün ehtimal $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^1$ və simmetrik mənfi olmayan müəyyən $\|a_{ij}\|$ matrisi vardır ki,

$$\psi_1(f) = \left[\left(\sum_{i=1}^d a_i Y_i \right) f \right](e), \quad \psi_2(f) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} (Y_i Y_j f)(e).$$

G qrupunda hər bir Levi inikası Γ üçün $\mathcal{L}(G)$ cəbrinin $\{Y_1, \dots, Y_d\}$ bazisinə nəzərən ehtimal koordinat sistemi $\{y_1, \dots, y_d\}$ vardır ki,

$$\Gamma(f) = \sum_{i=1}^d y_i (Y_i f)(e).$$

y_i funksiyaları üçün U_0 qrupunun vahidinin ehtimal ətrafı vardır ki,

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^d y_i^2(x), \quad x \in U_0$$

düsturu ilə təyin olunan Hant funksiyası U_0 daxilində ciddi müsbətdir. Bu funksiyayı U_0 -dan kənarda ələ təyin etmək olar ki, o, bütün G -də ikiqat kəsilməz differensiallanan olsun, $0 < \Phi(x) \leq 1$ və G qrupunun vahidini özündə saxlayan hər hansı U kompaktı xaricində $\Phi(x) = 1$ olsun. G -də η ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda Levi ölçüsüdür ki,

$$\int_{G^*} \Phi d\eta < \infty$$

şerti ödənilsin.

Əgər G lokal kompakt Abel qrupu, $\hat{G}$ onun xarakterləri qrupu olarsa, onda konvolyusion $(\mu_t, t > 0)$ semi – qrupuna uyğun xətti operatorların S_t semi – qrupunun $\hat{G} \subset \hat{G}^b(G)$ çoxluğuna daralması Abel qrupu G -də ehtimal paylanmaları μ_t -lərin xarakteristik funksiyası $\hat{\mu}_t(\gamma)$ -ni, $\gamma \in \hat{G}$ təyin edir. Belə ki, baxılan halda μ_t ölçülərinin idempotent bölənləri olmadığından $\gamma \in \hat{G}$ üçün $\hat{\mu}_t(\gamma) \neq 0$ olur. Hər bir primitiv forma $\hat{G}$ -ni özündə saxlayan fəzaya davam oluna bilinir və ixtiyari $\gamma \in \hat{G}$, $x_0 \in \hat{G}$ üçün o, $\ln \gamma(x_0)$ şəklində olur. Kvadratik formaları da $\hat{G}$ -ni özündə saxlayan fəzaya davam etdirmək olar və $\hat{G}$ -də daralmada bunlar

$$\psi_2(\gamma_1 \gamma_2) + \psi_2(\gamma_1 \gamma_2^{-1}) = 2[\psi_2(\gamma_1) + \psi_2(\gamma_2)], \quad \gamma_1, \gamma_2 \in G$$

xassəsinə malik olan G -də ψ_2 funksionalları ilə üst-üstə düşür. G Abel qrupu üçün ələ L Levi inikası vardır ki, o, $\hat{G}$ -ni özündə saxlayan fəzaya davam oluna bilinir və $\hat{G}$ çoxluğunda $g(x, \gamma)$, $x \in G$, $\gamma \in \hat{G}$ funksiyasını təyin edir. $g(x, \gamma)$ funksiyası hər iki dəyişənə görə kəsilməzdir, hər bir $C \in \hat{G}$ kompaktı üçün $\sup \{|g(x, \gamma)|, x \in G, \gamma \in C\} < \infty$; bütün $x \in G$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ üçün $g(x, \gamma_1 \gamma_2) = g(x, \gamma_1) + g(x, \gamma_2)$ və $g(x^{-1}, \gamma) = -g(x, \gamma)$. Bundan başqa, ixtiyari $C \subset \hat{G}$ kompakt altçoxluğu üçün G qrupunun vahidinin ələ U_C ətrafı vardır ki, $x \in U_C$, $\gamma \in C$ üçün $\gamma(x) = \exp \{i g(x, \gamma)\}$ və x , G qrupunun vahidinə yaxınlaşdıqda $g(x, \gamma)$ funksiyası $\gamma \in C$ üzrə sıfır müntəzəm yaxınlaşır. Levi ölçüləri, yalnız və yalnız, ixtiyari $\gamma \in \hat{G}$ üçün

$$\int_{G^*} \operatorname{Re} \gamma(x) \eta(dx) < \infty$$

şertini ödəyən, G^* -də σ – sonlu η ölçüləridir. (*) kanonik ifadəsi haqqında bütün mülahizələrdən Abel qrupunda idempotent bölənləri olmayan sonsuz bölünən μ_t paylanmasının xarak-

teristik funksiyası $\hat{\mu}_t$ üçün aşağıdakı Levi – Xinqin kanonik ifadəsi alınır:

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = \gamma(x_0) \exp \left\{ \psi_2(\gamma) - \int_{G^*} [\gamma(x) - 1 - i g(x, \gamma)] \eta(dx) \right\}$$

(bax, [2]). $G = \mathbb{R}^d$ olduqda $\mathbb{R}^d$ -də sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasının Levi – Xinqin kanonik ifadəsi alınır.

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Партеасарати К. Р., Рао Р. Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 115–46.

KONYUKSIYA(sı) / UYUŞMA(sı) hadisələrin «совмещение событий; conjunction / intersection of events» – bax, *Kəsişmə(sı) / hasil(i)* təsadüfi hadisələrin.

KORNIŞ – FİŞER AYRILIŞI «Корниша – Фишера разложение; Cornish – Fisher expansion» – kiçik parametrlin qüvvət üstləri üzrə *kvantil* və normal kvantil arasında fərqi asimptotik aynılışdır; [1]-də E. Korniş və R. Fişer tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Əgər $F(x, t)$ – t parametrləndən asılı paylanma funksiyası, $\Phi(x)$ – $(0, 1)$ parametrləri normal paylanma funksiyasıdır və $t \rightarrow 0$ olduqda $F(x, t) \rightarrow \Phi(x)$ olarsa, onda $F(x, t)$ üzərinə müəyyən şərtlərdə $x = F^{-1}[\Phi(z), t]$ funksiyasının Korniş – Fişer ayrılışı

$$x = z + \sum_{i=1}^{m-1} S_i(z) t^i + O(t^m) \quad (1)$$

düsturu şəklində ifadə olunur, burada F^{-1} , – F -ə tərs funksiyadır. $S_i(z)$, – z -in müəyyən çoxhədliləridir. $z = \Phi^{-1}[F(x, t)]$ funksiyasının K. – F. a. x -in qüvvət üstlərinə görə analoji təyin olunur (Φ^{-1} , – Φ -ə tərs funksiyadır):

$$z = x + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x) t^i + O(t^m), \quad (2)$$

burada $Q_i(x)$, – x -in müəyyən çoxhədliləridir. (2) düsturu Φ^{-1} funksiyasının $\Phi(x)$ nöqtəsində Teylor sırasına ayrılışından və *Ecuort – Kramer* ayrılışından istifadə etdikdə alınır. (1) ayrılışı (2) düsturunun çevirməsidir.

Əgər X paylanma funksiyası $F(x, t)$ olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $Z = Z(X) = \Phi^{-1}[F(X, t)]$ təsadüfi kəmiyyəti $(0, 1)$ parametrləri normal qanunla paylanır və (2)-dən aydın olduğu kimi

$$\tilde{Z} = X + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(X) t^i$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $t \rightarrow \infty$ olduqda $F(x, t)$ funksiyasından daha yaxşı $\Phi(x)$ funksiyası ilə approxsimasiya olunur. Əgər X -in riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası vahidə bərabər olarsa, onda (1) ayrılışının ilk hədləri aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$x = z + [\gamma_1 h_1(z)] + [\gamma_2 h_2(z) + \gamma_1^2 h_3(z)] + \dots,$$

burada $\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$, $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$, κ_r isə X -in r tərtib semiinvariantıdır,

$$h_1(z) = \frac{1}{6} H_2(z), \quad h_2(z) = \frac{1}{24} H_3(z),$$

$$h_3(z) = -\frac{1}{36} [2H_3(z) + H_1(z)],$$

$H_r(z)$ – Hermit çoxhədliləri olub,

$$\varphi(z) H_r(z) = (-1)^r \frac{d^r \varphi(z)}{dz^r},$$

$$\varphi(z) = \Phi'(z)$$

münasibətilə təyin olunur. Pirson paylanmaları ailəsindən limit qanunları təsadüfi kəmiyyətlərin ayrılığı haqqında bax. [3]-ə.

Əd.: [1] Cornish E. A., Fisher R. A., «Rev. Inst. internat. Statist.», 1937, v. 5, p. 307–20; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., «Теория вероят. и ее пример.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55.

KOROLYUK TEOREMİ « Королюка теорема; Koryuk theorem » – bax, *İntensivlik*.

KORREKTLƏMƏ QAYDALARI « корректировки правила; adjustment test » – bax, *Statistik qəbul nəzarəti*.

KORREKTLƏYİCİ KOD, XƏTANİ « исправляющий ошибки код; error – correcting code » – bax, *Kod*.

KORRELOQRAM « коррелограмма; correlogram » – diskret stasionar $\{\zeta(t)\}$, $t = \pm 1, \pm 2, \dots$ normalanmış korrelyasiya funksiyasının (avtokorrelyasiyanın) qiymətləri ardıcılığının və onun statistik qiymətinin (seçimi korrelyasiya funksiyasının) işarə olunması üçün istifadə edilən termindir.

Birinci halda, nəzəri korreloqram avtokorrelyasiya əmsalları ρ_k -lərin qiymətləri ardıcılığı ilə təyin olunur:

$$\rho_k = \frac{\mathbf{M}(\zeta_t - \mathbf{M}\zeta_t)(\zeta_{t+k} - \mathbf{M}\zeta_{t+k})}{D\zeta_t}, \quad k = 1, 2, \dots$$

İkinci halda, seçimi korreloqram – $\{\zeta_t\}$ prosesinin n uzunluqlu $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ zaman sırasının seçimi (serial) korrelyasiya əmsalları $\tilde{\rho}_k$ -lərin qiymətləri ardıcılığıdır, burada

$$\tilde{\rho}_k = \frac{C_k}{C_0},$$

$$C_k = \frac{1}{n-k} \left\{ \sum_{t=1}^{n-k} \zeta_t \zeta_{t+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{t=1+k}^n \zeta_t \sum_{t=1}^{n-k} \zeta_t \right\}.$$

Nəzəri K. $\{\zeta_t\}$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ və spektral sıxlığı $f(\lambda)$ ilə sıx bağlıdır. Doğrudan da,

$$F(\lambda) = \lambda + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho_k \sin \lambda k,$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k e^{i\lambda k}, \quad \rho_k = -\rho_{-k},$$

$$\rho_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\lambda) e^{-i\lambda k} d\lambda.$$

Bu əlaqə $\{\zeta_t\}$ prosesinin daxili strukturunu öyrəndikdə K.-in əhəmiyyətini izah edir.

Əgər $\{\zeta_t\}$, – $\{\zeta(t)\}$ prosesinin realizasiyalarının təsadüfi ardıcılığı kimi interpretasiya olunarsa, onda seçimi K. $\{\tilde{\rho}_k\}$ kifayət qədər geniş şərtlər daxilində nəzəri K. üçün tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətlər olur (bax, [2]). «K.» termini nəzəri və seçimi K.-lərin qrafikləri üçün də tətbiq olunur.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Кендалл М., Стюарт А., Многомерный статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Гренджер К., Хатанакка М., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., М., 1972; [5] Холеев А. С., Коррелограмма в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982.

KORRELOMETR « коррелометр; correlator / correlograph », *korrelyator* – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi

prosesinin *korrelyasiya funksiyasının* [və ya $X_1(t)$ və $X_2(t)$ stasionar təsadüfi proseslərinin qarşılıqlı korrelyasiya funksiyasının] statistik qiymətini bu prosesin (və ya proseslərin) fluktuasiya edən elektrik signalı (və ya signalın) şəklində verilən bir realizasiyası üzrə avtomatik təyin edən cihazdır. Bax, *Korrelyasiya funksiyası*; *qiymətləndirmə*.

KORRELYASİON ANALİZ « корреляционный анализ; correlation analysis » – bax, *Korrelyasiya*.

KORRELYASİON ASILILIQ « корреляционная зависимость; correlation dependence » – ümumiyyətlə, ciddi funksional xarakterli asılılığı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlər* arasında asılılıqdır, lakin bu asılılıq Y təsadüfi kəmiyyəti ilə $f(X_1, \dots, X_n)$ kəmiyyəti arasında ən yaxşı yaxınlaşmadır (əsasən, kvadratik orta mənada), burada f – verilmiş funksional sinifdəndir. Bax, *Korrelyasiya*, *Əyri xətti korrelyasiya*, *Xətti korrelyasiya*.

KORRELYASİON BƏRABƏRSİZLİKLƏR « корреляционные неравенства; correlation inequalities »

– *təsadüfi meydanların* funksionallarının momentləri arasında bərabərsizliklərdir. K. b. təsadüfi meydanların öyrənilməsində güclü, bəzi hallarda hətta yeganə vasitədir. K. b. ödənilməyi meydanlar sinifləri üzrə fərqləndirilir. K. b. əsas etibarilə *ferromagnit modellərə* uyğun *Gibbs təsadüfi meydanlarında* müşahidə olunur. Aşağıda ən çox yayılmış K. b. şəbəkəvari Gibbs təsadüfi meydanları halı üçün verilir və fərz olunur ki, bunların qiymətləri həqiqi olub,

$$H_{\Lambda}(x) = \sum_{A \subset \Lambda, |A| \geq 2} J_A x^A + \sum_{i \in \Lambda} h_i x_i$$

hamiltonian ilə və $\mathbb{R}$ -də m sərbəst ölçüsü ilə verilir. Burada Λ , – d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin sonlu altçoxluluğu, $x^A = \prod_{i \in A} x_i$, $J_A \geq 0$. $\langle \rangle$ simvolu ilə uyğun Gibbs paylanmasına görə orta qiymətlər işarə olunmuşdur. Aşağıda verilən bütün bərabərsizliklərdə $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ limit keçidi mümkündür, bu keçiddən

sonra bərabərsizliklər $\mathbb{Z}^d$ -də Gibbs təsadüfi meydanlarına da tətbiq oluna bilər.

1. FKG (Fortuin – Kasteleyn – Ginibre; bax, [1]) korrelyasion bərabərsizliyi. $\Omega_\Lambda = \{x_\Lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}\}$ – konfigurasiyalar çoxluğu olsun. Əgər ixtiyari konfigurasiyalar cütü x'_Λ, x''_Λ üçün bütün $t \in \Lambda$ qiymətlərində $(x'_\Lambda)_t \geq (x''_\Lambda)_t$, bərabərsizliyi ödənildikdə Ω_Λ -da verilmiş $f(x_\Lambda)$ funksiyası $f(x'_\Lambda) \geq f(x''_\Lambda)$ bərabərsizliyini ödəyirsə, $f(x_\Lambda)$ funksiyası Ω_Λ -da artan funksiya adlanır. $f, g \in \Omega_\Lambda$ -da artan funksiyalar olsun. Onda

$$\langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (1)$$

FKG bərabərsizliyi h_t parametrlərinin (maqnit sahələrinin) işarəsi olmayan, çox olmayan bərabərsizliklərdən biridir. $J_A \geq 0$ şərtini də bir qədər zəiflətmək olar. x_s, x_t funksiyaları Ω_Λ -da artan olduqlarından, (1) bərabərsizliyinə əsasən,

$$\frac{d}{dh_t} \langle x_t \rangle = \langle x_s x_t \rangle - \langle x_s \rangle \langle x_t \rangle \geq 0,$$

yeni $\langle x_s \rangle$ orta qiymətinin $\{h_t, t \in \Lambda\}$ parametrlərinin artan funksiyası olduğu alınır.

2. QKŞ (Griffiths – Kelley – Sherman; bax, [2], [3]) korrelyasion bərabərsizlikləri. $h_t \geq 0, t \in \Lambda$ və m ölçüsü $x \rightarrow -x$ işarədeyişmə çevirməsinə nəzərən simmetrik olsun. Onda ixtiyari $B, C \subset \Lambda$ üçün:

$$\langle x^B \rangle \geq 0 \quad (\text{I QKŞ bərabərsizliyi}),$$

$$\langle x^B x^C \rangle \geq \langle x^B \rangle \langle x^C \rangle \quad (\text{II QKŞ bərabərsizliyi})$$

bərabərsizlikləri doğrudur. $|B| \geq 2$ olduqda x^B funksiyası Ω_Λ -da artan funksiya deyildir.

Aşağıdakı K. b. Saymon – Griffiths sinfi adlanan $\mathcal{L}$ sinfinə aid sərbəst m ölçüləri üçün doğrudur (bax, [4]). Bu sinfi $X = \sum_{t \in \Lambda} \lambda_t \tau_t$ cəmi şəklində ifadə olunan X_Λ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarının doğurduğu sinfidir, burada $\lambda_t \geq 0$.

τ_t təsadüfi kəmiyyətləri $h = 0$ parametrlə ferromaqnit *İzinq modelinə* uyğun Gibbs təsadüfi meydanı əmələ gətirir. $\mathcal{L}$ kompozisiya və limite keçid əməllərinə görə qapalı sinfidir. $[-a, a]$, $a \geq 0$ parçasında müntəzəm paylanma, normal paylanma və bəzi başqa paylanmalar bu sinfidəndir.

3. QHŞ (Griffiths – Hurst – Sherman; bax, [5]) korrelyasion bərabərsizliyi. $|A| > 2$, $h_t \geq 0, m \in \mathcal{L}$ olduqda $J_A = 0$ olsun. Onda bütün $r, s, t \in \Lambda$ üçün

$$u_3(r, s, t) = \langle x_r x_s x_t \rangle - \langle x_r \rangle \langle x_s x_t \rangle - \langle x_s \rangle \langle x_r x_t \rangle - \langle x_t \rangle \langle x_r x_s \rangle + 2 \langle x_r \rangle \langle x_s \rangle \langle x_t \rangle \leq 0$$

münasibəti doğrudur.

456 KORRELYASİYON

4. Simmetrik ferromaqnit modellərinin semiinvariantlarının işarələri. $|A| > 2$, $h_t \equiv 0$, $m \in \mathcal{L}$ olduqda $J_A = 0$ olsun. Onda simmetriya nöqtəyi – nəzərinə görə $n = 2k + 1$ olan $u_n(t_1, \dots, t_n)$ semiinvariantları sıfır bərabərdirlər. $n = 2k$ üçün isə

$$(-1)^{k-1} u_{2k} \geq 0 \quad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. $k = 2$ olduqda (2) K. b. Lebovits bərabərsizliyi adlanır (bax, [6]). Ümumi halda, [7]-də baxılmışdır.

5. N (Newman; bax, [8]) korrelyasion bərabərsizliyi. A çoxluğunun cüt güclü altçoxluqlara P bölgülərinin $\mathcal{M}$ ailəsində A çoxluğunun cütli ixtiyari bölgüsü hər bir $\mathcal{M}$ -dən olan heç olmasa bir bölgünün «kiçilməsi» olarsa, $\mathcal{M}$ məqbul ailə adlanır. Onda 4-cü bənddəki fərziyyələrlə A çoxluğunun ixtiyari məqbul bölgülər ailəsi $\mathcal{M}$ üçün

$$\langle x^A \rangle \leq \sum_{\rho \in \mathcal{M}} \prod_{\rho_i \in P} \langle x^{\rho_i} \rangle$$

bərabərsizliyi doğrudur.

K. b. vasitəsilə Gibbs paylanmasının yeganə olub-olmadığı haqqında sualları öyrənmək (bax, [9]), bunlar üçün mərkəzi limit teoremini isbat etmək (bax, [10]), müxtəlif limitə keçmələrdə Gibbs paylanmalarının yığılma faktlarını müəyyənləşdirmək (bax, [3]), bəzi meydanların Gauss meydanları olub-olmadığını yoxlamaq mümkündür (bax, [1]).

Əd.: [1] Fortuin C., Kasteleyn P., Ginibre J., «Comm. Math. Phys.», 1971, v. 22, № 2, p. 89–103; [2] Griffiths R., «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, № 3, p. 478–89; [3] Kelly D., Sherman S., «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, № 3, p. 466–84; [4] Simon B., Griffiths R., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 33, № 2, p. 145–64; [5] Griffiths R., Hurst C., Sherman S., «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, № 5, p. 790–95; [6] Lebowitz J., «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 35, № 2, p. 87–92; [7] Ш л о с м а н С. Б., «Докл. АН СССР», 1987, т. 292, № 5, с. 1074–77; [8] Newman C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, № 2, S. 75–93; [9] Lebowitz J., Martin-Lof A., «Comm. Math. Phys.», 1972, v. 25, № 2, p. 276–82; [10] Newman C., «Comm. Math. Phys.», 1983, v. 91, № 1, p. 75–80; [11] Aizenman M., «Comm. Math. Phys.», 1982, v. 86, № 1, p. 1–48.

KORRELYASİYON CƏDVƏL « корреляционная таблица; correlation table » – bax, *Korrelyasiya*.

KORRELYASİYON FUNKSIONAL « корреляционный функционал; correlation functional » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

KORRELYASİYON FUNKSIYA « корреляционная функция; correlation function » – avtokorrelyasion funksiya, korrelyasiya funksiyası, kovariasion funksiya, avtokovariasiya, avtokovariasion funksiya, kompleksqiymətli təsadüfi proses və ya $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyası üçün

$$B(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)][\overline{\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)}]$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $B(t, s)$ funksiyasıdır. K. f.-nin təyin olunması üçün $\zeta(t)$ funksiyasının bütün $t \in T$ qiymətlərində sonlu $\mathbf{M}|\zeta(t)|^2$ ikinci momentinin varlığı zəruridir. Əgər $t = s$

olarsa, onda $B(t, t) = \zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının dispersiyasıdır. Təsadüfi funksiyalar heqiqiqiymətli olduğu halda K. f., təbii olaraq,

$$B(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)][\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)]$$

bərabərliyi ilə verilir və bu halda K. f. ikinci tərtib mərkəzi (və ya mərkəzlənmiş) *moment funksiyasıdır*.

Bütün mümkün olabilən K. f. sinfi $\zeta(t)$ funksiyasının verildiyi T çoxluğunda bütün mümkün müsbət müəyyən nüvələr sinfi ilə üst-üstə düşür.

K. f. aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) $B(t, t) \geq 0$;
- 2) $B(t, s) = \overline{B(s, t)}$;
- 3) $|B(t, s)|^2 \leq B(t, t)B(s, s)$;
- 4) $|B(t_1, t_3) - B(t_2, t_3)|^2 \leq B(t_3, t_3)[B(t_1, t_1) + B(t_2, t_2) - 2\operatorname{Re}B(t_1, t_2)]$.

«K. f.» termini əksər hallarda geniş mənada stasionar təsadüfi proses üçün istifadə olunur, bu proseslər üçün $B(t, s) = B(t-s)$, $t, s \in \mathbb{R}^1$ K. f.-sı bir dəyişənli funksiya olub, stasionar korrelyasion funksiya adlanır; geniş mənada bircins təsadüfi meydanlar üçün yalnız $(t-s) \in \mathbb{R}^n$ dəyişənindən asılı olan $B(t, s) = B(t-s)$, $t, s \in \mathbb{R}^n$ K. f.-sı bircins korrelyasion funksiya; K. f.-sı $B(t, s) = B(|t-s|)$, $(t-s) \in \mathbb{R}^n$ yalnız Evklid məsafəsi $|t-s|$ -dən asılı olan bircins və izotrop təsadüfi proseslər üçün K. f. bircins izotrop korrelyasion funksiya adlanır.

Əgər $\zeta(t) = [\zeta_1(t), \dots, \zeta_r(t)]$, $t \in T$ ele çoxölçülü təsadüfi funksiyadırsa ki, hər bir $t \in T$ üçün $\mathbf{M}|\zeta_i(t)|^2 < \infty$, $i = 1, \dots, r$ münasibəti ödənilir, onda bu təsadüfi funksiyanın K. f.-sı matris qiymətli $B(t, s) = \|B_{ij}(t, s)\|_{i,j=1}^r$ funksiyasına deyilir, burada

$$B_{ij}(t, s) = \mathbf{M}[\zeta_i(t) - \mathbf{M}\zeta_i(t)][\overline{\zeta_j(s) - \mathbf{M}\zeta_j(s)}]$$

$\zeta_i(t)$ və $\zeta_j(s)$ təsadüfi funksiyalarının qarşılıqlı korrelyasion funksiyasıdır. Bəzən $B(t, s)$, $\zeta_i(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasion matrisi adlanır.

Əksər hallarda $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyanın K. f.-sı $\zeta(t)$ və $\overline{\zeta(s)}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin K. f.-sı $B(t, s)$ ilə

$$B(t, s) = \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)} - \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\mathbf{M}\zeta(s)}$$

münasibətilə bağlı olan ikinci qarışıq moment $\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(s)$ nəzərdə tutulur və bu halda K. f. – mərkəzlənmiş korrelyasion funksiya adlanır.

Her bir $\zeta(t)$, $t \in T$ qiymətində $\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2 > 0$ şərtini ödəyən, $\{\zeta(t), t \in T\}$ heqiqi təsadüfi funksiyası üçün «K. f.» termini, bəzən daha dar mənada $\zeta(t)$ və $\overline{\zeta(s)}$ təsadüfi

kəmiyyətlərinin *korrelyasiya əmsalı* kimi anlaşılır, yeni bu halda K. f.

$$B(t, s) = \frac{\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)][\overline{\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)}]}{\{\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2 \mathbf{M}[\overline{\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)}]^2\}^{1/2}}$$

bərabərliyi ilə verilir [belə funksiya, həmçinin $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının normalanmış korrelyasion funksiyası adlanır].

K. f. təsadüfi funksiyaların 2-ci tərtib xassə adlandırılan xassəini təyin edir (bax, *Korrelyasiya nəzəriyyəsi* təsadüfi funksiyaların).

Təsadüfi funksiyaların bezi sinifləri üçün K. f.-nin statistik qiymətləndirmə metodları işlənmişdir (bax, *Statistik analiz* (i) təsadüfi meydanların).

Əd.: [1] Гнхман Н. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

KORRELYASION FUNKSIYA harmoniklənən «корреляционная функция» гармонизируемая; harmonizable **correlation function** – bax, *Harmonikləşmə şərtləri*.

KORRELYASION FUNKSIYA xüsusi «корреляционная функция» частная; partial **correlation function** – bax, *Xüsusi korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA işarəvi «корреляционная функция» знаковая; sign **correlation function** – bax, *Polyar korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA qarşılıqlı «корреляционная функция» взаимная; **crosscorrelation function** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA; qiymətləndirmə «корреляционная функция»; оценивание; estimation of **correlation function** – diskret və ya kəsilməz t zamanlı heqiqi stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $x(t)$ realizasiyasının bir parçasında onun müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə [və ya bir-birindən asılı olmayan bir neçə $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ realizasiyalannın] $t = 1, 2, \dots, T$ və ya $0 \leq t \leq T$ olduqda

$$B(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}]$$

və ya

$$b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)][\overline{\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)}]$$

korrelyasion funksiyasının qiymətlərinin təqribi təyin olunmasıdır. $\zeta(t)$ prosesinin yalnız bir realizasiya üzrə təyin olunan K. f.-nin ən sadə statistik qiyməti: diskret t halında

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} x(t+|\tau|)\overline{x(t)}$$

və ya

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} [x(t+|\tau|) - \bar{x}][\overline{x(t) - \bar{x}}],$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t)$$

düsturları ilə verilən seçimi korrelyasion funksiyadır, burada $|\tau| = 0, 1, \dots, T-1$ [$|\tau| \geq T$ olduqda,

$B_T^*(\tau) = b_T^*(\tau) = 0$ qəbul etmək məsləhətdir]; t kəsilməz olduqda cəmlər integrallarla əvəz olunur və analogi düsturlar olur. Əgər bir neçə $x_1(t), \dots, x_n(t)$ realizasiyalarının parçaları götürülsə, $B(\tau)$ və ya $b(\tau)$ funksiyasının bir realizasiya üzrə təyin olunmuş statistik qiymətini ayrı-ayrı realizasiyalar üzrə qurulmuş statistik qiymətlərin orta qiymətini götürərək yaxşılaşdırmaq olur.

Seçimi K. f., adətən, K. f.-nin tutarlı statistik qiymətidir (hətta güclü tutarlıdır, yeni $T \rightarrow \infty$ olduqda qiymətləndirilən funksiyaya 1 ehtimalla yığılır); geniş şərtlərlə bu statistik qiymət həm də asimptotik normaldır (bax, məs., [1] – [10]), lakin bununla belə o, həmişə meylsiz statistik qiymət olmayacaqdır. $B(\tau)$ funksiyası [və ya $M\zeta(t) = \bar{x}$ orta qiyməti məlum olduqda $b(\tau)$ funksiyası] qiymətləndirildikdə $B(\tau)$ və ya $b(\tau)$ üçün meylsiz statistik qiyməti asanlıqla qurmaq olur, bunu görə seçimi K. f.-nin ifadəsində $1/T$ vuruğunu $1/(T-|\tau|)$ ilə əvəz etmək kifayətdir; lakin belə əvəzləmə, əslinə qalanda alınan statistik qiymətin xassələrini pisləşdirir və buna görə də, bu əvəzləmə tətbiq olunmur (bax, məs., [8], [11]). $B_T^*(\tau)$ və $b_T^*(\tau)$ statistik qiymətləri $|\tau|$ -nin nisbətən böyük qiymətlərində (T -dən 10+20% artıq olan) az etibarlı sayılır; buna görə də, K. f.-lərin qiymətləndirilməsində, əksər hallarda, seçimi K. f.-nin qiymətlərini əlavə olaraq, T -dən asılı, τ arqumentinin cüt monoton azalan funksiyası olan, *korrelyasion pəncərə* adlandırılan $a_T(\tau)$ funksiyasına vurmaq məsləhətdir (bax, [8]). $b_T^*(\tau)$ -nu $a_T(\tau)$ -ya vurmaq zəruridir, məs., prosesin spektral sıxlığının qiymətləndirilməsində ilk addım kimi K. f.-nin qiymətləndirilməsindən istifadə etdikdə (bax, *Blekman – Tyuki metodu*).

Əgər $x(t)$ kəsilməz zamanlı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin fluktuasiya edən elektrik signalı kimi verilən realizasiyasıdırsa, onda K. f.-nin qiymətləndirilməsi, əksər hallarda, xüsusi avtomat hesablama qurğuları – *korrelometr* və ya korrelyatorlar vasitəsilə həyata keçirilir (bax, [11] – [19]). Bununla belə, belə hallarda da K. f.-nin qiymətləndirilməsində çox vaxt rəqəmi metodların tətbiqi daha münasib olub, müasir hesablama texnikasının praktikasında geniş yayılmışdır. Empirik korrelyasion funksiyaların hesablanması metodlarının bezi çətin olmayan sadələşmələri [20], [21]-də təklif olunmuşdur; bu halda «binar arifmetika»-dan geniş istifadəyə əsaslanan alqoritmlərin daha kardinal və effektiv modifikasiyaları haqqında, [22] – [25]-ə bax. *Sürətli Furiye çevirməsinin* effektiv hesablama alqoritmlərinin inkişafı ilə əlaqədar, empirik K. f.-ni Furiye çevirməsi kimi baxılan prosesin *periodogramını* əvvəlcədən hesablayaraq təyin etmək rahat olur. Müasir hesablama texnikasının yayılması evvəllər istifadə olunan, *reley korrelyasion funksiyası* və ya *polyar korrelyasion funksiyasının* statistik qiymətlərinin öncədən cəlb olunmasına əsaslanan sadələşdirilmiş qiymətləndirmə metodlarının əhəmiyyətini azaltmış oldu.

K. f.-nin qiymətləndirilməsi, çox vaxt, iki stasionar və iki stasionar əlaqəli $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ təsadüfi proseslərinin realizasiyalarının parçalarının eyni zamanda müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə qarşılıqlı K. f.-nin qiymətlərinin təqribi təyin olunması kimi anlaşılır

(bax, məs., [3] – [7], [12] – [19]). K. f.-nin qiymətləndirilməsi məsələlərinə sıx yaxın məsələlərdən biri də normalanmış

$$R(\tau) = \frac{M[\zeta(t+\tau) - M\zeta(t+\tau)] M[\zeta(t) - M\zeta(t)]}{M[\zeta(t) - M\zeta(t)]^2}$$

K. f.-nin qiymətləndirilməsi məsələsidir, bu halda empirik K. f. rolunu $\zeta(t)$ prosesinin *korreloqramı* yerinə yetirir. (korreloqramın düsturunda yenidən çox vaxt sürətdəki $1/(T-\tau)$ vuruğunu $1/T$ ilə əvəz etmək məqsəduyğun olur). Korreloqram geniş şərtlərlə $R(\tau)$ funksiyası üçün tutarlı və asimptotik normal statistik qiymət olur. Bu halda asimptotik normallıq şərtləri $b_T^*(t)$ statistik qiymətinin asimptotik normallığını təmin edən şərtlərdən daha geniş olur (bax, məs., [3], [26]).

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Барглетт М. С., Введение в теорию случайных процессов, пер. с англ., М., 1958; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Бен-дат Дж., Пирсол А., Прикладной анализ случайных данных, пер. с англ., М., 1989; [5] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [6] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [7] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [8] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [9] Нанпан Е. Дж., «Ann. Statist.», 1974, v. 2, № 4, p. 803–06; [10] Нанпан Е. Дж., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 2, p. 396–99; [11] Schaefer M. C., Estimation of the covariance and autoregressive structure of a stationary time series, Tech. Rep. 12, Stanford, 1964; [12] Корн А., Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, пер. с англ., М., 1968; [13] Балл Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [14] Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [15] Курочкин С. С., Многоканальные счетные системы и коррелометры, М., 1972; [16] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [17] Жовинский В. Н., Арховский В. Ф., Корреляционные устройства, М., 1974; [18] Макс Ж., Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях, пер. с франц., т. 1–2, М., 1983; [19] Jordan J. R., «Proc. IEEE», Pt. G, 1986, v. 133, № 1, p. 58–74; [20] Kendall W. B., «IEEE Trans. Compts», 1974, v. 23, № 1, p. 88–90; [21] Blankinship W. A., «IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.», 1974, v. 22, № 1, p. 76–77; [22] Ahmed N., Natarajan T., «IEEE Trans. Electromag. Compat.», 1974, v. 16, № 3, p. 177–83; [23] Lopresti P. V., Suri H. L., «IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.», 1974, v. 22, № 6, p. 449–53; [24] Larsen H., «IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.», 1976, v. 24, № 5, p. 432–34; [25] Авишин Н. С., Тивков А. М., «Автометрия», 1978, № 3, с. 37–40; [26] Нанпан Е. Дж., Нейде С. С., «Ann. Math. Statist.», 1972, v. 43, № 6, p. 2058–66.

KORRELYASION FUNKSIYA ortalanmış «корреляционная функция осредненная; averaged correlation function» – bax, *Ortalanmış korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA polyar «корреляционная функция полярная; polar correlation function» – bax, *Polyar korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA reley «корреляционная функция релейная; reley correlation function» – bax, *Reley korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA seçimi «корреляционная функция» выборочная; **sample correlation function** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

KORRELYASION FUNKSIYA statistik mexanikada «корреляционная функция» в статистической механике; **correlation function** in statistical mechanics – korrelyasion ölçünün Radon – Nikodim töreməsidir, aşağıdakı kimi təyin olunur. $P, - \mathbb{R}^d$ -də statistik mexanikanın kəsilməz modelinin konfigurasion vəziyyəti olsun (yeni $\mathbb{R}^d$ -nin lokal sonlu alt çoxluqları fəzası Q -də ehtimal ölçüsü və ya «ənənəvi» ehtimal terminologiyasında $\mathbb{R}^d$ -də nöqtəvi təsadüfi meydan olsun).

$$(\mathbb{R}^d)_\varepsilon^n = \{q^{(n)} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^d : q_1 \leq \dots \leq q_n\}$$

($\leq$ simvolu $\mathbb{R}^d$ -də leksikoqrafik qaydanı ifadə edir) çoxluğunda mənfi olmayan,

$$K_P^{(n)}(A) = \int_Q (d\omega) \sum_{\substack{q^{(n)} \in A, q_i \in \omega, \\ 1 \leq j \leq n}} 1$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $K_P^{(n)}$ ölçüsünə P vəziyyətinin n -ci tərtib korrelyasion ölçüsü və ya n -ci (n – hissəvi) korrelyasion ölçüsü deyilir, $n \geq 1$ [$n=0$ olduqda fərz olunur ki, $K^{(0)}(\emptyset) = 1$], bu ölçünün $(\mathbb{R}^d)^n$ -də Lebeq ölçüsü üzrə Riman – Nikodim töreməsi (əgər bu töremə varsa) n -ci tərtib korrelyasion funksiya olur və o, aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$\rho_P^{(n)} = dK_P^{(n)} / dq^{(n)}.$$

$n=0$ olduqda qəbul olunmuşdur ki, $\rho_P^{(0)} = 1$. $\rho_P^{(n)}$ funksiyasına bezen $(\mathbb{R}^d)^n$ -də simmetrik funksiya kimi baxmaq münasib olur; yeni $\rho_P^{(n)}(q^{(n)})$ özünəməxsus tərzde $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$ nöqtələrində hissəciklərin olmasının «infinitesimal» ehtimalını müəyyən edir. Nöqtəvi təsadüfi proseslər və meydanlar nəzəriyyəsində (bax, [2]) $\rho_P^{(n)}$ funksiyası prosesin və ya meydanın intensivliyi adlanır.

Vəziyyətin münasib xarakteristikası olan K f. statistik mexanikanın bir sıra məsələlərində mühüm rol oynayır (bax, *Boqolyubov tenliklər zənciri*). $\{\rho_P^{(n)}, n \geq 0\}$ və ya $\{K_P^{(n)}, n \geq 0\}$ ardıcılığı üzrə P vəziyyətinin birqismətli bərpası məsələsi belə maraqlı doğuran məsələlərdəndir. [1], [3]-də təklif olunmuş kafi şərtlər ümumi momentlər probleminin həlli ilə bağlıdır və bu şərtlər ondan ibarətdir ki, $I \subset \mathbb{R}^d$ ixtiyari məhdud Borel çoxluğu olduqda $K_P^{(n)}(I^{(n)} \cap \mathbb{R}_\varepsilon^n)$ qiymətləri «çox da sürətlə» artırır.

Analoji anlayışlar $\mathbb{R}^d$ -də hissəciklərin kəsilməz sisteminin vəziyyətlərinə baxıldığı halda da daxil olunur (yeni fəza fəzası M -də ehtimal fəzaları və ya «nişanları» $\mathbb{R}^d$ -dən olan $\mathbb{R}^d$ -də verilən nişanlanmış nöqtəvi təsadüfi meydanlar halı). Burada n -ci tərtib K f. mənfi olmayan simmetrik

$$\rho_P^{(n)}(x^{(n)}), x^{(n)} = ((q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n)) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^n$$

funksiyasıdır. Mehaz bu funksiya Boqolyubov tenliklər zəncirində iştirak edir.

Əd.: [1] Lenard A., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 30, № 1, p. 35–44; [2] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [3] Zessin H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983; Bd 62, № 3, S. 395–409.

KORRELYASION FUNKSIYA ümumiləşmiş «корреляционная функция» обобщенная; **generalized correlation function** – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

KORRELYASION MATRİS «корреляционная матрица; correlation matrix» – korrelyasiyalar matrisi, kovariasion matris, kovariasiyalar matrisi – təsadüfi $X = (X_1, \dots, X_k)$ vektorunun komponentlərinin cüt-cüt kovariasiyalarından təşkil olunmuş matrisdir, yeni elə $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^k$ matrisidir ki, $b_{ij} = M[X_i - MX_i] \times [X_j - MX_j]$, $i, j = 1, \dots, k$. K m.-in təyin olunması üçün hər bir X_i təsadüfi kəmiyyətinin sonlu ikinci momente ($MX_i^2 < \infty$) malik olması zəruridir. K m.-in baş diaqonalında X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyaları DX_i -lər yerləşir.

$k \times k$ tərtib B matrisinin hər hansı təsadüfi $X = (X_1, \dots, X_k)$ vektorunun K m. olması üçün: bu matrisin simmetrik və müsbət-müəyyən olması, yeni $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, \dots, k$ olması və

$$\sum_{i,j=1}^k b_{ij} z_i z_j \geq 0 \text{ şərtlərinin ixtiyari } z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \text{ üçün ödənilməsi}$$

və ya da, bunlara ekvivalent olan, $B = AA^*$ münasibətini ödəyən, $k \times r$ tərtib, $1 \leq r \leq k$, A matrisinin varlığı zəruri və kafidir.

Əgər K m. müsbət-müəyyən matrisdirsə, onda Gauss təsadüfi vektoru X cırlaşmayan paylanmaya, əks halda cırlaşan paylanmaya malik vektordur.

Bəzen «korrelyasion matris» və «kovariasion matris» terminləri fərqli hesab edilir. Belə halda kovariasion matris əvvəl verildiyi kimi təyin olunur. korrelyasion matris isə dispersiyaları sıfırdan fərqli $DX_1, \dots, DX_k$ olan $(X_1, \dots, X_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalları matrisinə deyilir,

$$\text{yeni hesab olunur ki, } R = \|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^k,$$

$$\rho_{ij} = \frac{M[X_i - MX_i][X_j - MX_j]}{\sqrt{DX_i} \sqrt{DX_j}}.$$

R matrisinin diaqonal elementləri 1-ə bərabərdir. R matrisinin xassələri B matrisinin xassələrilə $B = DRD$ münasibətlə təyin olunur, burada D – diaqonal elementləri $\sqrt{DX_1}, \dots, \sqrt{DX_k}$ olan diaqonal matrisdir.

Əgər $X(t) = [X_1(t), \dots, X_k(t)]$, $t \in T$ ele vektor təsadüfi funksiyası olarsa ki, hər bir $t \in T$ $i = 1, \dots, k$ üçün

$$M[X_i(t)]^2 < \infty \text{ şərti ödənilsin, onda } B(t, s) = \|B_{ij}(t, s)\|_{i,j=1}^k$$

matrisi də $X(t)$ təsadüfi funksiyasının K m.-i adlanır, burada

$$B_{ij}(t, s) = \mathbf{M}[Y_i(t) - \mathbf{M}X_i(t)][X_j(s) - \mathbf{M}X_j(s)].$$

K. f. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $B(t, t)$ – müsbət – müəyyən matrisdir;

2) $|B_{ij}(t, s)| \leq B_{ii}(t, t) B_{jj}(s, s)$, $i, j = 1, \dots, k$

3) ixtiyari n , $t_1, \dots, t_n \in T$ və ixtiyari $a_1, \dots, a_n$ kompleks vektorları üçün

$$\sum_{j,k=1}^n (B(t_j, t_k) a_k, a_j) \geq 0.$$

Bax, *Korrelyasion funksiya*.

Əd.: [1] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

KORRELYASİON MEYDAN « корреляционное поле; correlation diagram » – bax, *Korrelyasiya*.

KORRELYASİON NƏZƏRİYYƏ « корреляционная теория; correlation theory », təsadüfi funksiyaların ikinci tərtib nəzəriyyəsi – $X(t)$,

$t \in T$ təsadüfi funksiyalarının (ümumiyyətlə, kompleks) ümumi nəzəriyyəsinin ələ bir hissəsidir ki, burada bunların ələ xassələri öyrənilir ki, bu xassələr (bəzən bunlar geniş mənada xassələr adlanır) $X(t)$ funksiyasının yalnız birinci $\mathbf{M}X(t) = m(t)$ və ikinci $\mathbf{M}X(t)\overline{X(s)} = B(t, s)$ momentləri ilə təyin olunur.

K. n.-də H_X Hilbert fəzası mərkəzi rol oynayır, bu fəza $(Y, Z) = \mathbf{M}Y\overline{Z}$ (və ya $(Y, Z) = \mathbf{M}[Y - \mathbf{M}Y][\overline{Z} - \mathbf{M}\overline{Z}]$)

skalyar hasilı ilə bütün mümkün ola bilən $\sum_{j=1}^n \alpha_j X(t_j)$ xətti

kombinasiyalarının $\|Y\| = [\mathbf{M}|Y|^2]^{1/2}$ normasına nəzərən qapalı örtüyüdür (burada $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – kompleks ədədlər, $t_1, \dots, t_n$ – T -nin nöqtələri). Bu halda $X(t)$ təsadüfi funksiyası H_X fəzasının nöqtələr çoxluğuna çevrilir (t heqiqi kəsilməz dəyişən olduqda – eyni, $t \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$ olduqda – səth və ya hipersəthə çevrilir) və K. n. bu nöqtələr çoxluğunun həndəsi xassələrinin araşdırılmasına gətirilir [$m(t)$ -dən olduqca asılı olan xassələr nəzərə alınmadan]. Xüsusi halda, K. n.-də $X(t)$ funksiyasının kvadratik orta kəsilməzlik və kvadratik orta differensiallanıqlı xassələri $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyasının nöqtələri çoxluğunun (məs., eyni və ya səthin) H_X -də uyğun güclü kəsilməzliyi və güclü differensiallanıqlığına ekvivalent olur.

K. n.-də $X(t)$ təsadüfi funksiyalarının müxtəlif spektral ayrılıqlar mərkəzi yer tutur; bir qayda olaraq, bu ayrılıqlar yalnız uyğun korrelyasiya funksiyası $B(t, s)$ -in ifadəsilə təyin olunur (bax, məs., *Karunen teoremi*, *Kramer teoremi*).

KORRELYASİON NİSBƏT « корреляционное отношение; correlation ratio » – təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılıq xarakteristikasıdır, Y təsadüfi kəmiyyətinin X təsadüfi kəmiyyətinə görə korrelyasion nisbəti

$$\eta_{Y|X}^2 = 1 - \mathbf{M}[\mathbf{D}(Y|X)/\mathbf{D}Y]$$

ifadəsinə deyilir, burada $\mathbf{D}Y$, – Y -in dispersiyası, $\mathbf{D}(Y|X)$, –

X verildiyi halda Y -in şərti dispersiyasıdır və o, X -in verilmiş qiymətində $\mathbf{M}(Y|X)$ şərti riyazi gözləməsi ətrafında Y -in səpələnməsini xarakterizə edir. $0 \leq \eta_{Y|X}^2 \leq 1$ münasibəti həmişə

doğrudur. $\eta_{Y|X}^2 = 0$ bərabərliyi təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyar

olmadığı hala uyğundur; $\eta_{Y|X}^2 = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o

halda doğrudur ki, X və Y arasında dəqiq funksional asılılıq olsun; Y -in X -dən xətti asılı olduğu halda K. n. korrelyasiya əmsalının kvadratı ilə üst-üstə düşür. K. n. X və Y -ə görə simmetrik deyildir, buna görə də, $\eta_{Y|X}^2$ ilə yanaşı $\eta_{X|Y}^2$ kəmiyyətinə

də baxılır; $\eta_{X|Y}^2$ isə X -in Y -ə görə K. n. olub, analoji qaydada

təyin olunur. $\eta_{Y|X}^2$ və $\eta_{X|Y}^2$ arasında hər hansı sadə asılılıq yoxdur.

Bax, *Korrelyasiya*.

KORRELYASİON ÖLÇÜ « корреляционная мера; correlation measure » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİON PƏNCƏRƏ « корреляционное окно; law window », gecikmə pəncərəsi, – $\zeta(t)$

stasionar təsadüfi ardıcılığı və ya prosesinin $|\tau| \leq T$ olduğu

halda təyin olunan və $B(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ korrelyasion

funksiyası və $f(\lambda)$ spektral sıxlığı üçün statistik qiymətlərin

$\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının $t = 1, 2, \dots, T$ və ya uyğun ola-

raq, $0 \leq t \leq T$ olduqda $\zeta(t)$ -nin bir realizasiyası $x(t)$ -nin müşahidələrdən məlum qiymətləri üzrə qurulmasında istifadə olunan, ixtiyari heqiqi və ya tamqiymətli τ arqumentinin T -dən asılı cüt $a_T(\tau)$ funksiyasıdır. $B(\tau)$ -nın ən sadə statistik qiyməti

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} x(t+|\tau|)x(t)$$

və ya

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} x(t+|\tau|)x(t) dt$$

seçimi korrelyasion funksiyası $|\tau|$ -nin T ilə müqayisədə

kiçik qiymətlərində qənaətbəxş statistik xassələrə malikdir, lakin

$|\tau|/T$ -nin kifayət etməyəcək qədər kiçik qiymətində bu statistik

qiymətin kvadratik orta xətası, adətən, $B(\tau)$ -nin əsl qiymətindən

böyük olur, buna görə də, $B_T^*(\tau)$ -nu bu halda $B(\tau)$ üçün

statistik qiymət kimi götürmək mənasızdır. Odur ki, τ -nin qiymətlərinin geniş intervalındakı $B(\tau)$ funksiyasının qiymətlərinin

statistik qiymətini təyin etmək tələb olunduqda $B_T^*(\tau)$ seçimi kor-

relyasion funksiyasını ələ əlavə $a_T(\tau)$ funksiyasına vurmaq meq-

sədəuyğundur ki, bu funksiya aşağıdakı şərtləri ödəmiş olsun:

$|a_T(\tau)| \leq 1$ bərabərsizliyi bütün τ -lar üçün ödənilsin, $a_T(0) = 1$

olsun, $|\tau|/T \ll 1$ olduqda $a_T(\tau)$ vahiddən az fərqlənsin, lakin

$|\tau|/T$ -nin bütün çox da kiçik olmayan qiymətlərində $|a_T(\tau)|$

vahiddən çox kiçik olsun (məs., $|\tau|/T \geq 0,1$ olduqda).

$a_T(\tau)$ funksiyası korrelyasion pəncərə (və ya gecikmə pəncərəsi, rus. окно запаздывания), $B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau)B_T^*(\tau)$ funksiyası isə $B(\tau)$ korrelyasion funksiyasının $a_T(\tau)$ K. p.-nə uyğun statistik qiyməti adlanır.

K. p.-ni seçmək lazımdır ki, $a_T(\tau)$ funksiyası $|\tau| > T$ olduqda $a_T(\tau) = 0$ şərti də əlavə olunmaqla təyin olunan $|\tau|$ arqumentinin müsbət müəyyən funksiyası olsun; bu halda $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyası da müsbət müəyyən funksiya olacaqdır [əsl korrelyasion $B(\tau)$ funksiyası həmişə müsbət müəyyən funksiya-dır]. 20-ci əsrin 50 – 60-cı illəri ərzində, adətən, hesab olunurdu ki, yalnız $|\tau| > k_T$ olduqda ($k_T, -T$ -nin kiçik bir hissəsidir, məs., $k_T = 0,1T$) eynilik kimi sıfır bərabər olan $a_T(\tau)$ K. p.-ləri praktiki cəhətdən faydalı ola bilər. $B_T^{(a)}(\tau)$ statistik qiyməti ilk növbədə, adətən, $f(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiymətinin qurulması üçün istifadə olunurdu və bu statistik qiymət kimi $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasının Furiye çevirməsi götürülürdü (bax, *Blekman – Tyuki metodu*). Bu halda $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasının çox da böyük olmayan hər hansı $|\tau| = k_T$ «kəsilmə nöqtəsindən» kənarda eynilik kimi sıfır bərabər olması uyğun Furiye çevirməsinin hesablanması olduqca sürətləndirir. Lakin sonradan bu qaydadan istifadə öz əhəmiyyətini itirmiş oldu, belə ki, sürətli Furiye çevirməsinin (yeni sürətlə apanılması mümkün) alqoritmləri geniş yayıldığından spektral sıxlıqların qiymətləndirilməsi üçün praktiki metodlar da kardinal dəyişikliklərə uğramış oldu.

K. p. anlayışı C. Tyuki tərəfindən «gecikmə pəncərələri» adı altında daxil olunmuşdur (bax, məs., [1]). Praktiki, əksər hallarda, K. p. kimi $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ şəklində funksiyalar seçilir, burada $a(0) = 1$, $|a(s)| \leq 1$ bütün s , k_T -lər üçün hesablama gedişində deyisə bilər; bu halda $a_T(\tau)$ K. p.-si miqyas tipli korrelyasion pəncərə, $a(s)$ funksiyası isə $a_T(\tau)$ korrelyasion pəncərəsinin generatoru adlanır. Miqyas tipli, geniş istifadə olunan K. p.-yə misal – «üçbucaq generator» – $a(s) = \max\{1 - |s|, 0\}$ generatoruna uyğun Bartlett korrelyasion pəncərəsi; $0 \leq |s| \leq 1/2$ olduqda, $a(s) = 1 - 6s^2 + 6|s|^3$, $1/2 \leq |s| \leq 1$ olduqda $a(s) = 2(1 - |s|)^3$, $|s| > 1$ olduqda isə $a(s) = 0$ olan Parzen korrelyasion pəncərəsi;

$$a(s) = \begin{cases} (1-2a) + 2a \cos \pi s, & |s| \leq 1 \text{ olduqda,} \\ 0, & |s| > 1 \text{ olduqda,} \end{cases}$$

düsturu ilə verilən Tyuki korrelyasion pəncərəsidir, burada $a = 0,25$ («Hanning pəncərəsi») və ya $a = 0,23$ («Hemming pəncərəsi») (bax, məs., [1] – [9]). K. p.-yə aid çoxlu əlavə misalları [1] – [15]-də tapmaq olar.

K. p. $a_T(\tau)$ -nın Furiye çevirməsi $A_T(\lambda)$ spektral pəncərə adlanır; spektral pəncərə $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasına Furiye çevirməsini tətbiq etdikdə alınan, $\zeta(\tau)$ təsadüfi funksiyasının hamarlanmış periodogramının çəki funksiyasıdır (bax, [1] – [9]).

Əd.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [5] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [6] Грибанов Ю. И., Мальков В. Л., Спектральный анализ случайных процессов, М., 1974; [7] Отнес Р., Энноксон Л., Прикладной анализ временных рядов. Основные методы, пер. с англ., М., 1982; [8] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982; [9] Яглом А. М., Корреляционная теория случайных функций, Л., 1981; [10] Хэррис Ф. Дж., «Тр. Ин-та ниж. электротехн. радиоэлектрон.», 1978, т. 66, № 1, с. 60–96; [11] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [12] Макс Ж., Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях, т. 1, М., 1983; [13] Паленский В., Лаучюс Ю., Шоблицкас З., «Литов. физ. сб.», 1985, т. 25, № 3, с. 98–104; [14] Левин В. А., «Радиотехн. и электрон.», 1986, т. 31, № 3, с. 515–525; [15] Palmer D. F., «IEEE Trans on inform. Theory», 1969, v. IT-15, № 5, p. 613–15.

KORRELYASION TƏNLİKLƏR «корреляционные уравнения; correlation equations» – *korrelyasion funksiyalar* bir-birilə əlaqələndirən xətti tənliklərdir. K. t. ilk dəfə N. N. Boqolyubov və B. İ. Xatset tərəfindən 1949-da ciddi surətdə çıxarılmışdır. Ümumiyyətlə, K. t.-in müxtəlif sistemlərinin çıxarılması mümkündür, lakin bunlardan ən məşhur olan ikisidir: Kırkvud – Laltsburq tənliklər sistemi və Mayer – Montroll tənliklər sistemi. Konturlar üçün K. t. [3]-də 1-ci növ linq modelində faza keçidinin araşdırılmasında istifadə olunmuşdur. Bunlara yaxın K. t.-i V. A. Malışev klaster ayrılışının yığılmasının isbatında istifadə etmişdir.

Əd.: [1] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И., «Докл. АН СССР», 1949, т. 66, № 3, с. 321–24; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [3] Минлоу Р. А., Синяй Я. Г., «Труды Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 113–78; [4] Малышев В. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 3–53; [5] Малышев В. А., Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем, Дубна, 1983.

KORRELYASION ÜSUL «корреляционный прием; correlation reception» – rabitə kanalı ilə ötürülən $S_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, $t \in [0, T]$ signalları eyni enerjiyə və küylərə malik olduğu halda bu signalların fərqləndirilməsi (dekodlanması) metodlarından biridir. $x(t)$, $t \in [0, T]$ prosesi müşahidə olunduqda, $S_m(t)$ signalının ötürülməsi haqqında qərar yalnız o halda qəbul olunur ki,

$$\int_0^T S_m(t) x(t) dt = \max_{i=1, \dots, N} \int_0^T S_i(t) x(t) dt$$

bərabərliyi ödənilmiş olsun. Bu ifadədəki integralların hesablanması, impuls xarakteristikaları $S_i(T - \tau)$, $i = 1, \dots, N$ olan uzlaşdırılmış xətti filtrlərin köməyiylə reallaşır. Rabitə kanalında additiv Gauss bəyaz küyü olduqda və signalların aprior ehtimalları eyni olduqda K. ü. orta səhv dekodlama ehtimalını minimalaşdırır.

Əd.: [1] Вудворт Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с приложениями в радиолокации, пер. с англ., М., 1955; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

KORRELYASIYA « корреляция; correlation » – təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılıqdır. ümumiyyətlə isə, ciddi funksional xaraktere malik olmayan asılılıqdır. Funksional asılılıqdan fərqli olaraq, K.-ya, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətlərdən birinin digərindən asılı olduğu halda deyil, eyni zamanda bir sıra təsadüfi faktorlardan da asılı olduğu halda da baxılır. İki təsadüfi hadisə arasında asılılıq bunlardan birinin digərinə nəzərən şərti ehtimalının şərtsiz ehtimaldan fərqləndiyi halda aşkar olur. Analogi olaraq, bir təsadüfi kəmiyyətin digərinə təsiri bunlardan birinin digərinin qeyd olunmuş qiymətində şərti paylanmalarla xarakterizə olunur.

ξ və η – birgə paylanması ilə verilmiş, riyazi gözləmələri a_ξ və a_η , dispersiyaları σ_ξ^2 və σ_η^2 , ξ və η arasındakı korrelyasiya əmsalı ρ olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Əgər hər bir mümkün ola bilən $\xi = x$ qiyməti üçün η təsadüfi kəmiyyətinin şərti riyazi gözləməsi – $\nu(x) = \mathbf{M}[\eta | \xi = x]$ kəmiyyəti təyin olunmuşdursa, onda $\nu(x)$ funksiyası – η kəmiyyətinin ξ üzrə *reqressiyası*, onun qrafiki – η -nin ξ üzrə *reqressiya əyrisi* adlanır. Hər bir qeyd olunmuş $\xi = x$ qiymətində η kəmiyyəti müəyyən səpələnməyə malik təsadüfi kəmiyyət olduğuna baxmayaraq, η -nin ξ -dən asılılığı ξ -nin dəyişməsi ilə η -nin orta qiymətlərinin dəyişməsində aşkar olunur. ξ -nin dəyişməsi ilə η -nin dəyişməsinə reqressiyanın nə dərəcədə dəqiqliklə təyin edəcəyini müəyyənləşdirmək üçün verilmiş $\xi = x$ qiymətində η -nin şərti dispersiyasından və ya onun orta qiymətindən (η -nin reqressiya xətti ətrafında səpələnmə ölçüsündən), yeni

$$\sigma_{\eta|\xi}^2 = \mathbf{M}[\eta - \mathbf{M}(\eta | \xi = x)]^2$$

kəmiyyətindən istifadə olunur. Əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda η -nin bütün şərti riyazi gözləmələri x -dən asılı olmur və onun şərtsiz riyazi gözləmələri ilə üst-üstə düşür: $\nu(x) = a_\eta$ və bu halda $\sigma_{\eta|\xi}^2 = \sigma_\eta^2$ olur. η ξ -dən dəqiq funksional asılı olduğu halda, η kəmiyyəti hər bir verilmiş $\xi = x$ qiymətində yalnız bir müəyyən qiymət alır və $\sigma_{\eta|x}^2 = 0$ olur. η üzrə ξ kəmiyyətinin reqressiyası $x(y) = \mathbf{M}[\xi | \eta = y]$ bərabərliyi ilə analogi təyin olunur. Paylanmanın reqressiya əyrisi $\nu(x)$ ətrafında toplanmasının təbii göstəricisi

$$\rho_{\eta|\xi}^2 = 1 - \sigma_{\eta|\xi}^2 / \sigma_\eta^2$$

korrelyasion nisbətidir. $\rho_{\eta|\xi}^2$ kəmiyyəti, yalnız və yalnız, o halda sıfıra bərabər olur ki, $\nu(x)$ reqressiyası $\nu(x) = a_\eta$ şərtini ödəsin; bu halda K. əmsalı ρ sıfıra bərabərdir və η kəmiyyəti ξ ilə korrelyar deyildir. Əgər η -nin ξ üzrə reqressiyası xəttidirsə, yeni reqressiya əyrisi

$$\nu(x) = a_\eta + \rho \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (x - a_\xi)$$

düz xəttidirsə, onda

$$\sigma_{\eta|\xi}^2 = \sigma_\eta^2 (1 - \rho^2) \quad \text{və} \quad \rho_{\eta|\xi}^2 = \rho^2$$

462 KORRELYASIYA

olur; lakin bundan başqa, $|\rho| = 1$ olarsa, η kəmiyyəti ξ ilə dəqiq xətti asılılıqla bağlıdır, əgər $\rho_{\eta|\xi}^2 = \rho^2 < 1$ olarsa, onda η və ξ arasında funksional asılılıq yoxdur. η -nin ξ -dən xətti asılılıqdan fərqli olan dəqiq funksional asılılığı, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, $\rho^2 < \rho_{\eta|\xi}^2 = 1$ olsun. Asılılıq olmadığı halda, ölçü əvəzinə K. əmsalından yalnız o halda istifadə etmək doğrudur ki (nadir istisna ilə), ξ və η -nin birgə paylanması normal paylanma olsun (və ya normal paylanmaya yaxın olsun), belə ki, bu halda $\rho = 0$ bərabərliyindən ξ və η -nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu alınır. İxtiyari ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün ρ -nun asılılıq ölçüsü kimi istifadə olunması, əksər hallarda səhv nəticələrə gətirir, belə ki, təsadüfi kəmiyyətlər hətta funksional asılı olduqları halda belə, ρ sıfıra bərabər ola bilər. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanması normal paylanma olarsa, reqressiya əyriələrinin hər ikisi məhz düz xətlərdir və ρ reqressiya xətləri ətrafında paylanmanın sıxlaşmasını tamamilə təyin edir: $|\rho| = 1$ olduqda reqressiya düz xətləri bir xəttə çevrilir, bu isə ξ və η -nin xətti asılılığına delalet edir, $\rho = 0$ olduqda isə ξ və η -nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu ifadə edir.

Birgə paylanmalarla verilmiş bir neçə $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında əlaqənin öyrənilməsində toplam K. və xüsusi korrelyasiya münasibətləri və K. əmsallarından istifadə olunur. K. əmsalları ξ_i və ξ_j arasında adi K. əmsallarının köməyiylə hesablanır ki, bu K. əmsallar toplusundan *korrelyasion matris* təşkil olunur. ξ_1 ilə digər $\xi_2, \dots, \xi_n$ toplusu arasında xətti asılılıq ölçüsü *toplam korrelyasiya əmsalı* (rus. множественный коэффициент корреляции) ilə ifadə olunur. Əgər ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin qarşılıqlı əlaqəsinin digər $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n$ kəmiyyətlərinin təsiri təyin olunduğu fərz olunarsa, onda ξ_1 və ξ_2 arasında xətti asılılıq göstəricisi $\xi_2, \dots, \xi_n$ toplusunun təsiri istisna olunmaqla ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin $\xi_2, \dots, \xi_n$ toplusuna nəzərən *xüsusi korrelyasiya əmsalı* (rus. частный коэффициент корреляции) ilə təyin olunur.

Rəng statistikalarına əsaslanan K. ölçüləri haqqında: *Kendall əmsalı* rəng korrelyasiyasının, *Spirmen əmsalı* rəng korrelyasiyasının məqalələrinə bax.

Riyazi statistikada təsadüfi kəmiyyətlər və ya onların əlamətləri arasında K.-ni xarakterizə edən əmsalların qiymətləndirilmə metodları və bunların seçimi analoglarını istifadə edən qiymətlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması metodları işlənmişdir. Bu metodlar toplusu korrelyasion analiz adlanır. Statistik verilənlərin korrelyasion analizi aşağıdakı əsas praktiki prosedurlardan ibarətdir: 1) korrelyasion meydanın qurulması və korrelyasion cədvəlin tərtib olunması; 2) seçimi korrelyasion münasibətlərin və ya K. əmsallarının hesablanması; 3) asılılığın mühümlüyü haqqında statistik hipotezinin yoxlanılması. Sonrakı araşdırma kəmiyyətlər arasında asılılığın konkret şəklinin müəyyənləşdirilməsi ola bilər (bax, *Reqressiya*).

İkiölçülü seçimi verilənlərin analizində korrelyasion meydan və korrelyasion cədvəl köməkçi vasitələr kimi istifadə olunur. Seçimi nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd etdikdə *korrelyasion meydan* alınır. Meydan nöqtələrinin yerləşmə xarakterinə görə təsadüfi kəmiyyətlərin asılılıq forması haqqında öncədən mülahizə yürütmək olar (məs., o haqda ki, bir kəmiyyət digərinin artması ilə ya orta menada artır, ya da azalır). Nəticələrin ededi işlənilməsi üçün onlar qruplaşdırılır və *korrelyasiya*

sion cədvəllər formasında tərtib olunur. Bu cədvəlin hər bir oyununda komponentləri hər bir dəyişən üzrə uyğun qruplaşma intervalına düşən (x, y) cütünün sayı n_{ij} ədədləri yerləşir. Qruplaşma (dəyişənlərdən hər birinə görə) intervallının uzunluqlarını bir-birinə bərabər götürərək, bu intervallın mərkəzləri x_i -lər (uyğun olaraq y_j -lər) və hesablanma üçün əsas kimi n_{ij} ədədləri seçilir.

Kəmiyyətlər arasında əlaqənin xarakteri və gücü haqqında ən dəqiq informasiya korrelyasion əmsallar və korrelyasion nisbət kimi xarakteristikalara əsaslanır.

Seçimi korrelyasiya əmsalı

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_j n_j (y_j - \bar{y})^2}}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$n_i = \sum_j n_{ij}, \quad n_j = \sum_i n_{ij}$$

və

$$\bar{x} = \sum_i n_i x_i / n, \quad \bar{y} = \sum_j n_j y_j / n.$$

Normal qanuna yaxın eyni bir paylanmaya tabe olan asılı olmayan müşahidələr sayının böyük qiymətlərində $\hat{\rho}$ seçimi korrelyasion əmsalı əsl K. əmsalı ρ -ya çox yaxın olur. Digər bütün hallarda asılılıq dərəcəsinin xarakteristikası kimi $\rho_{\eta|\xi}$ korrelyasion nisbətindən istifadə etmək məsləhətdir, bu nisbətin interpretasiyası araşdırılan asılılığın hansı şəkildə olmasından asılı deyildir. $\hat{\rho}_{\eta|\xi}^2$ seçimi qiyməti korrelyasion cədvəlin köməyi ilə aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\hat{\rho}_{\eta|\xi}^2 = \frac{\sum_i n_i (y_i - \bar{y})^2 / n}{\sum_j n_j (y_j - \bar{y})^2 / n},$$

burada surət $\bar{y}_i$ şərti orta qiymətlərinin şərtsiz orta $\bar{y}$ qiymətləri ətrafında səpələnməsini xarakterizə edir ($\hat{\rho}_{\xi|\eta}^2$ seçimi qiyməti analogi təyin olunur). $\hat{\rho}_{\eta|\xi}^2 - \hat{\rho}^2$ kəmiyyəti reqressiyanın xətti reqressiyadan yayınma indikatoru kimi istifadə olunur.

Asılılığın mühümlüyü hipotezinin yoxlanılması seçimi korrelyasion xarakteristikaların paylanmalarına əsaslanır. Normal paylanma halında seçimi korrelyasiya əmsalı $\hat{\rho}$ -nın qiyməti.

$$(\hat{\rho})^2 > [1 + (n - 2) / t_{\alpha}^2]^{-1}$$

berabersizliyi ödənilmədiyi halda, sıfırdan olduqca fərqli olur, burada t_{α} – seçilmiş mühümlük ölçüsü α -ya uyğun, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n - 2)$ -yə bərabər Student t – paylanmasının kritik qiymətidir. $\rho \neq 0$ olduqda, adətən, Fisher z – çevirməsindən, yeni ρ kəmiyyətini

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}}$$

düsturu ilə z -lə əvəzləmədən istifadə olunur. n -in çox da böyük olmayan qiymətlərində z kəmiyyətinin paylanması, riyazi gözləməsi

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho} + \frac{\rho}{2(n - 1)},$$

dispersiyası $1/(n - 3)$ olan normal paylanmaya yaxşı yaxınlaşır. Buna əsaslanaraq, əsl K. əmsalı ρ üçün təqribi intervallar təyin etmək olur.

Seçimi korrelyasion nisbətənin paylanması haqqında və reqressiyanın xətti olub-olmaması haqqında hipotezin yoxlanılması üsulları haqqında bax, [3].

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

KORRELYASIYA ƏMSALI « корреляции коэффициент; correlation coefficient » – iki təsadüfi kəmiyyətin birgə paylanmasının ədədi xarakteristikası olub, onların bir-birilə asılılığını ifadə edir. ξ_1 və ξ_2 – riyazi gözləmələri uyğun

olaraq, $a_1 = M\xi_1$ və $a_2 = M\xi_2$, dispersiyaları sıfırdan fərqli $\sigma_1^2 = D\xi_1$ və $\sigma_2^2 = D\xi_2$ olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin K. ə. $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2)$

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{M(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

düsturu ilə təyin olunur. ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin K. ə. $(\xi_1 - a_1)/\sigma_1$ və $(\xi_2 - a_2)/\sigma_2$ normalanmış təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası ilə üst-üstə düşür.

K. ə. ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinə görə simmetrikdir və başlanğıc və miqyasının dəyişməsinə nəzərən invariantdır. Bu halda $-1 \leq \rho \leq 1$. Qarşılıqlı asılılığın mümkün ölçülərindən biri kimi K. ə.-nin qiyməti aşağıdakı xassələrlə təyin olunur: 1) əgər ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$ (tərs müddə ümumi halda doğru deyildir), $\rho = 0$ olan kəmiyyətlərə qeyri-korrelyadır, deyilir; 2) $|\rho| = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, təsadüfi kəmiyyətlərin xətti funksional asılılığı:

$$\xi_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi_1 - a_1) + a_2$$

şərti ödənildikdə doğrudur. ρ kəmiyyətinin qarşılıqlı asılılıq ölçüsü kimi interpretasiyasının çətinliyi onunla izah olunur ki, $\rho = 0$ bərabərliyi eyni zamanda həm asılı, həm də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün də ödənilə bilər; ümumi halda, təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığı üçün bu təsadüfi kəmiyyətlərin maksimal korrelyasiya əmsalının sıfır bərabər olması zəruri və kifidir. Beləliklə, K. ə. təsadüfi kəmiyyətlər arasında olan bütün asılılıq növlərini əhatə etmir və o, yalnız xətti asılılıq ölçüsüdür. Bu halda xətti asılılıq dərəcəsi aşağıdakı kimi xarakterizə olunur:

$$\hat{\xi}_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\hat{\xi}_1 - a_1) + a_2$$

kəmiyyəti ξ_2 təsadüfi kəmiyyətinin ξ_1 üzrə ən yaxşı ifadəsidir, dedikdə

$$M(\xi_2 - \hat{\xi}_2)^2 = \min_{C_1, C_2} M(\xi_2 - C_1 \xi_1 - C_2)^2$$

münasibətinin doğru olduğu anlaşılmalıdır (bax, *Regressiya*).

Bir neçə təsadüfi kəmiyyət arasında korrelyasiya xarakteristikaları *xüsusi korrelyasiya əmsalı* və *toplam korrelyasiya əmsalı* kimi kəmiyyətlərdir.

KORRELYASIYA FUNKSIYASI « корреляционная функция; correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

KORRELYASIYA RADIUSU « корреляционный радиус; correlation distance » – fəza üzrə bircins $X(r)$ təsadüfi meydanının

$$B(r) = B(r) = M[X(p+r) - M X(p+r)][X(p) - M X(p)]$$

düsturu ilə təyin olunan fəza korrelyasion funksiya-sının, $r = |r|$ məsafəsi artdıqca azalma sürətinin ədədi xarakteristikasıdır. K. r. ya $B(r_0) = B(0)/k$ bərabərliyinin ödənilməsinə təmin edən ən kiçik r_0 məsafəsi kimi (burada k – əvvəlcədən seçilmiş ədəddir, məs., $k = e$ və ya $k = 10$), ya da ki,

$$r_1 = (1/B(0)) \int_0^\infty B(r) dr$$

məsafəsi kimi təyin olunur (bu halda r_1 korrelyasiyanın integral miqyası adlanır). Tez-tez istifadə olunan korrelyasiya funksiyası $B(r) = C \exp\{-r/r_0\}$ üçün ($k = e$ olduğu halda) hər iki tərəf üst-üstə düşür. Praktikada K. r. yalnız mənfi olmayan $B(r)$ funksiyaları üçün $B(r)$ funksiyasının bütün dəyişikliyi münasib sayılan xarakteristikasıdır. Anizotrop təsadüfi meydanlar üçün $B(r)$ korrelyasion funksiyası r vektorunun istiqamətindən asılıdır, buna görə də, K. r. istiqamətdən də asılıdır və bu asılılıq anizotropluq xarakteristikası kimi də istifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Гандин Л. С., Каган Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976.

KORRELYATOR « коррелятор; correlator » – bax, *Korrelometr*.

KORVIN QRUPU « Корвина группа; Korvin group » – bax, *Xarakterizasion teoremler Abel qrup-larında ehtimal paylanmaları üçün*.

KOSİNOR – ANALİZ « косинор – анализ; cosinor analysis » («kosinus» və «normal» sözlərindən) – eksperimental ayrılardan $y = A \cos(\omega t - \alpha)$ şəklində tənliklərin qrafiklərinə kvadratik orta yaxınlaşma metodlarının və verilənlərin xətlərinin normal paylanmaya malik olduğu fərziyyəsi ilə, verilən həddüdlü etibarlı oblastların qurulması metodlarının toplusudur.

KOSPEKTR VƏ KVADRATUR SPEKTR « коспектр и квадратурный спектр; cospectrum and quadrum spectrum », kospektral sıxlıq və kvadratur spektral sıxlıq, r – ölçülü stasionar təsadüfi

$\zeta(r) = \{\zeta_1(r), \dots, \zeta_r(r)\}^T$ prosesinin iki $\zeta_j(k)$ və $\zeta_k(t)$ komponentlərinin spektral sıxlığı $f_{jk}(\lambda)$ -nin, $-\infty < \lambda < \infty$, uyğun həqiqi və xəyali hissələridir. $k \neq j$, $1 \leq j, k \leq r$. Kospektr $c_{jk}(\lambda) = \operatorname{Re} f_{jk}(\lambda)$, $j \neq k$ – cüt funksiya, kvadratur spektr $q_{jk}(\lambda) = \operatorname{Im} f_{jk}(\lambda)$, $j \neq k$ – tək funksiya. Əgər qarşılıqlı kovariasion $B_{jk}(t)$ funksiyası

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |B_{jk}(t)| dt < \infty \quad (\text{kəsilməz zaman üçün}) \\ \text{və ya} \\ \sum_{t=-\infty}^{\infty} |B_{jk}(t)| < \infty \quad (\text{diskret zaman üçün}) \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

şərtini ödəyərse, onda K. və k. s., uyğun olaraq, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$c_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) + B_{jk}(-t)] \cos \lambda t dt,$$

$$q_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) - B_{jk}(-t)] \sin \lambda t dt$$

(kəsilməz zaman üçün) və

$$c_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) + B_{jk}(-t)] \cos \lambda t,$$

$$q_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) - B_{jk}(-t)] \sin \lambda t$$

(diskret zaman üçün). (*) şərti ödənildikdə K. və k. s. kospektral funksiya $C_{jk}(\lambda)$ və kvadratur spektral funksiya $Q_{jk}(\lambda)$ vasitəsilə aşağıdakı şəkildə ifadə olunur: $c_{jk}(\lambda) = C'_{jk}(\lambda)$, $q_{jk}(\lambda) = Q'_{jk}(\lambda)$. $C_{jk}(\lambda)$ və $Q_{jk}(\lambda)$ mütləq kəsilməz funksiyalar olub, qarşılıqlı spektral $F_{jk}(\lambda)$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələridir: $C_{jk}(\lambda) = \operatorname{Re} F_{jk}(\lambda)$, $Q_{jk}(\lambda) = \operatorname{Im} F_{jk}(\lambda)$.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1980; [2] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [3] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, М., 1972.

KOSPEKTRAL FUNKSIYA « коспектральная функция; cospectral function » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr*.

KOSPEKTRAL SIXLIQ « коспектральная плотность; cospectral density » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr*.

KOŞI PAYLANMASI « Коши распределение; Cauchy distribution » – paylanma sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}$$

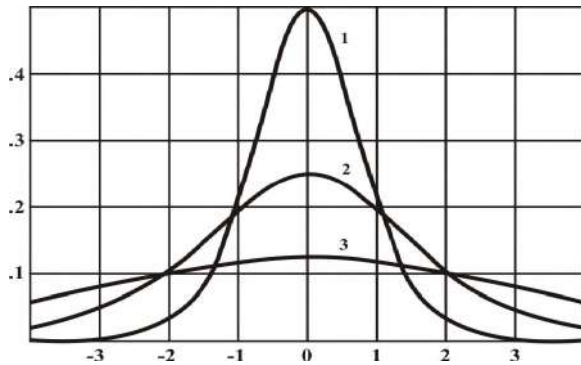
olan, $(-\infty, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır. Paylanma funksiyası

$$F(x; \lambda, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x - \mu}{\lambda}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\lambda > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ parametrlərdir. K. p. dedikdə bəzən $\mu = 0$ olduğu hal anlaşılr. K. p. unimodal paylanmadır və bu paylanmanın moda və medianı olan $x = \mu$ nöqtəsinə görə simmetrikdir. Xarakteristik funksiyası $f(t) = e^{i\mu t - \lambda |t|}$ düsturu ilə təyin olunur. Tam müsbət tərtib momentləri, o cümlədən, riyazi gözləməsi yoxdur. K. p. sinfi xətti çevirmələrə nəzərən qapalıdır: əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti λ və μ parametrləri K. p. ilə paylanmışdırsa, onda $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda' = |a|\lambda$ və $\mu' = a\mu + b$ parametrləri K. p. ilə paylanmışdır. K. paylanmaları sinfi kompozisiya eməlinə görə qapalıdır:

$$p(x; \lambda_1, \mu_1) * \dots * p(x; \lambda_n, \mu_n) = p(x; \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \mu_1 + \dots + \mu_n). \quad (*)$$

yeni K. p.-na malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması da K. p.-dır.



$\mu = 0$ və (1) $\lambda = 0.5$; (2) $\lambda = 1$; (3) $\lambda = 2$ olduqda Koşi paylanmasının sıxlıq funksiyaları

Normal paylanma kimi Koşi paylanması da *dayanıqlı paylanmalar* sinfinə aiddir. K. p. göstəricisi 1-ə bərabər simmetrik dayanıqlı paylanmadır. (*) münasibətindən alınan nəticə K. p.-nin aşağıdakı xassəsidir: əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ eyni K. p.-na malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n$ ədədi ortası da hər bir X_k kəmiyyəti ilə eyni K. p.-na malik olur. K. p.-nin daha bir seçiciyyəvi xüsusiyyəti vardır ki, təsadüfi kəmiyyətlər asılı olduqda belə onların cəminin paylanması da (*) düsturu ilə verilir; yeni əgər ξ və η asılı olmayan, eyni K. p.-na malik təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi + \eta$ və $\xi - \eta$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni K. p.-na malik olur. Parametrləri $\lambda = 1$ və $\mu = 0$ olan K. p. Serbestlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər Student paylanmasıdır. (λ, μ) parametrləri K. p. $(0, \lambda^2)$ parametrləri normal paylanmaya malik ξ və $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya malik η asılı olmayan kəmiyyətlərlə ifadə olunan $\mu + \xi/\eta$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşür. Əgər $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malik

təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\mu + \lambda \operatorname{tg} \xi$ funksiyası da belə K. p.-na malikdir. Əgər ξ K. p.-na malik təsadüfi kəmiyyət və $\lambda^2(\mu^2 + \pi^2/4) = 1$ olarsa, onda ξ^{-1} də eyni (λ, μ) parametrləri K. p. ilə paylanır. Vahiddən böyük dim. – ölçülü fəzalarda da K. p. analogi təyin olunur.

$\mu = 0$ halında K. p.-na ilk dəfə S. Puasson tərəfindən [2]-də baxılmışdır. O. Koşinin adı ilə adlandırılma aşağıdakı surətdə yaranmış tarixi bir səhvdir.

$p(x; \lambda, 0)$ funksiyasına

$$\int e^{ix} p(x; \lambda, 0) dx = \exp(-\lambda |t|)$$

Furye çevirməsi uyğundur. O. Koşi $g(x; \lambda, \alpha)$ funksiyası araşdırmışdır ki, onların Furye çevirmələri $\exp(-\lambda |t|^\alpha)$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ şəklindədir. Bunlar Koşi funksiyaları adlandırılmışdır. Bu funksiyalardan hansılarnın sıxlıq funksiyaları olduğu ($\alpha = 1$ və $\alpha = 2$ halından başqa, belə ki, bu hallar normal qanuna uyğundur) yalnız 20-ci əsrin əvvəllərində D. Poyanın (G. Polya, $0 < \alpha < 1$) və P. Levinin (P. Lévy, $1 < \alpha < 2$) işləri ilə əlaqədar aydın olmuşdur. Məhz Koşi funksiyalarının bu hissəsi Koşi paylanması adlandırılmışdır. Lakin P. Levi *dayanıqlı paylanmalar* sinfini daxil etdikdən sonra K. p. termini yalnız $\alpha = 1$ halı üçün qəbul olundu.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Poisson S. D., Sur la probabilité des résultats moyenns d'observation, P., 1832; [3] Cauchy A. L., «C. r. Acad. sci.», 1853, t. 37, p. 198.

KOŞİ – BUNYAKOVSKI BƏRABƏRSİZLİYİ «Коши – Буняковского неравенство; Cauchy – Bunyakovsky inequality» – bax, *Bunyakovski bərabərsizliyi*.

KOTELNİKOV TEOREMİ «Котельникова теорема; Kotelnikov / sampling theorem»: $[-F, F]$ tezliklər zolağında toplanmış, məhdud spektrli $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ kəsilməz funksiyasının ayrılışı

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k\Delta) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta)}{2\pi F(t - k\Delta)}, \Delta = 1/2F$$

düsturu ilə ifadə oluna bilər.

K. t. tam funksiyaların approksimasiyası məsələsi ilə sıx əlaqəlidir (bax, [2]). K. t. texnikada və kəsilməz məlumatların ötürülməsi nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır, belə ki, minimal diskretizasiya tezliyini ($1/(2F)$) müəyyən etməyə imkan yaradır və bu halda ilkin $f(t)$ məlumatı haqqında informasiyanın əsas hissəsi bu minimal tezlikdə $f(k/2F)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ hesablananda əks olunur.

Əd.: [1] Котельников В. А., О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи, М., 1933 («Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности»); [2] Хуртин Я. И., Яковлев В. П., Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, М., 1962.

KOTELNİKOV – ŞENNON DÜSTURU « Котельникова – Шеннона формула; Kotelnikov – Shannon formula » – bax, *Diskretizasiya problemi*.

KOVARIASİON ANALİZ « ковариационный анализ; analysis of covariance » – hər hansı Y təsadüfi kəmiyyətinin orta qiymətinin qeyri – kəmiyyəti F faktorlarının toplusu və eyni zamanda x kəmiyyət faktorlarının toplusundan asılılıq modellərinin analizinə aid, riyazi statistika metodlarının toplusudur. x dəyişənləri Y -ə nəzərən müşayiətedici dəyişənlər adlanır; F faktorları keyfiyyətli təbiətlik (məhiyyəti) şərtlərinin birləşməsinə təyin edir ki, Y və x müşahidələrinin bunların nəticəsində alındığı fərz olunur və bu faktorlar indikator dəyişənləri adlandırılan dəyişənlər vasitəsilə təsvir olunur; əgər Y təsadüfi kəmiyyəti vektor olarsa, onda çoxölçülü K. a.-dən söhbət gedir.

K. a.-in əsas nəzəri və tətbiqi problemləri xətti modellərə aiddir. Xüsusilə də, əgər n sayda $Y_1, \dots, Y_n$ müşahidələrindən ibarət sxem analiz olunursa, müşayiətedici dəyişənlərin sayı p , eksperimentin şərtlərinin mümkün tipləri k sayda olarsa, onda K. a.-ə uyğun xətti model

$$Y_i = \sum_{j=1}^k f_{ij} \theta_j + \sum_{s=1}^p \beta_s(F_i) x_i^{(s)} + \varepsilon_i(F_i), \quad i=1, \dots, n \quad (*)$$

tenlikləri ilə verilir, burada əgər eksperimentin j -ci şərti Y_i müşahidəsinə uyğun olmuşsa, indikator dəyişənləri f_{ij} -lər 1-ə bərabər, əks halda isə 0-a bərabər götürülür; θ_j əmsalları j -ci şərtin təsviri effektini təyin edirlər; $x_i^{(s)}$ – müşayiətedici $x^{(s)}$ dəyişəninə ehtimal qiymətidir ki, bu qiymətdə Y_i müşahidəsi alınmışdır, $i=1, \dots, n$, $s=1, \dots, p$; $\beta_s(F_i)$ – Y -in $x^{(s)}$ üzrə uyğun regressiya əmsallarının qiymətləridir və bunlar, ümumiyyətlə, eksperimentin şərtlərinin konkret birləşməsindən, yəni $F_i = (f_{i1}, \dots, f_{ik})$ vektorundan asılıdırlar; $\varepsilon_i(F_i)$ orta qiymətləri sıfıra bərabər təsadüfi xətalardır. K. a.-in əsas məhiyyəti naməlum $\theta_1, \dots, \theta_k$ parametrləri üçün statistik qiymətlərin qurulması; bu parametrlərin qiymətlərinə görə müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün $\beta_1, \dots, \beta_p$ və statistik kriterilərin qurulmasıdır.

Əgər (*) modelində apriori $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ olduğu qəbul edilərsə, onda *dispersion analiz* modeli alınır; əgər (*)-da qeyri – kəmiyyəti faktorların təsiri nəzərə alınmazsa (yəni $\theta_1 = \dots = \theta_k = 0$ götürülərsə), onda *regression analiz* modeli alınır. K. a. adı onunla əlaqədardır ki, burada hesablamalarda Y və x kəmiyyətlərinin kovariasiyasının ayrışdırılmasından dispersion analizdə olduğu kimi Y -in yayınmalının kvadratlari cəminin ayrışdırılması istifadə olunur.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] «Biometrics», 1957, v. 13, № 3.

KOVARIASİON FUNKSIYA « ковариационная функция; covariance function » – bax, *Korrelyasion funksiya, Momentlər funksiyası, Spektral sıxlıq(ğı) stasionar təsadüfi prosesin*.

KOVARIASİON FUNKSIYA qarşılıqlı « ковариационная функция взаимная; crosscovariance function » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

KOVARIASİON FUNKSIYA seçimi « ковариационная функция выборочная; sample covariance function » – bax, *Seçimi korrelyasion funksiya*.

KOVARIASİON MATRİS « ковариационная матрица; covariance matrix » – kovarians matris – elementləri təsadüfi vektorun komponentlərinin cüt-cüt kovariasiyalı olan matrisdir. $X = (X_1, \dots, X_n)$ n – ölçülü təsadüfi vektor olsun. $X_1, \dots, X_n$ komponentlərinin dispersiyalarının sonlu olduğu fərz olunur. Elementləri $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, – X_i və X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyalı olan

$$\Xi = [\sigma_{ij}], \quad i, j = 1, \dots, n$$

kvadrat matrisinə kovariasion matris deyilir. Ξ -nin baş diaqonalının elementləri X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyalarına bərabərdir.

K. m. simmetrik müsbət müəyyən matrisdir, belə ki, o, yalnız və yalnız, o halda müsbət müəyyən matrisdir ki, X -in cırtışmayan paylanması olsun. K. m., yalnız və yalnız, o halda diaqonal matrisdir ki, təsadüfi vektorun komponentləri cüt-cüt qeyri – korrelyardır. Hər bir simmetrik müsbət müəyyən n tərtib matris n – ölçülü normal paylanmaya malik hər hansı təsadüfi vektorun K. m.-idir.

Təsadüfi vektorlar üçün K. m. təsadüfi kəmiyyətlər üçün dispersiyanı oynadığı rolunu oynayır. Bu matris bezen ikinci momentlər matrisi adlandırılır.

K. m. anlayışı *korrelyasion matris* anlayışı ilə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

KOVARIASİON MATRİS; spektral ayrılış « ковариационная матрица спектральное разложение; spectral decomposition of covariance matrix » – Ξ kovariasion matrisinin

$$\Xi = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \dots + \lambda_p \alpha_p \alpha_p^T$$

şəklində ifadəsidir, burada $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – Ξ -nin məxsusi ədədləri, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ – bunlara uyğun məxsusi vektorlardır.

Əd.: [1] Jolliffe I., Principal Component Analysis, N. Y., 1986.

KOVARIASİON OPERATOR(u) ehtimal ölçüsünün « ковариационный оператор вероятностной меры; covariance operator of a probability measure » – təsadüfi kəmiyyətin *dispersiyası* anlayışının analoqudur. $\mathbb{B}$ – heqiqi separabel Banax fəzası, μ – zəif ikinci tərtibə malik, yeni ixtiyarı $b^* \in \mathbb{B}^*$ xətti kəsilməz funksionalı üçün

$$\int [b^*(x)]^2 d\mu(x) < +\infty$$

şərtini ödəyən ehtimal ölçüsü olsun. $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$ olduqda

$$b_1^*(R_\mu b_2^*) = \int b_1^*(x) b_2^*(x) d\mu(x) - \int b_1^*(x) d\mu(x) \int b_2^*(x) d\mu(x) \quad (*)$$

berabərliyi ilə təyin olunan və μ ölçüsünün kovariasion operatoru adlanan, yəqənə $R_\mu: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}$ xətti kəsilməz operatoru vardır.

Zəif ikinci tertibə malik ehtimal ölçülü təsadüfi X elementinin K. o. R_X onun ehtimal paylanmasının K. o. kimi təyin olunur.

Başqa sözlə, $R_X: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}$ yəqənə surətdə

$$b_1^*(R_X b_2^*) = \mathbf{M} b_1^*(X) b_2^*(X) - \mathbf{M} b_1^*(X) \mathbf{M} b_2^*(X), \\ b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$$

münasibətilə təyin olunan xətti kəsilməz operatorudur. K. o.-un tərəfindən aşağıdakı xassələr alınır.

1) K. o. simmetrik və müsbətdir, yəni bütün $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$ üçün

$$b_1^*(R_X b_2^*) = b_2^*(R_X b_1^*), \quad b_1^*(R_X b_1^*) \geq 0.$$

2) Əgər X və Y təsadüfi elementlər (zəif ikinci tertibli) və α, β heqiqi ededlərdirsə, onda

$$R_{\alpha X + \beta Y} = \alpha^2 R_X + \beta^2 R_Y + \alpha\beta(R_{XY} + R_{YX}^*),$$

burada R_{XY} , $-X$ və Y elementlərinin qarşılıqlı kovariasiya operatoru, R_{YX}^* , $-R_{XY}$ -ə qoşma operatorudur. Məs., iki asılı olmayan təsadüfi elementlər cəminin K. o. (iki ehtimal ölçüsünün kompozisiyasının) uyğun K. o.-larının cəminə bərabərdir.

3) Əgər $X \in \mathbb{B}$ -də zəif ikinci tertibli təsadüfi element və $A \in \mathbb{B}$ -dən $\mathbb{B}$ -ə xətti kəsilməz inikasdırsa, onda $R_{AX} = AR_X A^*$ doğrudur, burada A^* , $-A$ -ya qoşma operatorudur.

K. o. üçün aşağıdakı xassə də doğrudur (faktorizasiya lemması): ixtiyari R K. o.-u üçün ele Hilbert fəzası H və ele $A: H \rightarrow \mathbb{B}$ xətti kəsilməz operatoru vardır ki, $R = AA^*$ və $AH \in \mathbb{B}$ -də sıxdır.

K. o.-un tərif və əsas xassələri daha ümumi lokal qapanq topoloji vektor fəzaları üçün də öz qüvvəsində qalır (bax, [5]). Qeyri-separabel fəza halında K. o. R_μ qoşma fəzanın ikinci bir qoşma fəzaya inikası kimi təyin olunur. Lakin, əgər μ Radon ölçüsü olarsa, onda $R_\mu \mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}$ olur.

K. o. ilk evvel separabel Hilbert fəzasında güclü ikinci tertib ölçülər (yəni $\int \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ xasseli) halı üçün təyin və istifadə olunmuşdur; bu halda R_μ nüvə operatorudur (bax, [1], [2]). Ümumi halda, zəruri olan zəif ikinci tertib xassənin təbii olaraq ödənilməsi ilə təyin olunan K. o.-lar sinfi daha genişdir. $\mathbb{B}$ ixtiyari separabel Banax fəzası olduğu halda bu sinif $\mathbb{B}^*$ -dan $\mathbb{B}$ -yə xətti simmetrik mənfi olmayan bütün inikaslarn sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3], [4]).

Bezen yuxarıda təyin olunmuş K. o.-dan fərqlənən K_μ və ya K_X K. o. anlayışına da təsadüf olunur və onun təyin olunmasında mərkəzlənmə edilmir və (*)-nın əvəzinə K_μ üçün

$$b_1^*(K_\mu b_2^*) = \int b_1^*(x) b_2^*(x) d\mu(x)$$

münasibəti təyinedici olur, burada $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$; əgər μ ölçüsü mərkəzləndirilmişsə, $K_\mu = R_\mu$ olur (çünki bu halda

$\int b^*(x) d\mu(x) = 0$ bərabərliyi bütün $b^* \in \mathbb{B}^*$ üçün doğrudur).

Əd.: [1] M o u r i e r E., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1953, t. 19, p. 161-244; [2] П р о х о р о в Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177-238; [3] В а х а н и я Н. Н., Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тб., 1971; [4] В а х а н и я Н. Н., Т а р и е л а д з е В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 1, с. 3-26.

KOVARİASİON PƏNCƏRƏ «ковариационное окно; lag window» – bax, *Spektral sıxlıq; qeyri-parametrik statistik qiymət*.

KOVARİASİYA «ковариация; covariance» – dispersiyaları sonlu olan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır,

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{M}[(X_1 - \mathbf{M}X_1)(X_2 - \mathbf{M}X_2)]$$

düsturu ilə təyin olunur. K. üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \text{cov}(X_2, X_1), \quad \text{cov}(X, X) = \mathbf{D}X.$$

İxtiyari iki təsadüfi kəmiyyət cəminin dispersiyası K. vasitəsilə

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + 2\text{cov}(X_1, X_2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$. Lakin $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$, yəni X_1, X_2 qeyri-korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər olduqda, ümumiyyətlə, X_1 və X_2 -nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu hökm etmək olmaz. Lakin normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri-korrelyar olmasından onların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu alınır. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cüt-cüt qeyri-korrelyarlığı böyük ədədlər qanununun Çebışev formasının ödənilməsi üçün kifayət qədər; yəni ixtiyari ε üçün və $n \rightarrow \infty$ olduqda və $\mathbf{D}X_i$ müntəzəm məhdud olarsa,

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{\mathbf{M}X_1 + \dots + \mathbf{M}X_n}{n} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur. *Korrelyasiya əmsalı* K. vasitəsilə təyin olunur.

Riyazi statistikada K.-nin statistik qiyməti kimi

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_1^{(i)} - \bar{X}_1)(X_2^{(i)} - \bar{X}_2)$$

düsturu ilə hesablanan seçimi kovariasiyadan istifadə olunur, burada $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\bar{X}_1$ və $\bar{X}_2$ – ədədi ortaldır.

KOVARİASİYA(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun «ковариация случайного замкнутого множества; covariance of random closed set», A t. q. ç.-nın K. ele cov_A funksiyasıdır ki, S baza fəzasının x_1, x_2 nöqtələri cütünə (bax, *Təsadüfi çoxluq*)

$$\text{cov}_A(x_1, x_2) = P(\{x_1, x_2\} \subset A) = \\ = T_A(\{x_1\}) + T_A(\{x_2\}) - T_A(\{x_1, x_2\})$$

kəmiyyətini qarşı qoyur, T_A A təsadüfi çoxluğunun *müşayiətdici funksionalıdır*. Təsadüfi qapalı çoxluğun kovariasiyası, məhiyyətə, təsadüfi A çoxluğunun *nöqtəvi paylanma qanunu* ilə təyin olunur. Əgər S vektor fəza və A stasionar olarsa (bax, *Stasionar təsadüfi çoxluq*), onda cov_A yalnız $(x_1 - x_2)$ fərqindən asılı olur. Bu halda $C_A(h) = \text{cov}_A(x, x+h)$ funksiyası A çoxluğunun stasionar kovariasiyası adlanır.

KOVARİASIYA, XÜSUSİ KOVARİASIYA FUNKSIYASI «ковариация частной функция; partial covariance function» – bax, *Avtokorelyasiya funksiyası, xüsusi*.

KÖÇÜRTMƏ – QOŞMA MƏSƏLƏSİ «переноса сопряженной задача; transfer dual problem» – bax, *Qoşma köçürmə məsələsi*.

KÖÇÜRTMƏ MƏSƏLƏSİ; statistik modelləşdirmə «переноса задача; статистическое моделирование; transfer problem; statistical simulation of the» – bax, *Statistik modelləşdirilməsi* köçürmə məsələlərinin.

KÖÇÜRTMƏ TEOREMİ «переноса теорема; transfer theorem»: əgər hər bir natural n ədədi üçün $v_n, X_{nk}, k=1, 2, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, v_n – tam mənfəi olmayan qiymətlər alarsa, $X_{nk}, k=1, 2, \dots$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sum_{k=1}^{v_n} X_{nk} < x\right\} \xrightarrow{w} \Psi(x) \quad (*)$$

(zeif yığılma) olarsa, elə qeyri – məhdud artan $\{k_n\}$ natural ədədlər ardıcılığı vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sum_{k=1}^{v_n} X_{nk} < x\right\} \xrightarrow{w} \Phi(x), P\left\{\frac{v_n}{k_n} < x\right\} \xrightarrow{w} F(x)$$

münasibətləri doğrudur.

Ψ və Φ paylanma funksiyalarına uyğun ψ və φ xarakteristik funksiyaları bir-birilə və $F(x)$ paylanma funksiyası ilə

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi(t) dF(x)$$

düsturu ilə əlaqədirlər.

K. t. [1]-də isbat olunmuşdur. Bu teoremə qədər çox da ümumi xarakter daşımayan analogi müddəalar olmuşdur. [2]-də təsadüfi sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin toplananlar sayı ilə toplananlar asılı olmadığı hallar üçün limit teoremlərinin xülasəsi verilmişdir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Факим Г., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 1, с. 15–17; [2] Круглов В. М., Королев В. Ю., «Пределные теоремы для случайных сумм», М., 1990.

468 KÖÇÜRTMƏ

KÖK(Ü) təsadüfi ağacın «корень случайного дерева; root of a random tree» – bax, *Təsadüfi ağac*.

KÖKLƏRİ – KOMPAKT QURUP «корне – компактная группа; root compact group» – aşağıdakı şərtləri ödəyən lokal kompakt G qrupudur: ixtiyari natural n və ixtiyari kompakt $C \subset G$ qrupu üçün elə $C_n \subset G$ kompakt qrupu vardır ki, $x_n = e$ olduqda və bütün $i+j \leq n$ üçün $Cx_i Cx_j \cap Cx_{i+j} \neq \emptyset$ şərti ödənildikdə G -dəki bütün sonlu $\{x_1, \dots, x_n\}$ ardıcılıqlar C_n -ə daxildir. Əgər ixtiyari kompakt $C \subset G$ üçün elə kompakt $C_0 \subset G$ varsa ki, ixtiyari natural n üçün G -dəki bütün sonlu $\{x_1, \dots, x_n\}$ ardıcılıqları üçün $x_n = e$ və $Cx_i Cx_j \cap Cx_{i+j} \neq \emptyset$ şərtləri bütün $i+j \leq n$ üçün ödənildikdə, bu ardıcılıqlar C_0 -a daxil olsun, G qrupu *güclü kökləri-kompakt qrup* adlanır. Hər bir güclü kökləri – kompakt qrup kökləri – kompakt qrupdur, lakin tərsi doğru deyildir.

KÖRPÜ, Braun körpüsü «мост броуновский; Brownian bridge» – bax, *Viner körpüsü*.

KRAFT – MAK-MILLAN BƏRABƏRSİZLİYİ «Крафта – Мак-Миллана неравенство; Kraft – Mac Millan inequality» – bax, *Kod*.

KRAMER BƏRABƏRSİZLİYİ «Крамера неравенство; Cramer inequality» xarakteristik funksiyaya üçün – *xarakteristik funksiyanın* modulunun $|t| \leq B$ intervalı daxilində, onun bu interval xaricində özünü nə cür aparmasına əsaslanaraq, yuxarı sərhədini təyin edən münasibətdir. $f(t)$, $|t| \geq B$ qiymətlərində $|f(t)| \leq A < 1$ xassəsinə malik olan xarakteristik funksiya olsun, onda $|t| \leq B$ qiymətlərində

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{8} \frac{(1-A^2)}{B^2}$$

münasibəti doğrudur (bax, [1], [3]). Bu tip bərabərsizliklərin isbatı müsbət müəyyən triqonometrik polinomun seçilməsinə əsaslanır. Bu üsulla K. b. və onun dəqiqləşmiş forması [2]-də alınmışdır: əgər $|f(t)| \leq A < 1$ münasibəti $B \leq t \leq B+b$,

$0 < b \leq B$ şərtini ödəyən t -lər üçün ödənilərsə, onda

$$|f(t)| < \left(\frac{B+tA}{B+t}\right)^{t/(B+t)} < 1 - \frac{(1-A)t^2}{(B+t)^2} < 1 - \frac{(1-A)t^2}{(B+b)^2}$$

münasibəti $0 < t < b$ şərtini ödəyən t -lər üçün doğrudur (bax, [3], səh. 37).

Əd.: [1] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] Heatscote C. R., Pittman J. W., «Bull. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 6, p. 1–9; [3] Петров В. В., Пределные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

KRAMER ÇEVİRMƏSİ «Крамера преобразование; Cramer transform» F paylanma funksiyasının Kramer çevirməsi –

$$H_F(a) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [a\lambda - \psi(\lambda)], a \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan funksiyadır, burada

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x), & \text{əgər } \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x) < \infty \text{ olarsa,} \\ \infty, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətinin K. ç. kimi onun paylanma funksiyası F_{ξ} -nin K. ç. nəzərdə tutulur: $H_{\xi}(a) \equiv H_{F_{\xi}}(a)$. K. ç. aşağı qabarıq funksiyadır. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti *Kramer şərtini* ödəyirsə, yeni hər hansı λ üçün

$$\mathbf{M} \exp\{\lambda |\xi|\} < \infty$$

olarsa, onda $\min_{a \in \mathbb{R}^1} H_{\xi}(a) = 0$, belə ki, $\arg \min_{a \in \mathbb{R}^1} H_{\xi}(a) = \mathbf{M} \xi$.

Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununda yığılma sürətinin statistik qiyməti K. ç. terminləri ilə münasib surətdə yazılır. Doğrudan da, əgər $\xi_1, \xi_2, \dots$ Kramer şərtini ödəyən, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{k \geq n} \left| \frac{1}{k} S_k - \mathbf{M} \xi_1 \right| \geq \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq 2 \exp \{ -n \min(H_{\xi_1}(\mathbf{M} \xi_1 - \varepsilon), H_{\xi_1}(\mathbf{M} \xi_1 + \varepsilon)) \}$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, 2 изд., М., 1989, с. 428–31.

KRAMER SIRASI «Крамера ряд; Cramér series» – bax. *Kramer teoremi*.

KRAMER ŞƏRTLƏRİ «Крамера условия; Cramér conditions» – ehtimal nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan H. Kramer tərəfindən daxil olunmuş iki şərtidir. ξ – paylanma funksiyası $F(x)$, xarakteristik funksiyası $f(t)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. K. ş.-ndən biri ondan ibarətdir ki, əgər $F(x)$ -in sıfırdan fərqli mütləq kəsilməz komponenti varsa,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f(t)| < 1$$

münasibəti ödənilir. K. ş.-ndən digəri ixtiyari $|t| < a$ və hər hansı $a > 0$ üçün

$$\mathbf{M} e^{t\xi} < \infty$$

şərtidir. Sonuncu şərt b və c müsbət sabitlərinin varlığına ekvivalentdir ki, bütün $x > 0$ üçün

$$\mathbf{P} \{ |\xi| \geq x \} \leq b e^{-cx}$$

olur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] К р а м е р Г., «Успехи матем. науки», 1944, в. 10, с. 166–78.

KRAMER TEOREMİ «Крамера теорема; Cramér theorem» – 1) bax, *Levi – Kramer teoremi*.

2) böyük yayınmalar ehtimalları üçün K.t.: fərz olunur ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan ele təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun ki, $\mathbf{M} \xi_1 = 0$, $\mathbf{M} \xi_1^2 = \sigma^2 > 0$ və momentlərin doğuran funksiyası $\mathbf{M} e^{t\xi_1}$ hər hansı $|t| < a$ sonlu intervalında sonludur (bu axırıncı şərt *Kramer şərti* adlanır).

$$F_n(x) = \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^n \xi_j < x \sigma \sqrt{n} \right\},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

olsun; əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ olarsa, onda

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp \left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(-\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

Burada $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ – əmsalları yalnız ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin momentlərindən asılı olan, olduqca kiçik bütün t -lər üçün yığılan sıradır (bu sıra *Kramer sırası* adlanır).

Bir qədər zəif nəticə H. Kramer tərəfindən [1]-də 1938-də alınmışdır, K. t.-nin yuxarıda verilən dəyişdirilmiş formasını V. V. Petrov [2]-də almışdır.

Əd.: [1] С р а м е р Г., «Actual. sci. et industr.», 1938, № 736; [2] П е т р о в В. В., «Успехи матем. науки», 1954, т. 9, в. 4, с. 195–202; [3] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

3) **Qauss paylanmaları** haqqında K.t. – bax, *Ehtimal paylanmalarının arifmetikası*.

4) **Təsadüfi funksiyaların təsviri** haqqında K. t.: əgər ixtiyari $T = \{t\}$ çoxluğunda verilmiş, riyazi gözleməsi sıfıra bərabər kompleks $X(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasiya funksiyası $\mathbf{M} X(t) \overline{X(s)} = B(t, s)$

$$B(t, s) = \int_A \int_A \psi(t, a) \overline{\psi(s, a')} m(da, da') \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilsə, onda $X(t)$ stoxastik integral şəklində aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$X(t) = \int_A \psi(t, a) Z(da); \quad (2)$$

burada A – hər hansı lokal kompakt fəzadır, $\mathcal{B}$, – $S \subset A$ altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdir, $m(S_1, S_2)$, $S_1 \in \mathcal{B}$, $S_2 \in \mathcal{B}$ – lokal sonlu variyasiyalı (yeni S -in kompakt olduğu bütün $S \times S$ «kvadratlarında» sonlu variyasiyaya malik) və

müsbət müəyyən nüvəyə malik olan [bütün ixtiyari müsbət n , kompleks $c_1, \dots, c_n$ və $\mathcal{B}$ -yə daxil olan çoxluqlarda

$$\sum_{j,k=1}^m m(S_j, S_k) c_j \bar{c}_k \geq 0 \quad (3)$$

olduğundan [$A \times A$ -da kompleks ölçüdür; $Z(S)$, $\mathcal{B}$ -də verilən ele təsadüfi funksiyadır ki, $\mathbf{M}Z(S_1) \overline{Z(S_2)} = m(S_1, S_2)$. (2)-nin sağ tərəfindəki integral isə uyğun integral cəmləri ardıcılığının kvadratik orta menada limiti kimi təyin olunur.

Əksinə, əgər $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyası (2) şəklində ifadə oluna bilinirsə, onda onun korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ (1) şəklində ifadə oluna bilər. $Z(S)$, $S \in \mathcal{B}$ qiymətləri, yalnız və yalnız, o halda $X(t)$, $t \in T$ vektorlarını örtən H_X fəzasındandır ki, a arqumentinin funksiyalarının ailəsi $\{\psi(t, a), t \in T\}$ –

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_A \int_A \varphi_1(a) \overline{\varphi_2(a')} m(da, da')$$

skalyar hasilini təyin olunmuş və norması

$$\|\varphi\| = \left[\int_A \int_A \varphi(a) \overline{\varphi(a')} m(da, da') \right]^{1/2} < \infty$$

olan, $\varphi(a)$, $a \in A$ funksiyalarının Hilbert fəzası $L^2(m)$ -də tam ailə olsun.

K. t.-ni H. Kramer [1]-də $A = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ halı üçün isbat etmişdir. Bu teorem təsadüfi funksiyaların ortoqonal təsviri haqqında *Karunen teoreminin* ümumiləşməsidir; bu teoremin mühüm tətbiqi t -nin bütün həqiqi ədədlər (və ya bütün tam ədədlər) çoxluğunda qiymətlər aldığı haldır. yeni $X(t)$ -ya təsadüfi proses və ya təsadüfi ardıcılıqdır, $A = (-\infty, \infty)$ (və ya $A = [-\pi, \pi]$) və $\psi(t, a) = e^{ita}$ (bax, *Harmonikləşən təsadüfi proses*). Bu xüsusi halda $m(S_1, S_2)$ nüvəsinin müsbət müəyyən nüvə olma tələbini nəzərə almamaq olar, belə ki, (3) şərti burada (1) ifadəsinin doğruluğundan avtomatik alınır. $m(da, da')$ kompleks ölçülərinin daha geniş sinfi halında K. t.-nin ümumiləşməsi (2)-nin sağ tərəfindəki stoxastik integralın daha ümumi tərifinin ifadəsinə əsaslanır (bax, [2]).

Əd.: [1] C r a m e r H., в кн.: Proc. 2-nd Berk. Symp. Math. Stat. Probab., Berk. – Los. Ang., 1951, p. 329–39; [2] R a o M. M., в кн.: Handbook of Statistics; v. 5. Amst., 1985, p. 279–310.

KRAMER – MİZES KRİTERİSİ « Крaмepa – Mизeca кpитepий; Cramér-Mises test » – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş $F(x)$ kesilməz paylanma funksiyasına malik olması haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *qeyri – parametrik kriteridir*. K. – M. k.

$$\omega_n^2[\Psi(F(x))] = \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))]^2 \Psi(F(x)) dF(x)$$

470 KRAMER

statistikasına əsaslanır, burada $F_n(x)$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $\Psi(t)$ – hər hansı mənfi olmayan, $[0, 1]$ -də təyin olunmuş ele funksiyadır ki, $\Psi(t)$,

$t\Psi(t)$ və $t^2\Psi(t)$ $[0, 1]$ -də integrallanırlar. Bu tip kriterilərə kvadratik metrikaya əsaslandığı halda ilk dəfə H. Kramer [1]-də və R. Mizes [2]-də tərəfindən baxılmışdır. N. V. Smirnov [3]-də $\Psi(t) \equiv 1$ seçərək göstərmişdir ki, bu halda H_0 hipotezi

doğru olarsa, $n \rightarrow \infty$ olduqda, $\omega^2 = \omega_n^2$ (bax, [1]) statistikası limitdə hipotetik paylanma funksiyası $F(x)$ -dən asılı olmayan *omeqa – kvadrat paylanmaya* malik olur. H_0 hipotezini yoxlamaq üçün ω_n^2 statistikasına əsaslanan kriteri, ω^2 – kriteri (*Kramer – Mizes – Smirnov kriterisi*) adlanır, bu halda ω_n^2 statistikasının ədədi qiymətini tapmaq üçün onun aşağıdakı ifadəsindən istifadə olunur:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left[F(\xi_{(j)}) - \frac{2j-1}{2n} \right]^2,$$

burada $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə qurulmuş variasion sıradır. Mühümlük ölçüsü α olan ω^2 kriterisinə əsasən, $\omega_n^2 \geq \omega_{\alpha}^2$ olduqda H_0 hipotezi qəbul olunmur, burada ω_{α}^2 , ω^2 paylanmanın yuxarı α kvantilidir, yeni

$\mathbf{P}\{\omega^2 < \omega_{\alpha}^2\} = 1 - \alpha$. T. Anderson və D. Darlinqin $\omega_n^2 [1/F(x)(1 - F(x))]$ statistikasına əsaslanan kriteri də analoji qaydada qurulmuşdur (bax, [5]).

Əd.: [1] C r a m e r H., Sannolikhetskalkylen och nagra av dess användningar, Stockh., [1926]; [2] M i s e s R. v., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Lpz. – W., 1931; [3] С м и р н о в Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973–993; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [5] A n d e r s o n T. W., D a r l i n g D. A., «Ann. Math. Stat.», 1952, v. 23, p. 193–212.

KRAMER – MİZES – SMIRNOV KRİTERİSİ « Крaмepa – Mизeca – Cмupнoвa кpитepий; Cramer – Mises – Smirnov test » – bax, *Kramer – Mizes kriterisi*.

KRAMER – RAO BƏRABƏRSİZLİYİ « Крaмepa – Pao нepaвeнcтвo; Cramer – Rao inequality » – parametrlin *statistik qiymətlərinin* kvadratik orta xətlərinin aşağı sərhədini müəyyənləşdirən bərabərsizlikdir. Eyni zamanda və bir-birindən asılı olmadan, H. Kramer ([1]), S. Rao ([2]) və M. Freşe ([3]) tərəfindən alınmışdır. Paylanma sıxlığı $f(x, \theta)$ olan $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə naməlum skalyar θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ bu parametrlin ele statistik qiyməti olsun ki, $\mathbf{M}_{\theta} T = \theta + b(\theta)$, burada b – hər hansı differensiallanan funksiya olub, T statistik qiymətinin *meyli* adlanır. Onda $f(x, \theta)$ ailəsi üzərinə qoyulan müəyyən requlyarlıq şərtlərində

$$\mathbf{M}_{\theta}(T - \theta)^2 \geq (1 + b'(\theta))^2 / nI(\theta) + b^2(\theta)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $I(\theta) = \mathbf{M}_{\theta}(\partial \ln f(\xi_1, \theta) / \partial \theta)^2$ – Fişer informasiya miqdarıdır və fərz olunur ki, o, müsbət və

sonludur. K. – R. b.-nin ümumiləşmələri və dəyişmələri haqqında bax, [4], [5]. Bax, həmçinin *Statistik məsələlər(i)* təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin; *Statistik qiymətləndirmə*.

Əd.: [1] Cramér H., «Skand. Aktuarietidskr.», 1946, v. 29, p. 85–94; [2] Rao C. R., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1945, v. 37, p. 81–91; [3] Frechet M., «Rev. Inst. Intern. Statist.», 1943, v. 11, p. 182–205; [4] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

KRAMER – VOLD TEOREMİ «Крамера – Волда теорема; Cramér – Wold theorem» – Evklid fəzasında ehtimal paylanmalarının bütün yarımfəzalarda öz qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunması haqqında müddədir. [1]-də dərc olunmuşdur; bax, [2], fə. 9; [3]-də qeyd olunmuşdur ki, bu teorem İ. M. Gelfand tərəfindən asılı olmadan alınmışdır.

$t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, – $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasının hər hansı qeyd olunmuş nöqtəsi və α – heqiqi ədəd olsun. $S_{t,\alpha}$ yarımfəzası $\mathbb{R}^k$ fəzasının $t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k \leq \alpha$ şərtini ödəyən bütün $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ nöqtələrinin çoxluğudur. P_1 və P_2 – $\mathbb{R}^k$ -da iki ehtimal paylanması olsun; bütün $t \neq 0$ və α üçün $P_1(S_{t,\alpha}) = P_2(S_{t,\alpha})$ bərabərliyindən K. – V. t.-inə görə, $P_1 \equiv P_2$ olduğu alınır.

Teoremin isbatı, xarakteristik funksiyalar metodundan istifadə edildikdə, olduqca qısa alınır. Doğrudan da, əgər $X_j = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jk})$ paylanması P_j , $j=1, 2$ olan təsadüfi vektor olarsa, K. – V. t.-nin şərtinə görə t -nin ixtiyari qiymətində $V_1 = t_1 X_{11} + t_2 X_{12} + \dots + t_k X_{1k}$ və $V_2 = t_1 X_{21} + t_2 X_{22} + \dots + t_k X_{2k}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanmaları üst-üstə düşür. Deməli, bunların xarakteristik funksiyaları da üst-üstə düşür, yeni $M e^{i\lambda V_1} = M e^{i\lambda V_2}$, burada λ ixtiyari heqiqi ədəddir. $\lambda=1$ olduqda bu faktdan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyalarının bərabərliyi alınır, bu da $P_1 \equiv P_2$ olmasını (ehtimallarnın bərabərliyini) doğurur.

[3]-də belə məsələ qoyulmuşdur ki, «xarakteristik funksiyalara müraciət olunmadan isbat» araşdırılsın. Bu halda *Abel integral tənliyindən* istifadə olunmuşdur. Bu məsələnin həlli variantı [4]-də təklif olunmuşdur.

Əd.: [1] Cramer H., Wold H., «J. London Math. Soc.», 1936, v. 11, part 4, p. 290–94; [2] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [3] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 233; [4] Хачатуров А. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 3, с. 201–12.

KRAMP – MOD – YAGERS PROSESİ «Крампа – Мода – Ягера процесс; Crump – Mode – Jagers process» – bax, *Ümumi şəxələnen proses*.

KREYN TEOREMİ «Крейна теорема; Krein theorem» müsbət müəyyən funksiyalar haqqında: $(-a, a)$ intervalında təyin olunmuş $f(t)$ funksiyasının hər hansı ehtimal paylanması P -nin xarakteristik funksiyası ilə üst-üstə düşməsi üçün, yeni

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P(dx), \quad -a < t < a$$

düsturunun ödənilməsi üçün $f(0) = 1$ şərtinə normalanmış f -in müsbət müəyyən funksiya olması zəruri və kifəidir. Bu nəticə M. Q. Kreyn tərəfindən [1]-də alınmışdır. $a = \infty$ olduqda bu teorem *Boxner – Xinqin teoremi* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Крейн М. Г., «Докл. АН СССР», 1940, т. 26, № 1, с. 17–21; [2] Ахизер Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961.

KRILOV STATİSTİK QIYMƏTLƏRİ, PAYLANMA-NIN «Крылова оценки распределения; Krylov distribution estimates» – bax, *Stoxastik integral; paylanmanın qiymətləri*.

KRIKKEBERQ AYRILIŞI «Криккеберга разложение; Krickeberg decomposition» – $X = (X_t)_{t \geq 0}$ martinqalının $X = Y - Z$ şəklində ifadəsidir, burada $Y = (Y_t)$, $Z = (Z_t)$ – mənfi olmayan martinqallardır, t – diskret zamandır, $t \in \{0, 1, \dots\}$ və ya kəsilməzdir, $t \in [0, \infty]$. X – müntəzəm inteqrallanan martinqal olduqda (yeni $X_t = M[X_\infty | \mathcal{A}_t]$ bərabərliyi sanki yəqin bütün t -lər üçün doğrudur, burada X_∞ – inteqrallanan təsadüfi kəmiyyətdir, onda $Y_t = M[X_\infty^+ | \mathcal{A}_t]$, $Z_t = M[X_\infty^- | \mathcal{A}_t]$ bərabərlikləri sanki yəqin doğrudur). İxtiyari X martinqalı üçün K. a., yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, X martinqalı L_1 -də məhdud olsun, yeni $\|X\|_1 = \sup M|X_t| < \infty$ olsun. K. a. yeganədir və hətta $\|X\|_1 = \|Y\|_1 + \|Z\|_1$. Y və Z martinqalları ən kiçik mənfi olmayan martinqallardır və uyğun olaraq X və $-X$ üçün majorantlayıcı martinqallardır.

Aynılış ilk dəfə K. Krickeberg [1]-də alınmışdır.

Əd.: [1] Krickeberg K., Wahrscheinlichkeitstheorie, Stuttg, 1963; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Théorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80.

KRİPTOQRAFIYA «криптография; cryptography» – informasiyanın کنار şəxslərdən qorunması məqsədilə çevrilməsi haqqında elmdir. Riyaziyyatın bir çox oblasları: cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, diskret riyaziyyat, ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika müasir K.-da tətbiq olunur. Digər tərəfdən, K.-nin tələbatları qeyri – trivial riyazi məsələlərin yaranmasına səbəb olur ki, bu da xalis riyaziyyatın inkişafı prosesinə böyük təsir göstərir (baxmayaraq ki, bu həmişə gözə çarpmır).

Aşağıda K.-nin ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ilə əlaqələrinə riyaziyyatın digər sahələri ilə əlaqələrindən daha çox diqqət yetirilir.

Son zamanlara kimi K., bir qayda olaraq, hərbi və dövlət sirlərinin qorunması üçün istifadə olunurdu. Son onilliklərdə kapitalın mərkəzləşdirilməsi və onun artmasının spekulativ üsullarının geniş yayılması, rəqəbatın artması prosesləri ilə və elektron əlaqə vasitələrinin inkişafı ilə bağlı olaraq kommersiya təşkilatları tərəfindən informasiyanın kriptografik qorunma metodlarına tələbat artmışdır, bu isə yeni istiqamətlər və metodların yaranmasına səbəb olmuşdur: məs., açıq açarlı K., sifirli bölüşdürülməsi metodları, elektron imza, identifikasiya metodları və s. Nəzəri K.-da alınan nəticələr rəqulyar sürətdə beynəlxalq kriptografik konferensiyalarda hər il müzakirə olunur (məs., CRYPTO, EURO-CRYPT, ASIACRYPT və s.); bu konferensiyaların əsərləri Springer – Verlag nəşriyyatı tərəfindən Lecture Notes in Computer Science seriyasında nəşr olunur.

Informasiyanın kriptografik qorunma üsulları yazı ilə eyni zamanda yaranmışdır. Göndərən şəxsin informasiyanı şifrələmə üsul-

ları və informasiya ünvanlananın şifri açması olduqca sadə realizasiya olunmalıdır, informasiyanın digər kənar şəxs tərəfindən açılması isə mövcud elmi – texniki səviyyədə, praktiki cəhətdən ağılabatan müddət ərzində reallaşmamalıdır. Məs., Avropada Orta əsrlərə qədər Sezar şifri adlanan şifr istifadə olunurdu: mətndəki hər bir hərf əlifbanın digər hərfi ilə əlavə əvəz olunurdu ki, bu əvəzləmədə aşağı sətir – üç hərf sola tsiklik sürüşdürülmüş əlifbaya uyğun olsun. Belə şifri o halda etibarlı saymaq olar ki, rəqib əzsavadlı olsun. Daha mürəkkəb şifrlərin, əlifbanın hər bir hərfinin digər hərf və ya simvolla əvəz olunan şifrlərin açılmasına aid misallar E. Ponun «Qızıl böcək» və A. Konan – Doyleun «Rəqs edən adamçıqazlar» hekayələrində təsvir olunmuşdur.

Şifrləmənin klassik sxemləri aşağıdakı şəkildədir. M – ilkin məlumatlar çoxluğu (açıq mətnlər); $T = \{T_k, k \in K\}$, – $T_k: M \rightarrow E$ şifredici inikasklar çoxluğu (adətən, çevrilən) olsun, burada E – şifrlənmiş mətnlər çoxluğudur. İstifadə edilən çevirmənin konkret şəklini təyin edən k parametri informasiyanı göndərən və ünvanlanmış şəxsədən başqa heç bir kəsə məlum olmamalıdır, k parametri açar adlanır; bütün şifredici inikasklar çoxluğu T rəqibə də məlum ola bilər. $m \in M$ məlumatını göndərmək üçün onu göndərən şəxs m -ə T_k inikasını tətbiq edir (k açarı qəbulədən şəxsə əvvəlcədən ötürülür) və şifrlənmiş $e = T_k m$ məlumatını rəqib üçün də əlçatan rabitə kanalı ilə göndərir (məs., radio ilə). Qəbulədən şəxs e -yə T_k^{-1} tərs inikasını tətbiq edərək, ilkin açılmış $m = T_k^{-1}e$ məlumatını tapır. k açarının mənasını bilməyən rəqib bütün mümkün olan $m(r) = T_r^{-1}e$, $r \in K$ qiymətlərini bir-bir yoxlamaqla ilkin məlumatı tapa bilər, lakin K çoxluğunun elementləri sayı çox olarsa, onda bu prosedür üçün olduqca çox vaxt tələb olunur.

Şifrləmə üsulunun seçilməsində əsas problemlərdən biri ondan ibarətdir ki, rəqib ötürülən açıq tekstlər və ya şifrləyici inikasklar çoxluğunun xassələri haqqında bütün açarlar çoxluğunu bir-bir yoxlamadan, şifrlənmiş məlumatları açmaq üçün əlavə verilənlərdən istifadə edə bilər. E. Ponun və A. Konan – Doyleun yuxarıda qeyd olunmuş əsərlərinin personajları latın əlifbasının 26 simvolu çoxluğunda bütün $26! \approx 4,03 \cdot 10^{26}$ sayda yerdəyişmələrin bir-bir yoxlanılması əvəzinə, ingiliscə mətnə müxtəlif hərfərin tezlikləri arasında münasibətlər haqqında əlavə informasiya-dan istifadə edirdilər və bu da ən çox tezlikli hərfələri əvəz edən simvolları aşkar etməyə, açarın digər elementlərinin seçilməsinə imkan yaradaraq mətnin məna kəsb edən hissələrinin alınması məqsədilə edilirdi.

Tam məxfiliyi əsaslandıran ciddi riyazi müddəalar, yeni ixtiyari rəqib tərəfindən şifrlənmiş informasiyanın açılmasını mümkünəşür edən müddəalar açılmanın mümkünəşürlüyünü təmin edən şərtlərin təsvirindən ibarətdir. K. Şennonun [14] əsərində verilən belə tipli şərt ehtimal terminlərilə ifadə olunmuşdur. M və k açarları çoxluğu K -da $\mathbf{P}_M$ və $\mathbf{P}_K$ ehtimal paylanmalarının verildiyi və açarın açıq mətndən asılı olmadığı fərz olunur. $m \rightarrow T_k m = e$ inikası şifrlənmiş mətnlər çoxluğunda $\mathbf{P}_E$ paylanmasını doğurur. Onda tam məxfiliyin zəruri və kafi şərti bütün $m \in M$ və $e \in E$ üçün

$$\mathbf{P}\{m|e\} = \mathbf{P}\{m\} \quad (1)$$

berabərliyinin ödənilməsidir.

472 KRIPTOQRAFIYA

Başqa sözlə, şifrlənmiş e mətni haqqında rəqibə məlum olan bilgi açıq m mətni haqqında heç bir əlavə informasiya ala bilməsi üçün əsas verməməlidir ($\mathbf{P}_M$ -in paylanması ilə müqayisədə).

K. Şennon isbat etmişdir ki, (1) berabərliyinin ödənilməsi üçün $|K| \geq |M|$ münasibətinin ödənilməsi zəruridir, burada $|S|$ – hər hansı S çoxluğunun elementləri sayıdır; əgər bu şərt ödənilərsə, onda (1) şərtini ödəyən şifrləmə sistemini qurmaq mümkündür. Beləliklə, mükəmməl şifrləmə sisteminə mümkün ola bilən açarların sayı potensial mümkün ola bilən məlumatların sayından az olmamalıdır, bu isə faktiki olaraq onu ifadə edir ki, açar məxfi yazını qəbul edən şəxsə əvvəlcədən zəruri olaraq verilməlidir və açarın həcmi planlaşdırılmış məxfi yazının həcmindən kiçik olmamalıdır. Əgər məxfi yazının həcmi çox böyük olarsa, bu şərt praktiki cəhətdən ödənilmir.

Şennon teoreminə əsasən, $A = \{0, 1, \dots, a-1\}$ əlifbasının işarələri ilə yazılmış $m = (m_1, \dots, m_t)$ məlumatının mükəmməl şifrlənməsini, A çoxluğunda təyin olunmuş, müntəzəm qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının realizasiyasını $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ vasitəsilə və $e = (m_1 + \alpha_1 \pmod{a}, \dots, m_t + \alpha_t \pmod{a})$ düsturu ilə həyata keçirmək olar. Məlumatı qəbul edən onu göndərən şəxsin göndərdiyi eyni α realizasiyasına malik olarsa, o, e üzrə m -i asanlıqla bərpa edə bilər, α haqqında bilgisi olmayan rəqib isə bu ardıcılığın bütün mümkün qiymətlərini yoxlayıb, A əlifbasının t sayda hərfələrinin bütün mümkün kombinasiyalarını alacaqdır (o cümlədən, m -i də), lakin onun hərfələrin digər məna kəsb edən bütün kombinasiyaları çoxluğundan m -i seçmək üçün heç bir əsası olmayacaqdır.

Bu misaldan aydın olur ki, K. üçün iki məsələ böyük əhəmiyyətə malikdir: təsadüfi ardıcılıqların qurulması (heç olmasa, «əsl» təsadüfi ardıcılıqlardan çətin fərqləndirilən psevdotəsadüfi ardıcılıqların) və müşahidə olunmuş ardıcılıqların xassələrinin təsadüfi ardıcılıqların xassələrindən fərqlənməsinin aşkar olunmasıdır (belə fərqlənmələrin varlığı (1) şərtinin pozulmasına səbəb olur ki, bu da şifrlənmiş informasiya haqqında bu və ya digər məlumatın alınması imkanını yaradır).

İkinci tip məsələlər ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın tipik məsələləridir; birinci tip məsələlər üçün bunu söyləmək olmaz. Klassik ehtimal nəzəriyyəsi yalnız ehtimal ölçülərinin müxtəlif xassələrini öyrənir, bunlar isə təsadüfi terminlərlə ifadə olunur. Ehtimal nəzəriyyəsi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqlarının realizasiyalarının qurulması üçün konstruktiv üsullar vermir və məsələ də bundadır ki, konkret $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in A^t$

ardıcılığının A -da müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının realizasiyasının olub-olmaması sualı, ehtimal nöqtəyi – nəzərindən, tam korrekt deyildir, belə ki, verilmiş uzunluqlu hər bir ardıcılıq eyni ehtimalla təsadüfi berabər-ehtimalı sınaqlar aparıldıqda, bir başqa ardıcılıq kimi müşahidə oluna bilər.

Birinci tip məsələlər (yalnız kriptografik təbiiqlərlə bağlı deyil, həm də, məs., «tipik» həqiqi ədədin qurulması məsələsi ilə əlaqədar ananan) təsadüfilik anlayışının müxtəlif təriflərinin işlənilməsinə stimullaşdırdı: tezliklə ifadə olunan (R. Mizes [11], A. Çerç [5]) təriflər, mürəkkəb tərif, (A. N. Kolmoqorov [1]), kəmiyyətce tərif (P. Martin – Lef); bu yanaşmaların xülasəsi [4]-də şərh olunmuşdur. Təsadüfiliyin təyin olunmasının araşdırmaları o qədər ciddi olmasa da, təbii bir nəticəyə gətirmiş oldu: determinik metodlarla (məs., EHM üçün proqramın köməyilə) «təsadüfi» ardıcılıq almaq mümkün deyildir.

20-ci əsrin 70-ci illərindən başlayaraq, təsadüfi ardıcılıqlardan praktik olaraq seçilməyən, ciddi surətdə isbatı mümkün olan «psevdotəsadüfi» ardıcılıqların qurulması mümkünliyinə imkan

verən üsulların intensiv axtarışlarına başlanmışdı. Alqoritmlərin mürəkkəbliyi nəzəriyyəsi çərçivəsində riyaziyyatçıların və kriptografların böyük bir qrupu tərəfindən belə yaxınlığın varlığını isbatının psevdotesadüfi bitlər (sıfırlar və vahidlər) vergələrinin varlığına gətirilməsi məsələsinə yanaşma işlənilmişdir; sonuncu birstiqamətli funksiyaların varlığı məsələsinə gətirilir (yəni daha sadə hesablanı bilinen funksiyaların ki, bunların «ters» funksiyalarının hesablanması sadə olmur); bu yanaşma [8]-də şərh olunmuşdur. Bu halda psevdotesadüfi bitlərin vergələri kimi alqoritmlərin ele $\{F_n\}$ ardıcılıqları anlaşılr ki: (a) F_n alqoritm n sayda $\beta_1, \dots, \beta_n$ – ilkin bitləri üzrə $t(n) = n^{O(1)}$ sayda əməllə $X(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{X_1, \dots, X_L\}$ bitlər ardıcılığını qurur, burada $L = L(n) = n^{O(1)}$, (b) əgər $\beta_1, \dots, \beta_n$ və $Y(n) = \{Y_1, \dots, Y_L\}$ asılı olmayan təsadüfi bitlər (0 və 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan) ardıcılığı olarsa və $Q_n : \{0, 1\}^L \rightarrow \{0, 1\}$ statistikası isə

$$|\mathbf{P}\{Q_n(X(\beta_1, \dots, \beta_n)) = 1\} - \mathbf{P}\{Q_n(Y(n)) = 1\}| = \delta(n)$$

münasibətini ödəyərsə, onda $C(Q_n)/\delta(n) > S(n)$ bərabərsizliyi doğrudur, $C(Q_n)$ – ən pis halda Q_n funksiyasının hesablanması üçün zəruri olan əməliyyatlar sayıdır. Qeyd olunan xassələrə malik vergə $S(n)$ – d a y a n ı q l ı v e r g e c (rus. датчик) adlanır.

$S(n)$ – məxfi birstiqamətli f funksiyası üçün, yəni polinomial sayda əməliyyatlarla hesablanan $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{L(n)}$, $L(n) = n^{O(1)}$ funksiyalar ardıcılığı üçün analogi terminlərdən istifadə olunur; bu funksiyalar ardıcılığı üçün aşağıdakı xassə ödənilir: əgər $X^n : \{0, 1\}^n$ -də müntəzəm paylanmaya malik, təsadüfi ikilik vektordursa və $R_n : \{0, 1\}^{L(n)} \rightarrow \{0, 1\}^n$ statistikası ən pis halda, $C(R_n)$ sayda əməliyyatla hesablanan ele statistikadırsa ki,

$$\mathbf{P}\{f_n(R_n(f_n(X^n))) = f_n(X^n)\} = \delta(n)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $C(R_n)/\delta(n) > S(n)$ bərabərsizliyi doğrudur. Hələ ki, heç bir funksiya üçün isbat olunmamışdır ki, o, tələb olunan K . mənasında birstiqamətli.

Dövlət, hərbi, iş və s. tipli informasiyanın mühafizəsinə praktiki tələbatlar xüsusi qurğularla – şifratorla həyata keçirilir, bunlar isə mükəmməl şifrələmənin nəzəri prinsiplərinə yalnız təqribən uyğun olur. Çox saylı belə qurğuların təsirini, tapmaq olar, məs., [10], [13]-də. Müasir şifratorlar iki böyük sinfə ayrılır: axınlı və bloklu.

Axınlı şifratorlar sonlu avtomatlardır (sadə prosessorlarlı və bir neçə yaddaş oyuqları olan determinik qurğulardır), bunlar işarələr ardıcılıqları hasil edir və bu ardıcılıqlar isə yuxarıda qeyd olunan mükəmməl şifrələmənin Şennon sxeminə müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı əvəzinə istifadə olunur. Axınlı şifratorun hasil etdiyi ardıcılıq sonlu avtomatın yaddaş oyuqlarının başlanğıc vəziyyətlərini və prosessorların bu və ya digər iş variantlarının seçimini verən açar parametrlərlə birqiyətməli təyin olunur; bu isə açar parametrlərinin qiymətlərini əvvəlcədən öz aralarında razılaşdırmış, məlumatı göndərən və qəbul edənə eyni bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ardıcılığını hasil etməyə imkan verir.

Bloklu şifratorlar verilmiş uzunluqlu (məs., 64 və ya 128 bit olmaqla) informasiya blokları çoxluğu M -in qarşılıqlı birqiyətməli $M \rightarrow M$ inikaslarını (əvəzləmələrini) həyata keçirir; M çoxlu-

ğunda belə əvəzləmələr çevrilən informasiya bloku və açardan (iterasiya olunan funksiyanın strukturunu təyin edən) asılı olan funksiyaların çoxqat iterasiyaları vasitəsilə realizasiya olunur. Bloklu şifratorla DES (Data Encryption Standard) şifratorunu misal göstərmək olar; bu şifratoru 1977-də ABŞ dövləti, dövlət sirli olmayan iş yazışmaları üçün məcburi standart kimi qəbul etmişdir. Bu şifrator 64 bitdən ibarət informasiya bloklarının

$B^{64} = \{0, 1\}^{64}$ çoxluğunun özünə qarşılıqlı birqiyətməli inikaslarını yerinə yetirir və bu da mürəkkəb funksiyanın (şifrolunan blokun və açarın ayrı-ayrı bitləri üzərində əməliyyatlardan başqa, cədvəl şəklində verilən $S_1, \dots, S_8 : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\}^4$ funksiyaları da daxil olmaqla) 16 iterasiyası ilə yerinə yetirilir. Beləliklə, DES şifratorunun ikilik açar parametrlərinin sayı 56-ya bərabərdir, odur ki, ümumi açarların sayı $2^{56} \approx 7,2 \cdot 10^{16}$ -ya bərabər olur. 20-ci əsrin əvvəllərinin texnikası səviyyəsində ilkin və şifrlənmiş bloklar üzrə bütün açarların bir-bir yoxlanılması ilə açarın tapılması üçün xüsusi hesablayıcı qurğunun qurulması milyon dollara başa gələrdi ki, onun işləmə müddəti bir neçə il olacaqdır. Belə müddət və xərclər adi kommersiya yazışmasının açılması üçün olduqca çoxdur (bax, [10], [13]).

Şifratorların keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi standart məsələsi, bir qayda olaraq, məlum olan açıq və şifrlənmiş mətnlər üzrə açarın tapılmasında çətinliyin qiymətləndirilməsi məsələsinə gətirilir. Şifredici inikasin analitik strukturunu mürəkkəb olduğundan, qeyri – xətti tənliklər sisteminin açarın elementlərinə nəzərən birbaşa həlli, bir qayda olaraq, mümkün deyildir. Digər mümkün variantlardan biri şifredici inikasların ehtimal modellərindən istifadədir ki, bu da açarın elementlərinin tapılmasını çox sayda statistik hipotezlərin yoxlanılması (bir neçə açar parametrlərinin konkret toplularına uyğun hipotezlərin) məsələsinə gətirir; bu halda ilkin və şifrlənmiş mətn cütələrinin realizasiyaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunur. DES-in belə analizinə yanaşmaya misal [9]-də verilmişdir; burada 10^{13} tərtib əməliyyatla ilkin və şifrlənmiş, $2^{43} \approx 9 \cdot 10^{12}$ bloklar cütü üzrə açar tapmaq üsulu təsvir olunmuşdur. Bu qiymətləndirmənin düzgünlüyü 50 günlük kompyuter eksperimenti ilə təsdiq olunmuşdur, lakin real şifrator haqqında belə informasiya miqdarını praktik olaraq almaq mümkün deyildir. Beləliklə, statistik metodlar məxfi açarın təyin olunmasındakı çətinliyi aradan qaldırmağa imkan yaradır.

Klassik şifrələmə sxemləri məxfi açarın əvvəlcədən ötürülməsi ilə bağlıdır, bu da o halda mümkündür ki, abonentlərin sayı çox olmasın.

Çoxsaylı firma və müəssisələr arasında geniş yazışmaların məxfiliyinin qorunması tələbatı, keyfiyyətə yeni şifrələmə prinsiplərinin yaranmasını zəruri etmişdir. 1976-da U. Diffi və M. Hellman tərəfindən [6]-da açıq açarlı şifrələmə sxemi təklif olunmuşdur; bu sxem ele $\{E_e, e \in K\}$ şifredici inikaslar ailəsi və məlumatların sonlu M çoxluğunun özü-özünə şifraçıcı inikaslarının $\{D_d, d \in K\}$ ailəsinin qurulmasından ibarətdir ki, bunlar aşağıdakı xassələrə malikdir: (a) hər bir $e \in K$ üçün ele $d \in K$ vardır ki, E_e və D_d – qarşılıqlı tərs inikaslardır, (b) E_e inikası və şifrlənmiş $c = E_e(m)$ mətni üzrə ilkin təsadüfi $m \in M$ məlumatını təyin etmək məsələsinin, verilmiş müddət ərzində, hesablanma baxımından həlli yoxdur, (c) qarşılıqlı tərs (E_e, D_d) inikaslar cütünün qorunması üçün nisbətən sadə üsullar mövcuddur. Əgər belə ailələr qurulmuşdursa, onda hər bir A abonentə qarşılıqlı tərs inikaslar cütü (E_e, D_d) -ni müəyyən edə bilər, sonra hamıya

E_e inikasını (açıq açarı) xəbər verib, d -nin qiymətini (məxfi açarı) məxfi saxlayar. İxtiyari B abonenti A abonentinə m informasiyasını kənar şəxslərdən məxfi olmaqla ötürmək üçün E_e inikasından istifadə edə bilər və hər kəsin istifadə edə biləcəyi əlaqə kanalı ilə $c = E_e(m)$ şifrələnmiş tekstini ötürə bilər. D_d inikası haqqında bilgisi olan A abonenti m məlumatını c üzrə bərpa edə bilər, D_d inikasını bilməyən və E_e üzrə D_d -ni qurmağa imkanı olmayan şəxslər bu bərpanı edə bilməzlər.

(b) xassəsi faktiki olaraq onu ifadə edir ki, E biristiqamətlidir. U. Diffi və M. Hellman açıq açarlı şifrələmə sistemlərinin qurulması üçün məqbul sayılan həll alqoritmləri hələ qurulmamış, alqoritmik cəhətdən müəkkəb olan məsələləri istifadə etməyi təklif etmişlər. Hal-hazırda natural ədədlərin sadə vuruqlara ayrılışı, tərkib modulu üzrə multiplikativ çıxıqlar qrupunda kvadrat kökün hesablanması, diskret loqarifmləmə (yəni $a^x \equiv b \pmod{n}$) şəklində müqayisənin həlli, burada n olduqca böyük natural ədəddir) tipli çətin həll olunan məsələlərə və sonlu meydanlar üzərində elliptik əyrilərə və s. əsaslanan açıq açarlı bir sıra şifrələmə sistemləri təklif olunmuşdur.

K. Robin, A. Şamir və L. Adlemanın [12]-də təklif etdikləri RSA şifrələmə sisteminin təsviri sadədir. Qarşılıqlı ters inikaslar cütünü qurmaq üçün, A abonenti eyni tərtib (10^{150} -dən az olmamaqla), iki böyük p və q sadə ədədlərini qurmalı, $n = pq$ hasilini və $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ Eyler funksiyasını hesablamalıdır; o, sonra, elə $e \in \{2, 3, \dots, \varphi(n)-1\}$ olan natural e ədədini seçməlidir ki, $\text{ƏBOB}(e, \varphi(n)) = 1$ olsun və $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ müqayisəsinin $1 < d < \varphi_n$ şərtini ödəyən yeganə həlli d -ni tapmaq mümkün olsun. Bu halda açıq açar (n, e) cütü, məxfi açar d qiyməti olacaqdır. $m \in \{2, \dots, n-1\}$ məlumatını şifrələmək üçün $c \equiv m^e \pmod{n}$ məlumatını təyin etmək lazımdır. Eyler teoreminə görə (əgər $\text{ƏBOB}(a, n) = 1$ olarsa, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$) $m \equiv c^d \pmod{n}$ müqayisəsi doğrudur (əgər $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ çoxluğunda müntəzəm paylandırsa, $\text{ƏBOB}(m, n) > 1$ münasibətinin ehtimalı $O(p^{-1} + q^{-1})$ tərtib ədəddir); beləliklə, A abonenti c məlumatının şifrini açar bilər, digər şəxslərin d məxfi açarını tapması üçün ya d -nin n və e üzrə bərpa məsələsi həll olunmalıdır, bu n -in sadə vuruqlara ayrılışı məsələsinə ekvivalentdir və ya (əgər c -dən başqa, hansısa bir tərzdə m məlumatı aydın olmuşdursa) $c^d \equiv m \pmod{n}$ müqayisəsi həll olunmalıdır.

20-ci əsrin son onilliklərində açıq açarlı şifrələmə sistemlərinin üzərində işlər və araşdırmalar ədədlər nəzəriyyəsi və cəbrin alqoritmik və analitik suallarının intensiv inkişafına səbəb olmuşdur. Bu müddət ərzində ədədlərin faktorizasiyası, diskret loqarifmləmə və s. üçün təklif olunmuş bütün alqoritmlər, praktiki olaraq, ehtimali alqoritmlərdir, yəni bu alqoritmlərdə təsadüfi kəmiyyətlər vergələrinə istifadə edir, bu isə naməlum parametrlərə nəzərən alqoritmik həllolunabilən tənliklər sistemini (məs., diskret loqarifmləmə halında ilk sadə ədədlərin diskret loqarifminə nəzərən xətti tənliklər sistemini) qurmağa imkan verən böyük həcmli informasiya almaq məqsədinə xidmət edir. Belə alqoritmlərdə əməliyyatların sayının statistik qiymətləri, bir qayda olaraq, «təsədüfi» ədədi və ya cəbri obyektlərin bu

və ya digər xarakteristikalarının paylanması haqqında evristik fərziyyələrdən istifadə edir.

Kommersiya və maliyyə müəssisələrinin, elektron rabitə vasitələri və verilənlərin qorunub saxlanması üçün tələbatlar kriptografik metodların istifadəsində bir sıra yeni istiqamətlərin işlənilməsinə səbəb olmuşdur. Bu metodlar – kompyuter şəbəkələrində informasiyanın (mühafizəsi, rəqəmi rabitə şəbəkələri, informasiya bloku ilə ötürülən və başqa bir dəyişikliyə yol vermədən, eyni hüquqi dəyərli sənədlərin tamamlanması üsulları), elektron imza, istifadə edən şəxsin identifikasiyası (işdə yazışma prosesində, elektron kredit kartlarından istifadədə böyük əhəmiyyətə malik olan) məxfiliyin bölüşdürülməsi (məs., informasiyanın n nəfərdən ibarət qrup arasında bölüşdürülməsi), lakin bu şərtlə ki, qrupdan heç olmasa k nəfəri birlikdə olmadıqda onlar informasiyanı ala bilmir.

Informasiyanın şifrələməsi üsullarının hamısı praktiki olaraq determinik olub, diskret riyaziyyatın, ədədlər nəzəriyyəsinin, cəbr və kombinatorikanın dərin məzmunlu nəticələri əsasında işlənmişdir. Şifrələmə üsullarının analizi onların müəkkəbliyi ilə əlaqədar olaraq ehtimali metodların köməyilə aparılır, bu metodlar determinik kriptografik alqortmlərin ehtimal modellərinə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987; [2] Саломая А., Криптография с открытым ключом, пер. с англ., М., 1996; [3] Соболева Т. А., Тайнопись в истории России, М., 1994; [4] Успенский В. А., Семенов А. Л., Шень А. Х., «Успехи матем. наук», 1990, т. 45, в. 1, с. 105–62; [5] Church A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1940, v. 46, № 2, p. 130–35; [6] Diffie W., Hellman M. E., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1976, v. 22, p. 644–54; [7] Kobitz N., A Course in Number Theory and Cryptography, 2 ed., N. Y., 1994; [8] Luby M., Pseudorandomness and Cryptographic Applications, Princeton, 1996; [9] Matsui M., Advances in Cryptology – CRYPTO'94, «Lect. Notes in Computer Science», 1994, v. 839, p. 1–11; [10] Menezes A. J., Oorschot P. C. van, Vanstone S. C., Handbook of Applied Cryptography, New York – London – Tokyo, 1997; [11] Mises R., von, «Math. Z.», 1919, Bd 5, S. 52–89; [12] Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. M., «Commun. ACM», 1978, v. 21, p. 120–26; [13] Schneier B., Applied Cryptography: Protocols, Algorithms and Source Code in C, 2 ed., N. Y., 1996; [14] Shannon C., «Bell System Techn. J.», 1949, v. 28, № 4, p. 656–715 (рус. пер.: Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, М., 1963, с. 333–402).

KRITERİ statistik « критерий статистический; statistical test » – bax, *Statistik kriteri*.

A – **KRITERİ** « A – критерий; A – test » – bax, *Regresson eksperimentlərin planlaşdırılması*.

D – **KRITERİ** « D – критерий; D – test » – bax, *Regresssion eksperimentlərin planlaşdırılması*.

E – **KRITERİ** « E – критерий; E – test » – bax, *Regresson eksperimentlərin planlaşdırılması*.

FPE – **KRITERİ** « FPE – критерий; FPE – test » – bax, *Prediktorların ən yaxşı altıçoxluğunun seçilməsi*.

χ^2 – **KRITERİ** « χ^2 – критерий; χ^2 – test / chi-square test » – bax, *χ^2 – kvadrat kriterisi*.

L_c – **KRITERİ** « L_c – критерий; L_c – test » – bax, *Regresson eksperimentlərin planlaşdırılması*.

t – **KRITERİ** « t – критерий; t – test » – bax, *Styudent kriterisi*.

T^2 – **KRITERİ** « T^2 – критерий; T^2 – test » – bax, *Hotelling kriterisi*.

ω^2 – **KRITERİ** « ω^2 – критерий; ω^2 – test » – bax, *Kramer – Mizes kriterisi*.

* Φ_α – KRİTERİ « Φ_α – критерий; Φ_α – test » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

KRİTİK EHTİMAL « критическая вероятность; critical probability » – bax, *Sızma prosesi*.

KRİTİK FUNKSİYA « критическая функция; critical function » – $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ seçimi fəzasında təyin olunmuş, $0 \leq \varphi \leq 1$ şərtini ödəyən ölçülən φ funksiyasıdır. K. f. elə statistik kriteri təyin edir ki, bu kriteriyə əsasən H_0 hipotezi $\varphi(x)$ ehtimalı ilə qəbul olunmur, $1 - \varphi(x)$ ehtimalı ilə qəbul olunur; bu ehtimallar müşahidələrin nəticəsi x -dən asılı olur, $x \in \mathcal{X}$.

KRİTİK HÜDUD, p – qiymət, müşahidə olunan ölçü « критический уровень, p – значение, наблюдаемый размер; critical level / actually attained level / p – value » – müşahidələrin nəticəsi x -i daxilinə alan kritik oblastların verilmiş monoton ailəsindən olan ən kiçik kritik oblastın ölçüsünü təyin edən *statistika*dır. Əgər T statistikasının böyük qiymətlərində $H_0: \theta \in \Theta_0$ hipotezi qəbul olunmursa, onda K. h.

$$\hat{\alpha}(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{P}_\theta \{T \geq T(x)\}$$

münasibətilə təyin olunur. Bu halda $\hat{\alpha}(x) \leq \alpha$ olarsa, H_0 hipotezi α ölçülü kriteri ilə qəbul olunmur; əgər $\hat{\alpha}(x) > \alpha$ olarsa və kriteri randomlanmayan kriteridirsə, onda H_0 qəbul olunur. K. h.

H_0 hipotezinin ($\hat{\alpha}$ -nın kiçik qiymətlərində) müşahidələrin nəticələrindən asılı olaraq qəbul edilib-edilməməsinə təsdiq etmək üçün bir göstəricidir.

KRİTİK İNDEKS « критический индекс; critical exponent » – Gibbs meydanının *korrelyasion funksiyasının* temperatur, kimyəvi potensial və digər termodinamik parametrlərinin funksiyası kimi *kritik nöqtədəki* xüsusiyyəti xarakterizə edən qüvvət üstü göstəricisidir. K. i.-lər iki gözəl xassəyə malikdirlər: birincisi bunlar universaldır, yeni yalnız Gibbs paylanması ümumi xarakteristikalarından – dim. – ölçü və simmetriya qrupundan asılıdırlar, ikincisi, bunlar universal xətti münasibətlər sistemi – bütün K. i.-ləri bunlardan ixtiyari ikisi ilə ifadə edən *skaylinq münasibətləri* sistemi ilə əlaqədirlər. Bu müddəalara haqq qazandıran olduqca ümumi riyazi nəzəriyyə, hələ ki, yaradılmamışdır. K. i.-lər statistik fizika modellərindən dəqiq olaraq az saydası üçün hesablanmışdır: ikiölçülü *İzinq modeli*, sferik modellər, iyerarx Dayson modeli və b. üçün. K. i.-lər üçün bir sıra bərabərsizliklər isbat olunmuşdur.

KRİTİK QİYMƏT « критическое значение; critical value » – elə C sabitidir ki, ilkin H_0 hipotezini T kriterisi üçün statistika ilə qəbul etməyən *randomlanmayan kriterini* $T \geq C$ və ya $T \leq C$ olduğu hallarında təyin edir: $T \geq C$ olduqda K. q. yuxarı kritik qiymət, $T \leq C$ olduqda isə aşağı kritik qiymət adlanır.

Mühümlük ölçüsü α verildiyi halda K. q. (yuxarı) kimi bütün $\mathbf{P} \in H_0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\{T \geq C\} \leq \alpha$ şərtini ödəyən ən kiçik C ədədi götürülür.

Kriterilərin praktiki tətbiqi üçün K. q. cədvəlləri tərtib olunur. Əgər T -nin paylanması $\mathbf{P} \in H_0$ olmasından asılı olmazsa, onda K. q. paylanmanın kvantilləri ilə təyin olunur (bu halda mühümlük

ölçüsü, adətən, α faizlə ifadə olunduğundan bu kontekstdə K. q.-lər faiz nöqtələri də adlandırılır).

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

KRİTİK NÖQTƏ « критическая точка; critical point » – *Gibbs paylanması*ın termodinamik parametrləri fəzasında nöqtədir, bu nöqtədə paylanmanın korrelyasion funksiyaları, termodinamik parametrlərin funksiyaları kimi kəsilməz olmalarına baxmayaraq, qeyri – analitik funksiyalardır. Tipik hallarda korrelyasion funksiyalar K. n.-də üstlü xüsusiyyətlərə malik olur. Bu xüsusiyyətlərə daxil olan qüvvət üstləri *kritik indekslər* adlanır. K. n. Gibbs paylanmasında təsadüfi kəmiyyətlərin güclü asılılığı ilə xarakterizə olunur ki, bu asılılıq korrelyasion funksiyaların sonsuzluqda tədricən azalması ilə özünü büruzə verir. K. n., adətən, 1-ci növ faza keçidləri xəttinin son nöqtəsidir.

KRİTİK OBLAST « критическая область; critical region » – $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ seçimi fəzasının elə ölçülən S altçoğluğudur ki, əgər müşahidələrin nəticəsi S çoxluğundan olarsa ($\mathcal{X} \setminus S$ -dən olarsa), bu oblast ilkin hipotezi qəbul etməyən (qəbul edən) randomlanmayan kriterini təyin edir; bu kriteriyə kritik funksiya – S -in indikatoru uyğun olur (bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*).

KRİTİK ŞAXƏLƏNƏN PROSES « критический ветвящийся процесс; critical branching process » – kritikaltı və kritiküstü *şaxələnen proses* arasında cərəyan edən, bir sıra əlamətləri ilə, o cümlədən, bu əlamətlərdən əsası – prosesdəki hissəciklərin orta sayının artımının olması zaman keçdikcə qeyri – eksponensial olması və bu orta qiymətin sıfırdan olduqca uzaq olması kimi əlamətləri ilə seçiyələnən prosesdir.

$Z(t)$, – $t = 0$ anında sıfır yaşlı bir hissəciklə başlayan şaxələnen prosesdə t anındakı hissəciklərin sayı, N – bir hissəciyin bilavasitə gələcək nəslinin təsadüfi sayı olsun. Əgər $\mathbf{M}N = 1$, $\mathbf{D}N > 0$ olarsa, belə proses kritik proses olacaqdır. Qalton – Watson kritik prosesi və kəsilməz zamanlı Markov şaxələnen prosesi üçün $\mathbf{D}N < \infty$ olduqda aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbf{P}\{Z(t) > 0\} = 2(\mathbf{D}N)^{-1}, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{Z(t)}{\mathbf{M}|Z(t)|Z(t) > 0} < x | Z(t) < \infty\right\} = 1 - e^{-x}, \quad x > 0, \quad (2)$$

(1), (2) şəklində bərabərliklər, bir qayda olaraq, şaxələnen proseslərin digər modelləri üçün də doğrudur. Lakin $t \rightarrow \infty$ olduqda prosesin gedişatında başqa bir xüsusiyyət yaranı bilər. Məs., $G(t) = \mathbf{P}\{t \leq t\}$ – Bellman – Harris prosesində hissəciyin yaşama müddəti τ -nın paylanma funksiyası və

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2(1 - G(t)) = C \in (0, \infty)$$

olarsa, onda (bax, [1]).

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M}\{s^{Z(t)} | Z(t) > 0\} = \\ = 1 - \frac{\mathbf{M}\tau + \sqrt{(\mathbf{M}\tau)^2 + 4C(1-s)}}{\mathbf{M}\tau + \sqrt{(\mathbf{M}\tau)^2 + 4C}} \equiv \rho(s), \quad 0 \leq s < 1 \end{aligned}$$

və ixtiyari $x \in (0, \infty)$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{Z(t)}{\mathbf{M}[Z(t)|Z(t) > 0]} < x | Z(t) > 0 \right\} = \\ = \rho(1) + (1 - \rho(1))(1 - e^{-x}).$$

N_{ij} , k tip hissəcikli şaxələnen prosesin i tip bir hissəciyinin törətdiyi bilavasitə j tip nəslinin sayı olsun, $i, j = 1, 2, \dots, k$;

$\Xi = \| \mathbf{M} N_{ij} \|_{i,j=1}^k$. Əgər Ξ matrisinin perronlannın kökü 1-ə

bərabər olarsa və prosesdə final siniflər olmazsa, belə proses kritik proses olacaqdır. Bir neçə tip hissəcikləri kritik aperiodik şaxələnen proseslər üçün (1), (2) münasibətlərinin analoqları doğrudur. Məs., k tip hissəcikli Qalton – Vatson prosesi üçün

əgər $\mathbf{D} \left(\sum_{i,j} N_{ij} \right)^2 < \infty$ olarsa, onda

$$\left(\frac{Z_1(t)}{\mathbf{M}[Z_1(t)|Z_1(t) + \dots + Z_k(t) > 0]}, \dots, \frac{Z_k(t)}{\mathbf{M}[Z_k(t)|Z_1(t) + \dots + Z_k(t) > 0]} \right)$$

vektorunun paylanması $Z_1(t) + \dots + Z_k(t) > 0$ şərtində $t \rightarrow \infty$ olduqda $(W, W, \dots, W)$ təsadüfi vektorunun paylanmasına yığılır,

burada $\mathbf{P}\{W \leq x\} = 1 - e^{-Bx}$, $x > 0$, B kəmiyyəti isə $\mathbf{M} N_{ij}$

və $\mathbf{M} N_{ij} N_{ik}$ momentləri ilə təyin olunur. Bax, Şaxələnen proses yaşından asılı, Ayrılmayan şaxələnen proses.

Əd.: [1] Ватутин В. А., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 3, с. 440–52; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983.

KRİTİKALTI ŞAXƏLƏNƏN PROSES « докритический ветвящийся процесс; subcritical branching process » – bir hissəciyin bilavasitə nəslərinin orta sayı vahiddən kiçik olan şaxələnen prosesdir. $Z(t)$ – bir tip hissəcikləri şaxələnen prosesdə t anında hissəciklərin sayı ($Z(0) = 1$), N – bir hissəciyin bilavasitə nəslərinin təsadüfi sayı olsun. Əgər $m = \mathbf{M} N < 1$ olarsa, belə proses kritikalti proses olacaqdır. Qalton – Watson K. ş. p. üçün ixtiyari $s \in [0, 1]$ qiymətlərində

$$F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{Z(t) = k | Z(t) > 0\} s^k$$

limiti vardır, $F(1-) = 1$, $F(s)$ doğuran funksiyası

$$1 - F(\mathbf{M} s^N) = m(1 - F(s)) \quad (1)$$

tənliyini ödəyir və $F'(1-) < \infty$ yalnız və yalnız o halda ödənilir ki,

$$\mathbf{M} N \ln_+ N < \infty \quad (2)$$

olsun. Qalton – Watson prosesləri üçün

476 KRİTİKALTI

$$\mathbf{M} Z(t) = m^t \quad (3)$$

və eger (2) ödənilirsə, onda

$$\mathbf{P}\{Z(t) > 0\} \sim c m^t, \quad c > 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

(1), (3), (4) şəklində münasibətlər şaxələnen proseslərin başqa modelləri üçün də ödənilir, lakin $t \rightarrow \infty$ olduqda proseslərin gedışatında digər xüsusiyyət də mümkün ola bilər. Məs., $G(t) = \mathbf{P}\{t \leq t\}$ – Bellman – Harris prosesində hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyası və bütün $A \in [0, \infty)$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(t)}{1 - G(t - A)} = 1$$

olarsa, onda (bax, [3])

$$\mathbf{M} Z(t) \sim \frac{1}{1 - m} (1 - G(t)), \quad t \rightarrow \infty \quad (5)$$

və

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z(t) = 1 | Z(t) > 0\} = 1 \quad (6)$$

$n > 1$ tip hissəcikləri ayrılmayan şaxələnen proses $\rho < 1$ olduqda kritikalti prosesdir, burada ρ , $\Xi = \| \mathbf{M} N_{ij} \|$ matrisinin maksimal məxsusi ədədidir (p e r r o n l a r k ö k ü), N_{ij} , i tip bir hissəciyin bilavasitə törətdiyi j tip nəslərin orta sayıdır. Ayrılmayan K. ş. p.-lər üçün (1), (3) – (6) müddəalannın analoqları doğrudur (bax, [1], [2], [4]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Атрея К. В., Ней П. Е., Branching processes, B. – Hdlb. – N. Y., 1972; [3] Чистяков В. П., «Теория вероятностей и ее примен.», 1964, т. 9, в. 4, с. 710–18; [4] Ватутин В. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 503–14.

KRİTİKÜSTÜ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « надкритический ветвящийся процесс; supercritical branching process » – bir hissəciyin nəslərinin orta sayı m vahiddən böyük olan şaxələnen prosesdir. K. ş. p.-in seçiyyəvi xüsusiyyətləri cırlaşmama ehtimalının müsbət olması, yeni prosesin sonsuz davam etməsi və ($m < \infty$ olduqda) $t \rightarrow \infty$ olduqda hissəciklərin sayı $Z(t)$ -nin asimptotik eksponensial artmasıdır (bax, [1], [2]): əgər $1 < m < \infty$ olarsa, onda ele c_i ardıcılığı və mənfı olmayan W təsadüfi kəmiyyəti vardır, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_i / c_{i+1} = m$, $\mathbf{M} W = 1$ və

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) c_t = W \right\} = 1. \quad (*)$$

Bir neçə tip hissəcikləri ayrılmayan şaxələnen proses $\rho > 1$ olduqda K. ş. p.-dir, burada ρ , $\Xi = \| m_{ij} \|$ matrisinin maksimal məxsusi ədədidir (p e r r o n l a r k ö k ü), m_{ij} , i tip bir hissəciyin bilavasitə törətdiyi j tip nəslərin orta sayıdır. $1 < \rho < \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} (Z_1(t), \dots, Z_n(t)) c_t = (v_1, \dots, v_n) W \right\} = 1$$

olur, burada $\lim_{t \rightarrow \infty} c_i / c_{i+1} = \rho$, $Z_i(t)$, i tip bir hissəciklərin sayı, $(v_1, \dots, v_n)$, Ξ matrisinin perron kökü ρ -ya müvafiq müsbət

sol məxsusi vektorudur, W – mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir və $MW = 1$.

Hissəciklərinin sayının artması keyfiyyətə başqa olan K . ş. p.-in modifikasiyanı vardır. Məs., $m = \infty$ olduqda (bax, [3], [4]) (*) əvəzinə

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} L(Z(t))c_t = W\} = 1$$

münasibəti yerinə yetir, burada $L(x)$ $x \rightarrow \infty$ olduqda asta düşür, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_t/c_{t+1} \in (0, \infty)$. Qeyri – rəqulyar şaxələnən proseslərdə (bax, [1]) $Z(t)$ -nin trayektoriyaları sonlu zaman müddətinə sanki yəqin ∞ -a gedirlər.

K . ş. p., adətən, hissəciklərin sayı çox olmadıqda və onlar arasında qarşılıqlı təsir artım prosesinə çox da təsir etmədiyi halda hissəciklərin intensiv artım proseslərində başlanğıc mərhələnin ehtimal modeli kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, B. – Hdllb – N. Y., 1972; [3] Cohen H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1977, Bd 38, H. 1, S. 73–81; [4] Grey D. R., «J. Appl. Probab.», 1977, v. 14, № 4, p. 702–16.

KROSS – PERİODOQRAM « кросс – пернодограмм; cross – periodogram » – bax. *Periodoqram*.

KROSS – SPEKTRAL SIXLIQ « кросс – спектральная плотность; cross – spectral density » – bax, *Spektral sixlıq(ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

KUBO – ANDERSON PROSESİ « Кубо – Андерсона процесс; Kubo – Anderson process » – bax. *Nöqtevi təsadüfi proses qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətləri*.

KULLBAK YAYINMASI « Кульбака уклонение; Kullback information » – bax. *Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentin*.

KULLBAK – LEYBLER DAĞILANLIĞI « Кульбака – Лейблера расходиность; Kullback – Leibler divergence » – bax, *İnformasiya ölçü*.

KULLBAK – LEYBLER İNFORMASİON KƏMİY-YƏTİ « Кульбака – Лейблера информационное количество; Kullback – Leibler information », nisbi entropiya, informasiya say. – α nəticələr fəzası Ω -da Q ehtimal paylanmasına nəzərən mütləq kesilməz ehtimal paylanması P və Q arasında fərqlənmənin *informasiya ölçüsüdür* və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I(P, Q) = \int_{\Omega} \left[\frac{dP}{dQ}(\omega) \ln \frac{dP}{dQ}(\omega) \right] Q(d\omega).$$

İlk dəfə [1]-də baxılmışdır. K . – L. i. k. həmişə mənfi deyildir (lakin sonsuz ola bilər) və bir qayda olaraq, $I(P, Q) \neq I(Q, P)$. $I(P, Q) = 0$, yalnız və yalnız, $P = Q$ olduqda doğrudur. $I(P, Q) \geq \rho(P, Q)$, burada $\rho(P, Q)$, – P və Q arasında *Hellinger məsafəsidir*.

Əgər $P = P_1 \times P_2$, $Q = Q_1 \times Q_2$ olarsa (bu asılı olmayan müşahidələrə uyğun paylanmalar halına uyğundur), onda $I(P, Q) = I(P_1, Q_1) + I(P_2, Q_2)$ olur. Əgər $\theta \in \mathbb{R}$, $P = P_{\theta}$, $Q = P_{\theta+\Delta}$ və $\{P_{\theta}\}$ parametrik ailə olarsa, onda geniş şərtlərlə

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I(P_{\theta}, P_{\theta+\Delta})}{\Delta^2} = \frac{I(\theta)}{2}$$

münasibəti doğrudur, burada $I(\theta)$ – Fişer informasiyasıdır.

K . – L. i. k.-nin digər xassələri [4], [5]-də verilmişdir.

K . – L. i. k. riyazi statistikada böyük yayınmalar ehtimallarının şərhində, xüsusilə də, empirik paylanma funksiyalarının böyük yayınmalarının şərhində mühüm rol oynayır və ardıcıl analiz, eksperimentin planlaşdırılması məsələlərində də istifadə olunur.

Əd.: [1] Kullback S., Leibler R. A., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, № 1, p. 79–86; [2] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ. М., 1967; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26; [5] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

KULLBAK – LEYBLER İNFORMASİON MƏSA-FƏSİ « Кульбака – Лейблера информационное расстояние; Kullback – Leibler information » – bax. *Böyük yayınmalar empirik paylanma funksiyası üçün*.

KULLBAK – LEYBLER – SANOV İNFORMASİON YAYINMASI « Кульбака – Лейблера – Санова информационное уклонение; Kullback – Leibler – Sanov information deviation » – bax, *Nisbi entropiya*.

KUMULYANT « кумулянт; cumulant » – bax, *Semi – invariant*.

KUMULYANTA « кумулянта; cumulant » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımları*.

KUMULYATİV SPEKTR « кумулятивный спектр; cumulative spectrum » – bax, *Spektral semi – invariant*.

KUMULYATİV SPEKTRAL FUNKSİYA « кумулятивная спектральная функция; cumulative spectral function » – bax, *Spektral semi – invariant*.

KUMULYATİV SPEKTRAL SIXLIQ « кумулятивная спектральная плотность; cumulative spectral density » – bax, *Spektral semi – invariant*.

KUNİTA – VATANABE BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Куниты – Ватанабэ неравенства; Kunita – Watanabe inequality » – *kvadratik inteqrallanan X , Y martinqalları və ölçülən təsadüfi H , K funksiyaları üçün ehtibərsizliklərdir ki, bunlarda hökm olunur ki,*

$$\begin{aligned} & \int_0^T |H| |K| |d\langle X, Y \rangle| \leq \\ & \leq \left(\int_0^T H^2 d\langle X, X \rangle \right)^{1/2} \left(\int_0^T K^2 d\langle Y, Y \rangle \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T |H| |K| |d[X, Y]| \leq \\ & \leq \left(\int_0^T H^2 d[X, X] \right)^{1/2} \left(\int_0^T K^2 d[Y, Y] \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

sanki yaqın ödənilir, burada T – dayanma anı, $\langle X, X \rangle$, $\langle Y, Y \rangle$ ele artan öngörül proseslərdir ki, $X^2 - \langle X, X \rangle$, $Y^2 - \langle Y, Y \rangle$ martinqallardır,

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} (\langle X+Y, X+Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle),$$

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2,$$

$$[X, Y]_t = \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)(\Delta Y_s).$$

(2) bərabərsizliyi lokal martinqallar üçün də doğrudur. (1) şəklində K – V b. ilk dəfə bütün inteqrallar qarşısında riyazi gözlemə işarəsi ilə [1]-də isbat olunmuşdur. (1), (2) bərabərsizlikləri [2]-də təyin olunmuşdur. K – V b. opsional martinqallar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Kunita H., Watanabe S., «Nagoya Math. J.» 1967, v. 30, p. 209–45; [2] Meyer P. A., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400.

KÜKRƏNTİLƏR METODU « возмущенный метод; perturbation method » eksperimentin planlaşdırılmasında – ətraf mühitin qorunması, peyk meteorologiyasının və s. müəkkəb məsələlərinin həlli metodudur və Q. İ. Marçuk (bax, [1], [2]) tərəfindən işlənmişdir. φ funksiyası $L\varphi = q$ tənliyinin həlli olsun, burada L – xətti operator, q – verilmiş funksiyadır. $L' = L + \delta L$ – kükrəmiş operator, φ' isə $L'\varphi' = q$ tənliyinin həlli olsun. Əgər L^* operatoru L operatoruna Laqranj üzrə qoşma operatorudursa, onda

$$J_p = (\varphi, p) = (q, \varphi_p^*),$$

burada φ_p^* – $L^*\varphi_p^* = p$ tənliyinin həllidir. J_p funksionalının kükrəntisi $\delta J_p = J_p - (\varphi', p)$ üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\delta J_p = -(\delta L \varphi', \varphi_p^*) = -(\delta L \varphi, \varphi_p^*) - (\delta L \delta \varphi, \varphi_p^*).$$

Əgər $\delta L L^{-1}$ operatorunun norması kiçik olarsa, onda

$$\delta J_p \approx -(\delta L \varphi, \varphi_p^*).$$

Eksperimentdə N sayda (φ, p_j) , $j=1, \dots, N$ funksionalla-

nın xəta ilə ölçüldüyü fərz olunur və $\delta L = \sum_{i=1}^m \theta_i A_i$ təyin

olunmalıdır, burada θ_i – naməlum parametrlər, A_i – apriori verilmiş operatorlardır. Onda

$$(\delta L \varphi, \varphi_{p_j}^*) \approx \delta J_{p_j} \quad j=1, \dots, N.$$

$N \geq m$ olsun. θ_j parametrlərini ən kiçik kvadratlar metodu vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Eksperimentin planlaşdırılması məsələsi θ_j parametrlərinin qiymətlərinin təyin olunmasında xətanın minimal olmasını təmin edən funksiyanın seçilməsindən ibarətdir. Funksional fəzalarda eksperimentin planlaşdırılması metodlarından fərqli olaraq (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin riyazi fizikanın ters məsələləri üçün*). K. m. sisteməlik xətanı düz tənliyin və qoşma kükrəntisiz tənliklərin həlli yolu ilə nəzərə alır.

478 KÜKRƏNTİLƏR

Əd.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Марчук Г. И., Ермаков С. М., в кн.: Математические методы планирования эксперимента, Новосибир., 1981, с. 3–18; [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1987.

KÜTLƏVİ XİDMƏT NƏZƏRİYYƏSİ « массового обслуживания теория; theory of queues » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

KVADRATİK BALANSLAŞDIRILMIŞ MODEL « квадратично сбалансированная модель; quadratically-balanced model » – $R(y, F(\theta), I)$ xətti regressiya

eksperimentidir, $F = f(x_1), \dots, f(x_N)$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$, bu eks-

perimentin $F(F^T F)^{-1} F^T$ matrisinin bütün diaqonal elementləri

üst-üstə düşür, bu isə $f^T(x_i) \hat{\theta}$, $i = 1, \dots, N$ kəmiyyətinin dispersiyalarının bərabər olmasına ekvivalentdir, burada

$\hat{\theta}$ – θ -nın ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik

qiymətidir. Əgər $\xi = \{x_1, \dots, x_N\}$ planı D – optimal plan

olarsa, onda uyğun regressiya eksperiment K. b. m.-dir. Ölçmə

xətalının paylanması normal olmadığı halda $\theta = 0$ hipotezinin

yoxlanılması üçün F – kriterinin dayanıqlılığı ondan ibarətdir ki,

böyük həcmli seçimlərdə K. b. m. üçün F – kriterinin mühümlük

ölçüsünün ayrılışında birinci hədd sonlu dördüncü tərtib moment-

ləri olan bütün paylanmalar üçün asimmetriya və eksess əmsalın-

dan asılı olmur.

KVADRATİK XARAKTERİSTİKA (sı) martinqalın

« квадратическая характеристика мартингала; quadratic characteristic of a martingale » – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika, *Semi-*

martinqal.

KVADRATİK XƏTA « квадратичная ошибка; mean squared error / quadratic error » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

KVADRATİK İNTEQRALLANAN MARTİNGAL

« квадратично интегрируемый мартингал; square integrable martingale » – hər bir $t \geq 0$ üçün $M \zeta_t^2 < \infty$

şərtini ödəyən $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$ martinqaldır.

$$\sup_{t \geq 0} M \zeta_t^2 < \infty$$

olduğu halda

$$M \sup_{t \geq 0} \zeta_t^2 < \infty$$

bərabərsizliyi doğrudur və bu halda ζ müntəzəm kvad-

ratik inteqrallanan martinqaldır. Əgər hər bir

$n \geq 1$ üçün və hər hansı azalmayan Markov anlarının

$$\lim_n T_n = \infty \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yaqın})$$

şərtini ödəyən $(T_n)_{n \geq 1}$ ardıcılığı üçün $\zeta^{T_n} = (\zeta_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ müntə-

zəm K. i. m. olarsa, ζ prosesi lokal kvadratik in-

teqrallanan martinqal adlanır. Hər bir lokal K. i. m. lokal

martinqaldır və onun $\zeta = \zeta^c + \zeta^d$ şəklində ayrılışı vardır, burada

ζ^c – lokal K. i. m.-dir və onun trayektoriyaları kəsilməzdir,

$\zeta_0^c = 0$, ζ^d – xalis kəsilen lokal K. i. m.-dir.

Hər bir lokal K. i. m. olan ζ üçün $\zeta_0 = 0$ olduğu halda, $\langle \zeta \rangle = \langle \zeta \rangle_{t \geq 0}$ kvadratik xarakteristikası ilə öngörülən artan təsadüfi proses kimi təyin olunur ki, $\zeta^2 - \langle \zeta \rangle$ – lokal martin-qaldır.

Əd.: [1] Kunita H., Watanabe S., «Nagoya Math. J.», 1967, № 30, p. 209–45; [2] Мейер П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

KVADRATİK İTKİ FUNKSİYASI « квадратическая функция потерь; quadratic loss function » – bax, *itki funksiyası*.

***KVADRATİK ORTA XƏTƏ / STANDART XƏTƏ « среднеквадратическая ошибка / погрешность; mean square error »** – hər hansı θ parametrinin *meylsiz statistik qiyməti* $\tilde{\theta}$ üçün $\delta^2 = M[\tilde{\theta} - \theta]^2$ düsturu ilə təyin

olunan kəmiyyətə deyilir. $M\tilde{\theta} = \theta$ şərtinin ödənilməsi ölçmə zamanı sistemə xətanın olmadığını göstərir. $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X)$, – θ parametrinin X -in müşahidəsi üzrə qurulmuş meylsiz statistik qiyməti olsun, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$; yeni $M\tilde{\theta} = \theta$. Fərz olunur ki, $\tilde{\theta}$ -nin dispersiyası $D\tilde{\theta} = M(\tilde{\theta} - M\tilde{\theta})^2$ sonludur, $D\tilde{\theta} < \infty$. $\sqrt{D\tilde{\theta}}$ kəmiyyəti K. o. x.-dir, θ parametrini yalnız təqribən qiymətləndirir.

KVADRATİK ORTA REQRESSİYA « средняя квадратическая регрессия; mean square regression » – x üzrə Y -in *reqressiyası* modelidir: x -in funksiyası olan $m(x)$. Y -in $m(x)$ -dən kvadratik orta yayınması – $M(Y - m(x))^2$ riyazi gözləməsini minimallaşdırır.

KVADRATİK ORTA YAYINMA « среднеквадратическое отклонение; root mean square deviation, RMSD » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

KVADRATİK ORTA YAYINMA(s_1) seçimin « среднее квадратическое отклонение выборки; sample standart deviation, standart error » – bax, *Səpələnmə(s_1) seçimin*.

KVADRATİK RİSK « квадратичный риск; quadratic risk » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin, Xətti interpolasiya(s_1) reqressiya funksiyasının*.

KVADRATİK VARIASIYA(s_1) martinqalın « квадратическая вариация мартингала; quadratic variation of a martingale » – bax, *Martinqal; kvadratik variasiya*.

***KVADRATİK / STANDART YAYINMA « квадратичное отклонение, квадратичное уклонение, стандартное отклонение; quadratic / standart deviation / mean squared error »** – $x_1, \dots, x_n$ kəmiyyətlərinin verilmiş a kəmiyyətindən kvadratik orta yayınmasıdır, yeni

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{n}}.$$

K. y. ən kiçik qiymətini $a = \bar{x}$ olduqda alır, burada $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$ kəmiyyətlərinin ədədi ortasıdır, yeni $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. Bu halda K. y. $x_1, \dots, x_n$ kəmiyyətləri sisteminin səpələnmə ölçüsünü ifadə edir. Bundan başqa,

$$\sqrt{\frac{p_1(x_1 - a)^2 + \dots + p_n(x_n - a)^2}{p_1 + \dots + p_n}}$$

düsturu ilə ifadə olunan və daha ümumi çəkili kvadratik yayınma adlandırılan yayınma anlayışından da istifadə olunur: $p_1, \dots, p_n$ ədədləri bu halda çəkili adlanır və bunlar $x_1, \dots, x_n$ kəmiyyətlərinə uyğun olaraq götürülür. Çəkili K. y. ən kiçik qiymətini a -nın

$$(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)/(p_1 + \dots + p_n)$$

çəkili ortaya bərabər olduğu halda alır.

Ehtimal nəzəriyyəsində ξ təsadüfi kəmiyyətinin K. y. σ_ξ (ξ -nin öz riyazi gözləməsindən K. y.) dispersiyanın kvadratik kökünü, yeni $\sqrt{D\xi}$ kəmiyyətinə deyilir. K. y. statistik qiymətlərin keyfiyyət ölçüsü kimi istifadə olunur və bu halda o, kvadratik xəta adlanır.

KVADRATUR DÜSTURLAR təsadüfi düyünlərli « квадратурные формулы со случайными узлами; quadrature formulae with random nodes » – təsadüfi kvadratur

$$x[f] = \sum_{i=1}^N A_i(x_1, \dots, x_N) f(x_i)$$

cəminin

$$I[f] = \int f(x) \mu(dx)$$

integralına bu integralın statistik qiyməti kimi qarşı qoyulmasıdır.

Burada μ , – X çoxluğunda verilmiş ehtimal ölçüsü, A_i , $i=1, \dots, N$, – X^N -də verilmiş funksiyalar (düsturun əmsalları), $x_1, \dots, x_N$ (funksiyaların düyün nöqtələri), – X^N -də paylanması $\mathcal{U}$ ilə verilən təsadüfi kəmiyyətlərdir. A_i funksiyaları və $\mathcal{U}$ paylanması düsturun keyfiyyət kriterisinin minimumu şərtindən seçilir, bu, adətən, birinci mütəlak moment və ya $R[f] = I[f] - x[f]$ qalığının ikinci momenti olur. Əgər f funksiyası verilmiş tərtib xüsusi törəmələri olan funksiyalar sinfi F -dən olarsa, X – hiperkub, μ – Lebeq ölçüsü olarsa və x kvadratur (kubatur) cəmlərin hər hansı $\mathcal{K}$ çoxluğundan təsadüfi seçilərsə, onda $\mathcal{K}$ və $\mathcal{U}$ -i ilə seçmək mümkün olar ki, $M[R[f]] \leq F$ -də $|R[f]|$ -də $\sqrt{N}$ dəfə tez azalsın. $n = N$ olduqda $L^2(\mu)$ -də ortonormalanmış funksiyaların qeyd olunmuş toplusu $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ üçün $R[\varphi_i] = 0$ şərtləri $\Delta = \det \|\varphi_i(x_j)\|_{i,j=1}^n$ determinantı sıfırdan fərqli olduqda interpolasiya – kvadratur düsturu birqiymətli

təyin edilir. $\mathcal{B}(d(x_1, \dots, x_N)) = \Delta^2 \mu(dx_1) \dots \mu(dx_N) / n!$ kimi seçilsə, x -in meylsizliyi təmin olunur:

$$Mx[f] = \int \varphi(x)f(x)\mu(dx).$$

Δ^2 vuruq kimi daxil olan sonsuz sayda g sıxlıq vardır və bunlar interpolasyon – kvadratur cəmin meylsizliyini təmin edir. Əgər W ele (x, g) cütlerinin çoxluğu olarsa ki, x meylsiz və $Q(x, g)$ – verilmiş keyfiyyət kriterisi olsun, onda statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində olduğu kimi W -da dominatlıq anlayışı və bu kriteriyə və interallanan funksiyaların F sinfinə nəzərən məqbuluq anlayışı təyin olunur. $F \subset L^2(\mu)$ üçün Monte – Karlo metodunun ən sadə proseduru $Dx[f]$ -ə nəzərən laylı seçim metodu ilə dominatlanır, yəni bu prosedur məqbul olmur. Dispersiyaya nəzərən məqbul (x, g) cütləri, bir qayda olaraq, asılı düyünlərə malik olur. Məs., (x, g) cütündə düyünlərdən biri təsadüfi seçilib, digərləri ondan funksional asılı olarsa (bir sərbəstdüyünlü K. d.; bax, [2]), bu cüt məqbul olur. Təsadüfi düyünləri K. d. Monte – Karlo metodunun ən sadə prosedurunun ümumiləşməsidir. Klassik və nəzəri – ehtimali ədədi metodlar birlikdə sonuncuların effektivliyini artırmağa imkan yaradır və əksər hallarda, μ ölçüsü müəkkəb xüsusiyyətli olduqda çoxdəyişənli funksiyaların integralının hesablanması yeganə vasitə olur.

Əd.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Соболев И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973.

KVADRATUR SPEKTR « квадратурный спектр; quadrature spectrum » – bax, *Kospekt* və *kvadratur spektr*.

KVADRATUR SPEKTRAL FUNKSIYA « квадратная спектральная функция; quadrature spectral function » – bax, *Kospekt* və *kvadratur spektr*.

KVADRATUR SPEKTRAL SIXLIQ « квадратная спектральная плотность; quadrature spectral density » – bax, *Kospekt* və *kvadratur spektr*.

KVANT BRAUN HƏRƏKƏTİ « квантовое брауновское движение; quantum Brownian motion » – bax, *Kvant stoxastik hesabı*.

KVANT DEKODLA(N)MASI « квантовое декодирование; quantum decoding » – bax, *Kvant rabite kanalı*.

KVANT DİNAMİK SEMİ – QRUP « квантовая динамическая полугруппа; quantum dynamical semi-group » – *Markov inikaslarının* ele semi – qrupudur ki, açıq kvant sisteminin çevrilməyən evolyusiyasını ümumi halda bu sistemin fazasında təyin edir. $\mathcal{B}$ vahidi olan ixtiyari W^* – cəbr olsun (bax, *Cəbri, müşahidələnlərin*). Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində *Markov dinamik semi – qrupu* $\mathcal{B}$ -də normal *Markov inikaslarının* ele $\{\Phi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ailəsinə deyilir ki,

$$1) \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}, \quad t, s \in \mathbb{R}_+$$

2) $\Phi_t(X) \rightarrow X$ münasibəti $t \rightarrow 0$ olduqda bütün $X \in \mathcal{B}$ üçün $\mathcal{B}$ -nin zəif $*$ – topologiyası mənasında ödənilsin. Əgər

$\mathcal{B}$ hər hansı «faza» fəzası E -də funksiyaların kommutativ cəbdirisə, onda bu anlayış qiymətləri E -dən olan klassik *Markov prosesinə* müvafiq keçid operatorlarının semi – qrupuna gətirilir.

Əgər $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hər hansı kvant mexaniki sisteminin Hilbert fəzası $\mathcal{H}$ -da bütün məhdud operatorların cəbri olarsa, onda K. d. s. anlaşıdır.

Əgər $\{\Phi_t\}$ K. d. s. norma üzrə kəsilməz olarsa, onda adi qaydada təyin olunan infinitezimal L operatoru məhduddur və aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$L(X) = i[H, X] + \sum_{j=1}^{\infty} (V_j^* X V_j - (V_j^* V_j X + X V_j^* V_j)/2),$$

burada $[H, X] = HX - XH$ və $H, \sum_{j=1}^{\infty} V_j^* V_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

(bax, [2]).

Digər problem *Markov semi – qrupunun avtomorfizmlər qrupuna* qədər genişləndirilməsinin öyrənilməsidir, yəni açıq kvant sisteminin çevrilməyən *Markov dinamikasının «böyük» sistemin* çevrilən dinamikasının proyeksiyası şəklində ifadə olunmasıdır. Klassik kommutativ halda bu problem keçid inikaslarının verilmiş semi – qrupu üzrə *Markov prosesinin* qurulmasına gətirilir və bu problemin həlli Kolmoqorov – Daniyel konstruksiyası ilə verilir. Ümumi halda $\mathcal{B}$ -də ixtiyari $\{\Phi_t\}$ *Markov semi – qrupu* üçün unitar genişlənmə vardır, yəni $\mathcal{B}$ j_0 cəbrinin hər hansı $\mathcal{A}$

C^* – cəbrinə daxil edilməsi, $\mathcal{A}$ cəbrinin $*$ – avtomorfizmlərinin (hərəkətlərinin) $\{\alpha_t\}$ qrupu və $\mathcal{A}$ -dan $\mathcal{A}_0 = j_0(\mathcal{B})$ -yə

ele M_0 riyazi gözləməsi vardır ki, $\Phi_t = j_0^{-1} M_0 \alpha_t j_0$ münasibəti ödənilir (bax, *Kvant təsadüfi prosesi*). Xüsusi və fiziki izahlı kəsilməzlik (normallıq), *Markovluq*, stasionarlıq kimi xassələrə malik genişlənmələrin qurulması maraqlı doğuran problemlərdən sayılır.

Əd.: [1] Davies E., Quantum theory of open systems, L., 1976; [2] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 48, p. 119–30; [3] Холёво А. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 83, М., 1991, с. 3–132.

KVANT EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « квантовая теория вероятностей; quantum probability theory » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*.

KVANT EVKLİD MEYDANI « квантовое евклидово поле; quantum Eucliden field » – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi*.

KVANT KODLA(N)MASI « квантовое кодирование; quantum coding » – bax, *Kvant rabite kanalı*.

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ aksiomatik «квантовая теория поля аксиоматическая, axiomatic quantum field theory» – bax, *Aksiomatik kvant ehtimal nəzəriyyəsi*.

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ Evklid «квантовая теория поля евклидова; Euclidean quantum field theory» – bax, *Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi*.

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ konstruktiv «квантовая теория поля конструктивная, constructive quantum field theory» – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi*.

KVANT NƏZƏRİYYƏSİ, HİPOTEZLƏRİN YOXLANILMASI VƏ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNİN «квантовая теория проверки гипотез и оценивания; quantum hypotheses testing and estimation theory» –

ölçmə dəqiqliyi və qərarların qəbul edilməsi üçün bu ölçmələrə əsaslanan prosedurların keyfiyyəti üzərinə qoyulacaq prinsipial kvant – mexaniki məhdudiyyətləri öyrənən statistik nəzəriyyədir. Statistik qeyri – müəyyənliyin təsviri üçün H. y. və q. k. n. kvant mexanikasının riyazi aparatını – Hilbert fəzasında operatorlar nəzəriyyəsini istifadə edir. Beləliklə, H. y. və q. k. n. adi statistik həllər nəzəriyyəsinin «qeyri – kommutativ» analoqudur və bu nəzəriyyə qeyri – müəyyənliyin klassik ehtimal modelinə əsaslanaraq, daha ümumi sxemə onunla birlikdə daxil oluna bilər (bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi, Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi*). H. y. və q. k. n. optik əlaqə nəzəriyyəsinin məsələlərinin həllindən 1970-ci illərdə yaranmışdır. lakin onun nəticələri universal xarakter daşıyaraq, fiziki ölçmələrin ekstremal dəqiqliyinə aid ixtiyari problemlərə tətbiq oluna bilər.

Statistik həllərin klassik nəzəriyyəsində olduğu kimi, burada da naməlum θ parametrinin qiymətləri çoxluğu, u (ölçmə nəticələrinin) həllərinin (qərarlarının) çoxluğu U və θ parametrinin verilmiş qiymətində u həllinin keyfiyyətini təyin edən yayınma funksiyası $W_0(u)$ -nün verildiyi fərz olunur. Prinsipial fərq statistik qeyri – müəyyənliyin verilməsi qaydasından ibarətdir: belə fərz olunur ki, θ -nın hər bir qiymətinə baxılan kvantmexaniki sistemin H Hilbert fəzasında bu sistemin statistik vəziyyətini müəyyən edən sıxlıq operatoru S_0 uyğundur. Həddəci qayda nəticələri U çoxluğundan olan kvant ölçməsi ilə təyin olunur. Kvant sisteminin fiziki məsələlərində informasiya daşıyıcısı yaranır, məs., parametrləri θ «faydalı siqnalından» asılı koherent elektromagnit şüalanması. Kvant ölçməsi hər hansı qəbulədiyi – şüalanma cihazı ilə həyata keçirilir. Bu halda ölçmə keyfiyyəti və onun optimizasiyası üzərinə prinsipial kvant məhdudiyyətlərinin axtarılmasına və onun optimizasiyasına baxılır.

Θ və U – hipotezlərin yoxlanılmasına uyğun sonlu çoxluqlar olsun. Nəticələr çoxluğu U ilə kvant ölçməsi – vahidin H -da ayrılığı ilə, yeni

$$1) M_u \geq 0, \quad 2) \sum_{u \in U} M_u = I \quad (1)$$

şərtlərini ödəyən operatorlar ailəsi $M = \{M_u, u \in U\}$ ilə təsvir olunur, burda I vahidi operatorudur. S_0 vəziyyətində u nəticəsinin ehtimalının $\mu_0^M(u) = \text{tr} S_0 M_u$ olduğu fərz olunur. M ölçməsinə uyğun orta yayınma

$$R_0\{M\} = \sum_{u \in U} W_0(u) \mu_0^M(u)$$

düsturu ilə təyin olunur. Beləliklə, M ölçməsinin keyfiyyətini təyin edən və vahidin bütün mümkün ola bilən (1) ayrılışlarının qabarıq çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$ -da verilən affin funksionalları ailəsi – $\{R_0\{M\}, \theta \in \Theta\}$ yaranır. Bu işə adi, statistik həllər nəzəriyyəsi ilə analogiyaya görə məqbul, minimaks, Beyes ölçmələri və s. üçün bir sıra təriflər verməyə imkan verir. H. y. və q. k. n.-nin seçiyəvi cəhəti ondan ibarətdir ki, həlledici qaydalar çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$ olduqca daha mürekkəb struktura malik olur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının Beyes məsələsi. $\pi = \{\pi_\theta\}$, – Θ -da aprior ehtimal paylanması,

$\hat{W}(u) = \sum_{\theta \in \Theta} \pi_\theta S_\theta W_\theta(u)$ – operator-aposterior yayınma funksiyası olsun.

$$R_\pi\{M\} = \sum_{\theta \in \Theta} \pi_\theta R_\theta\{M\} = \text{tr} \sum_{u \in U} \hat{W}(u) M_u$$

– Beyes yayınması – $\mathfrak{M}(U)$ qabarıq çoxluğunda affin funksionaldır. $R_\pi\{M\}$ -i minimallaşdıran Beyes ölçməsi həmişə mövcuddur və $\mathfrak{M}(U)$ -nün kənar nöqtələri arasında həmişə tapıla bilər. Aşağıdakı kriteri doğrudur: M^0 ölçməsi, yalnız və yalnız, o halda Beyes ölçməsidir ki,

$$\Lambda^0 \geq \hat{W}(u), \quad u \in U; \quad (\Lambda^0 - \hat{W}(u)) M_u = 0, \quad u \in U \quad (2)$$

münasibətlərini ödəyən nüvə operatoru Λ^0 mövcud olsun. Bu zaman

$$\min_M R_\pi\{M\} = \max\{\text{tr} \Lambda : \Lambda \leq \hat{W}(u), u \in U\}$$

ikilik münasibəti ödənilir və Λ^0 ikilik məsələsinin həlli (yeganə) olur.

Beyes məsələsi bir sıra maraqlı hallarda aşkar həll olunur: iki hipotezin yoxlanılması məsələsində, bütün $W(u) - W(u')$ operatorları kommutasiya olunduqları halda, çevirmələrin hər hansı qrupuna nəzərən simmetrik kovariant məsələlərdə (bax, [3] – [5]).

Prinsipial çətinlik kvant ölçmələri çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$ -nün kənar nöqtələrinin aşkar təsvirinin olmaması ilə izah olunur. Klassik halda bütün həlledici qaydalar çoxluğunun kənar nöqtələri determinik qaydalar və yalnız bu qaydalardır. Determinik qaydaların formal qeyri – kommutativ analoqu $E = \{E_u, u \in U\}$ vahidinin ortoqonal ayrılışlarını təsvir edən sadə ölçmələrdir və bu ayrılışlardakı E_u operatorları H -da qarşılıqlı ortoqonal altfəzalara proyektorlardır. Hər bir sadə ölçmə $\mathfrak{M}(U)$ çoxluğunun kənar nöqtəsidir. Qeyd etmək lazımdır ki, kvant mexanikasının standart düsturla ifadə edilməsində, onun yarandığı zəmindən yalnız belə ölçmələrə baxılmışdır (bax, [1]). Lakin $M = \{M_u\}$ ailəsinin vahidinin hər bir ayrılığı üçün H_0 Hilbert fəzası, H_0 -da sıxlıq operatoru S_0 və $E = \{E_u\}$ vahidinin Hilbert fəzalarının $H \otimes H_0$ tenzor hasilində ehtilaf ortoqonal ayrılığı vardır ki, H -da ixtiyari operator sıxlığı S üçün

$$\text{tr} S M_u = \text{tr} (S \otimes S_0) E_u, \quad u \in U$$

münasibəti ödənilir.

Fiziki anlamda bu H. y. və q. k. n. mənasında hər bir ölçmənin ilkin sistemin hər hansı genişlənməsi üzərində sadə ölçməyə statistik ekvivalent olması və bu genişlənməmiş sistemin S_0 vəziyyətindəki asılı olmayan kvant sistemini daxilinə almasıdır. Klassik nöqtəyi – nəzərdən paradoksal fakt belə «kvant randomizasiyasının» ixtiyari sadə ölçmə ilə müqayisədə həlledici qaydanı vermesindədir, bu qayda ilkin sistemin vəziyyəti haqqında, ixtiyari sadə ölçmə ilə müqayisədə, daha çox informasiya daşıyır. Bu işə onun nəticəsində alınır ki, eger U ikidən artıq elementdən ibarət

olarsa, $\mathfrak{M}(U)$ çoxluğunun kənar nöqtələri arasında vahidin qeyri – ortoqonal ayrılışları həmişə vardır (bax, [5]). Beləliklə, H. y. və q. k. n. kvant ölçmə nəzəriyyəsi anlayışının prinsipial genişləndirilməsi üçün mühüm arqument verir (digər tərəfdən, belə genişlənməyə kvant mexanikasına emeliyyat yanaşması adlandırılan yanaşma da səbəb olur; bax, [6]).

Qiymətləndirilmə məsələlərində Θ və U kəsilməz parametrik çoxluqlardır. U – ölçülən fəza, $\mathcal{B}(U)$, – U -nün uyğun σ – cəbri olsun; nəticələri U -dan olan ölçmə vahidin U -da ayrılışına deyilir; yeni H -da ələ $M = \{M(B), B \in \mathcal{B}(U)\}$ operatorlar ailəsinə deyilir ki, bu operatorlar aşağıdakı xassərə malikdirlər: 1) $M(B) \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(U)$; 2) U fəzasının ixtiyari $\{B_j\}$ bölgüsü üçün $\sum_j M(B_j) = I$ bərabərliyi ödənilir, burada sıra güclü operator topologiyasında yığılır.

S_0 vəziyyətində M ölçməsinin ehtimal paylanması

$$\mu_0^M(B), \text{tr} S_0 M(B), B \in \mathcal{B}(U)$$

münasibətilə təyin olunur.

Hipotezlerin yoxlanılmasının kvant nəzəriyyəsinin nəticələrinin əksər hissəsi, o cümlədən, Beyes məsələləri, Θ və U -nün olduqca ixtiyari çoxluqlar olduğu halı üçün cəmlərin münasib surətdə müəyyən inteqrallarla əvəz olunması yolu ilə ümumiləşdirilir (bax, [4]). Kovariant məsələlər üçün və Qauss (kvazi-gətirilən) vəziyyətləri ailələri üçün aşkar həllər alınmışdır (bax, [3]–[5], [7]).

Daha sonra $\Theta = U = \mathbb{R}^n$ halına baxılır. $X_1, \dots, X_n$ uyuşan kvant müşahidələnləri, yeni H -da verilən öz-özünə kommutasiya olunan operatorlar toplusu olsun (bax, *Müşahidələnlər*). Belə topluya birqıymətli olaraq $E = \{E(B),$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ birgə spektral ölçüsü qarşı qoyulur, bu ölçü $X_1, \dots, X_n$ müşahidələnlərinin dəqiq birgə ölçməsinə təsvir

edir. Hər bir M ölçməsi $\mathbb{R}^n$ -dən olan nəticələrlə ilkin sistemin hər hansı $H \otimes H_0$ genişlənməsində n sayda uyuşan müşahidələnlərin dəqiq birgə ölçməsinə statistik ekvivalentdir.

$\{S_\theta\}$ vəziyyətlər ailəsinin verdiyi fərz olunur: $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n] \in \mathbb{R}^n$. Nəticələri $\mathbb{R}^n$ -dən olan M ölçməsi üçün

$$\int \dots \int x_j \mu_0^M(dx_1 \dots dx_n) \equiv \theta_j, \quad j = 1, \dots, n$$

şərti ödənilərsə, M ölçməsi meylsiz ölçmə adlanır. Meylsiz ölçmənin kovariasiya matrisi

$$D_\theta \{M\} = \left[\int \dots \int (x_j - \theta_j)(x_k - \theta_k) \mu_0^M(dx_1 \dots dx_n) \right]_{j,k=1}^n$$

üçün müəyyən requlyarlıq şərtləri daxilində Rao – Kramer bərabərsizliyinin qeyri – kommutativ analoqu –

$$D_\theta \{M\} \geq J_\theta^{-1} \quad (3)$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $J_\theta = [\text{tr} S_\theta (L_\theta^j \circ L_\theta^k)_{j,k=1}^n]$, L_θ^j isə $S_\theta \circ L_\theta^j = \partial S_\theta / \partial \theta_j$, $j = 1, \dots, n$ tənliklərini ödəyən.

simmetrik loqarifmik törəmələr operatorlarıdır. Burada $X \circ Y = (XY + YX)/2$ – operatorların Jordan hasilidir. Bundan başqa, digər

$$D_\theta \{M\} \geq \tilde{J}_\theta^{-1} \quad (4)$$

bərabərsizliyi də ödənilir, burada $\tilde{J}_\theta^{-1} = [\text{tr} S_\theta \tilde{L}_\theta^j (\tilde{L}_\theta^k)^*]_{j,k=1}^n$, $\tilde{L}_\theta^j$ isə $S_\theta \circ \tilde{L}_\theta^j = \partial S_\theta / \partial \theta_j$, $j = 1, \dots, n$ tənliklərini ödəyən sağ loqarifmik törəmələr operatorlarıdır. (3) və (4) bərabərsizlikləri $D_\theta \{M\}$ üçün bir-birindən olduqca fərqli, müqayisə olunmayan sərhədlər verir (bax, [3]). Daha mürəkkəb ümumi sərhəd məlumdur və (3), həm də (4) bu sərhəddən alınır (bax, [5]).

H. y. və q. k. n.-nin ən başa çatdırılmış tövsiyələr forması Qauss vəziyyətləri üçün alınır, bu halda kvant ölçmələrinin keyfiyyətinin yalnız çatla bilinən sərhədlərini vermək, həm də optimal həlledici qaydanı tam təsvir etmək olur. Fərz olunur ki, Q_j, P_j , $j = 1, \dots, s$ kvant müşahidələnlərinin toplusu sərbəstlik dərəcəsi sayı s olan sistem üçün kanonik kommutativ münasibətlərin requlyar təsvirini emələ gətirir:

$$[Q_j, P_k] = i \delta_{jk} I,$$

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0, \quad j, k = 1, \dots, s \quad (5)$$

və fərz olunur ki,

$$R(z) = \sum_{j=1}^s (x_j P_j + y_j Q_j),$$

burada $z = [x_1, y_1, \dots, x_s, y_s]$. (5) münasibətləri

$$[R(z), R(z')] = -i \Delta(z, z') I$$

münasibətlərinə ekvivalentdirlər, burada

$$\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^s (x_j y'_j - x'_j y_j),$$

cırlaşmayan çəpsimmetrik formadır. Sıxlıq operatoru S olan vəziyyətin kvant xarakteristik funksiyası

$$\text{tr} S \exp [i R(z)] = \exp [im(z) - \alpha(z, z)/2] \quad (6)$$

şəklində olarsa, belə vəziyyətə Qauss vəziyyəti deyilir, burada $m(z)$ – xətti, $\alpha[z, z]$, – z -dən müsbət kvadratik formadır. (6) düsturunun sağ tərəfinin kvant xarakteristik funksiyası olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari z_j üçün

$$[\alpha(z_j, z_k)] \geq i[\Delta(z_j, z_k)]/2$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir. $m(z)$ forması orta qiymət, $\alpha(z, z)$ S vəziyyətində müşahidələnlər ailəsinin korrelyasion funksiyası mənasında anlaşılır.

Nəticələri $\mathbb{R}^n$ -dən olan M ölçməsinin operator xarakteristik funksiyası

$$\begin{aligned} \int \dots \int \exp \left(i \sum_{j=1}^n (t_j x_j) \right) M(dx_1 \dots dx_n) = \\ = \exp \left[i \sum_{j=1}^n t_j R(z_j) - \sum_{j,k=1}^n x_{jk} t_j t_k / 2 \right] \end{aligned}$$

şəklində olarsa, M kanonik ölçmə adlanır, burada $[x_{jk}]$ – həqiqi matrisdir. Bu münasibətin ölçmə təyin etməsi üçün

$$[x_{jk}] \geq i[\Delta(x_j, z_k)]/2$$

berəbersizliyin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Kanonik ölçmə $H \otimes H_0 : X_j = R(z_j) \otimes I_0 + I \otimes R_j^0$, $j = 1, \dots, n$ genişlənmiş fəzasında müşahidələnlər toplusunun dəqiq birgə ölçməsinə ekvivalentdir, burada R_j^0 – H_0 fəzasında, S_0 – Qauss operator sıxlığına malik ekr kanonik müşahidələnlərdir ki, $[R_j^0, R_k^0] = i\Delta(z_j, z_k)I_0$; $\text{tr} S_0 R_j^0 = 0$, $\text{tr} S_0 (R_j^0 \circ R_k^0) = x_{jk}$.

$\{S_\theta\}$ qeyd olunmuş korrelyasiya funksiyasına və $m(z) = \theta_1 m_1(z) + \dots + \theta_n m_n(z)$ şəklində orta qiymətə malik Qauss vəziyyətləri ailəsi olsun; $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]$ parametri üçün $\text{tr} G D_\theta \{M\}$ çəkili kvadratik orta xətasının minimumu mənasında ən yaxşı meylsiz M ölçməsi axtarılır, burada G qeyd olunmuş müsbət çəki matrisidir. H. y. və q. k. n.-nin ümumi teoreminde hökm olunur ki, $\theta \in \mathbb{R}^n$ üzrə müntəzəm meylsiz ölçmə mövcuddur və o, kanonik ölçmələr sinfindədir (bax, [5]). Ən yaxşı ölçmə parametrləri – z_j , x_{jk} ümumi halda G -dən asılı hər hansı xətti tənliyi ödəyir.

H. y. və q. k. n. fiziki ölçmələrin dəqiqliyinin fundamental limitlərinin hesablanması üçün ümumi metodlar verir və bu metodlar mövcud prosedurların keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi üçün etalon hesab oluna bilər. Problemin digər cəhəti haqqında – optimal ölçmə prosedurunun qurulması məsələsinə gəldikdə, H. y. və q. k. n. tətbiqi nöqtəyi – nəzərdən son qərar verə bilmir, belə ki, ölçmə cihazının statistikasının vahidin ayrılığı terminləri (və ya müşahidələnlər terminləri) təsviri üzrə sintezinin universal qaydası yoxdur. Bu problem, mahiyyəti etibarilə H. y. və q. k. n.-nin çərçivəsi xaricindədir və kvant nəzəriyyəsində məşhur «ölçmə nəzəriyyəsi»-nə aiddir. Bununla yanaşı H. y. və q. k. n.-nin tövsiyələri bir sıra hallarda optimal ölçmə probleminin bu fiziki tərəfini də əhatə edir (bax, [3], [5], [7]).

Əd.: [1] Нейман Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Наймарк М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 3, с. 277–318; [3] Хелст-ром К., Квантовая теория проверки гипотез и оценивания, пер. с англ., М., 1979; [4] Холев А. С., Исследования по общей теории статистических решений, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 124; [5] Холев А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [6] Davies E., Quantum theory of open systems, L. – [a. o.], 1976; [7] Stratonovich R. L., «Stochastics», 1973, v. 1, p. 87–126.

KVANT ÖLÇMƏSİ « КВАНТОВОЕ ИЗМЕРЕНИЕ; quantum measurement » – bax, *Müşahidələnlər, Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

KVANT RABİTƏ KANALI « КВАНТОВЫЙ КАНАЛ СВЯЗИ; quantum communication channel » – məlumatlar daşıyıcısı kimi kvantmexaniki obyekt istifadə edən informasiya ötürmə (çevirmə) sistemidir. Məs., ixtiyari elektromaqnit rabitə kanalı, ciddi demək olar ki, K. r. k.-dir və bu kanala klassik kanal kimi yalnız bu və ya digər approksimasiya çərçivəsində baxılır. 1940-cı illərdə D. Qaborun (D. Gabor) işlərində holografiyanın fiziki əsasları qoyulmaqla yanaşı, informasiyanı ötürmə imkanlarına kvantmexaniki məhdudiyyətlərin qoyulması məsələsi ilk dəfə

qaldırılmışdır. Bu prinsipial məhdudiyyətlərin riyazi tədqiqi K. r. k. nəzəriyyəsinin mövzusuudur.

Signallar fəzası Θ -da, ehtimal paylanmaları ilə təsvir olunan klassik məlumatdan fərqli olaraq, kvant məlumatı Hilbert fəzası H -da verilən kvantmexaniki obyektə uyğun operator sıxlığı (vəziyyət) ilə ifadə olunur. Hər bir rabitə kanalına girişdəki məlumatlar çoxluğunun çıxışdakı məlumatlar çoxluğuna affın inikası (qabarıq kombinasiyalı dəyişməz saxlayan) kimi baxmaq olar. Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində rabitə kanalını təsvir edən inikas – çıxışda müşahidələnlər cəbrinin rabitə kanalının girişində müşahidələnlər cəbrinə – keçid inikasına qoşma inikas kimi yaranır (bax, *Markov inikası*). Məs., kvant kodlamaası giriş signallar fəzası Θ -da ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\mathcal{P}(\Theta)$ -nın H -da bütün sıxlıq operatorlarının çoxluğu $\mathcal{S}(H)$ çoxluğuna affın inikası C -dir. Kodlamayı vermək üçün $\theta \in \Theta$ nöqtələrində toplanmış paylanmaların obrazları S_θ -ları göstərmək kifayətdir. Əslində K. r. k., H və H' – kanalın giriş və çıxışını təsvir edən Hilbert fəzaları olduqda, $\mathcal{S}(H)$ -dan $\mathcal{S}(H')$ çoxluğuna affın inikasıdır. Kvant dekodlaması $\mathcal{S}(H')$ -dən $\mathcal{P}(U)$ -ya D affın inikasıdır, burada U çıxışdakı signallar fəzasıdır. Dekodlamayı H' -də vahidin ayrılığı ilə vermək məqsəduyğundur, yəni

$$(DS)(du) = \text{tr} SM(du)$$

düsturu üzrə, qiymətləri U -dan olan $M(du)$ ölçməsi ilə.

Məlumatların ötürülməsi, klassik informasiya nəzəriyyəsində olduğu kimi

$$\mathcal{P}(\Theta) \xrightarrow{C} \mathcal{S}(H) \xrightarrow{L} \mathcal{S}(H') \xrightarrow{D} \mathcal{P}(U) \quad (*)$$

sxemi ilə təsvir olunur və bu halda çıxışdakı signalın girişdəki signala nəzərən şərti ehtimalı

$$P_{C,D}(du|\theta) = \text{tr} L(S_\theta)M(du)$$

düsturu ilə verilir.

Mühüm məsələ verilən kvant kanalı L üzrə məlumat ötürmə üçün optimal qaydanın tapılmasıdır. Hər hansı keyfiyyət funksionalı $Q\{P_{C,D}(du|\theta)\}$ daxil olunur və bu funksionalın C və D üzrə ekstremumunu tapmaq tələb olunur. C qeyd olunub və yalnız D -nin dəyişdiyi hal üçün məsələ daha çox öyrənilmişdir (bax, *Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*).

$$J(P, C, D) = \int_{\Theta} \int_U P(d\theta) P_{C,D}(du|\theta) \ln \frac{P_{C,D}(du|\theta)}{\int_{\Theta} P_{C,D}(du|\theta') P(d\theta')}$$

informasiya miqdarı, $C_1 = \sup_{P, C, D} J(P, C, D)$, L^n – kanalın n -ci qüvvət üstü olsun:

$$L^n : \mathcal{S}(H) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H') \otimes \dots \otimes \mathcal{S}(H').$$

L^n kanalı üçün (*)-ya analoji diaqram baxmaq və uyğun C_n kəmiyyətini təyin etmək olar. L kanalının orta ötürücülük

qabiliyyəti $C = \sup_n (C_n/n)$ kimi təyin olunur. Klassik nöqteyi – nəzərdən, K. r. k.-nin qeyri – adi xassəsi, bu halda «yaddaşın» olmasıdır, odur ki, ümumi halda $C_n > nC_1$ və $C > C_1$ olur.

«Ötürücülük» qabiliyyəti üçün aşkar ifadə kvant kodlaşdırma teoremi ilə verilir: $H(S) = -\text{tr} S \ln S$ kvant vəziyyəti S -in entropiyası olduqda,

$$C = \sup_P \left[H \left(\int S_\theta P(d\theta) \right) - \int H(S_\theta) P(d\theta) \right].$$

Məs., signalın orta gücünə məhdudiyyətə malik kvant Gauss kanalının üçün

$$C = \ln \left(1 + \frac{E}{N+1} \right) + \left[(E+N) \ln \left(1 + \frac{1}{E+N} \right) - N \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right],$$

burada E – signalın gücü, N – Gauss K. r. k.-nin kvantlarının orta sayıdır.

Əd.: [1] Хелстром К., Квантовая теория проверки гипотез и оценивания, пер. с англ., М., 1979; [2] Холево А. С., Квантовые теоремы кодирования, «Успехи матем. наук», 1998, т. 53.

KVANT STOXAŞTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ
« квантовое стохастическое дифференциальное уравнение; quantum stochastic differential equation » – bax, *Kvant stoxastik hesabi*.

KVANT STOXAŞTİK HESABI « квантовое стохастическое исчисление; quantum stochastic calculus » – stoxastik differensial hesabının operator ümumiləşməsidir, K. s. h. kvant Braun hərəkəti prosesi $\{A_t, t \geq 0\}$ prosesinə əsaslanır, yeni ele $\{A_t\}$ prosesinə ki, bu proses hər hansı Hilbert fəzasında operatorlar ailəsidir və aşağıdakı kommutasiya münasibətlərini ödəyir:

$$[A_t, A_s] = 0, [A_t^+, A_s^+] = 0, [A_t, A_s^+] = \min(t, s), \quad (1)$$

burada $[A, B] = AB - BA$, – A və B operatorlarının kommutatoru, A^+ , – A operatoruna qoşma operatorudur. Bundan başqa, ele vəziyyət verilir ki, bu vəziyyətə nəzərən, $\{A_t\}$ kvant Gauss paylanmasına malik olur (məs., $\{A_t + A_t^+\}$ və $\{i^{-1}(A_t - A_t^+)\}$ ailələri bir-birilə kommutasiya münasibətlərini ödəmirlər, lakin paylanma üzrə adi Viner prosesinə ekvivalentdirlər). Kvant stoxastik differensial

$$dX = dA^+ F + G dA + H dt \quad (2)$$

tənliklərinin nezeriyyəsi işlənilməmişdir, burada $\{X_t, F_t, G_t, H_t\}$, – $\{A_t\}$ prosesinin doğurduğu W^* – cəbrlər axını ilə uzlaşdırılmış operatorlar ailəsidir. Hasillər üçün İto düsturunun aşağıdakı ümumiləşməsi doğrudur: əgər $\{M_t\}$, $\{N_t\}$, – (2) tipli tənliklərlə təyin olunan proseslər olarsa, onda

$$dMN = dM \cdot N + M \cdot dN + dM \cdot dN,$$

burada dA^+, dA, dt bazis differensiallarının hasilı sıfıra bərabər hesab olunur, lakin $dA_t dA_t^+ = dt$ halı istisna olunur (kvant Braun hərəkəti halında minimal dispersiya ilə). K. s. h. sxemində, təbii olaraq, Puasson prosesi və onun kommutativ ümumiləşmələri üzrə integrallanma daxil olunur.

(1) kommutasiya münasibətləri bozon sistemləri üçün səciyyəvidir; əgər $[A, B]$ kommutatoru antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$ ilə əvəz olunarsa, onda fermion kvant Braun hərəkəti alınır və bu hərəkət üçün uyğun stoxastik hesab vardır. K. s. h. kvant dinamik semi – qrupların genişlənməsində (bax, *Kvant təsadüfi prosesi*), martinqallar nezeriyyəsində və stoxastik integral nezeriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Parthasarathy K., An introduction to quantum stochastic calculus, Basel, 1992; [2] Meyer P.-A., Quantum probability for probabilists, B., 1993; [3] Квантовые случайные процессы и открытые системы, пер. с англ., М., 1988.

KVANT TƏSADÜFİ PROSESİ « квантовый случайный процесс; quantum stochastic process » – qeyri – kommutativ ehtimal nezeriyyəsinin vasitələri ilə açıq (kvant) sistemin stoxastik evolyusiyasını təsvir etmək üçün riyazi modeldir. K. t. p.-nin nəzəri tərifində qarşıya çıxan çətinlik onunla izah olunur ki, sonluölçülülük paylanmaların birqiymətli qeyri – kommutativ analoqu yoxdur. Müxtəlif zaman anlarındakı müşahidələnlər, ola bilər ki, kommutasiya münasibətlərini ödəməsinlər və beləliklə də, bu halda bunların birgə paylanmaları da olmaya bilər. Buna görə də, K. t. p.-nin təsadüfi proses anlayışının müxtəlif qeyri – kommutativ ümumiləşmələrinə uyğun müxtəlif tərifləri mümkündür. Klassik tərifə ən yaxın olan, [1]-də təklif olunmuş tərifdir; bu tərifdə K. t. p. $(\mathcal{A}, (j_t)_{t \in \mathbb{R}}, \varphi)$ üçlüyü ilə verilir və

burada $\mathcal{A}$ – vahidi olan $*$ – cəbridir (adətən, C^* – və ya W^* – cəbri), j_t (her bir $t \in \mathbb{R}$ üçün) vahidi olan, qeyd olunmuş $\mathcal{B}$ $*$ – cəbrinin $\mathcal{A}$ $*$ – cəbrinə $*$ – homomorfizmidir (cəbr eməlləri və involusiyaları dəyişməz saxlayan), φ isə $\mathcal{A}$ -da vəziyyətdir (bax, *Cəbri, müşahidələnlərin*).

Klassik halda $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ uyğun olaraq elementar nəticələr fəzasında və fəza fəzası E -də ölçülən məhdud funksiyaların kommutativ cəbrləridir, j_t qiymətləri E -dən olan Ω -da verilən təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi ilə təyin olunur, φ , – Ω -da ehtimal ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir. Təbii rəqulyarlıq şərtlərində K. t. p.

$$W_{t_1, \dots, t_n}(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n) = \varphi(j_{t_1}(X_1)^* \dots j_{t_n}(X_n)^* j_{t_n}(Y_n) \dots j_{t_1}(Y_1)) \quad (*)$$

korrelyasion nüvələri üzrə ekvivalentlik dəqiqliyi ilə birqiymətli bərpə olunur, burada $n = 1, 2, \dots$; $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{B}$ (Kolmoqorov teoreminin qeyri – kommutativ analoqu).

K. t. p. vasitəsilə «keçmiş», «indiki», «gelecek» $*$ – σ – cəbrləri ailələri aşağıdakı münasibətlərlə əlaqəlidir:

$$\mathcal{A}_1 = \bigvee_{s \leq t} j_s(\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}_t = j_t(\mathcal{B}),$$

$$\mathcal{A}_t = \bigvee_{s \leq t} j_1(\mathcal{B}); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Əgər φ ilə uzlaşan, $\mathcal{A}$ -dan olan $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$ şərti riyazi gözləmələrinin $\mathcal{A}_1$ -də ele ailəsi olarsa ki, $t \in \mathbb{R}$ üçün M_t

$(\omega_{ij}) \in \mathcal{A}_i$ münasibətini ödəsin, onda K. t. p. Markov K. t. p. adlanır. Markov K. t. p. üçün

$$\Phi_{t,s}(X) = j_t^{-1} \mathbf{M}_{t|j_s}(X), \quad X \in \mathcal{B}, \quad t < s$$

münasibəti Markov inikaslannın zənciri ailəsini təyin edir və bu ailə stasionar halda, $\mathcal{B}$ cəbrində kvant sisteminin «redüslənmiş dinamikasını» verən kvant dinamik səmi – qrupuna çevrilir. Ən çox öyrənilmiş Markov K. t. p.-lərindən Boze və Fermi sistemləri üçün stoxastik differensial tənliklərin həllərinin doğruduğu, uyğun kommutasiya münasibətlərinə tabe olan prosesləri qeyd etmək olar. Belə tənliklər üçün İto stoxastik hesabının qeyri – kommutativ analoqu işlənmişdir (bax, *Kvant stoxastik hesabı*).

(*) korrelyasion nüvələrinin bütün çoxluğunun prinsipə, $\mathcal{B}$ * – cəbri ilə təsvir olunan «böyük» sistemin dinamikası ilə təyin olunmasına baxmayaraq, fiziki mənanı bilavasitə yalnız xronoloji nizamlanmış nüvələr ($t_1 < \dots < t_n$ münasibəti ödənilməklə) daşıyır, bu nüvələr isə uyğun zaman anlarında ardıcıl ölçmə statistikasını təsvir edirlər. [3]-də K. t. p. üçün verilmiş ilk tərif xronoloji nizamlanmış nüvələrə əsaslanmışdır. Əgər yuxarıda verilən tərif, məs., stoxastik differensial tənliklərlə təyin olunan konkret sistemlərin tədqiqi üçün yaxşı uyğunlaşmışdırsa, onda bu tərif çevirmə xassəsi ödənilməyən, erqodiklik və xaos olan kvant sistemlərində bir sıra ümumi problemləri aradan qaldırmağı imkan verir.

Əd.: [1] Квантовые случайные процессы и открытые системы, М., 1988; [2] Quantum probability and applications II, «Lect. Notes Math.», 1985, v. 1136; [3] Lindblad C., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, p. 281–94; [4] Холёво А. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 83, М., 1991, с. 3–132.

KVANT VƏZİYYƏTİ « квантовое состояние; quantum state » – bax, *Sıxıq operatoru*.

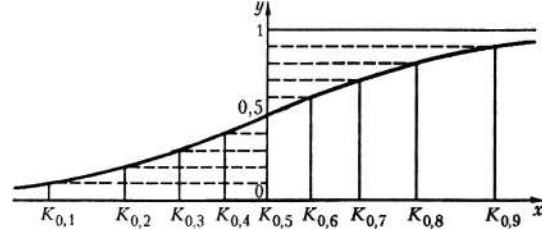
KVANTİL « квантиль; quantile » – *tesadüfi kəmiyyətin* və uyğun ehtimal *paylanması*nın ədədi xarakteristikasıdır. $F(x)$, $-\xi = \xi(\alpha)$ *tesadüfi kəmiyyətinin* paylanma funksiyası olsun. $0 < \alpha < 1$ olduqda, $F(K_\alpha) \leq \alpha$, $F(K_\alpha + 0) \geq \alpha$ münasibətlərlə təyin olunan ixtiyari K_α ədədinə ξ *tesadüfi kəmiyyətinin* α *tərtib kvantili* deyilir. İxtiyari tərtib K həmişə vardır və ümumiyyətlə, birqimətli təyin olunmur. Əgər $F(x)$ kəsilməz ciddi monoton funksiya olarsa, onda ixtiyari tərtib yeganə K vardır.

$\alpha = 1/2$ olduqda K *tesadüfi kəmiyyətin medianı* ilə üst-üstə düşür. $m = 1, \dots, n-1$ qiymətləri üçün $\alpha = m/n$ tərtib K ($K_{m/n}$) yeganə olduqda, n -in qiyməti olduqca böyüdükdə, $F(x)$ haqqında daha yaxşı mülahizə yürütmək olur. $n=4$ olduqda $K_{m/n}$ kvartil, $n=10$ olduqda desil, $n=100$ olduqda isə $K_{m/100}$ persentil adlanır. $(K_{3/4} - K_{1/4})/2$ və $K_{9/10} - K_{1/10}$ *kəmiyyətlərdən* *tesadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikaları* kimi istifadə olunur və bu xarakteristikalar uyğun olaraq *semiinterkvartil genişlik* və *interdesil genişlik* adlanır.

Məs., normal paylanma funksiyası

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$$

üçün $\Phi(x)$ -in qrafikini desillərə görə qurmaq olur (bax, şəkil):



$$K_{0,1} = -1.28, K_{0,2} = -0.84, K_{0,3} = -0.52, K_{0,4} = -0.25,$$

$$K_{0,5} = 0, K_{0,6} = 0.25, K_{0,7} = 0.52, K_{0,8} = 0.84, K_{0,9} = 1.28.$$

$\Phi(x)$ normal paylanmasının kvartiləri – $K_{1/4} = -0.67$, $K_{3/4} = 0.67$ ədədləridir.

Əd.: [1] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

KVANTİL; *asimptotik düsturlar* « квантил; асимптотические формулы; quantile; asymptotic formulae for » – *paylanma funksiyasına* *ters funksiya* üçün *asimptotik* aynılıdır. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan *tesadüfi kəmiyyətlər* olsun.

$$\mathbf{M}_{\xi_i} = m, \quad \mathbf{D}_{\xi_i} = \sigma^2, \quad S_n = \sum_{i=1}^n (\xi_i - m) / (\sqrt{n}\sigma).$$

Əgər S_n *tesadüfi kəmiyyətinin* *paylanma funksiyası* $F_n(x)$ $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=3}^r n^{-(1/2)k+1} Q_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

berəbərliliyi ilə ifadə oluna bilirsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$y_p = x_p + \sum_{k=3}^r n^{-(1/2)k+1} R_k(x_p) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

berəbərliliyi doğrudur, burada $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, $Q_k(x)$ – hər hansı çoxhədlilər, x_p və y_p – uyğun olaraq, $\Phi(x_p) = 1 - p$ və $F_n(y_p) = 1 - p$ tənliklərinin həlləri, $R_k(x)$ isə $\mu_1, \dots, \mu_k$ -dən asılı müəyyən çoxhədlilərdir, $\mu_i = \mathbf{M}(\xi_i - m)^i$. Məs.,

$$R_3(x) = \frac{\mu_3}{6\sigma^3} (x^2 - 1),$$

$$R_4(x) = \frac{(\mu_4 - 3\sigma^4)}{24\sigma^4} (x^3 - 3x) - \frac{\mu_3^2}{36\sigma^6} (2x^3 - 5x).$$

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 136–49; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

KVANTLAMA ZAMAN ÜZRƏ « квантование во времени; time – quantization » – bax, *Zaman üzrə diskretizasiya / kvantlama*.

KVANTLANMASI, MƏLUMATLARIN « квантование сообщений; message quantization » – məlumatlar mənbəinin hasil etdiyi məlumatların mümkün qiymətləri çoxluğunun sonlu (və ya hesabı sayda) bir-birilə örtülməyən A_i altçoxluqlarına bölgüsüdür ki, bu A_i çoxluğundan xüsusi seçilmiş $a_i \in A_i$ elementi A_i -dən olan məlumatları məlumatların bərpası üçün verilmiş dəqiqliklə ifadə etmiş olsun.

M. k. məlumat mənbəinin kodlanması üçün üsullardan biridir. M. k.-nin optimallığı məsələsi kəsilməz mənbələrin kodlanması məsələlərinin mühümlərindən biridir.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., 1974; [2] Харкевич А. А., Борьба с помехами, М., 1965; [3] Бергер Т., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971.

KVAPEN TEOREMİ « Кванпена теорема; Kwapien theorem » – bax, Banax fəzası p tip.

KVAPEN – ŞVARTS TEOREMİ « Кванпена – Шварца теорема; Kwapien – Schwartz theorem » – bax, Radonlayıcı operator.

KVARTİL « квартиль; quartile » – kvantilin xüsusi halıdır. $\alpha = m/4$ tertib K_α kvantildir, burada $m = 1, 2, 3$. $m = 2$ olduqda $K_{1/2}$ K.-i medianı ilə üst-üstə düşür. Təsadüfi kəmiyyətin paylanması haqqında mülahizə yürütmək üçün istifadə olunur. $(K_{3/4} - K_{1/4})/2$ kəmiyyəti bəzən təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası kimi istifadə olunur və semiinterkvartil genişlik adlanır. $K_{1/4}$ və $K_{3/4}$ kvantilləri uyğun olaraq, təsadüfi kəmiyyətin aşağı və yuxarı kvartili adlanır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956.

KVARTİL MƏSAFƏ « квартильное расстояние; quartile distance » – müşahidə olunan kəmiyyətin yayınmasının ələ qiymətinə deyildir ki, müşahidə olunmuş bütün qiymətlərin (nəticələrin) yansı onu aşır. K. m. kvadratik orta yayınmanın 0,67449 hissəsini təşkil edir. Kvadratik orta xətanın bu vurğu hasilı – ehtimal olunan xəta adlanan kəmiyyət kvadratik orta xətanın $2/3$ hissəsini təşkil edir; ehtimal olunan xətanın üç misli mühümlük kriterisi kimi kvadratik orta xətanın iki misli ilə eynidir. Ehtimal olunan xətanın tətbiqində çatışmayan cəhət kritik qiymətlərin tapılması üçün kvadratik orta xətanın hissələri, yəni $(x - \mu)/\sigma$ nisbetilə ifadə olunan yayınmaların hesablanması zəruriliyidir, burada μ – paylanmanın mərkəzi, σ – kvadratik orta xətdir.

Əd.: [1] Фишер Ф. А., Статистические методы для исследований, пер. с англ., М., 1958.

KVAZİAÇIM(i) seçimin « квазиразмах выбора; simple quasirange » – bax, Açımlı seçimin.

KVAZİDIFFUZİON PROSES « квазидиффузионный процесс; quasi – diffusion process » – kvaziinfinitesimal operatoru

$$L = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - c(x)$$

486 KVAZİDIFFUZİON

düsturu ilə ifadə olunan, $\mathbb{R}^d$ -də kəsilməz Markov prosesidir.

Bax, Stoxastik differensial tənlik; Markov həlləri.

KVAZİHAMAR MARKOV PROSESİ « квазигладкий марковский процесс; quasismooth Markov process » – qiymətləri tam separabel metrik $(\mathcal{X}, B(\mathcal{X}))$ fəzasından olan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, P)$ stoxastik bazisində $\mathcal{A}$ – uzlaşmış $\{\zeta_t, t \geq 0\}$ təsadüfi prosesidir və fərz olunur ki, bütün $0 \leq s < t$, $B \in B(\mathcal{X})$ üçün

$$P\{\zeta_t \in B | F_s\} = P\{\zeta_t \in B | \zeta_s\}$$

bərabərliyi P – sanki yəqin ödənilir və $\mathcal{X}$ -də məhdud funksiyaların ələ altçoxluğunu göstərmək olur ki, bu altçoxluq $\mathcal{X}$ -in nöqtələrini ələ ayırır ki, bütün m qiymətlərində $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in D$ və

$\mathbb{R}^m$ -də iki dəfə kəsilməz differensiallanan F funksiyası üçün $F(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in D$ münasibəti ödənilir, $\varphi \in D$ üçün isə ələ məhdud $a(\varphi, x, t)$ funksiyası vardır ki,

$$\varphi(\zeta_t) - \int_0^t a(\varphi, \zeta_s, s) ds, \quad t \geq 0$$

prosesi $(P, \mathbb{A})$ – martinqaldır. K. M. p.-inə misal apan və diffuziya əmsalları məhdud olan klassik diffuzion proseslərdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

KVAZİİNFINITEZİMAL OPERATOR « квазинфинитезимальный оператор; quasi-infinitesimal operator » – kəsilməz ζ_t , $t \geq 0$ Markov prosesinin operatoru L -dir,

bu operatorun təyin olunma oblastına C_0^2 funksiyalar fəzası daxildir və bu ələ operatorudur ki, ixtiyari $f \in C_0^2$ funksiyaları və $t \geq 0$ üçün

$$M_\zeta f(\zeta_t) - f(\zeta_0) = M_\zeta \int_0^t Lf(\zeta_s) ds$$

bərabərliyi doğrudur.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Крылов Н. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 691–708.

KVAZİINVARIANT ÖLÇÜ « квазинвариантная мера; quasi – invariant measure » – hər hansı fəzada ələ ölçüdür ki, bu fəzanın «yerindəyişmələrində» özünə ekvivalent qalır. Daha dəqiq: $(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza (yəni Ω çoxluğu ilə onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ -cəbr cütü) və G – bu fəzanın avtomorfizmlərinin hər hansı qrupu (yəni qarşılıqlı bir-qiyətli $g: \Omega \rightarrow \Omega$ çevirmələri, $\mathcal{A}$ σ -cəbrinə nəzərən özünün g^{-1} ters çevirmələri ilə birlikdə ölçülən avtomorfizmlər qrup) olsun. Əgər ixtiyari $g \in G$ çevirməsindən sonra çevrilmiş $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$, $A \in \mathcal{A}$ ölçüsü μ ölçüsünə ekvivalent olarsa (yəni bu ölçülər qarşılıqlı mütləq kəsilməz ölçülər olarsa), onda μ ölçüsü $(\Omega, \mathcal{A})$ -də G -yə nəzərən kvaziinvariant ölçü adlanır. Ω, G avtomorfizmlərinin kəsilməz lokal kompakt qrupuna malik topoloji bircins fəza olarsa [yəni G qrupu Ω -ya tranzitiv təsir edir və ələ topologiyaya malikdir ki,

$G \times Q \rightarrow \Omega: (g, x) \rightarrow gx$ inikası $G \times \Omega$ topologiyalar hasilinə nəzərən kəsilməzdir. $\mathcal{A}$ – Ω -da daxil olunmuş topologiyaya nəzərən Borel σ – cəbridir, ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganə K. ö. vardır (bax, [1]). Məs., $\mathbb{R}^n$ fəzasında ölçü bütün $x \rightarrow x + a$, $x, a \in \mathbb{R}^n$ yerindəyişmələrinə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda K. ö.-dür ki, o, Lebeq ölçüsünə ekvivalent olsun. Çevirmələr qrupu lokal kompakt olmasa, K. ö. mövcud olmaya bilər, məs., sonsuzölçülü topoloji vektor fəzalının geniş sinfi üçün belədir.

Bax, *Fəzası, ölçüləri*.

Əd.: [1] Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

σ – **KVAZIİNVARİANT ÖLÇÜ** « σ – квазиинвариантная мера; σ – quasi – invariant measure / of a filtration » – bax, *Fəzası, ölçüləri*.

KVAZİKƏSİLMƏZ PROSES, SOLDAN « квазинепрерывный слева процесс; quasi left – continuous process » – bax, *Standart Markov prosesi*.

KVAZİKƏSİLMƏZLİK, SOLDAN σ – cəbrlər axtını üçün « квазинепрерывность слева потока σ -алгебр; quasi left continuity of a family of σ -algebras / of a filtration » – bax, *Öngörül Markov anı*.

KVAZİKOMPAKTLIQ ŞƏRTİ « квазикомпактность условие; quasi – compactness condition » – bax, *Erqodik teoremlər Markov prosesləri üçün*.

KVAZİMARTİNGAL « квазимартингал; quasimartingale » – azalmayan $(F_t)_{t \in T}$ σ – cəbrlər ailəsi ilə uzlaşan $\zeta = (\zeta_t)_{t \in T}$ təsadüfi prosesidir ki, bu proses üçün ixtiyari $t \in T$ qiymətində

$$\text{var}_{[0, T]}(\zeta) = \sup \mathbf{M} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \mathbf{M}(\zeta_{t_{k+1}} - \zeta_{t_k} | F_{t_k}) \right|$$

kəmiyyəti sonludur, burada $\sup$ bütün mümkün olan $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t < \infty$, $n \geq 0$, $t_0, \dots, t_n \in T$ bölgüləri üzrə götürülür; T çoxluğu ya $T = \{0, 1, \dots\}$ və ya $T = [0, \infty]$ götürülür. Məs., martinqal və integrallanan variasiyalı proses – K.-dir. Kəsilməz zaman halında K. martinqal kimi eyni requlyarlıq xassələrinə malikdir; onun sanki bütün trayektoriyalarının hamısının soldan ($t > 0$ olduqda) və rəşional ədədlər çoxluğu üzrə sağdan limitləri vardır. Əgər (F_t) ailəsi sağdan kəsilməzdirsə, onda ζ -ni K.-nin trayektoriyalarının sağdan kəsilməz, soldan limitləri olan modifikasiyası vardır. Sağdan kəsilməz (və ya opsional ölçülən) K. üçün Kolmoqorov–Dub bərabərsizliyinin analoqu:

$$\lambda \mathbf{P} \{ \sup_{0 \leq s \leq a} \zeta_s \geq \lambda \} \leq \lambda \mathbf{M} |\zeta_a| + \text{var}_{[0, a]}(\zeta), \quad \lambda > 0$$

bərabərsizliyi ödənilir. Hər bir K. iki mənfi olmayan supermartinqalın fərqi kimi ifadə olunur.

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilities et potentiel. Théorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80.

KVAZİMETRİKA « квазиметрика; quasimetric » – topologiya, funksional analiz və ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışdır. Hər hansı U çoxluğunun iki elementi üçün təyin olunan, mənfi olmayan $\mu(x, y)$ funksionalı:

- 1) $\mu(x, y) = 0$, əgər $x = y$;
- 2) $\mu(x, y) = \mu(y, x)$;
- 3) $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$

xassələrini ödəyərsə, $\mu(x, y) = U$ çoxluğunda **k v a z i m e t r i k a** adlanır. «K.» anlayışı U -da metrika anlayışını ümumiləşdirir, bu metrika üçün isə 1) şərti daha ağır tələblə:

$$\mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

münasibətilə əvəz olunur.

KVAZİMƏQBUL STATİSTİKA « квазидостаточная статистика; quasi-sufficient statistic » – bax, *Yardımcı statistika*.

KVAZİÖLÇÜ « квазимера; quasimeasure » – bax, *Silindrik ölçü*.

KVAZİREQULYAR SİSTEM « квазирегулярная система; quasi-regular system » – bax, *K – sistem*.

KVAZİSİMMETRİK PAYLANMA « квазисимметричное распределение; quasi-symmetric distribution » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin $\mathbf{P}\{\xi > x\} = \mathbf{P}\{\xi < -x\}$,

$x > 0$ xassəli cırlaşmayan ehtimal *paylanmasıdır*, burada u, v – mənfi olmayan sabitlərdir və $u + v > 0$. «K. p.» anlayışı

[1]-də daxil olunmuşdur. K. p. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxeminə xüsusi rol oynayır, belə ki, bu sxemdə yaranan *özü-özünə ayrılan paylanmaların* analoqları həmişə K. p.-lardır. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda K. p.-dır ki, bu təsadüfi kəmiyyətə uyğun xarakteristik çevirmənin elementləri $w_0(t)$ və $w_1(t)$,

$t \in \mathbb{R}^1$ üçün $(u + v) w_1(t) = (u - v) w_0(t)$ bərabərliyi ilə əlaqəlidirlər. $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 0$ olduqda (və yalnız bu halda) ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının kvazisimmetriklik kriterisi $|\xi|$ və $\text{sign } \xi$ təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması xassəsidir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Теория вероят. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69; [2] Бакштин А., «Лит. матем. сб.», 1972, т. 12, № 1, с. 23–39; [3] Абрамов В. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 717–29.

KVAZİVARIASİON BƏRABƏRSİZLİK « квазивариационное неравенство; quasi – variational inequality » – bax, *Variasion bərabərsizliklər stoxastik idarəetmədə*.

KVAZİVARIASİON BƏRABƏRSİZLİK; diffuzi-on prosesləri impuls idarəetmə məsələləri « квазивариационное неравенство; задачи импульсного управления диффузионными процессами; quasi – variational inequality; impuls control / correction of diffusion processes » –

$$\pi(U, V - U) \geq L(V - U), \quad U \in K \quad (1)$$

berəbərsizliyədir, burada π – bixətti simmetrik forma və L – xətti formadır, K – funksiyalar çoxluğu, $U \in K$ axtanlan funksiyadır və K çoxluğu U -dan asılıdır (əgər K çoxluğu U -dan asılı olmazsa, (1) berəbərsizliyi variation berəbərsizlik adlanır).

Əgər π elliptik (parabolik) operator olarsa, onda (1) elliptik (parabolik) berəbərsizlik adlanır. (1) tipli berəbərsizliklər mexanikada, impulsal idarəetmə və müşahidə nəzəriyyəsində, sərbəst sərhədlə məsələlərdə və s. istifadə olunur.

$$\begin{aligned} dx(t) &= a(t)U dt + b(t)dw(t), \\ 0 \leq t \leq T, \quad x &\in \mathbb{R}^n, \quad U \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (2)$$

– İto tənliklər sistemini impulsal idarəetmə məsələsi

$$\int_0^T |U| dt \leq q_0$$

məhdudiyyətlik şərtini ödəyən (yanacağın istifadəsinə məhdudiyyətlik şərtlənən) və $MF(r(T))$ -ni minimallaşdıran idarəetmənin seçilməsindən ibarətdir, burada $r = |x|$, $F \geq 0$ – verilmiş skalyar funksiyadır. Bellman funksiyası $V(\tau, r, q)$ $D = \{\tau, r, q: \tau \geq 0, r \geq 0, q \geq 0\}$ oblastında təyin olunur;

$$\tau = \int_0^T b^2(s) ds.$$

D_1 , $-D$ -nin ələ hissəsi olsun ki, bu hissədə $\underline{Q} = \alpha(\tau)V_r + V_q < 0$; $V_r = \partial V / \partial r$, $D_2 = D \setminus D_1$, $\alpha(\tau) = a(\tau)$ və Γ isə D_1 və D_2 oblastlarının sərhədi olsun. $\underline{Q}$ funksiyası D -də hər yerdə $\underline{Q} \geq 0$ münasibətini ödəyir. D_1 -də idarəetmə $U = 0$ olur, yəni (2) sisteminin hərəkəti, D_1 -də, yalnız təsadüfi kükrəntilərin təsirilə baş verir. D_2 -də impulsal korreksiya aparılır və sistem (τ, r, q) vəziyyətindən $\underline{Q} = 0$ tənliyinin xarakteristikaları $r - \alpha(\tau)q = \text{const}$ boyunca r və q -nün azalma istiqamətində yerini dəyişir və bu zaman sistem ya Γ -ya daxil olur (bu halda sürüşməli rejim mümkündür ki, bu rejimdə Γ -nın izi qalır) və ya impulsun sonunda $q = 0$ olur. V funksiyası və Γ sərhədi D_1 -də

$$\left. \begin{aligned} D_1\text{-də } V_\tau &= \frac{1}{2} \left(V_{rr} + \frac{n-1}{r} V_r \right); \quad D_2\text{-də } \underline{Q} = 0 \\ V(0, r, q) &= F(r), \quad V_\tau(\tau, 0, q) = 0; \quad \Gamma\text{-də } \underline{Q} = 0, \quad \underline{Q}_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

tənlikləri ilə təyin olunur.

Avtomodel həllər.

$$F_r = r^l, \quad \alpha(\tau) = A\tau^k \quad (4)$$

olsun. Onda (3) tənlikləri birparametrik qrupa görə (C parametri ilə) invariantdırlar:

$$r \rightarrow Cr, \quad \tau \rightarrow C^2 \tau, \quad q \rightarrow C^{1-2k} q, \quad V \rightarrow C^l V. \quad (5)$$

Buna görə də, (3) məsələsinin həlli

$$V = \tau^{1/2} \omega(v, z), \quad y = Aq\tau^{k-1/2}, \quad z = r\tau^{-1/2} \quad (6)$$

şəklində olur. Bu zaman asılı olmayan dəyişənlərin sayı 2-yə qədər azalır və bu da dəqiq və ya ədədi həll üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

İmpulslar sayı verildiyi halda korreksiya.

İmpulsların maksimal mümkün sayı N -in əlavə olaraq verildiyi fərz olunur; impulsar s_i Markov anlarında aparılır. Onda $x(s_i + 0) = x(s_i - 0) + a(s_i)q_i$, s_i anları və q_i vektorları

təyin olunmalıdır; $q_i \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^N |q_i| \leq q_0$. Hər bir i qiymətində

$D = D_1^i \cup D_2^i$ və D_1^i -yə impuls verilmir, D_2^i -də isə i sayda impulsdan birincisinin keçirildiyi nəzərdə tutulur. D_1^i və D_2^i oblastlarının sərhədi Γ^i məlum deyildir. Bellman funksiyası $V(\tau, r, q)$ və Γ^i sərhədi

$$\left. \begin{aligned} D_1^i\text{-də } V_\tau^i &= \frac{1}{2} \left(V_{rr} + \frac{n-1}{r} V_r \right), \\ D_2^i\text{-də } V^i(\tau, r, q) &= \min_{y \in \Gamma^i} V^{i-1}(\tau, r - \alpha(\tau)y, q - y), \\ V^i\{y: 0 \leq y \leq q, \alpha(\tau)y \leq r\}, \quad V_\tau^i(\tau, 0, q) &= 0 \\ V^i(\tau, r, 0) &= V^0(\tau, r, 0), \quad V^i(0, r, q) = F(r) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

tənlikləri və V^i və V_r^i -in Γ^i -də kəsilməzlik şərtindən təyin olunur. Əgər (4) tələbləri yerinə yetirilərsə, onda (7) tənlikləri (5) qrupuna görə invariantdırlar və (7) təyiniyinin həllini (6)-ya analogi şəkildə axtarmaq lazımdır.

Müşahidə prosesini impulsal idarəetmə.

Aparılacaq müşahidələrin ümumi sayı məhdudlaşmış olduğu halda xətti stoxastik sistemi müşahidə prosesini idarəetmə məsələlərində müşahidənin optimal qanunu impulsu xarakterə malik ola bilər. Bu isə onu ifadə edir ki, bütün müşahidələr bezi diskret zaman anlarında aparılır.

Əd.: [1] Г л о в и н с к и Р., Л и о н с Ж. Л., Т р е м о л ь е р Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [2] B e n s o u s s a n A., L i o n s J. L., Contrôle impulsionnel..., Р., 1982; [3] Ч е р н о у с ь к о Ф. Л., К о л м а н о в - с к и й В. Б., Оптимальное управление при случайных возмущениях, М., 1978; [4] Д ю в о Г., Л и о н с Ж. Л., Неравенства в механике и физике, пер. с франц., М., 1980.

QALERKİN YAXINLAŞMASI « Галеркина приближение; Galerkin's approximation » – bax, *Statistik hidromexanika*.

QALIĞI, PAYLANMANIN « хвост распределения; distribution tail » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasının qrafikinin $\{\xi < x_{\min}\}$ və ya $\{\xi > x_{\max}\}$ şəkilli hadisələrinin ehtimallarına uyğun hissəsidir, burada $x_{\min}$ və $x_{\max}$ – ξ təsadüfi kəmiyyətinin dəyişmə diapozonunun sol və sağ sərhədlərinə yaxın uyğun mümkün qiymətlərdir. Bu anlayış xüsusən mərkəzi limit teoremi ilə bağlı qiymətləndirmələrdə istifadə olunur.

QALIQ CƏMİ, KVADRATLARIN « остаточная сумма квадратов; residual sum of squares » – *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə *regression eksperiment* ölçmələrinin approksimasiyasından yaranan uzlaşmaların kvadratları cəmidir. Regression eksperiment adekvat olduqda, K. q. c.-nin sərbəstlik dərəcəsi sayına nisbəti ölçmələrin dispersiyası σ^2 -nin statistik qiymətinə bərabərdir, əgər eksperiment adekvat olmazsa, σ^2 -nin statistik qiyməti σ^2 -dan sisteməlik xətanın kvadratı qədər artıq olur. Buna görə də, dispersiyanın asılı olmayan statistik qiyməti ilə K. q. c.-in müqayisəsi nəticəsində regression eksperimentin adekvatlığının F – kriterisi alınır, bu isə dispersion analizinin əsas statistikasıdır.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

*** QALIQ – EKVİVALENT ARDICILLIQLARI, TƏSADÜFİ KƏMIYYƏTLƏRİN « остаточные последовательности случайных величин; remot – equivalence sequences »** – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət*.

QALIQ HADİSƏ « остаточное событие; remote event » təsadüfi kəmiyyətlərin və ya təsadüfi elementlərin $(X_n)_{n \in N}$ ardıcılığına nəzərən – ixtiyari n üçün $(X_n, X_{n+1}, \dots)$ ardıcılıqları (qalıqları) ilə təyin olunan hadisədir. Daha dəqiq, əgər R_n – σ – cəbr olarsa ki, $X_n, X_{n+1}, \dots$ bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olsunlar, onda Q. h. bütün R_n -lərə aid olan hadisədir. Q. h. çoxluğu qalıq σ – cəbri təşkil edir (bax, *Sıfır – vahid qanunu*).

Əd.: [1] Лозв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

QALIQLAR « остаток; residuals » regression eksperimentdə – *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə *regression eksperimentin* ölçmələrinin approksimasiyalarında uzlaşmamazlıqlardır. Maksimal Q.-ın qiymətinə görə seçilib fərqlənən ölçmələrin olduğu haqqında mülahizə yürüdüldür. Q.-ın prediktorlar

və təqribi alınmış qiymətlərindən asılı olaraq alınan qrafiklər modelin adekvatlığı haqqında mülahizə yürütməyə imkan verir.

Əd.: [1] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн.: 1–2, М., 1986; [2] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

QALLAGER FUNKSIYASI « Галлахера функция; Gallager function » – bax, *Təsadüfi kodla(n)ma sərhədi*.

QALMA MÜDDƏTİ « пребывания время; sojourn / occupation time » – bax, *Səmi – Markov prosesi*.

QALTON – VATSON PROSESİ « Гальтона – Ватсона процесс; Galton – Watson process » (E, h) – proses. – diskret zamanlı və eyni bir tip hissəcikləri şəxələnən prosesdir. F. Qalton (F. Galton) və G. Vatsunun (G. Watson) adı ilə adlandırılmışdır; onlar 1873-də ilk dəfə soyadların cırlaşması məsələsini araşdırmışlar. Diskret zamanlı və sonlu sayda hissəciklərlə başlayan şəxələnən proses də Q. – V. p. adlanır (bax, *Şəxələnən proses*).

QAMMA – APPROKSİMASIYA « гамма – аппроксимация; gamma approximation » beta – paylanma üçün – beta – paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$ -in $a = \text{const}$ və $b \rightarrow \infty$ olduğu halda hesablanması üçün approksimasiyadır.

ξ – paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$

$$P\{\xi < x\} = I_x(a, b) \equiv B_{a,b}(x) =$$

$$= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

düsturu ilə ifadə olunan a və b parametrləri ($a > 0$, $b > 0$) beta – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyət olsun, burada

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

– Eylər beta – funksiyasıdır.

$$B_{a,b}(x) \equiv 1 - B_{a,b}(1-x), \quad x \in [0, 1]$$

eyniliyinə əsasən beta – paylanma üçün cədvəllər tərtib edildikdə $0 < a \leq b$ halı ilə kifayətlənir. K. Pirsonun məlum yəddirəqəmli cədvəlləri yalnız $b \leq 50$ qiymətlərində $B_{a,b}(x)$ -in hesablanması üçün istifadə olunur (bax, [1]). $b > 50$ olduğu halda $B_{a,b}(x)$ -in hesablanması üçün Q. – a.-dan istifadə olunur ki (bax, [1] – [3]), bu halda əgər $a = \text{const}$ və $b \rightarrow \infty$ olarsa, onda

$$B_{a,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{(2b+a-1)x/(2-x)} z^{a-1} e^{-z} dz + O(1/b^2) \quad (*)$$

münasibəti $0 < x < 1$ şərtini ödəyən x -lərə görə müntəzəm ödənilir. Başqa sözlə, əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti a və b parametrləri beta – paylanmaya tabedirsə, onda $\eta = (2b + a - 1)\xi / (2 - \xi)$ təsadüfi kəmiyyəti təqribən a parametrlili γ -paylanmaya yaxınlaşır.

Q. – a. binomial paylanma üçün olduqca dəqiq Puasson approximasiası qurmağa imkan verir. Z , – n və p parametrləri binomial qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun, $0 < p < 1$. Binomial paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$ terminləri ilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$P\{Z \leq m\} = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = B_{n-m, m+1}(1-p);$$

bu düsturdan (*) Q. – a.-nın köməyi ilə alınır ki, $m = \text{const}$ və $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{Z \leq m\} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_y^\infty t^m e^{-t} dt + R \equiv \sum_{k=0}^m \frac{y^k}{k!} e^{-y} + R$$

münasibəti $0 < p < 1$ intervalından bütün p -lərə görə müntəzəm ödənilir, burada

$$R = \begin{cases} O(1/n), & \text{əgər } y = y_0 = (n-m)p, \\ O(1/n^2), & \text{əgər } y = y_1 = p(2n-m)/(2-p), \\ O(1/n^4), & \text{əgər } y = y_2 = \frac{6y_1(2n-m)^2}{6(2n-m)^2 + [m(m+2) + my_1 - 2y_1^2]} \end{cases}$$

olarsa.

Əd.: [1] Пирсон К., Таблицы неполной бета – функции, пер. с англ., М., 1974; [2] Мардиа К., Земрох П., Таблицы F -распределений и распределений связанных с ними, пер. с англ., М., 1984; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Большев Л. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды, М., 1987.

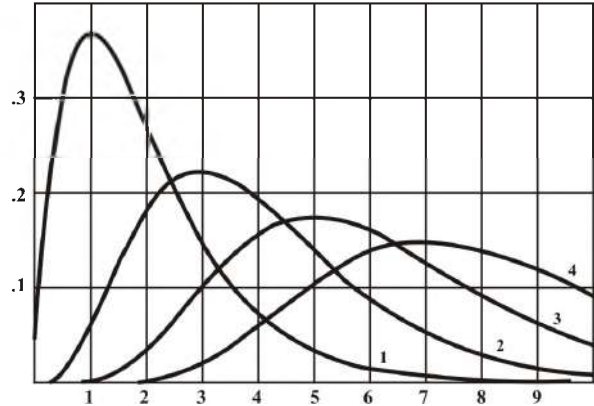
QAMMA – FAİZLİ İŞLƏMƏ (İMTİNAYA QƏDƏR)
MÜDDƏTİ « гамма – процентная наработка;
gamma – percentile operating time to failure » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin.*

QAMMA – PAYLANMA « гамма – распределение; gamma distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x}$$

(bax, şəkil) düsturu ilə ifadə olunan kəsilməz, $(0, \infty)$ -da toplanmış *ehtimal paylanmasıdır*, burada $\lambda > 0$ – parametr və $\Gamma(\lambda)$ – Eyley gamma – funksiyasıdır.

490 QAMMA



$\lambda > 1$ olduqda gamma - paylanmanın sıxlıq funksiyasının qrafikləri :

(1) $\lambda = 2$; (2) $\lambda = 4$; (3) $\lambda = 6$; (4) $\lambda = 8$.

Q. – p.-nin paylanma funksiyası $G_\lambda(x)$ natamam gamma – funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x y^{\lambda-1} e^{-y} dy$$

$g_\lambda(x)$ sıxlıq funksiyası unimodaldır və $\lambda > 1$ olduqda $x = \lambda - 1$ nöqtəsində $(\lambda - 1)^{\lambda-1} e^{-(\lambda-1)} / \Gamma(\lambda)$ qiymətinə bərabər maksimumunu alır, yəni bu paylanmanın modası $m = \lambda - 1$ olur. $0 < \lambda < 1$ olduqda $g_\lambda(x)$ sıxlıq funksiyası x -in artması ilə monoton azalır və əgər $x \rightarrow +0$ olarsa, $g_\lambda(x)$ qeyri – məhdud artır. Q. – p.-nin xarakteristik funksiyası

$$f(t) = (1 - it)^{-\lambda}$$

düsturu ilə, momentləri isə

$$m_k = \Gamma(\lambda + k) / \Gamma(\lambda), \quad k > -\lambda$$

düsturu ilə ifadə olunur. Q. – p.-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası λ -ya bərabərdir, asimmetriyası $As = 2/\sqrt{\lambda}$, ekssesi isə $Es = 6/\lambda$ -dır. Q. – p.-lar ailəsi kompozisiya əməlinə görə qapalıdır:

$$g_{\lambda_1} * g_{\lambda_2} = g_{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Q. – p. aşkar olmasa da, tətbiqi məsələlərdə mühüm rol oynayır. Xüsusi halda, $\lambda = 1$ olduqda üstlü qanun alınır. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində λ parametrlinin tam qiymətlər aldığı Q. – p. *Erlang paylanması* adlanır. Q. – p.-ya riyazi statistikada, normal paylanma ilə sıx əlaqəsi olduğuna görə tez-tez təsadüf olunur, belə ki, qarşılıqlı asılı olmayan $(0, 1)$ parametrləri normal qanunla paylanmış $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kvadratları cəmi $\chi^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $0,5 g_{n/2}(x/2)$ -ə bərabərdir və bu sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər *xi – kvadrat paylanması*nın sıxlıq funksiyasıdır. Buna görə də, Q. – p. və riyazi statistika məsələlərində bir çox mühüm paylanmalar əlaqədirdirlər, bu şərtlə ki, bu məsələlərdə normal qanunla paylanmış kvadratik formalara

baxılmış olsun (məs., *Student paylanması*, *Fişer F – paylanması* və *Fişer z – paylanması*). Əgər ξ_1 və ξ_2 paylanmalarının sıxlıq funksiyaları g_{λ_1} və g_{λ_2} olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} x^{\lambda_1-1} (1-x)^{\lambda_2-1}, 0 < x < 1$$

kimi təyin olunur və bu β – *paylanmanın* sıxlıq funksiyasıdır. Q. – p.-ya tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin $a\xi + b$ xətti funksiyalarının sıxlıq funksiyaları xüsusi paylanmalar sinfi təşkil edir, bu sinif *Pirson paylanmaları* sinfinin III tipi adlandırılır. Q. – p.-nın sıxlıq funksiyası Lagerr ortoqonal çoxhədlilər sisteminin çəki funksiyasıdır. Q. – p. funksiyasının qiymətlərini natamam qamma – funksiya üçün tərtib olunmuş cədvəllərlə hesablamaq olar (bax, [1]).

Əd.: [1] Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма функции, М., 1963.

QAPALI ÇOXLUQ « замкнутое множество; closed set » – hər hansı bir boş olmayan $\mathcal{A}$ çoxluqlar sinfinin çoxluqları üzərində aparılan müəyyən bir nəzəri çoxluq əməlinə (məs., $\cup$, $\cap$, $\setminus$ və inkar emeli) sonra alınmış çoxluq da $\mathcal{A}$ -ya daxil olarsa, $\mathcal{A}$ sinfinə aparılmış əmələ görə qapalı çoxluq deyilir.

QAPALI XİDMƏT SİSTEMİ « замкнутая система обслуживания; closed queueing system » – bax. *Xidmət sistemi*.

QAPALI PLAN « замкнутый план; closed plan » – bax. *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

QAPALI SİNİF « замкнутый класс; closed class ». Ω – hər hansı bir çoxluq, $\mathcal{G}$ – Ω -nin alt çoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı bir sinif olsun. $\mathcal{G}$ -nin çoxluqları üzərində aparılan bir və ya bir neçə əməldən sonra alınmış çoxluq $\mathcal{G}$ sinfinə daxil olarsa, $\mathcal{G}$ sinfinə aparılmış əməl və ya əməllərə görə qapalı sinif deyilir.

Ω – elementar hadisələr fəzası, $\mathcal{A}$ və $\mathcal{F}$, uyğun olaraq, Ω -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş hadisələr cəbri və hadisələrin σ – cəbri olarsa,

$\mathcal{A}$ – inkar, sonlu sayda birləşmə, kəsişmə, fərq, simmetrik fərq əməllərinə görə;

$\mathcal{F}$ – inkar, hesabi sayda birləşmə, kəsişmə, fərq və simmetrik fərq əməllərinə görə qapalı sinifdir. Məs., $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$;

$$A_i \in \mathcal{A}, i = \overline{1, n} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \text{ və s. } A_i \in \mathcal{F},$$

$$i = 1, 2, \dots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

QAPALI TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « замкнутое случайное множество; closed random set » – qapalı çoxluqların topoloji fəzası $\mathcal{F}$ -in təsadüfi elementidir. $\mathcal{F}$ -in topologiyası $\mathcal{F}_f$ aşağıdakı kimi təyin olunur: S – separabel Hausdorff lokal kompakt topoloji fəza, $\mathcal{F}$ – onun qapalı altçoxluqlarının çoxluğu olsun. Onda $\mathcal{F}_f$ topologiyası

$$\mathcal{F}^K = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset\},$$

$$\mathcal{F}_G = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap G \neq \emptyset\},$$

siniflərini özündə saxlayan minimal topologiyadır, burada K – bütün mümkün ola bilən kompakt, G isə S -in açıq altçoxluqlandır.

Bax, *Təsadüfi çoxluq*.

QARIŞDIRMA METODU « смешивания метод; confound method » – bax, *Faktor eksperiment*.

QARIŞIQ (ğ) vəziyyətlərin « смесь состояний; mixture of states » – bax, *Sıxlıq operatoru*.

QARIŞIQ AVTOREQRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA MODEL « смешанная авторегрессии – скользящего среднего модель; autoregressive – moving average model » –

$$\begin{aligned} \zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_p \zeta(t-p) = \\ = b_0 Z(t) + b_1 Z(t-1) + \dots + b_q Z(t-q) \end{aligned}$$

tənliyini ödəyən, ümumi halda skalyar kompleksqiymətli $\{\zeta(t), t \in T, T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}\}$ təsadüfi prosesinin modelidir, burada $a_1, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$ – heqiqi ədədlər,

$\{Z(t), t \in T\}$ – ümumi halda kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin standart qeyri – korrelyar ardıcılığıdır, yəni ehtimal təsadüfi kəmiyyətlərin ki, bunlar üçün $MZ(t) = 0, MZ(s)\bar{Z}(t) = \delta_{st},$

$s, t \in T$ şərtləri ödənilir; (p, q) cütü – Q. ARSO. m.-nin (avtoeqressiv – sürüşən orta, ARSO) tərtibi adlanır.

Q. ARSO. m. diskret zamanlı və kəsri – rəşional spektral sıxlıqlı stasionar skalyar kompleksqiymətli proseslərin ümumi modelidir. Bu model praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərə adekvat stoxastik modeldir. Qeyd etmək lazımdır ki, adekvatlığın təsviri praktikada $p \leq 2, q \leq 2$ olduqda alınır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [2] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1. М., 1974; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

QARIŞIQ AVTOREQRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA PROSES, ARSO – *prosesi* « смешанный авторегрессии – скользящего среднего процесс, APCP – процесс; autoregres – sivemoving average process, ARMA process » – diskret zamanlı, geniş mənada stasionar $\zeta(t), t = 0, \pm 1, \dots$ təsadüfi prosesidir və bu prosesin qiymətləri

$$\begin{aligned} \zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_p \zeta(t-p) = \\ = Y(t) + b_1 Y(t-1) + \dots + b_q Y(t-q) \end{aligned} \quad (*)$$

fərqlər tənliyini ödəyirlər, burada $MY(t) = 0, MY(t)Y(s) = \sigma^2 \delta_{t,s}, \delta_{t,s}$ – Kroneker simvoludur [yeni $Y(t)$ – spektral sıxlığı $\sigma^2/2\pi$ -yə bərabər bəyaz küy prosesidir], p və q – hər hansı mənfi olmayan tam ədədlər, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ – sabit əmsallardır. Əgər $\varphi(z) \equiv 1 + a_1 z + \dots + a_p z^p = 0$ tənliyinin bütün kökləri modulca vahiddən fərqli olarsa, onda stasionar Q. ARSO – proses $\zeta(t)$ vardır və onun spektral sıxlığı

$$f(\lambda) = (\sigma^2/2\pi) |\psi(e^{i\lambda})|^2 |\phi(e^{i\lambda})|^{-2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\psi(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_q z^q$. Lakin (*) tənliyinin həllinin $\zeta(t_0-1), \dots, \zeta(t_0-p)$ qeyd olunmuş başlanğıc şərtlərində, $t-t_0 \rightarrow \infty$ olduqda stasionar $\zeta(t)$ prosesinə yaxınlaşması üçün $\phi(z) = 0$ tənliyinin bütün köklərinin vahid radiuslu $|z| \leq 1$ dairəsindən kənarda yerləşmələri zəruridir (bax, məs., [1], [2]).

Gauss Q. ARSO. prosesləri sinfi spektral sıxlığa malik və çoxölçülü Markov prosesinin birölçülü komponenti olan stasionar proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3]). Q. ARSO. proseslərinin xüsusi halları *avtoregressiv proseslər* ($q=0$ olduqda) və *sürüşən orta proseslər* ($p=0$ olduqda). Tətbiqi məsələlərdə Q. ARSO. proseslərinin ümumiləşməsi *avtoregressiv-inteqrallanmış sürüşən orta proseslər* (ARISO – proseslər), yəni stasionar artımlarlı ele qeyri – stasionar proseslərdir ki, onların hər hansı qeyd olunmuş tərtibli artımları Q. ARSO. p. əmələ gətirir (bax, [1]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1-2, М., 1974; [2] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [3] Дуб J. L., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 229-82.

QARIŞIQ AVTOREGRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA PROSES; çevrilenlik şərti «смешанный авторегрессион – скользящего среднего процесс; обратимости условие; invertibility condition for ARMA process», qarışıq ARSO prosesi – $\zeta(t)$ ARSO prosesi üçün fərqlər tənliyinə daxil olan diskret $Y(t)$ *beyaz küyünün* t anındakı qiymətinin, $\zeta(t)$ prosesinin indiki t anında və keçmiş $t-s$, $s>0$ zaman anlarındakı çəkili qiymətlərinin yığılan cəmləri (yəni ədədi əmsallara vurulmuş qiymətlərinin cəmləri) şəklində ifadə olunması şərtidir. ARSO prosesi

$$\begin{aligned} \zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_p \zeta(t-p) = \\ = Y(t) + b_1 Y(t-1) + \dots + b_q Y(t-q) \end{aligned}$$

fərqlər düsturunu ödədiyi halda çevrilenlik şərti – $\psi(z) \equiv 1 + b_1 z + \dots + b_q z^q = 0$ tənliyinin vahid radiuslu $|z| \leq 1$ dairəsinin daxilində və sərhədində yerləşən köklərinin olmaması şərtidir (bax, [1]). Çevrilenlik şərtini ödəməyən ARSO – prosesləri halında $Y(t)$ -nin qiyməti $\zeta(t)$ prosesinin keçmiş, indiki və gələcək qiymətlərinin çəkili cəmi şəklində ifadə olunur, bunun isə bir sıra hallarda fiziki olaraq, mümkünlüyü qeyri – təbiidir.

ARSO – prosesi üçün çevrilenlik şərti daha ümumi qeyri – stasionar avtoregressiv – inteqrallanmış sürüşən orta proseslər sinfi üçün də ümumiləşdirilir (bax, [1], fəs. 4).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1-2, М., 1974.

QARIŞIQ MODEL(i) dispersion analizin «смешанная модель дисперсионного анализа; mixed model in the analysis of variance» – bax, *Dispersion analiz; qarışıq model*.

492 QARIŞIQ

QARIŞIQ MOMENT «смешанный момент; mixed moment» – bax, *Moment, Çoxölçülü paylanma*.

QARIŞIQ OYUN «смешанная игра; mixed game» – bax, *Statistik oyun*.

QARIŞIQ STRATEGİYA «смешанная стратегия; mixed strategy» – bax, *Randomlanmış strategiya*.

QARIŞIQLAR FƏZASI «смесей пространство; space of mixtures» – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

QARIŞMA «перемешивание; mixing» – stasionar ζ_t təsadüfi prosesinin bütün $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{A}$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Lambda \cap \theta_t \Gamma) = P(\Lambda)P(\Gamma)$$

münasibətilə ifadə olunan xassəsidir, ζ_t , $t \in T$ – qiymətləri fəza fəzası $(E, \mathcal{B})$ -dən olan, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş diskret zamanlı (yəni $T = \{0, 1, 2, \dots\}$) və ya kəsilməz zamanlı (yəni $T = [0, \infty)$) təsadüfi proses, $\mathfrak{A}$ isə ele minimal σ – cəbrdir ki, bütün $t \in T$ qiymətlərində bu σ – cəbrə nəzərən ζ_t kəmiyyətləri ölçüləndirir. θ_t , $t \in T$, – $\mathfrak{A}$ – ölçülən ζ_t təsadüfi kəmiyyətlərinə və Γ hadisəsinə aşağıdakı qayda ilə təsir edən θ_t , $t \in T$ yerindəyişmə operatorları ailəsidir: $\theta_t \zeta(\omega) = \zeta(\omega_t^+)$ və $\omega \in \theta_t \Gamma$ münasibətləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\omega_t^+ \in \Gamma$ olsun (bax, *Erqodik teoremlər*). Q. prosesin erqodikliyini doğrurur. Q.-nin müxtəlif modifikasiyaları vardır. Məs., kəsilməz zamanlı stasionar ζ_t təsadüfi prosesinin zəif qarışması – bütün $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{A}$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(\Lambda \cap \theta_u \Gamma) du = P(\Lambda)P(\Gamma)$$

münasibətilə ifadə olunur.

Rozenblatt güclü qarışması Q. xassəsinin gücləndirilmiş forması olub, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\Lambda \in \mathfrak{A}^t, \Gamma \in \mathfrak{A}_{t+t}} |P(\Lambda \Gamma) - P(\Lambda)P(\Gamma)| = 0,$$

burada $\mathfrak{A}^s$ ($\mathfrak{A}_s$), – s anına qədər (s anından sonra) ζ_t prosesinin gedişi ilə doğrulmuş minimal σ – cəbrdir.

Müntəzəm güclü Q. tərifə görə

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\Lambda \in \mathfrak{A}^t, \Gamma \in \mathfrak{A}_{t+t}} |P(\Gamma|\Lambda) - P(\Gamma)| = 0$$

münasibətilə təyin olunur.

Əd.: [1] Гихман И. Н., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

QARIŞMA çoxqat «перемешивание кратное; multiple mixing» – bax, *Çoxqat qarışma*.

K – QARIŞMA «K – перемешивание; K – mixing» – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının aşağıdakı kimi ifadə olunan T avtomorfizminin xassəsidir: ixtiyari natural k və ixtiyari $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}_n^{\infty}(A_1, \dots, A_k)} |P(A_0 \cap A) - P(A_1)P(A)| = 0,$$

burada $\mathcal{A}_n^{\infty}(A_1, \dots, A_k)$, $-T^m A_i$, $m \geq n$, $i = 1, \dots, k$ çoxluqlarını özündə saxlayan minimal σ – cəbrdir. $K - Q$ xassəsi T -nin K – avtomorfizm olması ilə eynigüclüdür (verilən ad da elə bununla izah olunur).

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

QARIŞMA ŞƏRTLƏRİ təsadüfi meydan üçün «перемешивание условия для случайного поля; **mixing conditions** for random fields» – bir-birindən olduqca uzaq çoxluqlarda təsadüfi meydanla doğurulmuş σ – cəbrlərin zəif asılılığını ifadə edən (müəyyən mənada) şərtlərdir. $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^n$ təsadüfi meydanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

ehtimal fəzasında verilmiş olsun. $U \subset \mathbb{R}^n$ çoxluğu U -da X meydanı ilə doğrulmuş $\mathfrak{A}_X(U) = \sigma\{X(t), t \in U \cap T\}$ minimal σ – cəbrinə qarşı qoyulmuş olsun ($\mathfrak{A}_X(U) = \{\emptyset, \Omega\}$, $U \cap T = \emptyset$ olduqda). Asılılıq əmsalları (qarışma əmsalları)

$\mathfrak{A}_X(U_1), \dots, \mathfrak{A}_X(U_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ σ – cəbrlərinin əlaqələrini təsvir etmək üçün istifadə edilir. Bu zaman σ – cəbrlər toplusu üçün asılılıq ölçüsünün necə seçilməsi və bu σ – cəbrlərin «fəza yerləşmələrinin», yəni $U_1, \dots, U_k$ çoxluqlarının yerləşməsinin nə dərəcədə nəzərə alınması olduqca önəmlidir. Əvvəllərdə təsadüfi kəmiyyətlər üçün daxil olunmuş (bax, *Qarışma şərtləri təsadüfi proses üçün*) cüt qarışma əmsalları daha çox istifadə olunanlardır. Lakin təsadüfi proseslər üçün qarışma əmsalları meydan üçün baxıldığı halda parametrik T çoxluğunun çoxölçülü spesifikasiyası nəzərə alınmalıdır (bax, [1] – [6]). $\nu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ – hər hansı asılılıq ölçüsü olsun, yəni $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$ σ – cəbrlərinin ele menfi olmayan funksiyası olsun ki, eger $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ asılı olmayan σ – cəbrlər olarsa, $\nu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ olsun.

Fərz olunur ki,

$$\nu_X(V_1; V_2) = \nu(\mathfrak{A}_X(V_1), \mathfrak{A}_X(V_2)), V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Cüt Q . ş. V_1, V_2 «aralandıqda» $\nu_X(V_1; V_2) \rightarrow 0$ münasibətinin ödənilməsi kimi anlaşılmalıdır. Bu hökmün ən sadə variantı meydanın m – asılılığından, yəni d – çoxluqlar arasında məsafə olarsa, $d(V_1, V_2) \geq m$ olduqda $\mathfrak{A}_X(V_1)$ və $\mathfrak{A}_X(V_2)$ -nin asılı olmamazlığından ibarətdir. Ümumi halda $d(V_1, V_2) = r$ artıqda, V_1 və V_2 isə bezi əlavə şərtləri ödədikdə, $\nu_X(V_1; V_2)$ ölçüsünə məhdudiyyətlər qoyulur. Məs., tələb etmək olar ki, V_1 və V_2 hipermüstəvilər düzü və ya konsentrik kürelər (kublar) düzü arasındakı, eni r -ə bərabər qatla (layla) ayrılınsın, V_1 və V_2 -nin diametrinə, V_1 və V_2 -nin elementləri üzərinə (diskret halda) məhdudiyyətlər qoymaq olar və s. Meydan asılı olmamazlığını hadisələr σ – cəbrlərinə müraciət etmədən, hadisələr sistemlərindən (məs., hər hansı səddi keçmə ilə) istifadə etmək və ya təsadüfi kəmiyyətlər sistemlərində verilmiş funksionalları tətbiq etməklə təsvir etmək olar. Məs., kəsişməyən sonlu $I, J \subset T$ çoxluqları və müəyyən siniflərin f, g funksiyaları üçün $|\text{cov } f(X(t), t \in I), g(X(t), t \in J)|$ yuxandan qiymətləndi-

rilir. Bu qiymətləndirmədə yalnız $d(I, J)$, I və J -nin elementləri sayı deyil, həm də istifadə olunan funksional siniflərin xarakteristikaları da nəzərə alınır.

Stasionar meydanların qarışması spektral teminlərdə [7]-də verilir. Cüt olmayan qarışma əmsalları və Q . ş. haqqında, o cümlədən, erqodik nəzəriyyədə istifadə olunanlar haqqında, [8] – [10]-a bax. Məs., X üçün çoxqat qarışma ixtiyarı k və lokal məhdud $F_{A_1}, \dots, F_{A_k}$ funksiyalarının ixtiyarı toplusu üçün

$$\min_{1 \leq i < j \leq k} d(t_i, t_j) \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

$$M(F_{A_1+t_1}(X) \dots F_{A_k+t_k}(X)) \rightarrow M F_{A_1}(X) \dots M F_{A_k}(X)$$

münasibətinin ödənilməsi kimi interpretasiya olunur; burada $F_{A+t}(X) = F_A(\tau_t X)$, $(\tau_t X)(s) = X(s+t)$. Cüt olmayan qarışma əmsallarına mühüm misal semiinvariantlardır (bax, [11]). Əgər $X(t_1), \dots, X(t_k)$ kəmiyyətlərinin hər hansı qrupu bu topludakı digər kəmiyyətlərdən asılı olmazsa, onda semiinvariant $\text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_k)) = 0$ olur. Beləliklə, qeyd olunan semiinvariantın sıfıra yaxın olması $X(t_i)$, $i = 1, \dots, k$ kəmiyyətlərinin asılılıq dərəcəsini xarakterizə edir. Bu zaman $\text{cum}(g_1(X(t_1)), \dots, g_k(X(t_k)))$ -ni g_i , $i = 1, \dots, k$ funksiyalarının müəyyən ailəsi üçün yuxarıdan qiymətləndirdikdə (bax, [10]), $t_1, \dots, t_k$ nöqtələrinin yerləşməsinə qraflar nəzəriyyəsi terminlərində nəzərə almaq mümkün olur. Qeyd etmək lazımdır ki, meydan asılılığının təsvirini $X(\cdot)$ təsadüfi funksiyasının xassələrinə əsaslanmaqla, parametrlər fəzasının «bir-birindən uzaqlaşmış» altçoxluqlarında bu funksiyanın nə cür olacağını nəzərə almamaqla vermək olur. Belə əlaqəli sonlu asılı meydanlar haqqında [12]-yə, çoxparametrlili martinqallar haqqında [13]-ə, Markov meydanları haqqında [14]-ə, assosialanmış kəmiyyətlər sistemi haqqında [15]-ə, Gibbs meydanları haqqında [10], [16]-ya bax.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятностей и ее примен.», 1968, т. 13, № 2, с. 201–29; [2] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1986; [3] Булинский А. В., Предельные теоремы в условиях слабой зависимости, М., 1989; [4] Eberlein E., Taqqu M. S., (eds.), Dependence in probability and statistics, Boston, 1986; [5] Bradley R. C., «Statist. Probab. Letters», 1989, v. 3, p. 489–91; [6] Doukhan P., Mixing properties and examples, «Lect. Notes in Statist.», v. 85, B. etc, 1995; [7] Bradley R. C., Utev S. A., in: «Proc. sixth. Vilnius conf.», Utrecht, 1994, p. 99–120; [8] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [9] Bradley R. C., Bruce W., «J. Multivar. Analys», 1985, v. 16, № 3, p. 335–67; [10] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [11] Саулис Л., Статулявичус В., Предельные теоремы о больших отклонениях, Вильнюс, 1989; [12] Chen L. N. Y., «Z. Wahr und verw. Geb.», 1978, Bd 43, S. 223–43; [13] Гихман И. И., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 3–28; [14] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [15] Newman C. M., in «Inequalities in Statist. And Probab.», Hayward, p. 127–140; [16] Георги Х.-О., Гиббсовские меры и фазовые переходы, пер. с англ., М., 1992.

QARIŞMA ŞƏRTLƏRİ təsadüfi proses üçün «перемешивание условия для случайного процесса; **mixing conditions** for random process» – *тəsadüfi proses* (birölçülü parametrik $T \subset \mathbb{R}$ çoxluğunda təsadüfi meydan) üçün qarışma şərtləridir. $\mathbb{R}$ -də xətti qaydanın olması $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$ çoxluqları arasında asılılıq ölçüsü

$\nu_X(F_1, F_2)$ kəmiyyəti ilə kifayətlənməyə imkan verir (bax, *Qarışma şərtləri* təsadüfi meydan üçün, düstur (1)), bu halda F_1 və F_2 çoxluqları əlavə şərtlə əlaqəli hesab edilir, belə ki, F_1 prosesin «keçmişinə», F_2 isə prosesin «geleceyinə» aid hesab olunur, yeni F_1 ədəd oxunda F_2 -dən solda yerləşir. Adətən, F_1 və F_2 kimi yamoxlar götürülür. Onda $X(t)$ prosesinin qarışma əmsalı $\nu_X(r) = \sup_t \nu \{ \mathfrak{A}_X((-\infty, t]), \mathfrak{A}_X([t+r, \infty)) \}$ olur və Q. ş. ondan ibarət olur ki, $r \rightarrow \infty$ olduqda $\nu_X(r) \rightarrow 0$. Ənənəyə görə qarışma əmsalları yunan hərfləri ilə işarə olunur. Əgər $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$ üçün

$$\nu_{\gamma, \delta}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup \left\{ \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{(P(A))^\gamma (P(B))^\delta} : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}, P(A)P(B) \neq 0 \right\}$$

götürülərsə, onda $\gamma = \delta = 0$ olduqda Rozenblatt α - əmsalı (güclü qarışma əmsalı), $\gamma = 1, \delta = 0$ olduqda İbrahimov φ - əmsalı (müntəzəm güclü qarışma əmsalı), $\gamma = \delta = 1$ olduqda isə Blüm - Henson - Kupmens ψ - əmsalı alınır. Hebeleyin maksimal korrelyasiya əmsalı və Kolmoqorov mütləq requlyarlıq əmsalı kimi əmsallar da çox istifadə olunur. Bu əmsallar asılılıq ölçülərinin uyğun olaraq:

$$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =$$

$$= \sup \{ \text{corr}(f, g) : f \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P), g \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, P) \}$$

(burada $\text{corr}(\cdot, \cdot)$ - korrelyasiya əmsalıdır) və

$$\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \sup \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)|,$$

(burada yuxarı sərhəd Ω -nın sonlu bölgülərini təşkil edən bütün $A_i \in \mathfrak{A}, i=1, \dots, I, B_j \in \mathfrak{B}, j=1, \dots, J$ üzrə götürülür) ifadələrindən istifadə etdikdə alınır. Yuxarıda qeyd olunan və digər qarışma əmsalları haqqında bax, [1] - [6]. Əgər proses m - asılı proses olarsa [bu anlayış S. N. Bernşteyn tərəfindən daxil olunmuşdur və t -nin ixtiyari qiymətində $\mathfrak{A}_X((-\infty, t])$ və $\mathfrak{A}_X([t+m, \infty))$ minimal σ - cəbrlərini asılı olmamazlığını ifadə edir], onda asılılıq ölçüsü ν ixtiyari olduqda bütün $r \geq m$ üçün $\nu_X(r) = 0$ olur. $\mathcal{A}$ -da ixtiyari σ - cəbrlər cütü üçün $4\alpha \leq \rho \leq 2\varphi^{1/2}, \alpha \leq \beta \leq \varphi \leq \psi$ bərabərsizlikləri ödənilir. Bəzi hallarda daha dəqiq münasibətlər göstərmək olur. Markov prosesləri üçün Q. ş. haqqında [7]-yə bax, [6], [8]-də müxtəlif qarışma şərtlərinin verilmiş halları əks olunan ardıcılıqlara aid misallarda şərh olunmuşdur. Proseslər və martinqal texnikası üçün Q. ş.-nin əlaqəsi haqqında bax, [9]. Semiinvariantlardan istifadə edən Q. ş. üçün bax, [10] - [12]. Requlyarlığın digər anlayışları ilə [məs., $\mathfrak{A} = \bigcap_t \mathfrak{A}_X((-\infty, t])$ σ - cəbrinin trival olması tələb olunduğu hal] Q. ş.-nin münasibətləri haqqında bax,

494 QARŞILIQLI

[1] - [3]. Cüt əlaqələrdən başqa digərlərini də nəzərə alan hiperqarışma haqqında bax, [13].

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [2] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [4] Phillip W., Stout W., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 161; [5] Rosenblatt M., Stationary sequences and random fields, Brekhouses, 1985; [6] Yoshihara K., Weakly dependent stochastic sequences and their application, v. 1-4, Tokyo, 1992-96; [7] Давыдов Ю. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 321-38; [8] Bradley R., «Probab. Theory Related Fields», 1987, v. 74, p. 497-503; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [10] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории случайных процессов, М., 1964; [11] Statulevicius V. A., «Proc. Int. Congr. Math. Vancouver», 1975, v. 2, p. 173-81; [12] Бриллер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. англ., М., 1980; [13] Denscheil J. D., Stroock D. W., Large deviations, Boston, 1989.

QARŞILIQLI ASILI OLMAMAZLIQ « взаимная независимость; mutually independence » - bax, *Asılı olmamazlıq*.

QARŞILIQLI FAZA SPEKTRİ « взаимный фазовый спектр; phase cross spectrum » - bax, *Faza*.

QARŞILIQLI KORRELYASION FUNKSIYA « взаимная корреляционная функция; cross correlation function », qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası, qarşılıqlı kovariasiya funksiyası $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ təsadüfi proseslərinin (və ya meydanlarının) - aşağıdakı üç funksiyalardan biridir:

1) $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ -nin s və t nöqtələrində ikinci tərtib qarışıq momenti -

$$M\zeta_1(t)\zeta_2(s) = B_{12}(t, s), \quad t, s \in T;$$

2) qarışıq mərkəzi moment (kovariasiya) -

$$M[\zeta_1(t) - M\zeta_1(t)][\zeta_2(t) - M\zeta_2(t)] = b_{12}(t, s);$$

3) t və s -in funksiyası kimi, $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(s)$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalı -

$$b_{12}(t, s) / [D\zeta_1(t)D\zeta_2(t)]^{1/2} = \rho_{12}(t, s).$$

Əksər hallarda bu üç funksiyaların hər biri Q. k. f. adlandırılır, lakin bu termin bezen, yalnız $\rho_{12}(t, s)$ funksiyasına şamil olunur, $b_{12}(t, s)$ isə qarşılıqlı korrelyasion funksiya adlandırılır; digər hallarda anlaşılmazlıq yarandıqda, $B_{12}(t, s)$ - qarşılıqlı korrelyasion funksiya, $b_{12}(t, s)$ - mərkəzlənmiş qarşılıqlı korrelyasion funksiya, $\rho_{12}(t, s)$ - normalanmış qarşılıqlı korrelyasion funksiya adlandırılır. $B_{12}(t, s)$, $b_{12}(t, s)$ və $\rho_{12}(t, s)$ funksiyaları, xüsusilə, stasionar təsadüfi proseslərə (və ya $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{Z}^k$ -da biricins təsadüfi meydanlara) tətbiqə, bunlar yalnız $t-s$ fərqiindən asılı olduqda, geniş istifadə olunur.

QARŞILIQLI KORRELYASIYA FUNKSIYASI « взаимная функция корреляции; cross correlation function » - bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

QARŞILIQLI KOVARIASİON FUNKSİYA « взаимная ковариационная функция; cross covariance function » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

* **QARŞILIQLI KOVARIASİYA FUNKSİYASI** « взаимная ковариационная функция; cross covariance function » – $\{\zeta_1(t); t \in T\}$ və $\{\zeta_2(t); t \in T\}$ təsadüfi proseslərinin qarşılıqlı mərkəzi momentinə (kovariasiyası) –

$$b_{12}(t, s) = M[\zeta_1(t) - M\zeta_1(t)][\zeta_2(s) - M\zeta_2(s)]$$

funksiyasına deyilir. $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(s)$, t və s -in qeyd olunmuş qiymətlərində ($s, t \in T$) təsadüfi kəmiyyətlərdir. $b_{12}(t, s)$ – mərkəzlənmiş qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası da adlanır.

QARŞILIQLI KOVARIASİYA OPERATORU « взаимной ковариации оператор; cross covariance operator » – bir təsadüfi elementin digərindən asılılığını xarakterizə edən operatorudur. X və Y – uyğun olaraq, B_1 və B_2 həqiqi separabel Banax fəzalarından qiymətlər alan, ikinci momenti zəif təsadüfi elementlər olsun (qoşma fəzalar B_1^* , B_2^* ilə işarə olunur). Onda

$$b_1^*(R_{XY} b_2^*) = M b_1^*(X) b_2^*(Y) - M b_1^*(X) M b_2^*(Y),$$

$$b_1^* \in B_1^*, b_2^* \in B_2^*$$

bərabərliyi ilə təyin olunan yeganə kəsilməz xətti $R_{XY}: B_2^* \rightarrow B_1^*$ operatoru vardır və bu operator X və Y təsadüfi elementlərinin qarşılıqlı kovariasiya operatoru adlanır. Tərifdən $R_{YX} = R_{XY}^*$ və bütün $b_1^* \in B_1^*$, $b_2^* \in B_2^*$ qiymətləri üçün

$$[b_1^*(R_{YX} b_2^*)]^2 \leq b_1^*(R_{XX} b_1^*) b_2^*(R_{YY} b_2^*)$$

olduğu bilavasitə alınır, burada R_{XX} operatoru R_{YX} -ə qoşma operator, R_{XX} və R_{YY} – uyğun olaraq, X və Y -in kovariasiya operatorlarıdır və əgər X və Y asılı olmayan təsadüfi elementlər olarsa, $R_{XY} = 0$.

Tərif daha ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəzalar üçün də doğrudur.

QARŞILIQLI KVADRATİK XARAKTERİSTİKA « взаимная квадратическая характеристика; mutual quadratic characteristic / mutual variation » – martinqalların – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

QARŞILIQLI RELEY KORRELYASİON FUNKSİYASI « взаимная релейная корреляционная функция; reley cross correlation function » – bax, *Reley korrelyasion funksiyası*.

QARŞILIQLI SPEKTR « взаимный спектр; cross spectrum » – bax, *Spektral sıxlıq(ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI SPEKTRAL FUNKSİYA « взаимная спектральная функция; cross spectral function » – bax, *Spektral sıxlıq(ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI SPEKTRAL SIXLIQ « взаимная спектральная плотность; cross spectral density » – bax, *Spektral sıxlıq(ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI TƏSİR « взаимодействие; interaction / coupling » – bax, *Qeyri – kommutativ əhtimal nəzəriyyəsi*.

QARŞILIQLI TƏSİR(i) faktorların « взаимодействие факторов; interaction » – bax, *Faktor eksperiment*.

QAUSS BƏRABƏRSİZLİYİ « Гаусса неравенство; Gauss inequality » – bax, *Çebişev bərabərsizliyi*.

QAUSS BƏYAZ KÜYÜ « гауссовский белый шум; Gaussian white noise » – bax, *Beyaz küy*.

QAUSS ÇEVİRMƏSİ « Гаусса преобразование; Gauss transform » – bax, *Erqodik məsələlər(i)* diofant yaxınlaşmalarının.

QAUSS DİNAMİK SİSTEMİ « гауссовская динамическая система; Gaussian dynamical system » – ele $(\mathcal{H}, \mu, G)$ üçlüyüdür ki, $\mathcal{H}$, $G = \mathbb{Z}$ -də və ya $\mathbb{R}$ -də yerindəyişməyə görə invariant olan funksiyaların vektor fəzasıdır (ola bilər ki, ümumiləşmiş) və diskret $(\mathbb{Z})$ və ya kəsilməz $(\mathbb{R})$ zamanlı, həqiqi və ya kompleks $X(t)$, $t \in G$ stasionar (dar mənada) Gauss prosesinin demək olar ki, bütün realizasiyalarını özündə saxlayan vektor fəzadır, burada μ – prosesin doğurduğu, $\mathcal{H}$ -də təyin olunmuş ölçüdür. Bu halda G qrupu $\mathcal{H}$ -də μ ölçüsünü saxlamaqla yerindəyişmələrlə təsir göstərir:

$$(T_g f)(\cdot) = f(\cdot + g), g \in G.$$

Təsadüfi stasionar proseslərin ümumi cəhətdən öyrənilməsi baxımından Q. d. s. nəzəriyyəsi olduqca yaxşı inkişaf etmiş qeyri – xətti nəzəriyyəyə misaldır; dinamik sistemlər (invariant ölçülü çevirmələrin) nəzəriyyəsi çərçivəsində isə Q. d. s., əsas etibarilə, spektral nəzəriyyə məqsədlərində yaxşı uyğunlaşdırılmış qeyri – trivial modeldir. Bunu 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov qeyd etmiş, S. V. Fomin isə [1]-də inkişaf etdirmişdir; onlar göstərmişlər ki, Q. d. s.-nin spektrini prosesin spektral ölçüsü terminlərində öyrənmək mümkündür və onun strukturu differensial tənliklər nəzəriyyəsində yaranan klassik dinamik sistemlər spektrinin strukturuna tamamilə oxşamaya bilər. Sonra, tez bir zamanda singulyar kəsilməz sadə spektrli dinamik sisteme ilk misal quruldu (bax, [2]) və [4], [5]-də Q. d. s. spektrlərinin ətraflı nəzəriyyəsi verildi.

Əgər $MX(t) \equiv 0$ olarsa, onda $X(t)$ prosesinin doğurduğu Q. d. s.

$$B(s, t) = b(s - t) = MX(t) \overline{X(s)}$$

korrelyasion funksiyası və ya F spektral ölçüsü:

$$b(u) = \int_{\hat{G}} e^{ihu} dF(u)$$

ilə tamamilə təyin olunur, $\hat{G} = S^1$ və ya $\mathbb{R}$. Q. d. s.-nin metrik nəzəriyyəsinin əsas faktları F terminlərində aşağıdakı kimi ifadə olunur.

1) Q. d. s., yalnız və yalnız, o halda ergodik sistemdir ki, F ölçüsü kəsilməz, Q. d. s.-nin spektri də kəsilməz olsun.

2) Q. d. s., yalnız və yalnız, o halda qanşmadır ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n) = 0$ olsun (bax, [4]).

3) Q. d. s.-nin maksimal spektral tipi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{*n}$$

kompozisiyası vasitəsilə ifadə olunur, burada $F^{*n} = \sigma_0, F^{*n},$

– F ölçüsünün $\hat{G}$ -də n – qat kompozisiyasıdır (bax, [1]). Spektrin təkrarlığı xüsusiyyəti F ölçüsünün daşıyıcısının daha incə arifmetik xassələrindən asılıdır. Təkrarlılıq ya vahidi (sadə spektr), ya qeyri – məhdud dəfə təkrarlanan, ya sonsuz təkrarlanan spektr ola bilər ([2], [5]).

4) Q. d. s.-nin entropiyası F -in mütləq kəsilməz komponenti olmadığı halda sıfır, əgər belə komponent olarsa, sonsuzluğa bərabərdir. Əgər F mütləq kəsilməz komponent olarsa, onda Q. d. s. K – sistemdir (bax, [4]).

5) Mütləq kəsilməz spektrli Q. d. s.-ləri metrik izomorf və Bernulli sistemləridir.

6) İki izomorf Q. d. s.-lərinin metrik izomorfizmi, spektrlər qarşılıqlı mütləq kəsilməz olduqları halda, (s ü r ü ş ə n c ə m l ə m ə adlandırılan) xətti izomorfizm və ya polinomial olmayan izomorfizmdir.

Q. d. s.-nin bütün nəzəriyyəsinin, əslində elə Gauss proseslərinin qeyri – xətti nəzəriyyəsinin prinsipial əsası $L^2_{\mu}(\mathcal{H})$ fəzasının Hermit – Vik polinomial üzrə, yeni çoxqat stoxastik integral – lən üzrə Fok – Viner – İto ayrılışıdır:

$$L^2_{\mu}(\mathcal{H}) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \oplus S^n H,$$

burada S^n , – n -ci simmetrik qüvvət üstü, H , – $\mathcal{H}$ -da xətti ölçülən funksionallar fəzasıdır, yeni $H = L^2_{\mu}(\hat{G})$. Sağ tərəfin multiplikativ strukturu [5]-də verilmişdir. Bu konstruksiya 20-ci əsrin 30-cu illərində kvant meydan nəzəriyyəsində [«Fok bozon fəzası»; bax, [7]] yaranmışdı, sonradan isə N. Vinerin [6]-da və K. İtonun [3]-də əsli olmadan nəzəri – ehtimali işlərində verilmişdir. Aynılış təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində, statistikada, operatorlar nəzəriyyəsində və s. çoxsaylı tətbiqləri ilə seçiyəvidir.

Q. d. s.-nin mühüm ümumiləşmələri çoxölçülü Q. d. s.-ləridir, yeni təsadüfi Gauss meydanlarıdır, bunlar aşağıdakı invariant təriflə əhatə olunurlar: Ümumi Q. d. s. Gauss ölçülü ixtiyari vektor fəzanın xətti çevirmələr qrupudur.

Əd.: [1] Ф о м и н С. В., «Укр. Матем.журн.» 1950, т. 2, № 2, с. 25–47; [2] Г и р с а н о в И. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 851–853; [3] И т ö К., «Japan J. Math.», 1952, v. 22, p. 63–86; [4] К о р н ф е л д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Э р г о д и ч е с к а я т е о р и я, М., 1980; [5] В е р ш и н к А. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 1, с. 9–12, № 2, с. 255–60; [6] В и н е р Н., Н е л и н е й н ы е з а д а ч и в т е о р и и с л у ч а й н ы х п р о ц е с с о в, пер. с англ., М., 1961; [7] С а й м о н Б., Модель $P[\phi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976.

GAUSS KANALI « гауссовский канал; Gaussian channel » – keçid funksiyası şərti Gauss paylanmasını təyin edən rabitə *kanalıdır*. Q. k. üçün bir çox mühüm nəzəri – informasiya xarakteristikaları aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür.

496 GAUSS

Məs., giriş signalı $Y = (\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots)$ stasionar təsadüfi ardıcılığı, çıxış signalı $\tilde{Y} = (\dots, \tilde{Y}_{-1}, \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \dots)$ olan Q. k. üçün; burada

$$\tilde{Y}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k Y_{i-k} + Z_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$Z = (\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots)$ isə Y -dən asılı olmayan stasionar Gauss təsadüfi ardıcılığıdır və $MZ_i = 0$, spektral sıxlıq $f_Z(\lambda)$ -ya bərabərdir, $-1/2 \leq \lambda \leq 1/2$; girişdə

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) d(\lambda) \leq S$$

məhdudiyyəti olduqda, *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* C aşağıdakı düsturda təyin olunur:

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \log \max \left[\left| \frac{a(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \right|^2 \frac{\mu}{f_Z(\lambda)}, 1 \right] d\lambda;$$

burada $a(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-2\pi i k \lambda}$, μ isə

$$\int_{-1/2}^{1/2} \max \left[\mu - \left| \frac{\Phi(\lambda)}{a(\lambda)} \right|^2 f_Z(\lambda), 0 \right] d\lambda = S$$

təniyindən təyin olunur.

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] К о л е с н и к В. Д., П о л т ы р е в Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

GAUSS KOVARIASIYASI « Гаусса ковариация; Gaussian covariation » – B^* -da bixətli formadır:

$$\Phi(f, g) = \int_B f(x)g(x)\mu(dx) - \int_B f(x)\mu(dx) \int_B g(x)\mu(dx),$$

$$f, g \in B^*$$

və B Banach fəzasında *Gauss ölçüsü* μ ilə təyin olunur.

Uyğun $R: B^* \rightarrow B(f(Rg)) = \Phi(f, g)$ operatoru *Gauss kovariasion operatoru* adlanır. Belə operatorlar sinfinin təsviri məsələsi Gauss ölçülərinin təsviri məsələsinə ekvivalentdir. Separabel Hilbert fəzasında Gauss kovariasion operatorların sinfi simmetrik müsbət nüvə operatorları sinfi ilə üst-üstə düşür.

$T = [0, 1], [0, \infty], \dots, C(T)$ fəzası halında Q. k. –

$$R(s, t) = M\zeta(t)\zeta(s) - M\zeta(t)M\zeta(s)$$

{ $\zeta = \zeta(t), t \in T$ } Gauss prosesi ilə təyin olunan funksiya deyilir.

GAUSS QANUNU « Гаусса закон; Gaussian law » – *normal paylanmanın* digər istifadə edilən adıdır. «Q. q.» adı K. Gaussun xətlər nəzəriyyəsində bu paylanmanın oynadığı rol ilə bağlıdır.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \quad h > 0 \quad (*)$$

sıxlıq funksiyaları (ilk əvvəl, məhz bunlar Q a u s s q a n u n u adlandırıldı) K. Gaussun «Səma cisimlərinin hərəkəti nəzəriyyəsi» əsərində (1809. bax. [1]) daxil olunmuşdur. [2. bölmə 3. §. 177]-də belə bir prinsip ifadə olunmuşdur: «Əgər hər hansı kəmiyyət eyni şəraitdə, eyni dəqiqliklə aparılan çoxsaylı müşahidələrdə bilavasitə təyin oluna bilərsə, onda bu kəmiyyət üçün müşahidə olunmuş qiymətlərin ədədi ortası müşahidə olunan qiymətlərdən ən ehtimal olunan qiymətdir...». Bu müddəə aşağıdakı kimi interpretasiya olunur: fərz olunur ki, müşahidə olunan kəmiyyətin əsl qiyməti z -dir və x nəticəsinin alınması ehtimalının sıxlıq funksiyası $\varphi(x-z)$ -dir. Onda ixtiyari n qiymətində və ixtiyari $x_1, \dots, x_n$ üçün $\varphi(x_1-z) \dots \varphi(x_n-z)$ öz maksimumunu $z = (x_1 + \dots + x_n)/n$ qiymətində (z -in funksiyası kimi) alır. Buradan aydındır ki, $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ nisbəti x -dən asılı deyildir və $\varphi(x)$ isə (*) kimi ifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu prinsip dəfələrlə tənqiddə məruz qalmışdır.

Əd.: [1] Г а у с с К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [2] P o i n c a r e H., Calcul des probabilités, 2 éd., P., 1912.

GAUSS MARKOV PROSESİ « гауссовский марковский процесс; Gaussian Markov process », Markov Gauss prosesi, – kəsilməz və ya diskret $t \in \mathbb{R}^1$ və ya $t \in \mathbb{Z}^1$ zaman parametrlili birölçülülük və ya çoxölçülülük Markov prosesidir və bu prosesin qiymətlərinin ixtiyari qrupunun ehtimal paylanması Gauss paylanmalarıdır.

Gauss prosesi özünün orta qiyməti (və ya çoxölçülülük halda orta qiymətlər vektoru ilə) və korrelyasion funksiyası (və ya korrelyasion matrisi ilə) ilə tamamilə verilir. Markov xassəsi prosesin orta qiymətindən asılı olmadığından Q. M. p.-nin orta qiyməti ixtiyari ola bilər; bu halda həmişə prosesin qiymətindən bu orta qiyməti çıxaraq, yalnız orta qiyməti sıfır bərabər olan Q. M. p.-lərinə baxmaq olar. Buna görə də, Q. M. p.-ləri sinfinin təsviri belə proseslərin korrelyasion funksiyalarının (və ya matrislərinin) mümkün formalarının təyin olunmasına gətirilir.

$\zeta(t)$ Gauss prosesinin Markov xassəli olmasından $t > s > u$ olduqda,

$$\hat{M}\{\zeta(t)|\zeta(s), \zeta(u)\} = \hat{M}\{\zeta(t)|\zeta(s)\} \quad (1)$$

olduğu alınır, burada $\hat{M}\{\zeta(t)|\zeta(s), \zeta(u)\}$, – $\zeta(s)$, $\zeta(u)$ -dan, $\hat{M}\{\zeta(t)|\zeta(s)\}$ isə yalnız $\zeta(s)$ -dən xətti asılı olan və $\zeta(t)$ -yə ən yaxşı yaxınlaşmalardır (xətinin kvadratının minimumu mənada).

Orta qiyməti sıfır bərabər olan və korrelyasion funksiyası $M\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ olan birölçülülük $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinə tətbiqdə (1) şərtini aşağıdakı kimi yazmaq olar: $t > s > u$ olduqda

$$B(t, u) = B(t, s)B(s, u)/B(s, s). \quad (2)$$

Korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ olan Gauss prosesinin Markov prosesi olması üçün, (2) şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir (bax, məs., [1], §2, 4). Beləliklə, birölçülülük Q. M. p.-ləri sinfi korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ (2) şərtini ödəyən Gauss prosesləri sinfi ilə üst-üstə düşür.

Əgər Q. M. p. $\zeta(t)$ stasionar olarsa, onda $B(t, s) = B(t-s)$ olur və (2) şərti və $B(t)$ funksiyasının müsbət müəyyənliyi və t -yə görə kəsilməzliyi (əgər t kəsilməzdirsə) tələbindən aşağıdakı münasibət alınır:

$$B(t) = \begin{cases} Ce^{-\alpha|t|}, & C > 0, \alpha > 0, t \in \mathbb{R}^1 \text{ olduqda,} \\ Ca^{|t|}, & C > 0, |a| < 1, t \in \mathbb{Z}^1 \text{ olduqda.} \end{cases} \quad (3)$$

Beləliklə, stasionar cırlaşmayan Q. M. p. zaman parametrinin kəsilməzliyi halında hökmən Ornşteyn – Ulenbek prosesi ilə üst-üstə düşür (bu müddəə C. Duba məxsusdur, bax. [2]).

Ümumi qeyri – stasionar Q. M. p. üçün (2) şərti və $B(t, s)$ nüvəsinin müsbət müəyyənliyi və kəsilməzliyindən geniş requlyarlıq şərtlərində

$$B(t, s) = \begin{cases} \varphi(t)\psi(s), & t \leq s \text{ olduqda,} \\ \psi(t)\varphi(s), & t > s \text{ olduqda} \end{cases} \quad (4)$$

münasibəti alınır, burada $\psi(t)$ – ixtiyari, sıfır bərabər olmayan funksiya, $\varphi(t)$ isə elə kəsilməz funksiyadır ki, $\varphi(t)/\psi(t) = c(t)$ – mənfi olmayan azalmayan funksiya. Korrelyasion funksiyası (4) olan $\zeta(t)$ Gauss prosesi $\zeta(t) = \psi(t)W(c(t))$ şəklində ifadə oluna bilər, burada $W(t)$ – standart Viner prosesidir, belə $\zeta(t)$ prosesi Markov prosesidir.

Orta qiyməti sıfır bərabər çoxölçülülük Q. M. p. $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t)\}$ özünün korrelyasion matrisi $B(t, s) = \|M\zeta_i(t)\zeta_j(s)\|$ ilə verilir; əgər $B(t, s)$ çevrilən matrisdirsə, onda $t > s$ olduqda $\hat{M}\{\zeta(t)|\zeta(s)\} = R(t, s)\zeta(s)$, $R(t, s) = B(t, s)[B(s, s)]^{-1}$ olur ($B(s, s)$ çevrilməyən matris olduğu halda $R(t, s)$ üçün ifadə [3]-də verilmişdir). Bu halda $\zeta(t)$ -nin çoxölçülülük Q. M. p. olması üçün $t \geq s \geq u$ olduqda $R(t, u) = R(t, s)R(s, u)$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir (və ya bu şərtə ekvivalent $R(u, t) = R(u, s)R(s, t)$ şərtinin ödənilməsi; bax, [3]). Müəyyən xətti stoxastik differensial tənliklər sisteminin həlləri çoxölçülülük Q. M. p.-ləridir və n -ölçülülük Q. M. p.-nin təkrarlılıq sayı (rus. кратность) n -i aşma bilməz (bax, [4]).

Stasionar çoxölçülülük Q. M. p. $\zeta(t)$ üçün $B(t, s) = B(s-t)$ olması təbii. Belə proseslər [3] – [6]-də öyrənilmişdir, xüsusi halda, burada göstərilmişdir ki, qeyri – singular matrisi $B(0)$ olan kəsilməz Gauss stasionar prosesi, yalnız və yalnız, o halda Q. M. p.-dir ki, onun korrelyasion matrisi $B(t)$, $t > 0$ olduqda,

$B(t) = B(0)e^{Qt}$ şəklində ifadə olunsun, burada Q – müsbət həqiqi hissələrli məxsusi qiymətləri olmayan sabit matrisdir. Buradan, xüsusi halda, [7]-dəki nəticələr alınmışdır və burada, ikiölçülülük Q. M. p.-nin korrelyasion matrisinin elementləri üçün aşkar düsturlar verilmişdir. Alınan bu nəticələrdən C. Dubun belə bir nəticəsi də (bax, [5]) isbat olunmuşdur ki, kəsilməz zamanlı birölçülülük stasionar Gauss prosesi, yalnız və yalnız, o halda çoxölçülülük stasionar Q. M. p.-nin komponentidir ki, onun spektral funksiyası $F(\lambda)$ -nin yalnız sonlu sayda kəsilmə nöqtələri olsun,

kəsilməz $F(\lambda)$ komponenti isə λ -ya görə rəşional $F'(\lambda)$ törəməsi olan mütləq kəsilməz funksiya olsun.

Diskret zamanlı stasionar proseslər üçün analoji nəticə [5]-də isbat olunmuşdur, lakin bu halda, λ rəşional funksiyası $e^{i\lambda}$ irrəşional funksiya ilə əvəz olunmalıdır.

Q. M. p. haqqında qeyd olunmuş nəticələr geniş mənada Markov proseslərinə aid nəticələr kimi asanlıqla ifadə oluna bilər (bax, məs., [3], [4]). Bax, *Təsadüfi proses; sıfırlar*.

Əd.: [1] Ламперти Дж., Случайные процессы. Обзор математической теории, пер. с англ., К., 1983; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Beutler F. J., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 2, p. 424–38; [4] Mandrekar V., «Nagoya Math. J.», 1968, v. 33, p. 7–19; [5] Doob J. L., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 229–82; [6] Wang M. C., Uhlenbeck G. E., «Rev. Mod. Phys.», 1945, v. 17, № 2–3, p. 323–42; [7] Калмыков Г. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, № 3, с. 495–98.

QAUSS MODELİ « Гаусс модель; Gauss model » əynidəqiqətli asılı olmayan müşahidələr halı – bax, *Xətlər nəzəriyyəsi*.

QAUSS ÖLÇÜSÜ « гауссовская мера; Gaussian measure », Gauss paylanması, normal paylanma, – sonluölçülü Evklid fəzasında və ya sonsuzölçülü vektor fəzasında ən çox təsadüf olunan və ən mühüm ehtimal ölçülərindən biridir. Sonluölçülü halda Q. ö., əksər hallarda, normal paylanma adlandırılır. Bu halda Q. ö.-nün tərif və əsas xassələri haqqında (bibliografiya ilə birlikdə) *Normal paylanma* məq.-nə, sonsuzölçülü hal üçün *Qauss ölçüsü* Banach fəzasında məq.-nə bax.

Abstrakt qrupda Q. ö. anlayışını daxil etmək olar (bax, *Qauss paylanması* lokal kompakt Abel qrupunda).

Bax, *Təsadüfi ölçü*.

QAUSS ÖLÇÜSÜ Banach fəzasında « гауссовская мера в банаховом пространстве; Gaussian measure in Banach space » – həqiqi separabel Banach fəzası B -də μ ehtimal ölçüsüdür, bu ölçünün $b^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionallara uyğun bütün birölçülü (buna görə də, bütün sonluölçülü) proyeksiyalı $\mu_{b^*} = \mu_0 \circ b^{*-1}$ – ədəd

oxu $\mathbb{R}^1$ -də və ya $\mathbb{R}^n$ -də *Qauss ölçüləridir*. Başqa sözlə, B fəzasına qoşma B^* fəzasının hər bir elementi b^* üçün μ_{b^*} ya bir nöqtədə toplanmış ölçüdür və ya b^* -dan asılı $\alpha \in \mathbb{R}^1$ və $d > 0$ ədədləri vardır ki, hər bir Borel çoxluğu $E \subset \mathbb{R}^1$ üçün

$$\mu_{b^*}(E) = \mu(b^{*-1}(E)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_E \exp \left\{ -\frac{(t-\alpha)^2}{2d} \right\} dt$$

bərabərliyi doğrudur. Bu tərif A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1935-də verilmişdir (bax, [1]).

Q. ö. μ -nün xarakteristik funksionalı

$$\hat{\mu}(b^*) = \exp \{ i b^*(m) - b^*(Rb^*)/2 \}, \quad b^* \in B^* \quad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $m \in B$ və $R, -$ B^* -dan B -yə xətti simmetrik kəsilməz müsbət operatorudur. m elementi – orta qiymətdir, $R, -$ μ ölçüsünün kovariasion operatorudur. Sonluölçülü haldan fərqli olaraq, B sonsuzölçülü fəza olarsa, (1)

şəklində ifadə olunan ixtiyari funksional B -də hər hansı μ ölçüsünün xarakteristik funksionalı olmaya da bilər (R üzərinə B fəzasının həndəsəsindən asılı olan əlavə məhdudiyyətlər qoyulmalıdır). Əgər belə ölçü mövcud olarsa, aydındır ki, o, Gauss ölçüsü olacaqdır. Bu əlavə şərtlərin təsviri B -də bütün Gauss ölçülərinin sinfinin təsviri ilə eynigüclüdür.

Əgər $B = l_p, 1 \leq p < \infty$ olarsa, əlavə zəruri və kafi şərt

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f_k(Rf_k)]^{p/2} < \infty \quad (2)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $f_k, k=1, 2, \dots$ – koordinat funksionallarının ardıcılığıdır. Xüsusi halda, ixtiyari (separabel) Hilbert fəzasında əlavə şərt – kovariasion R operatorunun nüvə operatoru olmasıdır (Murye – Proxorov teoremi).

(2) şərtinə münasib mənada analoji zəruri və kafi şərt hər hansı kotip və şərtsiz bazisə malik Banach fəzasında da doğru olur. Ümumi halda, ixtiyari Q. ö.-nün kovariasion operatoru nüvə operatorudur. Tərsi həmişə doğru olmur: B^* -dan B -yə ixtiyari simmetrik və müsbət nüvə operatoru hər hansı B -də Q. ö.-nün kovariasion operatoru, yalnız və yalnız, o halda ola bilər ki, Banach fəzası 2 tip fəza olsun. 2 kotip Banach fəzası B -də və yalnız belə fəzalarda ixtiyari Q. ö. μ hər hansı köməkçi Hilbert fəzasında hər hansı Q. ö.-nün xətti kəsilməz obrazıdır, yeni ixtiyari belə ölçünün kovariasion operatorunu $R = ASA^*$ şəklində faktorizasiya etmək mümkündür, burada $A, -$ H -dan B -yə xətti kəsilməz operatorudur, $A^*, -$ A -ya qoşma operatorudur, $S, -$ H -da simmetrik müsbət nüvə operatorudur.

Kəsilməz funksiyalar fəzasında Q. ö.-lərinin kovariasion operatorların sinfinin təsviri məsələsi Gauss təsadüfi prosesinin trayektoriyalarının kəsilməzlik şərtlərinin tapılması məsələsi ilə eynigüclüdür. Son zamanlar bu məsələnin həlli istiqamətində böyük proqrese nail olunmuşdur (bax, [4]). B fəzasında ixtiyari Q. ö. μ üçün «0 və ya 1» qanunu doğrudur: B fəzasında ixtiyari ölçülən altfəzanın μ ölçüsü ya 0-a, ya da ki, 1-ə bərabərdir. B -də ixtiyari iki Q. ö. ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz, yaxud qarşılıqlı singulardır (Q. ö.-nün dixotomikliyi). Bu iki şərt ödənildikdə requlyarlıq şərtləri, həm də sıxlığın şəklində bu ölçülərin orta qiymətləri və kovariasion operatorları terminlərində ifadə olunur.

Əgər μ orta qiyməti sıfıra bərabər, kovariasion operatoru R olan, B -də Q. ö. olarsa, onda μ ölçüsünün daşıyıcısı – RB^* obrazının B -də qapayıcısıdır. Xüsusi halda, əgər μ cırlaşmış ölçü deyildirsə ($RB^* = 0$ olduqda, $b^* = 0$ olduğu alınır), onda μ -nün daşıyıcısı bütün B fəzasıdır. Buna əsasən, faktorizasiya lemmasından istifadə edərək (bax, *Kovariasion operatoru* (u) ehtimal ölçüsünün), göstərmək olur ki, B -də hər bir cırlaşmayan mərkəzlənmiş Q. ö. – abstrakt Viner ölçüsüdür. Kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ -də adi Viner ölçüsü orta qiyməti sıfıra bərabər, kovariasion operatoru

$$(Rf)(t) = \int_0^1 \min(t, s) df(s)$$

şəklində, $C[0, 1]$ -də Q. ö.-dür.

B -də ixtiyari μ Q. ö.-nə görə elementin normasının eksponentsial inteqrallanmasını da qeyd etmək olar. Əgər $\alpha < \frac{1}{2} \|R\|$

olarsa, $\int_B \exp \{ \alpha \| \cdot \|^2 \} d\mu(\cdot) < \infty$.

B – ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəza olduğu halda da Q . ö.-nün tərfi öz qüvvəsində qalır. Bu ümumi halda bezen, $\Gamma - Q$ a u s s ö l ç ü s ü tərfinə də təsadüf edilir, burada $\Gamma - B^*$ -nün hər hansı total altfəzasıdır (Γ -dən olan xətti funksionallara uyğun birölçülü proyeksiyaların Qauss proyeksiyaları olması tələb olunur). Əgər B metriklenen, tam, separabel fəza olarsa, onda $\Gamma -$ qaussluluq ixtiyarı total Γ fəzası üçün adi B^* – qaussluluq ilə eynigüclüdür. Ölçü Radon ölçüsü olarsa, Qauss ölçüsünün bütün xassələri öz qüvvəsində qalır.

Əd.: [1] Kolmogorov A. N., «C. r. Acad. sci. Paris», 1935, t. 200, p. 1717–18; [2] Vakhaniya N. N., «C. r. Acad. sci. Paris», 1965, t. 260, p. 1560–62; [3] Talagrand M., «Acta math.», 1987, v. 159, № 1–2, p. 99–149; [4] Г о X. – С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979.

QAUSS PAYLANMASI «гауссовское распределение; Gaussian distribution» – bax, Qauss – Laplas paylanması, Normal paylanma.

QAUSS PAYLANMASI lokal kompakt Abel qrupunda «гауссовское распределение на локально компактной абелевой группе; Gaussian distribution on a locally compact Abelian group» – G qrupunda aşağıdakı şərtləri ödəyən γ paylanmasıdır:

1) γ – sonsuz bölünən paylanmadır.

2) əgər $\gamma = e(F) * \nu$ olarsa, burada $e(F)$ – F ölçüsü ilə uyğunlaşdırılmış ümumiləşmiş Puasson paylanmasıdır. ν isə sonsuz bölünən paylanmadır, onda F ölçüsü sıfırdan cırışır.

$G = \mathbb{R}^n$ qrupu üçün bu tərif klassik təriflə üst-üstə düşür.

Qauss paylanması γ -nın daşıyıcısı G qrupunun hər hansı əlaqəli altqrupunun əlaqəlilik sinfidir.

G qrupunda γ paylanması, yalnız və yalnız, o halda Qauss paylanmasıdır ki, onun xarakteristik funksiyası

$$\hat{\gamma}(\bar{g}) = (g, \bar{g}) \exp \{ -\varphi(\bar{g}) \} \quad (*)$$

şəklində ifadə olunsun, burada $(g, \bar{g})$ – g elementində $\bar{g}$ -nin xarakteri, $\varphi(\bar{g})$ – $\bar{G}$ -də kəsilməz mənfii olmayan, $\varphi(\bar{g}_1 + \bar{g}_2) + \varphi(\bar{g}_1 - \bar{g}_2) = 2[\varphi(\bar{g}_1) + \varphi(\bar{g}_2)]$ tənliyini ödəyən funksiyadır, burada $\bar{G}$ – G qrupunun xarakterlər qrupudur (bax, [1]).

Əgər Qauss paylanması γ -nın xarakteristik funksiyasının (*) ifadəsində $g=0$ olarsa, o, simmetrik Qauss paylanması adlanır. $\Gamma(G)$ – G qrupunda Q . p.-lərinin çoxluğu, $\Gamma^s(G)$ – G -də simmetrik Q . p.-ləri çoxluğu olsun. $\gamma \in \Gamma^s(G)$ paylanması vektor fəzada (sonluölçülü $\mathbb{R}^n$ və ya sonsuzölçülü $\mathbb{R}^\infty$ -da) Q . p.-nin kəsilməz homomorf obrazıdır (bax, [2]).

Əgər γ paylanması G -də γ_t , $t>0$ kəsilməz birparametrlı paylanmalarının semi – qrupuna əlavə oluna bilinsə, onda $\gamma \in \Gamma(G)$ münasibəti, yalnız və yalnız, G qrupunun ixtiyarı sıfır ətrafı U üçün

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_t(G \setminus U)}{t} = 0$$

münasibəti ödənilməli halda doğrudur (bax, [4]).

G – əlaqəli qrup, $\gamma \in \Gamma(G)$ olsun. Əgər G qrupu lokal əlaqəli deyilsə, onda γ singulyar paylanmadır (Haar ölçüsü m_G -yə nəzərən) (bax, [2]). Əgər G lokal əlaqəlidirsə və sonlu dim. – ölçülüdürsə, onda γ ya mütləq kəsilməz, ya da ki, singulyar paylanmadır. Sonsuz dim. – ölçülü lokal əlaqəli qruplarda analoji müddəanın doğruluğu haqqında məsələyə baxılmamışdır, amma belə qruplarda mütləq kəsilməz Q . p., hətta singulyar Q . p. belə qurmaq mümkündür.

Vektor fəzada Q . p. üçün sonlu dim. – ölçülü əlaqəli qruplarda alternativ doğrudur: ixtiyarı iki Q . p. ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz, ya qarşılıqlı singulyardırlar.

Əd.: [1] Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 115–46; [2] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 549–69; [3] Фельдман Г. М., «Арифметика вероятностных распределений и характеристические задачи на Абелевых группах», К., 1990; [4] Forst G., «Math. Scand.», 1974, v. 34, p. 211–18.

QAUSS PROSESİ «гауссовский процесс; Gaussian process» – ixtiyarı sonluölçülü paylanmalar Qauss paylanmalar olan, yeni $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmalarının uyğun xarakteristik funksiyaları ixtiyarı $t_1, \dots, t_n \in T$ qiymətlərində

$$\begin{aligned} \varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \\ = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n A(t_k) u_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n B(t_k, t_j) u_k u_j \right\} \end{aligned}$$

düsturu ilə ifadə olunan $\zeta = \zeta(t)$, $t \in T$ heqiqi təsadüfi prosesidir, burada

$$A(t) = \mathbf{M} \zeta(t)$$

niyazi gözlemə və

$$B(t, s) = \mathbf{M} [\zeta(t) - A(t)][\zeta(s) - A(s)]$$

korrelyasion funksiyadır. $\zeta = \zeta(t)$ Q . p.-nin ehtimal paylanmaları onun niyazi gözleməsi $A(t)$ və korrelyasion funksiyası $B(t, s)$, $s, t \in T$ ilə tamamilə təyin olunur.

İxtiyarı $A(t)$ funksiyası və ixtiyarı müsbət müəyyən $B(t, s)$ funksiyası üçün $\zeta(t)$ Q . p. vardır ki, onun orta qiyməti və korrelyasion funksiyası məhz $A(t)$ və $B(t, s)$ -dir. İxtiyarı $\zeta_1(t_1), \dots, \zeta_n(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmaları Qauss paylanmaları olarsa, vektor qiymətləri $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_m(t)\}$ çoxölçülü təsadüfi prosesi Qauss prosesi adlanır.

Heqiqi $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ prosesləri küllüyyatca ikiölçülü Q . p. emelə gətirinsə, $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i \zeta_2(t)$ şəklində təsadüfi proses $\zeta = \zeta(t)$, $t \in T$ – kompleks Qauss prosesi adlanır. Bezen $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i \zeta_2(t)$ kompleks Q . p. dedikdə, əlavə bir şərtin: $\mathbf{M} \zeta(s) \zeta(t) = A(s) A(t)$ şərtinin də ödənilməsi nəzərdə tutulur, burada $A(t) = \mathbf{M} \zeta(t)$. Bu şərt ona görə daxil edilir ki, adi Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinə xas olan qeyri – korrelyarlığın asılı olmamalıq xassəsinə

ekvivalentliliyi qorunub saxlanılsın. Bu xüsusiyyət aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\zeta_1(t) - A_1(t)][\zeta_1(s) - A_1(s)] &= \\ = \mathbf{M}[\zeta_2(t) - A_2(t)][\zeta_2(s) - A_2(s)] &= \operatorname{Re} B(t, s)/2, \\ \mathbf{M}[\zeta_1(t) - A_1(t)][\zeta_2(s) - A_2(s)] &= -\operatorname{Im} B(t, s)/2, \end{aligned}$$

burada $B(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - A(t)][\overline{\zeta(s) - A(s)}]$, $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası və $A_1(t) = \mathbf{M}\zeta_1(t)$, $A_2(t) = \mathbf{M}\zeta_2(t)$.

Xarakteristik funksionalı

$$\varphi_{\zeta}(u) = e^{iA(u) - B(u, u)/2}, \quad u \in U$$

şeklinde olan, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ heqiqi ümumiləşmiş təsadüfi prosesi, U vektor fəzasında ümumiləşmiş Q. p. adlanır, burada $A(u) = \mathbf{M}\langle u, \zeta \rangle$ – ümumiləşmiş prosesin riyazi gözləməsi, $B(u, v) = \mathbf{M}[\langle u, \zeta \rangle - A(u)][\langle v, \zeta \rangle - A(v)]$ – onun korrelyasion funksionalıdır.

U , $-(u, v)$ skalyar hasilili təyin olunmuş Hilbert fəzası olsun, $u, v \in U$. Əgər $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ şəkilli təsadüfi proses ümumiləşmiş Q. p.-dirsə, qiymətlərini U fəzasından alan ζ təsadüfi kəmiyyəti Qauss təsadüfi kəmiyyəti adlanır. Bu halda, $A(u)$ riyazi gözləməsi xətti kəsilməz funksional, $B(u, v)$ korrelyasion funksiyası U Hilbert fəzasında bixətti kəsilməz funksionaldır; $B(u, v) = (Bu, v)$, $u, v \in U$ və müsbət B operatoru ($\zeta \in U$ təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasion operatoru) nüvə operatorudur. İxtiyari belə $A(u)$ və $B(u, v)$ üçün elə $\zeta \in U$ Qauss kəmiyyəti vardır ki, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ ümumiləşmiş prosesinin məhz $A(u)$ və $B(u, v)$ -yə bərabər riyazi gözləməsi və korrelyasion funksiyası vardır.

Misal. $\zeta = \zeta(t)$, $T = [a, b]$ parçasında Q. p. olsun, $\zeta(t)$ prosesinin ölçülən və

$$\int_a^b \mathbf{M}[\zeta(t)]^2 dt < \infty$$

olduğu fərz olunur. Onda $\zeta(t)$, $t \in T$ prosesinin sanki bütün trayektoriyaları T parçasında kvadratı ilə inteqrallanan $u = u(t)$ funksiyalarının

$$(u, v) = \int_a^b u(t) v(t) dt$$

skalyar hasilili təyin olunmuş fəzadandır.

$$\langle u, \zeta \rangle = \int_a^b u(t) \zeta(t) dt, \quad u \in U$$

düsturu qeyd olunan U fəzasında ümumiləşmiş Q. p. təyin edir. Bu halda, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$ ümumiləşmiş prosesinin riyazi gözləməsi və korrelyasion funksionalı, uyğun olaraq

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_a^b u(t) A(t) dt, \\ B(u, v) &= \int_a^b \int_a^b B(t, s) u(t) v(s) dt ds \end{aligned}$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada $A(t)$ və $B(t, s)$ – uyğun olaraq, $T = [a, b]$ parçasında ilkin $\zeta = \zeta(t)$ prosesinin riyazi gözləməsi və korrelyasion funksiyasıdır.

t parametri ixtiyari T çoxluğunda dəyişdiyi halda $\zeta = \zeta(t)$

Q. p.-nin bütün esas xassələrini, bu prosese bütün Y təsadüfi kəmiyyətlərinin Hilbert fəzası H -da əyri kimi baxdıqda, həndəsi terminlərlə ifadə etmək mümkündür; bu halda $\mathbf{M}Y_1^2 < \infty$,

$(Y_1, Y_2) = \mathbf{M}Y_1Y_2$, $-H$ -da təyin olunmuş skalyar hasilidir və $(\zeta(t), 1) = A(t)$, $(\zeta(t) - A(t), \zeta(s) - A(s)) = B(t, s)$.

Dar mənada stasionar Q. p.-lərini bezi dinamik sistemlər vasitəsilə reallaşdırmaq mümkün olur (trayektoriyalar fəzasında yerindəyişmə, bax, [1]). Alınan dinamik sistemlər (bunlar bezen normal dinamik sistemlər adlandırılır, normal ehtimal paylanması ilə müqayisə et) kəsilməz spektrli dinamik sistemlərə aid misallar kimi verilir. «Klassik olmayan» spektral xassələrli dinamik sistemlərə aid konkret ilk misallar belə qurulmuşdu.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] Крамер Г., Линдбергер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Ито К., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 157–69; [5] Ито К., «Japan J. Math.», 1952, v. 22, p. 63–86.

QAUSS PROSESİ; statistik məsələlər «гауссовский процесс; статистические задачи; Gaussian process; statistical problems» – bax, Statistik məsələlər(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

QAUSS PROSESİ; Viner inteqralları ilə ifadə «гауссовский процесс; представление с помощью винеровских интегралов; Gaussian process; representation by Wiener integrals» – asılı olmayan artımlı, m -ölçülü $\zeta(t)$, $t \geq 0$ Qauss prosesinin

$$\zeta(t) = A(t) + \zeta(0) + \sum_{k=1}^m \int_0^t \sqrt{\rho_k(t)} e_k(t) dY_k(t)$$

şeklinde ifadəsidir, burada $\mathbf{M}\zeta(t) = A(t)$, $\mathbf{M}(\zeta(t) - A(t), x)^2 = (B(t)x, x)$; $\{e_k(t), \rho_k(t), k = 1, 2, \dots, m\}$ – ortonormalanmış məxsusi vektorların və $B'(t)$ operatorunun uyğun məxsusi ədədlərinin sistemidir; $B'(t)$ operatoru

$$B(t) = \int_0^t B'(s) d\lambda(s)$$

münasibətilə təyin olunur, burada $\lambda(t) = \text{tr} B(t)$, $B(t)$ operatorunun izi, $Y_k(t)$, $k = 1, \dots, m$ – asılı olmayan artımlı asılı olmayan birölçülü proseslərdir və bunlar üçün $\mathbf{M}Y_k(t) = 0$, $\mathbf{M}Y_k^2(t) = \lambda(t)$.

Əd.: [1] Скорород А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

QAUSS SEMİMARTİNGALI « гауссовский семимартингал; Gaussian semimartingale » – semimartinqal olan $\zeta(t)$, $t \geq 0$ Qauss prosesidir, bir sıra xüsusi xassələrə malikdir. $\zeta(t)$ prosesinin trayektoriyalarının soldan limitləri vardır və sağdan kəsilməzdir. $\zeta(t)$ prosesi üçün sıçrayışlar prosesi $\Delta\zeta(t)$, $t \geq 0$ təyin olunur və $\Delta\zeta(0) = 0$, $\Delta\zeta(t) = \zeta(t) - \lim_{s \uparrow t} \zeta(s)$, $t > 0$. $\zeta(t)$ prosesinin ayrılığı aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \zeta'(t) + \zeta''(t),$$

burada

$$\zeta'(t) = \int_0^t I_{\mathbb{R}_+ \setminus H}(s) d\zeta(s), \quad \zeta''(t) = \int_0^t I_H(s) d\zeta(s)$$

– stoxastik integrallardır, $H = \{t > 0 : \mathbf{P}\{\Delta\zeta(t) = 0\} = 1\}$. Bu halda $(\zeta(0), (\zeta''(t)), (\zeta''(t)))$ Qauss sistemi təşkil edir. $(\zeta''(t))$, $t \geq 0$ kəsilməz semimartinqaldır, $(\zeta''(t))$ və $(\zeta''(t))$ – üst-üstə düşən, determinə olunmuş və H -dan qiymətlər alan kəsilmə anlarıdır. $\zeta(t)$ prosesi – ayrılığı

$$\zeta(t) = \zeta(0) + A(t) + M(t)$$

düsturu ilə ifadə olunan, σ – cəbrlərin tamamlanmış $\mathbb{A}_{\mathbb{R}^+}^{\zeta} = (\mathcal{A}_{\mathbb{R}^+}^{\zeta})_{t \geq 0}$ axınına nəzərən ele xüsusi semimartinqaldır ki, (A_t) , $t \geq 0$ – öngörül proses, $(M(t))$, $t \geq 0$ – lokal martinqaldır və bunlar üçün $\mathbf{M} \text{var}^2(A(t)) < \infty$, $\mathbf{M}M^2(t) < \infty$, $t > 0$ şərtləri də ödənilir, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}^+}^{\zeta} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma\{\zeta(s), s \leq t + \varepsilon\}$ və $(\zeta(0), (A(t)), (M(t)))$ Qauss sistemi əmələ gətirir.

Q a u s s s e m i m a r t i n q a l ı hər bir Qauss prosesi kimi orta qiymət funksiyası $a(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$ və korrelyasion $\Gamma(s, t) = \text{cov}(\zeta(t), \zeta(s))$ funksiyası ilə tamamilə ifadə olunur. Q. s.-nin $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ funksiyaları sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan, lokal məhdud variasiyalı funksiyalardır; $\Gamma(s, t)$ üçün bu onu ifadə edir ki, $\Gamma(s, 0)$, $\Gamma(0, t)$ – lokal məhdud variasiyalı funksiyalardır və

$$\sup \sum_{i,j} |\Gamma(s_{i+1}, t_{j+1}) + \Gamma(s_i, t_j) - \Gamma(s_i, t_{j+1}) - \Gamma(s_{i+1}, t_j)| < \infty,$$

burada $\sup$ ixtiyari s və t qiymətlərində bütün mümkün olan $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = s$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = t$ bölgüləri üzəredir.

$\zeta(t)$, $t \geq 0$ Qauss prosesinin semimartinqal xarakterizasiyası $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ funksiyaları terminlərində aşağıdakı kimi ifadə olunur.

T e o r e m. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

1) $\zeta(t)$, $t \geq 0$ – Qauss semimartinqaldır;

2) $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan lokal məhdud variasiyalı funksiyalar olarsa, sağdan kəsilməz azalmayan ele $F = F(t)$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $s < t$ və ixtiyari sadə, $f_s(u) = 0$ şərtini ödəyən $f_s = f_s(u)$, $u \geq 0$ funksiyası üçün $u > s$ olduqda

$$\left| \int_s^t \int_s^s f_s(v) d\Gamma(v, u) \right| / \left| \int_0^s \int_0^s f_s(v) f_s(u) d\Gamma(v, u) \right|^{1/2} \leq \leq F(t) - F(s)$$

berabersizliyi doğrudur.

Markov halında bu berabersizlik

$$|\Gamma(s, t) - \Gamma(s, s)| / \Gamma^{1/2}(s, s) \leq F(t) - F(s)$$

berabersizliyinə ($0/0 = 0$ ferz olunur), lokal məhdud variasiyalı $\zeta(t)$ prosesi halında isə

$$(\Gamma(t, t) + \Gamma(s, s) - 2\Gamma(s, t))^{1/2} \leq F(t) - F(s)$$

berabersizliyinə çevrilir.

Əgər Qauss prosesi $\zeta(t)$ lokal martinqaldırsa, onda $\zeta(t)$ – kvadratik integrallanan martinqaldır, $a(t) \equiv \mathbf{M}\zeta(0)$, $\zeta(t)$ – asılı olmayan artımlı prosesdirə.

$$\Gamma(t, s) = \mathbf{M}(\zeta(s) - \zeta(0))^2 \wedge \mathbf{M}(\zeta(t) - \zeta(0))^2,$$

$\zeta(t) = \zeta(0) + \zeta^c(t) + \zeta^d(t)$ ayrılışında iştirak edən kəsilməz lokal ζ^c martinqalı, sırf kəsilməz lokal ζ^d martinqalı $\zeta(0)$ ilə birlikdə Qauss sistemini əmələ gətirir. Bu halda

$$\zeta^d(t) = \int_0^t I_H(s) d\zeta(s), \quad \text{burada} \quad H = \{t > 0 : \mathbf{M}\zeta^2(t) - \lim_{s \uparrow t} \mathbf{M}\zeta^2(s) > 0\}.$$

$\zeta(t)$ Qauss martinqalının öngörül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \nu)$ onun kanonik semimartinqal ifadəsinə müvafiq olub, aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$B_t \equiv 0, \quad C_t = (\mathbf{M}(\zeta(t) - \zeta(0))^2)^c, \quad \nu^c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{i\lambda x} \nu(\{x\}, dx) = \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2} \left[\mathbf{M}\zeta^2(t) - \lim_{s \uparrow t} \mathbf{M}\zeta^2(s) \right] \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in H.$$

Öngörül karakteristikaların tripleti $T = (B, C, \nu)$ -yə malik ixtiyari $\zeta(t)$ lokal martinqal, əgər T tripleti determinə olunmuşdursa, $B = 0$, $\nu^c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$ olduğu halda və $\lambda \in \mathbb{R}$ olduqda

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{i\lambda x} \nu(\{t\}, dx) = \\ = I(\nu(\{t\}), \mathbb{R} \setminus \{0\} > 0) \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^2 \nu(\{u\}, dx) \right)$$

olarsa, Qauss prosesidir. Bu halda $\zeta(t)$ asılı olmayan artımlı Qauss prosesidir,

$$\begin{aligned} M(\zeta(t) - \zeta(s)) &= 0, \\ M(\zeta(t) - \zeta(s))^2 &= C_t - C_s + \\ &+ \sum_{s < u \leq t} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^2 \nu(\{u\}, dx), \quad s < t. \end{aligned}$$

Əd.: [1] Stricker C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 64, S. 303–12; [2] Липцер Р. III, Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

QAUSS SİLİNDRİK ÖLÇÜSÜ «гауссовская цилиндрическая мера; Gaussian cylindrical measure» – həqiqi Banax və ya ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəzası U -da təyin olunan, kəsilməz xətti funksionallara uyğun bütün birölçülü proyeksiyaları (buna görə də, bütün sonluölçülül) $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunda (və ya $\mathbb{R}^n$) Qauss ölçüləri olan silindrik ölçüdür. Bu – μ silindrik ölçüsünün karakteristik funksionalının

$$\hat{\mu}(u^*) = \exp \{im(u^*) - r(u^*)/2\}, \quad u^* \in U^* \quad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunması ilə eynigüclüdür, burada m – ixtiyari xətti forma, r – qoşma U^* fəzasında ixtiyari kvadratik formadır.

U -da ixtiyari Qauss ölçüsünün silindrlər cəbrinə daralması Q. s. ö.-dür, lakin ixtiyari Q. s. ö.-nü belə üsulla almaq mümkün olmur, yeni ixtiyari Q. s. ö. ölçüyə qədər (hesabi – additiv) davam olunmaya bilər. Əgər H Hilbert fəzasıdırsa (sonsuzölçülül), onda karakteristik funksionalı

$$\hat{\mu}(h) = \exp \{-\|h\|^2/2\}, \quad h \in H$$

şəklində olan, H -da təyin olunmuş Q. s. ö. standart (və ya kanonik) Qauss silindrik ölçüsü adlanır. Standart Q. s. ö. ölçüyə qədər davam olunmur.

U -da Q. s. ö. μ , yalnız və yalnız, o halda hər hansı Hilbert fəzasında standart Q. s. ö.-nin xətti kəsilməz obrazıdır ki, (*) ifadəsində onun karakteristik funksionalı üçün $m=0$ və r kvadratik forması $R:U^* \rightarrow U$ xətti simmetrik operatorunun doğruduğu formadır, yəni $r(u^*) = u^*(Ru^*)$. Belə Q. s. ö. ölçüyə qədər, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilinir ki, R Qauss kovariasion operatorlar sinfindən olsun (bax, Qauss ölçüsü Banax fəzasında).

QAUSS TƏSADÜFİ ÇOXLUĞU «гауссовское случайное множество; Gaussian random set» – S Banax fəzasında qapalı təsadüfi A çoxluğudur, aşağıdakı

xassələrə malikdir: 1) onun realizasiyaları 1 ehtimalla qabarıqdır; 2) S -ə qoşma S^* fəzasının vahid radiuslu küresində təyin olunmuş $f(x) = \sup_{y \in A} x(y)$ funksiyası Qauss təsadüfi funksiya-

sıdır, burada $x, -S$ -də xətti məhdud funksional, $\|x\| = 1$.

Əd.: [1] Ляшенко Н. Н., «Зап. науч. семин. Ленингр. отд. Матем. ин.-та АН СССР», 1980, т. 98, с. 115–39.

QAUSS TƏSADÜFİ ELEMENTİ «гауссовский случайный элемент; Gaussian random element» – qiymətləri həqiqi Banax və ya ümumi lokal topoloji U vektor fəzasından, paylanması U -da Qauss ölçüsü olan təsadüfi elementdir. Başqa sözlə, əgər hər bir xətti kəsilməz $u^* \in U^*$

funksionalı üçün $u^*(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\mathbb{R}^1$ -də Qauss paylanması olarsa, X təsadüfi elementi Qauss təsadüfi elementi adlanır.

Əgər U tam separabel metriklenen fəza olarsa, onda təsadüfi elementin Q. t. e. olduğu, U^* -da hər hansı ayrılabilən vektor altfəzasının bütün xətti kəsilməz funksionalları üçün $u^*(X)$ təsadüfi elementlərinin Q. t. e. olmasından alınır. Xüsusi halda, buradan alınır ki, seçilmiş kəsilməz $X_t, t \in [0, 1]$ Qauss təsadüfi prosesi $[0, 1]$ -də kəsilməz funksiyaların Banax fəzası $C[0, 1]$ -də Qauss təsadüfi elementini doğurur.

Q. t. e.-ni daha ümumi halda, U -da topologiyanın olduğunu fərz etmədən də, təyin etmək olar (bax, [1]). U – ixtiyari həqiqi vektor fəza, $\mathcal{B}$ – hər hansı σ – cəbr olsun ki, U -dakı vektor eməllər bu σ – cəbre nəzərən ölçülən olsun. Daha sonra X – ölçülən $(U, \mathcal{B})$ fəzasında təsadüfi element olsun, yeni $X, -\mathcal{B}$ σ – cəbrinə və abstrakt Ω çoxluğunda verilmiş $\mathcal{A}$ σ – cəbrinə nəzərən Ω -nın U -ya ölçülən inikası olsun. Əgər qiymətləri $(U, \mathcal{B})$ -dən, hər birinin paylanması isə X -in paylanması ilə eyni olan, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi elementlərinin hər hansı (X_1, X_2) cütü üçün $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}, (X_1 - X_2)/\sqrt{2}$ təsadüfi elementləri də asılı olmayan, paylanmaları isə X -in paylanması ilə eyni olan təsadüfi elementlər olarsa, X təsadüfi elementi Qauss təsadüfi elementi adlanır. Əgər U separabel, Borel σ – cəbri, metrika təyin oluna bilən fəza olarsa, belə tərif yuxarıda adı paylanma ilə verilən təriflə üst-üstə düşür.

Əgər X ölçülən $(U, \mathcal{B})$ fəzasında Q. t. e., p isə U -da $\mathcal{B}$ – ölçülən seminormadırsa, onda $M \exp \{\alpha p^2(X)\} < \infty$ münasibəti hər hansı α müsbət ədədi üçün ödənilir.

Əd.: [1] Френк К., в кн.: Математика. Новое в зарубежной науке, т. 10, М., 1978, с. 63–132.

QAUSS TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİ «гауссовская случайная величина; Gaussian random variable» – karakteristik funksiyası

$$\varphi_{\xi}(u) = \exp(imu - \sigma^2 u^2/2), \quad -\infty < u < \infty$$

düsturu ilə təyin olunan ξ təsadüfi kəmiyyətidir, $-\infty < m < +\infty, \sigma^2 \geq 0$. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması (m, σ^2) parametrləri Qauss paylanması və ya normal

paylanma adlanır. Bir çox hallarda bu anlayış əvəzinə $\xi \sim N(m, \sigma^2)$ işarələməsindən istifadə olunur, təsadüfi kəmiyyətin özü isə normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət adlanır. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması təyin edən m və σ^2 parametrlərinin sadə ehtimali mənası vardır: m – riyazi gözləmə, σ^2 isə ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasıdır. Əgər $\sigma^2 > 0$ olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması vardır və o,

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər və onların paylanması K. Qaussun (C. Gauss, 1809) və P. Laplasın (P. Laplace, 1812) işlərində xətalar nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodu üzrə araşdırmalarla bağlı daxil olunmuşdur. Astronomiya və geodeziya məsələlərində müşahidə xətalarının K. Qauss tərəfindən inkişaf etdirilmiş nəzəriyyəsində təsadüfi xətalar mərkəzlənmiş ($m = 0$), normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olmuşdur. Bu nəticədə «Qauss təsadüfi kəmiyyəti», «Qauss paylanması», «Qauss qanunu», «Laplasın ikinci qanunu», «Laplas – Gauss qanunu» kimi terminlərin yaranmasına səbəb olmuşdur.

Q. t. k., təbii olaraq, statistik fizikada (Maksvell hipotezi) və ya bir sıra statistika məsələlərində yaranır (bax, [4]). Mərkəzi limit teoreminə əsasən, münaşib surətdə mərkəzlənmiş və normalanmış olan, qeyri – məhdud artan saylı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcılığı Lindeberq şərti ödənildikdə, paylanma üzrə Q. t. k.-ə yığılır.

Eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş küllüyyatca asılı olmayan Q. t. k.-ləri ailəsi Gauss paylanmalarının kompozisiyalarının xassələri və bu tip paylanmaları xarakterizə edən xassələrlə bilavasitə bağlı bir sıra xassələrə malikdirlər. Sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi, yalnız və yalnız, o halda Q. t. k.-dir ki, toplananların hər biri Q. t. k. olsun. Bu nəticəni P. Levi (P. Lévy) irəli sürmüş, H. Kramer (H. Cramér, 1936) isbat etmişdir. Bu nəticə ehtimal nəzəriyyəsində tam bir istiqamətin inkişafına səbəb olmuşdur ki, burada təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmayan toplananlara ayrılışı tədqiq olunmuşdur.

Ortoqonal xətti çevirmələr asılı olmayan Q. t. k.-nin sonlu saylı toplusunun asılı olmamalıq xassəsini qüvvədə saxlayır. Bu xassə Gauss paylanması üçün seçiciyyəvi olub, Q. t. k. anlayışının mümkün ümumiləşmələrindən birinin əsasını təşkil edir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin topluslarının asılı olmayan xətti formalarının köməyi ilə Gauss paylanmasının xarakterizasiya məsələsi tam surətdə 1926-da S. N. Bərmşteyn tərəfindən qoyulmuşdur (bax, [7]). Müəyyən mənada tamamlanmış nəticə [8] və [9]-da alınmışdır: əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n, b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n, -a_j, b_j, j = 1, \dots, n$ sabit əmsallı xətti formalar asılı olmayandırlarsa, onda a_j və $b_j \neq 0$ olan bütün j -lər üçün ξ_j təsadüfi kəmiyyətləri Q. t. k.-ləridir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [3] Лаплас П. С., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Грамш Н., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405–14; [6] Ливник Ю. В., Островский Н. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [7] Бернштейн С. Н.,

Собр. соч., т. 4, М., 1964; [8] Darmon G., «C. r. Acad. Sci. Paris», 1951, t. 232, p. 1999–2000; [9] Скитович В. П., «Докл. АН СССР», 1953, т. 89, № 2, с. 217–19.

QAUSS TƏSADÜFİ MATRİSİ «гауссовская случайная матрица; Gaussian random matrix» – elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri çoxölçülü normal qanunla paylanan təsadüfi matrisdir.

$\Xi = U_n S_n U_n^*$, n tərtib $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ Q. t. m.-nin Şur təsviri olsun (bax, Qeyri – simmetrik təsadüfi matris). Əgər Ξ_n matrisinin elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmışlarsa, onda Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri λ_k -ların paylanmasının sıxlığı

$$\left[2^{n(n+1)/2} \prod_{j=1}^n j! \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right\} \prod_{i \neq j} |y_i - y_j|$$

$$i, j = 1, \dots, n, \arg y_{i1} > \dots > \arg y_{in}$$

ifadəsinə bərabərdir, S_n matrisinin s_{ij} , $i > j$ elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri asılı olmayandırlar (U_n matrisləri də s_{ij} -lərdən asılı deyildirlər) və $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmışlar.

Əgər Ξ_n matrisinin elementləri asılı olmayan standart normal qanunla paylandırlarsa, onda

$$P\{\operatorname{Re} \lambda_k < x_k, \operatorname{Im} \lambda_k < y_k, k = 1, \dots, n\}$$

ehtimalını hesablamaq mümkündür (bax, [1]). Əgər simmetrik həqiqi Ξ_n matrisinin elementləri ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ asılı olmayan və $N(0, (1 + \delta_{ij})/2)$ normal qanunları ilə paylanmışlarsa, onda vektor – sütunları Ξ_n matrisinin məxsusi vektorları olan $H_n = \|h_{ij}\|$, $h_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ matrisi Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və $P\{H_n \in L\} = 2^{-n} \mu(L)$, burada μ , n tərtib ortoqonal matrislərin G qrupunda normalanmış Haar ölçüsü, L , G qrupunun matrislərinin ölçülən çoxluğuudur və bu matrislərin birinci sətirlərinin elementləri mənfii deyildirlər, Ξ_n matrisinin nizamlanmış məxsusi qiymətlərinin paylanma sıxlığı

$$\pi^{n(n+1)/4} \prod_{i=1}^n \{\Gamma[(n-i+1)/2]\}^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right\} \prod_{i > j} |y_i - y_j|$$

$$y_1 > \dots > y_j$$

ifadəsinə bərabərdir.

Əd.: [1] Гирко В. Л., Спектральная теория случайных матриц, «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106.

QAUSS VƏZİYYƏTİ «гауссовское состояние; Gaussian state» – bax, Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.

QAUSS – LAPLAS PAYLANMASI « Гаусса – Лапласа распределение; Gauss – Laplace distribution » – normal paylanmanın digər adları (Qauss qanunu, Gauss paylanması, Laplasın ikinci qanunu, Laplas–Qauss paylanması və s.) ilə yanaşı istifadə olunur, bu paylanmanın kəşfi tarixini və onun ehtimal nəzəriyyəsinin K. Gauss və P. Laplasın adları ilə bağlı müxtəlif məsələlərinə ilk tətbiqlərini əlaqələndirir. Normal paylanma K. Gauss (1809) və P. Laplasın (1812) *xətalər nəzəriyyəsi* və *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə araşdırmaları ilə bağlı işlərində yaranmışdır. K. Gauss tərəfindən inkişaf etdirilmiş, müşahidələr xətaləri nəzəriyyəsinin astronomiya və geodeziya məsələləri üçün təsadüfi xətalərin ehtimallarının sıxlıq funksiyası

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}, \quad h > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur (bax, *Qauss qanunu*). P. Laplas, bundan başqa,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

integralını (Laplas funksiyası) n sayda Bernulli sınaqlarında p ehtimalı müvəffəqiyyətlər sayının $(np - \tau\sqrt{2np(1-p)}, np + \tau\sqrt{2np(1-p)})$ intervalında yerləşməsi ehtimalı üçün təqribi qiymət kimi almışdır. Lakin normal paylanma binomial paylanmanın limit forması kimi hələ 1733-də A. Muavr (A. Moivre) tərəfindən $p = q = 1/2$ qiymətləri üçün tapılmışdır.

Əd.: [1] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [2] Лаплас П. С., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [3] Todhunter L., A history of the mathematical theory of probability, [N. Y.], 1949.

QAUSS – MARKOV TEOREMİ « Гаусса – Маркова теорема; Gauss – Markov theorem » – regression eksperiment parametrlərinin və ən kiçik kvadratlar metodunun ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətinin ekvivalentliyini ifadə edən, xətti *regression eksperiment* nəzəriyyəsinin teoremidir. Bu teoremi K. Gauss (C. Gauss) isbat etmişdir; bu teoremin populyar olmasına A. A. Markovun məlum dərslərindəki şərt səbəb olmuşdur. Q. – M. t.-nin çoxsaylı ümumiləşmələri: ümumi şəkilli kovariasiyalar matrisli regression eksperimentin, cırlaşmış informasiya matrisli regression eksperimentin ölçmələri halları üçün məlumdur; qeyri – adekvat regressiya funksiyası ilə approksimasiyada; regression eksperimentin ardıcıl planlaşdırılmasında; ümumiləşmiş regression eksperimentlərin lokal asimptotik minimal kvadratik riski üçün ümumiləşmələr məlumdur.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Малютов М. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41; [3] Сел Х. Л., «Биометрика», 1967, v. 54, № 1–2, p. 1–24.

QAUSS – NYUTON METODU « Гаусса – Ньютона метод; Gauss – Newton method » – qeyri – xətti

$$y = \eta(x, \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

regression eksperimentinin θ parametrlərinin ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin hesablanması üçün iterasiya metodudur, burada ε_i – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $M\varepsilon_i = 0$,

$D\varepsilon_i = \sigma^2(x_i)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$. Nyutonun toxunanlar metodu ilə

$$Q(y, \theta) = \sum_{i=1}^N e_i^2(\theta) \sigma^{-2}(x_i), \quad e_i = y_i - \eta(x_i, \theta)$$

funksiyasının minimalaşdırılmasında, böyük ədədlər qanununa görə, sıfıra yaxın $N^{-1} \sum_{i=1}^N \eta''(x_i) e_i(\theta)$ ifadəsi iştirak edir. Bu ifadəni K. Gauss (C. Gauss) sıfıra bərabər götürərək, $Q(y, \theta)$ kəmiyyətinin minimalaşmasını

$$\theta^{s+1} - \theta^s = M_s^{-1} \sum_{i=1}^N f_s(x_i) e_i(\theta^s) \sigma^{-2}(x_i), \quad s = 0, 1, \dots, n. (*)$$

– ən yaxşı xətti meylsiz düzelişinin iterasiya ilə hesablanmasına gətirmişdir, burada

$$M_s = \sum_{i=1}^N f_s(x_i) f_s^T(x_i) \sigma^{-2}(x_i), \quad f_s(x) = \partial \eta(x, \theta^s) / \partial \theta^s.$$

Ümumiləşmiş regression eksperiment üçün [burada $\sigma = \sigma(x, \theta)$ və $Q(\eta(\theta'), \theta) = 0$ olduqda] yalnız $\theta = \theta'$ olduqda $\tilde{\theta} = \arg \min_{\theta} Q(y, \theta)$ statistik qiyməti, adətən, tutarlı statistik qiymət olmur, lakin $\sigma^{-2}(x_i, \theta^s)$ əvəzləməsi aparılmış (*) şəkilli düzelişlər (Jirina statistik qiymətləri adlandırılan) $\tilde{\theta}$ üçün asimptotik normal effektiv statistik qiymət verir, iterasiyaların yığılma ehtimalı isə θ^0 qiyməti $\tilde{\theta}$ -ya olduqca yaxın olduğu halda böyük requlyar seçim üçün 1-ə yaxınlaşır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Малютов М. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41.

QAYDALI STATİSTİKA « порядковая статистика; order statistic » – $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(r)}$ variasiya sırasının r -ci həddi kimi təyin olunan $X_{(r)}$, $1 \leq r \leq n$ *statistikasıdır*. Əgər $X_1, \dots, X_n$ asılı olmayan və ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$F_r(x) = P\{X_{(r)} < x\} = \sum_{i=1}^n C_n^i F^i(x) [1 - F(x)]^{n-i} = I_{F(x)}(r, n - r + 1)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$I_y(a, b) = \int_0^y t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt / B(a, b)$$

natamam beta funksiyadır. $X_{(r)}$ və $X_{(s)}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası $F_{r,s}$, $r < s$ qiymətləri üçün

$$F_{r,s}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=\max(0, s-i)}^{n-i} \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} \times \\ \times F^i(x) (F(y) - F(x))^j (1 - F(y))^{n-i-j}, \quad -\infty < x < y < \infty$$

düsturu ilə hesablanır, $x \geq y$ olduqda $F_{r,s}(x, y) = F_s(y)$.

Seçimin həcmi olduqca artırıldıqda asimptotik nəzəriyyədə ele $r=r(n)$ indeksli Q. s.-lara baxılır ki, bu indekslər üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)/n = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ münasibəti ödənilsin. $0 < \alpha < 1$

halına mərkəzi Q. s.-lar, $\alpha = 0$ və $\alpha = 1$ halına isə kənar Q. s.-ları uyğundur. Mərkəzi Q. s.-lar adətən, asimptotik olaraq normal paylanmaya malik olur. Kənar Q. s.-lar özünəməxsus limit paylanmalarına malik olur. Məs., paylanma funksiyası ümumi F olan asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün mərkəzləşdirici və normalaşdırıcı uyğun a_n və b_n , $n = 1, 2, \dots$ ardıcılıqlarının müvafiq seçimi təyin edilərsə, $(X_{(n)} - a_n)/b_n$ kəmiyyətləri üçün cırlaşmayan limit paylanması yalnız aşağıdakı üç tipdən biri ola bilər:

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\beta}\}, & \text{əgər } x > 0, \\ 0, & \text{əgər } x \leq 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\beta\}, & \text{əgər } x \leq 0, \\ 1, & \text{əgər } x > 0; \end{cases}$$

$\beta > 0$ olduqda

$$\Lambda_3(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

B. V. Qnedenko F -in Λ_i , $1 \leq i \leq 3$ limit qanununun cazibə oblastından olması üçün zəruri və kafi şərtləri almışdır. Xüsusi halda, F funksiyası Λ_1 cazibə oblastına, yalnız və yalnız, o halda mənsubdur ki, $1 - F(x)$ funksiyası $x \rightarrow \infty$ olduqda β qüvvət üstü ilə düzgün dəyişən funksiya olsun; F funksiyası Λ_2 cazibə oblastına, yalnız və yalnız, o halda mənsubdur ki, $1 - F(x_0 - x)$ funksiyası $x \rightarrow +0$ olduqda β qüvvət üstü ilə düzgün dəyişən funksiya (bax, [5]) olsun; burada x_0 - F paylanması üçün daşıyıcısının dəqiq yuxarı sərhədidir.

Q. s. və onların funksiyalarından qeyri - parametrik etibarlı və tolerant intervallların qurulmasında, «tez» və roblast statistik qiymətlərin alınması üçün senzurlandırılmış məlumatların yenidən işlənilməsində, olduqca fərqlənən müşahidələrin təyin olunmasında və s.-də istifadə olunur. Q. s.-ların ən sadə və çox istifadə olunan funksiyaları Q. s.-ların xətti kombinasiyalıdır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Д э й н д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [3] Г а л а м б о ш Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, пер. с англ., М., 1984; [4] Г н е д е н к о Б. В., «Ann. Math.», 1943, v. 44, № 3, p. 423-53; [5] С м и р н о в Н. В., «Тр. Матем. ин.-та АН СССР», 1949, т. 25, с. 5-59; [6] С м и р н о в Н. В., «Тр. Матем. ин.-та АН СССР», 1949, т. 25, с. 5-59; [7] Ч и б и с о в Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 1, с. 159-65; [8] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

QAYDALI ŞKALA «порядковая шкала; order scale» - bax, Ölçmələr nəzəriyyəsi.

QAYIDIŞ ORTA MÜDDƏTİ «возвращения среднее время; mean / expected recurrence time», orta qayıdış müddəti - bax, Markov zənciri, vəziyyətlərin təsnifatı, Markov zənciri, orta qayıdış müddəti.

QAYIDIŞLI HADİSƏ «возвратное событие; recurrent event» - bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

QAYIDIŞLI MARKOV PROSESİ «возвратный марковский процесс; persistent / recurrent Markov process» - qayıdışlı Markov zəncirinin xarakteristik xüsusiyyətinin analoquna malik Markov prosesidir. «Q. M. p.» termininin dəqiq mənası müxtəlif cür izah olunur. Topoloji $\mathcal{E}$ fəzasında [daha dəqiqliklə, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında; $\mathcal{B}$ - $\mathcal{E}$ -nin Borel çoxluqlarının çoxluğu] qınılmayan bircins $X = (X_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin verildiyi fərz olunur. Əgər hər bir $V \subset \mathcal{E}$ çoxluğu və hər bir $x \in \mathcal{E}$ üçün $S_V = \{t \geq 0 : X_t \in V\}$ təsadüfi çoxluğu $\mathbf{P}_x$ - sanki yəqin məhdud olarsa, X topoloji qayıdışlı Markov prosesi adlanır. Əgər X standart proses olarsa və sonuncu şərt ixtiyari $x \in \mathcal{E}$ və x nöqtəsinin ixtiyari zərif V ətrafı üçün ödənilərsə (bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov zənciri üçün), onda bu proses zərif qayıdışlı Markov prosesi adlanır. $V \in \mathcal{B}$ və $\mu(V) > 0$ olduqda bütün $x \in \mathcal{E}$ üçün S_V çoxluğunun Lebeq ölçüsü hər dəfə $\mathbf{P}_x$ - sanki yəqin sonsuz olarsa, standart X prosesi Harris qayıdışlı və ya μ - qayıdışlı proses adlandırılır, μ - $\mathcal{B}$ σ - cəbrində σ - sonlu ölçüdür.

Bir- və ikiölçülü Viner prosesləri hər üç mənada Q. M. p.-ne aid nümunələrdir. Q. M. p. anlayışı Markov proseslərinin ergodik xassələrinin öyrənilməsində istifadə olunur (bax, Ergodik teoremlər Markov prosesləri üçün). Ölçülən fəzada Markov zənciri halı üçün birinci və ikinci tərifin təbii analoqları vardır.

Əd.: [1] Azema J., Kaplan-Duflo M., Revuz D., «Lect. Notes Math.», 1968, v. 51, p. 1-21; [2] П е в ю з Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [3] Tuominen P., Tweedie R., «Proc. London Math. Soc.», 1979, v. 39, p. 554-76; [5] Gettoor R. K., «Lect. Notes Math.», 1980, v. 784, p. 397-409.

QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ «возвратная цепь Маркова; recurrent Markov chain» - vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabı çoxluq, hər bir vəziyyəti qayıdışlı olan bircins Markov zənciri X -dir (bax, Markov zənciri; vəziyyətlərinin təsnifatı). Başqa sözlə, əgər n addıma keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$ olan X zənciri $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ çoxluğunda (vəziyyətləri sayı hesabından çox olmayan) verilmişdirsə, onda zəncirin qayıdışlılığı onu ifadə edir ki, ixtiyari $i \in \mathcal{E}$ vəziyyətindən çıxan trayektoriya sanki yəqin i vəziyyətinə qayıdır (belə ki, sonsuz dəfə). X zəncirinin qayıdışlı zəncir olması $\sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty$, $i \in \mathcal{E}$ sırasının dağılan olmasına ekvivalentdir.

Qeyri - periodik Q. M. z. üçün bu zəncir ayrılmayan zəncir olduğu halda i -dən asılı olmayan $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$ limitləri vardır.

Q. M. z.-ne misal $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ şəbəkəsi üzrə simmetrik təsadüfi dolaşmadır, bu şəbəkə üzrə hər bir $i \in Z$ şəbəkəsindən növbəti addımdakı keçid $1/2$ ehtimalı ilə ya $i - 1$ və ya

$i+1$ vəziyyətinə olur. Ayrılmayan Q. M. z.-nin ümumiləşməsi – Harris qayıdışlı Markov zəncidir (bax, *Markov zənciri*).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

ν – QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ « ν – возвратная цепь Маркова; ν – recurrent Markov chain » – bax, *Markov zənciri*.

QAYIDIŞLI VƏZİYYƏT « возвратное состояние; recurrent state » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu* sonlu.

QAYIDIŞLILIQ (ğ) təsadüfi dolaşmanın «возвратность случайного блуждания; persistence of a random walk» – bax, *Təsadüfi dolaşma; qayıdışlılıq*.

QAYIDIŞSIZ MARKOV ZƏNCİRİ « невозвратная цепь Маркова; nonrecurrent / transient Markov chain » – bütün vəziyyətləri qayıdışlı, biricins hesabı Markov zəncidir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Ümumi Markov zəncirləri nəzəriyyəsində «Q. M. z.» termininə «tranzitiv Markov zənciri» termini uyğundur. Bu termindən hər dəfə o halda istifadə olunur ki, hər hansı ölçülən ($\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$) fəzasında verilən biricins Markov zəncirinin n addıma keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$ vasitəsilə, birləşməsi $\mathcal{E}$ -yə bərabər olub $E_i \in \mathcal{B}$, $i \geq 1$ çoxluqlarını seçmək mümkün olur ki,

$$\sum_{n \geq 1} p(n, \cdot, E_i) \text{ sıralarının ixtiyari cəmi } \mathcal{E} \text{-də məhdud olur.}$$

QAYIDIŞSIZ VƏZİYYƏT (i) Markov zəncirinin « невозвратное состояние цепь Маркова; nonrecurrent / transient state of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYD OLUNMUŞ / SÜRÜŞƏN EHTİYATDA SAXLAMA « фиксированное / скользящее резервирование; fixed / sliding redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

QEYRİ – ANTİSİPATİV FUNKSİYA « неантисипативная / неупреждающая функция; nonanticipating / $\mathcal{A}$ – adapted function ». $\mathcal{A}$ – uzlaşmış funksiya, $\mathcal{A}$ – adaptiv funksiya, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ filtrasiyalı, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilən, ixtiyari t üçün $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $f(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ funksiyasıdır.

QEYRİ – ANTİSİPATİV STRATEGİYA « неупреждающая / неантисипативная стратегия; nonanticipating strategy » – bax, *Strategiya, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

QEYRİ – ANTİSİPATİV TƏSADÜFİ PROSES « неупреждающий / неантисипативный случайный процесс; nonanticipating random process » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*.

QEYRİ – ATOMİK ÖLÇÜ « неатомическая мера; non – atomic measure » – bax, *Atomik ölçü*.

506 QEYRİ – BİRCİNS

QEYRİ – ATOMİK PAYLANMA « неатомарное распределение; non – atomic distribution » – bax, *Stieltjes – Minkovski integral*.

QEYRİ – BİRCİNS MARKOV ZƏNCİRİ « неоднородная цепь Маркова; inhomogeneous Markov chain » – biricinslik xassəsinə malik olmayan *Markov zəncidir*. İxtiyari Q. – b. M. z.-ni fəza fəzasının uyğun dəyişməsi ilə biricins Markov zəncirinə çevirmək mümkündür (bax, *Markov zənciri* və [1], səh. 136).

Əd.: [1] Гнхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

QEYRİ – BİRCİNS ŞAXƏLƏNƏN PROSES, ZAMAN ÜZRƏ « неоднородный во времени ветвящийся процесс; time inhomogeneous branching process » – t anındakı hissəciklərinin çevirmə qanunları t -dən asılı olan *şaxələnmə prosesidir*. Z. üzrə q. – b. ş. p. $Z(t)$ keçid ehtimalları $P_{ij}(s, t)$ şaxələnmə şərtini ödəyən, vəziyyətləri çoxluğu hesabı $(0, 1, 2, \dots)$ olan Markov prosesi kimi təyin olunur.

$$F(s, t, x) = M(x^{Z(t)}) \Big| Z(s) = 1$$

doğuran funksiyaları terminlərlə *şaxələnmə şərti*

$$F(s, t_1 + t_2; x) = F(s, t_1; F(t_1, t_2; x))$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Prosesin vəziyyəti hissəciklərin sayı kimi interpretasiya olunur. Kəsilməz zamanlı proseslər üçün, adətən, fərz olunur ki, $h \rightarrow 0$ olduqda

$$P_n(t, t+h) = p_n(t)h + o(h),$$

$$P_n(t-h, t) = p_n(t)h + o(h), \quad n \neq 1$$

$$P_{11}(t, t+h) = 1 + p_1(t)h + o(h),$$

$$P_{11}(t-h, t) = 1 + p_1(t)h + o(h),$$

və $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 0$. Bu şərtlər ödənildikdə $F(t_1, t_2; x)$

$$\frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial t_1} = -f(t_1; F(t_1, t_2; x)), \quad F(t_1, t_2; x) = x$$

differensial tənliyini və ya

$$\frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial t_2} = f(t_2; x) \frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial x}, \quad F(t_1, t_2; x) = x$$

xüsusi törəməli xətti tənliyini ödəyir, burada

$$f(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) x^n.$$

Əgər bütün t -lər üçün $a(t) = \frac{\partial f(t; x)}{\partial x} \Big|_{x=1}$ sonlu olarsa,

onda $MZ(t)$ vardır və

$$MZ(t) = \exp \left\{ \int_s^t a(u) du \right\}.$$

Z. üzrə q. - b. ş. p. limitdə adi biricins proseslərlə müqayisədə müxtəlif şəkildə ifadə olunur və kritikaltı, kritiküstü, kritik şəxələnən proseslər kimi proseslərlə təsnif oluna bilinmir.

Əd.: [1] С е в а с т ь я н о в Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

QEYRİ – DISSIPATİV MARKOV ZƏNCİRİ « недиссипативная цепь Маркова; nondissipative Markov chain » – sonlu və ya hesabi ele Markov zənciridir ki, onun ixtiyari bir vəziyyətdən çıxan trayektoriyaları, sanki yəqin, tez və ya gec də olsa zəncirin müsbət qaydırlı siniflərindən birinə keçir və orada həmişəlik qalır (bax, Markov zənciri: vəziyyətlərin təsnifatı). Başqa sözlə, $p_{ij}(m)$ i vəziyyətdən j vəziyyətinə m addıma keçid ehtimalı,

$$\pi_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=1}^n p_{ij}(m)$$

olduqda, əgər $\sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_{ij} = 1$, $i \in \mathcal{E}$ olarsa, vəziyyətləri çoxluğu

hesabını aşmayan $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ olan X Markov zənciri Q. – d. M. z.-dir. Q. – d. M. z.-ləri arasında *ərqodik Markov zəncirləri* xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Əd.: [1] F o s t e r F. G., «Camb. Phil. Soc.», 1952, v. 48, № 3, p. 587–91; [2] Б а р у ч а - Р и д А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

QEYRİ – ƏDƏDİ TƏBİƏTLİ OBYEKT LƏRİN STATİSTİKASI « нечисловой природы объектов статистика; statistics of non – numerical type objects » – bax, Statistika(sı) qeyri-ədədi təbiətli obyektlərin.

QEYRİ – HƏSSASLIQ PROBLEMİ « нечувствительности проблема; insensitivity / invariance problem » xidmət sistemi nəzəriyyəsində – bax, Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi; invariantlıq problemi.

QEYRİ – XƏTTİ AVTOREQRESSİV PROSES « нелинейной авторегрессии процесс; nonlinear autoregressive process » –

$$\zeta_t = f(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k}) + e_t \quad (*)$$

tənliyini ödəyən diskret zamanlı $\{\zeta_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ *stasionar təsadüfi prosesidir*, burada $f(x_1, \dots, x_k)$ – hər hansı k dəyişənli funksiya, $\{e_t\}$ – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan (və ya qeyri – korrelyar və eyni orta qiyməti və eyni dispersiyası olan) ele təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır ki, e_t və $s < t$ olan s -lər üçün bütün ζ_s -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. (*) tənliyini ödəyən ζ_t prosesi çox vaxt k tərtib qeyri-xətti avtoregressiv proses də adlandırılır. $k=1$ halı üçün bele prosesləri [1]-də D. Conson daxil etmişdir (bax, həm də [2]), $f(x_1, \dots, x_k)$ xətti funksiya olduqda isə ζ_t prosesi adi k tərtib avtoregressiv prosesdir.

$f(x_1, \dots, x_k)$ funksiyasının hissevi xətti approksimasiyasından istifadə etdikdə Q. – x. a. p.-lər sinfi təsadüfi prosesin *sədd modelləri* sinfinə çevrilir (bax, Sədd modeli); ümumiyyətlə isə, Q. – x. a. p.-lər sinfi təsadüfi proseslərin *qeyri – xətti modellərinin* ümumi sinfinin mühüm bir altsinfidir.

Q. – x. a. p.-lər nəzəriyyəsində *eksponensial avtoregressiv proseslərin* (və ya *eksponensial avtoregression modellərin*) və ya *EXPAR – modellərin*) də tədqiqi mühüm yer tutur (bax, [3], [6]). Bu proseslər T. Ozaki tərəfindən $X_t = A_{t1}X_{t-1} + A_{tk}X_{t-k} + c_t$ tənlikləri ilə təsvir olunan qeyri – xətti rəqslər nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri ilə əlaqədar daxil olunmuşdur, burada $A_{ij} = a_j + b_j \exp(-c^2 X_{t-1}^2)$, $j=1, \dots, k$, a_j, b_j və c_t – hər hansı sabitlərdir (bax, [3] – [6]).

Əd.: [1] J o n e s D. A., «Proc. Roy. Soc. London», Ser. A, 1978, v. 360, p. 71–95; [2] H o g n a s G., «J. Time Series Analysis», 1986, v. 7, № 3, p. 205–11; [3] O s a k i T., O d a H., в кн.: Information and systems, Oxf., 1978, p. 83–91; [4] P r i e s t l e y M. B., Nonlinear and nonstationary time series analysis, L., 1988; [5] T o n g H., в кн.: Proceedings 1-st World Congress of Bernoulli Society, Utrecht, 1987; [6] C h a n W. S., T o n g H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

QEYRİ – XƏTTİ FİLTRASIYA(sı) *təsadüfi proseslərin « нелинейная фильтрация случайных процессов; nonlinear filtering of random processes »* – hər bir t anında ζ_t *təsadüfi prosesi* üçün ($Y_s, 0 \leq s \leq t$) müşahidələri üzrə statistik qiymətin (məs., kvadratik orta mənada) qurulmasıdır [$(\zeta_t, Y_t) = (\zeta_t, Y_t)_{t \geq 0}$

ikiölçülü təsadüfi prosesdir]. Əgər $M Y_t^2 < \infty$ olarsa, onda kvadratik orta mənada optimal statistik qiymət $\pi_t(\zeta) = M(\zeta_t | \mathcal{A}_t^Y)$ aposterior ortasıdır, burada $\mathcal{A}_t^Y$ – Y_s ($0 \leq s \leq t$) təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir. $\pi_t(\zeta)$ şərti ehtimalını, prinsipcə, Bayes düsturu ilə hesablamaq olar. Lakin müqayisəcə sadə sayılan hallarda $\pi_1(\zeta)$ üçün ifadə olduqca böyük olur. Buna görə də, adətən, ele hallara baxılır ki, ζ və Y prosesləri $\mathcal{A}$ σ – cəbrlərinin $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ ailəsi ilə uzlaşmış ele proseslər olsun ki, bunlar

$$\zeta_t = \zeta_0 + \int_0^t H_s ds + M_t, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t A_s ds + W_t$$

şəklində ifadə oluna bilinsin, burada $H = (H_t)_{t \geq 0}$, A isə $(A_t)_{t \geq 0} = \mathbb{A}$ – uzlaşmış proseslərdir, $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – sağdan kesilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalı kvadratik inteqrallanan martinqal və $W = (W_t)_{t \geq 0}$, – $\mathbb{A}$ -ya nəzərən, Viner prosesisidir.

$$\int_0^t M(H_s^2 + A_s^2) ds < \infty, \quad t > 0$$

şərtlərində isbat olunur ki, $(\pi_t(\zeta))_{t \geq 0}$ prosesi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\pi_t(\zeta) = \pi_0(\zeta) + \int_0^t \pi_s(H) ds + \int_0^t [\pi_s(D) + \pi_s(\zeta A) - \pi_s(\zeta) \pi_s(A)] (dY_s - \pi_s(A) ds) \quad (1)$$

burada $\langle M, W \rangle$, M və W martinqallarının qarşılıqlı kvadratik xarakteristikasıdır, $D_t = d\langle M, W \rangle_t / dt$, $\pi_t(D)$, $\pi_t(H)$, $\pi_t(\zeta A)$, $\pi_t(A)$ – uyğun olaraq, D_t , H_t , $\zeta_t A_t$, A_t kəmiyyətlərinin $(Y_s, 0 \leq s \leq t)$ müşahidələri üzrə kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətləri olub, optimal qeyri-xətti filtrasiyanın əsas tənliyi adlanır.

(ζ, Y) asılı olmayan Viner prosesləri $\tilde{W}$ və W -yə nəzərən

$$d\zeta_t = a(\zeta_t)dt + d\tilde{W}_t$$

$$dY_t = A(\zeta_t)dt + dW_t$$

İto tənlikləri ilə təyin olunduğundan, Markov diffuzion prosesi halında, (1) ifadəsindən aposterior $\rho_t(y)$ sıxlıq funksiyası üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$\begin{aligned} \rho_t(y) &= \frac{d\mathbf{P}\{\xi_t \leq y | \mathcal{A}_t^Y\}}{dy}; \\ \rho_t(y) &= \rho_0(y) + \int_0^t \left[-\frac{\partial}{\partial y}(a(y), \rho_s(y)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_s(y)}{\partial y^2} \right] ds + \\ &+ \int_0^t \rho_s(y) \left[A(y) - \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \rho_s(x) dx \right] \times \\ &\times \int \left[dY_s - \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(x) \rho_s(x) dx \right) ds \right] \end{aligned} \quad (2)$$

və bu tənlik (1)-dən fərqli olaraq qapalı tənlikdir.

Markov prosesi ζ üçün onun vəziyyətləri çoxluğu $(\alpha_1, \beta, \gamma, \dots)$ sonlu və ya hesabi olduğu halda və keçid intensivlikləri matrisi $\|\lambda_{\alpha\beta}(t)\|$ ilə verildikdə,

$$Y_t = \int_0^t A(\zeta_s) ds + W_t$$

olarsa, $\pi_t(\beta) = \mathbf{P}\{\xi_t = \beta | \mathcal{A}_t^Y\}$ aposterior ehtimalları üçün, (1)-dən, qapalı tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned} \pi_t(\beta) &= \mathbf{P}\{\xi_0 = \beta\} + \int_0^t \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma\beta}(s) \pi_s(\gamma) ds + \\ &+ \int_0^t \pi_s(\beta) \left(A(\beta) - \sum_{\gamma} A(\gamma) \pi_s(\gamma) \right) \times \\ &\times \left(dY_s - \sum_{\gamma} A(\gamma) \pi_s(\gamma) ds \right) \end{aligned}$$

$\rho_t(y)$ və $\pi_t(\beta)$ kəmiyyətlərlə ixtiyari aposterior xarakteristikaları, xüsusi halda, $\pi_t(\zeta)$ -ni hesablamaq olur.

(1) ifadəsindən bir sıra xüsusi hallarda da istifadə olunur. Məs., (ζ, Y) asılı olmayan $\tilde{W}$ və W Viner proseslərinə nəzərən

$$d\zeta_t = a(Y_t) \zeta_t dt + d\tilde{W}_t$$

$$dY_t = a(Y_t) \zeta_t dt + dW_t$$

tipli diffuzion prosesdirsə və $\mathbf{P}\{\xi_0 \leq y | Y_0\}$ şərti paylanması

$\mathbf{P}$ – sanki yəqin Gauss prosesidirsə, onda məhdud $a = a(x)$,

$A = A(x)$ üçün $\mathbf{P}\{\xi_t \leq y | \mathcal{A}_t^Y\}$ şərti paylanması $\mathbf{P}$ – sanki yəqin Gauss paylanmasıdır və kvadratik orta mənada optimal $\pi_t(\zeta)$ statistik qiyməti və

$$P_t(\zeta) = \mathbf{M}((\zeta_t - \pi_t(\zeta))^2 | \mathcal{A}_t^Y)$$

filtrasiyasının şərti kvadratik orta statistik qiyməti şərti Gauss filtrasiyasının aşağıdakı xətti tənliklərlə təyin olunur:

$$d\pi_t(\zeta) = a(Y_t) \pi_t(\zeta) dt + P_t(\zeta) A(Y_t) (dY_t - A(Y_t) \pi_t(\zeta) dt),$$

$$\frac{dP_t(\zeta)}{dt} = 2a(Y_t) P_t(\zeta) + 1 - (A(Y_t) P_t(\zeta))^2.$$

Əd.: [1] Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H., «Osaka J. Math.», 1972, v. 9, № 1, p. 19–40 (в рус. пер.: «Математика», 1973, т. 17, № 2, с. 108–28); [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

QEYRİ – XƏTTİ KORRELYASIYA «криволинейная корреляция; non – linear correlation / curvilinear correlation» – Y və X təsadüfi kəmiyyətlərinin $f(Y) = A_0 + A_1 \theta_1(X) + \dots + A_n \theta_n(X)$ parametrik modeli çərçivəsində əlaqəsi haqqında hipotezin qəbul edilməsidir, burada f , θ_1 , ..., θ_n – məlum funksiyalardır, A_i əmsalları ən kiçik kvadratlar metodu vasitəsilə tapılır. Məs., əgər $f(x) = \ln x$, $n = 2$, $\theta_1(x) = x$, $\theta_2(x) = x^2$ olarsa, onda Y kəmiyyəti X ilə $Y = \exp(A_0 + A_1 X + A_2 X^2)$ şəklində təqribi münasibətlə bağlıdır, bu da qeyri – xətti xarakterlidir; bununla belə A_j -nin tapılması məsələsi xətti xarakterlidir.

Əd.: [1] Б ар д Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987.

QEYRİ – XƏTTİ MODELƏR(i) təsadüfi proseslərin «нелинейные модели случайных процессов; nonlinear models of random processes» – ζ_t təsadüfi prosesinin qiymətlərini ehtimal paylanmaları olduqca sadə və məlum olan Y_t təsadüfi prosesi-nin qiymətlərlə əlaqələndirən, qeyri – xətti tənliklərlə verilən, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ diskret zamanlı ζ_t təsadüfi proseslərinin (adətən, stasionar fərz olunan) modelləridir. Y_t prosesi kimi, əksər hallarda, diskret bəyaz küy, yeni eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı götürülür. Qeyri – xətti avtoregressiv proseslər, təsadüfi proseslərin bixətti modelləri və təsadüfi proseslərin sədd modelləri (bax, məs., [1] – [4]) təsadüfi proseslərin Q. – x. m.-nin ən çox istifadə olunan xüsusi sinifləndir.

Q. – x. m. nəzəriyyəsinin mühüm istiqamətləri modelin verilməsinin təsəvvürünün stasionar həllərinin varlığı şərtlərinin aydınlaşdırılması, modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi (bax, [1] – [5]) və qeyri – xəttilik haqqında hipotezlərin yoxlanılmasıdır (bax, [6], [7]).

Əd.: [1] Priestley M. B., Nonlinear and nonstationary time series analysis, L., 1988; [2] Rao T. S., Gabr M. M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, B., 1984; [3] Tong H., Threshold models in nonlinear time series analysis, N. Y., 1983; [4] Tong H., в кн.: Proceedings 1-st World Congress of Bernoulli Society, Utrecht, 1987; [5] Tjøstheim D., «Stoch Processes and their Appl.», 1986, v. 21, № 2, p. 251–73; [6] Chan W. S., Tong H., в кн.: Advances in statistical analysis and statistical computing, v. 2, Greenwich (USA), 1987; [7] Chan W. S., Tong H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

QEYRİ – XƏTTİ PROQNOZLANMA(sı) təsadüfi proseslərin « **нелинейное прогнозирование случайных процессов; nonlinear prediction / extrapolation of random processes** » – $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$, $M\zeta_t^2 < \infty$ şərtini ödəyən təsadüfi proses olduqda ζ_u müşahidə oluna bilən kəmiyyətlər olarsa, $0 \leq u \leq s$, $t \geq s$ olduqda ζ_t kəmiyyəti üçün kvadratik orta menada optimal $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiymətinin qurulmasıdır. Diger qoyuluşda $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiyməti $t \geq s$ olduqda ζ_t kəmiyyəti üçün hesablanır və bu halda fərz olunur ki, Y_u , $0 \leq u \leq s$ kəmiyyətləri müşahidə oluna bilənir, burada $(\zeta, Y) = (\zeta_t, Y_t)_{t \geq 0}$ – ikiölçülü təsadüfi prosesdir. $\pi_{t,s}(\zeta) = M(\zeta_t | \mathcal{A}_s^Y)$ və ya $\pi_{t,s}(\zeta) = M(\zeta_t | \mathcal{A}_s^Y)$ – optimal statistik qiymətlərdir, burada $\mathcal{A}_s^Z$ və $\mathcal{A}_s^Y$ – uyğun olaraq ζ_u , $0 \leq u \leq s$ və Y_u , $0 \leq u \leq s$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrlərdir.

$\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiyməti iki t və s zaman parametrlərindən asılıdır və iki tip təsadüfi prosesi: qeyd olunmuş t və qeyd olunmuş s üçün prosesləri təyin edir. t qeyd olunduqda $(\pi_{t,s}(\zeta))_{0 \leq s \leq t}$ prosesi $(\mathcal{A}_s^Z)_{0 \leq s \leq t}$ və ya $(\mathcal{A}_s^Y)_{0 \leq s \leq t}$ ailəsinə nəzərən kvadratik integrallanan martinqaldır. Bu fakta əsaslanaraq, $\pi_{t,s}(\zeta)$ üçün yeniləşdirən martinqal üzrə stoxastik integral şəklində ifadədən istifadə etmək olur.

ζ – Markov diffuzion prosesi və ya hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən Markov prosesi olarsa, $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiymətlərinin effektiv qurulması halları məlumdur. Bu hallarda $(\pi_{t,s}(\zeta))_{t \geq s}$ prosesi aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\pi_{t,s}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} y dP\{\zeta_t \leq y | \mathcal{A}_s^Z\},$$

burada $\mathcal{A}_s^Z$ -ya $\mathcal{A}_s^Z$ və ya $\mathcal{A}_s^Y$ -in işarələməsidir.

$P\{\zeta_t \leq y | \mathcal{A}_s^Z\}$ şərti paylanması, s qeyd olunduğu halda, Kolmogorov düz tenliyi ilə təyin olunur: diffuzion proses halında $\rho_t(y) = dP\{\zeta_t \leq y\}/dy$ sıxlıq funksiyası üçün tenlik ilə; hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən Markov prosesi halında $P\{\zeta_t = \alpha\}$ üçün verilən tenliklər ilə; burada $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ – ζ_t -nin vəziyyətləri çoxluğudur. $Z = \zeta$ olduğu halda $\rho_s(y)$ və $P\{\zeta_s = \alpha\}$ üçün başlanğıc şərtlər, uyğun olaraq, $\delta(y - \zeta_s)$ və ya $\delta(\alpha, \zeta_s) = I(\zeta_s = \alpha)$ δ – funksiyası, $Z = Y$ olduğu halda isə qeyri – xətti filtrasiya tenlikləri vasitəsilə hesablanılan $dP\{\zeta_s \leq y | \mathcal{A}_s^Y\}/dy$ və ya $P\{\zeta_s = \alpha | \mathcal{A}_s^Y\}$ şərti ehtimalları götürülür.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSION EKSPERİMENT
« **нелинейный регрессионный эксперимент; nonlinear regression experiment** » – asılı olmayan $y_t = \eta(x_t, \theta) + \varepsilon_t$ ölçmələr ardıcılığıdır ki, $M\varepsilon_t = 0$,

$D\varepsilon_t = \sigma^2$ və hər hansı $m > 2$ üçün $M|\varepsilon_t|^m < \infty$.

Ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunmuş $\hat{\theta}_N$ statistik qiymətinin asimptotik xassələrinin şərti: $\hat{\theta}_N$ statistik qiyməti

$$\hat{\theta}_N \in \arg \min_{\theta} Q(\theta)$$

şərtini ödəyir, burada

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^N |y_i - \eta(x_i, \theta)|^2.$$

Əgər $\hat{\theta}_N$ bu qayda ilə birqiymətli təyin olunmazsa, onda onun $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ -də daralan ε – şəbəkələr ardıcılığı üzrə hər hansı ölçülən requlyarizasiyası seçilir [məs., $\arg \min Q(\theta)$ axtarılır]. ($\hat{\theta}$ -nin ədədi axtarışı haqqında «Qauss – Nyuton metodu» məq. – nə bax). Requlyarlıq şərtlərində $\hat{\theta}_N$ tutarlı asimptotik normal statistik qiymətdir: $\rho_N = \sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ statistikası $N(0, m^{-1}(\theta))$ normal paylanmasına zəif yığılır, burada

$$m(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_N(\theta),$$

$$m_N(\theta) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \nabla_0 \eta(x_i, \theta) (\nabla_0 \eta(x_i, \theta))^T$$

və limitin varlığı requlyarlıq şərtlərindən alınır.

ρ_N -lərin $m - 2$ tərtibə qədər momentlərinin limit paylanmalarının momentlərinə yığılması isbat olunmuşdur. ε_t -lərin paylanmalarını eyni olduğu hallarda $P\{p_N \in C\}$ ehtimallarının qabarıq C çoxluqları üzrə müntəzəm $N^{-(m-2)/2}$ tərtibə qədər asimptotik ayrılışı və

$$P_0 \left\{ \left\| p_N - \sum_{v=0}^{k-1} h_{vN}(\theta) N^{-v/2} \right\| \geq \right.$$

$$\left. \geq \kappa(\theta) N^{-k/2} \ln^{(k+1)/2} N \right\} = O(N^{-(m-2)/2})$$

asimptotik ayrılışı alınmışdır, burada k $\eta(\cdot, \theta)$ -nin hamarlılığı ilə təyin olunur.

Belə ayrılışların köməyiylə, məs., $\hat{g}$ üçün ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin N^{-1} tərtib yerdəyişməsinin baş həddini ləğv edən $\theta \rightarrow g(\theta)$ çevirmələrini tapmaq olur. Uyğun koordinat sistemi $m_N(\theta)$ informasiya matrisi ilə təyin olunan metrika – da yangeodeji koordinat sistemidir. Analoji çevirmələr ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin dispersiyasının ayrılışının ikinci tərtib

hədlərini sadələşdirir. $\theta \rightarrow g(\theta)$ çevirməsinin parametrlərinin varlığına ekvivalent şərtlər tapılmışdır və bu çevirmədən sonra ən kiçik kvadratlar statistik qiyməti $\hat{g}$ -nin kovariasiyalar matrisi sabit olur.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Григорьев Ю. Д., Иванов А. В., «Заводская лаборатория», 1987, т. 53, № 5, с. 57–61.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSİYA « криволинейная регрессия; nonlinear / curvilinear regression » – qeyri – xətti reqressiyadır.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSİYA « нелинейная регрессия; nonlinear regression » – qeyri – xətti g funksiyası ilə ifadə olunan $y_i = g(x_i; \alpha) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ reqressiyasıdır, burada $M\varepsilon_i = 0$, $x_i \in \mathbb{R}^k$ – nəzarət edilən determinik (və ya təsadüfi, lakin ε_i -dən asılı olmayan) kəmiyyətlər, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ – parametrlərin naməlum vektorudur. g – parametrlər üzrə xətti, x_i üzrə qeyri – xətti olduğu halda Q . – x. r. xətti reqressiyaya getirilir. Onda $g(x_i; \alpha) = g_1(x_i)\alpha_1 + \dots + g_m(x_i)\alpha_m$ olur, buna görə də, $g_j(x_i) = z_{ij}$ işarələməsindən istifadə etdikdə, **xətti reqressiya** alınır.

Əgər ε_i kəmiyyətlərinin paylanması məlum olarsa, onda α -nı qiymətləndirmək üçün maksimal doğruxaşarlıq metodundan istifadə etmək olar. Praktika, adətən, ən kiçik kvadratlar metodundan istifadə olunur. Metodun statistik qiyməti parametrlərin elə qiymətinə deyil ki, bu qiymət yayınmaların kvadratları cəmi $-\sum_i (y_i - g(x_i; \alpha))^2$ cəminin minimum

qiymət almasını təmin edir. Bu optimizasiya məsələsinin xüsusi həll metodları vardır: bu metodların əsası Gauss – Nyuton iterativ metodudur və bu metodun meğzi reqressiya funksiyasının parametrlər üzrə xəttişədirilməsindən və xətti reqressiyada ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətinin tapılması üçün standart düsturun tətbiqindən ibarətdir. Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətlərinin keyfiyyətinin mühüm xarakteristikası onların standart xətalardır ki, bu xətalər Q . – x. r. halında xətti reqressiya əsasında – nöqtədə parametrlər üzrə g -nin ayrılması – ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiyməti əsasında alınır. Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətinin Q . – x. r.-dakı statistik xassələri yalnız asimptotik sürətdə öyrənilmişdir; bəzi requlyarlıq şərtlərində ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiyməti tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətdir. Q . – x. r. üçün kiçik seçimlər nəzəriyyəsi inkişaf etdirilməmişdir.

Əd.: [1] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М., 1981; [2] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989.

QEYRİ – XƏTTİ TƏNLİK; Monte-Karlo metodu ilə həll « нелинейное уравнение; решение методом Монте-Карло; nonlinear equation; Monte-Karlo solution technique » – təsadüfi hadisə və proseslərin statistik modeləşdirilməsi və bunların nəticələrinin elə funksiyalarının hesablanması alqoritmləridir ki, onların riyazi gözlemələri axtanlı həllin nöqtələrdə qiymətlərinə (ola bilər ki, təqribən) və ya digər xarakteristikalarına bərabərdir. Bir qayda olaraq, Monte – Karlo metodu ilə qeyri – xətti kinetik köçürmə tənliyi və ya oxşar şərhli olan tənliklər həll olunur. Həll üçün birbirilə qarşılıqlı təsirdə olan və ya bilavasitə və (və ya) ətraf mühitin hissəciyə təsirinə məruz hissəciklər ansamblının davranışı

modeləşdirilir (bax, *Statistik modeləşdirilməsi* köçürmə məsələlərinin). Sonuncu halda tənliyi hər dəfə qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklərin köçürülməsi modeləşdirilməklə iterasiyalarla həll mümkündür, bu halda əvvəlki iterasiyalardan axınlar üzrə mühitin vəziyyəti hesablanır, yeni məsələ xəttişədirilmiş tənliklər ardıcılığının həllinə gətirilir. Qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklər ansamblının effektiv modeləşdirilməsi yalnız böyük yaddaşlı kompyuterlərdə mümkündür. Doğum və ölüm prosesinin modeləşdirilməsi nisbətən sadədir (yeni hissəciklərin kaskadlarının davranışı), lakin bu modeller sinfinin tətbiqi mədudur.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [2] Яницкий В. Е., Теоретико-вероятностный анализ прямого статистического моделирования столкновительных процессов в разреженном газе, в кн.: Бёрд Г., Молекулярная газовая динамика. Дополнение I, пер. с англ., М., 1981, с. 279–302.

QEYRİ – KOMMUTATİV EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « некоммутативная теория вероятностей; non-commutative probability theory » – kvant nəzəriyyəsinin ehtimali strukturlarını öyrənən riyazi fəndir. Q . – k. e. n. bir sıra prinsiplə xüsusiyyətlərə malikdir: bunlardan ən mühümü uyuşmayan müşahidələnlərin (təsadüfi kəmiyyətlərin) varlığıdır ki, bunlar üçün birgə ehtimal paylanması vermək mümkün deyildir. Kvant mexanikasının riyazi dili operatorlar nəzəriyyəsidir, belə ki, uyuşmayan müşahidələnlər qeyri – kommutativ operatorlarla ifadə olunur. Bu isə kvant – mexaniki təsvirə xas olan tamamlanılmanın dərin fiziki prinsipinin əks olunmasıdır (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*).

Q . – k. e. n.-nin yaranması kvant mexanikasının aksiomatik bazisini təyin etməklə bağlıdır. Bununla bağlı aparılan araşdırmalar C. Neyman (J. Neuman), İ. Siqal (I. Segal), C. Makki (J. Mucci) kimi alimlərin işlərində öz əksini tapmışdır (1830 – 50-ci illər). Hal-hazırda Q . – k. e. n.-ndən söhbət getdikdə, «klassik» ehtimal nəzəriyyəsinin anlayış və nəticələrinin ixtiyari *müşahidələnlər cəbrinə* ümumiləşdirilməsi nəzərdə tutulur. XX əsrin 70-ci illərində kvant ölçmə nəzəriyyəsinin (bax, *Kvant rabitə kanalı, Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılma və qiymətləndirilməsinin*) və statistik mexanikanın (bax, *Kvant təsadüfi prosesi, Kvant dinamik səmi – qrupu*) konkret problemlərinə əsaslanan yeni istiqamətlər yarandı. Bununla bağlı olaraq, kvant ehtimal nəzəriyyəsi anlayışı da istifadə olunmağa başlandı. Kvant mexanikasında hər bir sisteme $\mathcal{H}$ Hilbert fəzası qarşı qoyulur. Sistemin vəziyyəti $\mathcal{H}$ -da sıxlıq operatoru S ilə ifadə olunur, bu operator vahid izli müsbət operatorudur, *müşahidələnlər* isə $\mathcal{H}$ -da özü-özünə qoşma A operatorlarıdır. S vəziyyətində müşahidəolunan A -nın ölçülmə nəticəsi təsadüfidir, onun orta qiyməti

$$\langle A \rangle = \text{tr} SA \quad (1)$$

düsturu ilə verilir.

Müşahidə olunan A -nın ehtimal paylanmasını tamamilə təsvir etmək üçün A operatorunun spektral ayrılığı $\{G(\lambda): -\infty < \lambda < \infty\}$ -nin verilməsi zəruridir. Müşahidəolunan A -nın qiymətinin $[\alpha, \beta]$ intervalından olması ehtimalı

$$P[\alpha, \beta] = \text{tr} S(G(\beta) - G(\alpha)) \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Q . – k. e. n.-nin məsələlərindən biri müşahidəolunan A və sıxlıq operatoru S haqqında hər hansı informasiya olduğu halda kvant orta qiymətlərinin və ehtimallarının hesablanması və ya qiymətləndirilməsidir.

Məs., şəbəkəvari model kvant statistik mexanikası modelini vəziyyətlər və müşahidələnlərin mühüm misalları ilə aydınlaşdır.

$\mathbb{Z}^V$ – tamqiymətli dim. – ölçüsü V olan şəbəkə, J – indekslərin sonlu çoxluğu olsun. Her bir sonlu $\Lambda \subset \mathbb{Z}^V$ altçoxluğuna $\varphi(x)$,

$x \in \{j_z\}_{z \in \Lambda}$ funksiyalarından ibarət $(\varphi, \varphi) = \sum_x \varphi(x) \overline{\varphi(x)}$

skalyar hasilı ilə, sonluölçülül $\mathcal{H}(\Lambda)$ Hilbert fəzası qarşı qoyulur, $j_z \in J$.

Əgər $\Lambda \subset \Gamma$ olarsa, onda $\mathcal{H}(\Lambda)$ -da təsiredən B operatoru, təbii olaraq $\mathcal{H}(\Gamma)$ -də təsiredən operatora kimi davam olunur. Baxılan sistemlər üçün xətti öz-özünə qoşma $U(z_1, z_2)$,

$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^V$ operatorlarının toplusu qarşılıqlı təsir operatoru (cüt-cüt) adlanır; $U(z_1, z_2)$ operatoru $\mathcal{H}(z_1, z_2)$ fəzasında təsir edir; daha mürəkkəb (hökmən deyil ki, cüt-cüt) qarşılıqlı təsirlər analoji təyin olunur. Verilmiş sonlu $\Lambda \subset \mathbb{Z}^V$ çoxluğu üçün qarşılıqlı təsir enerjisi $H_\Lambda = \sum_{z_1, z_2 \in \Lambda} U(z_1, z_2)$ xətti öz-özünə qoşma operatorudur; bu

operatorun məxsusi qiymətləri sistemin enerji səviyyələri adlanır. Sıxlıq operatoru

$$S = [\text{tr}(\exp(-\beta H_\Lambda))]^{-1} \exp(-\beta H_\Lambda) \quad (3)$$

ilə ifadə olunan vəziyyət sonlu Gibbs vəziyyəti adlanır, burada β – ədədi parametrdir (ters temperatur). Kvant statistik mexanikasında mühüm hal ondan ibarətdir ki, termodinamik tarazlıq vəziyyətində bütün A kəmiyyətinin orta qiyməti

$$\langle A \rangle = [\text{tr} \exp(-\beta H_\Lambda)]^{-1} \text{tr}(\exp(-\beta H_\Lambda) A) \quad (4)$$

düsturu ilə hesablanır. Əgər $A = H_\Lambda$ enerjidirsə, onda onun orta qiyməti

$$\langle H_\Lambda \rangle = \left[\sum_k \exp(-\beta E_k) \right]^{-1} \sum_k E_k \exp(-\beta E_k) \quad (5)$$

düsturu ilə hesablanır və baxılan sistemin E_m enerjisində malik vəziyyətdə olması ehtimalı

$$P\{H_\Lambda = E_m\} = \exp(-\beta E_m) \left[\sum_k \exp(-\beta E_k) \right]^{-1}$$

berabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər qarşılıqlı təsir trivial, yeni $U(z_1, z_2) = U(z_1) + U(z_2)$ olarsa, onda Gibbs vəziyyəti prodaqt-vəziyyətdir: ixtiyari sonlu kəsişən $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}^V$ və $\mathcal{H}(\Lambda_1)$ və $\mathcal{H}(\Lambda_2)$ -də təsir edici A_1 və A_2 operatorları üçün $\langle A_1, A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle$ berabərliyi ödənilir.

Statistik mexanika sistemləri onunla səciyyələnir ki, onların səbəstlik dərəcəsi sayları olduqca böyük olur və belə sistemlər üçün (4) tipli düsturlarla dəqiq hesablamalar mümkün olmur. Buna görə də, $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^V$ olduğu halda, «termodinamik limitə keçid» istifadə olunur. Belə limitə keçidə riyazi nöqtəyi – nəzərdən yanaşdıqda, kvazilokal müşahidələnlər cəbrlərində Gibbs limit vəziyyətləri yaranır.

$\mathfrak{A}(\Lambda)$, – $\mathcal{H}(\Lambda)$ fəzasında bütün operatorların sonluölçülül

* – cəbri olsun; $\Lambda \subset \Gamma$ olduqda $\mathfrak{A}(\Lambda) \subset \mathfrak{A}(\Gamma)$ olduğundan,

$\mathfrak{A}_0 = \bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^V} \mathfrak{A}(\Lambda)$ lokal müşahidələnlər * – cəbridir. $\mathfrak{A}_0$

* – cəbrinin operator normasına görə tamamlanması abstrakt C^* -cəbrdir; C^* -cəbri kvazilokal müşahidələnlər cəbri adlanır. Əgər bütün $A \in \mathfrak{A}$ operatorları üçün $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^V} \langle A \rangle$ limiti varsa, onda bu limit Gibbs limit vəziyyəti adlanır.

Q. – k. e. n.-də Gelfand – Naymark – Siqal (QNS) konstruksiyasından tez-tez istifadə olunur; bu konstruksiya abstrakt $\mathfrak{A}$ C^* -cəbrini hər hansı Hilbert fəzasında operatorlar cəbri kimi realizə etməyə imkan verir. $\langle \cdot \rangle$ – $\mathfrak{A}$ -da vəziyyət olsun, onda

$(A, B) = \langle A^*, B \rangle$ düsturu $\mathfrak{A}$ -da psevdoskalyar hasil təyin edir. FaktORIZASIYA və tamamlama Hilbert fəzasına gətirir, belə ki, hər bir $A \in \mathfrak{A}$ elementinə, $\mathcal{H}$ -də məhdud $\hat{A}$ operatoru qarşı qoyulur, odur ki, $\langle A \rangle = (\Omega, \hat{A}, \Omega)$, burada Ω , – $\mathcal{H}$ -də seçilmiş vahidi operatorudur. $\hat{A}$ operatorları $\mathcal{H}$ -də operatorların C^* -cəbrini emələ gətirir.

Q. – k. e. n.-də istifadə olunan operator cəbrlərinin əsas sinfini Neyman cəbrləri (vahidi olan W^* -cəbrləri) təşkil edir; bu cəbrlər zəif limit keçidinə görə qapalı operatorlar cəbrləridir və bu operatorlar hər hansı $\mathcal{H}$ Hilbert fəzasında təsir edir [əgər bütün $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ üçün $\lim_{\alpha} (A_\alpha, \varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)$ olarsa, onda A_α

operatorları A operatoruna zəif yığılır, deyilir]. Kvazilokal müşahidələnlər $\mathfrak{A}$ cəbrində verilmiş hər bir $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti QNS konstruksiyasının köməyi ilə Hilbert fəzası $\mathcal{H}$ -i və zəif qapanması Neyman cəbri olan $\mathfrak{A}$ operatorlar cəbrini təyin etməyə imkan verir.

Q. – k. e. n.-nin ümumi aksiomatikası ondan ibarətdir ki, hər hansı $\mathfrak{A}$ Neyman cəbri və $\mathfrak{A}$ -da ele $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti seçilir ki, bu vəziyyət ixtiyari $A_\alpha \in \mathfrak{A}$, $A_\alpha \geq 0$ üçün

$$\left\langle \sum_{\alpha} A_{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha} \langle A_{\alpha} \rangle \quad (6)$$

normallıq şərtini ödəsin. A. N. Kolmogorova məxsus ehtimal nəzəriyyəsinin klassik aksiomları sistemi bu sxemə cavab verir, bu şərtlə ki, $\mathfrak{A}$ cəbri kommutativ olmalıdır. Neyman cəbrlərində vəziyyətlərin ümumi xassələri qeyri-kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsində öyrənilir. Bu nəzəriyyənin əsas elementləri $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti ilə verilmiş $\mathfrak{A}$ Neyman

cəbrində L^1 və L^2 fəzalandır. Qeyri-kommutativ Radon – Nikodim teoremləri adlanan kompleks nəticələr mövcuddur ki, bu nəticələr başlanğıc $\langle \cdot \rangle$ vəziyyətinin

və bəzi qeyri – məhdud operatorların köməyi ilə L^1 və L^2 fəzalarının elementlərini realizə etməyə imkan verir.

Qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsində öyrənilən digər suallar kompleksini verilmiş $\mathfrak{A}$ Neyman cəbrinə daxil olan bütün ortoqonal proyektəmə operatorlarının çoxluğu $\mathcal{P}$ -nin araşdırılması və $\mathfrak{A}$ cəbrində vəziyyətlər ilə $\mathcal{P}$ -də təyin olunmuş heqiqi funksiyalar (ölçülər) arasındakı əlaqənin öyrənilməsi təşkil edir.

$\mathcal{P}$ çoxluğuna daxil olan operatorlar $P^* = P = P^2$ şərtləri ilə xarakterizə olunur. $\mathcal{P}$ çoxluğu isə Q. - k. e. n.-ndə hadisələr cəbri kimi anlaşılır. Hər bir $P \in \mathcal{P}$ proyektoru üçün tamamlayıcı $P^\perp = I - P$ proyektoru təyin olunmuşdur, proyektorların ixtiyari $\{P_\alpha\}$ sistemi üçün isə deqiq yuxarı $\bigwedge_\alpha P_\alpha$ sərhədi (aşağı sərhəd) vardır. $\vee, \wedge, \perp$ əməlləri adi ikilik münasibətləri ilə əlaqəlidir, yeni: $(\bigvee_\alpha P_\alpha)^\perp = \bigwedge_\alpha P_\alpha^\perp, (\bigwedge_\alpha P_\alpha)^\perp = \bigvee_\alpha P_\alpha^\perp$, lakin distributivlik qanunu: $(P_1 \vee P_2) \wedge Q = (P_1 \wedge Q) \vee (P_2 \wedge Q)$, ümumiyyətlə, ödənilmir. Belə əməllər təyin olunan qismən nizamlanmış abstrakt çoxluq – m ə n t i q adlanır. $\mathcal{P}$ çoxluğunda verilmiş heqiqi mənfii olmayan μ funksiyası:

$$1) \mu(\bigvee_i P_i) = \sum_i \mu(P_i) \text{ bərabərliyi cüt-cüt ortoqonal } P_i \in \mathcal{P}$$

proyektorlarının ixtiyari $\{P_i\}$ sistemi üçün ödənilirsə,

2) $\mu(I) = 1$ kimi xassələrə malikdirsə, onda μ – ölçü (ehtimal ölçüsü) adlanır.

$\mathcal{P}$ çoxluğunda verilmiş ölçü birqiyməli olaraq, $\mathfrak{A}$ Neyman cəbrində hər hansı normal vəziyyətə qədər davam olunur, lakin evvelcədən davam olunmanın qeyri – mümkün olduğu halların müəyyən sinfi istisna olunur (bax, *Qlison teoremi*).

Q. – k. e. n.-nin problematikasında limit teoremləri mühüm yer tutur. Bu teoremlərdə $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$ kimi cəmlərin $n \rightarrow \infty$ olduq-

da asimptotik xassələri araşdırılır. A_k -lar müəyyən xətti özü-özünə qoşma operatorlardır və bu operatorlar normal vəziyyəti seçilmiş olan verilmiş $\mathfrak{A}$ cəbrinə daxildir. Burada mərkəzi limit teoreminə, erqodik teoremlərə, şərti riyazi gözlemələrin yığılmasına, böyük ədələrin gücləndirilmiş qanununa aid nəticələr alınmışdır. Bunlara operator cəbrlərində təsir edən Markov inikaslarının rəqulyarlığı üzrə nəticələri də əlavə etmək düzgün olardı.

Mərkəzi limit teoremi. $\mathcal{H}$ Hilbert fəzası $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti və $A_1, A_2, \dots$ xətti məhdud, özü-özünə qoşma operatorlarının verildiyi fərz olunur.

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (A_k - \langle A_k \rangle I)$$

operatoru üçün paylanma funksiyası $F_n(x)$ -ə baxılır. Operatorlar üzərinə qoyulan əsas tələb onların «zəif» asılılıq şərtidir. Belə asılılığın mümkün variantlarından biri (Rozenblatt şərti) aşağıdakı kimidir. $\mathcal{H}$ -da məhdud, xətti özü-özünə qoşma operatorların verilmiş M sistemi üçün

$$T = \sum_{i=1}^r \lambda_i A_{i1} A_{i2}, \dots, A_{im_i}$$

şəklində operatorlar çoxluğu $\mathfrak{A}(M)$ ilə işarə olunur, burada $A_j = M \cup \{I\}$, λ – skalyarlardır.

$$\alpha(n) = \sup_{A, B} \|A\|^{-1} \|B\|^{-1} |\langle A, B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle|$$

kəmiyyətlərinə baxılır, burada $A \in \mathfrak{A}(A_1, \dots, A_k)$, $B \in \mathfrak{A}(A_{k+n+1}, \dots)$, $\|\cdot\|$ – operatorun normasıdır və fərz olunur ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$. Rozenblatt şərti qeyd olunmuş şəkildə

(«zəif» asılılıq) birölçülü sistemlərin limit Gibbs vəziyyətləri üçün bir sıra hallarda ödənilir (çoxölçülü sistemlərdə digər növ zəif asılılıq olur). $F_n(x)$ paylanmalarının araşdırılmasında digər mühüm xarakteristika $\beta_n = \sup_{|i-j| \geq n} \|A_i A_j - A_j A_i\|$ kəmiyyətidir.

α_n və β_n kəmiyyətlərinin azalma sürəti üzərinə qoyulan müəyyən tələblərlə (eyni zamanda A_k operatoru üçün bezi təbii fərzliylərlə) hökm etmək olar ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$, burada

$\Phi(x)$ – normal paylanma funksiyasıdır. Klassik limit teoremlərində olduğu kimi, burada da əsas isbat metodu xarakteristik funksiyalar metodu və bir də bu metoda yaxın Laplas çevirmələri metodudur. Verilmiş özü-özünə qoşma A operatorunun paylanmasının xarakteristik funksiyasını

$$\varphi(t) = \langle \exp(itA) \rangle, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Operatorlar cəmləri üçün xarakteristik funksiyaların analizində operatorun eksponenti üçün

$$\exp(A+B) = \lim_{m \rightarrow \infty} [\exp(m^{-1}A) \exp(m^{-1}B)]^m$$

– Li – Trotter – Kato düsturundan istifadə olunur. Mərkəzi limit teoremi bezi qeyri – məhdud operatorlar üçün də ifadə olunmuşdur; xüsusi halda, kvant statistik mexanikasının kəsilməz sistemlərinin enerji operatoru üçün sistemin əsas parametrlərinin müəyyən dəyişmə oblastlarında bu teorem isbat olunmuşdur.

Markov inikasları üçün erqodik teoremlər. $\mathfrak{A}$ – Neyman cəbrinə baxılır. Bu cəbrdə $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq 0$ xassəsinə malik $\langle \cdot \rangle$ normal vəziyyəti verilir. 1) $T(I) = I$; 2) Yalnız $A \geq 0$ olduqda, $T(A) \geq 0$ xassələrinə malik olan $T: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ xətti inikasına baxılır. Qeyri – kommutativ erqodik teoremlər T^n iterasiyalarının asimptotikasını və

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} T^m \text{ Çezaro orta qiymətlərini, } n \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

öyrənir. Yığılmanın əsas növləri L^1 və L^2 fəzalarının normaya görə yığılması və eyni zamanda sanki hər yerdə yığılmır: əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $E \in \mathfrak{A}$ proyektoru göstərmək olarsa ki, $\langle I - E \rangle < \varepsilon$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)E\| = 0$ şərtləri ödənilsin

(kommutativ halda Yeqorov teoreminə əsasən, bu sanki hər yerdə yığılma ilə üst-üstə düşür), onda $A_n \in \mathfrak{A}$ operatorları $A \in \mathfrak{A}$ operatoruna sanki hər yerdə yığılır, deyilir. İxtiyari $A \in \mathfrak{A}$ üçün $\langle T(A) \rangle = \langle A \rangle$ olarsa, isbat olunmuşdur ki, $\sigma_n(A)$ orta qiymətləri müəyyən bir $\hat{A} \in \mathfrak{A}$ operatoruna orta və sanki hər yerdə

yığılır (statistik və individual erqodik teoremlər). T^n iterasiyalarının orta yığılmasını təmin edən sadə şərt (rəqulyarlıq) aşağıdakı kimidir (klassik zəncirlər üçün Markov şərtinin analoqu): elə $v \in L^1$ vəziyyəti və $\delta > 0$ ədədini göstərmək mümkündür ki, hər

bir $\mu \in L^1$ vəziyyəti üçün $\mu(T(A)) \geq \delta \nu(A)$ bərabərsizliyi bütün $A \in \mathfrak{A}$, $A \geq 0$ operatorları üçün ödənilir.

Şerti riyazi gözlemələr və onlar üçün yığılma. $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$ – Neyman cəbrləri, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\langle \cdot \rangle$, – $\mathfrak{A}$ cəbrində dəqiq normal vəziyyət olsun. $\mathfrak{B}$ -də $\mathfrak{A}$ -dan olan şerti riyazi gözlemə –

1) $A \geq 0$ olduqda $\varphi(A) \geq 0$;

2) bütün $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ üçün $\langle AB \rangle = \langle \varphi(A)B \rangle$

xassələrinə malik olan $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ xətti məhdud inikasa deyilir.

Şerti riyazi gözlemə, verilmiş $\langle \cdot \rangle$ vəziyyətində, ixtiyari $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ altcəbri üçün təyin olunmamışdır, lakin bununla belə, ehtimal vardır ki, bunlarda şerti riyazi gözlemələr vardır. Məs., $\langle \cdot \rangle$ – kvazilokal müşahidələnlər cəbrində prodakt – vəziyyətdir. Λ – sonlu altçoxluluqdur, onda $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}(\Lambda)$ şerti riyazi gözleməsi vardır. Martinqal anlayışının və uyğun yığılma teoremlərinin qeyri – kommutativ ümumiləşmələri də məlumdur.

Qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox sualları normalanmış Jordan cəbrləri (bu cəbrlər kommutativ olub, assosiativ deyildirlər) üçün araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Neumann J. von, Birkhoff G., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 823–43; [2] Segal I., «Ann. Math.», 1953, v. 57, p. 401–57; [3] Морозова Е. А., Ченцов Н. Н., Матрицы вероятностей и стохастическая матрица, М., 1973 (Препринт. ИПМ АН СССР); [4] Синай Я. Г., Аншелевич В. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 151–67; [5] Шерстнев А. Н., «Изв. вузов. Математика», 1982, № 8, с. 20–35; [6] Браттели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982; [7] Сарымсаков Т. А., Введение в квантовую теорию вероятностей, Таш., 1985; [8] Jajte R., Strong limit theorems in noncommutative probability, В. – [a. o.], 1985; [9] Goldstein M. S., «J. Statist. Phys.», 1985, v. 40, p. 329–60.

QEYRİ – KOMMUTATİV İNTEQRALLAMA NƏZƏRİYYƏSİ « некоммутативная теория интегрирования; noncommutative integration theory » – bax, Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.

QEYRİ – KORRELYAR TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « некоррелированные случайные величины; uncorrelated random variables » – ikinci tərtib həqiqi və ya kompleks ele ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətləridir

ki, $M_{\xi_1 \xi_2} = M_{\xi_1} M_{\xi_2}$. Əgər ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin orta qiymətləri sıfıra bərabər olarsa, onda qeyri – korrelyarlıq ortoqonallığa ekvivalentdir. Əgər ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda bu təsadüfi kəmiyyətlər qeyri – korrelyardır. Tərsi həmişə doğru deyildir, lakin iki mərhələ halda tərsi də doğru olur. Birincisi, ξ_1 və ξ_2 ikiden artıq qiymət almayan və qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda onlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. İkincisi, əgər $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ -də Qauss təsadüfi vektorudursa və $\xi_1, \dots, \xi_n$ cüt-cüt qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi_1, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Cüt-cüt Q. – k. t. k. cəminin dispersiyası toplananların dispersiyaların cəminə bərabərdir.

QEYRİ – METRİK ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLANMA « неметрическое многомерное шкалирование; non-metric multidimensional scaling » – bax, Çoxölçülü şkalalanma.

QEYRİ – MƏHDUD TƏSADÜFİ DOLAŞMA « неограниченное случайное блуждание; unbounded random walk » – bax, Təsadüfi dolaşma.

QEYRİ – MƏXSUSİ PAYLANMA « несобственное распределение; improper distribution » – bax, Cirləşməyən paylanma, məxsusi paylanma.

QEYRİ – MƏQBUL STATİSTİK QIYMƏT « недопустимая оценка; inadmissible estimator » – bax, Statistik qiymətləndirmə.

QEYRİ – MƏNFİ / MƏNFİ OLMAYAN MÜƏYYƏN FUNKSIYA « неотрицательно определенная функция; positive semi – definite / nonnegative definite function » – bax, Müsbət müəyyən funksiya.

QEYRİ – MƏRKƏZİ Xİ – KVADRAT PAYLANMA « нецентральное хи – квадрат распределение; non-central chi squared distribution », qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanma, – paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{e^{-(x+\lambda)/2} x^{(n-2)/2}}{2^{n/2} \Gamma(1/2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 x^2}{(2r)!} \frac{\Gamma(1/2+r)}{\Gamma(n/2+r)}$$

düsturu ilə verilən, $(0, \infty)$ -də toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada r – sərbəstlik dərəcəsi sayı, λ – qeyri – mərkəzlilik parametridir. $\lambda = 0$ olduqda, bu sıxlıq adı (mərkəzi)

χ^2 – paylanmanın sıxlığı ilə üst-üstə düşür. Bu paylanmanın riyazi gözleməsi $n + \lambda$, dispersiyası $2(n + 2\lambda)$ -ya, xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - 2it)^{-n/2} \exp \{ \lambda it / (1 - 2it) \}$ -yə bərabərdir. Q. – m. xi – k. p. sonsuz bölünən paylanmalar sinfindəndir.

Q. – m. xi – k. p., adətən, dispersiyaları vahid, orta qiymətləri sıfırdan fərqli m_i -yə bərabər normal qanunla paylanmış, asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanması kimi yaranır. Daha dəqiq, $X_1^2 + \dots + X_n^2$ cəmi sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər, qeyri – mərkəzlilik parametri isə $\lambda = m_1^2 + \dots$

$+ m_n^2$ olan Q. – m. xi – k. p. qanununa tabedir. Sonlu sayda qarşılıqlı asılı olmayan Q. – m. xi – k. p.-ya tabe təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi bu tip paylanma qanununa tabedir, onun parametrləri məhz toplananların uyğun parametrlərinin cəminə bərabərdir.

Əgər n cüt olarsa, onda Q. – m. xi – k. p.-nın paylanma funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$F_n(x; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{n}{2} \frac{(\lambda/2)^m (x/2)^k}{m! k!} e^{-(\lambda+x)/2}.$$

Bu düsturda Q. – m. xi – k. p. ilə Puasson paylanması arasında əlaqə ifadə olunur. Doğrudan da, əgər X və Y uyğun olaraq, $\chi^2/2$ və $\lambda/2$ parametrləri Puasson paylanması ilə paylanmış-

larsa, onda $P\{X - Y \geq s\} = F_{2s}(x; \lambda)$ bərabərliyi ixtiyari tam $s > 0$ üçün ödənilir.

Q. – m. xi – k. p. əksər hallarda, xi – kvadrat tipli kriterlərin güclərinin araşdırılmasına aid riyazi statistika məsələlərində yaranır. Q. – m. xi – k. p. üçün tərtib olunmuş cədvəllər kifayət qədər tam olmadığından, χ^2 – paylanma və normal paylanmanın köməyi ilə müxtəlif yaxınlaşmalardan istifadə olunur.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Р а т н а и к Р., «Биометрика», 1949, v. 36, p. 202.

QEYRİ – MƏRKƏZİ T^2 – PAYLANMA « нецентрального T^2 – распределение; noncentral T^2 – distribution » – bax, Hotelling T^2 – paylanması.

QEYRİ – MƏRKƏZİ χ^2 – PAYLANMA « нецентрального χ^2 – распределение; noncentral χ^2 – distribution » – bax, Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma.

QEYRİ – MƏRKƏZİLİK PARAMETRİ « нецентральности параметр; noncentrality parameter » – bax, Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma.

QEYRİ – MƏRKƏZİLİK PARAMETRİ xi – kvadrat kriterisinin « нецентральности параметр хи – квадрат критерия; noncentrality parameter of chi squared test » – xi – kvadrat kriterisinin artan güc funksiyasıdır. Əgər $X_k \sim N(a_k, 1)$ asılı olmayan təsadüfi

kəmiyyətlərdirsə və $\Delta = \sum_{k=1}^n a_k^2$ olarsa, onda $\sum_{k=1}^n X_k^2$ cəmi

sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər və Q. – m. p. Δ olan χ^2 – paylanma qanununa tabədir.

$$y_i = g^T(x_i) \varphi + f^T(x_i) \theta + \varepsilon_i, \quad \varphi \in \mathbb{R}^q, \quad \theta \in \mathbb{R}^p$$

regression eksperimenti üçün $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ asılı olmayan xətlər olduğu halda, $\varphi = 0$ hipotezinin χ^2 – kriterisi ilə yoxlanılması məsələsində Q. – m. p. Δ üçün iki ifadə vardır:

$$\sigma^2 \Delta = \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^N (g^T(x_i) \varphi + f^T(x_i) \theta)^2, \quad X = \{x_1, \dots, x_N\},$$

və

$$\Delta(X, \varphi) = \varphi^T D^{-1}(X) \varphi,$$

burada $D(X) = M_g - M_{fg}^T M_f^{-1} M_{fg}$ və M_f^{-1} -in varlığı fərz olunur. Burada

$$M_f = \sum_{i=1}^N f(x_i) f^T(x_i), \quad M_g = \sum_{i=1}^N g(x_i) g^T(x_i),$$

$$M_{fg} = \sum_{i=1}^N f(x_i) g^T(x_i).$$

F -kriteri və χ^2 – kriterinin Q. – m. p. üst-üstə düşür. $\Delta(X, \varphi)$ -nin X seçilməsi ilə bağlı maksimizasiyası haqqında

514 QEYRİ – MƏRKƏZİLİK

«Дискриминирующая экспериментерин планлашdırılması» məqaləsinə bax.

QEYRİ – MÜƏYYƏNLİKLƏR MÜNASİBƏTİ « неопределенностей соотношение; uncertainties relation » – ixtiyari S vəziyyətində iki kvant X və Y müşahidələnenlərinin dispersiyalarını (qeyri – müəyyənlikləri) əlaqələndirən fundamental bərabərsizlikdir. Bu bərabərsizlik

$$D_S\{X\} D_S\{Y\} \geq \frac{1}{4} |M_S\{i\}[X, Y]|^2$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $D_S\{X\}$, $D_S\{Y\}$ – dispersiyalar, $[X, Y] = XY - YX$ isə X və Y müşahidələnenlərinin kommutatorudur. Q. – m. m. onu ifadə edir ki, məs., ele kvant vəziyyəti yoxdur ki, bu vəziyyətdə bütün müşahidələnenlərin dəqiq müəyyən qiyməti olsun. Bu fakt da onu göstərir ki, kvant statistikasını klassik statistikadan prinsiplərlə fərqlənir. Q. – m. m. tamamlanma prinsipini kəmiyyətcə ifadə edir. Mikroobyektlər üzərində fiziki ölçmələr, hər biri makroskopik fəza-zaman mühitinin mürekkəb özünəməxsus təşkilini verən eksperimental qurğular vasitəsilə aparılır. Belə təşkilatların yerinə yetirilməsinin müxtəlif qaydaları eyni bir mikroobyektə aid olmalarına baxmayaraq, ümumiyyətlə, bir-birini istisna edir, yəni bu qaydalar bir-birini tamamlayırlar. Bu vəziyyət riyazi formalizmde öz əksini tapır və uyğun X və Y müşahidələnenləri qeyri – kommutativ operatorlarla təsvir olunur. Belə müşahidələnenlər üçün həmişə ele S vəziyyəti tapılır ki, bu vəziyyətdə Q. – m. m.-nin sağ tərəfi ciddi müsbətdir. Əlavə müşahidələnenlərin kanonik misali kvant obyektinin vəziyyəti və sürətini təyin edir.

QEYRİ – MÜHÜM VƏZİYYƏT(i) Марков зəncиринин « несушествственное состояние цепи Маркова; nonessential state of a Markov chain » – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYRİ – MÜHÜM VƏZİYYƏTLƏR SİNFİ Марков зəncиринин « несуществственный класс состояний цепи Маркова; nonessential set of states of a Markov chain » – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYRİ – MÜMKÜN HADİSƏ « невозможное событие; impossible event » – müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə heç bir halda baş verməyən hadisədir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasıdırsa, onda Q. – m. h. ele $\emptyset \in \mathcal{A}$ hadisəsidir ki, $\omega \in \Omega$ elementar hadisələrinin heç biri ilə baş vermir (çoxluqlar nəzəriyyəsində boş çoxluq). Q. – m. h. baxılan ehtimal modelində Ω yəqin hadisəsinə əks hadisədir (çoxluqlar nəzəriyyəsində tamamlayıcı çoxluqdur) və buna görə də, Q. – m. h.-nin ehtimalı sıfıra bərabər götürülür: $P(\emptyset) = 0$.

Bax, Hadisələr cəbri.

QEYRİ – MÜNTƏZƏM KOD « неравномерный код; variable length code » – qeyri – müntəzəm giriş və ya çıxış kod çoxluğuna (bax, aşağı) malik koddur. Məlumatlar mənbəinin kodlaşdırılmasında kodlaşdırmanın doğrudan doğruya ardıcılıq müəyyən giriş prefiks çoxluğuna (yeni heç bir söz digər sözün başlanğıcı olmayan bir çoxluq) eməle gətirən sözlərə ayrılır. Kodlama bu sözlərin digər çıxış prefiks çoxluğunun sözlərlə evez olunmasından ibarətdir. Əgər giriş (və ya çıxış) çoxluğunun bütün sözlərinin uzunluqları bərabər olarsa, belə çoxluq müntəzəm və ya blok çoxluq, əks halda qeyri – müntəzəm çoxluq adlanır. Kod uyğun olaraq, giriş və ya çıxış üzrə müntəzəm və ya qeyri – müntəzəm kod adlanır. Giriş və çıxış üzrə Q. – m. k.-lann dəyəri

yalnız giriş üzrə müntəzəm kodlarla müqayisədə az kodlama dəyərinə malik olur. Giriş üzrə qeyri – müntəzəm, çıxış üzrə isə müntəzəm dəyərlərli mənbənin entropiyasına olduqca yaxın kodlar mövcuddur.

Əd.: [1] Х о д а к Г. Л., Проблемы передачи информации, 1972, т. 8, № 2, с. 21–32.

QEYRİ – PARAMETRİK DİSKRİMİNANT ANALİZ
« непараметрический дискриминантный анализ; nonparametric discriminant analysis », qeyri – parametrik təsnifat, – qeyri – parametrik regressiya analizinin əl bölməsidir ki, burada Y asılı dəyişənin qiymətləri sonlu $\{1, \dots, N\}$ çoxluğundandır. $1, \dots, N$ ədədləri siniflərin nömrələri kimi interpretasiya olunur.

$X \in \mathbb{R}^d$ – təsadüfi vektor olsun, $Z_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$, – (X, Y) cütünün n sayda asılı olmayan realizasiyaları seçimidir. Q. – p. d. a.-in məsələsi Z_n seçimi üzrə $x \in \mathbb{R}^d$ vektoruna $\{1, \dots, N\}$ çoxluğunun uyğun elementini qarşı qoyan T_n həlledici qaydasını qurmaqdır. Q. – p. d. a. diskriminant analizdən onunla seçilir ki, T_n həlli (X, Y) cütünün paylanması üçün hər hansı parametrik ailedən olması fərziyyəsinə əsaslanmır. Obrazların müəyyən edilməsinin statistik nəzəriyyəsinə (rus. статистическая теория распознавания образов) Q. – p. d. a. məsələsi müəllimlə öyrənmə məsələsi adlanır, X_i – əlamətlər toplusu, Y_i – müəllimin göstərişləri, Z_n – öyrədən seçim, x nəzarət seçimi (bu halda bir elementdən ibarətdir) adlandırılır.

Həlledici qaydanın dəqiqliyi xətanın şərti ehtimalı $P_n = \mathbf{P}\{T_n(x) = Y | Z_n\}$ ilə ölçülür, belə ki, həmişə sanki yəqin $P_n \geq P^* = \min_T \mathbf{P}\{T(X) = Y\}$ münasibəti ödənilir, burada minimum bütün ölçülən $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \{1, \dots, N\}$ funksiyaları üzrə götürülür və bu minimum

$$T^*(x) = \arg \max_{i=1, \dots, N} \mathbf{P}\{Y = i | X = x\}$$

Beyes həlledici qaydasından alınır.

P^* kəmiyyəti Beyes riski adlanır. Əgər $P_n \rightarrow P^*$ ($n \rightarrow \infty$) münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, həlledici qayda asimptotik optimal həlledici qayda adlanır. Asimptotik həlledici qaydalar

$$T_n(x) = \arg \max_{i=1, \dots, N} \hat{\mathbf{P}}_n \{Y = i | X = x\}$$

şəklində axtarılır, burada $\hat{\mathbf{P}}_n$ – $\mathbf{P}\{Y = i | X = x\}$ ehtimalının Z_n seçimi üzrə qurulmuş olduqca yaxşı statistik qiymətidir. Belə $\hat{\mathbf{P}}_n$ statistik qiymətlərinin qurulması metodları X təsadüfi vektorunun paylanmasının sıxlıq funksiyasının və $Y = i$ -in $i = 1, \dots, N$ qeyd olunmuş qiymətində X -in şərti paylanma sıxlığının varlığı halında yaxşı işlənmişdir (bax, [1], fəsil 10).

Əd.: [1] Д е в р о й Л., Д ь е р ф и Л., Непараметрическое оценивание плотности. L_1 – подход, пер. с англ., М., 1988.

QEYRİ – PARAMETRİK İNFORMASİYON MİQDAR
« непараметрическое информационное количество; nonparametric Fisher information » – bax, Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.

QEYRİ – PARAMETRİK KRİTERİ « непараметрический критерий; nonparametric test » – $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı irəli sürülmüş

$H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteridir, bu zaman H_1 -ə qarşı H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsinin qeyri – parametrik olduğu, yəni Θ_0 və Θ_1 parametrik çoxluqlardan heç olmazsa birinin Evklid fəzasının altçoxluğuna topoloji ekvivalent olmadığı nəzərdə tutulur. Bu təriflə yanaşı geniş yayılmış digər tərifə görə statistik kriteri qeyri – parametrik kriteri o halda adlandırılır ki, bu kriterinin tətbiqi ilə alınmış statistik nəticələr təsadüfi kəmiyyətlərin müşahidələri nəticəsində H_1 -ə qarşı H_0 hipotezini yoxladığında ehtimal paylanmalarından asılı olmasın. Bu halda «Q. – p. k.» termini əvəzinə «paylanmadan asılı olmayan kriteri» termini də istifadə olunur.

Əsas qeyri – parametrik statistik məsələlərdən biri ilkin $F(x)$ paylanma funksiyasının verildiyi fərz olunduğu halda (hipotezində) seçimi verilənlərin bu hipotezlə uzlaşıb-uzlaşmadığının yoxlanılması haqqında məsələdir. Əgər ilkin $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməz olarsa və onun limit paylanması məlum olarsa, Q. – p. k. kimi

$$\sqrt{n}D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} \{|F_n(x) - F(x)|\}$$

Kolmoqorov statistikasından istifadə olunur, bu statistikanın paylanması $F(x)$ -in tipindən asılı deyildir.

Mühümlük ölçüsü məlum olduqda kriterinin kritik oblastı

$$\sqrt{n}D_n \geq d_\alpha$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur, burada d_α – Kolmoqorov limit paylanmasının kvantilidir, $1 - K(d_\alpha) = \alpha$.

Statistik verilənlərin birinciliyinin yoxlanılması məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur. Asılı olmayan müşahidələrin iki $x_1, x_2, \dots, x_n$ və $y_1, y_2, \dots, y_n$ seriyası əsasında, hər iki seriyada müşahidə nəticələrinin eyni $F(x)$ paylanma funksiyasına malik təsadüfi kəmiyyət üzərində aparılan sınaqlar nəticəsində alındığı haqqında hipotezi yoxlamaq tələb olunur. Əgər ilkin $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməzdirsə, onda seçimi verilənlərin birinciliyi kriterisi kimi paylanması $F(x)$ funksiyasının tipindən asılı olmayan Smirnov kriterisi –

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \max_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F_m(x)|$$

istifadə olunur, burada $F_n(x)$ və $F_m(x)$ – müşahidələrin birinci və ikinci seriyalarının uyğun empirik paylanma funksiyalarıdır. Kriterinin birincilik kritik oblastı

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \geq d_\alpha$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur, burada d_α – n və m -in kiçik qiymətlərində Smirnov statistikasi paylanmasının kvantili, n və m -in böyük qiymətlərində $1 - K(d_\alpha) = \alpha$ Smirnov kriterisinin limit paylanmasının kvantilidir. Xüsusi halda, seçimlərin həcmi

berabər olduqda (yeni $m = n$). Smirnov statistikasının dəqiq paylanması olduqca sadə ifadəyə malikdir.

Qaydalı qeyri – parametrik kriterlər variasion sıranın hədlərinin konkret qiymətlərindən asılı olmayan variasion sıranın statistikaları üzrə qurulur.

Vald – Volfovits seriyalar kriterisi birinci və ikinci seçimlərin müşahidə olunan qiymətlərinin ümumi $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n+m}$ variasion sırasında seriyalar sayı u_{mn} statistikasına əsaslanır, burada hər bir z_k -ya x_{ik} və ya y_{ik} müşahidələnən nəticələrindən biri uyğun olur.

u_{mn} statistikasının paylanması ilkin paylanma funksiyası $F(x)$ -dən asılı deyildir, doğrudan da

$$u_{nm} = \sum_{k=1}^{n+m} v_k$$

ifadəsindən bu aydındır, burada v_k – asılı olmayan 0 və 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan təsadüfi kəmiyyətlərdir. m və n -in böyük qiymətlərində u_{mn} statistikasının paylanması riyazi

gözləməsi $nm/2$ və dispersiyası $\frac{nm}{2}(n+m+1)$ -ə bərabər olan asimptotik normal paylanmadır. m qeyd olunmuş ədəd və $n \rightarrow \infty$ olduqda u_{mn}/n statistikasi limitdə $u_m = \sum_{i=1}^m w_i$ təsadüfi

fi kəmiyyətinin paylandığı qanunla paylanır, burada w_i – (0, 1) intervalında müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bax, *Riyazi statistika; qeyri-parametrik metodlar; Kolmoqorov – Smirnov kriterisi; Xi – kvadrat kriteri*.

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] К е н д а л л М., С т ь ю - а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Green wood P. E., N i k u l i n M. S., A guide to chi-squared testing, N. Y., 1996.

QEYRİ – PARAMETRİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏ(si) ehtimal sıxlığının « непараметрическое оценивание плотности вероятности; nonparametric estimation of probability density » – sıxlığın strukturu məlum olmadıqda *statistik qiymətləndirmə*. Q. – p. q. metodlarının bəziləri ehtimal sıxlığı haqqında aprior informasiya tamamilə belli olmadığı halda belə istifadə oluna bilər. Məs., sıxlığın Q. – p. q. həlledici qaydanın qurulması üçün doğruxa-oxşarlıq nisbətini tətbiq etmək tələb olunduğu halda müşahidələrin təsnifi məsələlərinin həllində istifadə olunur.

$x_1, \dots, x_n$ – hər hansı m – ölçülü X təsadüfi kəmiyyətinin müşahidəsində alınmış, asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış müşahidə nəticələri olsun. Paylanma sıxlığının statistik qiyməti

$$\begin{aligned} \hat{p}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^m} k((x - x_i)/h) = \\ &= \int \frac{1}{h^m} k((x - X)/h) d\hat{P}(X) \end{aligned}$$

münasibəti ilə təyin olunur, burada h – hər hansı ədəd, $h_k^{-1}(y/h)$ – statistik qiymətin nüvəsidir.

Ümumi halda $\hat{p}(x)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m h_j \right)^{-1} k((x_1 - x_{1i})/h_1, \dots, (x_n - x_{ni})/h_m).$$

Beləliklə, ehtimal sıxlığının qiymətləndirilməsi məsələsi h ədədinin və $k(y/h)$ nüvəsinin seçilməsi məsələsinə gətirilə bilər.

Əgər $k(y/h)$ funksiyası və h

$$\int k(y/h) dy/h^m = \int k(z) dz = 1,$$

$$\int |k(y/h)| dy/h^m = \int |k(z)| dz < \infty,$$

$$\sup_y |k(y/h)| = \sup_z |k(z)| < \infty,$$

$$\lim_{y/h} |(y/h)k(y/h)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |k(z)| = 0$$

şərtlərini; asimptotik meylsizlik şərti – $\lim_{n \rightarrow \infty} h^m = 0$ münasibətini;

$\lim_{n \rightarrow \infty} nh^m = \infty$ tutarlılıq şərtini və $\lim_{n \rightarrow \infty} nh^{2m} = \infty$ müntəzəm

yığılma şərtini ödəyərlərsə, $\hat{p}(x)$ tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiymətdir.

Əd.: [1] Ф у к у н а г а К., Введение в статистическую теорию распознавания образов, пер. с англ., М., 1979.

QEYRİ – PARAMETRİK QIYMƏTLƏNDİRMƏ

« непараметрическое оценивание; nonparametric estimation » – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsinin sonluölçülü parametrlin qiymətləndirilməsi və ya sonsuzölçülü *əngəlləyici parametrlin* varlığı halında sonluölçülü parametrlin qiymətləndirilməsi ilə bağlı bir bölməsidir. Q. – p. q. prosedurları xüsusi hallar üçün hələ A. Lejandr (A. Legendre), K. Gauss (C. Gauss) və P. Laplas (P. Laplace) tərəfindən öyrənilmişdir. B. I. Qlivenko, R. Mizes (R. Mises), A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov 20-ci əsrin 30-cu illərində empirik paylanmaların analizi ilə bağlı olduqca mühüm nəticələr almışlar. Paylanma sıxlığı üçün bəzi statistik qiymətlər, müşahidələr üzrə qiymətlərin (*histoqram, tezliklər poliqonu*) çoxdan məlum olmasına baxmayaraq, belə qiymətləndirmələr 20-ci əsrin 50-ci illərindən başlayaraq N. V. Smirnov, M. Rozenblatt (M. Rosenblatt) və N. N. Çentsov tərəfindən sisteməli şəkildə öyrənilməyə başlanmışdır.

Q. – p. q.-nin ən tipik nəticələri və metodları statistik eksperimentlərin aşağıdakı ən mühüm modellərində illüstrasiya olunur.

M o d e l 1. Paylanma funksiyası naməlum $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ olan asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri toplusu müşahidə olunur.

M o d e l 2. Spektral funksiyası naməlum $F(\lambda)$, $|\lambda| \leq \pi$ olan stasionar Gauss təsadüfi ardıcılığının parçası $Y_1, \dots, Y_n$ müşahidə olunur.

M o d e l 3. Intensivliyi ε^2 ($\varepsilon \rightarrow 0$) olan Gauss bəyaz küyü ilə qarışıqda naməlum $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$ siqnalı, yeni

$$X_\varepsilon(t) = F(t) + \varepsilon w(t), \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

müşahidə olunur, burada $w(t)$ – standart Viner prosesidir.

Bundan sonra bu modellərin bezi tip məsələlərinə baxılır.

I. Naməlum qanunun zəif topologiyada qiymətləndirilməsi. Model 1-də $F(x)$ -in, model 2-də $F(\lambda)$ -nın, model 3-də $F(t)$ -nin qiymətləndirilmə məsələsi üçün olduqca ümumi şərtlərdə güclü mənada (uyğun olaraq $n \rightarrow \infty$ və $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda) tutarlı statistik qiymətlərin varlığı seçiyyəvidir. Bundan başqa, bu məsələlər üçün təbii mənada yaxşılaşa bilinməyən və bir qayda olaraq, yaxşı öyrənilmiş sadə statistik qiymətlər vardır. $F(x)$ üçün belə statistik qiymət seçimi empirik paylanma funksiyası $F_n(x) = n^{-1}I_{(-\infty, x)}(X_i)$ -dir. $F(\lambda)$ üçün $I_n(\lambda)$ periodogramının inteqralı, yəni

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n Y_k e^{-is\lambda} ds = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(s) ds$$

düsturu ilə ifadə olunan statistik qiymətdir. $F(t)$ üçün $X_\varepsilon(t)$ -nin statistik qiymətini götürmək təbii bir şeydir.

Bu misallarda $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$, $\sqrt{n}(F_n(\lambda) - F(\lambda))$ normalanmış fərqlərinin paylanmaları $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq orta qiymətləri sıfıra bərabər, korrelyasion funksiyaları

$$F(x \wedge y) - F(x)F(y), \quad 2\pi \int_0^{\lambda \wedge \mu} (F'(s))^2 ds$$

olan Gauss təsadüfi prosesinin paylanmalarına yığılır, burada $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\varepsilon^{-1}(X_\varepsilon(t) - F(t)) = w(t)$. Bu statistik qiymətlər – asimptotik olaraq minimaks statistik qiymətlərdir. $\alpha_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ prosesinin limit Gauss prosesi ilə [Braun körpüsü və ya Kifer prosesi ([1]) adlandırılan prosesle] yaxınlaşma keyfiyyəti və $\sup_x |\alpha_n(x)|$ (Kolmoqorov paylanma-

sı) və $\int \alpha_n^2(x) dF(x)$ (Smirnov paylanması) limit paylanmaları arasındakı geniş ədəbiyyat mövcuddur. $\alpha_n(x)$ -in Gauss prosesi ardıcılığı ilə güclü aproksimasiyası haqqında [1]-ə bax.

II. Naməlum qanunun güclü topologiyada qiymətləndirilməsi. Qeyri – rəqulyar qiymətləndirmə məsələlərinə mühüm misallar model 1-də $f(x) = F'(x)$ sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi, model 2-də $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının qiymətləndirilməsi, model 3-də $f(t)$ signalının qiymətləndirilməsidir. Bu məsələ riyazi fizikanın qeyri – korrekt məsələlərinə yaxındır, belə ki, modelin [yeni $F(x)$, $F(\lambda)$, $F(t)$ funksiyalarının] kiçik dəyişikliyi müntəzəm metrikada və hətta tam variasiyalı metrikada qiymətləndirilən f funksiyalarının böyük dəyişikliyinə səbəb ola bilər. Buna görə də, tutarlı qiymətləndirmənin mümkün olması üçün qiymətləndiriləcək funksiya haqqında $f \in F$ tipli əlavə aprior informasiyanın olması zəruridir (məs., ən azı müşahidə olunan F qanunu üçün sıxlığın olması kimi; bax, [2], [3]).

Bir qayda olaraq, $\mathcal{F}$ -də müntəzəm tutarlı qiymətləndirmənin mümkünlüyü üçün $\mathcal{F}$ çoxluğunun uyğun funksional fəzədə kompakt olması zəruridir. qiymətləndirmə dəqiqliyi isə $\mathcal{F}$ -in sonluölçülü altfəzalarla yaxınlaşma keyfiy-

yətindən asılıdır. f sıxlığının informasiya metrikada $\mathcal{F}$ çoxluğunun n – ölçülü daxili radiusu (aşağıdan) və n – ölçülü kəndələri (yuxarıdan) terminlərində qiymətləndirilməsi keyfiyyətinin dəqiqliyinin qiyməti ilk dəfə N. N. Çentsov tərəfindən [3]-də verilmişdir (bax, *Nöqtəvi statistik qiymət*). Bu nəticələr digər qeyd olunmuş məsələlər və itki funksiyalarının daha ümumi sinfi üçün də ümumiləşdirilmişdir.

Qeyri – rəqulyar məsələlərdə qiymətləndirmə üçün daha tez-tez istifadə olunan statistik qiymətlər Rozenblatt – Parzen nüvə statistik qiymətləri və Çentsov proyeksiya statistik qiymətləridir.

Nüvə statistik qiymətləri. $K(x)$ – inteqrallanan funksiya, $\int K(x)dx$ olsun (inteqrallama oblası model 1-də $\mathbb{R}^1$ ədəd oxu, model 2-də $[-\pi, \pi]$, model 3-də $[0, 1]$ götürülür), $h_n, h_\varepsilon \rightarrow 0$ – funksiyalardır ($n \rightarrow \infty$ olduqda $\varepsilon \rightarrow 0$), belə ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $nh_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\varepsilon^{-2}h_\varepsilon \rightarrow \infty$. Model 1, 2, 3-də f -in nüvə statistik qiymətləri uyğun olaraq,

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dF_n(y), \\ f_n(\lambda) &= \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{\lambda-\mu}{h_n}\right) I_n(\lambda) d\lambda, \\ f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{h_\varepsilon} \int K\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) dX_\varepsilon(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

statistik qiymətlərinə deyilir (bax, [4]).

$K(x)$ funksiyası və $h_n(h_\varepsilon)$ çəki ardıcılığını münasib surətdə seçərək (1) şəklində ifadələrin köməyi ilə müxtəlif $\mathcal{F}$ siniflərində ele statistik qiymətlər almaq mümkündür ki, bunlar $n \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) halında yığılma sürəti kəmiyyətinin tərtiblə optimal statistik qiymətə yığılır. Bu istiqamətdə tipik nəticə aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\mathcal{F}^{(\beta, L)}$ ($\beta = k + \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $k \geq 0$ tam ədəddir) k dəfə differensiallanan ele f funksiyaları çoxluğu olsun ki, $f^{(k)} \in \mathbb{R}^1$ -də qüvvət üstü α və sabiti L olan Hölder şərtini ödəsin. $K(x)$ -in məhdud olduğu, ∞ -da olduqca tez azaldığı,

$$\int K dx = 1 \quad \text{və} \quad \int x^j K(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad \text{şərtlərini ödə}$$

diyi fərz olunur. Onda $h_n = cn^{-1/(2\beta+1)}$ olduqda (1) statistik qiyməti $f(x)$ -ə $\sim n^{-\beta/(2\beta+1)}$ sürətilə yığılır. Daha dəqiq, $x > 0$ olduqda müsbət monoton, $x \rightarrow \infty$ olduqda o qədər də sürətlə artmayan $I(x)$ funksiyası üçün

$$\sup_n \sup_{f \in \mathcal{F}^{(\beta, L)}} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} M I(n^{\beta/(2\beta+1)} |f_n(x) - f(x)|) < \infty$$

berəbersizliyi doğrudur.

Digər tərəfdən, $\mathcal{F}^{(\beta, L)}$ -in olduqca «massiv» altçoxluğunda daha yüksək sürətlə müntəzəm yığılan statistik qiymətlər mövcud deyildir (bax, [6]). Bu nəticə müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir, məs., əgər nöqtədə yayınmalar əvəzinə L^p normallarda ($2 \leq p < \infty$) itkiler ölçülərsə, bu nəticə öz qüvvəsində

qalır, lakin $p = \infty$ halında yığılma sürəti $(n/\ln n)^{\beta/(2\beta+1)}$ -ə bərabər olur (bax, [4], [6], [7]). Spektral sıxlığın statistik qiyməti, bu funksiyaların törəmələrinin statistik qiymətləri, regressiyanın statistik qiyməti üçün analoji nəticələr alınmışdır. Bəzi $\mathcal{F}$ çoxluqları üçün, itki funksiyası T_n statistik qiyməti ilə qiymətləndiriləcək funksiya fərqlinin L^2 – norma kvadratı olarsa, asimptotik minimaks f_n^* statistik qiymətlərini yalnız riskin yığılma sürəti kəmiyyətinin tərtibinə görə deyil, həm də o mənada da tapmaq mümkün olur ki,

$$\frac{\inf_{T_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{M}_f \|T_n - f\|^2}{\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f_n^* - f\|^2} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

münasibəti də ödənilir.

İlk belə statistik qiymətlər, [8]-də, Gauss küyü signalının qiymətləndirilməsi üçün qurulmuşdur (bax, [9]).

Proyeksiya statistik qiymətlər. Fərz olunur ki, paylanma sıxlığı $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_i(x) \in L^2(\mu)$ funksiyalarının hər hansı ortonormalanmış sistemi üzrə sıraya ayrılmışdır, yeni $f = \sum_i c_i \varphi_i$. Sıranın hədlərinin sonlu sayı N ilə məhdud-

lanaraq ifadələri $c_i^{(n)} = \int \varphi_i dF_n$ bərabərliyi ilə təyin olunan c_i Furje əmsalının hər birini qiymətləndirdikdə (bax, [4])

$$\hat{f}_{n,N} = \sum_{i=1}^N c_i^{(n)} \varphi_i \quad (3)$$

statistik qiymətlər ailəsi alınır.

N -in böyüdülməsi statistik qiymətin meylinin kiçilməsinə, dispersiyasının isə böyüməsinə səbəb olur. $\mathcal{F}$ -in konkret çoxluqları üçün N -i ekser hallarda ele seçmək olur ki, alınan statistik qiymət f -ə yığılma sürətinin tərtibinə görə optimal olur (bax, [2]). $\mathcal{F}$ sonsuzölçülü ellipsoid olduğu halda, [8]-də göstərilmişdir ki, (3)-də $c_i^{(n)}$ əvəzinə $\varkappa_n c_i^{(n)}$ kəmiyyətlərini götürdükdə və $\varkappa_n$ vuruqları 0 və 1 arasında olduğu halda, həm də ellipsoidin parametrlərindən asılı olduqda modifikasiya olunmuş proyeksiya statistik qiymətləri üçün (2) münasibəti ödənilir. [9]-də ellipsoidin parametrlərinin əvvəlcədən məlum olmadığı halda belə statistik qiymətlərin variantı təklif olunmuşdur (yeni qiymətləndiriləcək f funksiyasının hamarlıq dərəcəsi məlum olmadıqda). [8]-də f -in qiymətləndirilməsi məsələlərinə digər yanaşmalar (məsələn, Qrenander «şəbəkə» metodu) verilmişdir.

III. İkiölçülü (X, Y) təsadüfi vektoru üçün (X_i, Y_i) müşahidələri üzrə regressiya funksiyası $g(x) = \mathbf{M}(Y | X = x)$ -in statistik qiyməti tipli (regression analizi və b.) statistik verilənlər üzrə təsadüfi kəmiyyətlər arasında əlaqələri araşdırma metodları Q. – p. q.-də özünəməxsus yer tutur. Bu halda (X, Y) -in ikiölçülü sıxlıq funksiyası $f(x, y)$ -dən istifadə olunur və bu funksiyanın qiymətləndirilməsi metodları, sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsinə yaxındır (bax, [9]). Sonsuzölçülü engelleyici parametrlili tipik məsələ – iki naməlum $F(x - \theta^{(1)})$ və $F(x - \theta^{(2)})$

paylanmalarına uyğun $X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}$ və $X_1^{(2)}, \dots, X_n^{(2)}$ seçimlərinin yerindəyişmə parametri $(\theta^1 - \theta^2)$ -nin qiymətləndirilməsidir.

IV. Riyazi statistikanın klassik məsələləri – paylanma funksiyasının funksionallarından – median, kvantillər, orta qiymət, dispersiya və momentlərin seçim üzrə qiymətləndirilməsidir. Adətən, bu funksionalların statistik qiymətləri empirik paylanma funksiyasının funksionalları götürülür (məs., seçimi median, seçimi kvantil).

Hal-hazırda model 1, 2, 3-də naməlum f sıxlıq funksiyasının skalyar və vektor funksionalları Ψ və buna bənzər ilkin F funksiyasının funksionalları kimi ifadə olunmayan funksionalların Q. – p. q. nəzəriyyəsi inkişaf edir.

Model 1-də modanın qiymətləndirilməsi belə məsələdir və bu qiymətləndirmədə F -in diskret və sinqulyar komponentləri olmasının mənası yoxdur.

[10]-də Q. – p. q.-nin keyfiyyətinin minimaks aşağı sərhədlərinin tapılması üçün ümumi metod təklif olunmuşdur. Bu metod $\Psi(f_\theta) = \theta$ şərtini ödəyən, ən az informativ $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$,

$f_0 = f$, $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ parametrik ailəsinin «axtarılması» və bu ən çətin qiymətləndirilən parametrik ailə üçün minimaks aşağı sərhədin istifadə olunmasından ibarətdir. Belə ailə üçün $I(f)$ Fisher informasiya miqdarı f «nöqtəsində» qeyri-parametrik informasiya miqdarı adlanır. İsbat olunmuşdur ki, Ψ funksionalının uyğun mənada differensiallanan olduğu və verilmiş f nöqtəsinin ətrafında $\mathcal{F}$ çoxluğunun kifayət qədər «geniş» olduğu halda qeyri-parametrik informasiya miqdarı vardır və 1, 2, 3 modelləri üçün onun ifadəsi aşağıdakı kimidir.

Əgər model 1-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2(\mathbb{R}^1)$ -də Freşe differensialı varsa, onun törəməsi $\Psi'(f, \cdot) \in L^2(f)$ şərtini ödəyirsə, onda

$$I(f) = \left(\int_{\mathbb{R}^1} |\Psi'(f, x) - \mathbf{M}_f \Psi'(f, X)|^2 f(x) dx \right)^{-1}.$$

Əgər model 2-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2[0, \pi]$ -də Freşe differensialı varsa və $\sup_{\mathcal{F}} \|\Psi'(f, \cdot)\|_{L^2(0, \pi)} < \infty$ olarsa,

$$\text{onda } I(f) = \|\Psi(\cdot) \Psi'(f, \cdot)\|_{L^2[0, \pi]}^{-2}.$$

Əgər model 3-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2[0, 1]$ -də Freşe differensialı varsa, onda $I(f) = \|\Psi'(f, \cdot)\|_{L^2[0, 1]}^{-2}$.

Əgər ξ , – (0, 1) parametrlili Gauss təsadüfi kəmiyyəti-dirsə,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in U} \{\mathbf{M}_f w(\sqrt{n}(\hat{\Psi}_n - \Psi(f))) - \mathbf{M} w(\xi I^{-1/2}(f))\} = 0 \quad (4)$$

münasibəti ödənilərsə, $\hat{\Psi}_n$ statistik qiyməti itki funksiyası w -ya nəzərən $\Psi(f)$ funksionalının $U \in \mathcal{F}$ çoxluğunda asimptotik effektiv qeyri-parametrik statistik qiyməti adlanır (model 3-də $n^{1/2} = \varepsilon^{-1}$ götürmək lazımdır). Bu tərifin təbiiyyəti $x > 0$ olduqda simmetrik monoton w funksiyası üçün (4)-ün sol tərəfinin Ψ_n statistik qiymətinin ixtiyari ardıcılığı və $U \ni f$ çoxluğunun olduqca geniş ətrafı üçün mənf

olmamasını hökm edən qeyd olunmuş aşağıdakı minimaks sərhədə görə alınır.

Konkret funksionallar üçün bir çox hallarda asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər qurulmuşdur.

Məs., 1, 2, 3 modellərində

$$L_1 = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x) f(x) dx, \quad L_2 = \int_0^\pi \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda,$$

$$L_3 = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt$$

xətti funksionallarının qiymətləndirilməsi üçün asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər eyni cür qurulur, yəni:

$$\hat{L}_1 = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x) dF_n(x), \quad \hat{L}_2 = \int_0^\pi \varphi(\lambda) I_n(\lambda) d\lambda,$$

$$\hat{L}_3 = \int_0^1 \varphi(t) dY_\varepsilon(t),$$

burada $F_n(x)$, $F_n(\lambda)$, $X_\varepsilon(t)$ – I bəndindən statistik qiymətlərdir. Bəzi konkret tiplərin qeyri – xətti funksionalları üçün asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər [7]-də təklif olunmuşdur. Olduqca hamar funksionalların asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin qurulmasının ümumi qaydası $\Psi(f)$ funksionalının Teylor düsturu vasitəsilə qeyri – xətti funksionallarla qiymətlərinin və uyğun yarıxətti funksionalların statistik qiymətlərinin yaxınlaşmasına əsaslanmışdır. Yalnız birinci tərtib törəməsi olan funksionallar üçün bu ideyanın həyata keçirilməsi aşağıdakı statistik qiymətlərə gətirir:

$$\Psi_n^{(1)} = \Psi(f_n) + \int_{\mathbb{R}^1} \Psi'(f_n, x)(dF_n(x) - f_n(x)) dx,$$

$$\Psi_n^{(2)} = \Psi(f_n) + \int_0^\pi \Psi'(f_n, \lambda)(I_n(\lambda) - f_n(\lambda)) d\lambda,$$

$$\Psi_n^{(3)} = \Psi(f_\varepsilon) + \int_0^1 \Psi'(f_\varepsilon, t)(dX_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t) dt),$$

burada f_n , f_ε , f -in qeyri – parametrik statistik qiymətləridir.

bax, II bənd. Bəzi şərtlərlə $\Psi_n^{(i)}$ statistik qiymətləri (daha dəqiq, onların bəzi modifikasiyalrı) məhz asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlərdir (bax, [11], [12]); məs.,

$\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^k$ funksionalları üçün analogi konsepsiyalar inkişaf etdirilmişdir (bax, [11]). Bu isə qeyri – parametrik informasiyon matris anlayışı və uyğun minimaks sərhədlərə gətirir. Bundan əlavə, [12]-də bu konsepsiyaların $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$ funksionalının ($\mathcal{B}$ – hər hansı Banax fəzasıdır) qiymətləndirilməsi məsələsində ümumiləşməsinə baxılmışdır. İnformasiyon matrisin uyğun sonsuzölçülü analoqu qurulmuş və onun köməyiylə I bəndin statistik qiymətlərinin lokal asimptotik minimaks xarakteri isbat olunmuşdur. Bu ideyalar [13]-də inkişaf etdirilmişdir.

Q. – p. q. mövzusu *adaptiv statistik qiymətlərin qurulması, rekurrent qiymətləndirmə, ranq qiymətləndirilməsi, butstrep qiymətləndirmə metodu, qatlanan bıçaq metodu* və s. kimi problemləri də əhatə edir. *Robast statistik qiymətlərin* qurulmasına müasir yanaşma da Q. – p. q. konsepsiyalarında əsaslandırılmışdır.

Əd.: [1] Csörgő M., Révész P., Strong approximations in probability and statistics, Bdpst, 1981; [2] Ченцов Н. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 15–31; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Parzen E., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, № 3, p. 1065–76; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1980, т. 16, в. 2, с. 52–68; [7] Nussbaum M., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, № 3, p. 984–97; [8] Grenander U., «Abstract Inference», N. Y. – [a. o.], 1981; [9] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [10] Levit B. J., в кн.: Proceedings of the Prague symposium on asymptotic statistics, v. 2, Praha, 1973, p. 215–38; [11] Кошечник Ю. А., Левит Б. Я., «Теория вероятностей и ее примен.», 1976, т. 21, в. 4, с. 753–74; [12] Левит Б. Я., «Теория вероятностей и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 388–94; [13] Millar P., The minimax principle in asymptotic statistical theory, B., 1983; [14] Pfanzagl J., Contributions to a general asymptotic statistical theory, N. Y. – [a. o.], 1982.

QEYRİ – PARAMETRİK REGRESSION ANALİZ

«непараметрический регрессионный анализ; nonparametric regression analysis» – funksional fəzanın hər hansı sonsuzölçülü altçoxlugundan olan *regressiya* funksiyaları haqqında apriori informasiyaya görə statistik nəticələrlə məşğul olan riyazi statistika bölməsidir.

$X \in \mathbb{R}^d$ – təsadüfi vektor, $Y \in \mathbb{R}^1$ – təsadüfi kəmiyyət olsun.

Q. – p. r. a.-in ənənəvi və ən çox öyrənilən məsələsi $f \in \mathcal{F}$

şəklində apriori informasiya olduqda, (X, Y) cütünün asılı olma-

yan $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ realizasiyalrı üzrə hər hansı $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$

çoxlugunda $f(x) = M\{Y | X = x\}$ regressiya funksiyasının qiymətləndirilməsidir. $\mathcal{F}$ sinfi kimi aşağıdakı çoxluqlara baxılır:

a) bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu; b) bütün ölçülən funksiyalar çoxluğu; c) differensial və integral xassələri məhdudiyyətlərlə təyin olunan funksiyaların hər hansı dar sinifləri, məs., $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\beta, p, L)$ Hölder sinifləri, burada $0 < L < \infty$,

$d < p < \infty$, β – natural ədəddir $[\mathcal{F}(\beta, p, L)]$, $\mathcal{X} = [0, 1]^d$ –

də kəsilməz, β – tərtib xüsusi törəmələri (ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi anlamında) $\|D^\beta f\|_p \leq L$ şərtli D^β vektor

funksiyasını əmələ gətirən funksiyalar çoxluğu, burada $\|\cdot\|_p$,

– $L^p(\mathcal{X})$ -də normadır]. Digər misallar monoton və qabarıq regressiya funksiyaların sinifləridir.

Yaxınlaşma nəzəriyyəsinə yaxın qoyuluşa da baxılır, burada X_i – təsadüfi olmayan kəmiyyətlərdir, $Y_i = f(X_i) + \xi_i$, ξ_i –

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Regressiya funksiyasının əsas qeyri – parametrik statistik qiymətləri Y_i -yə görə xəttidir və bunlar aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x, X_1, \dots, X_n) Y_i, \quad (1)$$

burada W_{ni} – hər hansı çəki funksiyalarıdır.

Regressogram regressiya funksiyasının ən şübhə doğurmayan qeyri – parametrik statistik qiymətidir. $\mathbb{R}^d$ fəzası kəsilməyən altçoxluglara bölünür. Regressogram hissevi sabit funksiya kimi təyin olunur və bu funksiyanın qiymətləri bölgünün

altçoxluğunda, X_i prediktorları bu altçoxluğa düşən Y_i müşahidələrinin orta qiymətinə bərabərdir. Uyğun çəki funksiyası

$$W_m(x, X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^m \frac{I(X_i \in A_{nj}, x \in A_{nj})}{\sum_{i=1}^n I(X_i \in A_{nj})}, \quad (0/0 = 0),$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada A_{nj} – Lebeq ölçüsü λ_n^d olan ele kəsişməyən çoxluqlardır ki, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^m A_{nj}$, I – indikator funksiyasıdır, $\lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda_n > 0$.

Nüvə statistik qiyməti (Nadaraya–Watson statistik qiyməti)

$$W_m(x, X_1, \dots, X_n) = K((x - X_i)/\lambda_n) / \sum_{i=1}^n K((x - X_i)/\lambda_n)$$

çəki funksiyası ilə təyin olunur, burada K – $\mathbb{R}^d$ -də mütləq inteqrallanan məhdud funksiyadır (nüvə). Burada və sonra $\alpha/0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$, λ_n kəmiyyəti nüvə statistik qiymətinin pəncərə eni adlanır.

Yaxın qonşular statistik qiyməti də nüvə statistik qiyməti kimi təyin olunur, lakin bir fərqli cəhət, pəncərə eninin x , $X_1, \dots, X_n$ -lərdən asılı olub, x nöqtəsindən $X_1, \dots, X_n$ seçiminə x -ə yaxın k_n -ci elementə qədər məsafəyə bərabər olmasıdır, burada $k_n \rightarrow \infty$ natural ədədlərin verilmiş ardıcılığıdır.

$\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, – $\mathfrak{X}$ -də verilmiş funksiyaların ortonormal sistemi, f – bu sistemə görə ayrılaraq regressiya funksiyası olsun. Ayrılmış əmsallarının qiymətlərini taparaq, bu qiymətləri sıranın başlanğıc parçasında yerinə yazdıqda f üçün proyeksiyon statistik qiymət alınır. Çəki funksiyası

$$W_m(x, X_1, \dots, X_n) = K(x, X_i) / \sum_{i=1}^n K(x, X_i),$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j(x) \varphi_j(y).$$

$\mathfrak{X} = [a, b]$ parçasında regressiya funksiyasının splayn statistik qiyməti minimum məsələsinin həlli kimi təyin olunur:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - f(X_i))^2 + \lambda_n \int_a^b (f^{(\beta)}(x))^2 dx \rightarrow \min_{f \in W_2^\beta[a, b]},$$

burada $\beta \geq 2$ – natural ədəddir və $W_2^\beta[a, b]$ – Sobolev fəzasıdır. Adətən, $\beta = 2$ halına, məsələnin həlli düyünləri X_i nöqtələri olan kub formalı splayn olduğu halda baxılır. Splayn statistik qiymətini (1) şəklində götürmək olar.

X_i -lər parçada müntəzəm qanunla paylandığı halda nüvə statistik qiyməti və yaxın qonşular statistik qiyməti asimptotik ekvivalentdir, triqonometrik sistemi $\{\varphi_j\}$ olan proyeksiyon statistik

qiymət və splayn – statistik qiymət nüvə statistik qiymətinin xüsusi hallarına asimptotik ekvivalentdir.

Regressiyanın qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin dəqiqliyi hamarlama parametri λ_n -in (və ya uyğun olaraq k_n -in) seçilməsindən asılıdır. Regressiya funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymət olması üçün: 1) $\lambda_n \rightarrow 0$ ($k_n/n \rightarrow 0$) və 2) $n\lambda_n^d \rightarrow \infty$ ($k_n \rightarrow \infty$) şərtlərinin ödənilməsi zəruridir ki, bu şərtlər $n \rightarrow \infty$ olduqda meylin və dispersiyanın 0-a yaxınlaşmasını təmin edir. Əgər aprior informasiya a) şəklində verilsə, onda L^p , $p < \infty$ metrikalarında tutarlı (1) statistik qiymətləri vardır. Universal tutarlılıq xassəsi (bax, [9]) belə ifadə olunur: ele (1) statistik qiymətləri vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\{|Y|^q\} < \infty \Rightarrow \mathbf{M}\{|f_n(X) - f(X)|^q\} \rightarrow 0, \quad q > 1$$

münasibəti doğrudur, burada $\mathbf{M}$ – $X, X_1, \dots, X_n$ üzrə riyazi gözləmədir. Əgər aprior informasiya b) şəklində verilsə, müəyyən tip statistik qiymətlər üçün kompaktlarda nöqtəvi və müntəzəm tutarlılıq alınır. c) şəklində aprior informasiya statistik qiymətlərin riskinin asimptotikasını araşdırmağa imkan yaradır və buna əsaslanaraq hamarlama parametrini optimallaşdırmaq mümkün olur. Hamarlama parametrinin optimizasiyasına iki yanaşma mövcuddur: adaptiv və minimaks yanaşma. Adaptiv yanaşmada $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ -lərdən asılı, təsadüfi ele hamarlama parametri seçilir ki, alınan statistik qiymət verilən sinifdən statistik qiymətə asimptotik ekvivalent olur. Hamarlama parametrinin adaptiv seçilməsi ya evezləmə metodu ilə (optimal hamarlama parametrinin asimptotikası üçün ifadədəki məchullar, məs., f funksiyasının törəmələri, tutarlı statistik qiymətlərlə əvəz olunur), ya da ki, hər hansı bir kriterinin (Akaike kriterisi, Mellouz kross – yoxlama və s.) optimizasiyası yolu ilə aparılır. Minimaks yanaşmada ele f_n statistik qiyməti axtarılır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{R}_q(f, f_n) \sim \inf_{T_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{R}_q(f, T_n) \equiv \mathcal{R}_q^*(\mathcal{F}) \quad (2)$$

münasibəti ödənilsin, burada $\mathcal{R}_q(f, T_n) = \mathbf{M}\{\|f - T_n\|_q^2\}$, – T_n statistik qiymətinin riskidir, $1 \leq q \leq \infty$, inf bütün mümkün olan T_n statistik qiymətləri üzrə götürülür və $\sim$ işarəsi isə asimptotik ekvivalentliyi ifadə edir (dəqiq mənada və ya kəmiyyət tərtibinə görə). f_n minimaks statistik qiyməti və onun hamarlama parametri $\mathcal{F}$ sinfinin parametrlərindən asılıdır.

(2) münasibətində dəqiq asimptotik ekvivalentlik ödənilən uyğun f_n statistik qiyməti $q = 2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\beta, 2, L)$ halında tapılmışdır (bax, [7]). Tərtibinə görə asimptotik ekvivalentlik $1 \leq q \leq \infty$ olduqda $\mathcal{F}(\beta, p, L)$ və bezi digər siniflər üçün alınmışdır (bax, [2], [3], [10]). Məsələn, $p/q > d/(2\beta + d)$, $1 \leq q \leq \infty$ olarsa, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mathcal{R}_q^*(\mathcal{F}(\beta, p, L)) \asymp n^{-2\beta/(2\beta+d)}$ (bax, [3]). Optimal $n^{-2\beta/(2\beta+d)}$ tərtibi, $\lambda_n \asymp n^{-1/(2\beta+d)}$ olduqda, nüvə və splayn – statistik qiymətlər üçün alınır (regressogram üçün yalnız $\beta = 1$ olduqda).

Bir sıra hallarda paylanma funksiyalarının Y_i üzrə xətti olmayan, qeyri – parametrik statistik qiymətlərinə üstünlük verilir: aşma – enməli küy fonunda regressiya funksiyasının robust qiymətləndirilməsində (bax, [4], [5]), əgər statistik qiymətin

verilmiş funksional xassələrini (məs., monotonluq, qabanlıq, (bax, [4])) və ya bütün q -lər üçün tərtib üzrə eyni zamanda optimallığını təmin etmək zəruriliyi olarsa (bax, [3]). Hamarlama parametrisinin adaptiv seçilməsində də statistik qiymətlər qeyri – xətti olur.

Qeyri – parametrik regressiyanın robast qiymətləndirilməsi məsələsində fərz olunur ki, $f(x) = F(Y \leq y | X = x)$ şərti paylanmasının hər hansı funksionalıdır (məs., onun medianı); bu halda $M\{Y | X = x\}$ şərti orta qiyməti mövcud olmaya bilər. $f_n(x)$ -in statistik qiyməti şərti paylanmanın statistik qiymətinin belə funksionalı kimi (bax, [5], [9]):

$$\hat{F}_n(Y \leq y | X = x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x, X_1, \dots, X_n) I(Y_i \leq y)$$

və ya ekstremal məsələnin həlli kimi (bax, [4]) axtanılır:

$$\sum_{i=1}^n F(Y_i - f(X_i)) \rightarrow \min_{f \in \mathcal{F}}, \quad (3)$$

burada F – verilmiş qabarıq funksiyadır. (3) məsələsinin həlli düzgün funksional xassələrə malikdir – statistik qiymətin özü $\mathcal{F}$ -dəndir.

Q. – p. r. a.-in əsas nəticələri reqressiya törəmələrinin qiymətləndirilmə məsələlərinə (bax, [3], [10]), zaman sıralarının qeyri – parametrik öncəgörmə məsələlərinə də aid olunur (bax, [6], [8]). Q. – p. r. a.-in *spesifik halı qeyri – parametrik diskriminant analiz məsələsidir.*

Əd.: [1] Н а д а р а я Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [2] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Докл. АН СССР», 1980, т. 252, № 4, с. 780–84; [3] Н е м и р о в с к и й А. С., «Изв. АН СССР Технич. кибернетика», 1985, № 3, с. 50–60; [4] Н е м и р о в с к и й А. С., Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б., «Проблемы передачи информации», 1985, т. 21, № 4, с. 17–33; [5] Цыбаков А. Б., «Проблемы передачи информации», 1982, т. 18, № 3, с. 39–52; [6] C o l l o m b G., «Int. Statist. Rev.», 1981, v. 49, № 1, p. 75–93; [7] N u s s b a u m M., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, № 3, p. 984–97; [8] H a r d l e W., Applied nonparametric regression, Camb., 1990; [9] S t o n e C. J., «Ann. Statist.», 1977, v. 5, № 4, p. 595–645; [10] S t o n e C. J., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 4, p. 1040–53.

QEYRİ – PARAMETRİK SPEKTRAL STATİSTİK QIYMƏT « непараметрическая спектральная оценка; nonparametric spectral estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət.

QEYRİ – PARAMETRİK STATİSTİK QIYMƏT (i) spektral sıxlığının « непараметрическая оценка спектральной плотности; nonparametric estimator of spectral density » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət.

QEYRİ – PARAMETRİK TƏSNİF « непараметрическая классификация; nonparametric classification » – bax, *Qeyri – parametrik diskriminant analiz.*

QEYRİ – PARAMETRİK YOXLANILMASI, HİPOTEZLƏRİN « непараметрическая проверка гипотез; nonparametric hypotheses testing » – *statistik hipotezlərin yoxlanılması* üçün qeyri – parametrik metodları istifadə edən riyazi statistika bölməsidir. «Qeyri – parametrik» metodlar termini onun ənənəvi «parametrik» metodlar terminindən fərqi nəzərə çarpdırır; parametrik metodlarda fərz olunur ki, ümumi çoxluğun paylanmalarının funksional ifadəsi sonlu sayda

parametrlər dəqiqliyi ilə məlumdur və bu metodlar «standart» paylanmalar ailələri üçün, o cümlədən, normal, eksponensial, Puasson və s. tipli paylanmalar ailələri üçün təfərrüfatı ilə araşdırılmışdır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının qeyri – parametrik məsələlərinə xarakterik misal iki seçimin bircinsliyinin yoxlanılması məsələsidir. $N = m + n$ sayda asılı olmayan $X_1, \dots, X_N$ müşahidələrinin varlığı fərz olunur, belə ki, $X_1, \dots, X_m$ ($X_{m+1}, \dots, X_N$) – paylanma funksiyası eyni $F(G)$ olan müşahidələr olsun. Bütün t -lər və hər hansı $\theta \neq 0$ üçün $H_1: G(t) = F(t - \theta)$ alternativ yerindəyişmə hipotezinə qarşı $H_0: F = G$ bircinslik hipotezi yoxlanılır. Klassik variantda bu məsələdə fərz olunur ki, F və G funksiyaları normal paylanma funksiyalarıdır və baxılan hipotezin yoxlanılması üçün *Styudent kriterisi* istifadə olunur. F və G -nin tipi haqqında məsələnin qeyri – parametrik qoyuluşunda kəsilməzlik şərtindən başqa digər fərziyyə irəli sürülmür. H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün

$$W_{m,n} = \sum_{i=1}^m R_i$$

statistikasına əsaslanan tipik qeyri – parametrik kriteri – *Uilkokson kriterisi* tətbiq olunur, burada $R_1, \dots, R_N$, – $X_1, \dots, X_N$

kəmiyyətlərinin ranqlarıdır. Müşahidələr üzrə hesablanan $W_{m,n}$ statistikası ya çox böyük və ya çox kiçik olarsa, paylanmaların bərabərliyi haqqında hipotez qəbul olunmur. Uyğun kritik qiymətlər ümumi paylanma funksiyasından asılı olmayan, H_0

hipotezi şərtində $W_{m,n}$ -in paylanması ilə təyin olunur; belə ki,

$\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$ ranqlar vektorunun paylanması (bu paylanma $1, \dots, N$ ədədlərinin bütün yerdəyişmələri çoxluğunda müntəzəmdir) F -dən asılı deyildir. Bunun əsasında kritik qiymətlər cədvəlləri hesablanmışdır; m və n -in böyük qiymətlərində normal paylanma ilə approksimasiyadan istifadə olunur. H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün əksər hallarda

$$D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

statistikasına əsaslanan *Smirnov kriterisindən* istifadə olunur, burada F_m və G_n – birinci və ikinci seçimlərin empirik paylanma funksiyalarıdır. $D_{m,n}$ statistikası $R_1, \dots, R_m$ ranqlar toplusu ilə də təyin olunur.

H. q. – p. y. məsələlərinə aid digər – uzlaşmanın, simmetriyanın, asılı olmamazlıq və təsadüfliliyin yoxlanılması kimi məsələləri qeyd etmək olar.

Uzlaşmanın yoxlanılması məsələsi ondan ibarətdir ki, ümumi paylanma funksiyası G olan seçim üzrə $G = F$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur, burada F – kəsilməz paylanma funksiyasıdır.

Məsələnin qeyri – parametrikliyi xarakteri alternativin qeyri – parametrikliyindədir ki, bu da dürist ifadə oluna bilinir, məs., birtərəfli variantda ($F < G$ və $F > G$) və ya ikitərəfli variantda ($F \neq G$).

Simmetriyanın yoxlanılması məsələsi ümumi paylanma funksiyası G -nin verilən x_0 nöqtəsinə nəzərən simmetriyasının, yeni

$$G(x_0 + x) + G(x_0 - x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyinin yoxlanılması məsələsindən ibarətdir. Alternativ kimi

$$G(x_0 + x) + G(x_0 - x) \geq 1, \quad G(x_0 + x) + G(x_0 - x) \leq 1$$

birdəfəli şərtlərin götürmək olar, lakin ciddi bərabərsizlik hali heç olmasa bir x üçün və ya o tipli ikitərəfli şərt üçün götürülür.

Asılı olmamazlığın yoxlanılması məsələsi eyni bir obyekt üzərində asılı olmayan müşahidələr üzrə iki əlamətin asılı olub-olmadığını təyin etmək zəruriliyi halında yaranır. Təsadüfilik hipotezi də oxşar surətdə ifadə olunur, bu halda seçimin elementlərinin asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu nəzərdə tutulur.

H. q. – p. y. məsələlərində ən çox inkişaf etmiş və tətbiq olunan metodlar ranq metodları və empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan metodlardır.

Yoxlanılan hipotez qeyri – parametrik xarakterli olduğu halda müşahidələrin ranqlarını, həmçinin onların işarələrini, mütləq kəmiyyətlərin ranqlarını və s. istifadə edən ranq metodlarından istifadə olunur. Bircinslik hipotezinin yoxlanılması üçün yuxarıda baxılan misalda ranq kriteriləri H_0 hipotezinə nəzərən oxşar kriterilərdir (bax, *Oxşar kriteri*), yeni H_0 hipotezinə aid paylanmadan asılı olmayaraq sabit α ölçüsünü saxlayan kriterilərdir.

H_0 hipotezinə nəzərən oxşar kriterilərin qurulmasının ümumi metodu o fakta əsaslanır ki, qaydalı statistikalar vektoru $\mathbf{X}_N^{(j)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(N)})$ H_0 hipotezi şərtində tam kafi statistikadır, burada $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(N)}$ – birləşdirilmiş seçimlərin artan qaydada nizamlanmış elementləridir. Onda hər bir oxşar kriteri *Neyman strukturlu* kriteridir, yeni bu kriteri $X_N^{(j)}$ -in qeyd olunmuş qiymətində (sanki hər bir) eyni bir α şərti ölçüsünə malikdir. H_0 hipotezi şərtində $X_N^{(j)}$ və R vektorları öz aralarında asılı olmur, buna görə də, belə kriteri

$$\frac{1}{N!} \sum \varphi(X_N^{(j)}, r) = \alpha \quad \text{sanki yəqin}$$

şərtini ödəyən $\varphi(X_N^{(j)}, R)$ kritik funksiyası ilə verilə bilər, burada cəmlənmə $1, \dots, N$ ədədlərinin bütün mümkün ola bilən $r = (r_1, \dots, r_N)$ yerdəyişmələri üzrə aparılır. Belə strukturlu kriteri *yerdəyişmələr kriterisi* adlanır.

Ranq kriteriləri xüsusi bir hal kimi kritik φ funksiyası X -dən asılı olmadığı halda alınır. Ümumi şəkildə yerdəyişmələr kriterisinin realizasiyası hesablama çətinlikləri ilə bağlı olduğundan, ən çox tətbiq olunan kriterilər ranq kriteriləridir.

Müşahidələrin ədədi qiymətlərinin istifadəsindən imtina etdikdə informasiya itkisinin yaranmasına baxmayaraq, 20-ci əsrin 50 – 60-cı illərində aydın olur ki, ranq kriteriləri məsələlərin müəyyən bir sinfində yüksək asimptotik nisbi effektivliyə malikdir. Məs., normal paylanmaya malik müşahidələrin iki seçimi məsələsində Uilkokson kriterisinin Student kriterisinə nəzərən asimptotik nisbi effektivliyi $3/\pi = 0,955$ -ə bərabərdir. Əgər ümumi çoxluğa uyğun paylanma normal paylanmadan fərqli olarsa, qeyd olunan asimptotik nisbi effektivlik kifayət qədər böyük ola bilər, lakin bununla belə onun qiyməti heç bir halda 0,864-dən aşağı ola bilməz. Bundan başqa, elə ranq kriterisi də vardır ki, («normal» nişanələr kriterisi adlandırılan rus. критерий нормальных меток), bu kriterinin nisbi effektivliyi Student kriterisinə

nəzərən normal paylanma halında 1-ə bərabər olur, normallıqdan fərqli ixtiyari halda 1-i aşır. Beləliklə, bu kriteri Student kriterisindən asimptotik olaraq üstün sayılır.

Digər misal simmetriya hipotezi ilə bağlıdır. Paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan ümumi çoxluqdan $X_1, \dots, X_n$ seçiminin edildiyi fərz olunur. f funksiyasının sıfır nəzərən simmetrikliliyi haqqında hipotez yerindəyişmə alternativini halında yoxlanılır. Bu məsələdə ən sadə kriteri *işarələr kriterisidir* və bu kriteri X_i -lərin müsbət qiymətlərinin sayına əsaslanır. Uilkoksonun işarəvi – ranq kriterisi $\sum_{X_i > 0} R_i^+$ statistikasına əsaslanır, burada R_i^+ – variation

sırada $|X_1|, \dots, |X_n|$ üçün X_i elementinin ranqidir. Bu kriterinin statistikasının hesablanması müşahidələrin işarələri haqqında informasiyadan başqa, onların qiymətləri haqqında informasiyadan da istifadə olunur. Buna görə də, hesab etmək olar ki, Uilkokson kriterisi işarələr kriterisindən daha effektivdir. Həqiqətən də, bu kriterilərin asimptotik nisbi effektivlikləri Student kriterisinə nəzərən uyğun olaraq, $3/\pi = 0,955$ və $2/\pi = 0,637$ olur (normal paylanmaya uyğun müşahidələr halında). Beləliklə, Uilkokson kriterisi işarələr kriterisindən 1,5 dəfə üstündür və Student kriterisindən az geri qalır.

Asılı olmamazlıq hipotezinin yoxlanılması ilə daha bir misal aşağıdakı kimi şərh olunur. Hər biri keyfiyyət və ya kəmiyyət əlamətlərinə malik olan obyektlər sırası verilir, belə ki, keyfiyyət əlamətləri üzrə aparılan müşahidələrin nizamlana bilinənliyi fərz olunur. Obyektlər üzərində n sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə əlamətlərin asılı olmamazlığı haqqında hipotez, məs., ona alternativ müsbət asılılıq haqqında hipotezə qarşı yoxlanılır. R_i və S_i i -ci müşahidəyə uyğun əlamətlərin ranqları olsun. Asılı olmamazlığın yoxlanılması üçün ən geniş yayılmış kriteri Spirmenin ranq korrelyasiya əmsali r_s -ə əsaslanır; r_s aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$r_s = 1 - 6 \sum_i (R_i - S_i)^2 / (n^3 - n).$$

r_s -in 1-ə yaxın qiymətlərində, yeni böyük qiymətlərində asılı olmamazlıq hipotezi qəbul olunmur. n -in kiçik qiymətlərində kritik qiymətlər cədvəllər üzrə tapılır, n -in böyük qiymətlərində isə normal approksimasiyadan istifadə olunur. Seçimi korrelyasiya əmsalına əsaslanan kriteriyə nəzərən r_s -ə əsaslanan kriterinin asimptotik nisbi effektivliyi, yenə də olduqca böyük olur və normal müşahidələr üçün $9/\pi^2 = 0,912$ olur.

20-ci əsrin 70-ci illərinin araşdırmalarından ranq kriterilərinin daha güclü xassələrə malik olduqları aşkar olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, ranq tipli asimptotik ən güclü kriterilər tipik surətdə sonlu defektə malikdirlər, yeni belə kriteri üçün $N + o(1)$ sayda müşahidə aparılmalıdır ki, N sayda müşahidə aparılması nəticəsində ən güclü kriterinin gücünə bərabər kriteri gücünün alınması təmin olunsun [asimptotik effektivlik xassəsi kriteri üçün baxılan eyni şəraitdə $N + o(N)$ sayda müşahidə aparılmasının tələbi ilə ifadə olunur].

Empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan kriterilər istifadə olunan qeyri – parametrik məsələlərə klassik misal verilmiş kəsil-məz F_0 paylanma funksiyası ilə uzlaşdırılma məsələsidir. N sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası F_N -in $N \rightarrow \infty$ olduqda ümumi paylanma funksiyası F_0 -a müntəzəm yığılması faktı (Qlivenko – Kantelli teoremi) F_N -in F_0 -dan bu və ya digər yayınması, məs.,

$$D_N = \sup_x |F_N(x) - F_0(x)|, \quad (1)$$

$$\omega_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_N(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x) \quad (2)$$

yayınmaları əsasında tutarlı kriteri qurmağa imkan verir. $N \rightarrow \infty$ olduqda $N^{1/2} D_N$ və $N \omega_N^2$ üçün limit paylanmaları 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov tərəfindən tapılmışdır (bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kramer – Mizes kriterisi*, *Renyi kriterisi*, *Anderson – Darling kriterisi* tipli kriterilər). (1) və (2) statistikaları elə strukturludurlar ki, onların paylanmaları H_0 hipotezi şərtində F_0 -dan asılı deyildir. Doğrudan da,

$$\sqrt{N} D_N = \sup_{0 \leq t \leq 1} |v_N(t)|, \quad N \omega_N^2 = \int_0^1 v_N^2(t) dt \quad (3)$$

olur, burada $v_N(u) = N^{1/2} [G_N(t) - t]$, $t \in [0, 1]$ – «empirik proses» olub, H_0 hipotezi şərtində $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanma qanununa tabe (F_0 -dan asılı olmayaraq) $U_i = F_0(X_i)$, $i = 1, \dots, N$ kəmiyyətlərinin empirik paylanma funksiyaları G_N -lər üzrə qurulmuşdur. F_0 -dan «asılı olmamazlıq» kriterisinin statistikasına məlum paylanma funksiyası F_0 -in daxil olunması ilə alınır və burada rəng statistikalarının paylanmalarının məlum F paylanma funksiyasından asılı olmamazlığı kimi prinsipial xarakter daşıyır. Lakin bu xassə, uzlaşmanın yoxlanılması məsələsində eyni cədvəllərdən istifadə etməyə imkan verdiyindən tətbiqi məsələlərdə mühüm rol oynayır.

20-ci əsrin 50-ci illərində inkişaf etmiş təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi $v_N(t)$ empirik prosesinin Braun körpüsü $v(t)$ prosesinə yığılmasını müəyyənləşdirdi və bunun əsasında isə (3) şəklində ifadə olunan v_N prosesinin funksionallarının limit paylanmalarını v -nin uyğun

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |v(t)|, \quad \int_0^1 v^2(t) dt \quad (4)$$

kimi funksionallarının paylanmaları kimi alınmasına səbəb oldu. Belə yanaşma empirik paylanma funksiyalarının funksionallarının geniş sinfi üçün limit paylanmalarının alınması üçün geniş prinsipial imkanlar yaratdı. Bundan başqa, lazımlı şəkildə H_0 -la yaxınlaşan alternativlərlə $N \rightarrow \infty$ olduqda v_N prosesi

$v(t) + a(t)$ şəklində prosesə yığılır, burada $a(t)$ – alternativlər ardıcılığı ilə təyin olunan təsadüfi olmayan funksiya. Bu fakt kriterilərin asimptotik güclərini öyrənməyə imkan verir.

Belə oxşar metodlar iki seçimin birincisinin (məs., Smirnov kriterisi), simmetriyanın və asılı olmamazlığın yoxlanılması məsələlərində empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan kriterilərin asimptotik öyrənilməsində tətbiq olunur.

Tətbiq üçün əsas maraq doğuran məsələ verilmiş $\mathcal{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s\}$ parametrik ailəsi ilə uzlaşmanın yoxlanılması, yeni $H_0: F \in \mathcal{F}$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsidir (məs., paylanmanın normal paylanma olduğunun yoxlanılması). Bu məsələdə (1), (2) tipli statistikalarda F_0 əvəzinə $F(x, \hat{\theta}_N)$ götürərək bu statistikalarından istifadə etmək olar, burada $\hat{\theta}_N$ – məlum θ parametrinin hər hansı statistik qiymətidir, məs., maksimal doğruxa oxşarlıq statistik qiyməti.

Statistik qiymətin əvəz olunması statistikaların paylanmalarının mühüm dəyişikliyinə səbəb olur.

Bu halda bu statistik qiymətlər $v(t)$ -dən fərqli, $u(t)$ limit prosesinə yığılan, hər hansı $u_n(t)$ təsadüfi prosesinin funksionalı kimi ifadə olunur. Lakin bu halda mühüm çətinliklər yaranır: birincisi, $u_n(t)$ prosesi və onun limit prosesi $u(t)$, $\mathcal{F}$ ailəsindən və ümumiyyətlə, θ -nın məlum qiymətindən asılı olur, ikincisi, u -nin funksionallarının paylanmalarının hesablanması çətinliklər yaradır. Məs., hər bir konkret $\mathcal{F}$ üçün $\int_0^1 u^2(t) dt$ -nin paylanma-

sının tapılması çoxlu hesablama işlərinin aparılmasını tələb edir. Bu paylanma bəzi əsas $\mathcal{F}$ ailələri üçün hesablanmış və cədvəlləşdirilmişdir (normal, eksponensial və b.). $\sup_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ funk-

sionalının paylanmasının hesablanması qaydaları məlum deyildir.

Vektor müşahidələri halında çoxölçülü paylanmalarla uzlaşmanın yoxlanılması məsələlərində analogi çətinliklər yaranır. Burada hətta sadə H_0 hipotezi şərtində belə F_0 paylanmasından asılı olmamazlıq xassəsi olmur.

20-ci əsrin 80-ci illərinin əvvəllərində martinqallar nəzəriyyəsi əsasında inkişaf etmiş, qeyd olunan növ məsələlərə digər yanaşma u_N prosesinin standart Viner prosesi w -yə yığılan w_N prosesinə çevrilməsindən ibarətdir. $\mathcal{F}$ ailəsindən asılı olan bu çevirmənin reallaşdırılması hesablama baxımından olduqca sadədir. Bu halda kriteri statistikaları kimi paylanmaları yaxşı məlum olan w -nin (3) tipli funksionallarından istifadə oluna bilər. Bu metod çoxölçülü halda da istifadə olunur.

Uyğun empirik paylanmalarının yığılmasına əsaslanan uzlaşma kriterilərinin asimptotik nəzəriyyəsi müşahidələrin daha ümumi sxemlərinə aid məsələlər üçün də, məs., xətti reqressiya və ya avtoregressiv sürüşən orta sxemlərində paylanmalar haqqında hipotezin yoxlanılması kimi məsələlər üçün işlənmişdir.

Məlum χ^2 – kvadrat statistikası da empirik paylanma funksiyasının funksionalı kimi ifadə oluna bilər və $N \rightarrow \infty$ olduqda, bölgüdəki intervalların sayı qeyd olunduğu halda bu statistikanın limiti yuxarıda şərh olunmuş metodlarla öyrənilə bilər. χ^2 – kvadrat kriterinin mənfə cəhəti bölgü intervallarının daxilində paylanmanın yayınmalarına qarşı onun tutarlı olmamasındadır, bu da (1)–(2) tipli kriterilərin daxil olunması ilə izah olunmuşdur.

χ^2 – kvadrat kriteriləri ardıcılığının tutarlılığı N -in artması ilə bölgü intervallarının sayının artması ilə alınır. Belə kriterilər asimptotik xassələrinə görə (1) – (2) tipli empirik proseslərin kəsilməz funksionallarına əsaslanan kriterilərdən fərqlənir. Sonuncu kriterilər daha «yaxın» alternativləri ayırd edir ($N \rightarrow \infty$ olduqda

H_0 -a böyük sürətlə yaxınlaşanları), bu şərtlə ki, bu «yaxınlıq» paylanma funksiyaları arasındakı fərqlənmələr terminlərilə ölçülsün, lakin bu halda xırda bölgülü χ^2 – kvadrat kriterilərinin gücü paylanmaların sıxlıq funksiyalarının fərqlənmələri ilə təyin olunur. Belə kriterilər «hamar» alternativlərə (məs., normal paylanma halının yoxlanılması üçün asimmetriya kimi) az həssas olur, ona görə də, «hamar olmayan» və ya «lokal» yayınmaları aşkar etmək məsləhətdir (məs., sıxlığın ossilyasiyası və ya kiçik sahələrdə ciddi dəyişiklikləri kimi).

χ^2 – kvadrat kriteridən fərqli tezliklər funksiyalarından istifadə edən digər kriterilər, kiçik bölgülər (bax, *Bölünən statistika*) halında və seçimi intervallara əsaslanan kriterilər (bax, *Speysinq*) analogi xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Б о р о в к о в А. А.,

Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [3] Гаек Я., Шидак Э., Теория ранговых Критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Кендалл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [6] Мартынов Г. В., Критерии омега-квадрат, М., 1978; [7] Хеттман-спергер Т., Статистические выводы, основанные на рангах, пер. с англ., М., 1987; [8] Хмаладзе Э. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 193–212; [9] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [10] Fraser D. A. S., Nonparametric methods in statistics, N. Y. – L., 1963; [11] Krishnaiah P. R., Sen P. K., [eds], Non-parametric methods, Handbook of statistics, v. 4, N. Y. – [a. o.], 1984; [12] Lehmann E., Nonparametrics: Statistical methods based on ranks, S. F. – N. Y., 1975; [13] Shorack G. R., Wellner J. A., Empirical processes with applications to statistics, N. Y., 1986.

QEYRİ – PERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ « **непериодическая цепь Маркова; noncyclic / aperiodic Markov chain** » – atsiklik Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*).

QEYRİ – PERİODİK VƏZİYYƏT(i) *Markov zəncirinin « непериодическое состояние цепи Маркова; noncyclic / an aperiodic state of a Markov chain »* – bax, *Markov zənciri*; *vəziyyət-lərin təsnifatı*.

QEYRİ – REQUŁYAR ŞAXƏLƏNƏN PROSES « **нерегулярный ветвящийся процесс; nonregular branching process** » – bax, *Şaxələnen proses*; *requ-l-yarlıq*.

QEYRİ – SƏLİS ÇOXLUQ « **нечеткое множе-ство; fuzzy set** » – tətbiqi riyaziyyatın bölməsi, qeyri – səlislik nəzəriyyəsinin əsas anlayışdır. Qeyri – səlislik nəzəriyyəsinin inkişafı 1965-dən L. Zadənin [1]-də verilmiş məqaləsi ilə başlanmışdır. Ən sadə halda X çoxluğunun qeyri – səlis A çoxluğu *mənsubluq funksiyası* (rus. функция принадлежности) adlandırılan $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ inikasını təyin edən μ_A ilə verilir. Əgər μ_A yalnız 0 və ya 1 qiymətlərini alarsa, A X -in adi altçoxluğu olur.

X çoxluğunun qeyri – səlis A və B altçoxluqları üçün $A \cap B$ kəsişməsi, AB hasilı, $A \cup B$ birləşməsi, $A + B$ cəmi, $\bar{A}$ inkarı uyğun olaraq, aşağıdakı düsturlarla mənsubluq funksiyaları vasitəsilə ifadə olunur:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A, \quad x \in X.$$

Çoxluqlar üzərində digər eməllər də istifadə olunur.

Çoxluqlar üzərində eməllərə aid bəzi xassələr Q. – s. ç.-lar üçün də doğrudur: məs., de Morqan qanunları ödənilir (bax, [2]). Lakin A adi çoxluq olduğu hal istisna olunmaqla, $A + A \neq A$; $A(B + C) = AB + AC$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $(\mu_A^2(x) - \mu_A(x))\mu_B(x)\mu_C(x) = 0$ bərabərliyi bütün $x \in X$ -lər üçün ödənilmiş olsun.

524 QEYRİ – SƏLİS

Riyaziyyatdaxili baxımdan «qeyri – səlis çoxluq» və «mənsubluq funksiyası» anlayışları sinonimlərdir. Lakin tətbiqi məsələlərin müzakirəsində «Q. – s. ç.» termininə üstünlük verilir. L. Zadənin yanaşması müəyyən sistemlərin analizi üçün təsis edilmişdir; bu sistemlərdə bir şəxs iştirak edir və L. Zadə belə fərziyyəyə istinadlanır ki, insan tefəkkürünün elementləri ədədlər deyil, hər hansı Q. – s. ç.-lar və ya obyektlər siniflərinin elementləridir və bu elementlər üçün «sinfe mənsubluq»dan «mənsubolmamazlığa» keçid sıçrayış deyil, kəsilməzdir (bax, [3]). Bu istiqamətdə görü-lən işlərdən, yeni Q. – s. ç.-lar nəzəriyyəsinə əsaslanmaqla son-radan aparılan tədqiqatlardan aydın olmuşdur ki, belə yanaşmalar riyaziyyatın bütün sahələrində və onun tətbiqlərində praktiki sə-mərəli olmuşdur (bax, [4] – [11]). Bu mövzuya beş mindən artıq nəşrlər və «Fuzzy sets and System», BUSEFAL və s. kimi jurnallar həsr olunmuşdur (1988).

Bəzi müəlliflər qeyri – səlislik nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyə-sinin asılı olmadığını iddia edirlər (bax, [12]), bəziləri isə isbat edirlər ki, Q. – s. ç. müəyyən mənada təsadüfi çoxluqlara gətirilir (bax, [2], [9]).

Əd.: [1] Zadeh L., «Information and control», 1965, v. 8, p. 338–53; [2] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [3] Zadeh L., «IEEE Trans Syst., Man, Cybern.», 1973, v. SMC-3, № 1, p. 28 – 44; [4] Зад Л., Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию при-ближенных решений, пер. с англ., М., 1976; [5] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [6] Ор-ловский С. А., Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации, М., 1981; [7] Кофман А., Введение в теорию нечетких множеств, пер. с франц., М., 1982; [8] Кузь-мин В. Б., Построение групповых решений в пространствах чет-ких и нечетких бинарных отношений, М., 1982; [9] Нечеткие мно-жества и теория возможностей, пер. с англ., М., 1986; [10] Нечет-кие множества в моделях управления и искусственного интеллекта, М., 1986; [11] Борисов А. Н. [и др.], Обработка нечеткой информации в системах принятия решений, М., 1989; [12] Белл-ман Р., Зад Л., в кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений, пер. с англ., М., 1976, с. 172 – 215.

QEYRİ – SƏLİS ÇOXLUQLAR STATİSTİKASI « **нечетких множеств статистика; statistics of fuzzy sets** » – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasının* bölməsidir, burada müşahidələrin nəticələri A_i , $i = 1, 2, \dots$ – qeyri – səlis çoxluqlardır, yeni bu çoxluqlar *mənsubluq funksiyaları* adlandırılan, $\mu_{A_i}: U \rightarrow [0, 1]$ inikasını təyin edən μ_{A_i} -lərlə verilir, burada U – hər hansı çoxluqdur. Q. – s. ç.-nın əsas məzmunu ümumi təbiətli fəzalardakı statistika nəticələrinin qeyri – səlis çoxluqlar fəzasına tətbiqidir (bax, [1]). Əgər $U = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ olarsa, onda

$$\rho(A_1, A_2) = \int_a^b |\mu_{A_1}(u) - \mu_{A_2}(u)| du$$

qeyri – səlis A_1 və A_2 çoxluqları arasında yaxınlıq ölçüsü kimi istifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [2] Орлов А. И., «Заводская лаборатория», 1990, т. 56, № 3, с. 76–83.

QEYRİ – SİMMETRİK TƏSADÜFİ MATRİS « **несимметрическая случайная матрица; nonsymmet-ric random matrix** » – elementləri təsadüfi kəmiyyətlər olan kvadrat cədvəldir. $\lambda_k + i\mu_k$, $\lambda_k - i\mu_k$ və λ_i – həqiqi, n tərtib

$\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ Q. – s. t. m.-inin məxsusi qiymətləridir, $k = 1, \dots, s$,

$l = s + 1, \dots, n - 2s$; x_k, y_k və x_l isə həqiqi vektorlar, $z_k = x_k + iy_k, \bar{z}_k = x_k - iy_k, k = 1, \dots, s$ və $z_l = x_l$ məxsusi vektorlardır. Ξ_n matrisinin kompleks məxsusi qiymətləri onların modullarının artması qaydası ilə nizamlanır. Əgər qoşmalar olmayan kompleks qiymətlərin modulları üst-üstə düşsə, onda onlar arqumentlərin artması qaydası ilə nizamlanılır. Məxsusi qiymətləri qoşma olan cütler arasında xəyali hissəsi sıfırdan böyük olanı birinci yere qoyulur. Həqiqi məxsusi qiymətlər onların artması qaydası ilə nizamlanılır.

Əgər Ξ_n matrisinin paylanma sıxlığı varsa, $x_k, y_k, k = 1, \dots, s, x_l, l = s + 1, \dots, n - 2s$ vahid uzunluqlu ele vektorlardırsa ki, hər bir vektorun sıfırdan fərqli birinci komponenti sıfırdan böyük olsun, onda belə matrislər 1 ehtimalla birqiymətli təyin olunur. Ξ_n matrisi 1 ehtimalla aşağıdakı kimi ifadə edilir:

$$\Xi_n = T_n \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_s & \mu_s \\ -\mu_s & \lambda_s \end{bmatrix}, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{n-2s} \right\} T_n^{-1},$$

T_n 1 ehtimalla cırlaşmayan həqiqi matrisdir və onun vektor – sütunları $x_k, y_k, k = 1, \dots, s, x_l, l = s + 1, \dots, n - 2s$ vektorlarıdır.

$K, -n$ – ölçülü cırlaşmayan həqiqi matrislər qrupu. $B, -K$ qrupunun Borel altqoxluqlarının σ – cəbri, $\theta_k = \lambda_k \pm i\mu_k, k = 1, \dots, s, \theta_m, m = s + 1, \dots, n - 2s, -\Xi_n$ matrisinin yuxarıda göstərilən qaydada seçilmiş məxsusi qiymətləri olsun. Əgər Ξ_n təsadüfi matrisinin paylanma sıxlığı p varsa, onda ixtiyari $L \in B$ altqoxluğu üçün və ixtiyari həqiqi $\alpha_j, \beta_j, j = 1, \dots, n$ ədədləri üçün

$$P\{T_n \in L, \text{Re}\theta_j < \alpha_j, \text{Im}\theta_j < \beta_j, j = 1, \dots, n\}$$

ehtimalını hesablamaq olar (bax, [1]).

$\Xi_n = \|\xi_{sk} + i\eta_{sk}\|, -n$ – tərtib kompleks matris olsun; fərz olunur ki, ξ_{sk} və $\eta_{sk}, s, k = 1, \dots, n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı vardır, Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri – $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ arqumentlərinin artması qaydası ilə nizamlanmışdır, $h_1, \dots, h_n$ məxsusi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qiymətlərinə uyğun məxsusi vektorlar, H_n isə vektor – sütunları $h_l, l = 1, \dots, n$ vektorlarına bərabər matrisdir. Ξ_n matrisini 1 ehtimalla $\Xi_n = H_n \Lambda_n H_n^{-1}$ şəklində ifadə etmək olar, burada $\Lambda_n = \|\lambda_l \delta_{lm}\|$. Əgər $(h_k, h_k) = 1$ və $\arg h_{lk} = c_k, k = 1, \dots, n, c_k (0 \leq c_k \leq 2\pi)$ ixtiyari həqiqi ədədlər olarsa, onda H_n matrisi 1 ehtimalla birqiymətli təyin olunur.

K – cırlaşmayan kompleks n – tərtib matrislər qrupu olsun. B K qrupunun Borel altqoxluqlarından ibarət σ – cəbrdir. Əgər Ξ_n matrisinin paylanma sıxlığı varsa, onda ixtiyari $L \in B$ və ixtiyari $(\alpha_j, \beta_j), j = 1, \dots, n$ kompleks ədədləri üçün

$$P\{H_n \in L, \text{Re}\alpha_k < \text{Re}\lambda_k < \text{Re}\beta_k,$$

$$\text{Im}\alpha_k < \text{Im}\lambda_k < \text{Im}\beta_k, k = 1, \dots, n\}$$

ehtimalını hesablamaq olar.

Əgər A n tərtib kompleks təsadüfi kvadrat matrisdirsə, onda ele n – tərtib unitar U matrisi vardır ki, $T = U^T A U$ yuxarıda üçbucaq matrisdir və T matrisinin baş diaqonalının elementləri isə A matrisinin məxsusi qiymətləridir. Əgər A həqiqi matrisdirsə və həqiqi məxsusi qiymətlərə malikdirsə, onda U matrisini həqiqi ortoqonal matris seçmək olar. A matrisi, yalnız və yalnız, o halda normal matrisdir ki, T diaqonal matris olsun. Əgər A matrisinin məxsusi qiymətləri müxtəlifdirsə və hər hansı bir qayda ilə nizamlanmışdırsa, U matrisinin hər bir vektor – sütununun sıfırdan fərqli ixtiyari komponentinin arqumentləri qeyd olunmuşdursa, onda A matrisinin UTU^T şəklində Şur ifadəsi yeganədir.

$\Xi_n, -n$ – tərtib kompleks Q. – s. t. m. olsun və onun elementlərinin paylanma sıxlığının varlığı fərz olunur; $\Xi_n = USU^T$ – onun Şur ifadəsi olsun və matrisin diaqonal elementləri $s_j, j = 1, \dots, n$ ele seçilmişdir ki, onların arqumentləri artmayan qaydada nizamlanmışdır, $\arg u_{lj} = c_j, j = 1, \dots, n, c_j (0 \leq c_j \leq 2\pi)$ – ixtiyari həqiqi ədədlər, $\Gamma, -n$ – tərtib unitar matrislər qrupu. $B, -\Gamma$ qrupunun Borel altqoxluqlarından ibarət σ – cəbr, $\nu, -\Gamma$ qrupunda verilmiş normalanmış Haar ölçüsüdür.

Onda ixtiyari $L \in B$ və n – ölçülü kompleks yuxarıda üçbucaq matrislərinin ixtiyari ölçülən C çoxluğu üçün $P\{U \in L, S \in C\}$ ehtimalını hesablamaq olar (bax, [1]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

QEYRİ – STASİONAR AXIN « нестационарный поток; nonstationary input » – stasionar olmayan giriş axınıdır (bax, *Stasionarlıq, axının*). Ən çox tətbiq olunan P u a s s o n Q. – s. a. – keçmiş təsirsiz giriş axını üçün $[t, s]$ yarımintervalında baş verən hadisələr sayı $\Lambda(s) - \Lambda(t)$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmışdır. $\Lambda(t)$ azalmayan funksiya olub, axının aparıcı funksiyası adlanır. Bəzi şərtlər ödənildikdə, Q. – s. a. – ni intensivlik $\lambda(t)$ və ani parametr $\mu(t)$ kimi xarakteristikalara malik olur ki, bunlar mütləq integrallanan mənfi olmayan funksiyalardır, kəsilməzlik nöqtələrində $\lambda(t)dt$ və $\mu(t)dt$ uyğun olaraq, $(t, t + dt)$ intervalında hadisələrin orta sayını və bu intervalda heç olmazsa bir hadisənin baş verməsi ehtimalını ifadə edir.

QEYRİ – STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; б о - у ю к ə d ə d l ə r q a n u n u « нестационарный случайный процесс; закон больших чисел; nonstationary random process; law of large numbers » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün.

QEYRİ – STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; спектрал nəзəриyyəлəг « нестационарный случайный процесс; спектральные теории; nonstationary random process; spectral theories » – bax, *Spektral nəzəriyyəлəг(i)* qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

QEYRİ – STASİONARLIQ RANQI « нестационарности ранг; rank of nonstationarity » – bax, *Spektral nəzəriyyələri*(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

QEYRİ – TARAZLIQLI STATİSTİK MEKANİKA « неравновесная статистическая механика; non-equilibrium statistical mechanics » – bax, *Statistik mexanika*.

QƏBULOLUNMA ƏDƏDİ « приемочное число; acceptance number » – məmulatların nəzarət olunan çoxluğunun qəbul olunmasında seçimdəki qüsurlu məmulatların mümkün qədər məqbul sayılan sayıdır (bax, *Statistik qəbul nəzarəti*).

QƏRİBƏ ATTRAKTOR « странный аттрактор; strang attractor » – dinamik sisteme nəzərən invariant, müəkkəb strukturlu cazibə çoxluğu. Q. a. qeyri – birincins ola bilər, yeni özünün invariant cazibə altçoxluqlarını özündə saxlaya bilər. Ədədi eksperimentlərdə Q. a. x faza həcmnin müsbət altçoxluğuna daxil olduğu halda, $\{f^t(x)\}$, $t \in [0, T]$ trayektoriyalarda toplanmış δ – ölçülər üçün limit ölçüsü olan invariant μ ölçüsünün daşıyıcısı kimi aşkar olur. μ -nün ergodikliyi birincinsliliyə uyğundur.

Q. a.-un ən mühüm xarakteristikaları Lyapunov μ ölçüsünün dim. – ölçü və göstəriciləridir.

Əd.: [1] Странные аттракторы, пер. с англ., М., 1981; [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985.

QIRILAN MARKOV PROSESİ « обрывающийся марковский процесс; killed Markov process » – trayektoriyaların zamanın bütün anları üçün deyil, yalnız hər hansı təsadüfi intervalda təyin olunan Markov prosesidir. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ – ölçülən fəza, $(\mathcal{E}_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$, – $\mathcal{E}$ çoxluğuna $\Delta \notin \mathcal{E}$ izole olunmuş nöqtəsinin əlavə edilməsindən sonra alınmış fəza olsun. Fərz olunur ki, $X^\Delta = (X_t^\Delta, \mathcal{A}_t, P_x)$ Δ nöqtəsi uducu olan, $\mathcal{E}_\Delta$ fəzasında qırılmayan birincins Markov prosesidir: $X_s^\Delta(\omega) = \Delta$ olduqda, bütün $t > s$ üçün $X_t^\Delta(\omega) = \Delta$ olduğu alınır.

$\zeta(\omega) = \inf \{t: X_t^\Delta(\omega) = \Delta\}$ və $\{X_t^\Delta(\omega) \neq \Delta\}$ çoxluğunda $X_t(\omega) = X_t^\Delta(\omega)$ olsun. $X = \{X_t, \zeta, \mathcal{A}_t, P_x\}$ toplusu $\mathcal{E}$ fəzasında qırılan (birincins) Markov prosesi adlanır. ζ kəmiyyətinə X Q. M. p.-nin qırılma anı və ya yaşama müddəti deyilir, adətən, fərz olunur ki, $\zeta > 0$ və $X_\zeta^\Delta \equiv \Delta$. Əgər X^Δ prosesi hər hansı bir xassəyə malikdirsə, Q. M. p. X də bu xassəyə (məs., ciddi Markov xassəsi) malikdir, deyilir, ζ anında xassələr bəzən xüsusi olaraq göstərilməlidir. $p(t, x; \Gamma) = P_x(X_t \in \Gamma)$ funksiyası X prosesi-nin keçid funksiyası adlanır; bu funksiya sub-markov keçid funksiyasıdır. Q. M. p.-ləri qırılmayan Markov proseslərinə sadə çevirmələrin tətbiqi nəticəsində, məs., altprosesin qurulması və s. zamanı yaranır (bax, Markov prosesi; çevirmələr). Daxil olunmuş anlayışlar təbii olaraq birincins olmayan proseslər üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Дынкин Е. В., Марковские

процессы, М., 1963; [3] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

QIRILMA ANI « обрыва момент; killing time » – qırılan Markov prosesinin yaşama müddəti intervalının sağ ucu – ζ nöqtəsidir. Əgər $\zeta = \{\zeta_t, \zeta, \mathcal{A}_t, P_x\}$ birincins Markov prosesidirsə, onda $\zeta = \zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyəti $[0, +\infty)$ -dan qiymətlər alır, $\{\zeta \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ (ζ dayanma anıdır) və $\zeta(t, \omega)$ trayektoriyası bütün $t \in [0, \zeta(\omega)]$ üçün təyin olunmuşdur. Əgər $\zeta \equiv +\infty$ olarsa, proses – qırılma y a n, bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\zeta(\omega) > 0$ olarsa, normal adlanır (bax, [1]). Qeyri – birincins Markov proseslərinin ümumi nəzəriyyəsində (bax, [2]) ξ anına dual olan ζ prosesinin təsadüfi doğum anı α daxil olunur, $\alpha \leq \zeta$ və ζ -nin ya yalnız sağdan açıq, ya yalnız soldan açıq, ya hər iki tərəfdən açıq (α, ζ) intervalında verildiyi fərz olunur.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

QIRILMAYAN MARKOV PROSESİ « необрывающийся марковский процесс; non-killed Markov process » – bax, *Qırılma anı*.

QIRMIZI KÜY « красный шум; red noise » – spektral sıxlığı $f(\omega)$, ω tezlikləri intervalında tezliyin azalması ilə artan, geniş mənada stasionar təsadüfi prosesdir (və ya ardıcılıqdır). «Q. k.» geofizikada geniş tətbiq olunan termindir. Adətən, «Q. k.» prosesinin spektral sıxlığı $f(\omega)$, $\omega \rightarrow 0$ olduqda hökmən artmalıdır; əgər bu halda $f(0) = C < \infty$ olarsa, onda çox kiçik tezliklər oblastında Q. k., praktik olaraq b e y a z k ü y e (spektral sıxlığı sabit prosese) çevrilir.

Tətbiqi məsələlərdə bəzən, q ı r m ı z ı k ü y spektral sıxlığı $f(\omega)$, ω -nın azalması ilə monoton artan sadə stasionar proses də adlandırılır; bu halda $f(\omega) = C_1/(\omega^2 + \alpha^2)$ olur (və deməli, korrelyasion funksiya $\exp\{-\alpha t\}$ -yə mütənəsibdir).

QİSMƏN BALANSLANMIŞ BLOK PLAN « частично сбалансированный блочный план; partially balanced block design » – bax, *Blok plan*.

QİSMƏN BEYES YANAŞMASI « частичный байесовский подход; partial Bayes approach » – bax, *Bayes kriterisi*.

QİSMƏN CAZİBƏ OBLASTI sonsuz bölünən G qrupunun «частичного притяжения область безгранично делимого закона G ; domain of partial attraction of an infinitely divisible law G » – elə F paylanma funksiyalarının çoxluğu ki, $n_1 < n_2 < \dots$ şərtini ödəyən hər hansı n_k ardıcılığı üçün, A_{n_k} və B_{n_k} ardıcılıqları münasib seçildiyi halda, $F^{*n_k}(B_{n_k}x + A_{n_k})$ paylanma funksiyaları $G(x)$ -ə zəif yığılırlar (burada *n_k , – n – qat kompozisiya işarəsidir).

Bütün sonsuz bölünən qanunlar və yalnız bunlar boş olmayan Q. c. o.-na malikdirlər. Hər bir F paylanması ya eyni bir tip qanunların Q. c. o.-na, yaxud qeyri – hesabi çoxluqlar tiplərinin qanunlarının Q. c. o.-na aiddir və ya da ki, heç bir Q. c. o.-na aid deyildir. Hər bir sonsuz bölünən qanunun (Deblin universal qanunları adlandırılır; bax, məs., [3]) Q. c. o.-na aid

paylanmalar mövcuddur. Əgər F paylanması eyni bir tip qanunların Q . c. o.-na aiddirsə, onda bu tip dayanıqlı tipdir. Dayanıqlı qanunun Q . c. o. onun *cazibə oblastından* genişdir. Elə paylanmalar vardır ki, bunlar dayanıqlı deyildirlər, lakin özlərinin Q . c. o.-ndandırlar. Əgər F paylanması U qanunun Q . c. o.-na mənsubdursa, U qanunu isə V qanunun Q . c. o.-na aiddirsə, onda F paylanması V qanunun Q . c. o.-na aiddir. F paylanmasının heç bir Q . c. o.-na aid olmaması üçün

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \liminf_{u \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq lu} \frac{dF(x)}{dF(x)} \neq 0$$

şərtinin ödənilməsi kafidir. F paylanmasının normal qanunun Q . c. o.-na aid olması üçün zəruri və kafidir ki,

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} u^2 \int_{|x| \geq u} \frac{dF(x)}{dF(x)} = 0$$

şərti ödənilsin.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] Doeblin W., «Studia Math.», 1940, т. 9, p. 71–96.

QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ, MINİMAL MƏSAFƏNİN
« оценка минимального расстояния; minimum distance estimate » – bax, *Robast statistik qiymət*.

QLİSON TEOREMİ « Глисона теорема; Gleason theorem » – qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin teoremidir, dim.– ölçüsü üçdən az olmayan separabel Hilbert fəzasının ortoprojektorlarının çoxluğunda bütün ehtimal ölçülərinin (və ya daha ümumi halda sonlu) effektiv təsvirini verir (bax, [1]). $\mathcal{L}(H)$, – H fəzasında bütün ortoprojektorların çoxluğu olsun və $m: \mathcal{L}(H) \rightarrow [0, 1]$ – ehtimal ölçüsüdür, yəni aşağıdakı xassələri ödəyən funksiyaadır:

1) $m(I) = 1$, burada I – eynilik operatorudur,

2) əgər $P = \sum_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_i P_j = 0$, $i \neq j$ olduqda $P, P_j \in \mathcal{L}(H)$

olduqda $m(P) = \sum_{j=1}^{\infty} m(P_j)$. Onda $H \geq 3$ olduqda, H -da vahid

izli (yəni $\text{tr} T = 1$) elə mənfi olmayan nüvə operatoru T vardır və birqiymətli təyin olunur ki, $mP = \text{tr}(TP)$, $P \in \mathcal{L}(H)$ bərabərliyini ödəyir.

Q . t.-dən [2]-də qoyulmuş xəttilik probleminin müsbət həlli alınır: yeni Neyman cəbrinin ortoprojektorlarında ehtimal ölçülərini, dim. – ölçü ≥ 3 olan separabel Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorların cəbri üçün, norması 1 olan müsbət xətti funksional vəziyyətinə kimi davam etdirmək olar. Xəttilik probleminin tam həlli XX əsrin 80-ci illərinin əvvəllərində alınmışdır; texniki cəhətdən çətin bu həll Q . t.-ne əsaslanmışdır. İsbat olunmuşdur ki, bu problem tərkibində I_2 tip cəbrin toplananını birbaşa saxlamayan Neyman cəbrləri üçün müsbət həll olunur. Bu, ortoprojektorlarda ölçülərə nəzərən ehtimal hesabını (və ya qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsinə) qeyd olunan cəbrlərdə qurmağa imkan verir. Q . t.-nin inkişafı və ümumiləşməsinə müxtəlif aspektlərdə həsr olunmuş geniş əd. vardır.

Əd.: [1] Gleason A., «J. Math. Mech.», 1957, № 6, p. 885–93; [2] Mackey G., «Amer. Math. Monthly», 1957, № 8, p. 45–57; [3] Макки Дж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [4] Шерстнев А. Н., «Изв. вузов. Математика», 1982, № 8, с. 20–35.

QLİVENKO TEOREMİ « Гливенко теорема; Glivenko theorem » – F_n empirik paylanma funksiyalarının

$n \rightarrow \infty$ olduqda kəsilməz paylanma funksiyası F -ə 1 ehtimalla müntəzəm yığılması haqqında teoremdir (bax, [1]). Bu teoremə mühüm əlavə *Kolmoqorov kriterisi* (bax, [2]; bu kriterini müəyyən mənada V. İ. Qlivenkonun nəticəsinin dəqiqləşdirilmiş forması hesab etmək olar) və ona analoq N. V. Smirnovun aldığı (bax, [3]) kriteri olmuşdur. Q . t. riyazi statistikada mühüm tətbiqi ilə seçiyəvidir.

Əd.: [1] Glivenko V. I., «Giorn. ist. ital. attuari», 1933, v. 4, p. 1–10; [2] Kolmogoroff A. N., «Giorn. ist. ital. Attuari», p. 83–91 (рус. пер. – Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41); [3] Смирнов Н. В., «Успехи матем. наук», 1944, т. 10, с. 179–206.

QLİVENKO – KANTELLİ TEOREMİ « Гливенко – Кантелли теорема; Glivenko – Cantelli theorem » – bax, *Empirik paylanma, Böyük ədədlər qanunu* Bana x fəzalarında.

QLOBAL KRİTERİ « глобальный критерий; global test » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

QLOBAL LİMİT TEOREMLƏRİ « глобальные предельные теоремы; global limit theorems » – $F_n(x)$ paylanma funksiyaları ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda $F(x)$ paylanma funksiyasına yığılarsa, $\varphi(x)$ və $q(x)$ mənfi olmayan funksiyalar olarsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(F_n(x) - F(x)) q(x) dx \rightarrow 0$$

tipli münasibətin ödənilməsi üçün tələb olunan şərtləri müəyyənləşdirən *limit teoremləridir*. $F(x)$ – normal qanuna tabe paylanma funksiyası, $F_n(x)$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin nor-

malanmış cəmlərinin paylanma funksiyası, $\varphi(x) = |x|^p$, $p > 0$, $q(x) \equiv 1$ olan halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün mərkəzi limit teoreminin global forması müfəssəl surətdə araşdırılmışdır (bax, [1] – [4]).

Əd.: [1] Agnew R. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1954, v. 40, № 9, p. 800–04; [2] Esseen C.-G., «Trans. Roy. Inst. Technol. Stockh.», 1958, № 121, p. 1–31; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Кружлов В. М., «Зап. научн. сем. ЛОМИ», 1976, т. 61, с. 84–101.

QNEDENKO TEOREMİ « Гнеденко теорема; Gnedenko theorem » – *limit teoremlərinin* klassik nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biri, yığılma kriterisidir. Q . t. sonsuz kiçiklik şərtinə tabe təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının qeyd olunmuş sonsuz bölünən qanuna yığılması üçün zəruri və kafi şərtləri ifadə edir (Kolmoqorov modeli). Q . t.-nin original ifadəsi, məs., [1]-də, bir qədər dəyişik formada *Limit teoremləri* məqaləsində verilmişdir. Bax, həmçinin *Böyük ədədlər qanunu*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М. – Л., 1949.

QOCALAN PAYLANMA « стареющее распределение; aging distribution » – $\xi \geq 0$ təsadüfi kəmiyyətinin ele paylanmasıdır ki, ixtiyari $s > 0$ qiymətində

$$P\{\xi \in (t, t+s) | \xi > t\} \quad (*)$$

şerti ehtimalı $t \geq 0$ arqumentinin azalmayan funksiyasıdır. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinə cihazın fasiləsiz işləmə müddəti kimi baxılsa, onda paylanmanın Q. p.-lar sinfindən olması zaman artdıqca, yeni cihazın işləmə müddəti t -nin artması ilə cihazın ilk dəfə sıradan çıxması (və ya dayanması) ehtimalının artmasına uyğundur. Əgər ξ -nin paylanması Q. p.-dırsa, onda onun bütün k tertib momentləri M_{ξ}^k sonludurlar və ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində

$$|\bar{F}(t) - e^{-t/m}| \leq 1 - \sqrt{1 - 2\alpha}$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\bar{F}(t) = P\{\xi > t\}$, $\alpha = 1 - M_{\xi}^2 / 2(M_{\xi})^2$ (bax. [1]).

ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda Q. p.-dır ki, $-\ln \bar{F}(t)$ funksiyası $[0, t_F)$ intervalında qabanq funksiya olsun: $t_F = \inf\{t: \bar{F}(t) = 0\}$.

Q. p.-nın $[0, t_F)$ intervalında paylanma sıxlığı vardır və t -yə görə azalmayan *imtina intensivliyi funksiyası* $\lambda(t)$ təyin olunmuşdur.

Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsində funksional paylanmaların müxtəlif sinifləri istifadə olunur. Gəncleşən paylanmalar sinfindən olan funksional paylanmalar üçün (*) ifadəsi t arqumentinin artmayan funksiyasıdır. Q. p.-lar sinfinin ümumiləşməsi ilə orta Q. p. sinfidir ki, $\bar{F}(t)^{1/t}$ t arqumentinin azalmayan funksiyasıdır.

Fərz olunur ki, monoton strukturlu bərpəolunmayan sistemin bütün elementləri (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*) orta Q. p.-ya malikdirlər. Onda belə sistemin fasiləsiz işləmə müddəti də orta Q. p.-ya malikdir (bax, [2]).

Orta Q. p.-lar sinfi ixtiyari $t, s \geq 0$ qiymətlərində $\bar{F}(t+s) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(s)$ bərabərsizlikləri ödənilən paylanmaların, başqa sözlə, «təzə köhnədən yaxşıdır» paylanmaları sinfinin altçoxludur.

Paylanmalar siniflərinin müxtəşər adları rus dilində: ВФН (возрастающая функция интенсивности – artan intensivlik funksiyası Ar.İF) – qocalan paylanmalar üçün, УФН (убывающая функция интенсивности – azalan intensivlik funksiyası – Az.İF) – gəncleşən sinif üçün. İngilis dilində: IFR (increasing failure rate) – ВФН, Ar.İF-ə uyğundur, DFR (decreasing failure rate) – УФН, Az.İF-ə, NBU (new better then used) – «təzə köhnədən yaxşıdır», – TKY adlarına uyğundur.

Əd.: [1] Вопросы математической надежности, М., 1983; [2] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

QOŞMA KÖÇÜRTMƏ MƏSƏLƏSİ « сопряженная задача переноса; dual transport problem » – $A^* \varphi = \psi$ tənliyi üçün $Af = g$ stasionar xətti kinetik köçürtmə

tənliyinə qoşma sərhəd məsələsidir. Bu məsələnin həlli f axınının $I_{\psi}(f) = \int f(x) \psi(x) dx$ funksionalına nəzərən dəyər funksiyası $\varphi(x)$ -i təyin edir, məs., həssaslığı $\psi(x)$ olan detektorda integral axını və ya axına nəzərən. Q. k. m. köçürtmə tənliyinin kükrentilər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. A^* -ya təbii məhdudiyyətlər qoyulduqda

$$-\sum_{i=1}^n a^i(x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = \sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right) + \lambda(x) \varphi(x) - \int \mathcal{K}(x, x') \varphi(x') dx' = (A^* \varphi)(x)$$

ifadəsi bu köçürtməni təsvir edən Markov prosesinin infinitezimal operatorudur. Xüsusi halda, proses üçün optiki qarşılıqlıq teoremi doğru olduqda Q. k. m.-nin düüst ifadə olunması detektordan mənbəyə, yeni tərs yolla köçürtmə məsələsinin asanlıqla statistik modeləşdirilməsinə imkan verir.

Əd.: [1] Марчук Г. И. [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосибир., 1976; [2] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981.

QOŞMA PAYLANMALAR « сопряженные распределения; conjugate distributions » – aşağıdakı şərtləri ödəyən F və G paylanmalardır:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{sx} F(dx)$$

integralı hər hansı $|s| < s_0$ intervalından olan bütün s -lər üçün sonludur və bütün belə s -lər üçün

$$G(dx) = e_{sx} F(dx) / f(s).$$

Q. p.-ın mühüm xassəsi belə ifadə olunur: Q. p.-ın ixtiyari cütləri – $(F_1, G_1), \dots, (F_n, G_n)$ üçün

$$G^{(n)}(dx) = e_{sx} F^{(n)}(dx) / f^{(n)}(s)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$G^{(n)} = \prod_{i=1}^n G_i, \quad F^{(n)} = \prod_{i=1}^n F_i$$

$$f^{(n)}(s) = \prod_{i=1}^n f_i(s), \quad f_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} F_i(dx).$$

Q. p. limit teoremlərində böyük yayınmaların öyrənilməsində, bərpə nəzəriyyəsində və təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [3] Боровков А. А., Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.

QOŞMALIQ CƏDVƏLİ, ƏLAMƏTLƏRİN « сопряженности признаков таблица; contingency tale » – $f_{ij \dots q}$ tezliklərinin cədvəlidir, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J, \dots, q = 1, \dots, Q$. $f_{ij \dots q}$; $f_{ij \dots q}$ – hər hansı elementlərin (obyektlərin) 1-ci əlamətə (A) görə i -ci kateqoriyaya, 2-ci əlamətə görə (B)

j -ci kateqoriyaya, ..., s -ci əlamətə görə q -cü kateqoriyaya aid olması təzliyidir. Bu belə anlaşılmalıdır ki, verilənlər ya kateqoriyalara və ya əlamətlərlə keyfiyyətə ifadə olunur.

Ən çox yayılmış cədvəllər $s = 2$, $I = J = 2$ qiymətləri üçün $s = 2$, $I > 2$, $J > 2$ qiymətləri üçün tertib edilmiş cədvəllərdir, bunlar, uyğun olaraq, 2×2 cədvəlləri və ikiölçülü cədvəllər adlanır.

Qoşmalıq cədvəllərinin verilənləri kəmiyyətə verilənlərin alınması ya qeyri – mümkün və ya arzu edilməz olduğu hallarda yararlıdır, kateqoriyalar nizamlanmamış olduqda ölçmələr nominal şkalada, nizamlanmış olduqda isə qaydalı şkalada aparılır.

Qoşmalıq cədvəllərinin analizində üç hal ola bilər: 1) $\{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1J}\}$ və $\{f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2J}\}$ marginal tezliklərinin iki toplusu qeyd olunmuşdur; 2) bir toplu qeyd olunmuşdur (bu hal – I seçimlərinin bircinsliyinin yoxlanıldığı haldır); 3) marginal tezliklərin iki toplusu da təsadüfidir.

Qoşmalıq cədvəllərinin analizinin ən yayılmış məsələləri əlamətlərin (deyişənlərin) asılı olmamazlığının yoxlanılması məsələləri və eger əlamətlər asılı olmayandırlarsa, əlaqə dərəcəsinin aydınlaşdırılmasıdır. $I = J = 2$ olduqda, asılı olmamazlıq

$H_0: p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$ ilkin hipotezinin doğruluğu kimi anlaşılır, p_{ij} ixtiyari elementin (i, j) oyuğunda olduğu ehtimalı kimi anlaşılır, yeni elementin 1-ci əlamətin i -ci kateqoriyasında, 2-ci əlamətin j -ci kateqoriyasında olması ehtimalı kimi anlaşılır.

$$p_{i.} = \sum_{1 \leq j \leq J} p_{ij}, \quad p_{.j} = \sum_{1 \leq i \leq I} p_{ij}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

Alternativ hipotez: heç olmazsa bir $i, j, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ cütü üçün $H^1: p_{ij} \neq p_{i.} p_{.j}$ kimi ifadə olunur. H^1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün əlaqə ölçüləri adlanan çoxsaylı kriterilər vardır.

Əd.: [1] Goodman L. A., Analyzing qualitative-categorical data. Log-linear models and latent-structure analysis, L. – [a. o.], 1978; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Аптон Г., Анализ таблиц сопряженности, пер. с англ., М., 1982; [4] Haberman S. J., Analysis of qualitative data, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1978–79; [5] Goodman L. A., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, p. 10–69; [6] Kullback S., Kleege J. C., в кн.: Handbook of Statistics, v. 4, Amst. – [a. o.], 1984; [7] Миркин Б. Г., Анализ качественных признаков и структур, М., 1980; [8] Fienberg S. E., в кн.: Encyclopedia of statistical sciences, v. 2, N. Y., 1982, p. 161–71; [9] Haberman S. Y., Analysis of qualitative data, v. 1, N. Y., 1980, p. 130–37; [10] ECTA (Everyman's Contingency Table Analysis) by L. A. Goodman, L., [e. a.], 1973; [11] Agresti A., Analysis of ordinal categorical data, N. Y. – [a. o.], 1984; [12] Packer R. L., The analysis of categorical data, L., 1974; [13] Чесноков С. В., Детерминистический анализ социально-экономических данных, М., 1982.

GRAM – ŞARLIYE SIRASI «Грама – Шарлье ряд; Gram – Charlier series» – aşağıdakı ifadə ilə təyin olunan formal sıradır:

$$S_A(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \varphi^{(k)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

və ya

$$S_B(x) = \Pi(\lambda, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \frac{d^k \Pi(\lambda, x)}{d\lambda^k}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

burada

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Pi(\lambda, x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

(1) sırası A tip Qram – Şarliye sırası adlanır. $S_A(x)$ sırasının ilk hədlərinin sonlu cəmləri ilə X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlığı $p(x)$ -i approksimasiya etmək olur. Belə approksimasiyada

$$a_k = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) p(x) dx$$

olur, burada $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(k)}$ – Hermit çoxhədli-sidir. Məs., eger $\mu_j = M X^j$ və $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ olarsa, onda

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -\mu_3, \quad a_4 = \mu_4 - 3, \quad a_5 = -\mu_5 + 10\mu_3$$

olur. Eger $p(x)$ məhdud variasiyalı funksiya olarsa və

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/4} p(x) dx < \infty$$

olarsa, onda $S_A(x) = p(x)$ bərabərliyi $p(x)$ -in hər bir kəsilməzlik nöqtəsində ödənilir (bax, [3]).

(2) sırası B tip Qram – Şarliye sırası adlanır. Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin $p_x = P\{X = x\}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

$\left(\sum_{x=0}^{\infty} p_x = 1 \right)$ ehtimalları $S_B(x)$ sırasının ilk hədlərinin sonlu cəmləri ilə approksimasiya etmək olur. b_k əmsalları hesabla-maq üçün düsturlar aşağıdakı bərabərliklərlə verilir:

$$b_k = \lambda^k \sum_{x=0}^{\infty} p_x G_k(\lambda, x),$$

burada

$$G(\lambda, x) = \frac{d^k \Pi(\lambda, x)}{d\lambda^k} / \Pi(\lambda, x).$$

Eger $\mu_1 = \lambda$, $\beta_j = M(x - \lambda)^j$ olarsa, onda $b_1 = 0$, $b_2 = \beta_2 - \lambda$, $b_3 = \beta_3 - 3\beta_2 + 2\lambda$ olur. Q. – Ş. s. K. Qram tərəfindən [1]-də, K. Şarliye tərəfindən [2]-də binomial qanunun approksimasiyası üçün təklif olunmuşdur. Q. – Ş. s.-nin xüsusi cəmləri özlerini rəqulyar aparmaya da bilər, məs., (1) sırasının ilk k hədləri cəmi, ilk $(k-1)$ hədlər cəmi ilə müqayisədə pis approksimasiya verə bilər, buna görə də, Q. – Ş. s. həmişə məqsəduyğun olmaya da bilər. Ecuort – Kramer ayrılığı A tip Q. – Ş. s.-nin müəyyən mənadə ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Gram J. P., «J. reine und angew. Math.», 1983, Bd 94, S. 41–73; [2] Charlier C. V. L., «Arkiv. Mat. Astr. Fys.», 1913/1914, Bd 9, № 25, S. 1–17; [3] Кендалл М. Дж. Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

QRANULOMETRİYA « гранулометрия; granulometry » – qeyd olunmuş Ω çoxluğunun altçoxluqlarının $\mathcal{A}$ sinfini özünə inikas eldiren və aşağıdakı xassələri ödəyən ψ_λ , $\lambda > 0$ funksiyaının birparametrlı sinfidir:

a) $\psi_\lambda(A) \subset A$, $A \in \mathcal{A}$; b) əgər $A \subset B$ olarsa, onda $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B)$, $A, B \in \mathcal{A}$; c) əgər $\lambda \geq \mu$ olarsa, onda $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$; d) $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_{\max}$ (burada $\circ$ – inikasların kompozisiyası işarəsidir).

$\Omega = \mathbb{R}^n$ – Evklid fəzası, $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, $\mathbb{R}^n$ -də qapalı çoxluqların çoxluğu olsun. Əgər $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lim_{n \downarrow \lambda} \psi_\lambda(A_n) = \psi_\lambda \left(\bigcap_n A_n \right)$$

limit xassəsi ödənilərsə, Q. $\mathcal{F}$ -də yuxarıdan səmimi kəsilmez adlanır.

Q. – təbiiqədə geniş yayılmış qapalı təsadüfi çoxluqların qurulması və onların çevirmə üsullarından birini təyin edir: əgər A təsadüfi qapalı çoxluqdursa, onda Q.-nin qiyməti $\psi_\lambda(A)$ belə təsadüfi qapalı çoxluqdur. Bundan başqa, Q.-nin vasitəsilə təsadüfi çoxluğun paylanma $[x]$ nöqtəsində A -nın ölçüsünün (rus. размер) paylanması xarakteristikalarından ən mühümünü (riyazi gözlemə və dispersiya ilə yanaşı) – $\Lambda(x) = \{\lambda : x \in \psi_\lambda(A)\}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası təyin olunur.

Əd.: [1] Матеро́в Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

QRENANDER – ROZENBLATT TİP STATİSTİKALARI(1) spektral sıxlığın « Гренандер – Розенблатта тип статистики спектральной плотности; statistic of Grenander – Rozenblatt type for spectral density / spectrograph estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri-parametrik statistik qiymət.

QRİFFİTS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Гриффитса неравенства; Griffiths inequalities » – məs., müsbət maqnit sahəsində *ferromaqnit modeller* üçün tez-tez istifadə olunan korrelyasion bərabərsizliklərdir. $\{x_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ – heqiqi qiymətlərli şəbəkəvari təsadüfi meydanın realizasiyası olsun. $A \in \mathbb{Z}^d$ – sonlu altçoxluqdur, $X_A = \prod_{t \in A} x_t$ təsadüfi kəmiyyətdir.

Onda ixtiyari sonlu $A, B \in \mathbb{Z}^d$ üçün

$$(I) \mathbf{M}(X_A) \geq 0, \quad (II) \mathbf{M}(X_A X_B) \geq \mathbf{M}(X_A) \mathbf{M}(X_B)$$

Q. b. ödənilir.

QRİN ALFA – FUNKSİYASI « Грина альфа – функция; Green alpha – function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

QRİN FUNKSİYASI « Грина функция; Green function » kvant meydan nəzəriyyəsi və kvant statistik fəzasında – meydan operatorlarının (kvant meydanı halında) və ya Heyzenberq təsvirində

doğum və ölüm operatorlarının (çoxhissəli qeyri – relyativ kvant sistemləri halında) xronoloji hasilinin orta qiymətidir.

1) **Meydan nəzəriyyəsi** halı. $\{\varphi_\alpha(x), x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}), x^{(0)} - \text{zaman}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} - \text{fəza koordinatları}, \alpha - \text{spinor və ya vektor indeksidir}\}$, M^4 Minkovski fəzasında təyin olunmuş kvant meydanı (yeni hər hansı H Hilbert fəzasında Ω vakuum vektorlu operatorqiymətli ümumiləşmiş funksiya, bax, [1]) olsun.

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_k}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = (-1)^r (\Omega, T[\varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_k}(x_k) \varphi_{\beta_1}^*(y_1) \dots \varphi_{\beta_k}^*(y_k)]) \quad (*)$$

ümumiləşmiş funksiyaasına **Qrin funksiyası** (k – hissəli) deyilir, burada $*$ – operator qoşmasıdır, T isə onu ifadə edir ki, $\{\varphi_{\alpha_i}(x_i), \varphi_{\beta_j}^*(y_j), i, j = 1, \dots, k\}$ operatorları xronoloji qaydada, yeni $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ nöqtələrinin zaman koordinatlarının azalması qaydası ilə yerləşdirilməlidir. Boze – meydanlar üçün $\gamma = 0$. Fermi – meydanlar üçün $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ dəyişmələrinin xronoloji qaydada yerləşməsinin (permutasiyanın) cüt sayına bərabərdir.

2) **Statistik fizika** halı. Hər hansı Fok fəzası F -in vektorları və F -də təsir edən operator enerjisi H ilə təsvir olunan fiziki sistem üçün $a_X^\#(t) = e^{-iHt} a_X^\# e^{-iHt}$, $t \in \mathbb{R}^d$ operatorlar ailəsi doğum operatoru a_X^* və ölüm operatoru a_X üçün

Heyzenberq dinamikası əmələ gətirir (X indeksi ya $\mathbb{R}^d$ fəzasında, ya da $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində dəyişir). Sistemin Q. f. $G(x_1, t_1, \dots, x_k, t_k; y_1, s_1, \dots, y_k, s_k)$ özünün əsas vəziyyətində (*) düsturu ilə təyin olunur, bu düsturda meydan operatorları φ_α və φ_α^* uyğun olaraq, $a_{x_i}(t_i)$ və $a_{y_j}^*(s_j)$ operatorları ilə əvəz olunur, Ω vektoru kimi isə sistemin əsas vəziyyətinə baxılır (məxsusi H vektoru özünün məxsusi qiymətilə). Qrin temperatur funksiyaları adlandırılan funksiyalar analoji təyin olunur, bu halda yalnız əsas vəziyyət üzrə ortalama əvəzinə tarazlıqlı Gibbs vəziyyətinə görə ortalana baxılır.

Əd.: [1] Шварц А. С., Математические основы теории поля, М., 1975; [2] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.

QRİN α – FUNKSİYASI « Грина α – функция; Green α – function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

GROSS TOPOLOGİYASI « Гросса топология; Gross topology » – H Hilbert fəzasında bütün seminormaları ilə verilən topologiyadır, bu seminormaların H -da standart Qauss silindrik ehtimallarına nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. Q. t. məqbul topologiyadır (bax, [2]). Bu hökmün və Q. t.-nin analoqları H fəzasında və Sazonov xassəli Banax fəzalarında digər silindrik ehtimallar üçün də mövcuddur.

Əd.: [1] Gross L., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1963, № 46; [2] Го X.-С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979.

QRUPLA GECİKMƏ « групповая задержка; group delay / lag » – bax, *Ləngimə / Gecikmə*.

QRUPLU KOD « групповой код; group code » – bax, *Blok kod*.

QUMAR, о у н « азартная игра; gambling » – uduş oyununun məharətindən deyil, təsadüfdən asılı olan oyuna deyilir.

Ehtimal nəzəriyyəsində baxılan qumar oyunlarına aid: metal pul və ya pulların atılması; zər və zərflərin atılması; kart oyunlarından – brido, poker və s.-ni; domino və s. oyunları misal göstərmək olar. Nəzəri – oyun baxımından Q. bir oyunçunun çoxaddımlı oyunu kimi anlaşılır, bu halda onun uduşu onunla tərəf – müqabil oyunçuların strategiyasından asılı deyildir. Q. sistemi G aşağıdakı kimi təyin olunur:

k_0 – oyunçunun ilkin kapitalı;

K – kapitalar çoxluğu;

$\mathcal{H}(K)$, – K -nin altçoxluqlarında təyin olunmuş sonlu additiv ölçülər çoxluğu;

$u(k)$ – oyunçunun kapitalar çoxluğunda təyin olunmuş faydalılıq funksiyası (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*) olarsa,

$$G = \left\{ K, k_0 \in K, \{ \mathcal{H}(k) \}_{k \in K}, u(k) \right\}.$$

Oyun aşağıdakı qaydada aparılır: oyunçu $\mu_0 \in \mathcal{H}(k_0)$ ölçüsünü seçir və bu halda onun kapitalı k_1 , μ_0 ölçüsünə görə paylanır. Daha sonra oyunçu $\mu_1(k_1) \in \mathcal{H}(k_1)$ ölçüsünü seçir və bu halda o uyğun olaraq, k_2 kapitalına sahib olur və s. $\mu = \{ \mu_0, \mu_1, \dots \}$ oyunçunun strategiyasıdır. Əgər oyunçu oyunu t anında başa çatdırırsa, onda onun uduşu $u(k_t)$ funksiyasının μ üzrə riyazi gözləməsi kimi təyin olunur. Oyunçunun məqsədi özünün faydalılıq funksiyasını maksimallaşdırmaqdan ibarətdir. Q.-a sadə misal lotereyadır. Oyunçunun nəqd kapitalı k -dirsə, o, dəyəri c -yə bərabər olan m ədəd lotereya bileti ala bilər; $m = 1, 2, \dots, [k/c]$. Her bir m ədədi üçün kapitalar çoxluğunda təyin olunmuş uyğun ehtimal ölçüsü vardır. Tirajdan sonra oyunçunun kapitalı k_1 -ə bərabər olur. Əgər $k_1 < c$ olarsa, oyun başa çatır; əgər $k_1 \geq c$ olarsa, bu halda oyunçu ya oyunu tərk edir, ya da ki, o, yenidən 1-dən $[k_1/c]$ -yə qədər sayda lotereya bileti ala bilər. Oyunçunun faydalılıq funksiyası, məs., kapitalın riyazi gözləməsi və ya müəyyən bir kəmiyyətdən az olmayan uduş ehtimalı ola bilər.

Q. nəzəriyyəsi *idareolunan stoxastik proseslərin* ümumi nəzəriyyəsinin tərkib hissəsidir.

Əd.: [1] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must: Inequalities for stochastic process, N. Y. – [a. o.], 1965.

QURSA STOXAİİK MƏSƏLƏSİ « Гурса стохастическая задача; Goursat stochastic problem » – bir nöqtədən çıxan, iki xarakteristik əynilərdə şərtlərlə verilən, ikiparametrlili bəyaz küylü, 2-ci tərtib xüsusi törəmələri stoxastik hiperbolik differensial tənliyin həllinin tapılması məsələsidir. Misal olaraq, $s > 0$, $t > 0$ oblastında

$$\frac{\partial^2 \xi(s, t)}{\partial s \partial t} = a(s, t, \xi) + b(s, t, \xi) \frac{\partial^2 w(s, t)}{\partial s \partial t}, \quad (*)$$

$$\xi(s, 0) = \varphi(s), \quad \xi(0, t) = \psi(t), \quad \varphi(0) = \psi(0)$$

tənliyini göstərmək olar, burada $w(s, t)$ – Viner vərəqidir. Adətən, (*) şəklində ümumiləşmiş təsadüfi funksiyaların özündə saxlayan tənlik əvəzinə uyğun integral tənliyə baxılır.

QURŞAYICI FUNKSİYASI, GÜCÜN « огнибающая функция мощности; envelope of a power function » – statistik kriteri üçün verilən alternativdə alınan ən böyük gücdür.

Daha dəqiq, əgər $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ parametrik fəzadırsa və mühümlik ölçüsü α -nın verilən qiymətində $H_1: \theta \in \Theta_1$ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ hipotezi yoxlanılırsa, onda Q. g. f.

$$\beta_{\alpha}^*(\theta) = \sup_{\varphi} \beta_{\varphi}(\theta), \quad \theta \in \Theta_1$$
 münasibətilə təyin olunur, burada

$\beta_{\varphi}(\theta)$, – φ kriterisinin gücüdür və $\sup$ isə α ölçülü bütün φ kriteriləri üzrə götürülür (və ya kontekstdən asılı olaraq, bəle kriterilərin hər altıncı üzrə). Olduqca ümumi şərtlərdə $\sup$ alınır.

Əgər supremumu bütün $\theta \in \Theta_1$ üçün eyni bir kritik funksiya təmin edirsə, onda bu funksiya müntəzəm ən güclü kriteri təyin edir. $\sup [\beta_{\alpha}^*(\theta) - \beta_{\varphi}(\theta)]$ supremumunu min-

mallaşdıran kriteri ən güclü ciddi kriteri adlanır. Bir sıra məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriteri olmadığı hallarda, gücləri, gücün Q. f.-na yaxınlaşan kriteriləri müşahidələr sayını artırıqda almaq olur (bax, *Asimptotik ən güclü kriteri*). Gücün Q. f. və asimptotik ən güclü kriteri arasında fərqi asimptotik qiymətləri asimptotik ən güclü kriteriləri öz aralarında müqayisə etməyə imkan verir.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

QURŞAYICISI, SİQNALIN « огнибающая сигнала; signal envelope » – harmonik rəqsin modulyasiyasını amplitud üzrə xarakterizə edən, mənfi olmayan zaman funksiyasıdır. Məhdud enerjili $x(t)$ signalı üçün S. q. $r(t)$ -ni aşağıdakı kimi təyin etmək olar:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)},$$

burada $\dot{x}(t)$, – $x(t)$ signalının Hilbert çevirməsidir və

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

burada integral onun baş qiyməti mənasında anlaşılır. S. q. anlayışının aydın fiziki mənası vardır və bu anlayış darzolaqlı siqnallar, yəni əsas enerji tezliklər zolağı $[f_0 - F, f_0 + F]$ -də toplanmış siqnallar üçün ($f_0 \gg F$) texniki məsələlərdə tez-tez istifadə olunur. Bəle signal yüksək dərəcədə dəqiqliklə $r(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)]$ şəklində ifadə oluna bilər, burada S. q. $r(t)$ və $\varphi(t)$ fazası f_0 tezliyinin rəqsləri ilə müqayisədə asta dəyişirlər.

Əd.: [1] Р а й с С. О., «Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике», 1982, т. 70, № 7, с. 5–13; [2] Р ы т о в С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976.

QURŞAYICISI, TƏSADÜFİ PROSESİN « огнибающая случайного процесса; envelope of a random process » – bax, *Təsadüfi proses*; kəsilmələr.

QÜVVƏT SIRASI Kolmogorov tənliyinin «степенной ряд уравнения Колмогорова; Kolmogorov equation power series» – bax, *KEPSTR*.

QÜVVƏTÜSTLÜ MOMENTLƏR PROBLEMİ

« степенная проблема моментов; power moment problem » – ehtimal nəzəriyyəsində ξ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri M_{ξ^k} üzrə onun ehtimal *paylanması* P -nin təyin olunma problemidir. $a_0 = 1$, $a_1, a_2, \dots$ ardıcılığının verildiyi fərz olunur:

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(dx)$$

tənliklərini ödəyən, düz xətdə ehtimal ölçüsü P axtanılır.

Bu problemin həlli həmişə mümkün deyildir. Həll olunan Q. m. p.-nin yeganə həlli varsa, o, m ü ə y y ə n, yeganə həlli yoxdursa, q e y r i – m ü ə y y ə n problem adlanır. Problemin həllolunamlılığının zəruri və kafi şərti H a m b u r g e r t e o r e m i d i r: bütün

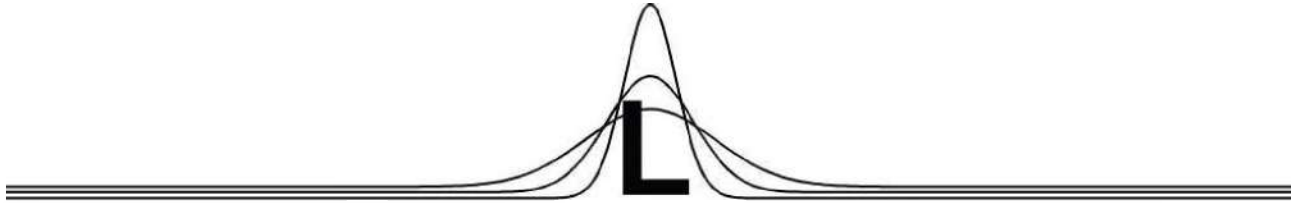
$$\sum_{i,k=0}^n a_{i+k} x_i x_k$$

Hankel (H. Hankel, 1869) formaları mənfi olmamalıdır, $x_i, x_k \in \mathbb{R}^1$.

$$\sum a_{2k}^{-1/2k} = \infty$$

– K a r l e m a n ş e r t i Q. m. p.-nin müəyyən problem olması üçün kafi şərtidir (məs., normal paylanma öz momentləri ilə bir-qiyəmetli təyin olunur). Q. m. p. tipli məsələlərdən ilk dəfə qoyulan və həll olunanlardan biri P. L. Çebışevə məxsusdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Ч е б ы ш е в П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М., 1948; [2] S t i e l t j e s T., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et phys.», 1894, t. 8, p. 1–22; 1895, t. 9, p. 1–47; [3] А х и з е р Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961; [4] Ф е л л е р В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.



LAQ « лаг; lag » – bax, *Ləngimə / gecikmə*.

LAQLAR / PAYLANMIŞ LAQLAR MODELİ

« лагов распределенных модель; distributed lags model » – bax, *Paylanmış gecikmələr modeli*.

LANJEVEN TƏNLİYİ « Ланжевена уравнение; Langevin equation » – zamanın sürətlə dəyişən, təsadüfi funksiyası daxil olan differensial tənlikdir.

Kütləsi m olan müvafiq çəkili hissəciyin hərəkətini mayede müşahidə edən P. Lanjeven [1]-də fərz etmişdir ki, bu hissəciyə iki qüvvə təsir edir:

1) özlü sürtünmə hesabına ləngidici qüvvə: makroskopik hidrodinamikanın nəticəsi tətbiq olunduqda, bu qüvvə $-6\pi a\eta \frac{dx}{dt}$ -yə

bərabərdir, burada $x(t)$ – hissəciyin vəziyyəti, t – zaman, η – özlülük, a – sferik olduğu fərz edilən hissəciyin diametridir;

2) dəyişdirici (fluktuasion) qüvvə $X(t)$; bu qüvvə mayenin molekulları tərəfindən sabit nöqtələrlə şərtləndirilmiş qüvvədir, eyni ehtimalla müsbət və ya mənfi ola bilər. Nyuton qanununa əsasən,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi a\eta \frac{dx}{dt} + X(t). \quad (*)$$

(*) tənliyi (Lanjeven tənliyi) stoxastik differensial tənliyə ilk misaldır. (*)-nu $x(t)$ -yə vuraraq, statistik mexanikaya əsasən, nəzərə alaraq ki,

$$\mathbf{M} \frac{1}{2} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} kT$$

doğrudur (T – mütləq temperatur, k – Boltsman sabitidir) və « $X(t)$ kəmiyyətinin qeyri – rəqulyarlığına » görə $\mathbf{M} X(t)x(t) = 0$ olduğunu qəbul edərək, P. Lanjeven $\mathbf{M} x^2(t)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliyi almışdır:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} x^2(t) = \frac{kT}{3\pi\eta a} + C \exp\left\{-6\pi a\eta \frac{t}{m}\right\},$$

$$C = \text{const.}$$

40 il sonra K. İto (K. Itô) stoxastik differensial tənliklərin ciddi konsepsiyasını vermişdir. L. t.

$$dY(t) = -\gamma Y(t)dt + dw(t)$$

tipli xətti ($\frac{dx}{dt}$ üçün) stoxastik differensial tənlikdir, burada

$w(t)$ – standart Viner prosesidir. Bu tənliyin həlli

$$Y(t) = e^{-\gamma t} \left(Y(0) + \int_0^t e^{\gamma s} dw(s) \right)$$

Omşteyn – Ulenbek prosesi kimi məlumdur. $Y(t)$ prosesinin kovariasiyası

$$\mathbf{M} Y(t)Y(s) = (\sigma^2 + 1/2\gamma) e^{-\gamma(t+s)} + e^{-\gamma(t-s)}/2\gamma, \quad t \geq s$$

düsturu ilə ifadə olunur və fərz olunur ki, $Y(0)$, – $(0, \sigma^2)$ parametrləri Gauss paylanması ilə paylanmışdır.

Əd.: [1] Lanjevin P., «C. r. Acad. sci.», 1908, t. 146, p. 530–33 (rus. per. – Ланжевен П., Избранные труды, М., 1960, с. 338–41); [2] Г ар д и н е р К. В., Стохастические методы в естественных науках, пер. с англ., М., 1986; [3] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

LAPLAS METODU « Лапласа метод; Laplace

method » – $t \rightarrow \infty$ olduqda $\int_a^b F_t(x)dx$ tipli inteqrallar üçün

asimptotikaya əsas əlavələri inteqrallı funksiyanın yalnız maksimum nöqtəsinin kiçik ətrafı verildiyi halda nəticənin yaxşı olmasını təmin edən asimptotik düsturların çıxarılması üçün üsullar toplusudur. L. m.-nun tətbiqi üçün inteqrallı funksiyanın maksimum nöqtəsinin ətrafında araşdırmalar aparılmalı və bu ətrafın tamamlayıcısı üzrə inteqral qiymətləndirilməlidir.

Asimptotik ayrılışa aid misallar (bax, [1]): 1) əgər $\phi(x)$, – $(-a, a)$ parçasının nöqtələrində rəqulyar, analitik funksiya olarsa, onda

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_{-a}^a \phi(x) e^{-tx^2} dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(2n)}(0)}{n! 2^{2n}} t^{-n}, \quad t \rightarrow \infty;$$

2) əgər $\phi(x)$, – $(0, a]$ yarımintervalının nöqtələrində rəqulyar, analitik funksiya olarsa və $\alpha > -1$ olduqda $x = 0$ nöqtəsinin sağ ətrafında $\phi(x) = x^\alpha (a_0 + a_1 x + \dots)$ olarsa, onda

$$\int_0^a \phi(x) e^{-tx} dx \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{t^{n+\alpha}} a_{n-1}, \quad t \rightarrow \infty.$$

L. m.-ndan istifadə etmək üçün inteqrallı funksiyanın xassələri haqqında olduqca ətraflı informasiyaya malik olmaq zəruridir. L. m. xarakteristik funksiyalar metodunun əsas hissəsinə təşkil edir; məs., bu metoddan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərinin isbatında istifadə olunur.

Əd.: [1] Е в г р а ф о в М. А., Асимптотические оценки и целые функции. 3 изд., М., 1979.

LAPLAS PAYLANMASI « Лапласа распределение; Laplace distribution » – *ikiölçülü üstlü paylanmanın digər ifadəsidir*. İlk dəfə P. Laplas tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur və bəzən *normal qanun* «Laplasın ikinci paylanma

qanunu»ndan fərqli olaraq, əksər hallarda «Laplasın birinci paylanma qanunu» kimi də adlandırılır.

Əd.: [1] L a p l a c e P., Theorie analytique des probabilités, P., 1812.

LAPLAS TEOREMİ « Лапласа теорема; Laplace theorem » – binomial paylanmanın normal paylanma ilə approksimasiyası haqqında teoremdir; mərkəzi limit teoreminin birinci variantıdır. P. Laplas 1812-də A. Muavrdan (A. Moivre, 1730) asılı olmadan isbat etmişdir. Bax, Muavr – Laplas teoremi.

LAPLAS – QAUSS PAYLANMASI « Лапласа – Гаусса распределение; Laplace – Gausse distribution » – bax, Qauss – Laplas paylanması.

LATIN ALTKVADRATI « латинский подквадрат; Latin subsquare » – bax, Latin kvadrati.

LATIN DÜZBUCAQLISI « латинский прямоугольник; latin rectangle » – $(m \times n)$, $(m \leq n)$ – ölçülü ele düzbucaqlı matrisdir ki, onun hər bir sətri n elementdən ibarət S çoxluğunun elementlərindən təşkil olunmuş yerdeyişmədir (təkrarsız) və sütunlarda hər bir element bir dəfədən artıq təkrar olunmur. $m = n$ olduqda L. d. – n tərtib latin kvadratıdır. Adətən, $S = (1, 2, \dots, n)$ götürülür və L. d. haqqında deyilir ki, o, S çoxluğunda qurulmuşdur.

İxtiyari natural m, n ($m \leq n$) qiymətlərində L. d. mövcuddur. L. d.-na misal birinci sətri $(1, 2, \dots, n)$ olan, sonrakı bütün sətriləri isə evvelkindən bir addıma tsiklik yerindəyişmə ilə alınan matrisdir. $(m < n)$ ($m \times n$) – ölçülü L. d.-nı n tərtib latin kvadratına qədər ele doldurmaq olar ki, latin kvadratının birinci m sətri L. d.-nin sətriləri ilə eyni olsun.

$(m \times n)$ – ölçülü L. d.-nin sayı $L(m, n)$ üçün aşağıdakı qiymət doğrudur:

$$L(m, n) \geq n! (n-1)! \dots (n-m+1)!$$

L. d.-nin birinci sətri $(1, 2, \dots, n)$ olarsa, o, n o r m a l l a ş d ı r ı l ı m ı ş L. d. adlanır. Normallaşdırılmış L. d.-nin sayı $K(m, n)$, $L(m, n)$ ədədi ilə

$$L(m, n) = n! K(m, n)$$

münasibətilə bağlıdır.

$L(m, n)$ -nin hesablanması klassik kombinatorika məsələləri ilə bağlıdır: məs., ailələr sayı və nizamsızlıqlar sayı kimi. Məs., nizamsızlıqlar sayı $D_n = K(2, n)$ və ailələr sayı haqqında məsələdə yerdeyişmələr sayı U_n , $-(3 \times n)$ – ölçülü L. d.-dir və bu matrisin birinci iki sətri mehz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

olur. U_n üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2k}{2k-1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) (n-k)!,$$

$$U_n \sim n! e^{-2} \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2!(n-1)_2} - \dots + \frac{(-1)^k}{k!(n-1)_k} + \dots \right),$$

$$(m)_k = m(m-1) \dots (m-k+1).$$

$K(3, n)$ ədədi D_k və U_l vasitəsilə ifadə olunur:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^m C_n^k D_{n-k} D_k U_{n-2k},$$

burada $m = [n/2]$, $U_0 = 1$. Aşağıdakı asimptotik ifadə də doğrudur:

$$K(3, n) \sim (n!)^2 e^{-3} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2!(n)_2} - \dots + \frac{bs}{s!(n)_s} + \dots \right),$$

burada $b_s = H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ – Hermit çoxhədlisidir. Məlumdur ki,

$$K(3, r+s) = 2^r K(3, s) \pmod{r}.$$

Sətrlərinin sayı üçdən artıq olan L. d.-nin hesablanma məsələsi həll olunmamışdır. $m < n^{4/3-\delta}$ olduqda, burada $\delta = \delta(n) \rightarrow +0$ münasibəti $n^{-\delta(n)} \rightarrow 0$ olduqda ödənilir və bu halda

$$L(m, n) \sim (n!)^m \exp \left\{ -\frac{m(m-1)}{2} \right\}$$

asimptotikası alınmışdır.

L. d. üçün Latin kvadratları ilə bağlı bezi anlayışlar və teoremlər vardır. Məs., $(m \times n)$ ölçülü $\|a_{ij}\|$ və $\|b_{ij}\|$ L. d.-ları, əgər (a_{ij}, b_{ij}) cütlərinin hamısı müxtəlif olarsa, o r t o q o n a l L. d.-ları adlanır. İxtiyari iki L. d.-sı ortoqonal olan L. d.-ları çoxluğunda L. d.-lərinin sayı $m-1$ -dən artıq deyildir.

Əksər hallarda L. d. kimi aşağıdakı L. d.-nin ü m u m i l e ş m ə s i anlaşılr: n elementdən ibarət, S çoxluğunda qurulmuş, hər bir sətri və hər bir sütununda elementləri bir dəfədən artıq iştirak etməyən $(r \times s)$ – ölçülü matrisə $(r \times s)$ – ölçülü l a t i n d ü z b u c a q l ı s ı deyilir. n simvolu üzərində qurulmuş $r \times s$ ölçülü L. d. n tərtib Latin kvadratına qədər, yalnız və yalnız o halda genişləndirilə bilər ki, L. d.-da hər bir simvol $r+s-n$ dəfədən az olmayaraq iştirak etsin.

Əd.: [1] Р о р д а н Д ж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *Latin kvadratı* məqaləsindəki əd.-lə bax.

LATIN KUBU « латинский куб; Latin cube » s – ölçülü birinci tərtib – s sayda müxtəlif simvollarıdan ibarət $s > 1$ tərtib üçölçülü ele matrisdir ki, onun ixtiyari $3s$ sayda ikiölçülü kəsiklərində hər bir simvol yalnız s dəfə iştirak edir. İkinci tərtib s – ölçülü L. k. s^2 sayda müxtəlif simvollarıdan ibarət s tərtib üçölçülü ele matrisdir ki, onun ixtiyari $3s$ sayda ikiölçülü kəsiklərində hər bir simvol yalnız bir dəfə iştirak edir. s – ölçülü birinci (ikinci) tərtib L. k. s^3 sayda ölçmə aparılması üçün dördfaktorlu eksperimentin planına uyğundur: ilk üç faktor s səviyyədə, dördüncü faktor isə L. k.-nın tərtibində asılı olaraq s və ya s^2 səviyyədə qiymətlər alır. Belə uyğunluq

o halda alınır ki, (i, j, k) -ci ölçmədə birinci faktor i -ci səviyyədə, ikinci – j -ci, üçüncü – k -ci, dördüncü faktor isə L . k.-nin (i, j, k) -ci yerindəki simvolla təyin olunaraq qeyd olunsunlar. Eksperimentin planlaşdırılmasında ortoqonal L . k.-lərindən də istifadə olunur (bax, *Ortoqonal kublar*).

Əd.: [1] Маркова Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979.

LATIN KVADRATI « латинский квадрат; Latin square » – hər bir setri və hər bir sütunu n elementdən ibarət sonlu S çoxluğunun elementlərinin yerdəyişmələri olan, n tərtib kvadrat matrisidir; bu halda L . k. S çoxluğunda qurulmuşdur, deyilir. Adətən, $S = \{1, 2, \dots, n\}$. İxtiyari n üçün L . k. vardır; məs., elementləri $a_{ij} \equiv i + j - 1 \pmod{n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olan

$L = \|a_{ij}\|$ matrisi L . k.-dir.

Hər bir L . k.-na kvazigrupun vurma cədvəli kimi baxmaq olar və əksinə, sonlu kvazigrupun vurma cədvəli – L . k.-dir.

n tərtib $L_1 = \|a_{kl}\|$ və m tərtib $L_2 = \|b_{rs}\|$ L . k.-lər üzrə $m \cdot n$ tərtib $L = \|\lambda_{ij}\|$ L . k.-ni aşağıdakı kimi qurmaq olar: $\lambda_{ij} = b_{rs} + (a_{kl} - 1) \cdot m$, $i = r + m(k - 1)$, $j = s + m(l - 1)$. n tərtib L . k.-nin sayı L_n -lər üçün aşağıdakı qiymətləndirilmə

$$L_n \geq n! (n-1)! \dots 2! 1!$$

berəbersizliyi ilə təyin olunur.

L . k.-nin birinci setir və birinci sütun elementləri natural qaydada yerləşərsə, L . k.-na redüslənmiş və ya standart növ L . k. deyilir.

n tərtib redüslənmiş L . k.-lərinin sayı L_n -lər üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$L_n = n! (n-1)! \dots 1!$$

$$l_n \geq m_n = (n-2)! (n-3)! \dots 2! 1!.$$

Eyni S çoxluğunda qurulmuş iki L . k.-dan biri digərinin setir və sütunlarının yerlərinin dəyişdirilməsi və elementlərinin işarələmələrinin dəyişdirilməsi nəticəsində alınarsa, onlar ekvivalent L . k.-lər adlanır. n tərtib L . k.-nin ekvivalentlik sinifləri sayı k_n olsun. l_n , k_n və m_n -in ilk qiymətləri məlumdur:

n	3	4	5	6	7	8
k_n	1	2	2	22	563	1 676 257
l_n	1	4	56	9 408	16 942 080	535 281 401 856
m_n	1	2	12	288	34 560	24 883 200

Bundan başqa, $l_9 = 377 597 570 964 258 816$. l_n -lərin qiymətləndirilməsi məsələsi həll olunmamışdır.

Eksperimentləri planlaşdırma nəzəriyyəsində elementlərinin yerləşdirilməsinə müxtəlif məhdudiyyətlər qoyulmuş L . k.-lər qurmaq tələb olunur. Əgər $\alpha \neq \beta$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ şərtlərini ödəyən ixtiyari natural α, β ədədləri üçün i, j, k, l varsa ki, $(a_{ij}, a_{i,j+1}) = (\alpha, \beta)$ və $(a_{kl}, a_{k+1,l}) = (\alpha, \beta)$ olsun, onda L . k.-na tam L . k. deyilir. Tam L . k.-nin qurulması alqoritmləri n -in yalnız cüt qiymətləri üçün və n -in bəzi tək qiymətləri üçün məlumdur.

n tərtib L . k.-nin $k < n$ şərtini ödəyən k tərtib altmatrisinə onun *Latin altkvadratı* deyilir.

İxtiyari k tərtib L . k., $n \geq 2k$ olarsa, n tərtib L . k.-nin Latin altkvadratı ola bilər. n tərtib iki $L_1 = \|a_{ij}\|$ və $L_2 = \|b_{ij}\|$ L . k.-lər üçün $(i, j) \neq (k, l)$, $i, j, k, l \in S$ olduqda $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl})$ olarsa, onlara *ortoqonal Latin kvadratları* deyilir. Ortoqonal L . k.-nin qurulmasında L . k.-nin transversalı anlayışı mühüm rol oynayır. $L = \|a_{ij}\|$ L . k.-nin t uzunluqlu natamam transversalı L . k.-nin t sayda blokundan ibarət T çoxluğuna deyilir ki,

$$T = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_t, j_t)\}.$$

olsun, burada $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq t$ olduqda, $i_k \neq i_l$, $j_k \neq j_l$, $a_{i_k j_k} \neq a_{i_l j_l}$. Həmişə $t \leq n$; $t = n$ olduqda isə *natamam transversal* adlanır. n sayda kəsişməyən transversallar çoxluğunun n tərtib L . k.-nin varlığı üçün onun ortoqonal həmkvadratının varlığı zəruri və kafi şərtir. Aşağıdakı 6 tərtib L . k.-nin heç bir transversalı yoxdur:

012	345
120	453
201	534
345	012
453	120
534	201

$n \geq 7$ tərtib ixtiyari L . k.-da uzunluğu $t \geq (2n+1)/3$ münasibətilə təyin olunan heç olmazsa bir natamam transversal vardır.

L . k.-nin bəzi ümumiləşmələri.

n tərtib natamam L . k. n tərtib matrisə deyilir ki, onun qəfələrinin yalnız bir hissəsi gücü n -ə bərabər S çoxluğunun elementləri ilə doldurulmuşdur. lakin hər setir və hər bir sütunda S -in elementlərinə bir dəfədən artıq təsadüf olunmur.

Elə natamam L . k.-lər vardır ki, onları L . k.-na qədər tamamlamaq mümkün deyildir, məs.,

1	.	.	.
.	2	3	4
.	.	.	.
.	.	.	.

Yalnız $n-1$ elementdən ibarət natamam L . k.-ni L . k.-na qədər tamamlamaq mümkündür.

Məlumdur ki, n tərtib iki müxtəlif qrupun iki kəli cədvəli bir-birindən heç olmazsa $2n$ yerə fərqlənirlər. Elementləri natural ədədlər olan və hər bir setir və hər bir sütununda bu elementlərin yalnız bir dəfə təsadüf olunduğu sonsuz matrisə *sonsuz L . k.* deyilir.

Əd.: [1] Denes J., Keedwell A. D., Latin squares and their applications, Bdpst., 1974; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Райзер Г. - Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [4] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

LAY «с.лой; stratum» – bax, *Seçimi statistik araşdırma*.
LAYLANMIŞ SEÇİM «расслоенная выборка; stratified sample» – müəyyən fərqləndirici əlamətlərinə görə kiçik həcmli bir neçə seçimlərə ayrılmış *seçimdir*. Fərz olunur ki, $N \geq 2$ həcmli seçimin hər bir elementi $k \geq 2$ sayda mümkün əlamətlərdən, yalnız və yalnız birinə malikdir. Bu halda, ilkin seçimi müvafiq surətdə, $n_1, \dots, n_k$ həcmli k sayda seçimlərə ayırmaq olar ($n_1 + \dots + n_k = N$):

$$\begin{aligned} &X_{11}, \dots, X_{1n_1} \\ &X_{21}, \dots, X_{2n_2} \\ &\dots\dots\dots \\ &X_{k1}, \dots, X_{kn_k} \end{aligned}$$

və bu bölgü belə prinsipə həyata keçirilir: i -ci $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ seçiminə yalnız i əlamətli elementlər aid olunur. Belə bölgü nəticəsində ilkin seçim k sayda $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$, $i = 1, \dots, k$ laylarına ayrılır və məhz i -ci lay i -ci əlamət haqqında informasiya daşıyır. Məs., ikinci Y komponenti diskret paylanmaya malik ikiölçülülük (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinin X komponentinin realizasiyalarını müşahidə etdikdə L s. anlayışı alınır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

LAYLI SEÇİM METODU «слюистой выборки метод; stratified sampling method» – inteqralları hesablanması üçün *Monte – Karlo metodu*nda istifadə olunan qaydadır, bu qaydaya görə inteqrallama oblası əvvəlcədən $\{D_i\}$ hissələrinə bölünür, hər bir i -ci hissə üçün təsadüfi n_i düynləri üzrə inteqralın özünün statistik qiyməti qurulur; $i = 1, \dots, m$. İnteqral üçün alınmış yekun statistik qiymətlərin dispersiyasını minimallaşdıran və ya sadə Monte – Karlo metodu ilə müqayisədə heç olmazsa dispersiyanı kiçikdən $\{n_i\}$ qiymətlərini təyin etmək olur (bax, [1]). İnteqral tənliklərin həlli üçün laylı seçim [2]-də işlənmişdir.

Əd.: [1] С о б о л ь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] М и х а й л о в Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте – Карло, Новосиб., 1974.

LEBEQ AYRILIŞI «Лебега разложение; Lebesgue decomposition», F paylanma funksiyasının Lebeq ayrılışı – F paylanma funksiyasının üç paylanma funksiyasının xətti kombinasiyasının

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3 \quad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadəsi olub, ehtimal nəzəriyyəsində ənənəvi istifadə olunan ayrılışdır, burada $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ şərtlərini ödəyən p_i -lər – sabitlər, F_i – paylanma funksiyalarıdır. Belə ki, bu halda F_1 – diskret (yəni F_1 funksiyasının ölçü daşıyıcısı $\text{supp } F_1$ – gücü hesabından çox olmayan çoxluq), F_2 – sinqulyar (yəni $\text{supp } F_2$ – Lebeq ölçüsü sıfıra bərabər hesabı olmayan çoxluq), F_3 – mütləq kəsilməz (yəni paylanmasının sıxlıq funksiyası olan) paylanma funksiyalarıdır. İxtiyari F funksiyası üçün (*) ayrılışı yeganədir.

536 LEBEQ

Ölçü nəzəriyyəsində $p_1 F_1 + p_2 F_2$ xətti kombinasiyaları sinqulyar adlanır. Lebeq ölçüsü əvəzinə (*) ayrılışını yazmaq üçün düzxətdə təyin olunan digər ölçülərdən istifadə etmək olar (bax, [1], səh. 169). (*) ayrılışı ölçülərin ayrılması haqqında ümumi Lebeq teoremindən alınır (bax, [2], səh. 134). Müxtəlif təbiətli fəzalarda ehtimal paylanmaları üçün (*)-ya analoji ayrılışlar mövcuddur (Evklid, Hilbert, Banax fəzalarında və s.).

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

LEBEQ ÖLÇÜSÜ «Лебега мера; Lebesgue measure» – bax, *Ölçü*.

LEBEQ TEOREMİ «Лебега теорема; Lebesgue theorem» – bax, *Borel funksiyası*.

LEBOVİTS BƏRABƏRSİZLİYİ «Левовица неравенство; Lebowitz inequality» – bax, *Korrelyasion bərabərsizliklər*.

LEKSİKOQRAFİK MÜNASİBƏT «лексикографическое отношение; lexicographem» – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

LEMAN – ŞEFFE TEOREMİ «Лемана – Шеффе теорема; Lehmann – Scheffé theorem» – bax, *Oxşar kriteri*.

LENARD – CONS POTENSİALI «Ленард – Джонса потенциал; Lenard – Jones potential» – bax, *Potensial(ı) Gibbs meydanının*.

LEVENBERQ – MARKVARDT METODU «Левенберга – Марквардта метод; Levenberg – Marquardt method / algorithm» – ən kiçik kvadratlar metodu əsasında qeyri – xətti ölçmə modellərində parametrlərin qiymətləndirilməsi üçün hesablama praktikasında ən çox yayılmış metodlardan biridir.

Fərz olunur ki, n – ölçülü $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ ölçmələr vektoru tamamilə müəyyən, lakin naməlum parametrlərin p – ölçülü $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ vektoru ilə

$$Y = F(\theta) + \varepsilon$$

münasibətilə əlaqəlidir, burada F – məlum $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ differensiallanan inikasıdır, ε , – F inikasının koordinat funksiyaları $f_i(\theta)$ -lərin ölçmələrinin asılı olmayan təsadüfi xətlərinin vektorudur. Fərz olunur ki, $\hat{\theta}^{(k)}$ yaxınlaşması məlumdur; regressiya funksiyası F -i $\hat{\theta}^{(k)}$ ətrafında xətti hədlərinə qədər Teylor sırasına ayıraraq, xəttiləşdirilmiş regressiya almaq olur, yəni

$$Y = F(\hat{\theta}^{(k)}) + P_k(\theta - \hat{\theta}^{(k)}), \quad P_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}^{(k)}) \right)_{i \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{R}^p} \quad (1)$$

(1) xəttiləşdirilmiş regressiyasına ən kiçik kvadratlar metodunu tətbiq etdikdə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti üçün aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunan qiymət alınır:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + (P_k^T P_k)^{-1} P_k^T (Y - F(\hat{\theta}^{(k)})) \quad (2)$$

Alınan rekurrent prosedur çox vaxt Q a u s s – N y u t o n m e t o d u adlandırılır. Bu prosedurun yığılma şərtləri (bax, [1], [2]) və başlanğıc yaxınlaşmanın seçilməsi araşdırılır; bununla

əlaqədar yaranan hesablamada çətinliklərinin ən çoxu $P_k^T P_k$ matrisinin yaxşı şərtləndirilməməsi mümkünlüyü ilə bağlı olur. Metodun modifikasiyası (2)-də çevirmə işarəsi altında bu matrisin $(P_k^T P_k + \mu I)$ matrisi ilə (bax, [3]) və ya

$$(P_k^T + P_k + \mu_k D_k)$$

matrisi ilə əvəzlənməsi ilə alınır, burada

$$D_k = \text{diag}(P_k^T P_k)$$

və bu matris rəqularizasiya parametri μ_k -nin növbəti idarə olunması ilə götürülür (bax, [4]). Adətən, $\mu_k \approx 0,01$ qəbul olunur, sonra μ_k tədricən 0-a qədər kiçildir. μ_k parametrinin daha mürekkəb idarə olunma sxemləri [3], [4]-də verilir. Bu metodun əsas ideyası *yalvarı (ridc) rəqressiya* və *Ceyms – Steyn statistik qiymətlər* ideyalarna yaxındır.

Əd.: [1] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М., 1981; [2] Бард Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [3] Демиденко Е. З., Нелинейная регрессия, в кн.: Математические методы решения экономических задач, сб. 7, М., 1977; [4] Marquardt D. W., «J. Soc. Industry. Appl. Math.», 1963, v. 11, p. 431–44; [5] Levenberg K., «Quarterly Appl. Math.», 1944, v. 2, p. 164–68; [6] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989.

LEVİ AYRILIŞI asılı olmayan artımlı təsadüfi proseslərin « **Левы разложение случайных процессов с независимыми приращениями; Lévy decomposition of random process with independent increments** » – asılı olmayan artımlı *təsadüfi prosesin* təsadüfi olmayan funksiya, asılı olmayan artımlı diskret təsadüfi proses və asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz təsadüfi prosesin cəmi şəklində ifadəsidir.

Əd.: [1] Lévy P., «Ann. scuola norm. sup. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1934, v. 3, p. 337–66; 1935, v. 4, p. 217; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

LEVİ BƏRABƏRSİZLİYİ « **Левы неравенство; Lévy inequality** » – 1) L. b. medianları ilə mərkəzlənmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin maksimumunun paylanması üçün. $X_1, \dots, X_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ və $mX_k - X_k$ təsadüfi kəmiyyətinin medianı olsun, onda ixtiyari t üçün

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} (S_k - m(S_k - S_n)) \geq t \right\} \leq 2P \{ |S_n| \geq t \}$$

və

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - m(S_k - S_n)| \geq t \right\} \leq 2P \{ |S_n| \geq t \}$$

L. b.-likləri doğrudur. Bu bərabərsizliklərin bilavasitə nəticəsi simmetrik paylanmış $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq t \right\} \leq 2P \{ S_n \geq t \}$$

və

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t \right\} \leq 2P \{ S_n \geq t \}$$

L. b.-ləridir.

L. b.-ni P. Levi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının yığılmasının ümumi problemlərini öyrənərkən almışdır (bax, [1]). L. b.-nin ele ümumiləşmələri vardır ki, burada mərkəzləyici konstantlar əvəzinə uyğun kvantillər götürülmüşdür (bax, [2]), ele ümumiləşmələri də vardır ki, burada L. b. asılı $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri ilə bağlıdır.

2) L. b. özlərinin medianları ilə mərkəzlənmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumunun paylanması üçün. P. Levi tərəfindən verilmiş ([3]-də) və B. A. Roqozin tərəfindən ([4]-də) bərabərsizliyə daxil olan konstantların dəqiqləşdirilməsi ilə ciddi isbat olunmuşdur. L. b. dəqiqləşdirilmiş variantda aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |X_k - mX_k| > t \right\} \leq 8P \{ |S_n - mS_n| \geq t/4 \},$$

burada $X_1, \dots, X_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, mX_k , – X_k təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır. Əgər $X_1, \dots, X_n$ simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > t \right\} \leq 2P \{ |S_n| > t \}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

3) L. b. təsadüfi elementlər üçün – simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün klassik L. b.-ni vektor fəzalarında təsadüfi elementlərə genişləndirən bərabərsizlikdir. Bu bərabərsizlik ilk dəfə [5]-də J. P. Kaxan tərəfindən Banax fəzalarında təsadüfi sıraların öyrənilməsi ilə bağlı alınmışdır. Daha ümumi şəkildə o, aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [6]). $X_1, \dots, X_n$ – ölçülən $(E, \mathcal{B})$ fəzasında asılı olmayan simmetrik təsadüfi elementlər, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ olsun. Onda $C + C \in \mathcal{B}$ şərtini ödəyən ixtiyari $C \in \mathcal{B}$ çoxluğu üçün

$$P \left\{ \bigcup_{k=1}^n (S_k \notin (C+C)/2) \right\} \leq 2P \{ S_n \notin C \},$$

$$P \left\{ \bigcup_{k=1}^n (X_k \notin (C+C)/2) \right\} \leq 2P \{ S_n \notin C \}$$

bərabərsizlikləri doğrudur. Bu bərabərsizliklərdən alınır ki, ixtiyari $\mathcal{B}$ – ölçülən $\|\cdot\|$ yannorması üçün L. b. doğrudur, yeni

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \|S_k\| > t \right\} \leq 2P \{ \|S_n\| > t \},$$

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \|X_k\| > t \right\} \leq 2P \{ \|S_n\| > t \}.$$

Bu bərabərsizliklər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi elementlərinin asılı olmazlıqları tələbinin bir qədər zəiflədilmiş halı üçün də ödənilir. Banax fəzalarında təsadüfi elementlər üçün $X_1, \dots, X_n$ -lərin simmetrikliyi fərz olunmadığı halda L. b.-nin ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 ed., P., 1954; [2] Петров В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 1, с. 140 – 44; [3] Lévy P., «Bull. sci. math.», 1953, т. 77, p. 9 – 40; [4] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 4, с. 701 – 07; [5] Кяхан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973.

LEVİ İNİKASI « Леви отображение; Lévy mapping » – bax. *Kanonik ifadə(s)i* ölçülərin konvolusion semi-gruplarının.

LEVİ KANONİK İFADƏSİ « Леви каноническое представление; Lévy canonical representation » – sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik $f(t)$ funksiyaları üçün P. Levi tərəfindən aşkar surətdə tapılmış (bax, [1]) ifadədir:

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma - \sigma^2 t^2/2 + \int_{x \neq 0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) dH(x) \right\}. (*)$$

Bu düsturda hər bir sonsuz bölünən paylanmaya özünün $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 \geq 0$ qiymətləri və spektral Levi funksiyası $H(x)$ uyğundur, bu funksiya aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) $x < 0$, $x > 0$ yarımxlarında azalmayıdır;
- 2) $|x| \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır;
- 3) $\int x^2 dH(x) < \infty$, $0 < x^2 \leq 1$.

Bezen H funksiyasına $M(x) = H(x)$, $x < 0$ və $N(x) = H(x)$, $x > 0$ kimi iki funksiya ilə ifadə olunan bir funksiya kimi də baxılır ki, bu funksiyalar yarımxların tamamlayıcılarında sıfıra bərabər götürülür. Bu halda $H = M + N$.

Daha ümumi təbiətə malik fəzalarda sonsuz bölünən paylanmalar üçün də L. k. i.-nin analoqları vardır (məs., Evklid, Hilbert fəzalarında və s.). Bax, *Levi – Xinqin kanonik ifadəsi*.

Əd.: [1] Lévy P., «Ann. scuola norm. sup. Pisa», ser. 2, 1934, v. 3, p. 337–66; [2] Колмогоров А. Н., Гнеденко Б. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Parthasarathy K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967.

LEVİ KANONİK İFADƏSİ В банах фəzasında « Леви каноническое представление в банаховом пространстве; Lévy canonical representation in Banach space » – B Banax fəzasında sonsuz bölünən ν paylanmasının xarakteristik funksionalının aşağıdakı kimi verilən ifadəsidir:

$$\hat{\nu}(f) = \exp \left\{ if(x_0) - \frac{1}{2} \Phi(f, f) + \int_B h_\tau(f, x) \mu(dx) \right\}.$$

Burada $f \in B^*$, $x_0 \in B$, Φ – Qauss kovariasiyasıdır,

$$h_\tau(f, x) = \exp\{if(x)\} - 1 - if(x) \mathbf{I}_{\{\|x\| < \tau\}}(x) \quad (*)$$

$\mathbf{I}(x)$, – A çoxluğunun indikator funksiyası, μ – Lebeq ölçüsüdür, yeni B -də ele σ – sonlu ölçüdür ki, hər hansı $\tau > 0$ üçün $\exp\left\{\int h_\tau(f, x) \mu(dx)\right\}$ B -də hər hansı ehtimal ölçüsünün xarakteristik funksionalıdır. Sonluölçülü fəzada Φ ixtiyari simmetrik mənfi olmayan müəyyən kvadratik forma, μ evezinə

$$\int \min(1, \|x\|^2) \mu(dx) < \infty$$

şərtini ödəyən ölçü götürülə bilər.

Ümumi Banax fəzasında bu belə olmur. İndiki zamana qədər Qauss kovariasiyası və Levi ölçüsünün tam təsviri yoxdur.

Əd.: [1] Araujo A., Giné E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980; [2] Linde W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983.

LEVİ METRİKASI « Леви метрика; Lévy metric » – heqiqi X təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathcal{F}$ çoxluğunda və ya onların uyğun F_X paylanma funksiyalarının $\mathcal{F}$ çoxluğunda

$$L(X, Y) = L(F_X, F_Y) =$$

$$= \inf \{ \varepsilon : F_X(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_Y(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \varepsilon, x \in \mathbb{R}^1 \}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan adi *ehtimal metrikasıdır*. [1]-də P. Levi tərəfindən daxil olunmuşdur, $\mathcal{F}$ -də paylanmaların zəif yığılma topologiyasını doğurur. L. m.-nin tərfi dəyişilmədən $\mathbb{R}^1$ -də azalmayan bütün mümkün funksiyaların çoxluğu M -ə köçürülür (bu halda metrikanın sonsuz qiymətləri istisna olunmur).

$\mathcal{F}$ -də L. m.-nin mühüm xassələri aşağıdakılardır:

1) $(\mathcal{F}, L)$ metrik fəzası separabel və tam fəzadır.

2) əgər $F \in M$ və $F^{-1}(x) = \inf \{ t : F(t) < x \}$ olarsa, onda ixtiyari $F, G \in M$ üçün $L(F, G) = L(F^{-1}, G^{-1})$ bərabərliyi doğrudur.

3) L. m. kompozisiya və paylanma funksiyalarının hasilə eməllərinə nəzərən reqlulyar metrikadır, bu da L -in semiadditivliyinin uyğun xassələri ilə eynigüclüdür: X_i, Y_i asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ixtiyari cütü üçün

$$L(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \leq L(X_1, X_2) + L(Y_1, Y_2),$$

$$L(\max(X_1, Y_1), \max(X_2, Y_2)) \leq L(X_1, X_2) + L(Y_1, Y_2)$$

münasibətləri doğrudur.

4) əgər $\alpha_k \geq 0$ və $F_k, G_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2, \dots$ olarsa, onda

$$L\left(\sum_k \alpha_k F_k, \sum_k \alpha_k G_k\right) \leq \max\left(1, \sum_k \alpha_k\right) \max_k L(F_k, G_k)$$

berabersizliyi doğrudur.

5) ixtiyari $r > 0$ və ixtiyari X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$L(X, 0) \leq (M|X|^r)^{1/r}$$

berabersizliyi doğrudur.

6) $L(F, G)$ L. m.-nin $\rho(F, G)$ *müntəzəm metrikası* ilə əlaqəsi

$$L \leq \rho \leq L + \min\{Q_F(L), Q_G(L)\}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $Q_F(x)$, – $F \in \mathcal{F}$ funksiyasının konsentrasiya funksiyasıdır. G paylanmasının sıxlıq funksiyasının varlığı halında bu münasibətin nəticələrindən biri aşağıdakı berabersizlikdir:

$$\rho \leq \left(1 + \sup_x G'(x)\right) L,$$

digəri – limit paylanması kəsilməz olarsa, paylanmaların zəif və müntəzəm yığılmalarının ekvivalentliyi haqqında məlum teoremdir.

7) Levi – Proxorov metrikləsi π ilə π_1 orta metrikləsi arasında əlaqə

$$L \leq \pi \leq \sqrt{\pi_1}$$

berəbersizlikləri ilə ifadə olunur.

8) ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri və $a \in \mathbb{R}^1, b > 0$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\begin{aligned} L(X+a; Y+a) &= L(X, Y), \\ L(bF_X, bF_Y) &\leq bL(X/b, Y/b), \\ \lim_{b \rightarrow 0} L(X/b, Y/b) &= \rho(X, Y) \\ \lim_{b \rightarrow 0} bL(X/b, Y/b) &= \rho(F_X^{-1}, F_Y^{-1}). \end{aligned}$$

9) eger $f_X, -X$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiya-sıdırsa, onda ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətlər cütü və ixtiyari $T > 0$ üçün

$$L(X, Y) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^T |f_X(t) - f_Y(t)| \frac{dt}{t} + 5.66 \frac{\ln(1+T)}{T}$$

berəbersizliyi doğrudur, belə ki, ikinci toplanandakı loqarifmik vuruqdan ümumi halda azad olmaq mümkün deyil (bax, [6]).

Çoxölçülü fəzalarda L. m.-nin analoqları haqqında bax. Levi – Proxorov metrikləsi.

Əd.: [1] Lévy P., Theorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] Золотарев В. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 224–31; [3] Золотарев В. М., «Зап. научн. семинара ЛОМН АН СССР», 1979, т. 87, с. 18–35; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [6] Порков В. А., Lecture Notes in Math., 1987, v. 1233, p. 114–24.

LEVI MEYDANI «Леви поле; Lévy field» – çox-parametrlili Braun hərəkəti, – mərkəzlənmiş $\{\zeta(t), t \in T\}$ Gauss meydanıdır, $M|\zeta(t) - \zeta(s)|^2$ struktur funksiyası T metrikləsi ilə üst-üstə düşən metrik fəzanın elementləri ilə indeksləşmişdir. Meydan P. Levi tərəfindən [1]-də vektor parametrlili Braun hərəkətinin ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur və $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzası və $d \leq \infty$ dim. – ölçülü S^d kürəsi üçün öyrənilmişdir (bax, [1]).

L. m. ixtiyari hamar Riman çoxobrazlısı üzərində lokal təyin olunmuşdur. L. m.-nin daşıyıcıları: a) mənfə əyriliyə malik ikiölçülü birləşli səthlər (bax, [2]); b) yalnız və yalnız, ehtə normalanmış fəzalardır ki, bunlarda $L_1(\Omega, \mu)$ fəzasına izometrik daxil etmə mümkündür, xüsusi halda $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq 2$ fəzasına (bax, [3]); c) 1 rəngli simmetrik M^d fəzalarının doqquz tipindən üçü – kürə, heqiqi və kompleks hiperbolik fəzalardır. Digər hiperbolik M^d fəzalarında L. m. $D_0 \phi$ şəkilli finit hamar funksiyalarının altfəzasında ümumiləşmiş L. m. kimi təyin olunur, burada $D_0, -M^d$ -də Laplas – Beltrami operatorunun polinomudur (bax, [4], [5]).

Bütün geodeji γ -ları qapalı olan proyektiv M^d fəzaları üzərində L. m.-nin modifikasiyası Braun körpüsü $Y(t)$ mövcuddur (bax, [4], [5]). Tərifə görə $Y(t)$ -nin daralmalarına

γ natural parametrizasiya olunduqda, γ üzərində açıqlanmış geodejinin uclarında eyni qiymətlərli Braun trayektoriyaları uyğundur. Kürə üzərində Braun körpüsünə L. m. cüt olmayan komponent kimi daxildir: $\zeta(t) = c(Y(t) - Y(\bar{t}))$, $\bar{t}, -t$ -nin antipodudur. Buna görə də, yarımkürəni daşıyıcı, Braun körpüsünü L. m.-nin S^d -də genişlənməsi kimi qəbul etmək təbii.

L. m.-lının geniş sinfində çoxluqlarının simmetrik fərqi ölçüsü $\mu(A_1 \Delta A_2)$ -yə bərabər metriklili (Ω, μ) ölçülən fəzasının altçoxluqları sinfində təsadüfi Gauss ortoqonal ölçülər (bəyaz küy) $b(A), M|b(A)|^2 = \mu(A)$ ölçülərini doğurur. L. m.-na aid bir çox misallar üçün bəyaz küy sxemində daxilətilmə mövcuddur: $\zeta_t = b(A_t)$, $A_t \subset \Omega, -\mathbb{R}^d$ üçün ilk dəfə N. N. Çentsov tərəfindən tapılmışdır. Sabit əyriliyə malik bütün T fəzaları üçün yarıyan Çentsov sxeminə $\Omega, -T$ -də 1 köölülü istiqamətlənmiş geodeji hipersəthlər fəzasıdır, bu fəzada μ ölçüsü $-T$ -nin hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçüdür, A_t isə $t \in T$ nöqtəsini qeyd olunmuş $O \in T$ nöqtəsindən ayıran hipersəthlər çoxluğu. Kürə üçün bu konstruksiyanın genişləndirilməsi Braun körpüsünün S^d -də kompleks bircins $b^*(d\omega)$ bəyaz küyü vasitəsilə ifadəsidir:

$$Y_t = \int_{S^d} \ln[\sqrt{-1}(x, \omega)] b^*(d\omega), t \in S^d,$$

(t, ω) – skalyar hasilidir (bax, [5]).

L. m. kimi mühüm bir misalda təsadüfi meydanın Markov xassəsi konsepsiyası və bu tipli Gauss meydanları nəzəriyyəsi formalaşmışdır (bax, [7], [8]). M^d və $\mathbb{R}^d$ fəzaları üzərində L. m. – məhdud oblastlar üçün Mak – Kin mənadında Markov xassəsinə malikdir, lakin bu şərtlə ki, d -nin dim. – ölçüsü cüt olmasın, yeni sabit əyrilikli cüt olmayan dim. – ölçülü fəzalar halında (bax, [9]). M^∞ və $L_p(\Omega, \mu)$, $1 < p \leq 2$ fəzaları üzərində sonsuz dim. – ölçülü L. m. nöqtənin ixtiyari ətrafı üzrə bərpə olunur, deməli, L. m.-nin Markov xassəsi cırlaşmışdır (bax, [3], [10]).

$\mathbb{R}^d$ üçün L. m.-nin lokal xassələri öyrənilmişdir (bax, [1], [11]). $\mathbb{R}^d$ -də məhdud oblastlar üçün Levinin Hölder şərti

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|\zeta(t) - \zeta(s)|}{\sqrt{2d\rho |\ln \rho|}} = 1 \right\} = 1, \quad \rho = |t-s|$$

münasibətilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Левин П., Стохастические процессы в броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] Морозова Е. А., Ченцов Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 152 – 55; [3] Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D., Krivine J.-L., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1966, т. 2, № 3, p. 231 – 59; [4] Молчан Г. М., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1979, в. 21, с. 123 – 47; [5] Молчан Г. М., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1987, в. 36, с. 88 – 101; [6] Лифшиц М. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 624 – 28; [7] МсКен Н. Р., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1963, т. 8, в. 4, с. 358 – 78; [8] Молчан Г. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 4, с. 784 – 87; [9] Молчан Г. М., «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 6, с. 1276 – 79; [10] Берман С. М., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, № 6, p. 1093 – 106; [11] Siraо T., «Nagoya Math. J.», 1960, v. 16, p. 135 – 56.

LEVİ ÖLÇÜSÜ « Левн мера; Lévy measure », sıçrayışlar ölçüsü – asılı olmayan artımlı tesadüfi prosesin *xarakteristik funksiyasının* ifadesinde $\Pi(t, A)$ ölçüsüdür. $\Pi(t, A)$ -nın qiyməti asılı olmayan artımlı ζ prosesinin t anına qədər baş vermiş və A çoxluğunda olan sıçrayışları [yeni $\zeta(s+0) - \zeta(s-0) \in A$ olan] sayının riyazi gözləməsinə bərabərdir.

LEVİ SINFI « Левн класс; Lévy class » – bax. Özünə ayrılan paylanma, Seriyalar sxemi, üçbucaq sxemi.

LEVİ SİSTEMİ Markov prosesi üçün « Левн система марковского процесса; Lévy system of a Markov process » – Markov prosesinin additiv funksionalı və faza fəzasında nüvədən ibarət cütüldür və bu sistem tamamilə kəsilen additiv funksionalların geniş sinfinin təsviri üçün təsis edilmişdir. $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ Hant prosesinin $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ faza fəzasında verildiyi fərz olunur. Onda ζ prosesinin ele $B = B_t, t \geq 0$ kəsilməz additiv funksionalı və $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında $N(x, dy)$ nüvəsindən ibarət [daha dəqiq, $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ fəzasında təyin olunmuş $N(\cdot, \cdot)$ funksiyası birinci arqumentinə görə sanki Borel funksiyası, ikinci arqumentinə görə isə ölçüdür] cütüldüyü vardır ki, $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ -də ixtiyari Borel funksiyası $f(x) \geq 0$ üçün

$$M_x \left[\sum_{0 \leq s \leq t} f(\zeta_s - \zeta_s^-) \right] = M_x \left[\int_0^t dB_s \int_{\mathcal{E}} N(\zeta_s, dy) f(\zeta_s, y) \right] \quad (*)$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada cəmləmə ζ_t trayektoriyasının kəsilmə anları üzrə aparılır. $(N, \mathcal{B})$ cütü ζ üçün Levi sistemi.

ζ prosesinin tamamilə kəsilen additiv funksionallarının geniş sinfi (*)-dakı cəmlər şəklində ifadə olunur (bax, [1], [2]). [2]-də sağ Markov prosesi halı öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Watanabe S., «Japan J. Math.», 1964, v. 34, № 1, p. 53–70; [2] Benveniste A., Jacod J., «Invent. math.», 1973, t. 21, № 3, p. 183–98.

LEVİ SPEKTRAL FUNKSIYASI « Левн спектральная функция; Lévy spectral function » – bax, Sonsuz bölünən paylanma, Levi kanonik ifadəsi.

LEVİ TEOREMİ « Левн теорема; Lévy theorem » – bax, Bakster teoremi, Viner prosesi, kəsilməzlik modulu, Viner martinqalı. Xarakteristik funksiya.

LEVİ – XİNÇİN DÜSTURU semimartinqallar üçün « Левн – Хинчина формула для семимартингалов; Lévy – Khinchin formula for semimartingales » – bax, Semimartinqal.

LEVİ – XİNÇİN KANONİK İFADƏSİ « Левн – Хинчина каноническое представление; Lévy – Khinchin canonical representation » – Levi kanonik ifadəsinin A. Ya. Xinqin tərəfindən 1937-də təklif olunmuş modifikasiyasıdır. L. – X. k. i. –

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int \mathcal{E}(t, x) dG(x) \right\} \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\mathcal{E}(t, x) = \begin{cases} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}, & \text{əgər } x \neq 0 \\ -\frac{t^2}{2}, & \text{əgər } x=0 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$\gamma \in \mathbb{R}^1$, $G(x)$ Xinqin spektral funksiyasıdır.

limit qiymətləri $G(-\infty) = 0$, $G(\infty) < \infty$ olan, $\mathbb{R}^1$ -də azalmayan funksiyadır. L. – X. k. i. ümumi şəkildə kanonik ifadənin xüsusi halıdır (bax, Sonsuz bölünən paylanma). Levi kanonik ifadəsi ilə müqayisədə L. – X. k. i.-nin bezi analitik xarakterli üstünlükləri vardır. (*) düsturu sonlu ikinci momentlərə malik sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik funksiyalar üçün Kolmogorov düsturunu ümumiləşdirir.

Daha ümumi təbiətli fəzalarda sonsuz bölünən paylanmaları təsvir edən L. – X. k. i.-nin analogları məlumdur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Parthasarathy K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967.

LEVİ – KRAMER TEOREMİ « Левн – Крамера

теорема; Lévy – Kramer theorem », Kramer teoremi: – əgər qeyri – sabit iki asılı olmayan tesadüfi kəmiyyətin cəmi normal qanunla paylanmışdırsa, onda bu toplananların hər biri də normal qanunla paylanan tesadüfi kəmiyyətlərdir; bu müddə P. Levi tərəfindən ([1]-də) söylenilmiş, H. Kramer tərəfindən isbat olunmuşdur ([2]-də). Aşağıda ekvivalent müddəalar verilir:

1) əgər iki məxsusi paylanmanın kompozisiyası normal paylanmadırsa, onda bu paylanmaların hər biri normal paylanmadır;

2) əgər $\varphi_1(t)$ və $\varphi_2(t)$ xarakteristik funksiyalıdırsa və

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t), \quad \gamma \geq 0, -\infty < \beta < \infty \quad (*)$$

olarsa, onda

$$\varphi_j(t) = \exp\{-\gamma_j t^2 + i\beta_j t\},$$

$$\gamma_j \geq 0, -\infty < \beta_j < \infty, j = 1, 2$$

doğrudur.

L. – K. t.-nin 1) ifadəsində mənfəi variasiyalara məhdudiyyətlərlə iki dəyişənşəreli ölçünün kompozisiyasını ümumiləşdirmək olur; 2) ifadəsində (*) şərti əvəzinə

$$\prod_{j=1}^m \{\varphi_j(t)\}^{\alpha_j} = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t),$$

$$\gamma \geq 0, -\infty < \beta < \infty, t \in E$$

şərti baxıldığı halda ümumiləşdirmə mümkündür, burada $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ – xarakteristik funksiyalar, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – müsbət ədədlər, E – sıxlıq nöqtəsi sıfırda olan heqiqi ədədlər çoxluğudur. Evklid fəzalarında və lokal kompakt Abel qruplarında tesadüfi kəmiyyətlər üçün L. – K. t.-nin ümumiləşmələri vardır.

L. – K. t. dayanıqlılıq xassəsinə malikdir, yeni asılı olmayan tesadüfi kəmiyyətlər cəminin normal paylanmaya yaxın olması hər bir toplananın paylanmasının normal paylanmaya yaxın olmasını doğurur; dayanıqlılığın kəmiyyətə qiymətləri məlumdur (bax, [5]).

L. – K. t.-nə analogi teoremlər Puasson paylanması üçün (bax, Raykov teoremi). Puasson və normal paylanmaların

kompozisiyası, sonsuz bölünən paylanmaların digər sinifləri üçün də alınmışdır (bax, [6]).

Əd.: [1] Lévy P., «J. math. pures et appl.», 1935, t. 14, p. 347–402; [2] Стаммер Н., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405–14; [3] Крамер Г., «Случайные величины и распределения вероятностей», пер. с англ., М., 1947; [4] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 34–59; [5] Сапогов Н. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астр.», 1959, № 19, с. 78–105; [6] Линник Ю. В., Островский И. В., «Разложения случайных величин и векторов», М., 1972.

LEVİ – PARETO PAYLANMASI « Левн – Парето распределение; Lévy – Pareto distribution » – özünün ikitərəfli Laplas çevirməsi ilə verilən, riyazi gözleməsi sonlu, dayanıqlı qeyri – Gauss ehtimal paylanmasıdır: əgər $p(u)$ Levi – Pareto ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyasıdırsa, onda ixtiyari $s > 0$ üçün

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} p(u) du$$

integralı sonludur və

$$G(s) = e^{-Ms + (u^*s)^\alpha},$$

düsturu doğrudur, burada

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du, \quad u^* > 0, \quad 1 < \alpha < 2.$$

L. – P. p.-nin xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \exp \left\{ iMt - |u^*t|^\alpha \left(1 - \frac{it}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right) \left| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right| \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər $M = 0$ və $u^* = 1$ olarsa, onda L. – P. p. normalanmış paylanma adlanır.

α parametri $1 < \alpha < 2$ münasibətilə verilən L. – P. p.-nin sıxlıq funksiyası $p(u)$, $u \rightarrow \infty$ olduqda $p_\alpha(u) \sim C(\alpha)u^{-(\alpha+1)}$ xassəsinə malik olur. Bu mənada L. – P. p.-ları *Pareto paylanmasına* analogidir.

L. – P. p. [1]-də daxil olunmuşdur və empirik müşahidələrin geniş sinfi üçün, məs., gəlirin paylanması, şəhərlərin ölçülərinin və ya dənizdə qazların tezliyinin paylanması kimi, model olaraq tətbiq olunmuşdur.

Əd.: [1] Mandelbrot B., «Int. Econ. Rev.», 1960, v. 1, p. 79–106; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

LEVİ – PROKHOROV METRİKASI « Левн – Прохорова метрика; Lévy – Prokhorov metric » – qiymətlərini hər hansı (U, d) metrik fəzasından alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\pi(X, Y) = \inf \{ \varepsilon : P_X(A) \leq P_Y(A^\varepsilon) + \varepsilon, \\ P_Y(A) \leq P_X(A^\varepsilon) + \varepsilon, A \in \mathfrak{B} \} \quad (*)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan sadə ehtimal metrikası π -dir, burada $\mathfrak{B}$ – U -nün Borel çoxluqlarının sistemidir və

$$A^\varepsilon = \{x : d(x, y) < \varepsilon, y \in A\}.$$

L. – P. m. [1]-də Levi metrikasının ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur. Əgər tərifdə iki bərabərsizlikdən birini saxlayaraq,

$\mathfrak{B}$ bütün qapalı Borel çoxluqlarının sistemi ilə əvəz olunarsa, π kəmiyyəti (*)-da dəyişmir (bax, [2]). L. – P. m.-nin mühüm xassələri aşağıdakılardır:

1) M, d – (U, d) -də bütün ehtimal ölçülərinin fəzası olsun. Onda (M, π) fəzası, yalnız və yalnız, o halda separabel fəzadır ki, (U, d) fəzası separabel olsun.

2) (M, π) fəzasının tamlığı (U, d) fəzasının tamlığını doğurur. Əgər M -dən olan ölçülərin separabel daşıyıcıları varsa, tərsi doğru deyildir.

3) L. – P. m. paylanmaların kompozisiyası əməlinə nəzərən regularlıq xassəsinə malikdir (xətti U fəzaları üçün) və bu xassə ekvivalent semiadditivlik xassəsinə malikdir, yəni asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ixtiyari X_1, Y_1 cütü üçün

$$\pi(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \leq \pi(X_1, X_2) + \pi(Y_1, Y_2)$$

münasibəti doğrudur.

Levi metrikasının ümumiləşməsi kimi L. – P. m. onun bir sıra xassələrini saxlayır və onların analoglarına malikdir. Məs., ixtiyari $a \in U, b > 0$ və ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\pi(bP_X, bP_Y) \leq b\pi(X/b + a, Y/b + a),$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \pi(X/b, Y/b) = \sigma(X, Y)$$

münasibətləri doğrudur, burada $\sigma(X, Y)$ – tam variasiya metrikasıdır. L. – P. m. (U, d) fəzasından qiymətləri olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün təyin olunan Ki – Fan metrikası üçün minimal metrikadır.

L. – P. m.-nin strukturu $\mathfrak{B}$ sisteminin digər Borel çoxluqlarının toplanması ilə əvəz olunması hesabına digər metrikaların geniş spektrini almağa imkan verir. $U = \mathbb{R}^1, d = |x - y|$ olduğu halda π -nin tərifində $\mathfrak{B}$ -nin əvəzinə bütün yarımxoşların sistemi $\{(t < x) : x \in \mathbb{R}^1\}$ çoxluğunu götürdükdə Levi metrikası alınır.

Çoxölçülü fəzalarda semifeza anlayışı daxil olduğu hallar üçün Levi metrikasının təbii analogu $\mathfrak{B}$ əvəzinə U -da bütün semifezaların sistemini saxlayan L. – P. m.-nin konstruksiyasıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177 – 238; [2] Dudley R. M., «Ann. Math. Statist.», 1968, v. 39, № 5, p. 1563 – 72; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

LEVINSON ALQORİTMİ « Левинсона алгоритм; Levinson algorithm », Levinson – Derbin alqoritm i – əmsalları simmetrik və Teplitsa matrisi (yəni $A_{ij} = A_{ji}$ şərtini ödəyən və A_{ij} -lər isə yalnız $(i - j)$ -dən asılı olan) ilə verilən

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} x_j = B_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

xətti sistem tənliklərinin həlli üçün sürətləndirilmiş rekurrent metodudur. Belə tipli tənliklər, məs., stasionar təsadüfi X_t ardıcılığının onun müşahidə olunmuş qiymətlərinin sonlu sayda $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-m}$ qiymətləri üzrə xətti ekstrapolyasiyası

məsələsinin həllində, belə ardıcılığın spektral statistik qiymətinin maksimal entropiyasının

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m r_{|i-j|}^* \beta_j &= -r_i^*, \quad i=1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^m r_j^* \beta_j - \sigma^2 &= -r_0^* \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$Yul - Uoker$ tənliklər sisteminin $\beta_1, \dots, \beta_m, \sigma^2$ məchullarına görə həlli əsasında qurulmasında və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bir sıra məsələlərində yaranır.

L. a.-ndan istifadə etdikdə m sayda (1) tənliklər sistemi əvəzinə, ardıcıl surətdə, k sayda tənlikdən ibarət «kəsilməz sistemlər» sırası həll olunur, burada $k=1, 2, \dots, m$ və bu «kəsilməz sistemlər» $i > k$ olan bütün tənliklərin atılması ilə və $x_{k+1}, \dots, x_m$ məchullarının sıfır bərabər götürülməsi ilə alınır; bu halda k -ci tərtib sistemin $x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)}$ həlləri sonrakı $(k+1)$ -ci tərtib sistemin $x_1^{(k+1)}, \dots, x_k^{(k+1)}, x_{k+1}^{(k+1)}$ həllərinin təyin olunmasında bilavasitə istifadə olunur. Nəticədə, aparılan rekurrent prosedurun m -ci addımında (1) sisteminin ilkin $x_1^{(m)} = x_1, \dots, x_m^{(m)} = x_m$ həlləri alınır.

$Yul - Uoker$ in (2) tənliklər sisteminin xüsusi halında rekurrent prosedurun ilk addımında

$$\beta_1^{(1)} = -r_1^* / r_0^*, \quad c_{(1)}^2 = [1 - (\beta_1^{(1)})^2] r_0^* \quad (3)$$

qiymətləri alınır, k -ci tərtib sistemin həlləri, $k=2, \dots, m$ ardıcıl surətdə tapılır:

$$\begin{aligned} \beta_k^{(k)} &= - \left[r_k^* + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^{(k-1)} r_{k-j}^* \right] / c_{(k-1)}^2, \\ \beta_j^{(k)} &= \beta_j^{(k-1)} + \beta_k^{(k)} \beta_{k-j}^{(k-1)}, \quad j=1, \dots, k-1; \\ c_{(k)}^2 &= [1 - (\beta_k^{(k)})^2] c_{(k-1)}^2. \end{aligned}$$

Ümumi (1) sistemi halında L. a. analoji olur. Asanlıqla göstərmək olur ki, L. a. m sayda xətti tənliklər sisteminin həllini m^2 sayda hesab əməllərinin köməyi ilə tapmağa imkan verir, lakin sistemin əmsallarının düz çevirməsinə əsaslanan adi həll metodunun tətbiqində m^3 saydaya yaxın hesab əməlinə istifadə olunmalıdır (bax, məs., [1]–[5]).

L. a. ilk dəfə, [6]-da N. Levinson tərəfindən stasionar ardıcılıqların xətti – ekstrapolyasiyası məsələsinə tətbiqdə təklif olunmuşdur, sonradan C. Derbin [7]-də onun modifikasiyasını almışdır. Sonradan bir sıra müəlliflər əmsalların Teplitsa matrisi ilə (simmetrik olmaya da bilər, məs., kompleks Hermit və ya daha ümumi olan) verilən və bu matrislərin çevirmələri ilə xətti tənliklər sisteminin digər rekurrent həll metodlarını da inkişaf etdirmişlər (bax, məs., [8]–[10]). Çoxölçülü stasionar ardıcılıqlar nəzəriyyəsinə yaranan xətti tənliklər sisteminin analoji həll metodları mövcuddur. Əmsallar matrisi qeyri – simmetrik, Teplitsa tipli xətti tənliklər stasionar ardıcılığın spektral sıxlığının ARSO – statistik qiymətlərinə daxil olan avtoregression əmsallarının hesablanmasıdır (bax, *Parametrik spektral statistik qiymət* və [10]).

542 LƏNGİDİCİ

Əd.: [1] К е й С. М., М а р п л С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51; [2] К э д з о у Д ж. А., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9, с. 256–93; [3] Nonlinear methods of spectral analysis, 2 ed., B., 1983; [4] P a p o u l i s A., Probability, random variables and stochastic processes, 2 ed., N. Y., 1984; [5] P a p o u l i s A., «SIAM Rev.», 1985, v. 27, № 3, p. 405–41; [6] L e v i n s o n N., «J. Math. and Phys.», 1947, v. 25, № 4, p. 261–78; [7] D u r b i n J., «Rev. Inst. intern. statist.», 1960, v. 28, № 3, p. 233–44; [8] D e l s a r t e P., G e n i n Y. V., K a m p Y. G., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process.», 1985, v. ASSP-33, № 4, p. 964–71; [9] D e m e u r e C. J., S c h a r f L. L., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process.», 1987, v. ASSP-35, № 1, p. 29–42; [10] Z o h a r S., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process.», 1979, v. ASSP-27, p. 656–58; [11] I n o u e Y., «IEEE Trans. Automat. Contr.», 1983, v. AC-28, № 1, p. 94–95.

LEVINSON – DERBIN ALQORİTMİ «Левинсона – Дербина алгоритм; Levinson – Durbin algorithm» – bax, *Levinson alqoritmi*.

LƏNGİDİCİ BARYER «задерживающий барьер; holding sticky boundary / elastic barrier» – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

LƏNGİDİCİ VƏZİYYƏT «задерживающее состояние; stable state» – bax, *Dayanıqlı vəziyyət, Markov prosesi*; trayektoriyaların daxili xassələri.

LƏNGİMƏ / GECİKMƏ «задержка / запаздывание; delay / lag» l a q, – 1) L. $B_X(\tau)$ avtokorelyasiya funksiyasının argumentidir. τ L.-si üçün onun qiyməti – τ uzunluqlu zaman intervalı ilə aralanan $X(t)$ və $X(t - \tau)$ kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalına bərabərdir, burada $X(t)$ – stasionar təsadüfi prosesdir.

2) L. – fazası sıfırdan fərqli olan filtrlı xətti filtr təsadüfi prosesinə təsirdir. Ən sadə halda, filtr fazası $\varphi(\lambda) = \lambda\tau$ xətti funksiyası olduqda, filtr L.-si $\tau: X(t) \rightarrow X(t - \tau)$ olan ləngitmə operatoru kimi təsir edir. Əgər faza λ_0 nöqtəsi ətrafında hamar funksiya olarsa, onda, adətən, qrup ləngiməsi adlanan $\varphi'(\lambda_0)$ kəmiyyətinə baxılır; $\varphi'(\lambda_0)$, – λ_0 ətrafında tezliklərin dar diapozonuna uyğun kəmiyyətdir.

LƏNGİMƏ ƏMSALI «задержки коэффициент; delay coefficient» – bax, *Markov prosesi*; davamı.

LƏNGİMƏ PƏNCƏRƏSİ «запаздывания окно; lag window» – bax, *Korrelyasiya pəncərə. Spektral sıxlıq*; qeyri-parametrik statistik qiymət.

LİFLƏR PROSESİ «волокон процесс; fibre process» – bax, *Riyazi stereologiya*.

LİMİT TEOREMLƏRİ «предельные теоремы; limit theorems» – ehtimal nəzəriyyəsində araşdırmaların əsas istiqamətlərindən birini təşkil edən, onun praktiki əhəmiyyətinin böyük sahəsini özündə əks etdirən teoremlərin geniş qrupunun ümumi addır.

Elmin bu sahəsinin riyazi fənn kimi yaranması, 1713-də ilk dəfə L. t. – *Bernulli teoreminin* nəşri ilə başlanmışdır. Bu teoremi A. Muavr (A. Moivre) 1730–33-cü illərdə dəqiqləşdirilmiş formada isbat etmişdir; bu *Muavr – Laplas teoremidir*. P. Laplas (P. Laplace) K. Qaussla (C. Gauss) birlikdə 19-cu əsrin başlanğıcında *xəta nəzəriyyəsinin* əsasını qoyaraq bu teoremin böyük praktiki əhəmiyyəti olduğunu başa düşərək, onun yalnız populyarlaşmasına deyil, ümumiləşdirilməsinə də cəhd göstərmişdir. Bu teoremlərin hər ikisi sonradan onların çoxsaylı analoqları və ümumiləşmələrinin alınması üçün nümunə olmuşdur ki,

hal-hazırda bunlar *böyük ədədlər qanunu* və *mərkəzi limit teoremi* adları ilə iki qrupda birləşmişlər. 20-ci əsrin əvvəllərində ehtimal nəzəriyyəsinə daha dörd limit teoremi də əlavə olunur; bunlardan ikisi birinci qrupa aid olur [S. Puasson (S. Poisson), 1837; P. L. Çebışev, 1867], biri – ikinci qrupa (A. M. Lyapunov, 1900 – 01) aid və xüsusi yer tutan və Muavr – Laplas teoremini tamamlayan, mühüm *Puasson teoremidir*. Hal-hazırda L. t.-nin sayı yüzlərlədir. L. t.-nin qurulması və onun istifadə olunma (tətbiqi) ideyasını qısa surətdə aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri üçün tipik olan cəhət odur ki, məsələnin həlli hər hansı $\mathcal{A} = \{A\}$ σ – cəbrində verilən ehtimal paylanmalarının ailəsi $\{P_t, t \in T\}$ terminləri ilə təsvir olunur və bir qayda olaraq, bu ehtimal paylanmalarının analitik ifadələrinin ədədi hesablanması asan və rahat olmur. Bu halda t parametrinin mümkün qiymətləri arasında ən çox maraq doğuran müəyyən mənada hər hansı θ kritik qiymətinə yaxın qiymətlərdir. Bu halda P_t üçün (və ya onları təyin edən paylanma funksiyası, paylanmasının sıxlıq funksiyası kimi xarakteristikalar üçün) olduqca sadə təqribi ifadələr axtarmaq təbii bir şeydir. P_t paylanmalarının θ nöqtəsində μ metrikasına nəzərən kəsilməz olduqları fərz olunur, bu metrika müvafiq seçilmiş yığılma topologiyasını reallaşdırır, onda elə P_θ paylanması vardır ki (ailəyə aid olmaya da bilər), $t \rightarrow \theta$ olduqda

$$\mu(P_t, P_\theta) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Bu halda P_θ paylanmasına P_t ($t \approx \theta$) paylanmalarının ən maraq doğuran hissəsinin təqribi ifadəsi kimi baxmaq olar. Məsələni sadələşdirmək lazım gəldikdə, t parametri nəzərə alınmır; bir çox hallarda P_θ müəyyən analitik strukturlu olduqda, məs., *sonsuz bölünən paylanma* olduqda da məsələnin sadələşməsinə nail olunur. Lakin qeyd olunan limit paylanması, hətta zəif yığılma topologiyası h seçildiyi halda belə mövcud olmaya bilər. Onda aşağıdakı əlavə prosedurdan istifadə olunur. $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$, – $\mathcal{A}$ -nın özünə qarşılıqlı birqiymətli inikaslara ailəsi, $\mathcal{Q}$, – $\mathcal{A}$ -da elə paylanma olsun ki, çevrilmiş $\bar{P}_t(A) = P_t(\mathcal{A}_t^{-1}A)$ ölçüləri $t \rightarrow \theta$ olduqda seçilmiş μ metrikası mənasında $\mathcal{Q}$ ilə yaxınlaşınsınlar, yəni $t \rightarrow \theta$ olduqda

$$\mu(\bar{P}_t, \mathcal{Q}) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Təbii olaraq bu halda gözləmək olardı ki, P_t üçün yaxınlaşmalar rolunu $Q_t(A) = Q(\mathcal{A}_t A)$ paylanmaları ifadə etməlidir. Əgər μ metrikası uyğun invariantlıq xassəsinə malik olarsa, yəni

$$\mu(\bar{P}_t, \mathcal{Q}) = \mu(P_t, Q_t), \quad t \in T \quad (3)$$

olarsa, bu həqiqətən də belə olur. P_t paylanmaları haqqında ilkin informasiya Q_t -yə $\mathcal{Q}$ və tam surətdə $\mathcal{A}_t$ (odur ki, P_t paylanması Q_t və $\mathcal{A}_t$ üzrə bərpə olunur) və ya $\mathcal{A}_t$ -nin yalnız bir hissəsi vasitəsilə daxil olur. Sonuncu halda informasiyanın bir hissəsinin itməsi onun istifadəsinin sadələşdirilməsi hesabına kompensasiya olunur (əgər, məs., $\mathcal{A}_t$ yalnız t və P_t -nin funksionalarının sonlu saydasından asılı olarsa). Bax, *Toplayıcılıq*(ǵ) limit teoremlərinin.

L. t. yalnız bir deyil, müəyyən şərtlər sistemində tabe P_t ardıcılıqlarının çoxluğuna baxdığından, təbii olaraq, iki tip suallar qarşıya çıxır ki, bunların cavabını tapmağa həmişə cəhd göstərilir.

I. Edilmiş fərziyyələr çərçivəsində (2)-dəki mümkün limit paylanmalarının çoxluğu $\mathcal{Q} = \{Q\}$ nə cür çoxluqdur?

II. $\bar{P}_t$ ardıcılığının $\mathcal{Q}$ -dən seçilmiş Q paylanmasına yığılma kriterisi (P_t paylanmasını verən hər hansı xarakteristikalar terminləri ilə) nə cür kriteridir? Bu sualla yanaşı, digər sual da yaranır – baxılan topologiyada $\bar{P}_t$ ardıcılığı üçün limit paylanmasının varlığı kriterisi nə cürdür?

Bu suallara cavablar təbii olaraq ondan asılı olur ki, (3)-də hansı yığılma topologiyasından (yeni μ metrikasından) istifadə olunur. Bu suallara tam cavablar almağa yalnız o hallarda müəssər olunmuşdur ki, seçilmiş topologiya müəyyən mənada verilmiş model üçün təbii olsun.

Bu qeyd olunanlar ehtimal nəzəriyyəsinə daha çox yayılmış bir modeldə – *təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxeminə* aşağıda şərh olunur. Bu istiqamətdə ilk araşdırmaların əsası P. Laplas və K. Gaussun işlərində qoyulmuşdur və adət olunan forması 19-cu əsrin 2-ci yarısında alınmışdır (P. L. Çebışev, A. M. Lyapunov, A. A. Markov və b.). 20-ci əsrin 20-ci illərinin əvvəllərinə qədər xüsusi hala – *təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri* $S_n = X_1 + \dots + X_n$ -lərin, $n = 1, 2, \dots$ artan cəmlər sxemi *n ə* (rus. схема нарастающих сумм) və ya daha xüsusi hala – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artan cəmlər sxeminə baxılırdı. S_n cəmlərinin paylanma funksiyaları $U_n(x)$ -lərin

çevirmələri $\mathcal{A}_n$ -lər kimi yalnız $\bar{S}_n = \mathcal{A}_n^{-1} S_n = B_n^{-1}(S_n - A_n)$ xətti cəmlərindən istifadə olunurdu, burada $A_n, B_n \neq 0$ həqiqi sabitlər cütleri ardıcılığı, $\bar{U}_n(x) = U_n(\mathcal{A}_n x) = U_n(B_n x + A_n)$.

$\mathcal{A}_n$ çevirmələri $\bar{U}_n$ ardıcılığını tam yığılma mənasında kompaktlaşdırır. Əgər X_j toplananları sonlu riyazi gözləmələri və dispersiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda, adətən, $A_n = \mathbf{M} S_n$, $B_n^2 = \mathbf{D} S_n$ götürülür. O dövrdəki L. t.-nin hamısında məğzine görə güclü yığılma topologiyasından (məs., μ metrikası kimi ρ *müntəzəm metrikasının* seçilməsi) istifadə olunurdu, baxmayaraq ki, təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləmə sxemi üçün zəif yığılma topologiyası təbii sayılır. O dövrün L. t.-ndə artan cəmlər sxeminə limit paylanmaları kimi yalnız *normal paylanmalar* götürülürdü. Bu paylanmalar kəsilməz olduğundan bunlarla bağlı zəif və güclü yığılmalar ekvivalent olur (Q l i v e n k o t e o r e m i). Bununla belə, ρ metrikası (3) mənasında

$\mathcal{A}_n$ -ə nəzərən invariantdır və buna əsasən, U_n və $\bar{U}_n$ funksiyalarının asimptotik yaxınlaşması məsələləri eynigüclü olur.

1932 – 33-cü illərdə *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfi $\mathbf{G}$ -nin öyrənilməsi ilə A. N. Kolmoqorov yeni model təklif etmişdir, bu modeldə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış artan cəmlər sxemi və Puasson teoremində istifadə olunan sxem ümumiləşdirilmişdir. K o l m o q o r o v m o d e l i n d ə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən A_n sabitləri ilə mərkəzlənmiş cəmlərinə baxılır:

$$Z_n = X_{n1} + \dots + X_{nm} - A_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

burada $X_{n1}, X_{n2}, \dots$ – təsadüfi kəmiyyətlərin *seriyalar sxemini*

təşkil edir. X_{nj} toplananlarının sonsuz kiçiklik şərtinə tabe olduqları fərz olunur, yəni: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_j \mathbf{P}\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Kolmoqorov modelinin seçiyyəvi cəhəti və originallığı mehz (5) şərti ilə bağlıdır. belə ki, (4) şəkilli cəmlərə seriyalar sxemi üçün hələ 1922-də S. N. Bernşteyn tərəfindən baxılmışdır.

F_n və F_{nj} – uyğun olaraq, Z_n və X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyaları olsun. Kolmoqorov modelində L. t.-nin qurulmasında zəif yığılma topologiyasından istifadə olunur (yeni μ metrikaçı kimi L Levi metrikaçını götürmək olar). A. N. Kolmoqorov belə fərz etmişdir ki, onun təklif etdiyi modeldə $\mathcal{Q} = \mathcal{G}$ (I suala cavab). X_{nj} – sonlu, ikinci tertib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda bu hipotez [3]-də Q. M. Bavli tərəfindən təsdiq olunmuşdur: o isbat etmişdir ki, limit paylanmaları $\mathcal{G}$ -da sonlu ikinci momentlərə malik sonsuz bölünən paylanmaların alt sinfi $\mathcal{G}_0$ -ı əmələ gətirir. Hipotez tamamilə A. Ya. Xinqin tərəfindən isbat olunmuşdur (1938). $\mathcal{G}_0$ -ın təsviri A. N. Kolmoqorov tərəfindən, bütün $\mathcal{G}$ sinfinin təsviri isə P. Levi (P. Lévy, 1934) tərəfindən $\mathcal{G}$ -dan olan G paylanmalarına uyğun xarakteristik f funksiyaları terminləri ilə alınmışdır, yəni

$$f(t; G) = \exp\left\{it\gamma + \int (e^{itx} - 1 - it \sin x) \frac{1+x^2}{x^2} dW(x)\right\} \quad (6)$$

xarakteristik funksiyaların terminləri ilə, burada γ – həqiqi sabit, W isə $W(-\infty) = 0$, $W(\infty) < \infty$ şərtlərini ödəyən $\mathbb{R}^1$ -də azalmayan funksiyadır, yəni G paylanması (γ, W) cütü ilə təyin olunur. F_n ardıcılığının verilən $G = G(x, \gamma, W)$ funksiyasına zəif yığılma kriterisi (II suala cavab) B. V. Qnedenko (1939) tərəfindən tapılmışdır. Modernləşmiş formada (bax, [4]) bu aşağıdakı kimi ifadə olunur. $f_{nj} = f_{X_{nj}}$ toplananlarının xarakteristik funksiyaları, $C_1(X_{nj}) = \text{Im} \ln f_{nj}(1)$ – bunlara müvafiq mərkəzlər olsun, bu mərkəzlərin varlığını olduqca böyük n -lər üçün (5) şərti təmin edir. $A_n = \gamma + \sum_j C_1(X_{nj})$ seçilir və

$$W_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} dF_{nj}(u + C_1(X_{nj})), \quad n \geq 1$$

funksiyası qurulur.

Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L(F_n, G) \rightarrow 0 \Leftrightarrow L(W_n, W) \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur.

1949-da B. V. Qnedenko və A. N. Kolmoqorovun [1] kitabı çıxır və bu kitabda Kolmoqorov modeli çərçivəsində L. t. üzrə tədqiqatların nəticələri verilmişdir. Bu tədqiqatların nəticələri alınmış faktlarla birlikdə bəzi limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsi adlanır.

544 LİMİT

20-ci yüzillikdə bu nəzəriyyənin nailiyyətlərinin inkişafı müxtəlif istiqamətlərdə aparılmışdır: məs., həqiqi ox üzərində nəticələr sonluölçülülük və sonsuzölçülülük fəzalarına, matrislər çoxluğuna və abstrakt qruplara keçirilmiş (qiymətlər fəzasının belə dəyişməsi təsadüfi kəmiyyətlər cəminin özünə məxsus təyin olunması zərurətini yaradır), toplananların asılı olmamaqlıq şərtləri daha zəif tələblərlə əvəz olunmuşdur (bax, *Mərkəzi limit teoremi* Banax fəzasında, *Limit teoremləri* Markov zəncirləri üçün, *Qarışdırma şərtləri*, *Limit teoremləri* martinqallar və semi-martinqallar üçün). L. t.-nin müxtəlif dəyişmələrinə çoxsaylı səylər göstərilmişdir (bax, *Mərkəzi limit teoremi*, *Lokal limit teoremləri*, *Təkrar loqarifm qanunu*, *Berri – Esseen teoremi*, *Edcvort – Kramer ayrılığı*, *Böyük yayınmalar ehtimaları*). L. t.-nin klassik nəzəriyyəsi əsasında cəmləmə sxeminin qeyri – xətti tip modellərlə əvəz olunması ilə bağlı tədqiqatlar istiqamətləri yaranır. Aşağıda belə «qeyri – standart» L. t., cəmləmə sxemi ilə sıx bağlı L. t.-ə aid misallar şərh olunmuşdur.

1) S_n – riyazi gözləmələri $\mathbf{M}S_n = 0$, dispersiyaları $\sigma^2 = \mathbf{D}S_n$,

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{M}|X_j|^3 < \infty \quad \text{şərtləri ilə verilən təsadüfi kəmiyyətlər}$$

cəminin ardıcılığı, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\gamma_n/\sigma_n^3 \rightarrow \infty$ olsun. Onda (5)-dən alınan nəticə:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\max_k |S_k| < x\sigma_n\} &\rightarrow \mathbf{Q}(x) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \exp(-(2k+1)^2 x^2/8\pi) \end{aligned}$$

münasibəti doğrudur.

2) S_n – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri olsun; bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları aşağıdakı kimi təyin olunur: $x \rightarrow \infty$, $0 < p < 1-q < 1$ olduqda $1-F(x) \sim h_1(x)$, $F(-x) \sim h_2(x)$, $h_1(x)/h_2(x) \rightarrow p$ şərtləri ilə verilən «qalıq» paylanma funksiyalarına malikdirlər. Əgər

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/(1-F(x)), & x \geq 1 \\ \theta(1)(1+x)/2 + \theta(-1)(1-x)/2, & |x| < 1 \\ -1/F(x), & x \leq -1 \end{cases}$$

olarsa, onda $Z_n = \theta(S_n)/n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathbf{P}\{Z_n < x\}$ paylanma funksiyalarının ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$V(x) = \begin{cases} q + p \exp(-1/px), & x > 0 \\ q - q \exp(1/qx), & x < 0 \end{cases}$$

paylanma funksiyasına zəif yığılır (bax, [6] və [4]).

3) $Z_n = Q_n(X_1, \dots, X_n)$, $k \geq 2$ dərəcəli bircins simmetrik çoxhedlilərin hər hansı ardıcılığı olsun; bu çoxhedlilərin argumentləri ümumi simmetrik $F(x)$ paylanma funksiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $c > 0$, $0 < \alpha < 2$ və $x \rightarrow \infty$ olduqda $1-F(x) \sim cx^{-\alpha}$. Simmetrik çoxhedlilər

$$Q_n = \Lambda_n(S_{n_1}, \dots, S_{n_k}),$$

$$S_{nm} = X_1^m + \dots + X_n^m, \quad 1 \leq m \leq k$$

şəklində ifadə oluna bilər, burada Λ_n – əmsalları n -dən asılı ola bilən k dərəcəli çoxhedlidir (Q_n üçün də ola bilər). Fərz olunur

ki, bu əmsallar mütləq qiymətcə 1-i aşmır. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $n^{-k/2} Q_n$ ardıcılığı cırlaşmayan Z təsadüfi kəmiyyətinə paylanmaya görə yığılarsa (yeni bunların paylanmaları zəif yığılarsa), onda Z təsadüfi kəmiyyəti, paylanmalarının bərabər olması mənasında, $\Lambda(Y)$ təsadüfi kəmiyyəti ilə üst-üstə düşür, burada

Λ – dərəcəsi k -ni aşmayan çoxhədli, $Y \in \mathbb{R}^k$ – xarakteristik funksiyası –

$$f(t) = \exp \left\{ c \int_{\mathbb{R}^k \setminus \{0\}} (e^{it \cdot w} - 1 - i[\alpha] t_1 w) |w|^{-1-\alpha} dw \right\},$$

$$g = \sum_{j=1}^k t_j w^j, \quad t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

şəklində olan təsadüfi vektordur. $[\cdot]$ – tam hissəni ifadə edir (bax. [7]).

Klassik nəzəriyyənin tamamlanmış olduğu sayılsa da, bir sıra riyaziyyatçılar onun fundamental konsepsiyalarının bəzilərini yenidən araşdırmağa başladılar. İlk əvvəl (5) şərtindən imtina olunma halına baxıldı (bununla əlaqədar [2]-də teorem 38 kimi P. Levinin mülahizələri ifadə olunmuşdur). Bu problemə ciddi maraq 20-ci əsrin 60-cı illərində yaranmış [L. Le Kam (L. Le Cam), Yu. V. Linnik, V. M. Zolotarev, Yu. Yu. Maçis, H. Bergstrom (H. Bergström) və s.], 1969-da (5) şərtindən istifadə etməklə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün L. t. nəzəriyyəsinin yaranması ilə nəticələnmişdir (bax. [4]). Yeni nəzəriyyənin mühüm cəhəti ondan ibarətdir ki, burada $\mathcal{Q}$ mümkün limit qanunları çoxluğu əvəzinə $\mathbb{R}^1$ -də bütün paylanmaların çoxluğu $\mathcal{F}$ -ə baxılır ((5) şərtindən imtina bununla nəticələnir).

Sonradan qeyri-klassik qoyuluşda L. t.-nə həm çoxölçülü fəzalarda (bax. [8]), həm də cəmlərdə toplananların asılı olmamazlıq şərti zəifləndirildiyi hallarda baxılmışdır (bax. [9]). Qeyri – klassik qoyuluşda L. t.-nin yaranması asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxeminə L. t.-nə yeni nöqtəyi – nəzərə – digər paylanmaların kompozisiyalarının limit paylanmalarının ayrılıqlarının dayanıqlılığı teoremləri kimi yanaşmanın formalaşmasına səbəb olmuşdur (bax. *Lindeberg – Feller teoremi*). Bu nöqtəyi – nəzərə yaxın olan, *pseudomomentlərdən* istifadə edən L. t.-nin müxtəlif dəqiqləşmələri də alınmışdır. L. t.-nin konsepsiyası dayanıqlılıq teoremləri kimi bir sıra xətti modellərdə özünü təsbit etmişdir (bax. [10]).

L. t.-nin klassik nəzəriyyəsinə ikinci tənqidi yanaşma onunla bağlıdır ki, Kolmoqorov modelində yığılmanın təbii topologiyası xətti çevirmələrə nəzərən (3) invariantlıq xassəsinə malik olmayan μ metrikaları ilə reallaşan zəif topologiyadır. Buna görə də,

P_t və $\bar{P}_t$ paylanmalarının yaxınlaşmalarının qurulması məsələləri ekvivalent olmur. Bu aşağıdakı misalda aydın olur.

X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin (4)-dəki cəmlərdə ehtimal simmetrik paylanmalara malik olduğu fərz olunur ki,

$$P\{|X_{nj}| = 1\} = (1 - 1/n);$$

$$P\{|X_{nj}| = n\sqrt{5}\} = 1/n, \quad j=1,2,\dots,n.$$

(5) şərti bunlar üçün ödənilmir, buna görə miqyas normalanması üçün $\bar{Z}_n = Z_n/n\sqrt{5}$ götürülür. Onda $M\bar{Z}_n = 0$, $n \rightarrow \infty$ olduqda, $D\bar{Z}_n \rightarrow 1$. F_n və $\bar{F}_n$ – uyğun olaraq, Z_n və $\bar{Z}_n$ cəmlərinin paylanma funksiyaları, G isə xarakteristik funksiyası $\exp(\cos t - 1)$ olan simmetrilənmiş Puasson qanununun pay-

lanma funksiyası olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $L(\bar{F}_n, G) \rightarrow 0$

münasibəti ödənilir, yeni G funksiyası $\bar{F}_n$ üçün asimptotik yaxınlaşmadır. Lakin buna əsaslanaraq, $F_n(x)$ -i $G_n(x) = G(x/n\sqrt{5})$ paylanmalarına yaxınlaşdırmaq mümkünlüyünü hökm etmək olmaz, çünki, $L(F_n, G_n) \geq G(+0) - 1/2 > 0$, $n \geq 1$. (2) münasibətinə əsaslanaraq limit yaxınlaşmalarının qurulması ideyasının özü verilmiş $Q \in \mathcal{Q}$ paylanmalarına yığılma kriterlərinə uyğun olmayan ilkin hallara baxılmanı zəruri olaraq istisna edir. Bu vəziyyətdən çıxmaq məqsədilə qoyulmuş məsələnin genişləndirilməsi təbii bir $\bar{P}_t$ paylanmalar ardıcılığının bir paylanmaya deyil, paylanmalar ailəsinə yaxınlaşma məsələsi araşdırılmalıdır, bu da məsələnin məğzine görə $\bar{P}_t$ paylanmalarının analitik strukturu daha aydın olan hər hansı paylanmalar çoxluğu ilə yaxınlaşması məsələsidir.

A. N. Kolmoqorov paylanmaların kompozisiyasının sonsuz bölünən paylanmalara yaxınlaşması məsələsinə, yeni

$$\Delta_n = \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{G \in \mathcal{G}} \rho(F^{*n}, G)$$

kəmiyyətinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxarkən, məsələnin bu qoyuluşunu nəzərdə tutmuşdu. O, 1956-da isbat etmişdir ki, $\Delta_n \leq cn^{-1/5}$, c – ədədi sabitdir. Sonradan bu nəticə yaxşılaşdırılmışdır (A. N. Kolmoqorov, L. Le Kam, Yu. V. Proxorov). 1981-də T. Arak isbat etmişdir ki, $\Delta_n \leq cn^{-2/3}$ yaxşılaşmayan statistik qiymətdir və bununla da, bu problem qapanmışdır (bu və buna yaxın problemlər də, bax. [12]).

L. t.-nin klassik nəzəriyyəsinin inkişafında digər maraqlı istiqamət 1 ehtimalla baş verən, təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri ilə bağlı fenomenlərin öyrənilməsidir. Belə fenomenlərdən *gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu* və *təkrar loqarifm qanunu* qeyd etmək olar. Elə nəticələr alınmışdır ki, bunları özünəməxsus mərkəzi limit teoremi kimi interpretasiya etmək olar (bax. məs., [13] və *Mərkəzi limit teoremi*).

20-ci əsrin 70 – 80-ci illərində müxtəlif qeyri – xətti modellərdə L. t.-nə: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün (xüsusi halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün), təsadüfi indeksdən asılı cəmlər ardıcılığı üçün (yeni cəmin toplananları sayı təsadüfi kəmiyyət olduqda, (bax. [14])) L. t.-nə maraq olduqca artır: uyğun L. t. *köçürmə teoremləri* adlanır.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Предельные распределения для сумм случайных величин, М. – Л., 1949; [2] L é v y P., Theorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; [3] B a w l y G. M., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), с. 917 – 30; [4] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 114 – 16; [6] D a r l i n g D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 73, № 1, p. 95 – 107; [7] С е й д л ь Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 2, с. 266 – 78; [8] К р у г л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 2, с. 209 – 27; [9] J a c o d J., S c h i r y a e v A. N., Limit theorems for stochastic processes, В. – [а. о.], 1987; [10] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 1, с. 178 – 89; [11] К о м л о с J., M a j o r P., T u s n a d y G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, H. 1, S. 33 – 58; [12] А р а к Т., З а й ц е в А. Ю., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 174, с. 3 – 214; [13] Д у н к и н Е. В., M a n d e l b a u m A., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 3, p. 739 – 45; [14] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988.

LİMİT TEOREMLƏRİ diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin «**предельные теоремы** метрической теории диофантовых приближений; **limit theorems** of the metric theory of diophantine approximation» – **ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin** (geniş mənada) istiqamətlərindən biridir və burada endomorfizmlərin funksiyaların üçün Lebeq ölçüsünə nəzərən limit münasibətləri müəyyən olunur. Bu teoremlər $(0,1)$ intervalının verilmiş approksimasiya dəqiqliyini təmin edən nöqtələri çoxluğunun ölçüsünü qiymətləndirməyə imkan verir. Ən əhatəli nəticələr $(0,1)$ intervalının özünə inikaslari: $T_1: \alpha \rightarrow \{\alpha q\}$ və $T_2: \alpha \rightarrow \{1/\alpha\}$ üçün alınmışdır, bunlar uyğun olaraq α -nın q -lük və zəncirvari kəsre ayrılışı ilə sıx bağlıdır.

Ədədlərin metrik nəzəriyyəsinin ilk limit teoremlərindən biri **Borel teoremi**dir; bu teoremdə hökm olunur ki, $\{\alpha q^n\}$, $n = 1, 2, \dots$ ədədlərinin ($q > 0$ tam ədəddir) kəsri hissələri $(0,1)$ intervalında müntəzəm paylanırlar. Bu teorem bir çox istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir və bu zaman müxtəlif metodlar, o cümlədən, ehtimal nəzəriyyəsi metodları tətbiq olunmuşdur. Sonuncu halda $\alpha \in (0, 1)$ ədədlərinin q -lük ayrılışında təsadüfi kəmiyyətlər kimi interpretasiya olunan $0,1, \dots$ rəqəmlərinin asılı olmamalıqından istifadə olunmuşdur; $\alpha \in (0, 1)$ ədədləri $(0,1)$ parçasından yaranmış ehtimal fəzasında Lebeq çoxluqlarının σ -cəbri və Lebeq ölçüsü ilə təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər kimi interpretasiya olunur.

Üstlü funksiyanın kəsri hissələrinin müntəzəm paylanması üçün ilk mərkəzi limit teoremi **Forte – Kas** teoremində hökm olunur ki: əgər $f(t)$ Lebeq mənafezində inteqrallanan həqiqi funksiya, onun Furiye sırasının əmsalları $|b_n| \leq M/n^\beta$ bərabərsizliyində bərabərlik həli M və β -nın sabit qiymətlərində ödənilirsə, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(T_1^k(\alpha) - b_0) \right)^2 d\alpha = \sigma^2 \quad (1)$$

limiti vardır və əgər $\sigma \neq 0$ olarsa, onda ixtiyari həqiqi x üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes} \left\{ \alpha: 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{k=0}^{n-1} f(T_1^k(\alpha) - b_0) < x\sqrt{n} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2\sigma^2} dz \quad (2)$$

münasibəti doğrudur.

(2) münasibətində yığılma sürəti [5]-də öyrənilmişdir. $(0,1)$ intervalından olan nöqtələr çoxluğunun ölçüsü – $\{\alpha 2^k\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ kəsri hissələrinin $\Delta \in (0,1)$ parçasına düşməsi sayı verilmiş ədədə bərabər olan ölçü qiymətləndirilmişdir (**Lo – kal limit teoremi**). Matris-üstlü funksiyanın kəsri hissələrinin paylanması üçün də mərkəzi limit teoremi alınmışdır (bax, [2]). İkiölçülü tor üçün ergodik endomorfizmlər nəzəriyyəsi təklif olunmuşdur (bax, [4]). İ. A. İbrahimov zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə nəzəriyyəsinə inkişaf etdirərək, mərkəzi limit teoreminin daha güclü formasını almışdır (bax, [1]).

Zəncirvari kəsrlərin parametrlərinin metrik analizinə K. Qauss (C. Gauss) tərəfindən baxılmışdır. $\alpha \in (0, 1)$ və $\alpha = [0; a_1, \dots]$ – zəncirvari kəsre ayrılış, $q_n(\alpha)$ – yarıyan n -ci $[0; a_1, \dots, a_n]$ kəsrlərinin məxrəci, $r_n(\alpha) = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ olsun. R. O. Kuzmin K. Qaussun aşağıdakı fərziyyəsini isbat etmişdir:

$$\sup_x \left| \text{mes} \{ \alpha: r_n(\alpha) - a_n < x \} - \ln(1+x)/\ln 2 \right| = O(e^{-\lambda \sqrt{n}}), \lambda > 0$$

və bu münasibət $O(e^{-\lambda n})$ dəqiqliyinə kimi P. Levi (P. Lévy) tərəfindən yaxşılaşdırılmışdır. Zəncirvari kəsrlər üçün (1) və (2) münasibətləri ilə ifadə olunan mərkəzi limit teoremləri T_1 -in T_2 ilə əvəz olunması ilə V. Döblin (W. Doeblin) tərəfindən isbat olunmuşdur.

Zəncirvari kəsrlərin metrik nəzəriyyəsinin A. Ya. Xincin tərəfindən alınmış bir çox nəticələri sıfır, yaxud vahid qanunları tiplidir. Bundan başqa, onluq və ya zəncirvari kəsrlərdən daha ümumi olan ədədi sistemlərin metrik nəzəriyyəsi də öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [3] Мисьявичюс Г. А., «Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math.», 1971, v. 14, p. 77–92; [4] Москвин Д. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 1, с. 69–100; [5] Постников А. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 82, с. 3–111.

LİMİT TEOREMLƏRİ компакт qruplarda «**предельные теоремы** на компактных группах; **limit theorems** on compact groups» – компакт qruplarda yığılma şərtlərini və ehtimal paylanmalarının kompozisiyalarının limitləri növlərini təsvir edən teoremlərdir. G – компакт qrup, $\{\mu_n\}$ – bu qrupda ölçülərin hər hansı ardıcılığı olsun. Əgər ixtiyari $i \geq 1$ qiymətlərində $\nu_n^{(i)} = \mu_i \mu_{i+1} \dots \mu_n$ ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda zəif yığılırsa, $\{\mu_n\}$ ardıcılığı kompozision yığılan ardıcılıq adlanır (bax, [1]). χ_H – G qrupunun altqrupu H -da Haar ölçüsü olsun. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $\nu_n^{(i)}$ -nin limiti var və bu limit χ_H -a bərabərdir, burada H ən böyük ələ altqrupdur ki, bütün $\nu_n^{(i)}$ -lər bu qrupa görə invariantdır, yəni $\nu_n^{(i)} \chi_H = \chi_H \nu_n^{(i)}$. χ_H ölçüsünün daşıyıcısı H altqrupu kompozision yığılan ardıcılığının əsaslı adlanır. Kompozision yığılmanın praktiki istifadəsi ona əsaslanır ki, G -də ixtiyari $\{\mu_n\}$ ardıcılığı üçün G -nin elementlərinin ələ $\{\alpha_n\}$ ardıcılığı tapılar ki, $\{\mu'_n\}$ paylanmalar ardıcılığı kompozision yığılır, burada $\mu'_n = \alpha_n^{-1} \mu_n \alpha_{n+1}$.

Demək olar ki, kompozision yığılan $\{\mu_n\}$ ardıcılığı üçün $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ hasilini «məhiyyətə» yığılır. Doğrudan da, ələ $\{\tilde{\mu}_n\}$ ardıcılıqları göstərmək olar ki, $\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \dots \tilde{\mu}_n$ hasilini yığılır, lakin $\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_n$ kompozisiyalarının bu yığılması μ_1 ölçüsünə görə yığılmır. Məs., μ_1 G -də müntəzəm ölçüdürsə, onda $\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \dots \tilde{\mu}_n$ ardıcılığı ixtiyari $\tilde{\mu}_i$, $i > 1$ üçün yığılır.

$\{\mu_n\}$ ardıcılığından yerindəyişmələr vasitəsilə, ümumiyyətlə, müxtəlif əsaslarla bir neçə müxtəlif kompozision yığılan ardıcılıqlar qurmaq olar, lakin bu əsaslar qoşma qruplar olacaqdır. Əgər ələ

$\alpha_n \in G$ elementləri tapılsa ki, $\{\mu'_n = \alpha_n^{-1} \mu_n \alpha_{n+1}\}$ ardıcılığı H qrupuna qoşma əsasla kompozision yığılsın, onda deyilir ki, $\{\mu_n\}$ ardıcılığı G -də $\sigma(H)$ tiplidir (bax, [1]). Beləliklə, hər hansı ardıcılıq hər hansı $\sigma(H)$ tipinə aiddir. Ən mühüm hal $\sigma(e_1)$ tiplidir, burada e_1 – G qrupunun vahididir. Məs., qiymətləri G -dən olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasilinin sanki yığılması G qrupunda $\{\mu_n\}$ ehtimallar ardıcılığının e_1 əsası ilə kompozision yığılmasına ekvivalentdir, burada μ_n – X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasıdır. Kommutativ G qrupu üçün $\sigma(H)$ tipli ardıcılığın H altqrupu üzrə faktorizasiya yolu ilə yığılmasının öyrənilməsi G/H qrupunda $\sigma(e_1)$ tipli ölçülər ardıcılığının yığılmasının öyrənilməsinə gətirilir.

Kompakt qruplarda eyni olmayan paylanmaların kompozisiyalarının əsas yığılma problemlərini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

1. $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcılığı hansı şərtlərdə kompozision yığılan ardıcılıqdır (xüsusi halda, hər bir ölçünün ayrılıqda xarakteristikası ilə ifadə olunan)?

2. Əgər $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcılığı kompozision yığılan ardıcılıqdırsa, $\{\mu_n\}$ -in əsasını necə tapmaq olar? Əsası μ_n ölçülərinin daşıyıcılarının xassələri ilə ifadə edən şərtlər hansılardır?

3. G -də ixtiyari $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcılıqlarının tipini müəyyən etmək. $\sigma(e_1)$ tipi halı xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Kompozision yığılma haqqında mühüm nəticə aşağıdakından ibarətdir. H kompozision yığılan ardıcılığın əsası olarsa, H

altqrupunun ixtiyari ətrafı $U(H)$ üçün $\sum_{n=1}^{\infty} \{1 - \mu_n(U(H))\}$ sırası yığılır.

Qruplarda paylanmaların kompozisiyalar halı bir ölçünün kompozisiyasının qüvvət üstlü üçün kompakt qruplarda tamamilə araşdırılmışdır (bax, [2]). G -də ixtiyari μ ölçüsü üçün $A(\mu)$ – üstlü ölçülər çoxluğu $\{\mu^n\}$ -in bütün limit nöqtələrinin birləşməsi, $n \geq 1$, $A(\mu)$ – kompakt qrup olsun; $\text{supp } \mu$, – μ ölçüsünün daşıyıcısı, $[M]$, – M çoxluğunun doğurduğu qrup olsun. Onda, əgər G kompakt qrupdursa və μ , – G -də ehtimal ölçülərinin $M^1(G)$ semi – qrupuna aiddirsə, λ , – $A(\mu)$ qrupunun vahididirsə, $\mathcal{H} = \text{supp } \lambda$, $\mathcal{K} = [\text{supp } (\mu)]$ olarsa, aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n$ vardır;

2) $\lim_{n \geq 1} \text{supp } (\mu^n) \neq \emptyset$;

3) $\text{supp } (\mu^n)$, $n \geq 1$ ardıcılığı yığılır;

4) $\left[\bigcup_{n \geq 1} \text{supp } (\mu)^n \text{supp } (\mu)^{-n} \right] = \mathcal{H}$;

5) $\mathcal{H}$ qrupunun özünün qarışıq sinfində ele qapalı normal altqrup yoxdur ki, bu qrup üzrə $\text{supp } (\mu)$ olsun.

6) $\mathcal{H}$ üzrə $\text{supp } (\mu)$ μ ölçüsünün daşıyıcısı $\mathcal{K}$ qrupunun heç bir özünə aid qarışıq sinfində yoxdur;

7) $\chi = \chi_{\mathcal{H}}$.

Bu müddəalardan bir çox məlum nəticələr alınmışdır. Məs., əgər $\mu \in M^1(G)$ olarsa, onda aşağıdakı müddəalar doğrudur: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = \chi_{\mathcal{H}}$; b) $\lim_{n \geq 1} \text{supp } (\mu^n) = \mathcal{H}$. Və ya əgər G qrupu

əlaqələnməmişdirsə, μ isə $M^1(G)$ -dən χ_G – mütləq kəsilməz simmetrik ölçüdürsə, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = \chi_G$. Beləliklə,

μ ölçüsünün üstlü ardıcılıqları yığılırsa, onda bu ardıcılığın limiti $\mathcal{H}$ -də Haar ölçüsü ilə üst-üstə düşən idempotent ölçüdür.

$M^1(G)$ -də $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$ ölçülər ardıcılığında hər bir $n \geq 1$ üçün μ_n ölçüsü sonsuz say dəfə təkrar olunursa, $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$ ardıcılığı normal ardıcılıq (Borel mənada) adlanır. G – kompakt qrup, $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$, – $M^1(G)$ -də normal ardıcılıq, $\{v_n = \mu_1 * \dots * \mu_n\}$, $n \geq 1$ – kompozision hasilər ardıcılığı olsun. Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ vardır və

$$\left[\bigcap_{j \geq 1} \text{supp } (\mu_j) \right] = \left[\bigcap_{n \geq 1} \text{supp } (\mu_1) \dots \text{supp } (\mu_n) \text{supp } (\mu_n)^{-1} \dots \text{supp } (\mu_1)^{-1} \right]$$

bərabərliyi ödənilir.

Eyni olmayan $\{\mu_n\}$ paylanmalarının kompozisiyaları halında limit ölçüləri Haar ölçüləri ilə üst-üstə düşməyə bilər. Buna görə də, $\{\mu_n\}$ ardıcılığının bütün qrupda daşıyıcısı ilə Haar ölçüsünə kompozision yığılması üçün ölçülər üzərinə qoyulan şərtlər araşdırılır. Məs., əgər mütləq kəsilməz paylanmaların sıxlıqları

$p_n(g)$ üçün $p_n \leq c_n < \infty$ olarsa və $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}$ sırası dağılırsa,

onda $|p_1 * \dots * p_n(g) - 1| \rightarrow 0$ münasibəti doğrudur, burada $p_1 * \dots * p_n(g)$, – $\mu_1 * \dots * \mu_n$ kompozisiyasının sıxlığıdır (bax, [4]).

Sonlu qruplarda eyni olmayan paylanmaların kompozisiyaları üçün sonlu qruplar üçün aşağıdakı spesifik fundamental nəticə alınmışdır ki, bu nəticədən L. t. alınır (bax, [5]). $\{\mu_n\}$ – sonlu G qrupunda paylanmalar ardıcılığı, $\mu_n(e_1) > \varepsilon > 0$ olsun, burada e_1 – qrupun vahididir. Daha sonra, H G -nin ele altqrupu olsun ki, o, ele $e_i \in G$ elementləri ilə doğurulmuş olsun ki, bunlar

üçün $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(e_i)$ sırası dağılan olsun; onda $\{\mu_n\}$ ölçülər

ardıcılığı kompozision yığılır və H qrupu bu ardıcılığın əsasıdır.

Əd.: [1] X е й е р X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] М а к с и м о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 1, с. 52 – 66; [3] М а к с и м о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», т. 13, в. 2, с. 295 – 307; [4] Ш л о с м а н С. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 614 – 19; [5] К а w a d a Y., I t o K., «Proc. Phys.-Math. Soc. Japan», 1940, v. 22, p. 977 – 98.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov prosesində nisbətler üçün «предельные теоремы для отношений, отвечающих марковскому процессу; ratio limit theorems for a Markov process» –

$$\frac{\int_0^T P_t f_1(a) dt}{\int_0^t P_t f_2(b) dt}$$

şəklində nisbətler üçün $T \rightarrow \infty$ olduqda limitlər haqqında teoremlərdir (burada a və b bircins $X = (X_t, \mathcal{A}_t, P_t); t \geq 0$ Markov prosesinin vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ -dən götürülür; $f_1, f_2 \geq 0$ $\mathcal{E}$ -də ölçülən funksiyalar; P_t isə X prosesinin keçid funksiyasına müvafiq operatorlardır). Hesabıdan çox olmayan $\mathcal{E}$ halı üçün bax, [1]. $\mathcal{E}$ çoxluğu daha ümumi təbiətli olduğu halda müəyyən «kiçik» çoxluqdan kənarda yerləşən a və $b \neq a$ üçün qeyd olunan limitlərin varlığı məsələsi də araşdırılmışdır (bax, [2] – [5]); bu «kiçik» çoxluq əksər hallarda yanpol-yar çoxluq kimi xarakterizə olunur (bax, [3], [5]). Additiv funksionallar üçün analogi problemi toxunulmuşdur (bax, [2], [6]).

Bax, **Limit teoremləri** Markov zəncirində nisbətlər üçün.

Əd.: [1] Чжун Кайлай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Azema J., Kaplan-Duflo M., Revuz D., «Z. Warh. und verw. Geb.», 1967, Bd 8, № 3, S. 157 – 81; [3] Fukushima M., «J. Math. Soc. Japan», 1974, v. 26, № 1, p. 17 – 32; [4] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 3, с. 493 – 505; [5] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 4, с. 712 – 28; [6] Диреев Ю. В., «Матем. заметки», 1980, т. 28, в. 1, с. 153 – 58.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov prosesləri üçün «предельные теоремы для марковских процессов; limit theorems for Markov processes» – şərti olaraq iki qrupa bölünməsi mümkün olan teoremlərdir. Birinci qrupa aid olunan limit teoremlərində ilkin təsadüfi kəmiyyətlər üzərinə Markov xassəsindən başqa, müəyyən zəif yığılma şərtləri də qoyulur (bax, məs., [1], [2]). Bu L. t., bir qayda olaraq, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün uyğun limit teoremlərinin birbaşa ümumiləşmələridir. İkinci qrupa aid limit teoremləri hər hansı Markov proseslərinin funksionallarının paylanmalarının digər Markov proseslərinin funksionallarının paylanmalarına, xüsusi halda, diffuzion proseslərin funksionallarının paylanmalarına yığılması haqqında teoremlərdir (bax, [1]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [2] Rosenblatt M., Markov processes, B. – [a. o.], 1971.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov zəncirində nisbətler üçün «предельные теоремы для отношений, отвечающих цепи Маркова; ratio limit theorems for a Markov chain» – Markov zənciri trayektoriyalarının uzunluğu məhdud olmadan artan zaman intervalı boyunca müxtəlif vəziyyətlər çoxluğunda orta qalma müddətlərini müqayisə etmək üçün teoremlərdir.

Hesabi Markov zəncirinin $\{1, 2, \dots\}$ çoxluğunda verildiyi və n addıma keçid ehtimalının $p_{ij}(n)$, $i, j, n \geq 1$ olduğu fərz olunur. Onda

$$\frac{\sum_{n=1}^N p_{ij}(n)}{\sum_{n=1}^N p_{kl}(n)} \quad (*)$$

kəsrinin surəti başlanğıc vəziyyətin i olması şərtlə zəncirin trayektoriyasının $[1, N]$, $N \geq 1$ zaman intervalında j vəziyyətində orta qalma müddəti kəmiyyətidir; məxrəc də analogi mənə daşıyır. Əgər i, j, k, l əlaqəli vəziyyətlərdirsə (bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı), onda (*) münasibəti $N \rightarrow \infty$ olduqda hər hansı sonlu limitə yaxınlaşır. Bu zaman üzrə nisbətler üçün ilk limit teoremi Döblin teoremidir (bax, [4]). Qeyd olunan limitin qiymətini Çjun Kay-lay 1950-də hesablamışdır (bax, [4]). Qayıdışlı zəncir halında bu limit üçün daha maraqlı bir neçə ekvivalent ifadələr tapılmışdır ki, xüsusi halda bu limiti μ_i/μ_l nisbəti kimi yazmaq olur, burada

$\{\mu_i; i \geq 1\}$ – sıfır olmayan invariant ölçüdür (bax, Stasionar paylanma; baxılan halda bu ölçü ədədi vuruq dəqiqliyi ilə yeganədir). İxtiyari ölçülən fəzalarda zəncirlər halında bu nəticələrin ümumiləşmələri vardır (bax, [2], [8], [9]), xüsusi halda, Harris qayıdışlı zəncirlər üçün (bax, Markov zənciri). Bu mövzu Ornşteyn – Çekon erqodik teoremi ilə sıx bağlıdır (bax, [8], [9]).

Nisbətler üçün L. t.-nin ən güclü tip adlandırılan nəticələrindən ən çox məlum olanı aşağıdakılardır (bax, [3], [8]). Yuxarıda baxılan Markov zəncirinin qayıdışlı və qeyri – periodik olduğu fərz

olunur və bütün $i \geq 1$ və bəzi ε , $N > 0$ üçün $\sum_{n=1}^N p_{ii}(n) > \varepsilon$

olsun. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [p_{ij}(n)/p_{kl}(n+t)] = \mu_j/\mu_l$$

münasibəti bütün i, j, k, l vəziyyətləri və bütün $t = 0, 1, \dots$

üçün doğrudur; μ_i – qeyd olunan mənanı daşıyır. Bu teoremin analoqları müəyyən tip qayıdışsız hesabi zəncirlər üçün (bax, [5], [6]) və ixtiyari ölçülən fəzalarda zəncirlər üçün (bax, [10], [11]) mövcuddur.

Nisbətler üçün güclü limit teoremini ilk dəfə 1951-də Çjun Kay-lay (bax, [4]) və tamqiymətli şəbəkədə təsadüfi dolaşmaları öyrənən P. Erdeş (P. Erdős) isbat etmişlər. Hal-hazırda belə problem çox və ya az ixtiyari qruplarda təsadüfi dolaşmaların tədqiqi çərçivəsində görkəmli yer tutur (bax, [7], [10]).

Əd.: [1] Doeblin W., «Bull. Soc. math. France», 1938, t. 66, № 2, p. 210 – 20; [2] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 389 – 416; [3] Kingman J. F. C., Огеу S., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 15, № 6, p. 907 – 10; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [5] Pruitt W. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 16, № 2, p. 196 – 200; [6] Молчанов С. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 2, с. 124 – 25; [7] Спирер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [8] Огеу S., Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probability, N. Y. – [a. o.], 1971; [9] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [10] Guivarc’h Y., «Astérisque», 1980, v. 74, p. 15 – 28; [11] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 692 – 702; 1985, т. 30, в. 2, с. 241 – 51.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov zəncirləri üçün «предельные теоремы для цепей Маркова; limit theorems for Markov chains» – addımlar sayı artan Markov zəncirlərində keçid ehtimallarının struktur xüsusiyyətlərini öyrənən teoremlər (məs. erqodik teoremlər) və ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremlərini Markov zənciri əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər üçün ifadə edən teoremlərdir; məs., böyük ədədlər qanunu zəif və güclü formalarında, mərkəzi L. t., təkrar loqarifm qanunu və s., həmçinin belə teoremlərin funksional variantları. Bu teoremlərin

dəqiqləşdirilməsi (məs., yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi və mərkəzi limit teoremində asimptotik ayrılış) və genişləndirilməsi (məs., zəncir əmələ gətirən, qiymətləri funksional fəzalardan olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün) öyrənilən sahələrdədir. Markov zəncirləri üçün çoxsaylı tətbiqi məsələlərdə spesifik limit teoremləri (məs., dayanıqlılıq teoremləri) yaranır.

Zəncir əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər üçün limit teoremləri ilk dəfə 1907 – 08-də A. A. Markov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]). $X_1, \dots, X_n$ sonlu sayda qiymətlər alan və biricins zəncir əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Fərz olunur ki, bir addıma keçid ehtimalları müsbətdir. Onda əgər

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$$

limiti vardırsa, böyük ədədlər qanunu ödənilir, yeni ixtiyarı $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|n^{-1}(X_1 + \dots + X_n) - a| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur. Əgər bundan başqa

$$0 < \sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} n^{-1} (X_1 + \dots + X_n - an)^2 < \infty$$

olarsa, onda mərkəzi limit teoremi ödənilir, yeni $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{y \leq \frac{1}{\sigma n^{1/2}} (X_1 + \dots + X_n - an) \leq x\right\} \rightarrow (2\pi)^{-1/2} \int_y^x e^{-t^2/2} dt.$$

Bircins olmayan zəncirlər üçün böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi A. A. Markov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]).

Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nin isbatı metodlarının çoxu Markov zəncirləri üçün L. t.-nin tətbiqi ilə bağlı yaranmışdır. [2]-dəki işlərdə ilk dəfə X_i və X_j kəmiyyətləri arasında asılılığın

$|i - j|$ fərqi artdıqca zəifləməsindən istifadə olunmuşdur, bu da

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ cəmini asılı olmayan toplananların cəminə}$$

yaxınlaşdırmağa imkan verir (zəif asılılıq metodu). [3] və [4]-dəki işlərin metodunun əsası belə bir müddəaya əsaslanır: zəncirin ixtiyarı Δ qayıdış vəziyyətinə düşməsi anları

$$T_0 = \min(n > 0: X_n \in \Delta),$$

$$T_k = \min(n > T_{k-1}: X_n \in \Delta), \quad k = 1, 2, \dots$$

– regenerasiya anlarıdır, yeni bu anlar zənciri qarşılıqlı asılı olmayan parçalar – regenerasiyanın tsikllərindəki artımlar ardıcılığına bölür. Belə bölgü S_n cəmini təsadüfi sayda ($\nu(n) = \max(k \geq 0: T_k < n)$) asılı olmayan toplananların cəminə yaxınlaşdırmağa imkan yaradır (regenerativ metod). Diskret Markov zənciri əmələ gətirən asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəminin araşdırılmasında xarakteristik funksiyalar metodunun ilk tətbiqlərindən biri [5]-də verilmişdir.

Sonrakı araşdırmalarda əsas məqsəd məlum L. t.-nin dəqiqləşdirilməsi və genişləndirilməsi, zəncirlərin erqodiklik şərtlərinin zəiflədilməsi, zəncirin vəziyyətlər fəzasının diskret olması tipli struktur məhdudiyyətlərindən imtina edilməsidir. Qeyd etmək lazımdır ki, hal-hazırda Markov zəncirləri üçün L. t.-nə aid olduqca çoxsaylı jurnal və monoqrafik ədəbiyyat mövcuddur.

Ehtimal nəzəriyyəsinin L. t.-nin əksəriyyətinin Döblin şərtini ödəyən ixtiyarı vəziyyətlər fəzası ilə verilən Markov zəncirlərinə

köçürülməsi istiqamətindəki nəticələr [6]-da şərh olunmuşdur. Bu nəticələrin əsasında xətti operatorların spektral nəzəriyyəsinə əsaslanan xarakteristik funksiyalar metodunun inkişafı durur. Lakin Döblin şərti zəncirin müntəzəm güclü qarışma şərtinə ekvivalentdir və bu şərt ağır məhdudiyyətdir. Məs., tətbiqi məsələlərdə tez-tez yaranan Markov avtoqressiya sxemi bu şərti ödəmir. Operatorların kükrəntilər nəzəriyyəsinin tətbiqi, sonradan maksimal korrelyasiya əmsalları terminlərində verilən şərtlərlə kifayətlənməyə imkan yaratdı. Döblin şərti tipli şərti ödəyən bircins olmayan Markov zəncirləri üçün L. t., məs., [7]-də verilir.

Erqodik tipli ən məlum şərtlərdən biri – Döblin şərtlərini genişləndirən – Harris qayıdış şərtidir. Bu şərti ödəyən zəncirlər sinfi genişdir və çoxsaylı tətbiqlər üçün yeterlidir. Belə zəncirlərdə regenerativ genişlənmə mümkündür, bu da vəziyyətlər fəzası diskret olan zəncirlər üçün regenerativ metodla alınmış L. t.-ni (bax, məs., [8]) bu sinfə köçürməyə imkan verir (bax, məs., [9], [10]).

Markov zəncirləri üçün funksional L. t. haqqında, bax, məs., [11].

Əd.: [1] Марков А. А., Избр. труды. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1951, с. 339–62; 363–98; 465–508; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 121–76, 177–96, 322–30; [3] Doeblin W., «Bull. Soc. Math. France», 1938, v. 66, № 2, p. 210–20; [4] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, в. 4, с. 281–300; [5] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949; [6] Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова, Таш., 1979; [7] Статулявичюс В. А., «Литов. матем. сб.», 1961, т. 1, в. 1–2, с. 231–314; [8] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [9] Bolthausen E., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, H. 3, S. 283–89; [10] Малиновский В. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 2, с. 315–32; 1989, т. 34, в. 2, с. 289–303; [11] Bhattacharya R. N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, H. 2, S. 185–201.

LİMİT TEOREMLƏRİ martinqal və semi-martinqallar üçün « предельные теоремы для мартингалов и семимартингалов; limit theorems for martingales and semimartingales » – martinqallar və ya semimartinqallar ardıcılığının yığılma şərtlərini müəyyən edən teoremlərdir.

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ semimartinqalı $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində verilmiş elə təsadüfi prosesdir ki, hər bir $t \geq 0$ qiymətində X_t $\mathcal{A}_t$ – ölçüləndir və onun trayektoriyaları sol limitləri olan, sağdan kəsilməz həqiqi funksiyaların fəzası D -dəndirlər.

D fəzası Skoroxod metrikası ilə tam separabel metrik fəzaya çevrilir və buna görə də, X^n , $n \geq 1$ semimartinqallar ardıcılığının X semimartinqalına yığılmasının təbii növlərindən biri ($X^n \xrightarrow{D} X$ simvolu ilə işarə olunur) X^n semimartinqallarının uyğun paylanmaları $\mathbf{P}^n$ -lərin X semimartinqalının paylanması $\mathbf{P}$ -yə zəif yığılması ($\mathbf{P}^n \xrightarrow{D} \mathbf{P}$ kimi işarə olunur) kimi anlaşıla bilinir. (Paylanmalar uyğun metrika ilə doğrulmuş və silindrik çoxluqların σ – cəbri ilə üst-üstə düşən Borel σ – cəbrində ehtimal paylanmaları kimi anlaşılar).

Hər bir X semimartinqalı ilə onun öngörül xarakteristikalarının tripleti $T(B, C, \nu)$ bağlıdır ki, bir çox hallarda o, X -in paylanması $\mathbf{P}$ -ni tamamilə təyin edir. Bununla bağlı olaraq,

$X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının şərtləri haqqında məsələnin təbii qoyuluşu tripletlərin bu və ya digər yığılmasının ($T^n \rightarrow T$) bu yığılmanı nə vaxt təmin etməsinin araşdırılmasından ibarətdir: $T^n \rightarrow T \Rightarrow X^n \xrightarrow{D} X$.

Maraq doğuran məsələlərdən biri də tripletlərin yığılması üçün X^n semimartinqallının bütün sonluölçülü paylanmalarının X -in paylanması ($X^n \xrightarrow{D_f} X$ kimi işarə olunur) və ya $S \subseteq \mathbb{R}_+$ çoxluğunda yığılmasını ($X^n \xrightarrow{D_f(S)} X$ kimi işarə olunur) təmin edən şərtlərin müəyyən olunmasıdır.

$T^n \rightarrow T$ yığılması terminləri ilə ifadə olunan $X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının (yeni $\mathbf{P}^n \xrightarrow{D} \mathbf{P}$ zəif yığılmasının) əsas ümumi isbat metodlarından biri aşağıdakı üç ara mərhələlərinin cəlb olunmasından ibarətdir:

I) paylanmalar ailəsinin sıxlığının müəyyənləşdirilməsi;

II) bütün zəif limitlərin xarakterizasiyası;

III) identifikasiya, yeni ixtiyari $\mathbf{P}' = \omega = \mathbf{P}^n$ ehtimal ölçüsü üçün

$$T^n \rightarrow T \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{P}$$

münasibətinin ödənilməsi.

Bu üç mərhələ ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremlərinin bir çox isbatlarında (məs., xarakteristik funksiyalar metodunda) bu və ya başqa cür də olsa iştirak edir. Əgər X , X^n xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$T = \{f(t), t \in \mathbb{R}\}, \quad T^n = \{f^n(t), t \in \mathbb{R}\}$$

olan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $T^n \rightarrow T$ yığılması xarakteristik funksiyaların nöqtəvi $f^n(t) \rightarrow f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ yığılması kimi anlaşılr və bu da, məlum olduğu kimi, X^n kəmiyyətlərinin paylanmalarının X kəmiyyətinin paylanmasına zəif yığılmasını təmin edir və bu halda uyğun isbat I, II, III mərhələlərinin cəlb olunması ilə apanılır. Bu zaman $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı (I mərhələdə) məlum

$$\mathbf{P}^n\{\mathbb{R} \setminus [-1/a, 1/a]\} \leq 7/a \int_0^a [1 - \operatorname{Re} f^n(t)] dt$$

qiymətləndirilməsindən və $t \in \mathbb{R}$, $f^n(t) \rightarrow f(t)$ yığılmasından alınır. Ədəd oxu üzərində paylanmalar halında $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı onun nisbi kompaktlığı ilə eynigüclüdür (« $\{\mathbf{P}^n\}$ -in hər bir altardıcılığından müəyyən bir ehtimal paylanması $\mathbf{P}'$ -ə zəif yığılan $\{\mathbf{P}^n\}$ altardıcılığı seçmək mümkündür»). Buna görə də, $\mathbf{P}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P}'$ və $f^n(t) \rightarrow f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ yığılmalardan aşağıdakı xarakterizasiya alınır: $\mathbf{P}'$ xarakteristik funksiyası $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ olan paylanmadır. Lakin xarakteristik funksiya birqiymətli olaraq uyğun paylanmanı təyin edir. Deməli, $\mathbf{P}'$ paylanması $\mathbf{P}$ ilə üst-üstə düşür (III mərhələ). Beləliklə, bütün zəif $w - \lim \mathbf{P}^n$ limitləri $\mathbf{P}$ ölçüsü ilə üst-üstə düşür, deməli, bütün $\{\mathbf{P}^n\}$ ardıcılığı $\mathbf{P}$ -yə yığılır, yeni $w - \lim \mathbf{P}^n$ vardır və bu limit $\mathbf{P}$ ilə üst-üstə düşür.

550 LİMİT

Təsvir olunmuş üç mərhələnin («sıxlıq» $\oplus$ «xarakterizasiya» $\oplus$ «identifikasiya») ideologiyası əslində $\{\mathbf{P}^n\}$ paylanmalar ailəsinin sıxlığını müəyyən etmək mümkün olduqda (ara nəticələri kimi) $X^n \xrightarrow{D} X$ limit (funksional) teoremlərinin isbatında və bütün sonluölçülü paylanmaların zəif yığılmasını müəyyən etmək mümkün olduqda, $X^n \xrightarrow{D_f} X$ limit teoremlərinin isbatında da istifadə olunur. Bu metod («sıxlıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması») $\mathbf{P}'$ paylanmalarının xarakterizasiyasını aşağıdakı kimi verməyə imkan verir (II mərhələ): $\mathbf{P}'$ ölçülərinin bütün sonluölçülü daralmaları $\mathbf{P}$ ölçülərinin sonluölçülü daralmaları ilə üst-üstə düşür.

D fəzası halında Borel σ -cəbri silindrik çoxluqların σ -cəbri ilə üst-üstə düşür. Silindrik çoxluqlar σ -cəbrində $\mathbf{P}$ paylanması sonluölçülü paylanmalarla tamamilə təyin olunur. Buna görə də, bu metodda III mərhələ trivial olur, yeni $\mathbf{P}'$ -in $\mathbf{P}$ ilə identifikasiyası, sadəcə olaraq, onların bütün sonluölçülü daralmaları vasitəsilə həyata keçirilir.

$T^n \rightarrow T \Rightarrow X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının isbat metodu «sıxlıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması» vasitəsilə əsasən o halda «işlək» olur ki, limit prosesi nisbətən sadə struktura malik olsun, məs., proses asılı olmayan artımları proses olduğu halda. Bir çox hallarda isə, məs., diffuzion tip proseslərə funksional yığılma məsələlərində $X^n \xrightarrow{D_f} X$ sonluölçülü paylanmalar yığılması üçün şərtlərin axtarılması çətin məsələdir və buna görə digər metodlara müraciət olunur. Belə metodlardan biri çox vaxt martinqal metodu adlandırılan metoddur. Metoda verilən ad onunla bağlıdır ki, burada baxılan X^n və X prosesləri semimartinqallar olduqda stoxastik hesabının və martinqallar nəzəriyyəsinin anlayışları və aparından istifadə olunur.

Bu metodun məzhi (I, II, III mərhələlərin cəlb olunması ilə) aşağıdakından ibarətdir. X^n və X - tripletləri $T^n = (B^n, C^n, v^n)$ və $T = (B, C, v)$ olan semimartinqallar olsun. Yəne də əvvəlcə $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı müəyyən olunur (tripletlərin yığılması əsasında və martinqal metodlardan istifadə etməqlə). Sonra göstərilir ki, tripletlərin fərz olunan $T^n \rightarrow T$ yığılması aşağıdakı xarakterizasiyanı təmin edir: paylanmaları $\mathbf{P}'$ - zəif, $w - \lim \mathbf{P}^n$ limiti olan bütün X' prosesləri semimartinqallardır, bunların tripletləri T' deqiqliklə T tripleti ilə üst-üstə düşür. Nəhayət, bu metodda III mərhələ T tripletinin X' semimartinqalının paylanmasını birqiymətli olaraq təyin etməsinin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir.

Konkret halların baxılması üçün aşağıda fərz olunur ki, X^n semimartinqallar, $n \geq 1$, $T^n = (B^n, C^n, v^n)$ uyğun tripletlərdir; X^n -lərin kumulyantı aşağıdakı kimidir:

$$G_t^n(\lambda) = i\lambda B_t^n - \frac{\lambda^2}{2} C_t^n + \int_0^t \int (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x)) v^n(ds, dx),$$

burada $h = h(x)$ - kəsilməz kəsik funksiyadır ($h(x) = h(-x)$, hər hansı $[-a, a]$ intervalı xaricində, $h(x) = 0$); $G^n(\lambda)$ üzrə qurulmuş

$$\mathcal{E}(G^n(\lambda))_t = e^{G_t^n(\lambda)} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta G_s^n(\lambda)) e^{-\Delta G_s^n(\lambda)}$$

stoxastik eksponenti

$$d\mathcal{E}(G^n(\lambda))_t = \mathcal{E}(G^n(\lambda))_t - dG_t^n(\lambda)$$

tənzimin həlli olsun.

Teorem 1. X^n , $n \geq 1$ – tripletləri T^n olan semimartinqallar. X – tripleti T olan, ehtimala görə kəsilməz, asılı olmayan artımlı proses olan semimartinqal olsun. Əgər

$$\mathcal{E}(G^n(\lambda))_t \rightarrow \mathcal{E}(G(\lambda))_t, \quad t \in S \subseteq \mathbb{R},$$

münasibəti ödənilərsə, onda bütün sonluölçülü paylanmalar üçün

$$\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_k}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P}_{t_1, \dots, t_k}, \quad t_i \in S, \quad i = 1, \dots, k$$

zəif yığılması ödənilir [burada $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_k}^n$ və $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_k}$ – $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n)$ və $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ vektorlarının paylanmalarıdır].

Bu teoremə xarakteristik funksiyalar metodunun teoremlərinin ümumiləşməsi kimi baxmaq olar və o, yığılma üçün «triplet» şərtlər almağa imkan yaradır.

Teorem 2. X^n , $n \geq 1$ – tripletləri $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ olan semimartinqallar olsun;

$$\tilde{C}_t^n = C_t^n + \int_{(0, t) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} h^2(x) \nu(ds, dx) - \sum_{0 < s \leq t} (\Delta B_s^n)^2$$

və $(T^n \rightarrow T)$ aşağıdakı şərtlər ödənilmiş olsun:

$$\sup_{s \leq t} \nu^n(\{s\} \times (|x| \geq \varepsilon)) \xrightarrow{P} 0,$$

$$B_t^n \xrightarrow{P} B_t, \quad \tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \tilde{C}_t,$$

$$g * \nu_t^n \xrightarrow{P} g * \nu_t, \quad t \in S, \quad g \in C_1,$$

$$\text{burada } g * \nu_t^n = \int_{(0, t) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} g(x) \nu(ds, dx),$$

$$g * \nu_t = \int_{(0, t) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} g(x) \nu(ds, dx).$$

və C_1 – sonsuzluqda limitləri olan, sıfır ətrafında sıfır bərabər

kəsilməz məhdud funksiyalar çoxluğudur. Onda $X^n \xrightarrow{D_f} X$.

Bu teoremlərdən aydındır ki, bunlardakı şərtlər erqodik teoremlərin öyrənilməsi xarakterini daşıyır (böyük ədədlər qanunu tipli). Buna əsasən hökm etmək olar ki, mahiyyət etibarilə bu teoremlər tripletlər üçün böyük ədədlər qanunu tipli şərtlərin (daha sadə olan) ödənilməsi üçün paylanmaya görə yığılmanın yoxlanılmasını doğuran teoremlərdir.

X ehtimala görə kəsilməz, asılı olmayan artımlı proses olarsa, $X^n \xrightarrow{D} X$ funksional yığılmasına görə «sıxıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması» metodu ilə aşağıdakı nəticə alınır: fərz olunur ki, ixtiyari $t > 0$ üçün

$$\sup_{s \leq t} |B_s^n - B_s| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{s \leq t} |\tilde{C}_s^n - \tilde{C}_s| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{s \leq t} |g * \nu_s^n - g * \nu_s| \xrightarrow{P} 0, \quad g \in C_1;$$

Onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

«Limit» prosesi X -in ehtimala görə kəsilməz olması şərtindən imtina etdikdə [bu determinə olunmuş $B = (B_t)_{t \geq 0}$, $C = (C_t)_{t \geq 0}$, $(g * \nu) = (g * \nu_t)_{t \geq 0}$, $g \in C_1$ funksiyalarının kəsilməzliyi ilə eynigüclüdür], $\mathcal{E}(G(\lambda))$ sıfır bərabər olmadığı halda əvvəlki nəticənin ümumiləşməsi alınır, yeni fərz olunur ki, Skoroxod topologiyasında $B^n \xrightarrow{P} B$, $\tilde{C}^n \xrightarrow{P} \tilde{C}$, $g * \nu^n \xrightarrow{P} g * \nu$, $g \in C_1$; onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

Daha ümumi hallarda, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ «limit» semimartinqalı kanonik şəkildə verilsə və onun tripleti $T = (B, C, \nu)$ D fazasının $x = (x_s)_{s \geq 0}$ funksiyalarında təyin olunmuşdursa, $I \oplus II \oplus III$ sxemi üzrə alınan aşağıdakı nəticə doğrudur: Sk – Skoroxod metriksi,

$$\text{Sk}(B^n, B \circ X^n) \xrightarrow{P} 0, \quad \text{Sk}(\tilde{C}^n, \tilde{C} \circ X^n) \xrightarrow{P} 0,$$

$$\text{Sk}(g * \nu^n, (g * \nu) \circ X^n) \xrightarrow{P} 0$$

və $T = (B, C, \nu)$ tripleti X semimartinqalının paylanmasını

birqiymətli təyin etmiş olsun; onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

Yuxarıda qeyd olunmuş triplet şərtlərini xüsusi hallar üçün konkretləşdirməklə bunlardan, məs., daha çox adət olunmuş terminlərlə aşağıdakı nəticələri almaq olur.

1) $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – kvadratik – integrallanan martinqal olsun; M – eyni zamanda spiralıdır (yeni stasionar artımlı prosesdir) və $X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$ olsun. Onda $X^n \xrightarrow{D} \eta w$ doğrudur,

burada $\eta^2 = \mathbf{M}(M_1^2 | J)$, J – invariant M çoxluqlarının sistemi, w isə η -dan asılı olmayan standart Viner prosesidir. Bu nəticə:

a) ikinci momentləri sonlu, yəni $\mathbf{M}\xi_t^2 < \infty$ və $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ olan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün Donsker invariantlıq prinsipini (əgər $M_{nt} = \sum_{k \leq [nt]} \xi_k$ olarsa, onda $X^n \xrightarrow{D} w$) və

1) $\xi_1, \xi_2, \dots$ – martinqal – fərq olan stasionar erqodik ardıcılıq olduqda analogi nəticəni daxilə alır.

2) $X^n = (X_t^n)_{t \geq 0}$ – kompensatorları $A^n = (A_t^n)_{t \geq 0}$ olan nöqtəvi proseslər, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – determinə olunmuş kompensatoru $A = (A_t)_{t \geq 0}$ olan nöqtəvi proses olsun (deməli, həm də asılı olmayan artımlı proses). Onda əgər $A_t^n \xrightarrow{P} A_t$, $\sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{P} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^2$ olarsa [bu $\text{Sk}(A^n, A) \xrightarrow{P} 0$ münasibətilə eynigüclüdür], $X^n \xrightarrow{D} X$ olur.

3) $\xi^n = (\xi_{nk}^n)_{k \geq 1}$ – hər bir $n \geq 1$ üçün ele stoxastik ardıcılıq olsun ki, ξ_{nk}^n -lər $\mathcal{A}_k^n$ - ölçülən olsunlar və $\mathcal{A}_0^n = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{A}_1^n \subseteq \mathcal{A}_2^n \subseteq \dots$. Fərz olunur ki,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{|\xi_{nk}^n| > \delta | \mathcal{A}_{k-1}^n\} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \delta \in (0, 1],$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\xi_{nk}^n I(|\xi_{nk}^n| \leq 1) | \mathcal{A}_{k-1}^n\} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\mathbf{M}\{\xi_{nk}^2 I(|\xi_{nk}^n| \leq \delta) | \mathcal{A}_{k-1}^n\} - \mathbf{M}\{\xi_{nk}^n I(|\xi_{nk}^n| \leq \delta) | \mathcal{A}_{k-1}^n\} \right] \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2.$$

Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}^n \xrightarrow{D} S$, burada S –

normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət, $\mathbf{M}S = 0$, $\mathbf{M}S^2 = \sigma^2$.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [2] Жаккод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994; [3] Стохастическое исчисление, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 49, М., 1989.

LİMİT TEOREMLƏRİ stoxastik differensial tənliklər üçün «предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений»; **limit theorems for stochastic differential equations** – stoxastik differensial tənliklərin həllərinin limite yaxınlaşması haqqında teoremlərdir. fərz olunur ki, verilən tənliyi təşkil edən elementlər (yəni başlanğıc şərti, tənliyin əmsalları, tənliyə daxil olan martinqal ölçüləri, semimartinqallar və s.) parametrdən (kəsilməz və ya diskret) asılıdırlar və bu parametrlin limit yaxınlaşmasında bu elementlər özələrini bu və ya digər şəkildə aparırlar (məs., limit stoxastik differensial tənliyinin elementlərinə müəyyən mənada yığılırlar). Bundan başqa, bu bölməyə həmçinin bu və ya digər dərəcədə ixtiyari strukturlu təsadüfi proseslərin (məs., sonluferqlərli tənliklər ardıcılıqlarının həlləri nəticəsində alınan proseslər) stoxastik differensial tənliklərinin həllərinə yığılma haqqında müddəalar da daxil olunur. Stoxastik differensial tənliklər üçün L. t. müxtəlif qoyuluşlarda bir çox müəlliflər tərəfindən isbat olunmuşdur. Aşağıda əsas tip məsələlər şərh olunmuşdur və bezi nəticələr verilmişdir.

1. Stoxastik differensial tənliklərin həlləri üçün ehtimala görə və kvadratik orta mənada yığılma.

a) Hər hansı ehtimal fəzasında parametrdən asılı olmayan semimartinqal, martinqal ölçüsü və verilmiş semimartinqal, martinqal üzrə inteqralları özündə saxlayan stoxastik differensial tənliyin əmsalları ardıcılığı verilir. Fərz olunur ki, əmsalların bu ardıcılığı müəyyən mənada limit stoxastik differensial tənliyin əmsallarına yığılır. Limiteqəderki tənliklərin həllərinin kvadratik orta mənada (və ya ehtimala görə) limit stoxastik differensial tənliyin həllinə yığılması araşdırılır. Olduqca «yaxşı» əmsallı stoxastik differensial tənliyin həllərinin varlığı teoremləri əsasında əvvəlki sonuncularla approssimasiya edərək, qeyri – Lipsits əmsallı stoxastik differensial tənliyin güclü həllərinin varlığı teoremlərini almaq olur. Əksinə, limit stoxastik differensial tənliyin güclü həllinin varlığı faktından limiteqəderki tənliklərin həllərinin bu həllə yığılmasının isbatında istifadə oluna bilər. Aşağıdakı nəticədən bu aydın olur (bax. [1], [2]).

d – ölçülü $w(t)$ Viner prosesi verilmiş hər hansı ehtimal fəzasında təsadüfi olmayan $x \in \mathbb{R}^d$ başlanğıc şərti və əmsalları $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ -də d dim. – ölçülü $a_n(t, y)$ vektor funksiyası və xətti operator funksiyası $\sigma_n(t, y)$ olan

$$dX_n(t) = a_n(t, X_n(t))dt + \sigma_n(t, X_n(t))dw(t),$$

$$X_n(0) = x \quad (1)$$

stoxastik differensial tənliklər ardıcılığının verildiyi fərz olunur. Əmsalların müntəzəm məhdud, fəza dəyişənə görə Lipsits əmsalları (ümumiyyətlə, n -dən asılı konstantlarla) olduğu fərz olunur; $\sigma_n \sigma_n^*$ operatorunun müntəzəm cırlaşmayan operator olduğu fərz olunur. Əgər sanki bütün t, x üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t, x) = a(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t, x) = \sigma(t, x)$$

münasibətləri ödənilərsə və

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t),$$

$$X(0) = x \quad (2)$$

tənliyinin güclü həlli varsa, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t)$ münasibəti kvadratik orta yığılma mənada $t \in [0, T]$ üzrə müntəzəm ödənilir.

b) Semimartinqal və martinqal ölçü parametrdən asılı olduqda a) bəndindəki məsələyə oxşar məsələnin qoyuluşu daha ümumdür. Aşağıda bu tipli olduqca ümumi nəticə şərh olunmuşdur (bax. [3]).

Her hansı ehtimal fəzasında ele d – ölçülü $(Z_n(t))_{t \in [0, T]}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ semimartinqallarının verildiyi fərz olunur ki, bütün $n = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərində $\mathbf{M} \sup_{t \leq T} |Z_n(t)|^2 < \infty$. Qiymətləri

$\mathbb{R}^d$ xətti operatorlar fəzasından olan, üç dəfə kəsilməz differensiallanan və bütün təoremlərlə birlikdə məhdud $\sigma(x)$,

$x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası üçün

$$X_n(t) = x + \int_0^t \sigma(X_n(s)) \circ dZ_n(s) \quad (3)$$

tənliyinə baxılır, burada sağdakı inteqral simmetrik stoxastik inteqraldır (Fisk – Stratonoviç inteqralı). Bu tənliyin həlli vardır və bu həll bütün $n = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərində yeganədir. $j, l = 1, 2, \dots, d$ qiymətləri üçün

$$Z_n^j(t) = \frac{1}{2} \left(\langle Z_n^j, Z_0^j \rangle_t - \langle Z_n^j, Z_0^j \rangle_t \right) - \int_0^t [Z_0^j(s) - Z_n^j(s)] d[Z_0^j(s) - Z_n^j(s)]$$

olsun, burada $\langle Z^j, Z^l \rangle_t$, $-Z^j$ və Z^l semimartinqallarının martinqal hissələrinin qarşılıqlı kvadratik xarakteristikasıdır (Z^j , $-Z$ vektorunun j -ci koordinatıdır). Fərz olunur ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \sup_{t \leq T} |Z_n(t) - Z_0(t)|^2 = 0$$

və bütün i, j üçün ələ məhdud variasiyalı $A^{ij}(t)$ prosesi vardır ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \sup_{t \leq T} |Z_n^j(t) - A^j(t)|^2 = 0.$$

Onda, əgər bəzi texniki xarakterli tələblər də ödənilərsə (bax. [3]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \sup_{t \leq T} |X_n(t) - X_0(t)|^2 = 0$$

doğrudur, burada $X_0(t)$, –

$$\begin{aligned} X_0^i(t) = & x^i + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_0(s)) \circ dZ_0^j(s) + \\ & + \sum_{j,k,l=1}^d \int_0^t \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k} (X_0(s)) \sigma_{kl}(X_0(s)) dA^{kl}(s), \\ & i = 1, 2, \dots, d \end{aligned} \quad (4)$$

tənliyinin həllidir ($X_0^i(t)$, – $X_0(t)$ vektorunun i -ci koordinatıdır).

Beləliklə, (3) stoxastik differensial tənliyində limitə keçid tənliyin sağ tərəfində əlavə toplananların yaranmasına səbəb olur. $A^{ij} = -A^{ji}$ bərabərliyi həmişə doğrudur, odur ki, $A^{ii} = 0$. Əgər bütün $i, j = 1, 2, \dots, d$ qiymətlərində $A^{ij} = 0$ da olarsa, onda $Z_0(t)$ semimartinqalının approksimasiyası $Z_n(t)$ simmetrik approksimasiya adlanır. Bu halda qeyd olunan nəticədən aşağıdakı müddəə alınır: (3) stoxastik differensial tənliyi $Z_0(t)$ semimartinqalının simmetrik kükrəntilərinə nəzərən dayanıqlıdır.

Yuxarıdakı nəticənin bir xüsusi halını qeyd etmək diqqətəlayiqdir. $d = 1$, (3) tənliyi isə (2) İto stoxastik differensial tənliyi şəklində yazılmış olsun. Əgər bu tənlikdə Viner prosesini hamar $w_n(t)$ prosesləri ilə ələ approksimasiya etmək olarsa ki,

$$\mathbf{M} \sup_{t \leq T} |w_n(t) - w(t)|^2 = 0 \text{ olsun, onda}$$

$$X_n(t) = x + \int_0^t a(s, X_n(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X_n(s)) w_n(s) ds$$

tənliyinin həlli $X_n(t)$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \sup_{t \leq T} |X_n(t) - X(t)|^2 = 0$$

münasibəti doğrudur, burada $X(t)$, –

$$\begin{aligned} X(t) = & x + \int_0^t \left[a(s, X(s)) + \frac{1}{2} \sigma(s, X(s)) \frac{\partial \sigma(s, X(s))}{\partial x} \right] ds + \\ & + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dw(s) \end{aligned}$$

İto tənliyinin həllidir və bu həll Stratonoviç formasında

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) \circ d\omega(s)$$

şəklində ifadə olunur.

Bu nəticədən aydın olur ki, belə teoremlərdə Fisk – Stratonoviç integralından istifadə etmək daha məqsədəuyğundur.

2. Stoxastik differensial tənliklərin həllərinin zəif yığılması.

a) Ələ əmsallar ardıcılığının verildiyi fərz olunur ki, uyğun stoxastik differensial tənliklər funksional fəzada (kəsilməz funksiyalar fəzasında, Skoroxod fəzasında və s.) ölçülərin zəif kompakt ardıcılığını təyin etmiş olsun. Verilən ardıcılıq üçün zəif yığılma mənada limit ölçülərinin təsviri məsələsi araşdırılır. Əgər əlavə olaraq tələb olunarsa ki, limitə qədərki tənliklərin əmsalları limit tənliklərinin əmsallarına yığılsın (hər hansı mənada), onda hamar olmayan əmsalları stoxastik differensial tənliklərin zəif həllərinin varlığı teoremlərini almaq olur (bu metodu A. V. Skoroxod ilk dəfə [4]-də kəsilməz əmsalları stoxastik differensial tənliklərin həllərinin varlığının isbatı üçün tklif etmişdir). Təqdirəlayiqdir ki, bəzi şərtlərlə limit ölçüsü, əmsalların yığılması fərziyyəsi olunmadan, stoxastik differensial tənliyin həllinə uyğun olur. Bu aşağıdakı nəticədən aydındır (bax, [5]).

(1) tənliyinin əmsalları müntəzəm məhdud, σ_n, σ_n^* operatoru cırlaşmayan operator olsun; əmsalların hər bir n qiymətində x -ə görə töreməsi məhdud, hamar funksiya olduğu fərz olunur. Onda kəsilməz funksiyalar fəzasında (1) tənliyinin həllərinə uyğun ölçülər ardıcılığı zəif kompakt ardıcılıqdır və bu ardıcılıq üçün limit ölçüsü olan ixtiyari ölçü (2) şəklində hər hansı stoxastik differensial tənliyin həllinə uyğundur. Bu tipli nəticələr elliptik və parabolik operatorların G -yığılma anlayışı ilə bağlıdır.

Əmsalların məhdudluq şərti nəzərə alınmadıqda vəziyyət çətinləşir. Bu aşağıdakı misalda aydın olur (bax, [6]).

M i s a l. (1) tənliyində $d = 1$, $\sigma_n(t, x) \equiv 1$, $a_n(t, x) = n \cos nx$ olsun. İsbat etmək olar ki, belə tənliklərə uyğun ölçülər ardıcılığı $a(t, x) \equiv 0$, $\sigma(t, x) \equiv k$ olan (2) tənliyinin

$$\text{həllinə uyğun ölçüyə zəif yığılır, burada } k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-2} \right)^{-1}.$$

b) Əksər hallarda kiçik $\varepsilon > 0$ parametrlı stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Bu sahədə həm nəzəri, həm də tətbiqi xarakterli nəticələr stoxastik differensial tənliklər üzrə bütün nəşrlərin əsas hissəsini təşkil edir. Bu sahədə araşdırılan məsələlərin yalnız bəzələrinin keyfiyyətli təsviri aşağıda şərh olunmuşdur.

Əgər ε parametri (2) tənliyinin sağ tərəfindəki ikinci toplanana vuruc kimi daxil olarsa, onda uyğun sistem kiçik təsadüfi kükrəntiyə məruz qalan 1-ci tərtib adi differensial tənliklərlə ifadə olunan dinamik sistem kimi interpretasiya olunur. Bu halda ya kükrəntiyə məruz qalmış sistemin böyük zaman intervalllarında (ε^{-1} , ε^{-2} , ... ilə müqayisə olunan) dəyişiklikləri, ya da $\varepsilon \downarrow 0$ olduqda azehtimallı hadisələrin asimptotikası, məs., kiçik diffuziya nəticəsində prosesin verilmiş oblaştın sərhədinə çıxması kimi (bu oblaşt dayanıqlı tarazlıq nöqtəsini özündə saxlayarsa) hadisənin asimptotikası araşdırıla bilər (bax, [8]).

Kiçik parametrlı stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlərin mühüm sinfi komponentlərinin bir hissəsi sürətlə dəyişən (bu komponentlər tez zamanda t/ε , t/ε^2 və s. olduqda fəaliyyət göstərir) sistemlər əmələ gətirir. Məsələ sürətli komponentlərin bütün sisteme təsirini təsvir etməkdən ibarətdir. Aydın olmuşdur ki (bax, [7]), $\varepsilon \downarrow 0$ olduqda bu təsir sürətli komponentlərin erqodik paylanması üzrə xarakteristikalan ortalanana sisteme gətirir (bunların erqodikliyi fərz olunur). Bu Boqolyubov ortalaması prinsipinin stoxastik variantına uyğundur.

3. Təsadüfi proseslərin stoxastik differensial tənliyin həllərinə yığılması. «Stoxastik differensial tənlik» terminini [9]-də S. N. Bernşteyn təklif etmişdir, o, bu termini Fokker – Plank tənliyinin həllində bəzi sonluferqləri sxemlərdə yaranan Markov zəncirlərinin paylanmalarının yığılmasını araşdırarkən istifadə etmişdir. Markov zəncirlərinin doğurduğu proseslərin diffuzion proseslərə zəif yığılması haqqında olduqca ümumi teoremlər [11]-də şərh olunmuşdur; daha ümumi stoxastik differensial tənliklərlə ifadə olunan proseslərə yığılma ilə [10]-də tanış olmaq olar.

İxtiyari təbii proseslərin stoxastik differensial tənliklərin həllərinə yığılması üçün ümumi teoremlər [10]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] З в о н к и н А. К., К р ы л о в Н. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 25–30 ноября 1974 г.), т. 2, Вильнюс, 1975, с. 9–88; [2] С к о р о х о д А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 4, с. 675–82; [3] М а ц к я в и ч ю с В., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 4, с. 72–84; [4] С к о р о х о д А. В., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 1, с. 129–37; [5] А л ю ш и н а Л. А., К р ы л о в Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 1, с. 3–13; [6] К у л и н и ч Г. Л., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1976, в. 15, с. 99–114; [7] С к о р о х о д А. В., Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, К., 1987; [8] В е н т - ц е л ь А. Д., Ф р е й д л и н М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [9] Б е р н ш т е й н С. Н., «Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова», 1934, т. 5, с. 95–124; [10] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [11] S t r o o c k D. W., V a r a d h a n S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – Hdlb. – N. Y., 1979.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi çoxluqlar üçün «предельные теоремы для случайных множеств: **limit theorems for random sets**» – təsadüfi çoxluqların paylanmalarının asimptotikası haqqında teoremlərdir. Təsadüfi çoxluqlar üçün L. t.-nin müxtəlif növləri vardır. Bunlardan birincisi Banax fəzasında təsadüfi kompaktların Minkovski cəmlənməsi ilə bağlıdır (bax, *Minkovski eməlləri*). A_i – təsadüfi kompakt çoxluqlar. M_i – determinə olunmuş kompaktlar, ρ – Hausdorf metriki olsun:

$$\lim_n \rho \left(\frac{1}{b_n} \oplus_{i=1}^n A_i, \frac{1}{b_n} \oplus_{i=1}^n M_i \right) = 0, \quad b_n > 0$$

münasibəti şəklində sanki yəqin və ya ehtimala görə yığılma haqqında teoremlər böyük ədədlər qanunları adlanır. Bir qədər zəif normalanmalarla asimptotik yaxınlaşmalar haqqında teoremlər mərkəzi limit teoreminin analoglarıdır. Bu növ faktların isbatlan bir qayda olaraq, qabarıq A_n -lər halına gətirilməyə əsaslanır ki, bunlara dayaq (təsadüfi) funksiyalarını qarşı qoymaq olur və bu funksiyalara sferada kəsilməz funksiyaların Banax fəzasının elementləri kimi baxmaq olur.

Xüsusi halda, A_k – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış, riya-zi gözləmələri olan (bax, *Riyazi gözləmə (si) təsadüfi çoxluğun*) təsadüfi kompaktlar və $b_n = n$ olarsa, gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Xinqin teoreminin analoqu doğrudur, bu halda M_k əvəzinə A_i -in riya-zi gözləməsini götürmək kifayətdir (bax, [1], [3], [5]).

Müxtəlif tədqiqlər üçün $\oplus_{i=1}^n A_i = A$ cəmlərinin funksionalların paylanmalarının asimptotikası haqqında L. t.-nin nəticələri, adətən, maraqlıdır, məs., A çoxluğunun eni

$$br(A) = \inf_{\|\alpha\|=1} (\kappa_A(\alpha) - \kappa_A(-\alpha))$$

haqqında, A -nin diametri

$$diam(A) = \sup_{\|\alpha\|=1} (\kappa_A(\alpha) - \kappa_A(-\alpha))$$

haqqında, x nöqtəsinə nəzərən asimmetriya dərəcəsi

$$asym_x(A) = \sup_{\|\alpha\|=1} (\kappa_A(\alpha) - \kappa_A(-\alpha) - 2(\alpha, x))$$

haqqında (burada κ_A – A qabarıq örtüyünün dayaq funksiyası, (α, x) – skalyar hasilidir).

İkinci tip L. t. *sonlu təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinə* təbii surətdə yaranır. Məs., (A_k) qeyd olunmuş sonlu universumun asılı olmayan altçoxluqlarının ardıcılığı, $M_n(p)$ isə $A_1, \dots, A_n$ -lərin empirik ortası, $M(A_1, p)$, – A_1 -in tərtibi p -yə bərabər orta qiymətidir (bax, *Riyazi gözləmə (si) təsadüfi çoxluğun*), onda hər hansı təsadüfi nömrədən başlayaraq $M_n(p) = M(A_1, p)$ bərabərliyi 1 ehtimalla doğrudur (bax, [4]).

Üçüncü tip L. t.-ində təsadüfi proseslərin trayektoriyalarının grafikləri ardıcılığına təsadüfi çoxluqlar kimi baxılır və bu təsadüfi çoxluqların paylanmalarının zəif yığılmasının müxtəlif əlamətləri müəyyənləşdirilir. Belə ki, müstəvidə qapalı təsadüfi çoxluqların $\mathcal{P}_n$ paylanmaları ardıcılığının zəif yığılması üçün $[x, z] \times [t, y]$ düzbucaqlılarının sonlu birləşmələrində uyğun müşayiətedici funksionalların yığılması kifayətdir, burada (x, y) , (z, t) nöqtələri müstəvidə sıx çoxluqdan götürülür. Xüsusi halda, proseslərin ilkin ardıcılığı $X_n(t) = b_n X(n t)$ şəklində olarsa, burada $X(t) = \alpha_{[t]} + \{t\} 1_W([t]) (\alpha_{[t+1]} - \alpha_{[t]})$, α_i – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $[t]$ t -nin tam hissəsi, $\{t\} = t - [t]$, 1_W – W çoxluğunun indikatorudur, $W \subset \mathbb{Z}_0^+$. Onda təsadüfi çoxluqların mümkün limit paylanmaları sinfi $T(K) = 1 - \exp(-\mu_0(K))$ şəkilli müşayiətedici funksionallarla verilir, belə ki, $\mu_0 = \pi(J)\mu + (1 - \pi(J))\mu^*$, burada $J = Y \cap (Y + 1)$, $Y = \mathbb{Z}_0^+ \setminus W$, π – çoxluğun asimptotik sıxlığı, $\mu = \text{mes}_1 \otimes \nu$, mes_1 – birölçülü Lebeq ölçüsü, ν – yarımxonda üstlü monoton funksiyalarla verilən, ədəd oxunda ölçüdür, $\mu^*(K) = \mu(K^*)$.

$$K^* = \bigcup_{(x, y) \in K} (\{x\} \times [\min(0, y), \max(0, y)])$$

Burada həll olunan məsələlər dairəsinə cırlaşmayan paylanmaya yığılma, qeyd olunmamış nöqtəlersiz (yeni limit realizasiyasına sanki yəqin aid olan x nöqtələri) paylanmaya yığılma şərtlərinin axtarılması, həmçinin ilkin trayektoriyaların müxtəlif funksionallarının paylanmalarının yığılması aiddir.

Əd.: [1] Artstein Z., Vitale R. A., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 5, p. 879–82; [2] Cressie N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, № 1, S. 37–47; [3] «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 990; [4] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [5] Ляшенко Н. Н., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1979, т. 85, с. 113–28; [6] Ляшенко Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 81–90.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi matrislər üçün «предельные теоремы для случайных матриц; limit theorems for random matrices»

— çoxsaylı təsadüfi faktorların təsiri nəticəsində yaranan bu və ya digər qanunauyğunluqların şərtlərini göstərən *təsadüfi matrislər* nəzəriyyəsinin bir sıra teoremlərinin ümumi adıdır. Bu teoremləri üç böyük qrupa ayırmaq olar. Birinci qrupa təsadüfi matrislərin elementlərinin bəsit funksiyalarının asimptotik paylanmaları haqqında, bu matrislərin tərtibi sonsuzluğa yaxınlaşdığı hal üçün teoremlər aiddir. İkinci qrupu sayı sonsuzluğa yaxınlaşan təsadüfi matrislərin hasilərinin bəzi funksiyalarının asimptotik paylanması haqqındakı teoremlər təşkil edir. Üçüncü qrupa *seriyalar sxemindəki* L. t. aid olunur, bu halda təsadüfi matrislərin paylanmaları matrislərin sayından (seriyanın nömrəsindən) asılıdır.

Birinci qrup teoremlər atom nüvələrinin energetik səviyyələrinin bəzi modellərinin araşdırılması ilə bağlı yaranmışdır, bunlar

$$\mu(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi(\lambda_k < x)$$

təsadüfi matrislərinin normalanmış spektral funksiyaları üçün L. t.-dir, burada λ_k — tərtibi n -ə bərabər $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ kvadrat həqiqi matrisinin məxsusi qiymətləri, $\chi(\lambda_k < x)$ isə $(\omega: \lambda_k < x)$ hadisəsinin indikatorudur. İsbat olunmuşdur ki, $\mu_n(x)$ ehtimala görə sıxlığı yarımçevrə şəklində olan müəyyən təsadüfi olmayan funksiyaya yaxınlaşır. Bu hökm *semi — dairevi qanun* adlanır.

Sonrakı araşdırmalar təsadüfi matrisin diaqonalda yerləşən və diaqonaldan yuxarıdakı elementləri asılı olmayan və sonsuz kiçilən olduqda *simmetrik təsadüfi matrislərin* limit spektral funksiyalarının ümumi ifadəsinin tapılmasına istiqamətlənmişdir. Bu halda olduqca ümumi şərtlərlə limit spektral funksiyaların Stiltjes çevirmələri *kanonik spektral tənlili* ödəyirlər.

Qeyd olunan L. t.-dən başqa $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ *qeyri — simmetrik təsadüfi matrislərinin*

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \chi(\operatorname{Re} \lambda_k < x) \chi(\operatorname{Im} \lambda_k < y)$$

normalanmış spektral funksiyalarının limit yaxınlaşmaları haqqında teoremlər isbat olunmuşdur. İsbat olunmuşdur ki, limit spektral funksiyaların sıxlığı sərhədi ellips olan oblastda konstanta bərabərdir (bax, *Elliptik qanun*). Ξ təsadüfi matrislərinin məxsusi qiymətləri üçün L. t. də birinci qrup teoremlərə aiddir. Bu teoremlərin isbatında

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\operatorname{tr} \Xi_n \Xi_n^* \geq h\} = 0$$

şərtindən istifadə olunmuşdur. Əsas nəticə ondan ibarətdir ki, bu şərt ödənildikdə və həmçinin Ξ_n təsadüfi matrisinin elementləri asılı olmayan və sonsuz kiçilən olduqda, Ξ_n matrisinin modullarının artmasına görə nizamlanmış məxsusi qiymətləri müəyyən qaydalı statistikanın hədləri kimi paylanır. Bu da təsadüfi matrisin məxsusi qiymətlərinin limit paylanmasının tapılmasına imkan yaratmışdır (bax, [1]). Təsadüfi matrisin determinanı üçün L. t. də birinci qrupun mühüm teoremləri kimi sayılır. Mərkəzi L. t. tipli teoremlər isbat olunmuşdur (bax, *Təsadüfi determinant*) ki, bu teoremlər kimi aşağıdakı ixtiyari müddəə anlaşılır. Hər hansı sabit α_n və b_n qiymətlərində və Ξ_n təsadüfi matrisinin üzərinə qoyulan bəzi şərtlərlə aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{b_n^{-1} [\ln |\det \Xi_n| - \alpha_n] < x\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Birinci qrupa aid növbəti teoremlər sinfi əmsalları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan $\Xi_n x_n = b_n$ xətti cəbri tənliklər sisteminin həlləri üçün bu tənliklərin dərəcəsi sonsuzluğa yaxınlaşdığı halda baxılan L. t.-dir. Burada *arktangens qanunu* əsas yer tutur (bax, [1]): $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^n$ təsadüfi matrisinin elementləri ξ_{ij} və b_n vektorunun elementləri asılı olmayan, riyazi gözlemələri sıfır, dispersiyaları 1-ə bərabər *əle təsadüfi kəmiyyətlərdir* ki, onların $4 + \delta, \delta > 0$ tərtib momentləri məhduddurlar, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_k < r\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg z$$

münasibəti doğrudur, burada x_k — həllin k -cı komponentidir.

İkinci qrup L. t. təsadüfi matrislərin hasilərinin elementlərinin bəzi funksiyalarının limit paylanmalarının öyrənilməsi üçün araşdırmaları əks etdirir, bu araşdırmalar üç istiqamətdə aparılır. Birinci istiqamətdə kompakt qrupda qiymətlər alan asılı olmayan matrislərin limit paylanmaları öyrənilir. Bu halda fərz olunur ki, matrislərin paylanmaları bu qrupda Haar ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir, bəzi əlavə şərtlərlə belə asılı olmayan matrislərin hasiləri üçün limit ölçüsü bu qrupda normalanmış Haar ölçüsünə bərabərdir (bax, [2]). İkinci istiqamət limit paylanmalarının öyrənilməsi və qiymətləri müəyyən lokal kompakt qrupdan olan

asılı olmayan A_i təsadüfi matrislərinin hasiləri $\prod_{i=1}^n A_i$ -lərin

normalanmış funksiyalarının paylanmalarının bu limit paylanmalarına yığılma şərtlərinin öyrənilməsi ilə bağlıdır (bax, [3]).

Normalanmış funksiyalar kimi bir qayda olaraq $X_n = \prod_{i=1}^n A_i$

matrislər hasilə $X_n = U_1 \Lambda U_2$ kimi ifadə olunan matris, burada

U_1 və U_2 — ortoqonal (unitar) matrislərdir və $\Lambda = \|\lambda_i \delta_{ij}\|$ — mənfə olmayan elementləri diaqonal matris götürülür. Onda X_n matrisinin normalanmış funksiyaları kimi

$$\{[\ln \lambda_i(X_n) - \alpha_n] b_n^{-1}, i = 1, \dots, m, U_1(X_n), U_2(X_n)\}$$

funksiyalar götürülür, burada α_n və b_n — bəzi normalayıcı funksiyalardır. Üçüncü istiqamət $X_n = F_n(X_{n-1}) + B_{n-1}$ şəkilli rekurrent tənliklərin həllərinin paylanmalarının öyrənilməsi ilə bağlıdır, burada $F_n(x)$ və B_{n-1} — uyğun olaraq, asılı olmayan təsadüfi matris funksiyalar və təsadüfi matrisdir. Xüsusi halda, rekurrent tənliklər sisteminin parametrlərinin qiymətləndirilmə məsələləri belə tənliklərin öyrənilməsinə gətirir.

Üçüncü qrup L. t. seriyalar sxemində təsadüfi matrislərin hasilərinin asimptotik yaxınlaşmasına aid teoremlərdir, bu halda fərz olunur ki, seriyanın nömrəsi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda hər bir təsadüfi matris ehtimala görə hər hansı təsadüfi olmayan matrisə yaxınlaşır (bax, [6]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов. К., 1980; [2] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [3] Т у т у б а л и н В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 19–32; [4] А н д е р -

сон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Д а й с о н Ф., Статистическая теория энергетических уровней сложных систем, пер. с англ., М., 1963; [6] Б у ц а н Г. П., Статистические полу-группы, К., 1977; [7] М е х т а М. Л., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. - L., 1967; [8] F u r s t e n b e r g H., K e s t e n H., «Ann. Math. Statist.», 1960, v. 31, p. 457-69.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi proseslər üçün «предельные теоремы для случайных процессов; limit theorems for stochastic/random processes» – təsadüfi proseslərin bu və ya digər mənada limit prosesinə yığılma şərtlərini müəyyənləşdirən teoremlərdir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası və $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T)$, – T parametrik çoxluğunda həqiqi qiymətli $x(t)$ funksiyaların fəzası, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ – ixtiyari $t \in T$ və $u \in \mathbb{R}$ üçün $\{x(t) < u\}$ silindrik çoxluqlarını özündə saxlayan, T fəzasının çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasının $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasına ölçülən inikası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də [və ya $(\mathcal{X}(T), \mathcal{B}_{\mathcal{X}(T)}, \mathbf{P})$ -də] verilmiş $t \in T$ parametrindən asılı $X(t, \omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ailəsi kimi interpretasiya olunan təsadüfi prosesdir. T kimi, adətən, birölçülü və ya çoxölçülü interval (bu hallarda proses və ya kəsilməz zamanlı meydan) və ya sonsuz ardıcılıq (diskret zamanlı proses) götürülür. Ehtimal fəzası kimi $(\mathcal{X}(T), \mathcal{B}_{\mathcal{X}(T)}, \mathbf{P})$ seçimi fəzasının özünü götürmək məqsəduyğun sayılır, burada $\mathbf{P}$, – Ω əzasının $\mathcal{X}(T)$ fəzasına inikası ilə doğrurulmuş ölçüdür.

Təsadüfi proseslərdə, $[0, T]$, $T > 0$ şəkilli T çoxluqları üçün, adətən, aşağıdakı fəzalara baxılır.

1. $\mathcal{X}(T) = (\mathbb{R})^{[0, T]} = \prod_{t \in T} (\mathbb{R})^t$ fəzası $X(t, \omega)$ təsadüfi prosesinin qiymətlər çoxluğudur; burada $(\mathbb{R}^t)$, – $(-\infty, \infty)$ həqiqi oxunun nümunəsidir. $(\mathbb{R})^{[0, T]}$, – T -də bütün həqiqi funksiyalar fəzasıdır. Bu fəzaya silindrik çoxluqların doğruduğu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{[0, T]}}$ σ – cəbri ilə birlikdə baxmaq məsləhətdir.

2. $\mathcal{X}(T) = C(0, T) = [0, T]$ -də bütün kəsilməz funksiyalar fəzasıdır; bu fəzaya silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşən Borel çoxluqlarının σ – cəbri $[\rho_C(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|]$ müntəzəm metrikasına nəzərən $\mathcal{B}_{C[0, T]}$ ilə birlikdə baxılır.

3. $\mathcal{X}(T) = D(0, T)$ – hər bir nöqtədə ya sağdan və ya soldan kəsilməz, $x(0) = x(+0)$, $x(T) = x(T-0)$ və 2-ci növ kəsilmə nöqtələri olmayan, $[0, T]$ -də bütün $x(t)$ funksiyalarının fəzası; $\mathcal{B}_{D(0, T)}$ σ – cəbri kimi, silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşən, Skoroxod – Proxorov metrikası ρ_D -yə nəzərən Borel σ – cəbri götürülür.

$X_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ təsadüfi prosesləri üçün iki tip L. t.-ne baxmaq olar. Birinci tipdə (bu daha çox yayılmışdır) X_n -in eyni bir ehtimal fəzasında verilmədiyini fərz olunur və bu halda X_n proseslərinin paylanmalarının yığılmasına baxılır. İkinci tipdə X_n

prosesləri eyni bir fəzada verildiyi halda X_n -lərin trayektoriyalarının yığılmasına baxılır.

$X_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ təsadüfi prosesləri ardıcılığı – $\mathcal{X}$ -də, ümumiyyətlə isə, eyni ehtimal fəzasında verilməyən təsadüfi proses olsun. Əgər $t_1, \dots, t_k$ -lərin ixtiyari $(t_i \in S)$ toplusu üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k))$ topluslarının birgə paylanması $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ toplusunun paylanmasına zəif yığılarsa, X_n prosesinin sonluölçülü paylanmaları $S \subset T$ çoxluğunda X prosesinin sonluölçülü paylanmalarına $\mathcal{X}$ -də (zəif) yığılır, deyilir. Bu, proseslərin yığılmasının ən geniş anlayışıdır. Lakin bu tətbiq cəhətdən kafi deyildir, çünki, ümumiyyətlə, X_n -in funksionallarının geniş sinfi üçün paylanmaların yığıl-

masını təmin etmir [məs., $\int_a^b \varphi(X_n(t)) dt$, $\sup_{t \in [a, b]} X_n(t)$ kimi].

Təsadüfi proseslər üçün yığılma teoremləri həmişə bu və ya başqa cür paylanmaları öyrənilən proses funksionallarının sinfi ilə bağlıdır.

Təsadüfi proseslər üçün yığılma teoremlərini növlərə ayırmaq olar: ümumi teoremlər (bunlar $\mathcal{X}$ fəzasının təbiəti ilə bağlı olmayan teoremlərdir, $\mathcal{X}$ -i, məs., ixtiyari topoloji fəza hesab etmək olar) və konkret fəzalarda [məs., $C[0, T], D(0, T)$] verilmiş proseslər üçün yığılma teoremləri, ya da xüsusi funksionallar sinfində yığılma teoremləri.

Ümumi teoremlər. Təsadüfi proseslər üçün ümumi L. t.-nin alınmasına bir neçə yanaşma vardır.

1. Ölçülərin zəif yığılma aparatının metrik (və ya topoloji) fəzalarda istifadə olunması. Bu yanaşma Yu. Proxorov tərəfindən [1]-də işlənmişdir. Fərz olunur ki, $\mathcal{X}$ metrikası $\rho_{\mathcal{X}}(x, y)$ olan metrik fəza, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ onun Borel çoxluqlarının σ – cəbridir və silindrik çoxluqları özündə saxlayır.

Bütün mümkün olan $f \in C(\mathcal{X})$ kəsilməz funksionallarının $f(X_n)$ -lərin paylanmalarının yığılması, yeni $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{f(X_n) < u\} \Rightarrow \mathbf{P}\{f(X) < u\} \quad (1)$$

yığılması öyrənilir. Bu yığılma $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasında σ – additiv ölçülərin zəif yığılmasına ekvivalentdir. Əgər $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}$, – $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasında X_n və X ($\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(X_n(\cdot) \in A)$) proseslərinə uyğun paylanmalaradırsa, onda $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılması

$$\int f d\mathbf{P}_n \rightarrow \int f d\mathbf{P}$$

münasibətinin ixtiyari məhdud $f \in C(\mathcal{X})$ funksionalı üçün ödənilməsi kimi anlaşılmalıdır; bu isə (1) yığılmasına ekvivalentdir.

$\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılmasını $\mathbf{P}_n(A)$ -nin $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ çoxluqlarının xüsusi siniflərində yaxınlaşma xüsusiyyətləri ilə xarakterizə etmək olar. Doğrudan da, $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yaxınlaşması, yalnız və yalnız, o halda yerinə yetir ki, aşağıdakı ekvivalent şərtlərdən biri:

1) $\mathbf{P}_n(A) \rightarrow \mathbf{P}(A)$ münasibəti bütün $\mathbf{P}$ – kəsilməz çoxluqların sinfi $D_{\mathbf{P}} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}; \mathbf{P}(\partial A) = 0\}$ üçün; burada ∂A , – A çoxluğunun sərhədidir;

2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(F) \leq \mathbf{P}(F)$ münasibəti bütün qapalı $F \subset \mathcal{X}$ çoxluqlarında;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf P_n(G) \geq P(G)$ münasibəti bütün açıq $G \subset \mathcal{X}$ çoxluqlarında ödənilsin (Aleksandrov teoremi).

1) şərtindən bütün $f \in C_P(X) \supset C(\mathcal{X})$ funksionallar üçün $f(X_n)$ -lərin paylanmalarının yığılması alınır, burada $C_P(X)$, – P – kesilməz funksionalların, yeni $A \subset \mathcal{X}$ çoxluğunda kesilməz funksionalların sinfidir, $P(A) = 1$.

1) – 3)-də qeyd olunmuş çoxluqlar sinifləri yoxlanılma üçün demək olar ki, olduqca genişdir və yoxlama üçün əlverişli deyildir. Əgər ixtiyari deyil, yalnız sekvensial kompakt $\{P_n\}$ ailələrinə baxılırsa, vəziyyət olduqca dəyişir. Bu məsələnin qoyuluşunun daralması deyildir, belə ki, $\{P_n\}$ ailələrinin kompaktlığı $P_n \Rightarrow P$ yığılması üçün zəruridir. $\{P_n\}$ ardıcılıqlarının kompaktlığı üçün $P_n \Rightarrow P$ yığılması A çoxluqlarının daha dar siniflərində $P_n(A) \rightarrow P(A)$ yaxınlaşması ilə təmin olunur.

Əgər ixtiyari Q ölçüsü üçün $P(A) = Q(A)$ bərabərlikləri bütün $A \in \mathfrak{A}D_P$ çoxluqları üçün $Q = P$ bərabərliklərini doğursa, $\mathfrak{A}$ sinfi P ölçüsünü təyin edir, deyilir.

Əgər $\mathfrak{A}$ cəbr olarsa və $\sigma(\mathfrak{A}D_P) = \mathcal{B}_X$ şərti [$\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{B}_X$ şərti kifayət deyil] ödənilsə, $\mathfrak{A}$ sinfi P ölçüsünü təyin edir.

Analoji olaraq, f funksionallarının Φ sinfi daxil olunur, bu funksionallar X prosesinin paylanması P -ni təyin edir: ixtiyari Q üçün $f(X)$ paylanmalarının $f \in \Phi \cap C_P(\mathcal{X})$ üçün üst-üstə düşməsi $P = Q$ bərabərliyini doğurur.

$P_n \Rightarrow P$ yığılması üçün zəruri və kifidir ki:

1) P_n ardıcılığı sekvensial kompakt olsun;

2) P ölçüsünü təyin edən $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}$ hadisələr sinfi olsun ki, hər bir $A \in \mathfrak{A}D_P$ üçün $P_n(A) \rightarrow P(A)$ ödənilsin (bax, [1], [2]).

2) şərtinə alternativ P ölçüsünü təyin edən funksionallar sinfi Φ -in varlığı şərti ola bilər ki, bütün $f \in \Phi \cap C_P(\mathcal{X})$ üçün $P\{f(X_n) < u\} \rightarrow P\{f(X) < u\}$ münasibəti ödənilsin.

Əgər trayektoriyalar fəzası $\mathcal{X}$ kimi topoloji vektor fəzasına baxılırsa, onda ölçü təyin edən funksionallar sistemi kimi $\mathcal{X}$ -də xətti kesilməz funksionallardan ibarət və $\mathcal{X}$ ilə qoşma $\mathcal{X}^*$ fəzasını istifadə etmək olar.

$$\chi(x^*, P) = \int e^{ix^*(x)} dP(x)$$

qiymətinə P ölçüsünün xarakteristik funksionalı [yeni $\chi(x^*, P)$ -yə] deyilir, $x^*(x) \in \mathcal{X}^*$. Əgər $\mathcal{X}$ lokal qabanq fəza olarsa, onda xarakteristik funksionallar ixtiyari P ölçüsünü birqiymətli təyin edir (bax, [3]).

$\{P_n\}$ ardıcılıqlarının kompaktlıq şərtlərini müəyyənləşdirdikdə $\{P_n\}$ ailəsinin sıxlıq anlayışı mühüm rol oynayır. İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε $K = K_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ kompaktı varsa ki, $P_n(K) > 1 - \varepsilon$ şərti bütün n -lər üçün ödənilsin, onda $\{P_n\}$ paylanmalar ailəsi $\mathcal{X}$ -də sıx ailə adlanır. Aşağıdakı Proxorov teoremi doğrudur: $\{P_n\}$ ailəsi kompaktdırsa, o, sekvensial kompaktdır. Əgər $\mathcal{X}$ tam separabel fəza olarsa, onda tərs müddəa da doğrudur (bax, [2]).

Bir çox funksionallar fəzaları üçün [məs., $C(0, T)$, $D(0, T)$ fəzaları üçün] kompaktlar aşkar təsvir olunduqlarından bu fəzalarda $P_n \Rightarrow P$ yığılma şərtlərini tədqiq etmək imkanı yaranır (bax, aşağı). Elə Hilbert fəzaların sinfini seçib ayırmaq olar ki, bu sinifdə $\{P_n\}$ ailəsinin sıxlığı $\chi_n(x^*) = \chi_n(x^*; P_n)$ xarakteristik funksionallar ailəsinin hər hansı topologiyada $x^* = 0$ nöqtəsində eynidərəcəli kesilməzliyi nəticəsidir (bax, [3]).

Alınan nəticələr ixtiyari topoloji fəzalara da köçürülə bilər. Lakin bu zaman texniki olduğu kimi prinsipial əlavə çətinliklər də yaranır ki, nəticədə baxılan fəzaların siniflərini daraltmaq məcburiyyəti yaranır. Bu çətinliklərdən yan keçmək üçün digər yanaşmalardan istifadə olunur (bax, II – IV bölmələr).

II. Təsadüfi proseslər üçün limit teoremlərinə digər – çox geniş tətbiqi olan yanaşma A. V. Skoroxodun adı ilə bağlıdır: bu bir ehtimal fəzası metodu adlanır. Bu metod 0 və T nöqtələrini daxilinə alan, hər yerdə sıx hər hansı $S \subset [0, T]$ çoxluğunda elementləri öz qiymətlərlə birqiymətli təyin olunan $\mathcal{X} = \mathcal{X}(0, T)$ funksional fəzasının hər hansı topologiyasında kesilməz funksionalların tədqiqinə aiddir. Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\{X_n(t), t \in [0, T]\}$, – $\mathcal{X}$ -də verilmiş proseslər ardıcılığı olsun. Əgər S çoxluğunda $X_n(t)$ proseslərinin sonluölçülü paylanmalarının $X(t)$ -nin paylanmalarına yığılması varsa, onda eyni bir ehtimal fəzasında $\bar{X}_n(t)$ və $\bar{X}(t)$ prosesləri qurmaq olar ki:

1) $X_n(t)$ və $\bar{X}_n(t)$ -nin; $X(t)$ və $\bar{X}(t)$ -nin paylanmalar üst-üstə düşür.

2) $P\{\bar{X}_n(t) \rightarrow \bar{X}(t) \text{ bütün } t \in S \text{ üçün}\} = 1$ münasibəti ödənilir.

Əgər X_n ardıcılığı üzərində $\mathcal{X}$ -də baxılan g topologiyasından asılı olaraq əlavə şərtlər qoyularsa (bax, aşağıdakı hökmün 2) şərti), onda 2) xassə ilə yanaşı $n \rightarrow \infty$ olduqda g topologiyasında $\bar{X}_n \rightarrow \bar{X}$ yığılması sanki yəqin ödəniləcək. Lakin bu onu göstərir ki, g – kesilməz f funksionalı üçün $f(\bar{X}_n) \rightarrow f(\bar{X})$ münasibəti sanki yəqin ödəniləcək, bu da $f(X_n)$ paylanmalarının $f(X)$ paylanmasına yığılmasını doğurur.

Bu metodla alınmış əsas nəticələr beş müxtəlif topologiya (U, J_1, J_2, M_1, M_2 topologiyaları; bax, [4]) baxılmış D fəzasına aiddir.

U və J_1 topologiyaları uyğun olaraq, C və D fəzalarında ρ_C və ρ_D metrikalarının doğurduğu topologiyalara ekvivalentdir. D fəzasında J_2 və M_2 topologiyaları uyğun olaraq, ρ_E və ρ_F metrikalarının doğurduğu topologiyalara ekvivalentdir (bax, [5]).

Bu beş topologiyadan hər birinə onun ε kesilməzlik modulu $w_\Delta^\varepsilon(x)$ uyğundur ki,

1) $x_n(t) \rightarrow x(t), n \rightarrow \infty$ və $t \in S$,

2) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_\Delta^\varepsilon(x_n) = 0$

şərtləri $n \rightarrow \infty$ olduqda g – yığılma üçün zəruri və kifidir.

$X_n(t)$ və $X(t)$ proseslərinin D fəzasında verildiyi fərz olunur. İxtiyari g – kəsilməz f funksionalı üçün $f(X_n)$ paylanması $f(X)$ paylanmasına, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki:

1) X_n prosesinin sonluluqluğu paylanması X -in paylanmalarına hər hansı hər yerdə sıx S çoxluğunda yığılırlar,

2) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{w_\Delta^g(X_n) > \varepsilon\} = 0$ ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ödənilsin (bax, [3]).

III. Bu bölmədə şərh olunan yanaşma daha elementardır və onu aproksimativ yanaşma adlandırmaq olar. Bu yanaşmanın meşzi beledir (bax, [5]). Ölçülən f funksionalı üçün $f(X_n)$ paylanmalarının yığılması öyrənilir və $\mathcal{X}(T)$ fəzasında f -lə yanaşı f_N ölçülən funksionalları verilmişdir, bu funksionalları çoxluğu $\{f_N\}_{N=1}^\infty$ isə Φ ilə işarə edilir. Bundan başqa, $\mathcal{K} = \{K_M\}_{M=1}^\infty$, $K_M \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ çoxluqlarının çoxluğuudur.

Əgər $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ olduqda $\psi(M, N) = \sup_{x \in K_M} |f(x) - f_N(x)| \rightarrow 0$ olarsa, f funksionalı $(\mathcal{K}, \Phi)$ – aproksimallanan adlanır.

Əgər M və ya N dəyişənlərindən yalnız biri məhdud olmadan artarsa, burada ψ funksiyasının 0-a yığılması hökmən deyildir.

Əgər $\bigcap K_M = K_\infty$ kəsişməsi boş çoxluq olmazsa, f funksionalı K_∞ -də f_N funksionalına müntəzəm yaxınlaşır, yəni

$$\sup_{k \in K_\infty} |f(x) - f_N(x)| \leq \psi(N, N).$$

Əgər $\mathcal{X} = C(0, T)$, $f \in C(\mathcal{X})$ və deməli, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon(\rho_C(x, y))$, $v \rightarrow 0$ olduqda $\varepsilon(v) \rightarrow 0$ olarsa, onda $f_N(x) = f(x_N)$ götürüldükdə, f funksionalı $(\mathcal{K}, \Phi)$ – aproksimallanan olur, burada x_N , –

$$(kT/N, x(kT/N)), k = 0, 1, \dots, N$$

nöqtələrində düyünləri yerləşən kəsilməz sınıq xətdir. K_M çoxluğu əvəzinə

$$K_M = \{x: w_\Delta^C(x) < \delta(\Delta), \Delta \geq 1/M\}$$

çoxluğu götürülür, burada $\Delta \rightarrow 0$ olduqda $\delta(\Delta) \rightarrow 0$, $w_\Delta^C(x)$, – C -də kəsilməzlik moduludur. Onda $N \leq M$ olduqda

$$\psi(M, N) \leq \sup_{K_M} \varepsilon(\rho_C(x, x_N)) \leq \varepsilon(\delta(T/N)).$$

K_M -in monotonluğu ilə birlikdə bu onu ifadə edir ki, $M \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ olduqda $\psi(M, N) \rightarrow 0$ olur və $\mathcal{K}$ və Φ -in qeyd olunan mənalarda $C(\mathcal{X})$ -dən olan ixtiyari funksional $(\mathcal{K}, \Phi)$ – aproksimallananıdır. Burada $K_\infty = \bigcap K_M$, – $C(0, T)$ -də kompaktıdır.

558 LİMİT

Φ çoxluğunun elementləri digər funksionallar da ola bilər, məs., Furiye sırasının parçaları.

$$P\{f(X_n) < u\} \Rightarrow P\{f(X) < u\} \quad (2)$$

yığılmasının ödənilməsi üçün ixtiyari $\gamma > 0$ üçün ele $\Phi^\gamma = \{f_N^\gamma\}_{N=1}^\infty$ və $\mathcal{K}^\gamma = \{K_M^\gamma\}_{M=1}^\infty$ ailələrinin varlığı zəruri və kafidir ki:

1) f funksionalı $(\mathcal{K}^\gamma, \Phi^\gamma)$ – aproksimallanan olsun;

2) $f_N^\gamma(X_n)$ funksionalının paylanması hər bir N və γ üçün $f_N(X)$ funksionalının paylanmasına zəif yığılsın;

3) ixtiyari M üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P\{X_n \in K_M^\gamma\} > 1 - \gamma, \quad P\{X \in K_M^\gamma\} > 1 - \gamma$$

münasibəti ödənilsin (bax, [5]).

IV. Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nin alınması üçün aşağıdakı ümumi yanaşma da vardır. Verilmiş f funksionalı və ya belə funksionalları sinfi $\mathcal{F}$ üçün (2) yığılması haqqında məsələ araşdırılır. Əgər (2) bütün $f \in \mathcal{F}$ üçün ödənilsə, onda P_n paylanmalarının P paylanmasına $\mathcal{F}$ – yığılması anlaşılır və bu yığılma $P_n \xrightarrow{\mathcal{F}} P$ kimi işarə olunur. Əgər $\mathcal{X}(T)$ fəzasında topologiya təyin olunmuşdursa və $\mathcal{F} = C(\mathcal{X}(T))$ olarsa, onda $\mathcal{F}$ – yığılma $P_n \Rightarrow P$ zəif yığılmasına çevrilir. Bu bölmədə şərh olunan yanaşma (bax, [6], [7]) I bölmədəki yanaşmanın ümumiləşməsidir. Mühüm fərq ondan ibarətdir ki, bütün konstruksiya üçün ilkin şərt burada funksionalları verilmiş $\mathcal{F}$ sinfidir. Bu sinif üzrə ən zəif σ – topologiyası qurulur (bax, aşağı; məs., $\mathcal{F}$ yalnız bir funksionaldan ibarət olarsa, bu topologiya çox zəif ola bilər), bu topologiyaya nəzərən $f \in \mathcal{F}$ kəsilməz funksionallardır və alınmış σ – topoloji fəzada əksər hallarda $\mathcal{F}$ – yığılmaya ekvivalent olan ölçüləri zəif yığılması öyrənilir.

Belə yanaşmada məsələnin daha ümumi qoyuluşuna digər nöqtəyi – nəzərdən baxmaq; paylanmalar ardıcılığının yığılmasını deyil, Θ qismən nizamlanmış çoxluq [uyğun qayda münasibəti $\geq$ kimi işarə olunur] olduqda $\{P_\theta\}$, $\theta \in \Theta$ şəbəke lə r ardıcılıqlarının yığılmasını öyrənmək təbii.

Müəyyənlik üçün və ardıcılıqlarla böyük analogiya üçün yuxarı istiqamətlənmiş Θ çoxluqlarına baxılır: Θ -nın ixtiyari θ_1 və θ_2 elementləri üçün də ele $\theta \in \Theta$ elementi var ki, $\theta \geq \theta_1$, $\theta \geq \theta_2$.

$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ölçülər şəbəkesinə $\{X_\theta, \theta \in \Theta\}$ təsadüfi proseslər şəbəkesi uyğundur.

$$P_\theta\{f(x) < u\} \Rightarrow P\{f(x) < u\}, \quad f \in \mathcal{F}$$

yığılması onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün və $P\{f(x) < u\}$ -nin ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsi u üçün ele $\theta_\varepsilon \in \Theta$ var ki, bütün $\theta \geq \theta_\varepsilon$ üçün

$$|P_\theta\{f(x) < u\} - P\{f(x) < u\}| < \varepsilon.$$

P_θ şəbəkesinə misal $\theta = (\alpha, \beta)$ parametrlərindən asılı, $\alpha_2 \geq \alpha_1$, $\beta_2 \geq \beta_1$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunan, $\theta_2 \geq \theta_1$ qayda münasibətli ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) kvadrantında qiymətlər alan ölçülər ailəsi ola bilər ($\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$). Burada $\alpha \rightarrow \infty$ olduqda

$\beta = C\alpha$ istiqamətlərində ölçülərin yığılması, ümumiyyətlə, şəbəkənin yığılmasını təmin etmir.

$u, - \mathcal{X}$ fəzasının çoxluqlarının ələ sistemi olsun ki, $(\mathcal{X}, u)_\sigma$ σ - topoloji fəzadır.

Əgər düzxətt üzərində ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı açıq olarsa (yeni u -ya aid olarsa), f funksionalı $(\mathcal{X}, u)_\sigma$ -də kəsilməzdir.

Əgər $\mathcal{G}$ Hausdorf funksionallarının $\mathcal{X}$ -də tam sinfidir, onda $\{g(x) > 0\}, g \in \mathcal{G}$ tipli çoxluqlar sinfi $\mathcal{g}$ σ - topoloji $(\mathcal{X}, \mathcal{g})_\sigma$ fəzasını yaradır. $(\mathcal{X}, \mathcal{g})_\sigma$ fəzasında bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu $\mathcal{G}$ ilə üst-üstə düşür (bax, Hausdorf teoremi).

İlkin $\mathcal{F}$ sinfini tam sinfə qədər həmişə tamamlamaq mümkündür (əgər o, tam sinif deyilsə), bu sinif $\mathcal{F}$ -i özündə saxlayan minimal tam sinfidir, o, $\mathcal{F}_c$ ilə işarə olunur. Əgər $\{f(x) > 0\}, f \in \mathcal{F}_c$ tipli çoxluqlar toplusu $\mathcal{f}$ ilə işarə olunarsa, onda $(\mathcal{X}, \mathcal{f})_\sigma$ cütü σ - topoloji fəzadır. Bununla da, $\mathcal{X}$ -də ən zəif σ - topologiyası daxil olunur ki, bu topologiya da $\mathcal{F}$ kəsilməz funksionallar sinfindən olur.

$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{f})$, - $\mathcal{f}$ sinfinin doğurduğu σ - cəbr olsun. $f \in \mathcal{F}_c$ funksionalları $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -ə nəzərən ölçülən olduğundan $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ münasibəti doğrudur.

Ölçülər şəbəkəsinin σ - topoloji fəzada zəif yığılmasının tərfi adi tərifdən mahiyyətə fərqlənir: Əgər $\int f d\mathbf{P}_\theta \rightarrow \int f d\mathbf{P}$ münasibəti ixtiyari kəsilməz məhdud f funksionalı üçün ödənilərsə, onda $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılması $(\mathcal{X}; \mathcal{f})_\sigma$ fəzasında ödənilir (və ya ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün və $\mathbf{P}\{f(x) < u\}$ -nin ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsində ələ $\theta_\varepsilon \in \Theta$ vardır ki, bütün $\theta \geq \theta_\varepsilon$ üçün $|\mathbf{P}_\theta\{f(x) < u\} - \mathbf{P}\{f(x) < u\}| < \varepsilon$ münasibəti doğrudur).

Əgər $\mathcal{F}$ sinfi:

1) $f \in \mathcal{F}$ münasibəti - $f \in \mathcal{F}, f+c \in \mathcal{F}, c = \text{const}$ münasibətlərini doğurur.

2) $f_1 \in \mathcal{F}, f_2 \in \mathcal{F}$ münasibətləri $\max(f_1, f_2) \in \mathcal{F}$ münasibətini doğurur şərtlərini ödəyərsə, $\mathcal{F}$ müştərek sinif (rus. совместный класс) adlanır.

$f_1 \in \mathcal{F}, f_2 \in \mathcal{F}$ münasibəti ixtiyari α, β üçün $\alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{F}$ münasibətini doğursas, $\mathcal{F}$ xətti sinif adlanır.

Əgər $\mathcal{F}$ sinfi müştərek və ya xətti sinif olarsa, onda $\mathcal{F}$ - yığılma $\mathcal{F}_c$ - yığılmaya ekvivalentdir (bax, [7]).

Təsədüfi proseslər üçün L. t.-nə belə yanaşma σ - topoloji $(\mathcal{X}; \mathcal{f})_\sigma$ fəzasında $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılmasının şərtlərinin, yaxud $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ $\mathcal{F}_c$ - yığılmasının şərtlərinin öyrənilməsinə əsaslanmışdır.

$L, - \mathbf{P}_\theta$ şəbəkəsinin limit nöqtələrinin sinfi olsun. $(\mathcal{X}; \mathcal{f})_\sigma$ fəzasında $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılmasının ödənilməsi üçün aşağıdakı iki şərt zəruri və kifayətdir.

1) Ələ $\mathcal{A}$ çoxluqlar sinfi vardır ki, ixtiyari $Q \in L$ ölçüsü üçün $\mathcal{A} D_Q$ sinfi $\mathbf{P}$ ölçüsü təyin edir və ixtiyari $A \in \mathcal{A} D_P$ üçün

$$\lim_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta(A) = \mathbf{P}(A) \quad (3)$$

münasibəti ödənilir.

2) $\mathcal{X}(\bigcup G_i = \mathcal{X})$ çoxluğunun ixtiyari açıq hesabı $\{G_i\}$ örtüyü və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ələ sonlu $G_1, \dots, G_n$ toplusu seçmək olar ki,

$$\limsup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta \left\{ \mathcal{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n G_i \right\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənsin.

Ölçü təyin edən funksionallar sinfi təminlərində analogi şərtlər qoymaq olar, bundan başqa, (3) şərti ödənilən $\mathbf{P}$ ölçüsünün varlığı əvvəlcədən məlum olmadığı halda da bu mümkündür.

Əgər $\{\mathbf{P}_\theta\}$ şəbəkəsi sıx olarsa, 2) şərti həmişə ödənilir, yeni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ələ K kompaktı vardır ki, bu kompaktın ixtiyari ətrafı $G(K)$ üçün

$$\limsup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta \{ \mathcal{X} \setminus G(K) \} < \varepsilon$$

münasibəti ödənilir: əgər K -nın ixtiyari hesabı örtüyü $\{G_i\}$ və ixtiyari $B \subset K, B \in \mathcal{B}$ üçün

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ B \cap \left[\mathcal{X} \setminus \bigcup_{i=1}^N G_i \right] \right\} = 0 \quad (4)$$

münasibəti ödənilərsə, K - kompaktdır.

(4) ödəniləndə (3)-dəki $\mathbf{P}$ ölçüsü sıx ölçü olur.

Paylanmaların $\mathcal{F}$ - yığılmasının öyrənilməsinə məsələnin σ - topoloji fəzalarda yığılmaya gətirilməsi adi topoloji fəzalarda yığılmadan istifadədən daha təbii, bu aşağıdakı səbəblərlə izah olunur.

1) Əgər $(\mathcal{X}, \mathcal{g})$ normal feza, limit ölçüsü requlyar olarsa, adi topoloji $(\mathcal{X}, \mathcal{g})$ fəzalarında ölçülərin zəif yığılması təbii xassələrə malik olur (məs., $\mathbf{P}$ - kəsilməz çoxluqlarda və funksionallarda və s. yığılma xassələri kimi). $(\mathcal{X}, \mathcal{f})_\sigma$ fəzası bu xassələrə həmişə malikdir.

2) Adi $(\mathcal{X}, \mathcal{g})$ topoloji fəzasında ölçülərin zəif yığılması $(\mathcal{X}; \mathcal{B}_{\mathcal{g}})$ fəzasında baş verdiyi halda (burada $\mathcal{B}_{\mathcal{g}} = \sigma(\mathcal{g})$ - Borel σ - cəbridir),

$$\mathbf{P}_\theta \{ f(x) < u \} \Rightarrow \mathbf{P} \{ f(x) < u \}, f \in C(X)$$

yığılmasını $\{f(x) > 0\}, f \in C(X)$ çoxluqlarının doğurduğu $\mathcal{B}^*$ σ - cəbrinin ($\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}_{\mathcal{g}}$) kənarına çıxmadan da öyrənmək olur (burada $\mathcal{B}^*$ Ber σ - cəbr i olub, tamamilə normal, yəni $(\mathcal{X}, \mathcal{f})_\sigma$ fəzası kimi fəzalarda Borel σ - cəbri ilə üst-üstə düşür). Ümumi halda $\mathcal{B}_{\mathcal{g}}$ və $\mathcal{B}^*$ fəzalarının üst-üstə düşməməsi bir sıra hallarda ölçünün $\mathcal{B}^*$ -dən $\mathcal{B}_{\mathcal{g}}$ -yə davamı kimi çətin məsələyə gətirir.

3) σ - topoloji fəzalarda yığılma üçün alınan nəticələr adi topoloji fəzalarda fəzanın tipinə məhdudiyyət qoyulmadan yığılma teoremlərinin alınmasına imkan yaradır.

4) Baxılan yanaşmada müştərek və xətti siniflər üçün $\mathcal{F}$ - yığılmanın zəruri və kifayət şərtləri alınır, lakin adi topoloji fəzalarda yığılma şərtləri baxılan obyektlər üzərinə qoyulan əlavə şərtlərlə də «ağırlaşdırıldıqda» bu mümkün olmur ([10] ilə müq. et).

Yuxanda şərh olunmuş dörd yanaşmadan hər biri konkret funksional fəzalarda zəif yığılma haqqında (L^2 tip fəzalar üçün ikinci yanaşma istisnadır) və funksionalların konkret siniflərində paylanmaların yığılması haqqında teoremlərin alınmasına imkan verir. Təsədüfi proseslər üçün L. t.-nin daha ümumi forması IV yanaşmadan istifadə etdikdə alınır.

Funksionalların xüsusi siniflərinin yığılması üçün teoremlər. Burada sadəlik üçün proseslər ardıcılıqlarına (şəbəkəsinə deyil) baxılır.

1. $C(0, 1)$ -də prosesə yığılma. X_n və X proseslərinin $[0, 1]$ parçasında bütün həqiqi funksiyaların $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasında verildikləri, separabel olduqları,

$$w_{\Delta}^C(x) = \sup_{|t-t'| < \Delta} |x(t) - x(t')|$$

olduğu fərz olunur.

f funksionallarının ələ $\mathcal{F}_C$ sinfinə baxılır ki, f -lər:

a) $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasına nəzərən ölçüləndirir.

b) ρ_C müntəzəm metrikasında $C(0, 1)$ -in nöqtələrində kəsilməzdir.

Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi, $P_n \Rightarrow P$, $P\{C(0, 1)\} = 1$ yığılması üçün zəruri və kifədir:

1) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{w_{\Delta}^C(X_n) > \varepsilon\} = 0,$$

2) $[0, 1]$ -də hər yerdə sıx ələ S çoxluğu var ki, $\{X_n(t), t \in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $\{X(t), t \in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmalarına yığılır.

2) şərtində S çoxluğunu $[0, 1]$ ilə evez etmək olar.

2. $D[0, 1]$ -də prosesə yığılma. $\mathbb{R}^{[0,1]}$ -də separabel X_n və X prosesləri verilməlidir:

$$w_{\Delta}^D(x) = \sup_t \min(w^+(t, \Delta), w^-(t, \Delta)),$$

$$w^{\pm}(t, \Delta) = \sup_{\substack{0 < u < \Delta \\ t \pm u \in [0, 1]}} |x(t) - x(t \pm u)|.$$

$\mathcal{F}_D$ funksionallar sinfinə baxılır:

a) funksionallar $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasına nəzərən ölçüləndirir.

b) Skoroxod – Proxorov metrikasında D -nin kəsilməzlik nöqtələrində

$$\rho_D(x, y) = \inf_{\lambda} [\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_t |\lambda(t) - t|]$$

burada $\lambda(t)$, $- [0, 1]$ parçasını özünə inikas eldirən, ciddi artan və kəsilməz funksiyalardır və $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$.

$P_n \Rightarrow P$ yığılması üçün $P(D) = 1$ aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruri və kifədir:

1) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{w_{\Delta}^D(X_n) > \varepsilon\} = 0;$$

2) hesabı hər yerdə sıx ələ S çoxluğu var ki, $\{X_n(t), t \in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $\{X(t), t \in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmalarına yığılır.

3)

$$\rho_{L^2}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) - y(t))^2 dt$$

metrikası ilə $L^2(0, 2\pi)$ fəzasında proseslər.

X_n və X -in ölçülən proseslər olduğu fərz olunur. bu proseslərin verilməsi $(L^2, \mathcal{B})$ fəzasında uyğun olaraq P_n və P paylanmalarını doğurur; $\mathcal{B}$, $- L^2$ -nin Borel çoxluqlarının σ -cəbridir.

L^2 -də $P_n \Rightarrow P$ zəif yığılmasının olması üçün zəruri və kifədir ki;

1) $\{a_k(X_n), b_k(X_n)\}_{k=0}^{\infty}$ Furiye əmsalları ardıcılıqlarının sonluölçülü paylanmaları $\{a_k(X), b_k(X)\}_{k=0}^{\infty}$ ardıcılıqlarının sonluölçülü paylanmalarına yığılsın, burada

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt dt;$$

2) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{w_{\Delta}^{L^2}(X_n) > \varepsilon\} = 0$$

münasibəti ödənilir, burada

$$w_{\Delta}^{L^2}(x) = \int_0^{2\pi} (x(t + \Delta) - x(t))^2 dt, \quad x(t + \Delta) = 0,$$

əgər $t + \Delta > 2\pi$ olarsa.

4. İntegral funksionalların paylanmalarının yığılması. $X_n(t)$, $X(t)$ prosesləri üçün seçimi fəza kimi $[0, 1]$ -də bütün ölçülən funksiyalar fəzası $M(0, 1)$, silindrik çoxluqlar özündə saxlayan hər hansı $\mathcal{B}$ σ -cəbri ilə birgə götürülür.

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt, \quad \varphi \in C(-\infty, \infty)$$

şəkilli funksionallar sinfi $\mathcal{F}$ -ə baxılır.

P_n paylanmalarının P paylanmalarına yığılması üçün zəruri və kifədir ki,

1) İxtiyari $\varphi \in C(-\infty, \infty)$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{N \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left\{\int_{t: |X_n(t)| > N} \varphi(X_n(t)) dt > \varepsilon\right\} = 0;$$

2) İxtiyari v_j , u_j və r üçün

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r} P\{\cap [v_j \leq X_n(t_j) < u_j]\} dt_1 \dots dt_r = \\ & = \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r} P\{\cap [v_j \leq X(t_j) < u_j]\} dt_1 \dots dt_r \end{aligned}$$

münasibətləri ödənilsin, burada $v_j, u_j \in S \subset \mathbb{R} \setminus H$. S çoxluğu $\mathbb{R} \setminus H$ -in ixtiyari, hər yerdə sıx altçoxluğu, H elementləri sayı hesabından çox olmayan hər hansı çoxluqdur.

Əgər $X_n(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları yığılırsa, onda 2) şərti ödənilir.

Əgər $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\psi$ sinfi yalnız $\varphi(x)$ funksiyaları ilə doğurulmuşdursa, $|x| \rightarrow \infty$ olduqda $|\varphi(x)| = o(\psi(x))$ olarsa, onda yığılma üçün 1) şərti $\psi(x)$ -in artma sürətindən asılı olaraq genişləndirilə bilər.

5. Bütün ədəd oxunda verilmiş proseslərin funksionallarının paylanmalarının yığılması. Hələlik sonlu $(0, T)$ intervalında verilən proseslərə baxılırdı. Əgər $T = \infty$ olarsa, onda funksionallar sinfinin təbii seçimi problemi yaranır (burada ρ_C və ρ_D metrikalarında kəsilməz funksionallara baxılması mənasızdır).

Sadəlik üçün T parametrik çoxluğunun $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ardıcılığı olduğu hala baxılır, $\mathcal{F} = \mathbb{R}^\infty$.

$$f(x) = \sup_{k>0} x(k), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{x(k)} \quad (5)$$

ifadələrlə verilən stasionar bağlı kəmiyyətlərin cəminin belə mühüm funksionallarının öyrənilməsi aşağıdakı kimi təyin olunan $\mathcal{F}_a$ siniflərinə gətirir.

$$V_{N,a} = \{x: x(k)/k < a, k \geq N\},$$

$$V_a = \bigcup_{a < \alpha} \bigcup_N V_{N,\alpha} = \{x: \limsup_{k \rightarrow \infty} x(k)/k < \alpha\}$$

olsun. Əgər $x \in V_{a-\beta}$ şərtini ödəyən ixtiyari $x \in V_a$, $\varepsilon > 0$ və ixtiyari β üçün ehtimal $N = N(x, \varepsilon, \beta) \geq 1$ və $\delta = \delta(x, \varepsilon, \beta) > 0$ tapılsa ki,

$$y \in V_{N,a-\beta}, \quad \max_{j < N} |x(j) - y(j)| < \delta$$

olduqda

$$x \in V_{N,a-\beta}, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olsun, onda ölçülən f funksionalı V_a - kəsilməz funksional ($f \in \mathcal{F}_a$) adlanır.

(5) funksionallar V_a - kəsilməz funksionallardır.

$X_n, X \in \mathbb{R}^\infty$ olsun. P_n -in P -yə $\mathcal{F}_a$ - yığılması üçün $[V_a - \text{kəsilməz } f \text{ funksionallarının } f(X_n) \text{ paylanmalarının yığılması üçün}]$ zəruri və kifədir ki:

1) bütün k -lər üçün $(X_n(1), \dots, X_n(k))$ toplularının birgə paylanmaları $(X_n(1), \dots, X_n(k))$ toplularının paylanmasına zəif yığılsın, $P\{X \in V_a\} = 1$;

$$2) \lim_{\beta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n \notin V_{N,a-\beta}\} = 0$$

şərtləri ödənilsin (bax, [11]).

Qeyd etmək lazımdır ki, V_a - kəsilməz funksionalları ilə doğurulmuş topologiya metrikləşməyendir və Proxorov kriterisinə əsaslanan I bənddəki yanaşmanı burada tətbiq etmək olmur.

Yığılma haqqındakı müddəa burada III bölmedəki yanaşmanın köməyi ilə alınmışdır.

Əgər $F(1), F(2), \dots; F_n(1), F_n(2), \dots$ dar mənada stasionar

ardıcılıqlar, $X(k) = \sum_{j=1}^k F(j), X_n(k) = \sum_{j=1}^k F_n(j)$ olarsa və

$(Y_n(1), \dots, Y_n(k))$ toplularının sonluölçülü paylanmaları ixtiyari k qiymətində $(Y(1), \dots, Y(k))$ toplusunun paylanmasına yığılarsa, $P\{X \in V_a\} = 1$ olarsa, onda X_n prosesinin paylanmalarının $\mathcal{F}_a$ - yığılması üçün zəruri və kifədir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{M}(Y_n(1); Y_n(1) \geq 0) \rightarrow \mathbf{M}(Y(1); Y(1) \geq 0)$ münasibəti ödənilsin (bax, [11]).

Kəsilməz funksionallar sinfi $\Lambda_{g,a}$ üçün də analogi mülahizələr doğrudur. $\mathbb{T}$ -də müsbət g funksiyası verilir,

$$\Lambda_{N,g,a} = \{x \in \mathbb{R}^\infty: |x(k)/g(k)| < a, k \geq N\},$$

$$\Lambda_{g,a} = \bigcap_{a > \alpha} \bigcup_N \Lambda_{N,g,a} = \{x: \limsup |x(k)/g(k)| < a\}.$$

Əgər ixtiyari $x \in \Lambda_{g,a}$ və $\varepsilon > 0$ üçün ehtimal $\beta = \beta(x, \varepsilon) \geq 0$, $N = N(x, \varepsilon) \geq 1$, $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ tapılsa ki,

$$y \in \Lambda_{N,g,a+\beta}, \quad \max_{j < N} |x(j) - y(j)| < \delta$$

olduqda

$$x \in \Lambda_{N,g,a+\beta}, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olsun, onda $\mathbb{R}^\infty$ -da f funksionalı $\Lambda_{g,a}$ - kəsilməz funksional adlanır (bax, [11]).

$g(k) = k^\beta$, $\beta \leq a > 0$, $a < 1$ olduqda

$$f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{|x(k)| - k^a}$$

funksionalı $\Lambda_{g,a}$ - kəsilməz funksionaldır.

$\Lambda_{g,a}$ - kəsilməz funksionalların paylanmasının yığılması üçün zəruri və kifədir ki:

1) X_n proseslərinin sonluölçülü paylanmaları yığılsın;

$$2) \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n \notin \Lambda_{a+\beta,N}\} = 0, \quad \beta > 0$$

münasibəti ödənilsin.

Baxılan $\Lambda_{g,a}$ topologiyası əvəzinə

$$\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)| / g(t)$$

metrikasının doğurduğu topologiya daxil edilərsə, $C(0, \infty)$ -dan olan kəsilməz zamanlı proseslərin baxılması $C(0, \infty)$ -un separabel olmamaslığına, Borel σ - cəbrinin isə silindrik çoxluqların doğurduğu σ - cəbrlə müqayisədə olduqca geniş olmasına gətirir. Bundan başqa, Viner prosesinin $C(0, \infty)$ -da paylanması silindrik σ - cəbrdən Borel σ - cəbrinə davam etdirmək mümkün olmur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [4] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [5] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41; [6] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [7] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [8] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48; 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [9] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.-Л., 1937; [10] Торсое Ф., «Math. scand.», 1969, Bd 25, № 1, p. 97–104; [11] Боровков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 128, с. 41–65; [12] Саханенко А. И., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 1, с. 102–19; [13] Боровков А. А., Саханенко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 4, с. 812–15; [14] Bauer H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 58, № 2, S. 257–65.

ЛИМИТ ТЕОРЕМЛƏРİ təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları «предельные теоремы для случайных процессов, мартингалыные методы; **limit theorems for stochastic processes, martingale methods**» – *təsadüfi proseslər ardıcılığının zəif yığılması şərtlərini limit nöqtələrinin martinqal xarakterizasiyası əsasında müəyyənləşdirən teoremlərdir.*

Təsadüfi proseslərin verilmiş limit prosesinə zəif yığılmasını: ilkin paylanmaların zəif yığılması, müvafiq funksional fəzədə uyğun ehtimal ölçüləri ardıcılığının zəif nisbi kompaktlığını təmin edən şərtlər və ixtiyari zəif yığılan ardıcılığın hər bir limit ölçüsünün limit prosesinin bu və ya digər xarakterizasiya xassəsinə malik olma şərtləri təyin edir. Təsadüfi proseslərin zəif yığılmasının effektivliyi və şərtlərinin forması kompaktlığa görə istifadə olunan kriterilər və limit prosesinin xarakterizasiya olunma üsulundan olduqca asılıdır.

Funksional fəzalarda ehtimal ölçülərinin sonluölçülü paylanmalarla ənənəvi xarakterizasiyası, bir qayda olaraq, çətin yoxlanılan şərtlərə gətirir. Limit proseslərinin martinqal xarakterizasiyasının istifadəsi topoloji fəzalarda ehtimal ölçüləri ardıcılığının zəif yığılması haqqında əksər məlum teoremlərini yeganə və effektiv yanaşma ilə əhatə edir.

$\mathcal{X}$ – topoloji fəza, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ – Borel altçoxluqları σ – cəbri, $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_t, t \geq 0\}$, – $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $t \geq 0$ σ – cəbrlərinin hər hansı artan ailəsi, $\mathbb{B}_+ = \{\mathcal{B}_{t+}, t \geq 0\}$, $\mathcal{B}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{B}_{t+\varepsilon}$, μ_0 –

$\mathcal{B}_0$ -da ehtimal ölçüsü, $\mathbb{M} = \{M_t^i(x), t \geq 0, x \in \mathcal{X}, i \in \mathbb{I}\}$, – t -yə görə sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan funksionallar ailəsi, $\mathbb{I}$ – indekslərin hər hansı çoxluğu olsun. $\mathcal{P}(\mu_0, \mathbb{M})$ isə $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -də $\hat{\mathbb{P}}$ ehtimal ölçülərinin sinfi olsun ki, bunlar burada martinqalların $(\mu_0, \mathbb{M})$ – probleminin həlləri kimi adlandırılır (bax, [1]) və hər bir $i \in \mathbb{I}$ üçün $\hat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{B}_0} = \mu_0$ və M^i , – $(\hat{\mathbb{P}}, \mathbb{B}_+)$ – lokal martinqaldır. Əgər $\mathcal{P}(\mu_0, \mathbb{M})$ yeganə $\hat{\mathbb{P}}$ nöqtəsindən ibarət olarsa, onda μ_0 və $\mathbb{M}$ ailəsi $\hat{\mathbb{P}}$ ölçüsünün $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -də martinqal xarakterizasiyasını verir. Məs., $\mathcal{X} = C_{[0, \infty)}(\mathbb{R}^m)$ – kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyalı, $[0, \infty)$ -da bütün

m –ölçülükəsilməz $\omega(\cdot)$ funksiyalarının fəzası, $\mathcal{B}_s$ isə $C_s(\Gamma) = \{\omega: \omega(s) \in \Gamma\}$, $s \leq t$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ silindrik çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbr olsun. Verilmiş $a(t, y) = (a_1(t, y), \dots, a_m(t, y))$ funksiyaları və $A(t, y) = \|a_y(t, y)\|^m$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ müsbət müəyyən simmetrik martinqallar üçün

$$M_t^{1,z}(\omega) = (\omega(t) - \omega(0), z) - \int_0^t (a(s, \omega(s)), z) ds$$

$$M_t^{2,z}(\omega) = [M_t^{1,z}(\omega)]^2 - \int_0^t (z, A(s, \omega(s))z) ds, \quad t \geq 0, \\ z \in \mathbb{R}^m$$

funksionallar ailəsi ilə verilən martinqallar probleminin həlləri başlanğıc paylanması μ_0 , aparı vektoru $a(t, y)$, diffuziya əmsalları matrisi $A(t, y)$ olan diffuzion proseslərə uyğun ehtimal ölçüləri olacaqdır (bax, [2]). Xüsusi halda, $\mu_0 = \varepsilon_0$ (dirak ölçüsü), $a(t, y) \equiv 0$ və $A(t, y)$ – vahidi matris olarsa, onda uyğun martinqallar probleminin yeganə həlli Viner ölçüsüdür.

$\mathcal{X}^n$, – $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathbb{P}^n)$ ehtimal fəzasında təsadüfi $\mathcal{X}$ – rəqəmli element, $\mathbb{A}^n = \{\mathcal{A}_t^n, t \geq 0\}$, $\mathcal{A}_t^n \subset \mathcal{A}^n$, $t \geq 0$, – $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathbb{P}^n)$ fəzasının artan σ – cəbrlər ailəsi, $\hat{\mathbb{P}}^n(B) = \mathbb{P}^n\{X^n \in B\}$, $B \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mu_0^n = \hat{\mathbb{P}}^n|_{\mathcal{B}_0}$, $n \geq 1$ olsun.

$\{\hat{\mathbb{P}}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığının $\hat{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}(\mu_0, \mathbb{M})$ -yə zəif yığılmasının şərtləri, verilmiş $\mathbb{M}^n = \{M_t^{n,i}, t \geq 0, i \in \mathbb{I}\}$ ailələrinin $(\mathbb{P}^n, \mathbb{A}^n)$ – lokal martinqallarının terminləri ilə ifadə olunur və bu şərtlərə μ_0^n ölçülərinin μ^0 ölçüsünə zəif yığılması, $\{\hat{\mathbb{P}}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığının zəif nisbi kompaktlığı şərtləri, $\mathbb{B}$ ailəsinin requlyarlığı məhdudiyyətləri, $\mathbb{M}^n$ -dən olan funksionalların x -ə görə kəsilməzliyi, $\mathbb{M}^n$ -dən olan proseslərin müntəzəm inteqrallananlığı və

$$\{M_t^i(X^n), t \geq 0, i \in \mathbb{I}\} \quad \text{və} \quad \{M_t^{n,i}, t \geq 0, i \in \mathbb{I}\}$$

təsadüfi proseslər ailələrinin yaxınlığı fərziyyələri kimi şərtlər daxildir.

$\mathcal{F}(\mathbb{A}^n)$, – $\mathbb{A}^n$ ailəsinə nəzərən dayanma anları sinfi və hər bir $T > 0$ üçün $\Sigma(T)$ bütün $\{S^n, n \geq 1\}$ ardıcılıqlarının sinfi olsun ki, $S^n = S^n(T) \in \mathcal{F}(\mathbb{A}^n)$, $S^n \leq T$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^n\{S^n < T\} = 0$ şərtlərini ödəsin. $\hat{\mathcal{P}}$, – $\{\mathbb{P}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığının limit nöqtələri çoxluğu və K isə $\mathbb{B}$ artan $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funksiyaları sinfi olsun ki, $t \rightarrow \infty$ olduqda $G(t)/t \rightarrow \infty$ olsun; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Fərz olunur ki, hər bir $v \in \hat{\mathcal{P}}$ və $i \in \mathbb{I}$ üçün $\mathbb{B}$ hər yerdə sıx $Q = Q^{v,i} \subset \mathbb{R}_+$ altçoxluğu və $G^{v,i} \in K$ var ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) bütün $t \in Q$ üçün $\mathcal{B}_t = \sigma\{f: f \in \mathbb{B}_t\}$, burada $\mathbb{B}_t$, – v – sanki yəqin kəsilməz məhdud funksiyalar çoxluğudur;

b) bütün $t \in Q$ və $i \in I$ üçün $M_t^i(\cdot)$ funksionalı v – sanki yeqin kəsilməzdir;

c) hər hansı $\{T_k, k \geq 1\}$, $0 \leq T_k \uparrow \infty$ ardıcılığı üçün ele $\{S_k^n, n \geq 1\} \in \Sigma\{T_k\}$ ardıcılıqları var ki, bütün $t \in Q$, $i \in I$ və $k \geq 1$ üçün

$$\sup_{n \geq 1} M^n G \left[\left| M_{t \wedge S_k^n}^{n_i} \right| \right] < \infty,$$

M^n – riyazi gözləmədir.

Topoloji fəzalarda ehtimal ölçülərinin zəif yığılmasında martinqal metodlarının əsası aşağıdakı müddəalardan ibarətdir (bax, [3]).

1. $\{\hat{P}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığı zəif nisbi kompaktdır;
2. μ_0 ölçüsünü təyin edən hər hansı $B \in \mathcal{B}_0$ çoxluqlar alt sinfi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0^n(B) = \mu_0(B);$$

3. a) – c) fərziyyələri ödənilmişdir.

4. ixtiyari $\varepsilon > 0$, $t \in \bigcup_{v \in \hat{\mathcal{P}}} Q^{v, \varepsilon}$ və $i \in I$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \{ |M_t^{n_i} - M_t^i(X^n)| > \varepsilon \} = 0$$

şərtləri ödənilmiş olsun. Onda $\hat{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}(\mu_0, M)$.

Əksər təbiiqələrdə $\mathcal{X}$ fəzası tamamilə rəqulyar topoloji fəzadır. Belə fəzalar üçün Proxorov kriterisi doğrudur: əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün ele $K_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ kompaktı varsa ki,

$$\inf_{n \geq 1} \hat{P}^n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

şərtini ödəsin, $\{\hat{P}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığı zəif nisbi kompaktdır (bax, [4]). X -in kompakt altçoxluqlarının təsviri məlum olarsa, ehtimal ölçüləri ardıcılığının zəif nisbi kompaktlığını yoxlamaq mümkündür. Məs., əgər $\mathcal{X} = D_{[0, \infty)}(S)$ – qiymətlərini tam separabel metrik (S, ρ) fəzasından alan, $\mathbb{R}_+$ -da sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan bütün funksiyaların fəzası – Skoroxod fəzası, $X^n = \{Y^n(t), t \geq 0\}$ isə $D_{[0, \infty)}(S)$ -də trayektoriyalar ilə uzlaşmış təsadüfi proses olarsa, onda $\{\hat{P}^n, n \geq 1\}$ ardıcılığının zəif nisbi kompaktlığı üçün $X^n, n \geq 1$ proseslərinin sonluölçülü paylanmalarının zəif nisbi kompaktlığı və bütün $\varepsilon > 0$, $T > 0$ üçün

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{T^n \in \mathcal{A}(A^n)} P^n \{ \rho(X^n((T^n \delta) \wedge T),$$

$$X^n(T^n \wedge T)) > \varepsilon \} = 0$$

şərtinin ödənilməsi kafi şərtidir (Aldous – Rebolledo şərti) (bax, [5]).

M^n ailəsinin seçilməsi, adətən, çətinlik tələtmir və limit ölçüsünü xarakterizə edən M ailəsinin seçilməsi ilə təyin olunur.

Martinqal metodun tətbiqinin illüstrasiyası kimi $X_t^n, t \geq 0$, $n \geq 1$ nöqtəvi proseslərinin λ parametrlı Puasson prosesinə

zəif yığılma şərtlərinə baxmaq olar. N – yalnız vahid sıçrayışla artan, $\mathbb{R}_+$ -da pilləvari $\omega(\cdot)$ funksiyalarının sinfi, $\omega(0) = 0$,

$\mathcal{X} = D_{[0, \infty)}(\mathbb{R}^1) \cap N$ olsun. Limit prosesinə uyğun $\hat{P}_\lambda$ ölçüsü $\mathcal{P}(\mathcal{E}_0, M)$ -in yeganə elementidir. Burada M yalnız yeganə $M_t(\omega) = \omega(t) - \lambda t, t \geq 0$ elementindən ibarətdir (Vatnabe teoremi). Əgər hər hansı artan $A_t^n, t \geq 0$ prosesi üçün $M_t^n = X_t^n - A_t^n, t \geq 0$, – (P^n, A^n) – lokal martinqal-dırsa, $n \geq 1$ və bütün $t > 0$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \{ |A_t^n - \lambda t| > \varepsilon \} = 0$$

olarsa, onda $\{X_t^n, t \geq 0, n \geq 1\}$ ardıcılığı λ parametrlı Puasson prosesinə zəif yığılır.

Diffuzion proseslərin martinqal xarakterizasiyası ilk dəfə P. Levi (bax, [6]) və C. Dubun (bax, [7]) işlərində tapılmışdır. Təsadüfi proseslərin diffuzion proseslərə zəif yığılması haqqında məsələlərdə martinqal metodları ilk dəfə aşkar surətdə D. V. Struk və S. R. S. Varadan tərəfindən [8]-də istifadə olunmuşdur; [9], [10]-a da bax.

Əd.: [1] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes. B. – [a. o.], 1979; [3] Григелионис Б., Микуньявичус Р., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 320–32; [4] Бурбак Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977; [5] Aldous D., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, № 2, p. 335–40; [6] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., «Comm. Pure Appl. Math.», 1969, v. 22, p. 345–400, 479–530; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [10] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

LİMİT TEOREMLƏRİNİN DAVAMOLUNANLIĞI

«предельных теорем продолжимость; continuation of limit theorems» – əlavə fərziyyələr etmədən $F_n(x)$ paylanma funksiyaların ardıcılığının $F(x)$ paylanma funksiyasına zəif

yığılmasının $x \in A \subset \mathbb{R}^1$ çoxluğundan bütün heqiqi $\mathbb{R}^1$ ədəd oxuna genişləndirilməsidir. Xüsusi halda, F_n asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin paylanması olarsa, L. t. d. sonsuz bölünən paylanmaların davamolanlıqları ilə sıx bağlıdır. Eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin paylanma funksiyaları $F_n(x)$ -lərin ardıcılığının $x > 0$ yarımoxunda standart normal qanunun paylanma funksiyasına yığılması haqqında L. t. d.-nin varlığı V. M. Zolotarev tərəfindən göstərilmişdir. Bu hipotez H. – J. Rossbergin işində, [1]-də təsdiq olunmuşdur. Limit qanunlarının geniş sinfi üçün bir qədar şərtlərlə davamolanlıq mümkünüyü təyin olunmuşdur (bax, [2]). L. t. d.-nin əsasını paylanmaların bərpa olunmasının analitik xassəsi təşkil edir, lakin buna görə yarımoxda onların sonlu kompozisiyalarının qiymətləri məlum olmalıdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Rossberg H.-J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 824–28; [2] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G., Analytic methods of probability theory. B., 1985; [3] Kruglov V. M., Titov A. N., «Lect. Notes in Math.», 1987, № 1233, p. 41–56.

* LİMİTİ, TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ARDICILLIĞININ

« предел последовательности случайных событий; limit of sequence of random events » – $\{A_n\}_{n=1,2,\dots}$ təsadüfi hadisələr ardıcılığının aşağı və yuxarı limitləri – $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ və $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ varsa və $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ bərabərliyi ödənilərsə,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

bərabərlikləri ilə təyin olunan *təsadüfi hadisəyə* deyilir.

Monoton azalan və monoton artan hadisələr ardıcılıqlarının limitləri vardır və bu limitlər uyğun olaraq,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{və} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

LİNDEBERQ ŞƏRTİ « Линдберга условие; Lindeberg condition » – bax, *Lindeberg – Feller teoremi*.

LİNDEBERQ ŞƏRTİ təsadüfi matrislər üçün « Линдберга условие для случайных матриц; Lindeberg condition for random matrices » – bax, *Semi-dairevi qanun*.

LİNDEBERQ – FELLER TEOREMİ « Линдберга – Феллера теорема; Lindeberg – Feller theorem » – *limit teoremlərinin* klassik nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biridir. L. – F. t. ilkin variantda

$$Z_n = B_n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - a_j) = X_{n1} + \dots + X_{nn}, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artmaqda olan cəmlərinin sxemi ilə bağlı olmuşdur, burada fərz olunur ki, $a_j = \mathbf{M}X_j$,

$\sigma_j^2 = \mathbf{D}X_j$ sonludur və bu təsadüfi kəmiyyətlər $k \leq n$ şərtini ödəyən k -ya görə müntəzəmdir, yəni $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sigma_{nk}^2 = \sigma_k^2 / B_n^2 \rightarrow 0. \quad (2)$$

F_n, F_{nj} və Φ – uyğun olaraq, $Z_n \cdot X_{nj} = (X_j - a_j) / B_n$ və standart normal qanunun paylanma funksiyaları olsun. L. – F. t.-ndə hökm olunur ki, F_n -in Φ -ə ρ müntəzəm metrikasında yığılması üçün zəruri və kifayətdir ki, hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\delta_n(\varepsilon) = \sum_j \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) \rightarrow 0 \quad (3)$$

münasibəti ödənilsin. Limit teoremlərində əsas diqqət obyekt A. N. Kolmoqorov modeli (bax, *Limit teoremləri*) olduqda, bu şərtin kifayəti [1]-də C. Lindeberg, zəruriliyi V. Feller tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur, L. – F. t.-nin isə müddəası təbii surətdə genişləndirilmişdir. Məhz yeni variantda (Lindeberg – Feller modeli) Z_n cəmlərindəki X_{nj} asılı olmayan toplanan-

ların hökmən müəyyən strukturlu olması o qədər də vacib deyildir, lakin onlar üçün yalnız $\mathbf{M}X_{nj} = 0, \sigma_{nj}^2 = \mathbf{D}X_{nj}$ sonlu və $\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \dots = 1$ şərtlərinin və (2) şərtinin ödənilməsi tələb olunur. Bu zaman hökmün özü qüvvədə qalır, yəni

$$\rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \delta_n(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4)$$

münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ödənilir. Lindeberg – Feller modelini daha da genişləndirmək olar, lakin bu (4) şərti ödənilməklə aşağıdakı dəyişikliklər hesabına olunur.

1) Z_n -dəki toplananların sayı sonsuz ola bilər. Bu halda fərz olunur ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət sıra paylanmaya görə yığılır.

2) (2) şərti daha məhdud *sonsuz kiçiklik şərti*, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_j \mathbf{P}\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (5)$$

şərti ilə əvəz olunur. Bu modeldə (3) şərti aşağıdakı şərtə ekvivalentdir (bax, [3]):

hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_j \mathbf{P}\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Limit paylanmasının varlığı fərz olunduqda, Kolmoqorov modelində, limit paylanmasının normal paylanma olması üçün (6) şərtinə kriteri kimi baxılması hələ A. Ya. Xinqinə məlum idi və bu [5]-də təkrar olunur. Lakin Lindeberg – Feller modeli çərçivəsində (6) şərtinin (3) şərtinə ekvivalentliyi o vaxtlar məlum deyildi. S. N. Bernşteyn 1926-da [6]-də Lindeberg – Fellerin genişləndirilmiş modelində (3) şərtinin kifayəti isbat etmişdir. 1946-da isə o isbat edir ki, L. – F. t. ilkin variantda Lyapunov teoreminin nəticəsidir (bax, [7]), bu [5]-də də qeyd olunmuşdur. L. – F. t.-nin Kolmoqorov modelindən fərqli modeldə müxtəlif analoqlar və ümumiləşmələri mövcuddur (bax, məs., [8]). Belə ümumiləşmələrdən biri (5) şərtindən imtina ilə bağlıdır. Bu halda F_n -in Φ -ə yığılma şərtlərinin xarakteri olduqca dəyişir, belə ki, Z_n cəmlərində ehtimal toplananlar ola bilər ki, özünün mühümlüyü ilə bütün cəmlə müqayisə olunur.

$$V = \{v = (G_1, G_2, \dots): G_k(x) = \Phi(x/\sigma_k), \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots = 1\}$$

olsun, yəni $G_1 * G_2 * \dots = \Phi$ bərabərliyi hər bir $v \in V$ toplusu üçün ödənilsin. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $\rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0$ münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\mu(u_n, v_n) = \sup_j L(F_{nj}, G_{nj}) + L(F_n^*, G_n^*) \rightarrow 0 \quad (7)$$

münasibətini ödəyən $v_n = (G_{n1}, G_{n2}, \dots)$ toplular ardıcılığının varlığı zəruri və kifayətdir, $u = (F_{n1}, F_{n2}, \dots)$, L – Levi metrikası, F_n^* və

$$F_n^*(x) = \sum_j \int_{-\infty}^x \lambda^2 dF_{nj}(\lambda)$$

qaydası ilə uyğun toplular üzrə qurulur.

Məsələn, belə u_n ardıcılığı kimi $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$ olan $(\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \dots)$ toplulannı götürmək olar.

$$\int x dF_k(x) = 0, \quad \sum_j x^2 dF_j(x) = 1$$

şərtləri ilə qurulan $u = (F_1, F_2, \dots)$ toplularının U fəzasında digər μ funksionallarının çoxluğu mövcuddur, bu funksionalların köməylə də yığılma kriterisi (7) formasında ifadə oluna bilər (bax, [9] – [11]). Bu forma L. – F. t.-ni (7) qeyri – klassik qoyuluşunda Φ limit qanununun kompozisiyaya ayrılışının dayanıqlılıq teoremi kimi interpretasiya etməyə imkan verir.

$W, - \int x dF(x) = 0, \int x^2 dF(x) = 1$ şərtlərini ödəyən paylanma funksiyaları çoxluğu olsun. W -dan olan normal çoxluqların çoxluğu B yalnız birçə Φ funksiyasından ibarətdir. $Ju = F_1 * F_2 * \dots$ $J: U \rightarrow W$ inikası olsun; B -nin U -da tam proobrazı V çoxluğudur. (7) müddəəsi aşağıdakı müddəəyə ekvivalentdir:

$$\rho(Ju, B) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mu(u, J^{-1}B) \rightarrow 0.$$

Elementdən çoxluğa qədər məsafə ümumi qəbul olunmuş mənada anlaşılır. Limit teoremlərinin qeyri – klassik qoyuluşda belə interpretasiyası (yəni (5) şərtindən istifadə olunmamaqla) ümumi halın özündə mümkündür (bax, [10]).

Əd.: [1] Lindeberg J. W., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 211–25; [2] Feller W., «Math. Z.», 1935, Bd 40, S. 521–59; [3] Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ. М., 1962; [4] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938; [5] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [6] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 121–76; [7] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 434–47; [8] Липцер Р. III., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [9] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [10] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 1, с. 178–89; [11] Ротарь В. И., «Матем. заметки», 1975, т. 18, № 1, с. 129–35.

LİNDELÖF XASSƏSİ «Линделефа свойство; Lindelöf property» – bax, *Ölçü*.

LİNNİK DİSPERSİYON METODU «Линника дисперсионный метод; Linnik dispersion method» – bax, *Dispersion metod* ədədlər nəzəriyyəsində.

LİNNİK SİNFİ «Линника класс; Linnik class» – Levi – Xinqin kanonik ifadəsində spektral funksiyası $G(x)$, artım nöqtələri çoxluğu

$$\{\mu_{m_1}\}_{m=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{m_2}\}_{m=-\infty}^{\infty} \cup \{0\}$$

şəklində sıçrayışlar funksiyası olan *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfidir, burada $\mu_{m_1} > 0$, $\mu_{m_2} < 0$ və $\mu_{m+1,r}/\mu_{m,r}$ ($r = 1, 2$, $m = 0, \pm 1, \dots$), -1 -dən fərqli natural ədədlərdir. L. s. sonsuz bölünən paylanmaların ayrılışı nəzəriyyəsində mühüm rolə malikdir (bax, *Sonsuz bölünən paylanma; ayrılış*).

Əd.: [1] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 1, с. 3–40.

LİNNİK YIĞILMA ZONALARI «Линника зоны сходимости; Linnik zones of convergence» – Yu. V. Linnikin [1]-də daxil etdiyi $0 \leq x \leq \Lambda(n)$ şəklində ele oblastdır ki, bu zonada $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \rightarrow 1, \quad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \rightarrow 1$$

münasibətləri ödənilir, burada $F_n(x)$, $-n$ sayda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin *paylanma funksiyasıdır*, bu şərtlə ki, baxılan təsadüfi kəmiyyətlər zəiflədilmiş *Kramer şərtini* ödəyirlər, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır və $n \rightarrow \infty$ olduqda $\Lambda(n) \rightarrow \infty$.

Əd.: [1] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 2, с. 245–63; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

LİTL DÜSTURU «Литтла формула; Little formula» – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

LİUVİLL STOXAŞTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ «Лиувилля стохастическое дифференциальное уравнение; Liouville stochastic differential equation» – adi *stoxastik differensial tənliyin* birinci inteqralı üçün tənlikdir. Düz və tərs L. s. d. t.-ləri vardır. Düz tənliyi ilkin stoxastik differensial tənliyi doğuran Viner prosesinin «keçmişindən» asılı birinci inteqral ödəyir, ikinci tənliyi isə bu prosesin «gələcəyindən» asılı inteqral ödəyir. Hər iki L. s. d. t.-ləri ikinci tərtib *xətti stoxastik parabolik tənliklərdir*.

Əd.: [1] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1983.

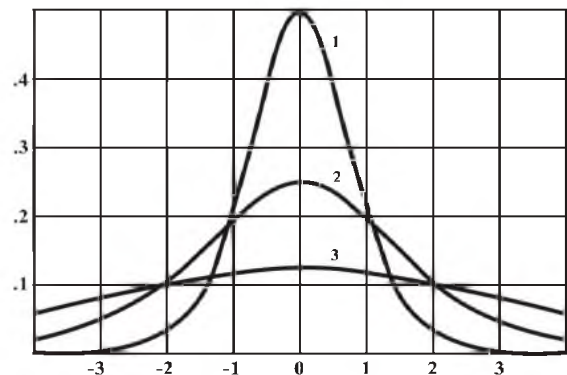
LOGİSTİK PAYLANMA «логистическое распределение; logistic distribution» – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = 1/4 \beta \operatorname{ch}^2(x - \alpha)/2\beta$$

düsturu ilə verilən (şəkil), $(-\infty, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada α, β – parametrlərdir, $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$. L. p.-nin paylanma funksiyası

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\{(x - \alpha)/\beta\}}$$

özünün riyazi gözləməsi $x = \alpha$ -ya nəzərən simmetrikdir; dispersiyası $\pi^2 \beta^2/3$ -ə bərabərdir, xarakteristik funksiyası isə $f(t) = e^{i\alpha t} \pi \beta t / \operatorname{sh}(\pi \beta t)$ düsturu ilə ifadə olunur.



$\alpha = 0$ və (1) $\beta = 0,5$; (2) $\beta = 1$; (3) $\beta = 2$ olduqda loqistik paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

Biologiyada, iqtisadiyyatda, sosiologiyada və s. L. p.-ni tətbiq etmək məqsədilə çoxsaylı əsaslandırılmamış cəhdlər edilmişdir. L. p. normal paylanmadan az fərqlənir, bəzi hallarda ondan istifadə daha məqsəduyğundur və tibbi – bioloji obyektlərin statistik araşdırılmasında ondan istifadə olunur.

L. p.-nin modeləşdirilməsində onun müntəzəm paylanma ilə aşağıdakı əlaqəsindən istifadə olunur: əgər $\eta \in [0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\xi = \alpha + \beta \ln \eta / (1 - \eta)$ təsadüfi kəmiyyəti α və β parametrləri L. p. qanunu ilə paylanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

LOKAL BƏRPA TEOREMİ « локальная теорема восстановления; local renewal theorem » – bax, *Bərpa teoremi*.

LOKAL BİRCİNS TƏSADÜFİ MEYDAN « локально однородное случайное поле; locally homogeneous random field » – bax, *Təsadüfi meydan bircins artımlıdır*.

LOKAL BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlı « локально однородный случайный процесс с независимыми приращениями; locally homogeneous random process with independent increments » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımlıdır*.

LOKAL ERQODİK TEOREM « локальная эргодическая теорема; local ergodic theorem » – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təsir edən $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ ölçülən axınının trayektoriyalarının lokal dəyişmələrini xarakterizə edən aşağıdakı kimi ifadə olunan hökmdür: ixtiyari $f \in L^1_p(\Omega)$ funksiyası üçün bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\mathbf{P}$ – sanki

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(T^t \omega) dt = f(\omega)$$

berabərliyi doğrudur. L. e. t. ona ekvivalent digər formada ifadə olunur: əgər ζ_t başlanğıc birinci momenti sonlu, dar mənada stasionar, ölçülən təsadüfi prosesdirsə,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\varepsilon \zeta_t dt = \zeta_0$$

berabərliyi sanki yəqin ödənilir. Bu teoremi N. Viner [1]-də isbat etmişdir. Bu teorem, digər *erqodik teoremlər* kimi σ – sonlu ölçünü saxlayan çevirmələr qrupunun geniş sinfi üçün ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Wiener N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, № 1, p. 1–18; [2] Petersen K., Ergodic theory, Camb., 1983.

LOKAL ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « локально наиболее мощный критерий; locally most powerful test » – eht. φ_0 statistik kriterisidir ki, onunla eyni səviyyəli hər bir φ kriterisi üçün onun eht. ilkin hipotez ətrafı vardır ki, burada φ_0 kriterisinin güc funksiyası φ kriterisinin güc funksiyasından kiçik deyildir.

Daha dəqiq, $d(\theta)$ – alternativ θ və ilkin H hipotezi arasında fərqlənmə ölçüsü, $\beta(\varphi, \theta)$ isə φ kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər α səviyyəli hər bir $\varphi \in \Phi$ kriterisi üçün eht. Δ tapılsa ki, $0 < d(\theta) < \Delta$ şərtini ödəyən bütün θ -lar üçün $\beta(\varphi_0, \theta) \geq \beta(\varphi, \theta)$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda α səviyyəli φ_0 kriterisi Φ kriterilər sinfində lokal ən güclü kriteri adlanır. L. e. g. k. rəq. kriteriləri sinfində lokal ən güclü rəq. kriterisi, meylsiz kriterilər sinfində lokal ən güclü meylsiz kriteri və s. adlanır.

θ həqiqi və $d(\theta) = \inf_{\theta_0 \in H} |\theta - \theta_0|$ olduğu hal üçün aşağıda misallar verilmişdir.

Misal 1. Əgər hər bir kriterinin güc funksiyası θ_0 nöqtəsində kəsilməz differensiallandırsa, onda $K: \theta > \theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı $H: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsi üçün α səviyyəli bütün kriterilər sinfində L. e. g. k. vardır və bu kriteri onunla təyin olunur ki, o, $\frac{d}{d\theta} \beta(\varphi, \theta) \Big|_{\theta_0}$ törəməsinə maksimallaşdır. Xüsusi halda, əgər

$$\beta(\varphi, \theta) = \int \varphi(x) p_\theta(x) d\mu(x)$$

olarsa və ixtiyari φ kritik funksiyası üçün θ üzrə inteqral işarəsi altında differensiaslama mümkün olarsa, onda

$$\frac{d}{d\theta} \beta(\varphi, \theta) \Big|_{\theta_0} = \int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(x) \Big|_{\theta_0} p_{\theta_0}(x) d\mu(x)$$

berabərliyi doğrudur və Neyman – Pirson lemmasına əsasən bu berabərliyin maksimumu $\beta(\varphi, \theta_0) = \alpha$ şərtində təmin olunur,

bu şərtlə ki, $\varphi(x)$ μ ölçüsü üzrə $\left\{ x: \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(x) \Big|_{\theta_0} \geq k \right\}$

şəklində çoxluğun sanki yəqin indikatoru olsun.

Misal 2. Əgər hər bir kriterinin güc funksiyası θ_0 nöqtəsində iki dəfə kəsilməz differensiallandırsa, onda $K: \theta \neq \theta_0$ alternativinə qarşı $H: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün α səviyyəli eht. lokal ən güclü meylsiz kriteri vardır ki, bu kriteri H üçün α səviyyəli bütün meylsiz kriterilər arasında $\frac{d^2}{d\theta^2} \beta(\varphi, \theta) \Big|_{\theta_0}$ törəməsinə maksimallaşdır.

Əgər

$$\beta(\varphi, \theta) = \int \varphi(x) p_\theta(x) d\mu(x)$$

olarsa, onda inteqral işarəsi altında θ üzrə ikiqat differensiaslama mümkün olduqda lokal ən güclü meylsiz kriterinin kritik oblastı

$$\left\{ x: \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(x) \Big|_{\theta_0} \geq k_1 \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(x) \Big|_{\theta_0} + k_2 p_{\theta_0}(x) \right\}$$

çoxluğu şəklində ifadə olunur.

Misal 3. $f(y)$ – Lebeq ölçüsü üzrə $\mathbb{R}^1$ -də mütləq kəsilməz sıxlıq funksiyası və $\int |f'(y)| dy < \infty$ olsun. Uyğun çoxölçütlü

sıxlıq funksiyası $\prod_{i=1}^m f(x_i - \theta) \prod_{i=m+1}^{m+n} f(x_i)$, $\theta \geq 0$ olan

$X_1, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$ seçimi müşahidə olunur. $K: \theta > 0$ alternativinə qarşı $H: \theta = 0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır. $a_{m+n}(i, f)$, $1 \leq i \leq m+n$, f sıxlıq funksiyasına uyğun nişanlar (işarələr). R_i , X_i -lərin rəngləri, $1 \leq i \leq m+n$ olsun. Onda kritik oblastı

$$\sum_{i=1}^m a_{m+n}(R_i, f) \geq k$$

olan kriteri alternativ K hipotezinə qarşı H hipotezinin yoxlanılması üçün lokal ən güclü rəng kriterisidir.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [3] Гаяк Я., Шидлак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] Neyman J., «Bull. Soc. math. France», 1935, v. 63, p. 246–66; [5] Lehman E., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 3, p. 399–419.

LOKAL İNTEQRALLANAN PROSES « локально интегрируемый процесс; locally integrable process » – bax, *Kompensator*.

LOKAL İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « локально изотропное случайное поле; locally isotropic random field » – bax, *Təsadüfi meydan izotrop artımları*.

LOKAL LİMİT TEOREMLƏRİ « локальные предельные теоремы; local limit theorems » – paylanmaların sıxlıq funksiyaları üçün *limit teoremləridir*, yeni paylanmaların sıxlıq funksiyalarının limit sıxlıq funksiyasına yığılmasını (əgər bunlar varsa) müəyyənləşdirən teoremlərdir və ya klassik variantda şəbəkəvari paylanmalar üçün lokal teoremlərdir.

$\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan cırlaşmayan, yalnız $b + kh$ ($h > 0$, b – sabitlərdir, $k \in \mathbb{Z}$) kimi qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun (yeni ξ_i h addımlı şəbəkəvari paylanmaya malikdir). L. l. t. şəbəkəvari paylanmalar üçün

$$P_n(k) = P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = nb + kh\right)$$

ehtimalının asimptotikasını müəyyənləşdirir.

$M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2 > 0$ olsun.

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{nb + kh - na}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2\right\} \rightarrow 0$$

münasibətinin $n \rightarrow \infty$ olduqda k -ya görə müntəzəm ödənilməsi üçün h addımının maksimal olması zəruri və kifədir (Qnedenko teoremi; bax, [1]).

Burada L. l. t. ən sadə hal üçün – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər və normal limit qanunu paylanması üçün verilmişdir. Bu teoremin xüsusi halları, yalnız iki qiymət alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün helə A. Muavr (A. Moivre, 1730) və P. Laplas (P. Laplace, 1812) məlum idi.

$\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ – ümumi paylanma funksiyası $F(x)$, ri-yazi gözləməsi $M\xi_i = a$ və dispersiyası $D\xi_i = \sigma^2 > 0$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və

$S_n = (1/\sigma\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n (\xi_i - a)$ olsun. Paylanma sıxlıqları üçün

L. l. t. S_n təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $p_n(x)$ -in asimptotik yaxınlaşmasını ifadə edir. $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$p_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

münasibətinin x -ə görə müntəzəm ödənilməsi üçün ələ bir k qiymətinin varlığı zəruri və kifədir ki, $p_k(x)$ -in məhdud olmasını təmin etsin (B. V. Qnedenko, bax, [2]).

Hal-hazırda normal qanuna yığılma deyil, yığılma sürəti də öyrənilmişdir və asimptotik ayrılış mənasında L. l. t.-nin dəyişdirilmələri alınmışdır (bax, [4]). Limit paylanması kimi ixtiyari dayanıqlı paylanmalara baxılır (bax, [3]). L. l. t. müxtəlif paylanmalı təsadüfi kəmiyyətlər və vektorlar üçün də araşdırılmışdır (bax, [2], [4]).

Bax, *Təsadüfi dolaşma qrupda; lokal teoremlər*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3, с. 187–94; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] Статюлявичус В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 645–59.

LOKAL MARTİNQAL « локальный мартингал; local martingale » – ələ *təsadüfi prosesdir* ki, onun Markov anlarının ələ azalmayan ardıcılığı tapılar ki, «dayanan» proseslər müntəzəm inteqrallanan *martinqallar* olur.

$\zeta = \{\zeta_t\}_{t \geq 0}$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalı, $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrlərinin sağdan kəsilməz $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ ailəsi (axını) ilə uzlaşmış təsadüfi proses olsun. Əgər $M|\zeta_t| < \infty$ və $M|\zeta_t| \mathcal{A}_s = M_s$, $s \leq t$ P – sanki yəqin olarsa, ζ prosesi *martinqal* adlanır. $\{\zeta_t\}_{t \geq 0}$ ailəsinin müntəzəm inteqrallananlığı şərtində, yeni

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} M|\zeta_t| I(|M_t| > c) = 0$$

şərti ödənilməsi halda ζ martinqalı müntəzəm inteqrallanan martinqal adlanır. Markov anları $(T_n)_{n \geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin azalmayan ardıcılığı üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$

(P – sanki yəqin) olması şərti ilə, hər bir $n \geq 1$ qiymətində $M_{T_n} = (M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ «dayanan» prosesi müntəzəm inteqrallanan martinqal olarsa, M prosesi lokal martinqal adlanır. N – ixtiyari, $\mathbb{A}$ ilə uzlaşmış, kəsilməz trayektoriyalı məhdud martinqal olarsa, ixtiyari N üçün M_N prosesi L. m. olarsa, M L. m. sırf kəsilməz martinqal adlanır. Trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyalı hər bir L. m. sırf kəsilməz martinqaldır. M lokal martinqalının iki cür ayrılışı vardır: $M = M^1 + M^2$ və $M = M^c + M^d$. Birinci ayrılışda

M^1 – lokal integrallanan variyasiyalı trayektoriyalarlı L. m.,
 M^2 – lokal kvadratik integrallanan martinqaldır. İkinci ayrılışda
 M^c – kesilməz trayektoriyalarlı (kesilməz martinqal kompo-
 nentli) L. m. və $M_0^c = 0$ – lokal kvadratik integrallanan
 martinqal, M^d – sırf kesilən L. m.-dir.

L. m. M ilə, adətən, artan təsadüfi proseslər əlaqələndirilir,
 yeni aşağıdakı kimi proseslər:

$$M^* = \left(\sup_{s \leq t} |M_s| \right)_{t \geq 0}, \quad (\Delta M)^* = \left(\sup_{s \leq t} |\Delta M_s| \right)_{t \geq 0},$$

$$\sum (\Delta M)^2 = \left(\sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 \right)_{t \geq 0},$$

burada $\Delta M_s = M_s - \lim_{u \uparrow s} M_u$. Bu halda M^* və $(\Delta M)^*$ pro-
 sesləri lokal integrallanan, $\sum (\Delta M)^2$ -nin isə $\sum (\Delta M_s)^2 < \infty$

(P – sanki yəqin), $t > 0$ xassəsinə malik proses olduğu fərz olunur.

L. m. M üçün $[M, M] = ([M, M]_t)_{t \geq 0}$ kvadratik variyasi-
 yası təyin olunur, bu halda $[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2$:

$\langle M^c \rangle$ – lokal kvadratik integrallanan M^c martinqalının

($M = M^c + M^d$ ayrılışındakı) kvadratik xarakteristikasıdır.

Əd.: [1] Ito K., Watanabe S., «Ann. Inst. Fourier», 1965, v. 15, p. 13–30; [2] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1979, v. 714; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

LOKAL MARTİNQAL; integral ifadə « **локаль-
 ный мартингал;** интегральное представле-
 ние; **local martingale;** integral representation
 of ». $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, P)$ – stoxastik bazis. $\zeta = \{\zeta_t\}_{t \geq 0}$
 – ayrılışında kesilməz martinqal komponenti $\zeta^c = \{\zeta_t^c\}_{t \geq 0}$ olan,
 sıçrayışlar ölçüsü $\mu = \mu(dt, dx)$ kimi ifadə olunan və öngö-
 rül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \nu)$ üçlüyü olan,
 $(\mathbb{A}, P)$ -yə nəzərən semimartinqal olsun. Əgər kesilməz ζ^c
 lokal martinqalı və $\mu - \nu$ ölçüsü üzrə stoxastik integralların
 varlığı şərtlərini ödəyən ələ $\mathcal{P}$ – ölçülən (öngörül) $h = h(\omega, t)$
 funksiyası və $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – ölçülən $[\mathcal{B}(\mathbb{R})]$, $-\mathbb{R}$ -də Borel
 σ – cəbridir] $H = H(\omega, t, x)$ funksiyası varsa ki, $(\mathbb{A}, P)$ -yə
 nəzərən $M = (M_t)_{t \geq 0}$ lokal martinqalı M_0 və stoxastik
 integrallarla

$$M_t = M_0 + h \zeta_t^c + H^*(\mu - \nu)_t \quad (*)$$

cəmi şəklində ifadə olunsun, onda sağdan kesilməz və soldan
 limitləri olan trayektoriyalarlı $M = (M_t)_{t \geq 0}$ *lokal martinqalı*
 üçün (*) integral martinqal ifadəsi mümkündür. M üçün inte-
 qral ifadəsinin varlığı şərtləri

$$\mathcal{L}_P = \{ \tilde{P} : \tilde{P} \ll P, \tilde{T} = T \}$$

ehtimal ölçüləri ailəsi ilə bağlıdır və bu ailə onunla seçiyyəvidir ki,
 $\mathcal{L}_P$ -dən olan hər bir $\tilde{P}$ ölçüsü P -yə nəzərən mütləq kesil-
 mezdir, onun $\mathcal{A}_0$ -a daralması P -nin $\mathcal{A}_0$ -a daralması ilə üst-
 üstə düşür və ζ -in $(\mathbb{A}, P)$ – semimartinqalının tripleti T isə T
 tripletli P – fərqlənməz tripletlidir ($\{ \tilde{P} \ll P$ ölçüsünün isə müt-
 ləq kesilməz əvəz olunmasında ζ prosesinin semimartinqallıq
 xassəsi olduğu kimi qalır).

Sağdan kesilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı ixtiyari
 M lokal martinqalının $[(\mathbb{A}, P)$ -yə nəzərən] (*) integralının
 varlığı $\mathcal{L}_P = \{P\}$ şərtinə, yeni $\mathcal{L}_P$ -nin bir nöqtədən ibarət
 olması şərtinə ekvivalentdir. Buna ən sadə misal ələ P
 ölçüsüdür ki, ζ semimartinqalı bu ölçüyə nəzərən asılı olmayan
 artımları prosesidir.

Əd.: [1] Jacob J., «Proc. of Symp. in Pure Math.», 1977, v. 31,
 p. 37–53; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартин-
 галов, М., 1986.

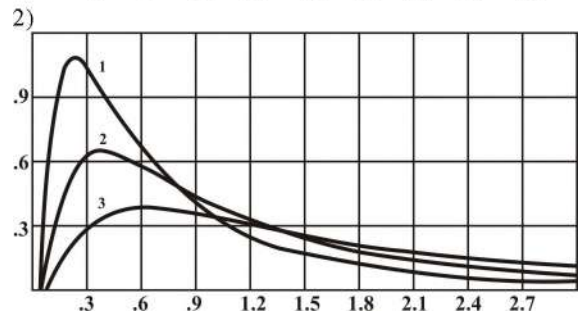
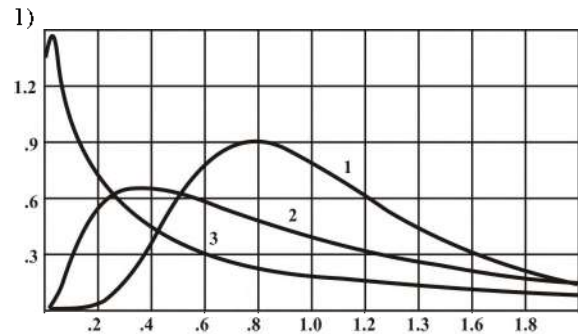
**LOKAL SONLU ÖLÇÜ « локально конечная
 мера; locally finite measure »** – bax, Radon ölçüsü.

**LOQARİFMİK DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİ-
 YASI « логарифмическая функция правдопо-
 добия; logarithmic likelihood function / log-likelihood »**
 – bax, Doğruyaoxşarlıq funksiyası.

**LOQARİFMİK NORMAL PAYLANMA « логариф-
 мически нормальное распределение; log-normal
 distribution »**, loqnormal paylanma – $(0, \infty)$ -də
 toplanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası –

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - a)^2 / 2\sigma^2} \quad (*)$$

düsturu ilə verilən, kesilməz ehtimal paylanmasıdır (şəkil),



1) $a = 0$ və (1) $\sigma = 0.5$; (2) $\sigma = 1$; (3) $\sigma = 2$ və
 2) $\sigma = 1$ və (1) $a = -0.5$; (2) $a = 0$; (3) $a = 0.5$

olduqda loqarifmik normal paylanmanın sıxlıq funksiyaları

burada $-\infty < a < \infty$, σ – parametrlərdir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin loqarifmi $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyəti a və σ parametrləri normal paylanma qanununa tabedirsə, ξ təsadüfi kəmiyyəti paylanma sıxlığı (*) olan L. n. p. qanununa tabedir. Beləliklə, $a = M \ln \xi$, $\sigma^2 = D \ln \xi$. L. n. p. unimodal paylanmadır və müsbət asimmetriyaya malikdir. a və σ^2 parametrləri L. n. p. qanununa tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri $M \xi^k = e^{ka + k^2 \sigma^2 / 2}$ düsturu ilə ifadə olunur, riyazi gözləməsi və

dispersiyası uyğun olaraq $e^{a + \sigma^2 / 2}$ və $e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ ədədlərinə bərabərdir. Özünün momentləri ilə birqimmətli təyin olunan paylanmalardan biri də L. n. p.-dir. L. n. p.-nin xassələri uyğun normal paylanmanın xassələri ilə təyin olunur. L. n. p.-nin mühüm xassəsi: asılı olmayan L. n. p.-ya tabe təsadüfi kəmiyyətlərin hasilı də L. n. p. qanununa tabedir. Mərkəzi limit teoreminin analoqu: n sayda asılı olmayan müsbət təsadüfi kəmiyyətlərin hasilinin paylanması bəzi ümumi şərtlərlə $n \rightarrow \infty$ olduqda L. n. p.-ya yaxınlaşır. Bəzi sxemlərdə, məs., hissəciklərin bölünməsi modellərində, artım modellərində L. n. p. limit paylanması kimi yaranır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99–101, (в его кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 264–67); [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Aitchison J., Brown J., The lognormal distribution, Camb., 1957.

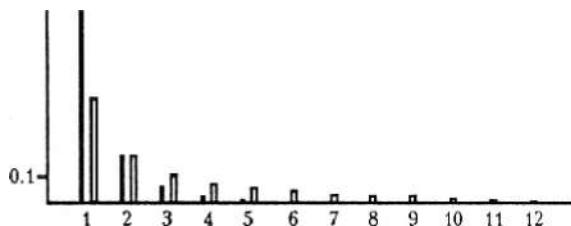
LOQARİFMİK PAYLANMA «логарифмическое распределение; logarithmic series distribution». loqarifmik sıra paylanması. – tam müsbət $k = 1, 2, \dots$ qiymətlərini

$$p_k = P\{\xi = k\} = -\frac{1}{\ln(1-q)} \frac{q^k}{k}, \quad 0 < q < 1$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır (şəkil). L. p.-nin doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$\psi(z) = \frac{\ln(1-qz)}{\ln(1-q)}, \quad f(t) = \frac{\ln(1-qe^{it})}{\ln(1-q)}$$

düsturları ilə verilir.



$q = 0,4$ və $q = 0,9$ qiymətlərində loqarifmik paylanma

L. p.-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $\alpha q / (1-q)$ və $\alpha q (1 + \alpha q) / (1-q)^2$ ifadələri ilə təyin olunur, burada $\alpha = -1 / \ln(1-q)$.

L. p. ilk dəfə ekologiya məsələləri ilə əlaqədar [1]-də daxil olunmuşdur. Müxtəlif növ fərdlərin böyük qruplarının ovlanması eyni növ ovlanmış fərdlərin sayı riyazi gözləməsi növün asılı Puasson paylanması ilə yaxşı təsvir olunur, təsadüfi seçilmiş növ

fərdlərin orta qiyməti gamma – paylanma ilə təsvir edilir. Onda aydındır ki, təsadüfi seçilmiş növ ovlanmış fərdlərin sayı *mənfi binomial paylanma* – $P\{\eta = k\} = (1-q)^r q^k$, $k = 0, 1, \dots$ qanunu ilə təsvir olunur, burada $0 < q < 1$, $r > 0$ isə kiçik parametrdir. Heç olmasa bir ədəd fərd ovlanmış növləri araşdırmaq məqsəduşğundur, buna görə də, şərti ehtimalla ifadə olunan

$$P\{\eta = k | \eta \geq 1\} = q^k (1-q)^r / [1 - (1-q)^r], \quad k = 1, 2, \dots$$

paylanmadan istifadə olunmalıdır. $r \rightarrow \infty$ olduqda bu paylanma L. p.-ya yığılır.

Təsadüfi sayda asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_v$ təsadüfi kəmiyyətləri L. p.-ya malikdirlər və q bu paylanmanın parametri, v isə λ parametri Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. Onda $\xi_1, \dots, \xi_v$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $p = 1 - q$, $r = \lambda / \ln p$ parametrləri mənfi binomial paylanma qanunu ilə paylanır.

Əd.: [1] Fisher R., Corbet A., Williams C., «J. Animal Ecology», 1943, v. 12, p. 42–57; [2] Quenouille M., «Biometrics», 1949, v. 5, p. 162–64; [3] Кендалл М., Стюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [4] Moran P., An introduction to probability theory, Oxf., 1968.

LOQNORMAL PAYLANMA «логнормальное распределение; lognormal distribution» – loqarifmik normal paylanmadır.

LYAPUNOV BƏRABƏRSİZLİYİ «Ляпунова неравенство; Lyapunov's inequality» – ξ təsadüfi kəmiyyətinin mütləq momentləri arasında bərabərsizlikdir: $0 < s < t$ olduqda

$$(M|\xi|^s)^{1/s} \leq (M|\xi|^t)^{1/t}.$$

Xüsusi halda, $s = 1$, $t = 2$ olduqda $(M|\xi|)^2 \leq M \xi^2$ L. b. – Yensen bərabərsizliyinin xüsusi halıdır.

Əd.: [1] Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 1, М., 1954.

LYAPUNOV KƏSRİ «Ляпунова дробь; Lyapunov fraction / ratio» – bax. Lyapunov teoremi.

LYAPUNOV STOXASTİK FUNKSIYASI «Ляпунова стохастическая функция; Lyapunov stochastic function» – ehtimal olmayan $V(t, x)$ funksiyasıdır ki, $(V(t, x), \mathcal{A}_t)$ cütü *supermartinqaldır*, burada $\zeta(t)$ – hər hansı təsadüfi proses, $\mathcal{A}_t$, $s \leq t$ olduqda $\{\zeta(s) \leq A\}$ hadisələrinin doğurduğu σ – cəbrdir. Əgər $\zeta(t)$ diskret zamanlı Markov prosesi olarsa, onda L. s. f. ehtimal funksiyasıdır ki, bu funksiya üçün

$$L V(t, x) = M\{V(t+1, \zeta(t+1)) | \zeta(t) = x\} - V(t, x)$$

ifadəsi müsbət deyildir. Kesilməz zamanlı Markov prosesləri üçün L operatoru uyğun prosesin infinitezimal operatorudur və buna görə də, $L V(t, x) \leq 0$ şərtinin konkret hallarda yoxlanılması çətinlik tələtmir. L. s. f. adi differensial tənlik üçün klassik Lyapunov funksiyasının (prosesi determinə olunduğu halda L. s. f. bu funksiya çevrilir) ümumiləşməsidir. Əksər hallarda supermartinqal asanlıqla ifadə etməyə imkan verən funksiyalara da L. s. f. deyilir.

Təsədüfi proseslərin trayektoriyalarının xüsusiyyətlərini keyfiyyətlə araşdırmaq üçün iki tipik kriteri L. s. f. terminlərində aşağıda verilir.

1. Əgər $\forall t, x \geq 0$ L. s. f. və $c \geq 0$ varsa ki, $R \rightarrow \infty$ olduqda

$$\inf_{t \geq 0, |x| > R} V(t, x) \rightarrow \infty, \quad LV(t, x) \leq cV(t, x)$$

münasibətləri ödənilsə, onda $\mathbb{R}^k$ -də verilən Markov prosesi sonlu müddətə ∞ -a sanki yaxın çatmır.

2. Əgər $\forall x$ Lyapunov mənaada müsbət müəyyən $\forall t$ L. s. f. varsa ki, bu funksiya üçün $x = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında $LV(t, x) \leq 0$ şərti ödənilsə, onda Markov prosesinin $\zeta(t) \equiv 0$ trayektoriyası ehtimala görə güclü mənaada dayanıqlıdır (bax, [1]–[3]).

Əd.: [1] К у ш н е р Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Х а с ь м и н с к и й Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [3] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

LYAPUNOV ŞƏRTİ «Ляпунова условие; Lyapunov condition» – bax, *Lyapunov teoremi*.

LYAPUNOV TEOREMİ «Ляпунова теорема; Lyapunov theorem» – *Muavr – Laplas teoreminin* ümumiləşdirilməsində ilk mühüm irəliləyişdir. L. t.-nin müasir ifadəsi aşağıdakı kimidir: $\zeta_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$, $n \geq 1$ – sonlu riyazi gözlemləri $a_k = M\xi_k$, r tərtib mərkəzi mütləq momentləri $\beta_k(r) = M|\xi_k - a_k|^r$, $2 < r \leq 3$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcılığı olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\varepsilon_n(r) = B_n^{-r} (\beta_1(r) + \dots + \beta_n(r)) \rightarrow 0$$

– Lyapunov şərti ödənilsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\Delta = \rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur, burada $B_n^2 = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$, F_n –

$$B_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

cəminin paylanma funksiyasıdır və $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$.

Bu teorem ehtimal nəzəriyyəsinin yeni – *xarakteristik funksiyalar metodu* ilə isbat olunmuşdur (bax, [2], [3]). Problemi P. L. Çebişev qoymuşdur və onun mümkün həlli yolunu *momentlər metodu* ilə aparılmasını da o, [1]-də təklif etmişdir. Bu metodla nəticə A. A. Markov tərəfindən [4]-də təkrar alınmışdır. [2] və [3]-də F_n -in Φ -ə müntəzəm yığılmasından başqa, bir neçə sərbəst parametrlərdən asılı yığılma sürəti üçün qiymətlər tapılmışdır.

Bunlardan yığılma sürətinin qiymətləri üçün sadələşdirilmiş variantlar alınmışdır (bax, [5]): məs.,

$$\Delta_n \leq \begin{cases} \frac{M}{3-r} \exp\left(\frac{4}{r-2}\right) \varepsilon_n(r), & \text{əgər } 2 < r < 3, \\ M \varepsilon_n(r) |\log \varepsilon_n(r)|, & \text{əgər } r = 3 \text{ olarsa,} \end{cases} \quad (*)$$

burada M – ədədi sabitdir. A. Berri [6], K. Esseen [7]-də ($r = 3$ halında) və M. Kas [8]-də bu qiymətləri dəqiqləşdirmişlər:

$$\Delta_n \leq C \varepsilon_n(r), \quad 2 < r \leq 3,$$

burada C – ədədi sabitdir. Hal-hazırda məlumdur ki, $C \geq 0,4097\dots$ (K. Esseen, [7]) və $C \leq 0,7915$ (İ. S. Şiqanov, [8]). Əgər $\varepsilon_n(3) < \infty$ olarsa, $r = 3$ halına üstünlük verilməsi ənənəvi hala çevrilmişdir, bu da ξ_k təsadüfi kəmiyyətlərinin yalnız eyni qanunla paylanmasına əsaslandırılmışdır (bunu A. M. Lyapunov [2]-də göstərmişdir, o, $\varepsilon_n(5/2) = o(\varepsilon_n(3))$ olduğu hal üçün misal qumuşdur, bax, [5]). L. t. əslinə qalanda, formal olaraq asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artan cəmləri sxemilə bağlı olduğuna baxmayaraq (*) qiymətlərindən aydındır ki, bu teorem *seriyalar sxemi halında* da doğrudur.

L. t.-nin sonrakı inkişafı haqqında *Mərkəzi limit teoremi* məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Чебышев П. Л., «Зап. имп. Акад. наук», 1887, т. 55, № 6, Приложение; [2] Liapounoff A., «Изв. имп. Акад. наук», 5 серия, 1900, т. 13, № 4, с. 359–86; [3] Liapounoff A., «Зап. имп. Акад. наук», 8 серия, 1901, т. 12, № 5, с. 1–24; [4] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] Золотарев В. М., «Труды матем. ин-та АН СССР», 1988, т. 182, с. 24–47; [6] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 122–36; [7] Esseen C. G., «Acta. Math.», 1945, v. 77, p. 1–125; [8] Katz M., «Acta. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 3, p. 1107–08; [9] Esseen C. G., «Skand. Aktuarietidskr.», 1956, v. 39, № 3–4, p. 160–70; [10] Шиганов И. С., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1982, с. 109–15.

LYUSİAN «люсиан; lusian», Bernulli vektoru. – *ələ təsadüfi vektordur* ki, onun koordinatları asılı olmayan Bernulli sınaqlarının nəticələridir (ümumiyyətlə, müxtəlif paylanmaya malik), yeni 0 və 1 qiymətlərini alan asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin sonlu ardıcılığıdır, belə ki, $P\{X_i = 1\}$ ədədləri fərqlənə bilərlər. L. anlayışı (bax, [1]) qeyri-ədədi təbii obyektlərin *statistikasında* geniş istifadə olunur. Təsədüfi tolerantlıqlar (refleksiv və simmetrik binar münasibətlər), asılı olmayan elementləri *sonlu təsadüfi çoxluqlar*, asılı olmayan cüt müqayisələr ardıcılığı L.-a gətirir. L.-dan məhsulun keyfiyyətinin idarə olunması üçün statistik idarəetmə metodlarında, tibbi, sosioloji, ekspert, psixoloji məlumatların yenidən işlənilməsində istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., в кн.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа, М., 1980, с. 287–308; [2] Орлов А. И., в кн.: Экспертные оценки в задачах управления, М., 1982, с. 58–66; [3] Рыданова Г. В., в кн.: Случайный анализ, М., 1987, с. 68–81; [4] Рыданова Г. В., «Вестн. МГУ. Вычисл. матем. в киберн.», 1987, № 2, с. 54–58.



MAHALANOBİS METRİKASI « Махаланобиса метрика; Mahalanobis metric » – bax, *Mahalanobis məsafəsi*.

MAHALANOBİS MƏSAFƏSİ « Махаланобиса расстояние; Mahalanobis distance » – iki *paylanma* arasında məsafəni xarakterizə edən kəmiyyətdir. μ_1, μ_2 – paylanmaların uyğun riyazi gözləmə vektorları, Ξ – hər iki paylanma üçün eyni fərz olunan kovariasion matris olarsa, M. m.

$$D^2 = (\mu_1 - \mu_2)^T \Xi^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. P. Mahalanobis tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur.

Əgər paylanmalar normal qanuna tabe olarsa, xətti *diskriminant funksiyadan* istifadə olunduqda, M. m. *səhv təsnifat ehtimalı* ilə funksional əlaqəlidir. M. m.-nin seçimi qiyməti

$\hat{D}^2$ riyazi gözləmə vektorları və kovariasion qiymətlərin statistik qiymətlərinin evez olunması ilə alınır. Bu statistik qiymət vuruc dəqiqliyi ilə Hotelling statistikası ilə üst-üstə düşür. Əgər seçimlər normal paylanmalardan aparılmışdırsa, M. m.-nin meylsiz statistik qiyməti

$$\hat{D}^2 = \frac{n_1 + n_2 - p - 2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\hat{D}^2 - \frac{p}{n_1} - \frac{p}{n_2} \right)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada n_i – i -ci paylanmanın seçiminin həcmidir, $i = 1, 2$, p – fəzanın dim. – ölçüsüdür. Kovariasiyalar matrisləri eyni olmadığı halda, bəzən, M. m.-nin aşağıdakı düsturla ifadə olunan analoqundan istifadə olunur:

$$D^2 = (\mu_2 - \mu_1)^T (\alpha \Xi_1 + \beta \Xi_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_2),$$

α, β – bezi menfi olmayan konstantlardır.

Çoxölçülü statistik analizdə, məs., *klaster – analizdə* də Mahalanobis metrikanı istifadə olunur və bu metrika iki X və Y vektorları arasında M. m. tipli məsafəyə əsaslanır və o, aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$d^2(X, Y) = (X - Y)^T \Xi^{-1} (X - Y),$$

Ξ – hər hansı müsbət müəyyən matrisdir, məs., kovariasiyalar matrisinin statistik qiyməti.

Əd.: [1] Mahalanobis P. C., «Proc. Nat. Inst. Sci. India», 1936, v. 12, p. 49–55; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

MAHİYYƏTÇƏ TAM SİNİF(fi) kriterilərin « существенно полный класс критериев; essential complete class of tests » – bax, *Statistik kriteri; tam sinif*.

MAKSİMAL ADDIM(1) paylanmanın « максимальный шаг распределения; span of a distribution » – bax, *Şəbəkəvari paylanma*.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ METODU « максимального правдоподобия метод; maximum likelihood method » ən böyük doğruxaoxşarlıq metodu – aparılan müşahidələr nəticəsində alınmış eksperimental məlumatlara əsasən parametrlərin *statistik qiymətlərinin* tapılması üçün ən geniş yayılmış metodlardan biridir.

Araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x; \theta)$ -nin hər hansı bir $\theta \in \mathbb{R}^s$ çoxluğunda qiymətlər alan $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ parametridən asılı olduğu fərz olunur və

$$F(x; \theta) = P\{\xi < x; \theta\} = P\{\xi_k < x; \theta\}$$

olduğu qəbul olunur; ξ_k – k -ci sınaqda ($k = \overline{1, n}$) müşahidə oluna bilən təsadüfi kəmiyyət olub, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylandığı qanunla paylanmışdır. Aparılan sınaqlar asılı olmadığından, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n – ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin n – ölçülü paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta) = p(\xi_1; \theta) p(\xi_2; \theta) \cdot \dots \cdot p(\xi_n; \theta) \quad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Aydındır ki, $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi nöqtəsinin mərkəzi n – ölçülü fəzanın $(x_1, \dots, x_n)$ nöqtəsində, tillərinin isə $dx_1, \dots, dx_n$ olduğu n – ölçülü paralelepipedə məxsus olması hadisəsinin ehtimalının (θ -nin funksiyası kimi) öz maksimumunu θ parametridən hansı qiymətində alacağı şərti təyin olunduğu halda, θ parametridən statistik qiymətini hesablamaq olur.

Diskret halda $L(\cdot)$ funksiyası

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta) = p_{\theta_1}(\theta) \cdot \dots \cdot p_{\theta_n}(\theta) \quad (2)$$

münasibətilə təyin olunur.

$L(\theta) = L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)$ funksiyasına θ parametridən doğruxaoxşarlıq funksiyası, (1), (2) bərabərliklərinin sol tərəfindəki ehtimalların θ -nin funksiyası kimi maksimum nöqtəsi θ^* -ya M. d. m. ilə hesablanmış maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti deyilir.

Aydındır ki, $L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)$ funksiyasının maksimum nöqtələrini təyin etmək üçün

$$\frac{\partial L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

tənliyini həll etmək lazımdır, çünki $L(\theta)$ -nin maksimum nöqtəsində $L'(\theta) = 0$ şərti ödənilməlidir. (3) bərabərliyi doğruxaoxşarlıq tənliyi adlanır. Bu halda θ^* doğruxaoxşarlıq

tənliyinin həlli olacaqdır. Bir çox hallarda $L(\theta)$ unimodal olur və bu halda θ^* doğruxaoxşarlıq tənliyi (3)-ün yeganə həllidir və bu da θ^* statistik qiymətinin

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

tənliyinin həllinin olması ilə ekvivalentdir. Doğrudan da, $L(\theta)$ və $\ln L(\theta)$ funksiyalarının maksimum nöqtələrinin üst-üstə düşməsinə əsasən, (3) tənliyi əvəzinə (4) tənliyini həll etmək məqsədə uyğundur. Belə ki,

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}.$$

Naməlum parametrlərin sayı birdən çox olarsa, bu parametrlərin statistik qiymətlərini M. d. m. ilə təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır:

$$\frac{\partial L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

ξ diskret təsadüfi kəmiyyət olsun. Onun naməlum θ parametrlərindən asılı paylanma qanunu aşağıdakı kimi verilir:

$$P\{\xi = x_k\} = p_k(\theta), \quad k = \overline{1, n}; \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n. \quad (5)$$

Aydındır ki, bu halda doğruxaoxşarlıq funksiyası

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta) = \prod_{k=1}^n p_k(\theta) \quad (6)$$

düsturu ilə təyin olunacaqdır.

(3) tənliyini həll etdikdə $\theta = \text{const}$ tipli bütün köklər nəzərə alınmamalı. lakin tənliyin həlli yalnız $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi qiymətlərindən asılı kök sayılmalıdır. Doğruxaoxşarlıq tənliyinin hər bir həlli θ üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymət olur.

Paylanma qanunlarının geniş bir sinfi üçün M. d. m. ilə təyin olunan parametrlərin statistik qiymətləri tutarlı statistik qiymətlər olur və bu statistik qiymətlər asimptotik olaraq normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olub, qiymətləndirilən parametrlərin digər statistik qiymətləri ilə müqayisədə ən kiçik dispersiyaya malik olur.

M. d. m. ilə təyin olunmuş statistik qiymətlər üçün seçiyəvi mühüm xüsusiyyətlər aşağıdakılardır:

1) doğruxaoxşarlıq tənliyinin həlli vardır və bu həll θ parametrlərinin tutarlı statistik qiymətidir;

2) doğruxaoxşarlıq tənliyinin kökü θ parametri üçün asimptotik effektiv statistik qiymətdir;

3) doğruxaoxşarlıq tənliyinin kökü asimptotik normal limit paylanması ilə paylanmışdır, yeni $n \rightarrow \infty$ olduqda təyin edilmiş statistik qiymət uyğun normallaşdırılmadan sonra Gauss paylanması ilə paylanır;

4) əgər θ parametrlərinin effektiv statistik qiyməti varsa, doğruxaoxşarlıq tənliyinin bu effektiv qiymət ilə üst-üstə düşən yeganə kökü vardır.

M. d. m. ilə təyin edilmiş statistik qiymət meylsiz statistik qiymət ola bilər.

Misallar.

1) X təsadüfi kəmiyyəti 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq $1-p$ və p ehtimalları ilə alır, $0 < p < 1$. Bu halda hər hansı bir n həcmli seçimdə m sayda 1, $n-m$ sayda 0-lar olacaqdır.

Onda doğruxaoxşarlıq tənliyi

$$L(X_1, \dots, X_n; p) = p^m (1-p)^{n-m}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və bu halda (4) düsturuna analoji aşağıdakı düstur alınır:

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0.$$

Bu tənlikdən isə onun yeganə olan həllinin

$$p^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{m}{n}$$

olduğu alınır.

Beləliklə, m/n statistikasi maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətidir; bu qiymət meylsiz statistik qiymətdir, çünki

$M\left(\frac{m}{n}\right) = p$. Digər tərəfdən, o həm də tutarlı statistik qiymətdir,

çünki $n \rightarrow \infty$ olduqda böyük ədədlər qanununa əsasən $\frac{m}{n} \xrightarrow{P} p$

münasibəti ödənilir. Daha sonra bu statistika asimptotik olaraq Gauss paylanması ilə paylanmış statistik qiymətdir.

2. X_k , $k = 1, \dots, n$ – paylanmalarının sıxlıq funksiyaları

$$\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^{-1} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $a = M X_k$, $\sigma^2 = D X_k$ naməlum parametrlərdir. Bu halda doğruxaoxşarlıq tənliyi

$$L = L(X_1, \dots, X_n; a, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

və

$$\ln L = -\frac{n}{2} (\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2$$

olur. Onda $\tilde{a}$ və $\tilde{D}_n$ parametrləri üçün

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\tilde{D}_n} \sum_{k=1}^n (X_k - \tilde{a}_n) = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\tilde{D}_n} + \frac{n}{2(\tilde{D}_n)^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \tilde{a}_n)^2 = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemi alınır.

Birinci tənlikdən

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

olduğu aydındır. $\tilde{a}_n$ -in bu qiymətini sistemin ikinci tənliyində yerinə yazdıqda

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(X_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

və

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{D}}_n = \frac{n-1}{n} \mathbf{D}X_k$$

olur. Demeli, $\frac{n}{n-1}\tilde{\mathbf{D}}_n$ maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymeti meylsiz və tutarlı statistik qiymətdir.

Müeyyen ümumi şərtlər daxilində (4) doğruxaoxşarlıq tənliyinin həlli vardır ki, o, $n \rightarrow \infty$ olduqda ehtimala görə θ parametrinin əsl qiymətinə yığılır. Bu həll θ parametri üçün asimptotik-normal və asimptotik – effektiv statistik qiymətdir.

M. d. m.-nu statistik qiymətlərin tapılması üçün ümumi bir metod kimi R. Fişer [1]-də təklif etmişdir. Bu metod daha ümumi halda da istifadə olunur: əgər X müşahidəsinə müvafiq doğruxaoxşarlıq funksiyası $L(\theta)$ olarsa, onda M. d. m. yenə də maksimal

doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti kimi $\hat{\theta}$ nöqtəsini tövsiyyə edir, burada $L(\theta)$ özünün ən böyük qiymətini alır. Məs., X müşahidəsi $dX(t) = \theta S(t)dt + dw$ stoxastik differensial tənliyinin həlli, θ – naməlum parametir, w – Viner prosesi, S – məlum funksiya olarsa, onda doğruxaoxşarlıq funksiyası

$$L(\theta) = \exp \left\{ \theta \int_0^1 S(u) dX(u) - \frac{\theta^2}{2} \int_0^1 S^2(u) du \right\}.$$

maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti isə

$$\hat{\theta} = \frac{\int_0^1 S(u) dX(u)}{\int_0^1 S^2(u) du}$$

olur.

Bax, *Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*.

Əd.: [1] Fischer R., «Mess. of Math.», 1912, v. 41, p. 155–60; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPI «максимального правдоподобия принцип; maximum likelihood principle» – bax, Ən böyük doğruxaoxşarlıq prinsipi.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏTİ «максимального правдоподобия спектральная оценка; maximum likelihood spectral estimator» – bircins fəza – zaman $\zeta(t, x)$ təsadüfi meydanının spektral sıxlığı $f(\lambda, k)$ -nin statistik qiymətidir.

burada $\lambda \in [0, 2\pi]$ – normalanmış dairevi tezlik, $k \in \mathbb{R}^n$ – dalğa ədədi, $t \in \mathbb{Z}$ – diskret zaman, $x \in \mathbb{R}^n$ – fəza koordinatlarıdır. Əgər meydanın seçimi funksiyası fəzanın $x_1, \dots, x_M$ nöqtələrində və $1 \leq t \leq N$ zaman intervalında məlum olarsa, onda M. d. s. s. q.

$$\hat{f}(\lambda, k) = \left\{ \sum_{m,j=1}^M \hat{\varphi}_{m,j}(\lambda) \exp[ik^T(x_m - x_j)] \right\}^{-1}, \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır, burada $[\hat{\varphi}_{m,j}(\lambda)] = \hat{R}^{-1}(\lambda)$, $\hat{R}^{-1}(\lambda)$ matrisinin seçimi statistik qiymətidir və

$$R(\lambda) = \left\| \rho_{m,j}(x) = \int f(\lambda, k) e^{ik^T(x_m - x_j)} dk, \quad 1 \leq j, m \leq M \right\|$$

üçün ters matrisin seçimi statistik qiymətdir. $R(\lambda)$ matrisi M – ölçülü $Y(t) = (\zeta(t, x_1), \dots, \zeta(t, x_M))$ stasionar prosesinin spektral sıxlıqlarının matrisidir. $\hat{R}^{-1}(\lambda)$ seçimi statistik qiyməti $Y(t)$ -nin $1 \leq t \leq N$ intervalında müşahidə olunan realizasiyası üzrə çoxölçülü stasionar prosesin spektrinin məlum qiymətləndirilmə metodlarından birinə müvafiq olaraq alınır.

M. d. s. s. q.-nin adı onunla əlaqədar verilmişdir ki,

$$\hat{f}(\lambda, k) = \sum_{m,j=1}^M \rho_{m,j}(\lambda_0) \exp[ik_0^T(x_m - x_j)]^{-1} \quad (2)$$

ifadəsi $a \exp[i\lambda_0 t + ik_0^T x]$ a harmonikinin amplitudu üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinin dispersiyasıdır, əgər bu statistik qiymət $\zeta(t, x) + a \exp[i\lambda_0 t + ik_0^T x]$ meydanının $x_1, \dots, x_M$ nöqtələrində və $1 \leq t \leq N$ intervalında müşahidə olunmuş realizasiyası üzrə alınmış olarsa. Bu zaman fərz olunur ki, N olduqca böyükdür və

$$\zeta(t, x) = \int e^{i\lambda t + ik^T x} dz(\lambda, k),$$

burada $z(\lambda, k)$ – ortoqonal spektral ölçüdür, yəni spektral sıxlığı $f(\lambda, k)$ olan Gauss meydanıdır. Maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{a}$ bu halda effektivlik xassəsinə malikdir və buna görə də, $\zeta(t, x)$ meydanındakı $\exp[i\lambda t + ik^T x] dz(\lambda, k)$ şəklindəki harmonik komponentlər $k \neq k_0$, $\lambda \neq \lambda_0$ olduqda (2) dispersiyasına minimal mümkün əlavə verir və bu kəmiyyət isə əsas etibarilə $k = k_0$ və $\lambda = \lambda_0$ komponentləri ilə təyin olunur. Buna görə də, (2) və onun seçimi variantı (1) $f(\lambda, k)$ -nin statistik qiyməti kimi istifadə olunur. M. d. s. s. q. D. Keypon tərəfindən [1], [2]-də daxil olunmuşdur və bu statistik qiymət [3]-də baxılan statistik qiymətlərin xüsusi halıdır.

Əd.: [1] Кейпон Д., «Тр. Ин-та ниж. электротехн. радио-элект.», 1969, т. 57, № 8, с. 69–79; [2] Кейпон Д., Гринфилд Р., Колкер Р., «Тр. Ин-та ниж. электротехн. радио-элект.», 1967, т. 55, № 2, с. 66–83; [3] Pisarenko V. F., «Geophys. J. Roy. Astron. Soc.», 1972, v. 28, p. 511–31.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ STATİSTİK QİYMƏTİ «максимального правдоподобия оценка; maximum likelihood estimator» – maksimal doğruxaoxşarlıq metodu ilə qurulmuş statistik qiymətdir.

MAKSİMAL ENTROPİYA; spektral statistik qiymət «максимальная энтропия; спектральная оценка; maximum entropy; spectral estimator». avtoregression spektral statistik qiymət, – diskret zamanlı stasionar təsadüfi prosesin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ üçün ələ $f_q^*(\lambda)$ statistik qiymətidir ki, bu statistik qiymətin aşağı tərtib avtokorrelyasiyalanna uyğun qeyd olunmuş q ədədi seçimi korrelyasion funksiyanın müşahidə verilənləri üzrə hesablanmış uyğun qiymətləri ilə üst-üstə düşür və bu halda spektral sıxlığı $f_q^*(\lambda)$ olan Gauss təsadüfi prosesinin məxsusi

entropiyası (rus. удельная энтропия, xüsusi entropiya) bütün mümkün entropiyalardan ən böyüyü olur. Əgər müşahidələrdən x_t -nin N sayda seçimi qiymətləri məlum olmuşdursa, $t = 1, \dots, N$ və bu qiymətlər isə spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan həqiqi stasionar $X(t)$ prosesinin bir realizasiyasının parçası olarsa, onda $f_q^*(\lambda)$ statistik qiyməti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\lambda f_q^*(\lambda) d\lambda = r_k^* \Xi N^{-1} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k},$$

$$k = 0, 1, \dots, q \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f_q^*(\lambda) d\lambda = \max \quad (2)$$

münasibətilə təyin olunur, burada Ξ işaresi «terife görə bərabərdir» kimi anlaşılır. M. e.-nin spektral statistik qiyməti 1967-də J. Berq tərəfindən geofizika konferensiyasındakı məruzəsində (bax, [1]) təklif olunmuşdur; M. e.-nin spektral statistik qiyməti

$$f_q^*(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 + \beta_1 \exp(i\lambda) + \dots + \beta_q \exp(iq\lambda)|^2} \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\beta_1, \dots, \beta_q, \sigma^2$ əmsalları $q+1$ sayda (1) tənliklərindən təyin olunur. (3) düsturundan aydındır ki, $f_q^*(\lambda)$ spektral statistik qiyməti E. Parzenin [2]-də, H. Akaike-nin [3]-də bir-birindən asılı olmadan təklif etdikləri avtoreqression spektral statistik qiymət ilə (bele adlandırılmış) üst-üstə düşür. M. e.-yə təbiiqə müsbət tam q ədədi periodoqramın hamarlanması köməyi ilə spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində spektral pəncərənin tərs eni kimi bir rol oynayır; müşahidələrin verilənləri üzrə q -nün optimal qiymətinin qiymətləndirilməsi üçün bir sıra xüsusi metodlar «Parametrik model: tərtibin seçilməsi» məqaləsində şərh olunmuşdur. $\beta_1, \dots, \beta_q, \sigma^2$ əmsallarının qiymətlərini Yul – Uoker tənlikləri –

$$r_k^* + \sum_{j=1}^q \beta_j r_{k-j}^* = 0,$$

$$k = 1, \dots, q, \quad r_0^* + \sum_{j=1}^q \beta_j r_j^* = \sigma^2$$

sisteminin həllinin köməyi ilə tapmaq olar (bax, Yul – Uoker statistik qiymətləri avtoreqressiya parametrlərinin). Bu əmsalların hesablanması üçün daha münasib digər metodlar da mövcuddur (bax, Berq metodu avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün, həm də [4] – [6]).

Spektral statistik qiymətlərin M. e. və bunları ümumiləşdirən parametrik spektral statistik qiymətlər seçiminin həcmi N nisbətən kiçik olduğu halda və ya spektral sıxlıqların müəkkəb formalı olduqları hallarda $f(\lambda)$ funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətləri ilə müqayisədə müəyyən üstünlüklərə malikdirlər: bunlar, adətən, daha düzgün formaya malikdirlər və spektral sıxlığın qrafikinə yaxın zirvələrini daha yaxşı fərqləndirməyə imkan yara-

dır (bax, məs., [1], [4] – [7]). Buna görə də, M. e.-nin spektral statistik qiymətləri, stasionar təsadüfi proseslərin tətbiqi spektral analizində geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [2] Parzen E., «Radio Sci», 1964, v. 68D, № 9, p. 937–51; [3] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1969, v. 21, p. 407–19; [4] Nonlinear methods of spectral analysis, 2 ed., B. – [a. o.], 1983; [5] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51; [6] Методы спектрального оценивания, «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9; [7] Писаренко В. Ф., в сб.: Вычислительная сейсмология, в. 10, М., 1977, с. 118–49.

MAKSİMAL KORRELYASIYA ƏMSALI « **максимальный коэффициент корреляции; maximal correlation coefficient** » – ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin qarşılıqlı asılılıq xarakteristikasıdır. həqiqi $\phi_1(\xi)$ və $\phi_2(\eta)$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsallarının* qiymətlərinin dəqiq yuxarı sərhədi kimi təyin olunur, bu şərtlə ki,

$$M\phi_1(\xi) = M\phi_2(\eta) = 0 \quad \text{və} \quad D\phi_1(\xi) = D\phi_2(\eta) = 1$$

şərtləri ödənilsin; yeni M. k. ə.

$$\rho^*(\xi, \eta) = \sup M[\phi_1(\xi) \phi_2(\eta)].$$

Əgər bu yuxarı sərhəd $\phi_1 = \phi_1^*(\xi)$ və $\phi_2 = \phi_2^*(\eta)$ üçün təmin olunursa, onda ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında M. k. ə.

$\phi_1^*(\xi)$ və $\phi_2^*(\eta)$ kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalına bərabərdir. M. k. ə. belə bir xassəyə malikdir ki, ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı üçün $\rho^*(\xi, \eta) = 0$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Təsadüfi kəmiyyətlər arasında xətti korrelyasiya olduqda M. k. ə. adi korrelyasiya əmsalı ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 4, с. 715–18; [2] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1946, т. 53, № 9, с. 781–84; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

MAKSİMAL KÜTLƏ METODU « **максимальной массы метод; maximum mass method** » – bax, Pisanenکو spektral statistik qiyməti.

MAKSİMİN KRİTERİ « **максиминный критерий; maximin test** » – mühümlük ölçüsü eyni α -ya bərabər H kriterisinin K kriterisinə qarşı yoxlanılması üçün kriterilər sinfində gücünün minimal qiyməti maksimal olan müəkkəb $K: \theta \in \Theta_k$ alternativ hipotezinə qarşı $H: \theta \in \Theta_H$ müəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteridir. Başqa sözlə, əgər α həddüdlü ixtiyari ξ kriterisi üçün

$$\inf_{\theta \in \Theta_k} M_{\theta} \varphi \geq \inf_{\theta \in \Theta_k} M_{\theta} \xi$$

münasibəti ödənilərsə, α həddüdlü φ kriterisi α həddüdlü

maksimin kriteri adlanır. Əgər $\left\{ P_{\theta}, \theta \in \Theta_H \bigcup_k \Theta_k \right\}$

paylanmalar ailəsi $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında σ – sonlu μ ölçüsü ilə dominatlanan ailədirsə və $\mathcal{A}$ – doğurucuların hesabı çoxluğuna malikdirsə, onda ixtiyari $\alpha \in (0, 1)$ üçün M. k. vardır.

Əgər H -ın K -ya qarşı yoxlanılması məsələsi hər hansı G qrupunun çevirmələrinə nəzərən invariant olarsa, onda maksimumluq xassəsi və invariantlıq arasında sıx əlaqə vardır.

Teorem. B. – G qrupunun altçoxluluğunun σ – meydanı, $\{v_n\}$, – $(G, \mathcal{B})$ -də ehtimal ölçüləri çoxluğu olsun ki: 1) ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün $gx \in \mathcal{A}$ olduqda (x, g) cütler çoxluğu $A \times \mathcal{B}$ -dəndir; 2) $Bg \in \mathcal{B}$ münasibəti ixtiyari $B \in \mathcal{B}$ və $g \in G$ üçün doğrudur; 3) ixtiyari $g \in G$, $B \in \mathcal{B}$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n(Bg) - v_n(B)| = 0$. Onda ixtiyari $\alpha \in (0, 1)$ üçün α hüdudlu sanki invariant kriteri vardır və bu kriteri M. k.-dir.

Teoremin şərtlərini aşağıdakı çevirmələr qruplarının tipləri ödəyir: 1) $\mathbb{R}^n$ -də köçürmələr qrupu $g: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + g, \dots, x_n + g)$; 2) $\mathbb{R}^n$ -də miqyas dəyişmələri qrupu $g: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (gx_1, \dots, gx_n)$, $0 < g < \infty$; 3) $\mathbb{R}^n$ -də ortoqonal çevirmələr qrupu; 4) $\mathbb{R}^n$ -də oxşarlıq çevirmələri qrupu; 5) sonlu qruplar; 6) 1)–5) tipli qrupların sonlu saydısının düz hasil.

Konkret məsələlərdə M. k.-nin axtarılmasında invariantlıq mülahizələrindən başqa o fakt da əsas götürülə bilər ki, çox geniş hallarda M. k. münasib seçilən Beyes probleminin həlli ilə üst-üstə düşür.

Teorem. B_H və $\mathcal{B}_K$, – Θ_H və Θ_K -də verilmiş σ – meydanlar, $p_\theta(x) = dP_\theta/d\mu$ sıxlıq funksiyaları $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}_H)$ və $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}_K)$ fəzalarına nəzərən ölçülən olsunlar. λ və λ' , – $\mathcal{B}_H$ və $\mathcal{B}_K$ -də ixtiyari paylanmalar və $\varphi_{\lambda, \lambda'}$ –

$$h(x) = \int_{\Theta_H} p_\theta(x) d\lambda(\theta)$$

hipotezini

$$h'(x) = \int_{\Theta_K} p_\theta(x) d\lambda'(\theta)$$

alternativinə qarşı yoxlamaq üçün α hüdudlu ən güclü kriteri olsun. Bundan başqa, $\beta_{\lambda, \lambda'}$ bu kriterinin h' alternativində gücü olsun. Əgər ehtimal λ və λ' varsa ki,

$$\sup_{\Theta_H} M_\theta \varphi_{\lambda, \lambda'}(X) \leq \alpha, \quad \inf_{\Theta_K} M_\theta \varphi_{\lambda, \lambda'}(X) = \beta_{\lambda, \lambda'}$$

münasibətlərinin ödənilməsi təmin olunsun, onda $\varphi_{\lambda, \lambda'}$, – K hipotezinə qarşı H hipotezinin yoxlanılması üçün α hüdudlu M. k.-dir; bu kriteri bu xassəli yeganə kriteridir, bu şərtlə ki, h' alternativində h -in yoxlanılması üçün α hüdudlu ən güclü kriteri də yeganə olsun.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Г а е к Я., Ш н д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

MAKSİMUM SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN «максимума случайных величин схема; maximum scheme for random variables» – təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxeminin analoqudur, burada

$$S_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

maksimumlarının toplulanna baxılır. T. k. m. s. riyazi statistikada tətbiq olunur, belə ki, S_n variasion sıranın axıncı həddidir. T. k. m. s.-də paylanmaların, o cümlədən, asimptotik paylanmaların analizi çoxsaylı nəticələrin alınmasına əsas olmuşdur (bax, məs., [1]–[3]).

Əd.: [1] Г а л а м б о ш Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, пер. с англ., М., 1984; [2] П а н ч е в а Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 730–44; [3] П а н ч е в а Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 1, с. 167–70.

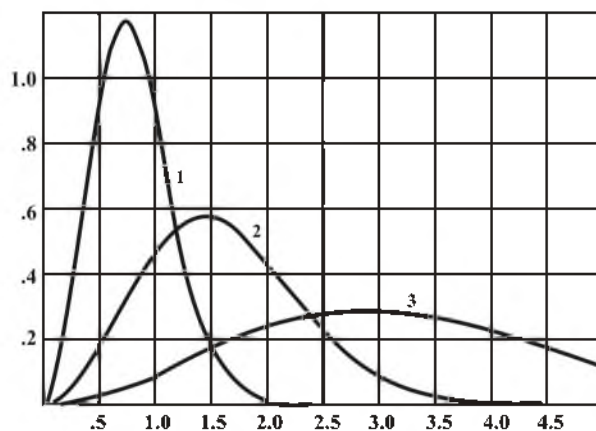
MAKSVELL PAYLANMASI «Максвелла распределение; Maxwell distribution» – kəsilməz, $(0, \infty)$ -də toplanmış, paylanma sıxlığı (şəkil)

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (*)$$

olan ehtimal paylanmasıdır, $\sigma > 0$. Paylanma funksiyası

$$F(x) = 2\Phi(x/\sigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} - 1$$

düsturu ilə təyin olunur, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. M. p.-nin asimmetriya əmsalı müsbətdir, o, unimodal paylanmadır, modası $x = \sqrt{2}\sigma$ nöqtəsindədir. M. p.-nin ixtiyari tərtib sonlu momentləri vardır, riyazi gözləmə və dispersiyası uyğun olaraq, $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ və $\frac{3\pi-8}{\pi}\sigma^2$ -na bərabərdir.



(1) $\sigma = 0.5$; (2) $\sigma = 1$; (3) $\sigma = 2$ olduqda Maksvell paylanmasının sıxlıqları

Əgər X_1, X_2, X_3 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri 0 və σ^2 parametrləri ilə normal qanunla paylanmışlarsa, onda $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ təsadüfi kəmiyyəti sıxlıq funksiyası (*) olan M. p. ilə paylanır. Yeni M. p. üçölçülü fəzanın deqord koordinat sistemində koordinatları asılı olmayan və 0 və σ^2 parametrləri ilə normal qanunla paylanmış təsadüfi vektorun uzunluğunun paylanması kimi alınır. $\sigma = 1$ olduqda M. p. sərbəstlik dərəcəsi sayı üçə bərabər xi – kvadrat paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin kvadrat kökünün paylanması ilə üst-üstə düşür (bax, Reley paylanması). M. p. kinetik tənliliklər nəzəriyyəsində, xüsusilə də, Boltzman tənliyində mühüm rol oynayır. Məs., M. p. Boltzman tənliyinin stasionar həllini verir, bu həllin «kiçik ətrafında» xəttləşdirilmiş tənliyin araşdırılması Koşi məsələsinin lokal həllinin varlığını isbat etməyə imkan verir. İlk dəfə C. Maksvell tərəfindən ideal qazın molekullarının sürətlərinin paylanması haqqında məsələnin həllində müəyyən olunmuşdur.

Әд.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

MAKSVELL – BOLTSMAN STATİSTİKASI
«Максвелла – Больцмана статистика; Maxwell – Boltzmann statistic» – bax, *Boltzman paylanması*.

MALİYYƏ RIYAZİYYATI «финансовая математика; mathematics of finance» – riyaziyyatın bölməsidir, qeyri – müəyyən şəraitdə fəaliyyət göstərən maliyyə strukturlarının analizinə və zaman, risk, stoxastik evolyusiya və s. kimi faktorlar nəzərə alınmaqla maliyyə strukturları və vasitələrinin idarə olunması üçün ən rəşional üsulların tapılmasına xidmət edir.

M. r.-nin məşğul olduğu obyektlər və strukturlardan əsas sayılanlardan aşağıdakıları qeyd etmək olar: fərdlər (individuumlar), firmalar (məs., kompaniyalar, korporasiyalar), əlaqəçi (rus. посреднические) strukturlar (məs., investisiya kompaniyaları, təqaüd fondları) və maliyyə bazarları. Məhz maliyyə bazarları stoxastik M. r.-nin vasitələrlə öyrənilən əsas obyektlərdən biri sayılır və stoxastik M. r.-nin bu sahədə istifadə olunan vasitələri isə təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, təsadüfi proseslər statistikası, stoxastik analiz, stoxastik optimizasiya və s. kimi ehtimal – statistika nəzəriyyələrinə əsaslanır.

Qəbul olunmuş terminologiyaya uyğun olaraq maliyyə bazarı pul və valyuta bazarlarından, qiymətli metallar bazarlarından və maliyyə vasitələrindən (qiymətli kağızlar da daxil olmaqla) ibarətdir. Maliyyə vasitələri iki sinfə ayrılır: əsas (ilk) və törəmə (ikinci) maliyyə vasitələri. Əsas maliyyə vasitələrinə qiymətli kağızlar (bank hesabları, aksiyalar, istiqraz vərəqləri) aid edilir. Opsiolar (opsion kontraktları), varrantlar, svoplar, kombinasiyalar, spredlər, birləşmələr, fyuçerslər (fyuçers kontraktları) törəmə maliyyə vasitələridir. Törəmə maliyyə vasitələri ilə əməliyyatlar maliyyə mühəndisliyinin öyrəndiyi və araşdırdığı sahədir.

M. r.-na stoxastik yanaşmada fərz olunur ki, hər hansı ilkin ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ vardır. M. r.-də zaman və dinamika onun ayrılmaz komponentləri olduğundan, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzasının xüsusi strukturlu olduğunu hesab etmək, yeni diskret halda $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ σ – cəbrlər axını, kəsilməz halda isə $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlər axını ilə verildiyini fərz etmək məqsədəuyğundur. Bu qayda ilə alınan $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$ və $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ fəzaları uyğun olaraq, diskret və kəsilməz filtrləşmiş ehtimal fəzaları (filtrasiyalı ehtimal fəzaları), $\mathcal{A}_n$ -dən (uyğun olaraq, $\mathcal{A}_t$ -dən) olan hadisələr isə n anında (uyğun olaraq, t) «bazar» müşahidə olunan hadisə kimi interpretasiya olunur.

Diskret zaman. Bu halda $B = (B_n)_{n \geq 0}$ bank hesabının vəziyyətinin evolyusiyasının təsvirində, adətən, aşağıdakı iki modeldən biri istifadə olunur:

$$B_n = B_0 e^{\hat{r}_1 + \dots + \hat{r}_n} \quad (1)$$

və

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^n (1 + \hat{r}_k), \quad (2)$$

burada faiz tarifləri (rus. процентные ставки) r_k və $\hat{r}_k$, – $\mathcal{A}_{k-1}$ – ölçülən (başqa sözlə, öngörül) kəmiyyətlərdir. Sonuncu fərziyyə bank hesabının o xassəsini ifadə edir ki, bankın

«sabahkı» vəziyyəti artıq «bu gün» məlum olur. (1) modelində kapital əlavələri «mürəkkəb faizlər» ilə aparılır. Bu zaman fərz olunur ki, $\hat{r}_k > -1$. Aydın ki, $r_k = \ln(1 + \hat{r}_k)$ və $\hat{r}_k = e^{r_k} - 1$.

Əgər $S = (S_n)_{n \geq 0}$ aksiyanın dəyəri (qiyməti) kimi anlaşılsa, onda (1) və (2)-yə analogi olaraq, S_n aşağıdakı şəkildə təsvir olunur:

$$S_n = S_0 e^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} \quad (3)$$

və

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^n (1 + \hat{\rho}_k), \quad (4)$$

burada ρ_k və $\hat{\rho}_k$, – $\mathcal{A}_k$ – ölçülən fərz olunur (r_k və $\hat{r}_k$ kəmiyyətlərinin $\mathcal{A}_{k-1}$ – ölçülən olduqlarından fərqli olaraq). S_n , $n \geq 1$ qiymətlərinin müsbət olmaları üçün fərz olunur ki, bütün k -lər üçün $S_0 > 0$ və $\hat{\rho}_k > -1$ olmalıdır.

Bank hesabı B və S aksiyanının hər bir cütü (B, S) ilə (B, S) – bazar anlayışı, $\pi(\beta, \gamma)$ strategiya (çanta strategiyası) anlayışı daxil olunur ki, burada $\beta = (\beta_n)_{n \geq 0}$ və $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ öngörül ardıcılıqlardır; daha sonra bu strategiyaya müvafiq $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geq 0}$ kapitalı anlayışı da daxil olunur, burada

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = (\beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i). \quad (5)$$

Əgər $S = (S^1, \dots, S^d)$ d aksiyadan ibarət paket olarsa, π çantasının komponenti γ , – d – ölçülü öngörül $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^d)$ ardıcılığıdır və (5)-də $\gamma_n S_n$ həddi $(\gamma_n, S_n) = \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i$ skalyar hasil kimi anlaşılar.

Bütün π strategiyalarının sinfində X kapitalının evolyusiyası

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \quad n \geq 1 \quad (6)$$

düsturları ilə təyin olunan özü-özünü maliyyələşdirən strategiyalar xüsusi olaraq seçilir; (6)-dan aydındır ki, kapitalın dəyişməsi, yalnız bank hesabı vəziyyətinin və aksiyaların dəyərinin dəyişməsi nəticəsində baş verir, lakin səhvən belə hesab olunur ki, bu dəyişmə güya çanta vəziyyətlərinin dəyişməsi, yəni $B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0$, $n \geq 1$ olması nəticəsində baş verir.

Fərz olunur ki, (B, S) – bazarda maliyyə aktivliyi $n = 0, 1, \dots, N$ anları ilə kifayətlənir.

Tərif 1. Əgər ilkin kapitalı $X_0^\pi = 0$ şərtlə verilən kapital 1-ə bərabər $\mathbf{P}$ ehtimalı ilə (və ya $\mathbf{P}$ – sanki yəqin) $X_N^\pi \geq 0$ olarsa, müsbət $\mathbf{P}$ ehtimalı ilə $X_N^\pi > 0$ olarsa, özü-özünü maliyyələşdirən π strategiyası (N anında) arbitraj imkan reallaşdırır, deyilir.

Tərif 2. Əgər özü-özünü maliyyələşdirən arbitrajlar çoxluğu boş çoxluq olarsa [yeni əgər özü-özünü maliyyələşdirən π strategiyası üçün ilkin kapital $X_0^\pi = 0$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) olarsa və bundan başqa

$$\mathbf{P}(X_N^\pi \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}(X_N^\pi = 0) = 1 \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yeqin})$$

olarsa, onda $X_N^\pi \geq 0$ ($\mathbf{P}$ – sanki yeqin). Onda (B, S) – bazarda arbitraj imkanlar yoxdur, deyilir və ya deyilir ki, bu bazar arbitrajsız bazardır.

Daxil olunan arbitraj konsepsiyası ilə yanaşı (B, S) – bazanın tamlığı anlayışı da daxil olunur və bu anlayış maliyyə riyaziyyatı və maliyyə praktikasında mühüm rol oynayan hedc (ing. hedge, rus. забор – çəpər, burada sipər) (hedcləyici çanta, sipərləyici çanta) anlayışının tərifinə əsaslanır.

$f_N = f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – hər hansı $\mathcal{A}_n$ – ölçülən mənfə olmayan funksiya olsun, $f_N(\omega)$ – «ödəniş öhdəçiliyi», «terminal ödəniş» və ya «məqsəd funksiyası» kimi anlaşılar.

Tərif 3. Əgər $X_0^\pi = x$, $X_N^\pi \geq f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yeqin) olarsa, (B, S) – bazarda qiymətli kağızların özü-özünü maliyyələşdirən $\pi = (\beta, \gamma)$ çantasına (x, f_N) hedc deyilir.

Əgər $X_0^\pi = x$, $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yeqin) olarsa, onda π – mükəmməl (x, f_N) hedci adlanır.

Bu təriflə verilən hedc anlayışı (bəzən yuxarı hedc adlandırılır) M. r.-nda qoruyucu vasitə rolunu ifadə edərək, f_N qiymətindən ($\mathbf{P}$ – sanki yeqin) az olmayan (X_N^π) kapitalının alınmasına xidmət edir.

Tərif 4. Əgər məhdud (uyğun olaraq, hər bir) ödəniş tapşırığı f_N mümkün olan (müəssər) ödəniş (rus. достижимый) tapşırığıdırsa və ya yenidən təkrar oluna bilinərsə, yəni onun üçün $X_0^\pi = x$ və $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yeqin) şərtlərini ödəyən mükəmməl (x, f_N) – hedc π tapılırsa, onda (B, S) – bazarı N - anı üçün tam (B, S) – bazardır [mükəmməl (B, S) – bazardır], deyilir.

Arbitrajsız və tam bazarlar nəzəriyyəsində aşağıdakı iki teorem əsas rol oynayır.

Teorem A («Maliyyə aktivləri hesabı nəzəriyyəsinin birinci fundamental teoremi»). $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n \leq N}, \mathbf{P})$, $N < \infty$ filtrlənmiş ehtimal fəzasında təyin olunmuş maliyyə (B, S) – bazanın $B = (B_n)_{n \leq N}$, $B_n > 0$ bank hesabı və sonlu d sayda $S = (S_n^1, \dots, S_n^d)_{n \leq N}$ aktivlərindən ibarət olduğu fərz olunur. $A_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ və $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}$ olsun. (B, S) – bazanın arbitrajsız bazar olması üçün $\mathbf{P}$ ölçüsünə ekvivalent (bax, Ekvivalent ölçülər) heç olmasa bir $\tilde{\mathbf{P}}$ ölçüsünün varlığı (bu ölçü «martinqal» ölçü və ya «neytral – risk» ölçü adlandırılır) zəruri və kifədir ki, bu ölçüyə nəzərən d – ölçülü normalanmış

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n^1}{B_n}, \frac{S_n^2}{B_n}, \dots, \frac{S_n^d}{B_n} \right)_{n \leq N}$$

ardıcılığı $\tilde{\mathbf{P}}$ – martinqaldır: bütün $i = 1, \dots, d$ və $n = 1, \dots, N$ üçün

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \left| \frac{S_n^i}{B_n} \right| < \infty$$

və

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \left(\frac{S_n^i}{B_n} \middle| \mathcal{A}_{n-1} \right) = \frac{S_{n-1}^i}{B_{n-1}}.$$

Teorem B. («Maliyyə aktivləri hesabı nəzəriyyəsinin ikinci fundamental teoremi»). Arbitrajsız maliyyə (B, S) – bazan, yalnız və yalnız, o halda tam (B, S) – bazardır ki, bütün martinqal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ yalnız bir ölçüden ibarət olsun. Bununla belə, arbitrajsızlığı onu ifadə edir ki, $\mathcal{P}(\mathbf{P}) \neq \emptyset$, onda arbitrajsız bazanın tamlığı şərti olaraq $|\mathcal{P}(\mathbf{P})| = 1$ şəklində yazıla bilər.

İqtisadi nöqteyi – nəzərdən maliyyə bazanın arbitrajsızlığı onun «rasional», «effektiv» fəaliyyət göstərdiyini ifadə edir.

A və B teoremlərinin əhəmiyyəti ondadır ki, bunlar maliyyə aktivləri, maliyyə vasitələri və aşağıdakı kimi təyin olunan hedcləmə qiymətlərinin (dəyərlərinin) hesabları ilə əlaqədar analitik hesablamaların aparılmasına imkanlar yaradır.

Tərif 5. f_N ödəniş öhdəçiliyi olsun.

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = \inf \{x: X_0^\pi = x \text{ və } X_N^\pi = f_N \text{ (} \mathbf{P} \text{ – sanki yeqin) şərtlərini ödəyən } \exists \pi\}$$

kəmiyyətinə ixtiyari $\mathcal{A}_n$ – ölçülən f_N ödəniş tapşırığının mükəmməl hedcləmə (avropa tipli) qiyməti deyilir.

Arbitrajsız tam bazarlarda $\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P})$ qiyməti

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \quad (7)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\tilde{\mathbf{P}}$ – (yeganə) martinqal ölçüdür.

Bu düsturun isbatı çox sadədir. Doğrudan da, əgər π mükəmməl (x, f_N) hedc olarsa, yeni $X_0^\pi = x$, $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbf{P}$ – s. y.) olarsa, onda

$$\frac{f_N}{B_N} = \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right),$$

çünki

$$\Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right).$$

Buna görə də, aydındır ki,

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} = \frac{x}{B_0}$$

və deməli,

$$x = B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \quad (8)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, (8)-in sağ tərəfi π , (x, f_N) hedcinin strukturundan asılı deyildir. Başqa sözlə, əgər π' başqa bir hedcdirsə, onda ilkin x və x' qiymətləri üst-üstə düşməlidirlər.

Arbitrajsız natamam bazarlar halında məsələ müəkkəbləşir və bu halda bunlar üçün «özü-özünü maliyyələşdirmə» anlayışı bir qədər genişləndirilməlidir. $C = (C_n)_{n \leq N}$, $C_0 = 0$ şərtini ödəyən və komponentləri $\mathcal{A}_n$ – ölçülən, mənfə olmayan azalmayan

proses olsun. Əgər π çantasının kapitalı $(X_n^{\pi,C})_{n \leq N}$ ilə evolyusiya edirsə ki,

$$\Delta X_n^{\pi,C} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n$$

berabərliyi ödənilsin, onda π çantası və C prosesi «öz-özünü maliyyələşdirən, istehlak etməyə malik strategiya» təşkil edir, deyilir.

Tərif 6.

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathbf{P}) = \inf \{x: X_0^{\pi,C} = x \text{ və } X_N^{\pi,C} \geq f_N \text{ (} \mathbf{P} \text{-sanki yəqin)} \text{ şərtlərini ödəyən } \exists \pi\}$$

kəmiyyətinə məhdud $\mathcal{A}_N$ – ölçülən ixtiyari f_N ödəniş tapşırığının həddləmə qiyməti (dəyəri) deyilir.

Ümumi nəzəriyyəyə görə, aydındır ki, arbitrajlız bazarlarda

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathbf{P}) = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{P})} B_0 \mathbf{M}_{\mathbf{P}} \frac{f_N}{B_N} \quad (9)$$

münasibəti ödənilir, burada $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ – bütün martinqal ölçülərinin çoxluğu (tam bazarlar halında $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ çoxluğu bir ölçüdən ibarət olur) və (9) düsturunu (7) düsturuna çevrilir. «Rasional» və «ədalətli» qiymətlərin hesablanması, məs., opsiyalar (avropa tipli) kimi törəmə maliyyə vasitələrinin hesablanması (7) və (9) düsturları əsas rol oynayır.

Opsion – əvvəlcədən razılaşdırılmış şərtlərlə razılaşdırılmış müddətdə (və ya anda) müəyyən dəyərlə bir şeyin (məs., istiqraz vərəqəsi, aksiya, valyuta) alıcıya almaq və ya satmaq hüququnu verən qiymətli kağızdır (kontrakt).

Ümumi qəbul edilmiş terminologiyaya əsasən opsiyalar iki sinfə ayrılır: alıcı opsiyaları və satıcı opsiyaları. Alıcı opsiyaları alış hüququ, satıcı opsiyaları satış hüququ verir. Əgər opsiyon əvvəlcədən təyin olunmuş N müddətinə icra üçün təqdim olunarsa, onda N icra anı adlanır, opsiyon bu halda avropa tip opsiyondur, deyilir. Əgər opsiyon icraya ixtiyari anda (o cümlədən, təsadüfi anda) təqdim olunarsa, onda opsiyon amerika tip opsiyondur, deyilir.

Müəyyənlik üçün satıcının avropa tip standart opsiyonu olduğu halda baxıldığı fərz olunur. Bu tip opsiyon satın alınmış şeyin (qeyd olunmuş) K qiyməti ilə xarakterizə olunur ki, bu qiymət üzrə alıcı N anında, məs., aksiyaları ala bilər və bunların dəyəri S_N N zaman anında faktiki olaraq K -dan fərqlənə bilər. Əgər $S_N > K$ olarsa, onda bu vəziyyət alıcı üçün əlverişli hesab edilir. Doğrudan da, kontrakt şərtlərinə görə onun aksiyaları K qiymətinə almaq hüququ olduğundan, o, bunu edə bilər. Sonra o, bunları bazar qiyməti S_N ilə dərhal sataraq, bu əməliyyat nəticəsində $S_N - K$ -ya bərabər gəlir əldə edir.

$S_N < K$ olarsa, onda K qiyməti ilə satın alma hüququ alıcıya heç bir gəlir gətirmir, belə ki, o, daha az S_N qiyməti ilə aksiya ala bilər. Bu iki halda belə nəticə alınır ki, alıcının N anındakı gəliri $f_N = (S_N - K)^+$ düsturu ilə təyin olunur (burada x heqiqi olduğu halda, əgər $x \geq 0$ olarsa $x^+ = x$, $x < 0$ olarsa, $x^+ = 0$ götürülür). Satıcı üçün f_N -in qiyməti «ödənc» kəmiyyətini təyin edir, o, bu ödənci N anında ələ yerinə yetirməlidir ki, π

çantasının qurulmasında müvafiq kapital əvvəlcədən f_N -dən kiçik olmuş olsun.

Opsion hesablamaları nəzəriyyəsinin əsas məsələləri aşağıdakılardan ibarətdir: 1) ilkin minimal ələ x kapitalı təyin olunmalıdır ki, bu kapital nəticəsində $X_N^{\pi} \geq f_N$ kapitalı alınsın (x opsiyanı alan alıcıya verilən «mükafat»dır) və 2) həddləyici $X_N^{\pi} \geq f_N$ bərabərsizliyini ödəyən həddləyici π çantaları təyin olunsun.

Yuxarıda verilən tərif 5-dən belə nəticə alınır ki, arbitrajlız tam bazarlar halında ilkin minimal x kapitalı $\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P})$ kapitalının ələ özüdür və bu kəmiyyəti opsiyalar hesabı nəzəriyyəsində opsiyaların «düzgün», «rasional» dəyəri kimi adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Arbitrajlız natamam bazarlar halında bu dəyər həddləmə dəyəri $\mathbb{C}^*(f_N; \mathbf{P})$ ilə üst-üstə düşür.

Ən sadə və eyni zamanda olduqca populyar (B, S) – bazar modeli Koks – Ross – Rubinsteyn modelidir, bu modeldə

$$\Delta B_n = r B_{n-1}, \quad \Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad (10)$$

burada $(\rho_n)_{n \leq N}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, $-1 < a < b$ şərtini ödəyən a və b qiymətlərini sıfırdan fərqli ehtimallarla alan, Bernulli təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığıdır. Əgər $-1 < a < r < b$ şərti ödənersə, onda baxılan bazar arbitrajlız və tam bazardır və bu halda yeganə martinqal ölçüsü $\tilde{\mathbf{P}}$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\tilde{\mathbf{P}}\{\rho_n = b\} = \frac{r-a}{b-a}, \quad \tilde{\mathbf{P}}\{\rho_n = a\} = \frac{b-r}{b-a}$$

və $(\rho_n)_{n \leq N}$ kəmiyyətləri yenə də asılı olmayan ($\tilde{\mathbf{P}}$ ölçüsü üzrə) kəmiyyətlər olur.

Baxılan halda

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{(1+r)^N}. \quad (11)$$

Ödəniş funksiyası $f_N = f(S_N)$ olan (burada $f(x) = (x - K)^+$) avropa tip standart opsiyon halı üçün (11) düsturu ilə hesablanan ədalətli $\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P})$ qiyməti

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = S_0 \mathbb{B}(K_0, N; p^*) - K(1+r)^N \mathbb{B}(K_0, N; \mathbf{P})$$

ifadəsilə təyin olunur, burada

$$p^* = \frac{1+b}{1+r} \tilde{\mathbf{P}}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \frac{r-a}{b-a},$$

$$K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} / \ln \frac{1+b}{1+a} \right],$$

$$\mathbb{B}(j, N, p) = \sum_{k=j}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Kəsilməz zaman. Bu halda bank hesabı, aksiyaların qiyməti və digər maliyyə aktivlərinin dinamikasının təsvirində istifadə olunan əsas modellər – xüsusi təsadüfi proseslərdən *semimartinqallardan* istifadəyə əsaslanan modellərdir. Əgər $X = (X_t)_{t \leq T}$ hər hansı aktivin dəyəridirsə, onda hesab olunur ki,

$$X_t = X_0 e^{H_t},$$

burada $H = (H_t)_{t \leq T}$ – hər hansı semimartinqaldır [müq. et. (1) və (2) ilə]. (2) və (4)-ün analoqu

$$X_t = X_0 \mathcal{E}(\hat{H}_t)$$

ifadəsi olacaqdır, burada

$$\hat{H}_t = H_t + \frac{1}{2} \langle H^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (e^{\Delta H_s} - 1 - \Delta H_s),$$

və $\mathcal{E}(\hat{H}) = (\mathcal{E}(\hat{H}_t))_{t \leq T}$ – aşağıdakı düsturla ifadə olunan – Dolean stoxastik eksponentidir:

$$\mathcal{E}(\hat{H}_t) = e^{\hat{H}_t - \frac{1}{2} \langle H^c \rangle_t} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta \hat{H}_s) e^{-\Delta \hat{H}_s}.$$

[Stoxastik analizdə qəbul edildiyi kimi $\langle H^c \rangle_t$ – H semimartinqalının kəsilməz martinqal komponenti H^c -nin öngörül kvadratik variasiyasıdır (kvadratik xarakteristikasıdır) və $\Delta H_s = H_s - H_{s-}$].

(B, S) – bazanın bank hesabı $B = (B_t)_{t \leq T}$ və müsbət semimartinqallar olan $S = (S_t)_{t \leq T}$ aksiyalarından ibarət olduğu fərz olunur. Diskret zaman halında olduğu kimi hər bir $\pi = (\beta, \gamma)$ strategiyası üçün $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \leq T}$ kapitalı anlayışı təyin olunur, burada

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

$\beta = (\beta_t)_{t \leq T}$ və $\gamma = (\gamma_t)_{t \leq T}$ öngörül ardıcılıqlardır.

(6)-ya analoji olaraq π strategiyasını (çantasını),

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$$

olarsa, öz ü - ö z ü n ü maliyyələşdirən strategiya adlandırmaq təbiidir.

Sonuncu münasibət o mənada anlaşılmalıdır ki,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u,$$

buradakı integrallar semimartinqallar üzrə stoxastik integrallardır.

Stoxastik integrallardan istifadə məqbul sayılan $\pi(\beta, \gamma)$ strategiyasına müəyyən məhdudiyyətlər daxil edilməsinə səbəb olur. Bir tərəfdən bu strategiyalar elə olmalıdır ki, uyğun stoxastik integrallar mövcud olsun. Digər tərəfdən, iqtisadi mülahizələrə görə X_t^π kəmiyyətləri mümkün qədər böyük mənfə qiyəmlər almalıdır və bu da məqbul π strategiyalarına aşağıdakı tip müəyyən məhdudiyyətlər qoyulmasına səbəb olur:

$$X_t^\pi \geq -\alpha, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \alpha > 0. \quad (12)$$

Diskret zaman halı üçün yuxarıda daxil olunmuş arbitraj, arbitrajsızlıq, tamlıq və s. kimi anlayışlar avtomatik olaraq kəsilməz zaman halında da təyin olunur. Bu zaman fundamental A və B teoremləri «əsasən» doğru qalır.

Məs., əgər semimartinqal (B, S) – bazarında martinqal ölçüsü varsa, onda (12) şərtini ödəyən məqbul strategiyalar sinfində arbitraj imkanlar olmur.

Belə (B, S) – bazarlarının müxtəlif modelləri arasında ən çox məşhur olan model Blek – Merton – Şouls modeli – dir:

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t), \quad (13)$$

burada $r > 0$, $B_0 > 0$, $S_0 > 0$ və $w = (w_t)_{t \leq T}$ – standart Viner prosesidir (Braun hərəkəti) [müq. et. Koks – Ross – Rubinstein modeli (10) ilə].

(13) modeli arbitrajsız və tam modeldir. $\mathcal{M}_T$ – ölçülən ödəniş funksiyası f_T olan opsiyonun «rasional», «düzgün» dəyəri üçün uyğun düstur

$$\mathbb{C}(f_T; \mathbf{P}) = B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_T}{B_T}$$

berabərliyi ilə təyin olunur, burada $\tilde{\mathbf{P}}$ – martinqal ölçüdür.

(13) modeli üçün bu düstur [ödəniş funksiyası $f_T = (S_T - K)^+$ olan alıcının standart opsiyonu üçün] aşağıdakı Blek – Şouls düsturuna çevrilir:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(f_T; \mathbf{P}) = S_0 \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \\ - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right), \end{aligned}$$

burada

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Stoxastik M. r. və maliyyə mühendisliyinin müxtəlif aspektlərinin ətraflı şərh (1) və (2)-də verilmişdir və burada bu məsələlərlə bağlı geniş bibliografiya dəfərlənmişdir.

Əd.: [1] Ш и р я е в А. Н., Основы стохастической финансовой математики, т. 1–2, М., 1998; [2] М е л ь н и к о в А. В., Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг, М., 1997.

MALLYAVİN HESABI « Malliavina исчисление; Malliavin calculus ». stoxastik variasiyalar hesabı, – diffuzion prosesin keçid ehtimalının hamarlığı və ya Hermender teoreminin və 2-ci tərtib differensial operatorların hipoelliptikliyinin isbatı üçün P. Malliavinin təklif etdiyi ehtimalı yanaşmadır (bax, [1], [2]). M. h.-nin digər interpretasiyaları bir qədər sonra təklif olunmuşdur (bax, [3] – [5]).

Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında d – ölçülü $w = (w(t))$, $0 \leq t \leq T$ Viner prosesi verilmişdir.

$$\zeta(t) = x + \int_0^t \sigma(\zeta(s)) dw(s) + \int_0^t b(\zeta(s)) ds, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

– İto tənliyinin həlli olan N – ölçülü diffuzion $(\zeta(t))$ prosesinə baxılır, burada $\sigma = \|\sigma_{i,k}\|$, – $(N \times d)$ – matris, $b = (b_i)$, –

N – ölçülü vektordur, σ , b və $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$, $\frac{\partial b}{\partial x_i}$ – törəmələri sonsuz

differensiallanan və məhduddurlar.

Ehtimali terminlərlə Hermander teoreminə belə hökm olunur ki, ixtiyari $t > 0$ qiymətində $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylan-

ması $P_t(x, \cdot)$ -nin, $V^{(1)}, \dots, V^{(d)}$, $[V^{(1)}, U], \dots, [V^{(d)}, U]$ vektor meydanları üzərini örtmüş Li cəbrinin hər bir $x \in \mathbb{R}^N$ nöqtəsində $\dim. -$ ölçüsü N -ə malik olarsa, hamar sıxlığı vardır, burada

$$V^{(k)} = \sum_{i=1}^N \sigma_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq k \leq d,$$

$$U = \sum_{i=1}^N U_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

U_i əmsalları σ_{ik} , b_i -lərin və bunların törəmələrinin hər hansı funksiyaları, $[X, Y]$, $-X$ və Y vektor meydanlarının Li möteri-zəleridir.

σ və b əmsalları üzərinə qoyulan şərtlərə görə tənliyin güclü həlli vardır və bu həll Viner prosesinin funksionalıdır. Buna görə də, Hermander teoremi onu ifadə edir ki, $M[A[w]]^2 < \infty$ şərti-ni ödəyən hər hansı $A^w -$ ölçülən $A[w]$ funksionalının hamar ehtimal sıxlığı vardır, burada $A^w = \sigma\{w_s, 0 \leq s \leq T\}$, $-w$ pro-sesinin doğrduğu σ -cəbridir (bundan sonra $d = 1$ götürülür).

M. h.-nin əsas anlayışları (bax, [5]). $A[w]$ funk-sionalı çoxqat Viner inteqrallarından ibarət sıra şəklində ifadə olunur, yəni

$$A[w] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$$

burada

$$I_n = \int_{s_1 < \dots < s_n \leq T} \int f_n(s_1 < \dots < s_n) dw_{s_1} \dots dw_{s_n},$$

$$f_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Aşağıdakı anlayışlar daxil olunmuşdur.

Malliavin törəməsi:

$$LA[w] = \sum_{n=0}^{\infty} n I_n;$$

$u \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ istiqaməti üzrə törəmə:

$$D_u A[w] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{A[w + \varepsilon u] - A[w]}{\varepsilon}$$

kvadratik forma:

$$(DA, DA) = \sum_{i=1}^{\infty} (D_{\eta_i} A)^2,$$

burada $\eta_i \in L^2([0, T])$ -də ortonormalanmış bazisdir;

bixətti forma:

580 MALTUS

$$(DA_1, DA_2) = \frac{1}{4} [(D(A_1 + A_2), D(A_1 + A_2)) - (D(A_1 - A_2), D(A_1 - A_2))]$$

M. h.-nin əsas qaydaları:

$$LA_1 A_2 = A_1 L A_2 + A_2 L A_1 - 2(DA_1, DA_2) \quad (1)$$

(bu tənlik inteqral şəklində hissə-hissə inteqrallanma düsturu adlanı-
r).

$$L \varphi(A) = \varphi'(A) L A - \varphi''(A)(DA, DA). \quad (2)$$

$A[w]$ funksionalının paylanma sıxlığının varlığının isbatı (ölçü-
lər üçün Furje çevirmələri nəzəriyyəsinə əsasən)

$$|M \varphi'(A)| \leq K \|\varphi\|_c, \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^1),$$

statistik qiymətinin alınmasına gətirilir, bu statistik qiymət (1), (2) münasibətlərinə əsasən alınır (bax, [5]).

M. h.-nin tətbiqinin olduqca genişləndirilməsi və bu nəzəriyyənin dərinləşdirilməsi S. Kusuoka və D. Struk ([6]), J. Norris ([7], ümumi Hermander şərtlərində stoxastik differensial tənlik), J. Bismut ([8], [9]) və b. (sıçrayışları stoxastik differensial tənlik, asimptotik məsələlər və böyük yayınmalar) tərəfindən həyata keçirilmişdir. S. Vatanabe ([10], [11]) («ümumiləşmiş» M. h.-nin yaranması), D. Nyualar və M. Zakai ([12]) M. h.-nin genişləndirilmiş stoxastik inteqral nəzəriyyəsinin dərin əlaqələri olduğunu aydınlaşdırmışlar (bax, [13], [14]).

M. h.-nin əsas anlayışları ilə S. Vatanabe, N. Ikeda ([15]), D. Bell ([16]), A. Yu. Veretennikovun ([17]) işlərində tanış olmaq olar.

Əd.: [1] Malliavin P., в сб.: Proceedings of the international conference on stochastic differential equations (Kyoto, 1976), Tokyo, 1978, p. 195–263; [2] Malliavin P., в кн.: Stochastic analysis, N. Y. – [a. o.], 1978, p. 199–214; [3] Stroock D. W., «Math. Systems Theory», 1981, v. 14, № 1, p. 25–65; № 2, p. 141–71; [4] Bismut J.-M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 56, S. 469–505; [5] Zakai M., «Acta Appl. Math.», 1985, № 3, p. 175–207; [6] Kusuoka S., Stroock D., в кн.: Stochastic analysis. Proceedings of the Taniguchi international symposium on stochastic analysis (Katata and Kyoto, 1982), Amst. – [a. o.], 1984, p. 271–306; [7] Norris J. L., «Lect. Notes in Math.», 1986, v. 1204, p. 101–30; [8] Bismut J.-M., Large deviations and the Malliavin calculus, Boston – [a. o.], 1984; [9] Bismut J.-M., «Ann. sci. Ecole norm. supér.», 1984, sér. 4, t. 17, p. 507–622; [10] Vatanabe S., Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, B. – [a. o.], 1984; [11] Vatanabe S., «Ann. Probab.», 1987, v. 15, № 1, p. 1–39; [12] Nuallart D., Zakai M., «Probab. Theory and Related Filds», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80; [13] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–38; [14] Кабанов Ю. М., Скороход А. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов, Друскининкой, 25–30 нояб. 1974, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [15] Ватанабэ С., Икеда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [16] Bell D. R., The Malliavin calculus, L., 1987; [17] Веретеников А. Ю., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 113–25.

MALLYAVİN STOXAŞTİK TÖRƏMƏSİ «Malliavina stoxastik törəmə; Malliavin stochastic derivative» – bax. *Stoxastik törəmə*.

MALTUS PARAMETRİ «мальтусовский параметр; Malthusian parameter» ümumi şəxələ-nən prosesin, –

$$M \int_0^{\infty} e^{-at} dN(t) = 1$$

tənliyinin kökü olan, həqiqi α ədədidir, burada $N(t)$, $t = 0$ anından başlayaraq $[0, t]$ müddəti ərzində bir hissəciyin yaratdığı varislerin sayıdır. Əgər $M N(\infty) < 1$ olarsa, onda M. p. mövcud olmaya bilər. $\mu(t)$ – ümumi şaxələnen prosesdə t anında hissəciklər sayı olsun. $N(t)$ prosesinin xarakteristikalarına bəzi məhdudiyyətlərlə

$$M\mu(t) \sim ce^{-\alpha t}, \quad c > 0, \quad t \rightarrow \infty$$

münasibəti doğrudur. Bu asimptotik ifadə populyasiyadakı hissəciklər sayının artması haqqında Maltus qanununa analojiçdir.

Bax, *Şaxələnen proses yaşından asılı*.

Əd.: [1] Вату́тин В. А., Зубко́в А. М., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [2] Jagers P., Branching processes with biological application, L. – [a. o.], 1975.

MANN – UİTNİ KRİTERİSİ « **Манна – Уитни критерий; Mann – Whitney test** » – $n + m$ sayda bütün elementləri qarşılıqlı asılı olmayan və kəsilməz paylanma qanunlarına tabe olan $X_1, \dots, X_n$ və $Y_1, \dots, Y_m$ seçimlərinin biricinsliyi haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. H. Mann və D. Uitni tərəfindən [1]-də təklif olunmuş bu kriteri

$$U = W - \frac{1}{2}m(m+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij}$$

statistikası əsasında qurulmuşdur, burada W – *Uilkokson kriterisinin* statistikasıdır ki, məhz H_0 hipotezinin yoxlanılmasına xidmət edir və ümumi variasion sırada ikinci seçimin elementlərinin rənglərinin cəminə bərabərdir, δ_{ij} isə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } X_i < Y_j \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

Beləliklə, U statistikası ikinci seçim elementlərinin birinci seçim elementlərindən böyük olduğu halların sayını hesablayır. U statistikasının tərəfindən aydındır ki, əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda

$$MU = nm/2, \quad DU = nm(n+m+1)/12 \quad (*)$$

və bundan başqa, bu statistika Uilkokson statistikası W -nin malik olduğu bütün xassələrə, o cümlədən, (*) parametrləri asimptotik normallıq xassəsinə də malikdir, buna görə də, praktikada yalnız $\min\{n, m\} > 25$ olduğu halda M. – U. k. istifadə olunur.

Əd.: [1] Mann H. B., Whitney D. R., «Ann. Math. Statist.», 1947, v. 18, p. 50–60.

*** MARGİNAL DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI** « **маргинальная функция правдоподобия; marginal likelihood function** » – bax, *Doğruxaoxşarlıq funksiyası*.

MARGİNAL PAYLANMA « **маргинальное распределение; marginal distribution** », xüsusi paylanma – *çoxölçülü paylanmanın* koordinat oxuna hər hansı koordinat vektorlarının toplusu ilə doğrurulmuş alt fəzaya proyeksiyasıdır. $F(x_1, \dots, x_n)$ n – ölçülü $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektorunun

paylanma funksiyası olarsa, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, $m < n$ şərtlərlə təyin olunan ixtiyari m sayda $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m})$ toplusunun

paylanma funksiyası F funksiyasına nəzərən *marginal paylanma funksiyası*, uyğun ehtimal paylanması *marginal paylanma* adlanır.

M. p. paylanma funksiyası F vasitəsilə sadə ifadə olunur, məs., $m = 1$ olduqda ξ_1 -in birölçülü marginal paylanma funksiyası

$$F_1(x_1) = F\left(x_1, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{n-1 \text{ sayda}}\right)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

MARGİNAL PAYLANMA FUNKSİYASI « **маргинальная функция распределения; marginal distribution function** » – bax, *Marginal paylanma*.

MARGİNAL YANAŞMA « **марджиналистический подход; marginal approach** » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

MARKOV ANI « **марковский момент; Markov stopping time** » – bax, *Dayanma anı*.

MARKOV AVTOMORFİZMİ « **Маркова автоморфизм; Markov automorphism** » – bax, *Markov yerini dəyişməsi*.

MARKOV BƏRABƏRSİZLİYİ « **Маркова неравенство; Markov's inequality** » – bax, *Çəbixşev bərabərsizliyi*.

MARKOV BƏRPA PROSESİ « **марковского восстановления процесс; Markov renewal process** » – bax, *Semi – Markov prosesi*.

MARKOV BƏRPA TƏNLİYİ « **марковского восстановления уравнение; Markov renewal equation** » – bax, *Semi – Markov prosesi*.

MARKOV DİNAMİK SEMİ – QRUPU « **марковская динамическая полугруппа; Markov dynamical semigroup** » – bax, *Kvant dinamik semi – qrup*.

MARKOV XASSƏSİ « **марковское свойство; Markov property** » təsadüfi prosesin – *təsadüfi prosesin* hər hansı t anında (indiki) vəziyyəti məlum olduqda onun t anından sonrakı (gələcək) vəziyyətinin evolyusiyası və bu ana qədərki (keçmiş) evolyusiyasının şərti asılı olmamalı xassəsidir. M. x.-nə ilk dəfə [1]-də A. A. Markov tərəfindən 1907-də təsadüfi ardıcılıqlar üçün baxılmışdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası və $\zeta = \zeta_t(\omega)$, $t \in T \subseteq (-\infty, \infty)$ – qiymətləri hər hansı ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasından olan təsadüfi proses olsun. Hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ anı üçün keçmiş hadisələr σ -cəbri – $\mathcal{A}_t = \sigma\{\zeta_s, s \leq t\}$ və gələcək hadisələr σ -cəbri – $\mathcal{A}^t = \sigma\{\zeta_u, u \geq t\}$ təyin olunur. İxtiyari $A \in \mathcal{A}_t$ keçmiş hadisə, $B \in \mathcal{A}^t$ gələcək

h a d i s ə adlanır. Əgər ixtiyari $t \in T$ və ixtiyari $A \in \mathcal{A}_t$, $B \in \mathcal{A}'$ hadisələri üçün

$$P\{AB|\zeta_t\} = P\{A|\zeta_t\} P\{B|\zeta_t\} \quad (P - \text{sanki yəqin}) \quad (1)$$

münasibəti ödənilərsə, ζ təsadüfi prosesi Markov xassəsinə malikdir, deyilir. (1) xassəsi ixtiyari $h > 0$ və $\Gamma \in \mathcal{B}$ üçün

$$P\{\zeta_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{A}_t\} = P\{\zeta_{t+h} \in \Gamma | \zeta_t\} \quad (P - \text{sanki yəqin}) \quad (2)$$

münasibətinə də ekvivalentdir. Markov xassəli təsadüfi proseslərə *Markov prosesləri* deyilir. Ω fəzasında $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$ σ – cəbrlər axınının verildiyi fərz olunur və ζ_t – $\mathbb{A}$ ilə uzlaşan proses (yəni $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_t$; bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*) olsun.

Ixtiyari $h > 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ üçün

$$P\{\zeta_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{A}_t\} = P\{\zeta_{t+h} \in \Gamma | \zeta_t\} \quad (P - \text{sanki yəqin}) \quad (3)$$

şerti də Markov xassəsi adlandırılır və bu xassə (2) xassəsinin ümumiləşmiş formasıdır. (1)-dən fərqli olaraq, (3) xassəsinə görə keçmiş və gələcəyin şərti asılı olmamalıdır, hökm etmək olmaz. Bir sıra hallarda, M. x. *ciddi Markov xassəsi* adlandırılan, gücləndirilmiş formada – (2) və (3) düsturlarında qeyd olunmuş t anlarının *dayanma anları* $\tau(\omega)$ -larla əvəz olunması ilə alınan düsturlarla ifadə olunur.

M. x. anlayışını təsadüfi meydanlar üçün də vermək olar. Əgər hər hansı sinfin ixtiyari oblastı üçün (məs., kompakt sərhədli ixtiyari qapalı oblast üçün) oblastda meydanın qiymətləri və oblastdan xaricdə meydanın qiymətləri meydanın oblast sərhədindəki (və ya onun infinitezimal ətrafında) verilmiş qiymətlərindən şərti asılı olmazsa, təsadüfi meydan üçün M. x. ödənilir, deyilir. Bu tərif müxtəlif üsullarla səlis ifadə etmək olar və bu da bir-birindən olduqca fərqli təriflərin alınmasına səbəb olur. Meydanların ən maraqlı sinfləri – oblastın sərhədində meydanın qiymətlərinə sərhədli sonsuz kiçik ətrafındakı qiymətlərin, o cümlədən, sərhəddə meydanın normal törəmələrinin də daxil edildiyi nəzərə alınan sinflərdir.

Bax, *Markov təsadüfi meydanı*.

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-матем. об-ва Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–57; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Гихман И. Н., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [4] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981.

MARKOV XASSƏSİ GENİŞ MƏNADA «марковость в широком смысле; wide sense Markov property» – bax, *Təsadüfi funksiya; geniş mənada xassə*.

MARKOV İNIKASI; *dinamik inikas* «марковское отображение; динамическое отображение; Markov, dynamical map» – statistik mexanikada cəbri şəkildə, həm də qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində *müşahidələnlərin* və sistemin *vəziyyətlərinin*, ümumiyyətlə, çevrilməyən evolusiyasının sonlu dəyişikliyi təsvir edən inikasıdır. $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ – vahidlərə malik hər hansı C^* – cəbrlər olsun (bax, *Cəbri, müşahidələnlərin*). $\mathcal{A}$ cəbrindən vahidi $\mathcal{B}$ cəbrindən vahidə keçirən *tamamilə müsbət Φ inikasına* $\mathcal{A}$ -dan $\mathcal{B}$ -yə keçid inikası deyilir. Əgər $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ olarsa, keçid inikası Markov inikası adlanır.

Hər bir keçid inikası üçün qoşma Φ^* inikası vardır ki, o, affin inikasıdır və $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ vəziyyətlər çoxluğunu $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ -ya zəif $*$ – kəsilməz

inikas etdirir. Əgər $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ – W^* – cəbrlər olarsa və inikas ixtiyari, məhdud istiqamətlənmiş özü-özüne qoşma $\{\zeta_\alpha\} \subset \mathcal{A}$ elementlərinin çoxluğu üçün $\sup_\alpha \Phi(\zeta_\alpha) = \Phi(\sup_\alpha \zeta_\alpha)$ münasibəti

beti mənasında normal inikas olarsa, onda Φ^* inikası normal vəziyyətləri normal vəziyyətlərə çevirir.

Misallər. 1) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ – ölçülən Ω fəzasında məhdud ölçülən funksiyaların kommutativ cəbri, $P\{d\omega | \omega'\}$, – Ω -da keçid ehtimalı olsun.

$$\Phi(\zeta)(\omega') = \int_\Omega P\{d\omega | \omega'\} \zeta(\omega), \quad \zeta \in \mathcal{A}$$

münasibəti M. i. təyin edir. Bu halda Φ^* Ω -da bütün ehtimal ölçülərinin qəbənq çoxluğunda affin inikas doğurur.

2) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$, – H Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorların cəbri olsun. Hər bir normal M. i.

$$\Phi(\zeta) = \sum_i V_i^* \zeta V_i$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $V_i \in \mathcal{A}(H)$, $\sum_i V_i^* V_i = I$ –

vahidi operatorudur.

Kvant ölçmə nəzəriyyəsində submarkov inikası adlanan tamamilə müsbət Φ inikası əməli mühüm rol oynayır, bu əməl $\Phi(I) \leq I$ şərtini ödəyir və $\mathcal{A}$

C^* – cəbrinə Φ^* inikasını təmin edir.

Əd.: [1] Kadison R., «Topology», 1965, v. 3, suppl. 2, p. 177–98; [2] Størmer E., «Lect. Notes in Phys.», 1974, v. 29, p. 85–106; [3] Морозова Е. А., Ченцов Н. Н., «Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы», М., 1973 (ИПМ АН СССР, препринт № 84).

MARKOV KEÇİD FUNKSIYASI «марковская переходная функция; Markov transition function» – bax, *Keçid funksiyası* Markov prosesi üçün.

MARKOV QAUSS PROSESİ «марковский гауссовский процесс; Markov Gaussian process» – bax, *Qauss – Markov prosesi*.

MARKOV MƏLUMATLAR MƏNBƏİ «марковский источник сообщений; Markov source» – diskret zamanlı məlumatlar mənbəidir, mənbənin hasil etdiyi məlumatları ifadə edən X_k təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığının sonlu Markov zənciri əmələ gətirməsi ilə səciyyəvidir. Diskret stasionar M. m. U üçün (bu Markov zənciri stasionar olarsa və bütün X_k -lər eyni bir sonlu $\mathcal{X}$ çoxluğundan qiymətlər alarsa) bərpə olunmanın dəqiqliyi şərtində məlumatların yaranma sürəti

$$\overline{H(U)} = H(X_0 | X_{-k}^{-1})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada k – Markov zəncirinin tərtibidir,

$$X_{-k}^{-1} = \{X_l, -k \leq l \leq -1\},$$

H – entropiyadır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

MARKOV MODELİ « марковская модель; Markov model » – bax, *idareolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

MARKOV ÖLÇÜSÜ « марковская мера; Markov measure » – bax, *Təsadüfi ölçü*.

MARKOV PROSESİ « марковский процесс; Markov process » – prosesin ixtiyari qeyd olunmuş t anından sonrakı evolyusiyası (gələcək) və t anına qədərki evolyusiyası (keçmiş) prosesin t anındakı (indiki) məlum vəziyyətdən şərti asılı olmayan *təsadüfi prosesdir*. M. p.-ni təyin edən, gələcək və keçmişin şərti asılı olmaması xassəsi *Markov xassəsi* adlandırılmışdır; bu xassə ilk dəfə [1]-də A. A. Markov tərəfindən təsadüfi ardıcılıqlar üçün düüst ifadə olunmuşdur. Lakin L. Başelyenin [2] əsərində Braun hərəkətinin M. p. kimi çox da ciddi olmayan izahına cəhd edilmişdir: belə yanaşmanın düzgünlüyü N. Viner tərəfindən [3]-də əsaslandırılmışdır. Kəsilməz zamanlı M. p. ümumi nəzəriyyəsinin əsasları hələ 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən qoyulmuşdu (bax, [4]) və burada göstərilmişdi ki, M. p.-nin keçid funksiyası müəyyən bir parabolik differensial tənliyi ödəyir. Bu fakt M. p.-nin qurulması və analizində 2-ci tərtib differensial tənliklər nəzəriyyəsindən istifadə olunması üçün əsas olmuşdur; V. Feller özünün [5], [6]-da dərc olunmuş işlərində bu sahəni olduqca zənginləşdirmişdir. M. p. nəzəriyyəsinin bu ilkin inkişaf mərhələsində, əsas etibarilə, M. p.-nin trayektoriyaları deyil, onun keçid funksiyasının xassələri araşdırılırdı. Lakin bir sıra məsələlərlə əlaqədar olaraq, M. p.-nin trayektoriyalarının tədqiq olunması zərurəti yarandı və bununla bağlı Markov xassəsini təsadüfi zaman anlarının bəzi siniflərinə də şamil etmək zəruri oldu (*ciddi Markov xassəsi*). Kəsilməz zamanlı proseslər üçün bunu həyata keçirmək müəkkəb problemdir; ciddi Markov xassəsi C. Dub (J. Doob) tərəfindən öyrənilmişdi, lakin indi, ümumi qəbul olunmuş formasında, bu xassə Ye. B. Dinkin (E. B. Dinkin) və A. A. Yuşkeviç tərəfindən [7]-də isbat olunmuşdur.

20-ci əsrin 50-ci illərində M. p. nəzəriyyəsinin inkişafı M. p. nəzəriyyəsinin bəzi bölmələrinin müstəqil istiqamətlərinin, ilk növbədə, diffuzion proseslər və şəxələnən proseslərin müstəqil sahələr kimi ayrılmasına səbəb oldu. Eyni zamanda belə bir zərurilik yarandı ki, M. p.-nin tərfi ilə ifadə olunmalıdır ki, onun başlanğıc vəziyyətinin dəyişməsi bu tərifdə əks olunsun. Nəzəriyyənin bununla əlaqədar yenidən işlənilməsi istiqamətində Ye. B. Dinkin mühüm xidməti xüsusi qeyd olunmalıdır (bax, [8], [9]). Bununla əlaqədar, M. p. ilə differensial tənliklərin əlaqəsinin də xarakteri dəyişmiş oldu: əgər əvvəllər M. p.-nin tədqiqatında yalnız analitik metodların istifadəsi nəzərdə tutulurdusa, indi differensial tənliklərin həllini M. p. nəzəriyyəsinin köməyiylə, onları prosesin xüsusi funksionallarının riyazi gözləmələri kimi ifadə etməklə qurmaq imkanı yarandı. M. p. nəzəriyyəsinin differensial tənliklərlə (stoxastik İto inteqralları və stoxastik differensial tənliklər kimi, bax, [10]) əlaqələndirən bir sıra ideya və metodlar sonradan qeyri – Markov prosesləri üçün də işləndi. M. p. nəzəriyyəsi zəruri bir texniki aparatın – «təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi» adlandırılan, sonradan martinqallar nəzəriyyəsində və idareolunan təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində geniş surətdə tətbiq olunan bir aparatın yaranmasına səbəb oldu. 20-ci əsrin 60–70-ci illərində M. p. nəzəriyyəsinin inkişafına C. Dubun göstərmiş olduğu – klassik potensial nəzəriyyəsi və M. p.-nin əlaqələrinin mühüm təsiri olmuşdu (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

M. p.-ləri sinfi ən mühüm təsadüfi proseslər siniflərindən biridir və bu sinfin mühüm tətbiqi əhəmiyyəti vardır. M. p. aparatı bir çox real obyektlərin təsviri və araşdırılmasında istifadə olunur, məs., kütləvi xidmət sisteminin təsviri üçün, radiobitə proseslərinin modeləşdirilməsi üçün. M. p.-nin tətbiqi əhəmiyyəti ilk öncə onunla təyin edilir ki, bunlar bir çox real proseslərin təsviri üçün

olduqca adekvat formadır; M. p. olmayan təsadüfi prosesləri, əksər hallarda, olduqca sadə M. p. şəklinə – prosesin özünün sturukturuna əlavə koordinatlar daxil etməklə müəkkəbləşdirərək – gətirmək olur (bax, məs., *Semi – Markov prosesi*). İkincisi, M. p. üçün prosesin tələb olunan xarakteristikalarını tapmağa və tətbiqlə əlaqədar yaranan bir çox məsələləri həll etməyə imkan yaradan inkişaf etmiş riyazi aparat vardır. M. p.-nin tətbiqi məsələləri [13], [14]-də işıqlandırılmışdır.

Bu məqalə, əsas etibarilə, əsas təriflərə həsr olunmuşdur; M. p. ilə əlaqədar digər informasiya «Markov prosesi» adı ilə başlanan məqalələrdə, həmçinin: *Markov xassəsi, Markov zənciri, Markov semi – qrupu, Diffuzion proses, Şəxələnən proses, Keçid funksiyası, Kolmoqorov – Çepmen tənliyi, İnfinitezimal operator, Xarakteristik operator, Ciddi Markov prosesi, Feller prosesi, Hant prosesi, Martin sərhədi* Markov prosesinin, *Ehtimali həlli, differensial tənliklərin* adlı məqalələr seriyasında verilmişdir.

Markov xassəsi. Markov xassəsinin yuxarıda qeyd olunmuş şəkildə formalaşması müxtəlif üsullarla edilə bilər ki, bu da M. p.-nin olduqca müxtəlif təriflərinə gətirir. Bunlardan ən sadə və ən təbii aşağıdakı tərifdir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında, qiymətləri ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ vəziyyətlər fəzasından olan $\zeta_t = \zeta(t)$, $t \in T \subseteq (-\infty, \infty)$ təsadüfi prosesinin verildiyi fərz olunur. Hər bir $t \in T$ üçün $\mathcal{A}_t = \sigma\{\zeta_s, s \leq t\}$ – keçmişin σ – cəbri və $\mathcal{A}_{t+} = \sigma\{\zeta_u, u \geq t\}$ – gələcəyin σ – cəbri təyin olunur. Əgər ixtiyari $t \in T$ və ixtiyari $A \in \mathcal{A}_t$, $B \in \mathcal{A}_{t+}$ hadisələri üçün Markov xassəsi –

$$P(AB|\zeta_t) = P(A|\zeta_t)P(B|\zeta_t) \quad (1)$$

bərabərliyi **P** – sanki yaqın ödənilərsə, ζ_t prosesi **Markov prosesi** adlanır. Bu tərifdə keçmiş və gələcək simmetrikdirlər: $\zeta_t^* = \zeta_{-t}$ çevrilmiş prosesinə keçdikdə Markov xassəsi öz qüvvəsində qalır.

Ən maraq doğuran və tez-tez təsadüf olunan hallar – T -nin həqiqi oxun intervalı **kəsilməz zaman** halında: ən çox istifadə olunan $T = [0, \infty)$ və ya $T = (-\infty, \infty)$ halları] və ya tam ədədlər çoxluğunun altı çoxluğu [**diskret zaman** halında: bir qayda olaraq $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ və bəzən də $T = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ halları] olduğu hallardır. Diskret zamanlı M. p. – *Markov zənciri* adlanır. Markov zəncirlərin ən mühüm altı sinfi vəziyyətlər fəzası $\mathcal{E}$ -nin vəziyyətləri sayı hesabını aşmayan zəncirlər sinfidir. (Vəziyyətləri fəzasının vəziyyətləri sayı hesabını aşmayan kəsilməz zamanlı M. p. də **kəsilməz zamanlı Markov zənciri** adlanır). *Diffuzion proseslər*, asılı olmayan artımları *təsadüfi proseslər*, o cümlədən, *Viner prosesi* və *Puasson prosesi* – kəsilməz zamanlı M. p.-ləridir.

Markov prosesi. (1) Markov xassəsinə əsaslanan M. p.-nin yuxarıda verilmiş tərfi nöqtəyi – nəzərdən təbii və münasib olduğu halda, nəzəriyyə qurmaq üçün əlverişli deyildir. Belə ki, ixtiyari bir anda ixtiyari başlanğıc vəziyyətdən evolyusiyada olan M. p.-ni araşdırmaq, yeni faktiki olaraq, müəyyən sürətdə bir-birilə uzlaşmış təsadüfi proseslər ailəsini tədqiq etmək mümkünlüyü tələb olunur. Bu ideyanı müxtəlif üsullarla həyata keçirmək olar. Bunlardan ən yaxşı işlək tərif aşağıdakı sayılır ([8], [9]-la müqayisədə). $(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəzasının və hər bir $s < t$ üçün $[s, t]$ parçasında müşahidə olunabilən hadisələr

çoxluğu kimi interpretasiya olunan $\mathcal{A}_{[s,t]} \subseteq \mathcal{A}$ σ – cəbrinin verildiyi fərz olunur, $s, t \in [-\infty, \infty]$. Və fərz olunur ki, əgər $[s, t] \subseteq [u, v]$ olarsa, $\mathcal{A}_{[s,t]} \subseteq \mathcal{A}_{[u,v]}$. $\zeta_t(\omega)$, $t \in (-\infty, \infty)$ – qiymətləri ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasından olan təsadüfi proses olsun. $t \in [s, u]$ olduqda isə ζ_t -nin $\mathcal{A}_{[s,u]}$ -ya nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. Daha sonra fərz olunur ki, hər bir $x \in \mathcal{E}$, $t \in (-\infty, \infty)$ üçün $\mathcal{A}_{[t,\infty]}$ σ – cəbrində $\mathbf{P}_{t,x}$ ehtimal ölçüsü verilir ki, hər bir $A \in \mathcal{A}_{[t,\infty]}$ üçün $\mathbf{P}_{t,x}$ funksiyası x -ə görə ölçüləndir. Əgər ixtiyari $s \leq t$, $s, t \in (-\infty, \infty)$, $x \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{A}_{[t,\infty]}$ üçün

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A|\mathcal{A}_{[s,t]}\} = \mathbf{P}_{t,\zeta_t}(A) \quad (\mathbf{P}_{s,x} - \text{sanki yəqin}) \quad (2)$$

ödenilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}_{t,s})$ üçlüyü $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında Markov prosesi (qırılmayan) adlanır. $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüsü s anında x vəziyyətindən başlayan prosesə müvafiq ölçü kimi interpretasiya olunur; bununla əlaqədar olaraq, adətən, fərz olunur ki, $\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_s \in \Gamma\} = \mathbf{I}_\Gamma(x)$, – Γ çoxluğunun indikator funksiyasıdır.

Aşağıda yalnız qırılmayan proseslərə baxılır, lakin bir sıra təbii konstruksiyalar ele proseslərin əmələ gəlməsinə gətirir ki, bunlar zamanın hər bir anı üçün təyin olunmur və yalnız müəyyən ana qəder təyin olunur (bax, *Qırılma anı, Qırılan Markov prosesi*).

$\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}_{t,s})$, – (2) tərifi mənasında M. p. olsun.

İxtiyari qeyd olunmuş s_0, x_0 üçün ζ_t , $t \geq s_0$ təsadüfi prosesi (1) tərifi mənasında $\mathbf{P}_{s_0,x_0}$ ölçüsünə nəzərən M. p.-dir. Lakin (1) tərifindən fərqli olaraq, verilən tərifi zamanın çevrilməsinə görə invariant deyildir. Bu vəziyyət çevrilmiş zamanda prosesin trayektoriyalarının araşdırılmasında, həm də dual M. p.-lərinin öyrənilməsində olduqca münasibdir. Buna görə də, bəzən aşağıdakı simmetrik tərifi daha münasibdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, ζ_t – qiymətləri vəziyyətlər fəzası $\mathcal{E}$ -dən olan təsadüfi proses olsun. $\mathcal{A}_{[s,t]}$ σ – cəbrlərinin (2) tərifi kimi olduğu fərz olunur. Daha sonra fərz olunur ki, hər bir $t \in (-\infty, \infty)$ və $x \in \mathcal{E}$ üçün $\mathcal{A}_{[t,\infty]}$ σ – cəbrində $\mathbf{P}_{t,x}$ ehtimal ölçüsü, $\mathcal{A}_{[-\infty,t]}$ σ – cəbrində isə $_{t,x}\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü təyin olunmuşdur.

Əgər ixtiyari $s < u$, $x \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{A}_{[u,\infty]}$, $B \in \mathcal{A}_{[-\infty,s]}$ üçün

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}\{A|\mathcal{A}_{[-\infty,u]}\} &= \mathbf{P}_{u,\zeta_u}(A) \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \\ \mathbf{P}_{s,x}\{A|\mathcal{A}_{[s,u]}\} &= \mathbf{P}_{u,\zeta_u}(A) \quad (\mathbf{P}_{s,x} - \text{sanki yəqin}), \\ \mathbf{P}\{B|\mathcal{A}_{[s,\infty]}\} &= {}_{s,\zeta_s}\mathbf{P}(B) \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \\ {}_{u,x}\mathbf{P}\{B|\mathcal{A}_{[s,u]}\} &= {}_{s,\zeta_s}\mathbf{P}(B) \quad ({}_{u,x}\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

münasibətləri ödenilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{s,x}, {}_{t,x}\mathbf{P})$ toplusu ikitərəfli Markov prosesi adlanır.

(2) tərifi halında olduğu kimi, bir sıra məsələlərdə təsadüfi zaman intervalında təyin olunmuş ikitərəfli Markov prosesləri yaranır; bu halda hərəkətin başlanğıc və final anlarının təsadüfi olduğunu fərz etmək lazım gəlir (bax, [15]). (3) tərifi digər mühüm ümumiləşməsi – $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ şərtinin birözlüklü $\mathbf{P}\{\zeta_t \in \Gamma\}$

paylanmalarının σ – sonlu olması şərtinə əvəz olunmasından alınır; belə proseslər dual M. p.-nə baxıldıqda və həm də ikitərəfli M. p.-lərinin bezi çevrilmələri nəticəsində təbii surətdə yaranır (bax, *Dual Markov prosesi*, [15], [16]). Nəhayət, bezi mühüm konstruksiyalar vəziyyətlər fəzası zamanı asılı proseslərə gətirir: hər bir t qiymətində $\zeta_t \in \mathcal{E}_t$.

(1), (2), (3) tərifi üçün bir-birinə olduqca yaxın olduğu aşağıdakı nəticədən aydındır. Doğrudan da, ζ_t , – (1) mənasında tərifi verilmiş M. p. olsun. Ω , – $\mathcal{E}$ fəzasında bütün $\{\omega_t\}_{t \in T}$ trayektoriyalarının fəzası və $\zeta_t(\omega) = \omega_t$ olsun. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ – Borel fəzası, yeni Borel σ – cəbri tam separabel metrik fəzasının Borel altçoxluğuna izomorf fəza olsun. Aydınlaşdırmaq olar ki, bu şərtlərlə, $\mathcal{A}_{[s,u]} = \sigma\{\zeta_t, s \leq t \leq u\}$ qəbul edərək iki ele $\{\mathbf{P}_{t,x}\}$ və $\{_{t,x}\mathbf{P}\}$ ehtimal ölçüləri ailəsini qurmaq olar ki, (3) ödənilsin.

Bundan sonra M. p. (2) tərifi mənasında M. p. anlaşılır.

$\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}_{s,x})$ M. p. və $\mathcal{E}$ -də ixtiyari ehtimal ölçüsü μ üçün $\mathbf{P}_{s,\mu}$ ölçüsü

$$\mathbf{P}_{s,\mu}(A) = \int \mu(dx) \mathbf{P}_{s,x}(A)$$

düsturu ilə təyin olunur. $\mathbf{P}_{s,\mu}$ başlanğıc anı s və ilkin paylanması μ olan prosesə müvafiq ölçüdür.

$p(s, x, t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}(\zeta_t \in \Gamma)$ funksiyasına M. p.-nin keçid funksiyası deyilir. İxtiyari $s < t < u$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ üçün keçid funksiyası –

$$\int p(s, x, t, dy) p(t, y, u, \Gamma) = p(s, x, u, \Gamma) \quad (4)$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyir.

Öz növbəsində əgər $p(s, x, t, \Gamma)$, x -ə görə ölçülən funksiya, Γ -yə görə ehtimal ölçüsü olarsa və (4) tənliyini ödəyirsə, $\mathcal{E}$ isə vəziyyətlərin Borel fəzası olarsa, onda p funksiyası hər hansı M. p.-nin keçid funksiyasıdır. Bundan başqa, əgər $\mathcal{E}$ tam separabel metrik fəza və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$, $V_\varepsilon(x)$ isə x nöqtəsinin ε – ətrafının tamamlayıcısı olarsa, onda ele M. p. vardır ki, prosesin keçid funksiyasıdır, bu proses sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalara malikdir; burada

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup \{p(s, x, t, V_\varepsilon(x)) : x \in \mathcal{E}, s \leq t \leq s + h\}.$$

Kəsilməz M. p.-nin varlığı $h \downarrow 0$ olduqda $\alpha_\varepsilon(h) = o(h)$ şərti ilə təmin olunur (bax, [8], [18]).

Bircins Markov prosesi. M. p.-ləri nezenyyəsinde zamana görə bircins M. p.-nə xüsusi diqqət yetirilir. Bircins M. p. üçün keçid funksiyası bircinsdir, yeni yalnız $t - s$ arqumentlər fərqi asılıdır:

$$p(s, x, t, \Gamma) = p(t - s, x, \Gamma),$$

öz növbəsində $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüləri, müxtəlif s qiymətlərində ciddi surətdə bir-birilə bağlıdır, bu da yalnız $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_{0,x}$ ölçüləri və $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{[0,t]}$ σ – cəbrlərinə baxmağa imkan yaradır. Formal tərifi: $(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ – hər hansı σ – cəbrlər axını, ζ_t – qiymətləri $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -dən olan $\mathcal{A}_t$ – uzlaş-

miş təsadüfi proses olsun. Fərz olunur ki, hər bir $x \in \mathcal{E}$ vəziyyətinə $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında $\mathbf{P}_x$ ehtimal ölçüsü uyğundur ki, $\mathbf{P}_x(A)$ funksiyası ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün ölçülendir. Və nəhayət, Ω fəzasının bircins olması o mənada anlaşılar ki: ixtiyari $\omega \in \Omega$ və $h > 0$ üçün $\omega' \in \Omega$ tapılar ki, $\zeta_{t+h}(\omega) \equiv \zeta_t(\omega')$ [bu şərt daha ciddi formada qoyulur: ixtiyari $h > 0$ üçün ω yerindəyişmə operatoru $\theta_h: \Omega \rightarrow \Omega$ inikası vardır ki, $\zeta_{t+h}(\omega) = \zeta_t(\theta_h \omega)$]. Əgər ixtiyari $t, h > 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $x \in \mathcal{E}$ üçün

$$\mathbf{P}_x \{ \zeta_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{A}_t \} = \mathbf{P}_{\zeta_t} \{ \zeta_h \in \Gamma \} \quad (\mathbf{P}_x - \text{sanki yəqin}) \quad (5)$$

münasibəti ödənilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ toplusu bircins Markov prosesi əmələ gətirir, deyilir. $\mathcal{N}$ – minimal σ – cəbr olsun və fərz olunur ki, ζ_t , $t \geq 0$ təsadüfi kəmiyyətləri $\mathcal{N}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir. $A \in \mathcal{N}$ hadisələri üçün Ω fəzasının bircins olduğu faktına əsasən $\theta_h^{-1} A \in \mathcal{N}$ yerindəyişmələrinə ω θ_h təyin etmək olar ki, $\theta_h^{-1} \{ \zeta_t \in \Gamma \} = \{ \zeta_{t+h} \in \Gamma \}$ bərabərliyi ödənilsin (əgər yerindəyişmə operatorları θ_h varsa, onda θ_h^{-1} operatorları θ_h -a tərs operatorlardır). θ_h^{-1} operatorlarından istifadə edərək (5) xassəsini

$$\mathbf{P}_x \{ \theta_t^{-1} A | \mathcal{A}_t \} = \mathbf{P}_{\zeta_t}(A) \quad (\mathbf{P}_x - \text{sanki yəqin}) \quad (6)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar.

Bircins M. p.-nin mühüm xarakteristikası, başlanğıc nöqtəsinin sonsuz kiçik ətrafında, M. p.-nin evolyusiyasını təsvir edən xarakteristik operatorudur. Bu terminlərdə, məs., ω ω' diffuzion proseslər sinfi təyin olunur ki, bu proseslər «kiçiklik» anlamında Braun hərəkəti prosesləridir (aparıya malik və kovariasion matrisli).

M. p.-lərinin ən mühüm siniflərindən biri də ciddi Markov prosesləridir ki, bunlar üçün (2) xassəsi [və ya bircins proses üçün (6) xassəsi] determinik t anlarından $\tau(\omega)$ Markov anlarına keçilərək ifadə olunur. Ciddi Markov prosesləri sinfindən «yaxşı» xassələri trayektoriyaların müxtəlif altsinifləri ayrılır (bax, məs., *Standart Markov prosesi*, *Sağ Markov prosesi*).

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-матем. об-ва. Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–56; [2] Bachelier L., «Ann. Sci. Ecole norm. super.», 1900, t. 17, p. 21–86; [3] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, p. 131–74; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [5] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [6] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417–36; [7] Дынкин Е. В., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [8] Дынкин Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [9] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [10] Ito K., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1944, v. 20, p. 519–24; [11] Doob J. L., «Bull. Soc. math. France», 1957, v. 85, p. 431–58; [12] Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [13] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории Марковского процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [14] Тихонов В. Н., Миронов М. А., Марковские процессы, М., 1977; [15] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178; [16] Mitro J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H. 2, s. 139–56; [17] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 389–93; [18] Kinney J. R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 74, p. 280–302; [19] Blumenthal R. M.,

Getto R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [20] Getto R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, В., 1975; [21] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [22] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [23] Чжун-Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [24] Вентцель А. Д., Фрейдмен М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [25] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [26] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [27] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [28] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [29] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [30] Вентцель А. Д., предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов, М., 1986.

MARKOV PROSESİ; additiv funksional «марковский процесс; аддитивный функционал; Markov process; additiv functional of» – Markov prosesinin additivlik xassəsinə malik, yəni $s \leq t \leq n$ olduqda $\varphi_s^t + \varphi_n^t = \varphi_n^s$ şərtini ödəyən, geniş mənada ixtiyari $\varphi = \varphi_s^t$, $s \leq t$ funksionaldır (bax, *Markov prosesi; funksional*), burada s, t, n – zaman parametrinin qiymətləri çoxluğunda dəyişirlər. Əgər $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$, – θ_t yerindəyişmə operatorlarına malik, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında bircins M. p.-dirsə, onda başqa şərtlər qoyulmazsa, ζ prosesinin φ funksionalı yalnız o halda additiv funksional adlanır ki, o, yalnız additiv deyil, həm də mənfi olması və bircins olsun [yeni $\varphi_s^t(\theta_h \omega) = \varphi_{t+h}^s(\omega)$, $s, t, h \geq 0$].

Misal: $\varphi_t^s = \int_s^t g(\zeta_u) du$ olsun, burada $g \geq 0$ funksiyası ω seçilmişdir ki, integralın mənası olsun. Əgər ζ prosesinin additiv φ funksionalı sonludursa [yeni bütün $0 \leq s \leq t$ üçün $\varphi_s^t < \infty$ bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilirsə], onda bu funksional aşağıdakı xassələrə malik $A = A_t \equiv \varphi_0^t$, $t \geq 0$ sağdan kəsilməz prosesi ilə birqiyəmetli bərpə olunur: a) $A_0 = 0$ və A_t t artdıqca azalmır; b) $0 \leq s \leq t$ olduqda $A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega)$; c) $\{A_t\}$, $t \geq 0$ ailəsi ζ prosesinin funksionalıdır. Ənənəyə görə, a) – c) xassələrinə malik olan, qiymətləri $[0, \infty)$ olan, sağdan kəsilməz ixtiyari A_t , $t \geq 0$ prosesi də ζ prosesinin additiv funksionalı adlanır; bəzən yalnız tələb olunur ki, a) – c) xassələri sanki yəqin ödənilsin (ixtiyari ilkin paylanmaların verildiyi fərz olunduqda). Əgər ixtiyari $t > 0$ qiymətində $A_t(\omega)$ -nın qiyməti $A_u(\omega)$, $0 \leq u \leq t$ funksiyasının sıçrayışlarının cəmi ilə üst-üstə düşərsə,

A additiv funksionalı tamamilə kəsilməz funksional hesab olunur. Natural additiv funksionalın (bu funksional ζ -nin trayektoriyalarının bütün kəsilmə anlarında sanki yəqin kəsilməz trayektoriyalı additiv funksional kimi təyin olunur) xüsusi halı olan kəsilməz additiv funksional da təbii

olaraq daxil edilir. A və B additiv funksionallar $A_t \equiv B_t$, $t > 0$ münasibətini sanki yəqin ödəyərlərsə, A və B – ekvivalent funksionallar adlanır.

Additiv funksionallar $M. p.$ nəzəriyyəsində əsas vasitələrdəndir (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr, həm də [1] – [6]). Bezi, ölçülər sinifləri və additiv funksionallar arasında əlaqələrin təsvirinə ümumi yanaşma [4]-də təklif olunmuşdur. $A(t)$, $t \geq 0$ – müəyyən tələblərə tabe olan, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verilmiş ζ^* standart prosesinin additiv funksionalı olsun. Hər bir m eksessiv ölçüsü ilə (bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün*) $\mathcal{B}$ -də verilən ν_A ölçüsü (Revuz ölçüsü) məhdud $\mathcal{B}$ – ölçülən $f \geq 0$ funksiyalar üçün

$$\int f d\nu_A = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} M_m \int_0^t f(\zeta_t) dt$$

bərabərliyi vasitəsilə əlaqələnir, burada $M_m(\cdot) = \int M_x(\cdot) m(dx)$ fərz olunmuşdur. Əgər $A = A(t) < \infty$ additiv funksionalı naturaldırsa, ξ prosesi isə $r_\alpha(\cdot, \cdot)$, $\alpha \geq 0$ – Qnin α funksiyalarına malikdirsə, onda bütün $\alpha \geq 0$ və bütün qeyd olunan şəkilli f -lər üçün

$$M_x \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(\zeta_t) dA_t = \int_{\mathcal{E}} r_\alpha(x, y) f(y) \nu_A(dy)$$

bərabərliyi doğrudur. Tamamilə kesilən additiv funksionallar haqqında bax, *Levi sistemi Markov prosesi üçün*.

Additiv funksionallar ailəsi multiplikativ funksionallar ailəsi ilə sıx əlaqədardır; multiplikativ funksionalların tərfi additiv funksional φ və A -nın təriflərindəki toplama əməlinin vurma əməli ilə əvəz olunması nəticəsində alınır. Əgər $A = A_t$, $t \geq 0$ additiv funksional olarsa, onda $\alpha = \alpha_t = \exp A_t$, $t \geq 0$ multiplikativ funksionaldır.

Qırılan proseslər üçün baxılan təriflərə təbii dəyişikliklər daxil olunur.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Волконский В. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1960, т. 9, с. 143–89; [4] Revuz D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 148, № 2, p. 501–30; [5] Dynkin E. B., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 5, p. 653–77; [6] Gettoor R. K., Sharpe M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 67, № 1, S. 1–62; [7] Dynkin E. B., Gettoor R. K., «J. Funct. Anal.», 1985, v. 62, № 2, p. 221–65.

MARKOV PROSESİ bir cins «марковский процесс; однородный; homogeneous Markov process» – bax, *Markov prosesi*.

MARKOV PROSESİ; böyük ədədlər qanunu «марковский процесс; закон больших чисел; Markov process; law of large numbers» – bax, *Böyük ədədlər qanunu Markov prosesləri üçün*.

MARKOV PROSESİ; çevirmələr «марковский процесс; преобразования; Markov process; transformations» – *Markov prosesinin Markov xassəsini dəyişməz saxlayan çevirmələrdir. Bunlardan ən çox istifadə*

olunalar – *zamanın təsadüfi əvəzlənməsi, zamanın çevrilməsi* (bax, *Çevrilmiş Markov prosesi*) və *prosesin öləməsi* (rus. – убывание процесса), yeni hər hansı altprosesə keçilməsi kimi çevirmələrdir.

$M. p.$ -nin çevirmələrindən verilmiş proses üzrə yeni $M. p.$ -lərinin qurulmasında vasitə kimi istifadə olunur. Məsələn, altprosesə keçmə və zamanın təsadüfi əvəzlənməsi ardıcıl surətdə aparıldıqda, geniş şərtlərlə ilkin ζ^* $M. p.$ -indən yeni, çıxış ehtimalları (yeni $F \in \mathcal{B}$ çoxluqlarından ilk çıxış anlarının paylanmaları) ζ^* $M. p.$ -nin çıxış ehtimallarını aşmayan proses almağa imkan verir. Əksinə, ζ^* -nin çıxış ehtimalları ilə majorantlanan çıxış ehtimalları, ζ^* $M. p.$ üçün ona ekvivalent olan və ζ^* prosesindən qeyd olunan əməliyyatlar vasitəsilə alınan $M. p.$ göstərmək olar (bax, [3], [6]). ζ^* və ζ^* $M. p.$ -lərinin çıxış ehtimalları üst-üstə düşdüüyü halda altprosesə keçid istifadə olunur (bax, *Zamanın təsadüfi əvəzlənməsi*). ζ^* tipli proseslərin infinitezimal operatorlarının strukturu qeyd olunan çevirmələrin xarakteristikaları terminlərində yaxşı təsvir olunur (bax, [4]).

Aşağıdakı çevirmələrdən daha çox istifadə olunur.

Faza fəzasının çevrilməsi. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ faza fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ olan (qırılan) bir cins $\zeta^* = (\zeta_t, \zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ $M. p.$ və ele $\gamma: (\mathcal{E}, \mathcal{B}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{B}})$ ölçülən inikası verilir ki, $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{\mathcal{B}}$, $\gamma(x) = \gamma y$ ($x, y \in \mathcal{E}$) olduqda $\gamma(\mathcal{E}) = \tilde{\mathcal{E}}$, $\gamma(\mathcal{B}) \subset \tilde{\mathcal{B}}$ və $p(t, x, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}) = p(t, y, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma})$ münasibətləri ödənilsin.

$\tilde{p}(t, \tilde{x}; \tilde{\Gamma}) = p(t, \gamma^{-1}\tilde{x}; \gamma^{-1}\tilde{\Gamma})$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathcal{B}}$ bərabərliyi $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{B}})$ -də keçid funksiyası təyin edir; bu keçid funksiyasına hər hansı $\tilde{\zeta}^*$ $M. p.$ uyğundur ki, ona ζ^* -nin obrazı kimi baxılır. Belə hesab etmək olar ki, ζ^* və $\tilde{\zeta}^*$ proseslərinin elementar hadisələr fəzası ümumdür (bax, [1]). $\tilde{\zeta}^*$ -nin trayektoriyaları kimi $\gamma\zeta_t^*$, $0 \leq t \leq \xi$ funksiyalarını götürmək olar. Təsvir olunan konstruksiya həqiqi oxun parçalarında kəsimez $M. p.$ -nin qurulmasında istifadə olunur.

Markov prosesinin bərpası – verilmiş qırılan prosesi qırılmayan prosesə qədər davam etdirməyə imkan yaradan əməliyyatdır.

Markov prosesinin calanması (bax, *Calaşdırılma(sı) təsadüfi proseslərin*) – $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ və $(\mathcal{E}_1, \mathcal{B}_1)$ ölçülən fəzalarda verilən ζ^* və ζ_1^* $M. p.$ -ləri cütünə $(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_1, \mathcal{B}_2)$ fəzasında verilən üçüncü bir $\tilde{\zeta}^*$ $M. p.$ -ni qarşı qoyan əməliyyatdır ki, $\tilde{\zeta}^*$ prosesi $\mathcal{E}$ fəzasını tərk edənə qədər özünü ζ^* kimi, $\mathcal{E}_1$ -i tərk edənə qədər ζ_1^* kimi aparır (bax, [7]), burada $\mathcal{B}_2$ – $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_1$ -in elementlərindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdir (calanma əməliyyatı bezi şərtlərdən, o cümlədən, ζ^* və ζ_1^* -in $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1$ -də uzlaşma şərtindən də asılıdır).

$M. p.$ -nin digər çevirmələri də mövcuddur.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 2, с. 260–82; [4] Шур М. Г., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 731–62; [5] Ikeda N., Nagasawa M., Vatanabe S., «Proc. Japan Acad.», 1966, v. 42, № 4, p. 370–75; [6] Shih C. T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1967,

v. 129, № 1, p. 157-79; [7] Meyer P.-A., «Ann. Inst. Fourier», 1975, t. 25, № 3-4, p. 465-97.

MARKOV PROSESİ çevrilmiş « марковский процесс обращенный; reversed Markov process » – bax, *Çevrilmiş Markov prosesi*.

MARKOV PROSESİ; davamı « марковский процесс; продолжение; Markov process; extension of » – müəyyən hissəsi hər hansı çoxluqda ilkin Markov prosesinə ekvivalent olan (bax, *Markov prosesi*; *hissəsi*), yeni eyni keçid funksiyasına malik olan M. p.-dir. Əvvəllər yalnız müəyyən $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ oblastında verilən diffuzion proseslərin bu oblastın qapayıcısında verilən proseslərə qədər davamı məsələlərinə baxılırdı (bax, *Markov prosesi*; *sərhəd şərti*). Bu məsələlərə ümumi yanaşma M. Motoo və Ye. B. Dinkinin işlərində araşdırılmışdır (bax, [1] – [3]).

$\zeta = (\zeta_t, \zeta, \mathcal{A}_t, P_x)$, $-(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ vəziyyətlər fəzasında verilən standart Markov prosesi olsun. $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_t, \tilde{\zeta}, \tilde{\mathcal{A}}_t, \tilde{P}_x)$ M. p. isə $D \subset \mathcal{E}$ açıq çoxluğunda ζ prosesinin hissəsinə ekvivalent prosesdir. $V \setminus V_r$ çoxluğu polyar çoxluq fərz olunur, burada $V = \mathcal{E} \setminus D$, V_r – V üçün rəqulyar nöqtələrin çoxluğudur. Onda ζ prosesinin rezolventi (bax, [2]) iki operatorun cəminə ayrılır. Bunlardan birincisi $\tilde{\zeta}$ -nin rezolventidir (daha dəqiq, onun xətti genişlənməsi olub, D -dən kənarda verilən funksiyaları 0 konstantına çevirən). İkinci operatorun birqismətli təsviri üçün aşağıdakıların verilməsi zəruridir: a) D çoxluğunun hər hansı tamamlayıcısında ikinci arquməntə görə ölçü olan, giriş paylanması adlandırılan $b(x, dy)$ -in; b) ləngimə əmsali $I(x)$, $x \in V_r$, – hər hansı məhdud ölçülən funksiyasının; c) V_r -də $\Phi(t)$, $t \geq 0$ lokal müddətinin – $\zeta_t \notin V_r$ şərtini ödəyən zaman intervalında sabitliyini sanki yəqin saxlayan, ζ prosesinin kəsilməz additiv funksionalının. Adətən, Φ -i Φ – lokal müddətinin doğurduğu, zamanın təsadüfi əvəz edilməsi ilə ζ^* -dan alınan, V_r çoxluğunda verilən ζ^* sərhəd prosesi ilə əvəzləməyə üstünlük verilir. (b, I, ζ^*) sərhəd sisteminin elementləri arasında müəyyən əlaqələr vardır.

Daha ümumi situasiya da araşdırılmışdır (bax, [3]). $\tilde{\zeta}$ üzrə ζ prosesinin qurulması, verilmiş sərhəd sistemine görə ζ prosesinin qurulması kimi əks məsələlərə də baxılmışdır (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Motoo M., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1967, v. 2, pt 2, p. 75–110; [2] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 4, с. 708–13; [3] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 409–36; [4] Meyer P.-A., «Ann. Inst. Fourier, Grenoble», 1975, t. 25, № 3-4, p. 465–97; [5] Silverstein M. L., «Lect. Notes Math.», 1976, № 516.

MARKOV PROSESİ; dayanıqlılıq « марковский процесс; устойчивость; Markov process; stability » – bax, *Dayanıqlılıq (ğı) Markov proseslərinin*.

MARKOV PROSESİ Dirixle forması « марковский процесс; форма Дирихле; Markov process; Dirichlet form » – simmetrik bixətti qapalı ele $\mathcal{E} = \mathcal{E}[u, v]$ Markov formasıdır ki, bu forma $L^2 = L^2(E, m)$ heqiqi fəzasının sıx xətti $D = D(\mathcal{E})$ çoxoxbəzlisinin u, v

elementləri üçün təyin olunmuşdur və $u \in D$ üçün $\mathcal{E}[u, u] \geq 0$ şərtini ödəyir [hətta belə də deyilir ki, $(D, \mathcal{E})$ cütü Dirixle fəzası təşkil edir]. Burada $E, -\mathcal{B}$ σ – cəbri ilə verilmiş lokal kompakt separabel Hausdorff fəzası, m – daşıyıcısı E -dən olan Radon ölçüsüdür. $\mathcal{E}$ -nin qapalıllıq şərtində fərz olunur ki, $D(\mathcal{E})$ sıx metrik fəzadır və bu fəza $\|\cdot\| = [\mathcal{E}[\cdot, \cdot] + (\cdot, \cdot)]^{1/2}$ normasının doğurduğu metrika ilə verilir, burada $(\cdot, \cdot)$, $-L^2$ -də skalyar hasilidir. $\mathcal{E}$ -də Markov xassəlikə ondan ibarətdir ki, $v \equiv \min(u^+, 1) \in D$ və bütün $u \in D$ üçün $\mathcal{E}[v, v] \leq \mathcal{E}[u, u]$ şərtlərinin ödənilməsinə ifadə edir, burada $u^+ = \max(u, 0)$.

Hər bir bircins, ümumiyyətlə, $(E, \mathcal{B})$ -də verilmiş, sağdan kəsilməz trayektoriyalara malik və m – simmetrik (yeni m -ə nəzərən özü-özünə dual) qınlan $\zeta = (\zeta_t, \zeta, \mathcal{A}_t, P_x)$, $t \geq 0$ Markov prosesi ilə kanonik olaraq hər hansı Dirixle formasını əlaqələndirir (bax, [2]). Doğrudan da, ζ -in keçid funksiyası təbii surətdə L^2 -də xətti operatorların güclü kəsilməz semi – qrupunu doğurur və D əvəzinə bu semi – qrupun doğuran A operatorunun təyin olunma oblastını qəbul etdikdə, fərz edilir ki, ixtiyari $u, v \in D$ üçün

$$\mathcal{E}(u, v) = (\sqrt{-Au}, \sqrt{-Av}).$$

İlk dəfə, Dirixle fəzaları bir qədər başqa şəkildə 1958 – 59-da A. Beyrlinq və J. Deni tərəfindən [1]-də klassik Dirixle inteqralını ümumiləşdirmək məqsədilə daxil olunmuşdur. Burada istifadə olunan terminologiya M. Fukusiməyə (bax, [2]) məxsusdur, o, müzakirə olunan anlayışlar və Markov prosesləri nəzəriyyəsi arasında əlaqəni aşkar etmişdir.

Dirixle formalan nəzəriyyəsi M. p.-lərinin geniş sinfinin qurulması üçün yeni üsullar verir (bax, [2], [5]). Fərz olunur ki, $\mathcal{E}$ rəqulyar formadır, yeni $C_0 \cap D$, $-D$ -də $\|\cdot\|$ normasına nəzərən və C_0 -da müntəzəm nomaya nəzərən sıx formadır; C_0 – kompakt daşıyıcılara malik E -də kəsilməz funksiyalar çoxluğudur. Onda $(E, \mathcal{B})$ fəzasında Hant prosesi vardır və bu proses $\mathcal{E}$ ilə yuxarıda təsvir olunduğu kimi əlaqəlidir.

Misal. $E, -\mathbb{R}^n$ -də oblast, $m, -E$ -də Lebeq ölçüsü olsun. C^∞ sinfindən olan, E -də verilmiş və E -də kompakt daşıyıcıları olan u və v funksiyaları üçün

$$\mathcal{E}_0[u, v] = \sum_{i,j} \int_E a_{ij}(x) u'_i u'_j dx$$

formasını daxil olunur, burada $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a(x) \equiv a_{ij}(x)$, $-E$ -də lokal inteqrallanan funksiyalardır, $1 \leq i, j \leq n$. Əgər hər hansı $\delta > 0$ və bütün $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ üçün

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) y_i y_j \geq \delta \sum_i y_i^2$$

berabərsizliyi ödənilərsə, onda $\mathcal{E}_0$ forması rəqulyar Dirixle formasına qədər təyin oluna bilər və bu formaya E -də m – simmetrik kəsilməz M. p. uyğundur.

Qeyri – simmetrik Dirixle formaları nəzəriyyəsi də yaranmışdır (bax, [3], [6]).

Əd.: [1] Beurling A., Deny J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1959, v. 45, p. 208–15; [2] Fukushima M., Dirichlet forms and Markov processes, Amst.–N.Y.–Oxf., 1980; [3] Carrillo – Menéndez S., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, № 2, S. 139–54; [4] Le San Y., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1977, Bd 37, № 4, S. 297–319; [5] Fukushima M., Oshima Y., Takeda M., Dirichlet forms and symmetric Markov processes, B. – N. Y., 1994; [6] Ma Z. M., Rockner M., Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms, B., 1992.

MARKOV PROSESİ; ekskursiya « марковский процесс; экскурсия; **Markov process;** excursion of » – bax, *Ekskursiya(sı)* Markov prosesinin.

MARKOV PROSESİ; enerji « марковский процесс; энергия; **Markov process;** energy of » – potensial nəzəriyyəsində istifadə olunan enerji anlayışının nəzəri – ehtimali analoqudur (bax, [1]). Enerjinin ehtimali izahı M. p. nəzəriyyəsi çərçivəsində P. A. Meyer tərəfindən [3]-də təklif olunmuşdur; martinqallar nəzəriyyəsinə də uyğun anlayış onun tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [2]). Lokal kompakt separabel Hausdorf fəzası $\mathcal{E}$ -də $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ qınılmayan Hant prosesinin verildiyi fərz olunur. Bu prosesin natural additiv $A = A_t$, $t \geq 0$ funksionalı üçün (bax, *Markov proses; additiv funksional*)

$$\mathbf{M}_x(A_\infty^2) = 2\mathbf{M}_x \left[\int_0^\infty R_A(\zeta_{t-}) dA_t \right] + \mathbf{M} \left[\sum \Delta A_t \right]^2, \quad (*)$$

enerji düsturu doğrudur (bax, [2]), burada $x \in \mathcal{E}$, $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t$, $R_A(x) = \mathbf{M}_x A_\infty$, – A funksionalının potensialıdır, cəmləmə isə $t > 0$ anları üzrə aparılır ki, bunlarda $\Delta A_t = A_t - A_{t-0}$ sıçrayışları sıfırdan fərqlidir. Əgər A funksionalı kəsilməz olarsa, (*)-nın sağ tərəfindəki ikinci toplananı yazmamaq olar. $V_A(x) = \mathbf{M}_x(A_\infty^2)$ funksiyası A funksionalının və ya onun potensialının energetik funksiyası adlanır. Əgər η ekssessiv ölçüsü μ ölçüsünün $\mathcal{E}$ -də hər hansı Borel potensial ölçüsü olarsa (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün), onda

$$e_\eta(A) = \frac{1}{2} \int V_A d\mu$$

A funksionalının η -ya nəzərən enerjisi adlanır. Bir sıra hallarda, məs., simmetrik hallarda, yeni özü-özünə dual Hant prosesləri hallarında funksionalın enerjisinin digər təriflərindən də istifadə olunur (bax, [4], [5]). Yuxarıda daxil olunmuş terminologiyanın məhz belə seçilməsi onunla izah olunur ki, ν ölçüsünün klassik enerjisi (bax, [1]), ν , $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ fəzasında Borel ölçülərinin geniş sinfində dəyişdikdə, olduqca dəqiqliklə $e_{\eta_n}(A)$, $n \geq 1$ enerjisi ilə approksimasiya olunur, belə ki, η_n ölçüləri ν -nün seçilməsindən asılı olurlar,

A – Viner prosesinin kəsilməz additiv funksionalı isə η seçilməlidir ki, onun Lebeq ölçüsünə nəzərən Revuz ölçüsü (bax, *Markov proses; additiv funksional*) ν ilə üst-üstə düşsün.

588 MARKOV

Fərz olunur ki, η Hant prosesi tapılar ki, o, hər hansı Borel ölçüsünə nəzərən ilkin ζ prosesinə güclü dual proses olsun. Əgər ζ prosesinin hər hansı natural additiv A funksionalı üçün $V_A(x)$ funksiyası sonlu olarsa, onda bu funksiya eyni tipli hər hansı $B = B_t$, $t \geq 0$ funksionalının potensialı $R_B(x)$ ilə üst-üstə düşür və bu halda B funksionalının Revuz ölçüsünün tam kütləsi $V_A(x)$ funksiyasının enerjisi və ya energetik norması adlanır.

Qınılan proseslər üçün analogi təriflər daxil olunur.

M. p.-ləri nəzəriyyəsi çərçivəsində energetik anlayışlar additiv funksionallar, eyniçəkili paylanmalar, energetik normanın doğrduğu yığılma ilə əlaqədar istifadə olunur (bax, [2] – [6]).

Əd.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Chap. 5–8. Théorie des martingales, P., 1980; [3] Meyer P.-A., in: Seminaire Brelot – Choquet – Deny, Inst. H. Poincaré. Théorie du potentiel (1962 / 1963, № 2), P., 1964; [4] Chung K. L., Rao M., «Probab. and Math. statist.», 1980, v. 1, № 2, p. 99–108; [5] Graversen S. E., Rao M., «Nagoya Math. J.», 1985, v. 100, p. 163–80; [6] Pop – Stojanovic Z. R., Rao M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1985, Bd 69, S. 593–608.

MARKOV PROSESİ; faza fəzası « марковский процесс; фазовое пространство; **Markov process;** state space of » – bax, *Faza fəzası* Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin.

MARKOV PROSESİ; faza fəzasının kompaktifikasiyası « марковский процесс; компактификация фазового пространства; **Markov process;** phase /state space compactification » – *Markov prosesinin* vəziyyətləri fəzasının proseslə bağlı hər hansı metrikada genişləndirilmiş fəzada bu və ya digər yaxşı xassələrli proses almağa imkan verən tamamlanması əməliyyatıdır.

Praktik olaraq, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ biricins M. p.-nə tətbiq olunan Rey – Nayt kompaktifikasiyası və Martin kompaktifikasiyasından istifadə olunur. Rey – Nayt kompaktifikasiyasında istifadə olunan metrika η seçilir ki, f funksiyalarının geniş sinfi üçün

$$R_\lambda f(x) = \int r_\lambda(x, dy) f(y)$$

şəklində funksiyaların müntəzəm kəsilməzliyi təmin olunsun [r_λ , – ζ prosesinin rezolventidir; fərz olunur ki, $R_\lambda f(x)$ funksiyaları vəziyyətlər fəzası $\mathcal{E}$ -nin nöqtələrini ayırır]. İsbat olunur ki, genişləndirilmiş $\mathcal{E}$ fəzasında hər hansı sağdan kəsilməz, 2-ci növ kəsilməli olmayan η ciddi M. p. vardır ki, onun rezolventi kəsilməzlik üzrə ilkin prosesin rezolventi olub, həm də Rey rezolventidir (bax, *Rey prosesi*). Yeni prosesin trayektoriyaları müəyyən mənada ilkin prosesin trayektoriyalarının hər yerdə sıx hesabı çoxluq üzrə götürülmüş sağ limitleridir.

Martin kompaktifikasiyası daha ağır şərtlərlə həyata keçirilir; bu əməliyyat M. p.-nin final gedişatının araşdırılmasında və ekssessiv funksiyaların müəyyən bir ayrılışında istifadə olunur. Bax, *Martin şərhədi* Markov prosesinin.

Əd.: [1] Ray D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–72; [2] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137–72; [3] Knight F., «Ill. J. Math.», 1965, v. 9, p. 548–52; [4] Gettoor R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, B., 1975; [5] Engelbert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 235–66; [6] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 89–152; [7] Jeulin T., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 42, H. 3, S. 229–60.

MARKOV PROSESİ; funksional « марковский процесс; функционал Markov process; functional of » – s və t Markov prosesinin zaman parametrisinin qiymətlər çoxluğunda dəyişdikdə, t anına qədər Markov prosesinin evolyusiyası ilə təyin olunan hər bir φ_t^s və ya ψ_t kəmiyyətlərinin $\varphi = \{\varphi_t^s\}$, $s \leq t$ və ya $\psi = \{\psi_t\}$ ailəsidir. Fərz olunur ki, $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəza fəzasında bircins $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ M. p. $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzası ilə verilmişdir. Əgər $0 \leq s \leq t$ ($t \geq 0$ olduqda) olduqda $\varphi_t^s(\psi_t)$ kəmiyyəti $\bar{G} \cap \mathcal{A}_t$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən olarsa ($\bar{G} \cap \sigma$ – cəbri ζ_t kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir, $\bar{G}$ bütün $\mathbf{P}_x$, $x \in \mathcal{E}$ ölçüləri üzrə G -nin bütün tamamlayıcılarının kəsişməsidir), qiymətləri $[-\infty, \infty]$ -dan olan $\varphi = \{\varphi_t^s\}$, $0 \leq s \leq t < \infty$ (uyğun olaraq, $\psi = \{\psi_t\}$, $t \geq 0$) təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi ζ -nin funksionalıdır. Qınlan proses üçün funksionalın yuxarıda verilən təfərrüfatı təbii surətdə modifikasiya olunur. Additiv və multiplikativ funksionallar xüsusi maraq doğuran funksionallardır. Vektor qiymətli və digər qiymətli funksionallara da baxılır.

Bax, Markov prosesi; additiv funksional.

MARKOV PROSESİ geniş mənada « марковский процесс в широком смысле; wide-sense Markov process » – bütün t -lər üçün $\mathbf{M}[\zeta(t)]^2 < \infty$ və $t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ şərtini ödəyən ixtiyari $t_1, \dots, t_n$ qiymətlərində

$$\tilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t_n) | \zeta(t_1), \dots, \zeta(t_{n-1})\} = \tilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t_n) | \zeta(t_{n-1})\}$$

şərtlərini ödəyən təsadüfi prosesdir, burada

$$\tilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t) | \zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)\} = \sum_{i=1}^k a_i \zeta(t_i)$$

– $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ele xətti kombinasiyasıdır ki, $\mathbf{M} \left| \zeta(t) - \sum_{i=1}^k a_i \zeta(t_i) \right|^2$ ən kiçik qiymət alır [yeni

$\tilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t) | \zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)\}$ xəttinin kvadratının minimumu mənada $\zeta(t)$ -yə $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)$ -dan xətti asılı ən yaxşı yaxınlaşmadır].

Geniş mənada M. p. anlayışı C. Duba məxsusdur (bax, [1]). Markov prosesinin geniş mənada tərifinə xas olan bu xassə $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin yalnız korrelyasion funksiyasına məhdudiyyətlərə səbəb olur və Gauss Markov prosesi geniş mənada adi Markov prosesi olur (bax, Təsadüfi funksiya; Gauss – Markov prosesi; geniş mənada xassə).

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Б е у т л е р F., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 2, p. 424–38; [3] М а н д р е к а р V., «Nagoya Math. J.», 1968, v. 33, p. 7–19.

MARKOV PROSESİ; hissəsi « марковский процесс; часть Markov process; part of » – qeyd olunmuş vəziyyətlər çoxluğundan ilk çıxış anında verilmiş Markov prosesinin yox olması nəticəsində alınan Markov prosesidir (bax, Markov prosesi; ç ə v i r m ə l ə r, ilk çıxış anı). Məs., $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $-\infty < t < \infty$ fəza fəzasında standart M. p.,

τ – prosesin açıq $D \in \mathcal{E}$ çoxluğundan ilk çıxış anı olsun. Onda $x \in D$ -də dəyişdikdə $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_t, \tau, \tilde{\mathcal{A}}_t, \mathbf{P}_x)$ prosesi ζ prosesinin D -də hissəsidir, bu şərtlə ki, $0 \leq t < \tau(\omega)$ olduqda $\tilde{\zeta}_t(\omega) = \zeta_t(\omega)$, hər bir $\tilde{\mathcal{A}}_t$, $t \geq 0$ σ – cəbri isə $\mathcal{A}_t$ -nin $\{\omega: \tau > t\}$ çoxluğunda izi olsun (bundan başqa fərz olunur ki, D çoxluğunda ölçülən struktur onun bütün altçoxluqlarının toplusu ilə verilir). Bu halda $\tilde{\zeta}$ standart proses, ζ prosesi isə onun D çoxluğundan davamı kimi interpretasiya olunur (bax, Markov prosesi; davamı).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963.

MARKOV PROSESİ xəttivari « марковский процесс линейчатый; Markov linewise process » – bax, Xəttivari Markov prosesi. Semi – Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ idarəolunan « марковский процесс управляемый; controlled Markov process » – bax, İdarəolunan Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ ikili/dual « марковский процесс двойственный; dual Markov process / Markov process in duality of » – bax, Dual Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ ikitərəfli « марковский процесс двусторонний; two-sided Markov process » – bax, Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ; infinitezimal xarakteristikalar « марковский процесс; инфинитезимальные характеристики; Markov process; infinitezimal characteristics of » – bircins Markov prosesinin evolyusiyasını «az» da olsa təsvir edən bu və ya digər xarakteristikalarının toplusudur.

Vəziyyətləri fəzası hesabı Markov prosesləri. $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ – sağdan kəsilməz bircins, hesabı (və ya sonlu) vəziyyətlər fəzası $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ -də M. p. olsun. ζ

prosesinin keçid funksiyası faktik olaraq, $\|p_{ij}(t)\|_{i,j \in \mathcal{E}}$ matrisi

(sonsuz) ilə verilir, burada $p_{ij}(t) = \mathbf{P}_i\{\zeta_t = j\}$, $a_{ij} = p_{ij}(t)|_{t=0}$

törəmələri infinitezimal xarakteristikalar kimi anlaşılar. $A = \|a_{ij}\|$

matrisi prosesin xarakteristik operatorunu müəyyən edir. Bu halda $(-a_{ii})^{-1}$ trayektoriyanın i nöqtəsindən çıxış müddətinin orta qiyməti kimi anlaşılar. $\pi_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ ($a_{ii} \neq -\infty$) kəmiyyətləri prosesin ilk sıçrayışından sonrakı vəziyyətinin ehtimal paylanmasını təyin edir. Belə təsviri daha ümumi vəziyyətlərdə sıçrayışvari M. p.-ləri üçün də vermək olur.

Asılı olmayan artımlı proseslər. $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $-\mathbb{R}^1$ -də verilmiş sağdan kəsilməz, asılı olmayan artımlı proses olsun. Bu halda infinitezimal xarakteristikalar kimi diffuziya əmsalı a , aparıcı əmsalı b və xarakteristik operatora

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2} a f''(x) + b f'(x) + \int_{\mathbb{R}^1} (f(x+y) - f(x) - y f'(x) I_{|y| < 1}) \nu(dy)$$

münasibətilə daxil olan sıçrayışlar ölçüsü $\nu(dy)$ kimi kəmiyyətlər çıxış edir, burada $a \geq 0$, ν ölçüsü isə

$$\int \frac{\nu(dy)y^2}{1+y^2} < \infty$$

şertini ödəyir. a diffuziya əmsalı və b apan əmsalı prosesin ifadəsində kəsilməz komponenti xarakterizə edir, sıçrayışlar ölçüsü ν isə

$$\nu(\Gamma)dt = M_0 \left(\sum_{s \in (t_0, t_0+dt)} \mathbf{I}_{\Gamma(0)}(\Delta \xi_s) \right)$$

münasibətini təyin edir və sıçrayışların orta intensivliyini və onların paylanması müəyyən edir. Bu təsviri bütün bircins olmayan (zaman üzrə) proseslər üçün də vermək olur.

Diffuzion proseslər. $\mathbb{R}^d$ -də diffuzion proseslər üçün infinitezimal xarakteristika: diffuziya matrisi $a_{ij}(x) \geq 0$, aparıcı vektoru $b_i(x)$ və öləmə əmsalı (rus. коэффициент убывания) $c(x) \leq 0$ ($\equiv 0$, qınılmayan proseslər üçün) kimi kəmiyyətlər toplusudur. Uyğun xarakteristik operator aşağıdakı kimidir:

$$\mathcal{U}f(x) = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + c(x)f(x).$$

Bu halda, $a(\zeta_t)dt$ matrisi artımın kovariasion matrisi mənasında anlaşılır, $b(\zeta_t)dt$ – artımın riyazi gözləməsi, $c(\zeta_t)dt$ – prosesin qınılmasının şərti ehtimalıdır (qınılma anı $\zeta > t$ şərtinə nəzərən).

Əd.: [1] Ч ж у н К а й - л а й, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Г и х м а н И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [3] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [4] И т о К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [5] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

MARKOV PROSESİ; keçid funksiyası «марковский процесс; переходная функция; Markov process; transition function» – bax, Keçid funksiyası.

MARKOV PROSESİ kvazihamar «марковский процесс квазигладкий; quasismooth Markov process» – bax, Kvazihamar Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ qarşılıqlı təsirli «марковский процесс с взаимодействием; interaction Markov process» – vəziyyətlər fəzası lokal tip bəzi xassələrli komponent – fəzaların sonsuz hasili olan Markov prosesidir. Prosesin komponentlərinin qiymətlərinin fəzasının sonlu X fəzası olduğu və prosesin komponentlərini parametrikləşdirən T çoxluğunun hesabı çoxluq olduğu ən sadə halda, vəziyyətlər fəzası X^T fəzasıdır (silindrik altı çoxluqların doğruduğu σ – cəbr ilə), odur ki, verilən anda prosesin qiyməti təsadüfi meydan olur. Diskret zamanlı və eyni zamanda kəsilməz zamanlı proseslərə baxılır (bax, [1], [3] və [1], [2], [3]).

Proses diskret zamanlı və zaman üzrə bircins olarsa, fərz olunur ki, keçid ehtimalı $P\{\cdot|x\}$, X^T -də *prodaktmədir*,

$x = (x_t, t \in T) \in X^T$. Bu zaman ən çox baxılan hallarda $T = \mathbb{Z}^d$ olur, burada $\mathbb{Z}^d$ – d – ölçülü şəbəkədir; adətən, fərz olunur ki, $x'_s, s \in \mathbb{Z}^d$ komponenti üçün $P\{\cdot|x\}$ ölçüsünün doğruduğu şərti birölçülü $P_s\{x'_s|x_s\}$ paylanmaları yalnız x_u -ların qiymətlərindən asılıdır ki, bunlar üçün $|u-s| \leq r$ bərabərsizliyi təmin olunsun, burada $r > 0$ asılılıq radiusu adlanan konstantdır (lokalıq xassəsi) və $\mathbb{Z}^d$ -də yerindəyişmələr üzrə təbii ifadə olunan translyasion invariantlıq şərti də ödənilir. Ən sadə qeyri-trivial misal Stavskaya modelidir ki, burada $T = \mathbb{Z}$, $X = \{0, 1\}$ və $0 < p_0 < 1$ şərtini ödəyən hər hansı p_0 qiymətində

$$p_s(1|x_s) = \begin{cases} 1, & x_s = x_{s+1} = 1 \text{ olduqda} \\ p_0, & \text{diger hallarda} \end{cases}$$

(məs., lampə s nöqtəsində p_0 ehtimalı ilə yanır və $1-p_0$ ehtimalı ilə digər lampələrdən asılı olmayaraq sönmür, lakin bu şərtlə ki, əgər baxılan lampədən sağdakı qonşu lampə yanarsa, o, lampənin sönməsi halı istisna olunur).

Kəsilməz zaman halında proses $\lambda\{x'_s|x\}$, $x'_s \neq x_s$ keçid sıxlıqlarının toplusu ilə təyin olunur və bunlar isə (aşkar sürətdə) infinitezimal ehtimalı, yeni digər komponentlərin verilmiş vəziyyətləri halında s -ci komponentin öz qiymətini x_s -dən x'_s -ə dt müddəti ərzində dəyişəcəyinin ehtimalını təyin edir.

Daha sonra yenidən fərz olunur ki, $T = \mathbb{Z}^d$ və lokalıq şərtləri:

$\lambda_s\{x'_s|x_u\}$ yalnız $|u-s| \leq r$ şərtini ödəyən x_u kompo-

nentlərindən asılıdır – şərtləri ödənilir. $X^{\mathbb{Z}^d}$ -də M. p.-ni limite keçid vasitəsilə təsvir etmək olur. Əvvəlcə vəziyyətlər fəzası sonlu X^{Q_n} olan, sıçrayışvari M. p.

$$\lambda(x'|x) = \begin{cases} \lambda_s(x'_s|x, \bar{x}_n), & \text{əgər } x, x' \in Q_n, x_u = x'_u, \\ & n \neq s, x_s \neq x'_s, s \in Q_n, \\ 0, & \text{diger cütlər üçün} \end{cases}$$

keçid ehtimalları vasitəsilə verilir, burada $Q_n = \{u \in \mathbb{Z}^d : |u| \leq n\}$. Belə prosesin keçid ehtimalları ardıcılığının $n \rightarrow \infty$

olduqda limiti vardır və bu limit $X^{\mathbb{Z}^d}$ -də λ ehtimalı M. p. təyin edir ki, o, $\bar{x}_n \in X^{\mathbb{Z}^d} \setminus Q_n$ şərtlə verilən $\bar{x}_n$ -dən asılı olmur.

Misallar: səsvermə prosesi, burada $X = \{0, 1\}$ və $\lambda_s\{x'_s|x_s\}$ $u \neq s$ indekslərinin sayına bərabərdir ki, $|u-s| \leq r$ və $x_u \neq x'_s$ şərtləri ödənilsin (səsverən şəxs əvvəl verdiyi qərarı əks qərara dəyişir, bu isə onun səsvermədə iştirak edən əks fikirdə olan qonşularının sayından asılı olduğundan edilir); kontaktlar prosesi, burada $X = \{0, 1\}$ və eger $x'_s = 0$ olarsa, $\lambda_s\{x'_s|x\} = \lambda$ olur, $\lambda\{x'_s|x\}$ isə yenə də $u \neq s$, $|u-s| \leq r$ şərtlərini ödəyən indekslərin sayına bərabərdir ki, $x'_s = 1$ olarsa, $x_u = 1$ olur (orqanizm dt müddəti ərzində sabit ehtimalla sağdır, xəstə qonşuların sayına mütənasib ehtimalla isə xəstələnir). Bəzi komponentlərin eyni zamanda dəyişməsi də mümkündür. Qadağalarlı proses belə prosesdir, burada $X = \{0, 1\}$ və $x_u = 1$ olması faktı hissəciyin

u pozisiyasında olması kimi interpretasiya olunur. Aydın şəkildə bu onu təsvir edir ki, hissəcik dt müddəti ərzində $p(s-u)dt$ ehtimalı ilə s pozisiyasından u pozisiyasına keçir, bu şərtlə ki, bu pozisiya artıq tutulmuş olmasın.

Qarşılıqlı təsirli M. p. nezeriyyesinin əsas tədqiqat obyekti prosesin stasionar (zaman üzrə) paylanmaları çoxluqlarının və onların cazibə oblastlarının təsviridir. Bu çoxluq həmişə qabarıq çoxluqdur, odur ki, onun rəqulyar təsadüfi meydanlar olan kənar nöqtələrini göstərmək kifayətdir. Burada yaranan situasiyalar olduqca rəngarəng olur, fəza keçidləri tipli hallar yaranır və model-lerin hər bir sinfi üçün fərdi araşdırma metodunun tətbiqi tələb olunur. Məs., Stavskaya modelində $x = (x_n = 1, n \in \mathbb{Z}^d)$ realizasiyasında toplanmış stasionar paylanma vardır. Lakin $0 < p_{cr} < 1$ şərtini ödəyən hər hansı p_{cr} və bütün $p < p_{cr}$ qiymətləri üçün hətta qeyri – trivial ekstremal stasionar paylanma da vardır. p_{cr} -in qiyməti aşkar şəkildə tapılmamışdır. Səsvərmə modelində $x_n \equiv 0$ və $x_n \equiv 1$ realizasiyalarında toplanmış iki qeyri – trivial stasionar vəziyyət vardır. $d=1, 2$ olduqda, digər belə vəziyyətlər yoxdur, $d \geq 3$ olduqda isə $0 < p < 1$ şərtini ödəyən p parametridən asılı qeyri – trivial translyasion – invariant stasionar paylanmalar ailəsi də vardır, belə ki, p $x_n = 1$ olması ehtimalıdır; $0 < p < 1$. Kontakt prosesində hər hansı $\lambda_d > 0$ və bütün $\lambda > \lambda_d$ üçün $x_n \equiv 0$ komponentində toplanmış qeyri – trivial stasionar paylanmadan başqa, digər bir qeyri – trivial paylanma da vardır, $\lambda < \lambda_d$ olduqda isə belə paylanmalar yoxdur. Qadağalarlı prosesdə əlavə $p(u) = p(-u)$ simmetriya şərtində yalnız Bernulli ölçüləri stasionar ölçülər olur.

Daha ümumi yanaşma çevrilən (zaman üzrə) M. p.-lərinin tədqiqində mümkündür, belə ki, bu halda stasionar paylanmalar sinfi prosesin keçid sıxlıq funksiyaları ilə aşkar ifadə olunan potensiallı Gibbs təsadüfi meydanları sinfi ilə üst-üstə düşür. Bu proseslər sinfi hələ 1963-də fiziki ədəbiyyatda daxil olunmuşdur və Qlauber modelləri adlandırılmışdır. Qarşılıqlı təsirli M. p.-ləri bioloji, kimyəvi, iqtisadi, ictimai təbii modellərin qurulmasında da tətbiq olunur.

Əd.: [1] Васильев Н. Б., Добрушин Р. Л., Пятецкий - Шапиро И. И., Советско-японский симпозиум по теории вероятностей – Хабаровск, 1969, Новосибир., 1969, с. 4–30; [2] Добрушин Р. Л., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, с. 57–66; [3] Ставская О. Н., Пятецкий - Шапиро И. И., «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20, с. 91–106; [4] Клаубер Р., «J. Math. Phys.», 1963, в. 4, р. 294–307; [5] Griffiths D., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 724; [6] Liggett T., Interacting particle systems, N. Y. – [a. o.], 1985; [7] Toom A. L., Vasilyev N. B., Kurduмов D. L., в кн.: Stochastic cellular system. Ergodicity, memory, morphogenesis, Manchester, 1988; [8] Spitzer F., «Lect. Notes in Math.», 1969, в. 89, р. 201–23.

MARKOV PROSESİ qayıdırlı « марковский процесс возвратный; recurrent Markov process » – bax, Qayıdırlı Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ; qərarların qəbulu « марковский процесс; принятия решений; Markov decision process » – bax, İdarəolunan Markov zənciri, İdarəolunan Markov prosesi, İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı.

MARKOV PROSESİ qırılan « марковский процесс обрывающийся; killed Markov process » – bax, Qırılan Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ qırılmayan « марковский процесс необрывающийся; nonkilled Markov process » – bax, Qırılma anı.

MARKOV PROSESİ; Levi sistemi « марковский процесс; система Леви; Markov process; Levi system » – bax, Levi sistemi Markov prosesi üçün.

MARKOV PROSESİ; limit teoremləri « марковский процесс; предельные теоремы; Markov process; limit theorems » – bax, Limit teoremləri Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESİ; limit teoremləri nisbətlər üçün « марковский процесс; предельные теоремы для отношений; Markov process; ratio limit theorems » – bax, Limit teoremləri Markov prosesində nisbətlər üçün.

MARKOV PROSESİ; lokal müddət « марковский процесс; локальное время; Markov process; local time of » – Markov prosesinin verilmiş vəziyyətdə olduğu anlar çoxluğunda təsadüfi zaman şkalasını təyin edən, Markov prosesinin məni olmayan additiv funksionalıdır. Viner prosesi üçün lokal müddət P. Levi tərəfindən [1]-də daxil olunmuş və araşdırılmışdır; biröclülü proseslərin daha geniş sinfini E. Boylan (E. Boylan, 1964) tədqiq etmişdir, standart proseslərin lokal müddətinin öyrənilməsinə [4] işlə başlanmışdır.

$\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$, – $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ vəziyyətlər fəzasında verilmiş qırılmayan standart proses olsun və fərz olunur ki, E_x çoxluğu vəziyyətlərin hər birinin doğurduğu birməqəvi çoxluq üçün rəqulyar olan bütün vəziyyətlərdən təşkil olunmuşdur. Onda hər bir $x \in E_x$ nöqtəsi üçün bu nöqtədə lokal müddət mövcuddur, yeni ζ prosesinin ele kəsilməz $L_t^x = L_t^x(\sigma)$ additiv funksionalı mövcuddur ki, bu funksional (ixtiyari başlanğıc vəziyyətində sanki yəqin) $\{t \geq 0: \zeta_t \neq x\}$ çoxluğunda artımlara malik olmur, lakin $t > 0$ olduqda P_x – sanki yəqin müsbət olur (bax, [4]).

Hər bir $x \in \mathcal{E}$ nöqtəsində lokal müddətin varlığı fərz olunarsa, aşağıdakı kimi qoyulmuş məsələ böyük maraq doğurur. Hansı şərtlər qoyulmalıdır ki, verilmiş vəziyyətdə olma müddətinin sıxlığı rolunu ifadə edə bilən L_t^x variantı mövcud olsun; vəziyyətdə olma müddətinin sıxlığı isə o mənada anlaşılır ki, bütün $B \in \mathcal{B}$ və $t \geq 0$ üçün

$$\int_0^t \mathbf{1}_B(\zeta_s) ds = \int_B L_t^x \zeta(dx) \quad (*)$$

bərabərliyi $\mathcal{B}$ -də ζ ölçüsü münasib seçildiyi halda ödənilir, burada $\mathbf{1}_B$, – B çoxluğunun indikator – funksiyasıdır. Məlumdur ki, əgər $\alpha > 0$ olduqda bütün Q -in α – ölçüləri (bax, Potensial nezeriyyesi Markov prosesi üçün) $\mathcal{B}$ -də verilmiş hər hansı σ – sonlu ζ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz və əgər $\psi(x, y) = M_x e^{-T(y)}$ $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ fəzasında Borel funksiyası

[burada $T(y)$, $-y$ nöqtəsinə ilk çatım anıdır] olarsa, (*) münasibətinin ödənilməsi təmin olunur. (*) münasibətinə L_t^x variantının seçilməsində normalaşdırıcı kimi baxmaq olar [normalaşmanın digər ən çox yayılmış üsulu (bax, [4]) $x \in E_r$ olduqda

$M_x \int_0^\infty e^{-t} dL_t^x = 1$ bərabərliyinin postulat kimi qəbul edilməsindən ibarətdir].

Birölçülü Viner prosesi halında L_t^x lokal müddətini (t, x) dəyişənləri toplusu üzrə kəsilməz hesab etmək olar (bax, [3]). ζ üçün lokal müddətin normalaşdırılmasının ikinci üsulu seçildikdə, $\mathcal{E} = E_r$ əvəzinə isə heqiqi oxun intervalı götürülür və

$$\int_0^1 p(u) u^{-1} du < \infty$$

şerti qoyulur, burada

$$p(u) = \sup_{|x-y| \leq u} [1 - \psi(x, y) \psi(y, x)]^{1/2}$$

(bax, [5]).

ζ qınlan proses olduğu hal baxılan hala analojiçdir.

Lokal müddət nəzəriyyəsi mühüm tətbiqlərlə məlumdur, məs., birölçülü diffuziyaların araşdırılmasında, $\{t \geq 0; \zeta_t = x\}$ şəklində sədlə təsadüfi çoxluqların tədqiqatında, burada x – prosesin qeyd olunmuş vəziyyətidir, additiv funksionalların integral ayrılışında (bax, [2], [8]). Viner prosesi halında lokal müddət nəzəriyyəsi müvəffəqiyyətlə tətbiq olunur (bax, [1], [2], [9]). Uyğun proseslərin trayektoriyalarının müxtəlif sadə funksionalları ilə lokal müddətin approksimasiya üsulları intensiv araşdırılmanın mövzusu (bax, [1]).

Ümumi ləşmələr. Yuxarıda verilmiş lokal müddət anlayışının bir çox ümumiləşmələrində (*) ifadəsinə istinad olunur. Əgər, məs., $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verilən hər hansı ζ Markov prosesi və ixtiyari $x \in \mathcal{E}$ üçün ξ ölçüsünün və $\mathcal{B}$ -nin münasib seçildiyi halında və bütün $B \in \mathcal{B}$ üçün kəsilməz (ola bilsin ki,) additiv L_t^x funksionalı göstərmək olarsa, onda L_t^x yenə də x nöqtəsində lokal müddət adlanır. Kəsilməz lokal müddətlərə aid misallar [5]-də şərh olunmuşdur. Oxşar tərifi Gauss prosesləri və meydanları üçün də verilir (bax, [6], [8]). [7] işi ilə lokal müddətin semimartinqallar nəzəriyyəsi çərçivəsində araşdırılmasına başlanmışdır.

«Lokal müddət» termini bezen aşağıdakı mənada istifadə olunur. Kifayət qədər hamar ∂D sərhəddli D oblastının hər hansı n -ölçülü, $n \geq 2$, $\mathcal{E}$ -nin qapayıcısında sərhəddə inikaslı diffuzion prosesin verildiyi fərz olunur (bax, *Markov prosesi; sərhəd şərti*). Onda geniş şərtlərlə sərhəddə lokal müddət mövcuddur, bu isə ζ -nin elə kəsilməz additiv L_t^x funksionalı kimi anlaşılır ki, bu funksional bütün $x \in \partial D$ üçün P_x – sanki yəqin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{-1} \int_0^1 1_{D_n}(\zeta_s) ds, \quad t > 0$$

limiti ilə üst-üstdə düşsün, bu şərtlə ki, $\rho_n \downarrow 0$ ədədləri münasib seçilsin, D çoxluğu, yalnız və yalnız, elə $x \in \mathcal{E}$ nöqtələrindən

təşkil olunsun ki, bu nöqtələrdən ∂D -yə olan məsafə ρ_n -i aşmasın.

Əd.: [1] Levy P., Processus stochastiques et mouvement brownien, 2 ed., P., 1965 (в рус. пер. – Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, М., 1972); [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Trotter H. F., «Ill. J. Math.», 1958, v. 2, p. 425–33; [4] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 50–74; [5] Gettoor R. K., Kesten H., «Composito math.», 1972, t.24, p.277–303; [6] Berman S. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 137, p. 277–99; [7] Meyer P.-A., «Lect. Notes Math.», 1975, v. 511, p. 245–400; [8] Geman D., Horowitz J., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, p.1–67; [9] Knight F. B., Essentials of Brownian motion and diffusion, Providence, 1981; [10] Насыров Ф. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1995, т. 40, в. 4, с. 798–812.

MARKOV PROSESI; mərkəzi limit teoremi «марковский процесс; центральная предельная теорема; **Markov process**; central limit theorem» – bax, *Mərkəzi limit teoremi* Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESI; mütləq paylanma «марковский процесс; абсолютное распределение; absolute probabilities of a **Markov process**» – bax, *Mütləq paylanma(sı)* Markov zənciri və ya Markov prosesinin.

MARKOV PROSESI normal «марковский процесс нормальный; normal **Markov process**» – bax, *Sifr – vahid qanunu* Markov prosesləri üçün, *Qınılma anı*.

MARKOV PROSESI; rezolvent «марковский процесс; резольвента; **Markov process**; rezolvent» – bircins *Markov prosesinin* keçid funksiyasının Laplas çevirməsidir. $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ – bircins M. p., $p(t, x; \Gamma) = P_x(\zeta_t \in \Gamma)$ – onun keçid funksiyası olsun. Fərz olunur ki, $\zeta_t(\omega)$ prosesi t və ω argumentlər çoxluğu üzrə ölçülən prosesdir (məs., proses t üzrə sağdan kəsilməz olduqda belə olur). Onda $p(t, x; \Gamma)$ funksiyası t, x üzrə ölçülən funksiyadır və rezolventi

$$r_\lambda(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x; \Gamma) dt, \quad \lambda > 0$$

düsturu ilə təyin olunur. $r_\lambda(x, \Gamma)$ funksiyaları nüvədirler, yeni Γ qeyd olunduqda x üzrə ölçülən, x qeyd olunduqda Γ üzrə (sonlu) ölçüləndirler. r_λ nüvələri ilə R_λ operatorları

$$R_\lambda f(x) = \int_E r_\lambda(x, dy) f(y) = M_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\zeta_t) dt$$

düsturu ilə əlaqələnilir, burada $\xi = \xi(\omega)$, – ζ prosesinin qınılma anıdır (qınılmayan proses üçün $\xi = \infty$).

r_λ rezolventi aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\| \lambda R_\lambda f \| \leq \| f \|$, $\lambda > 0$, burada $\| f \| = \sup |f(x)|$; qınılmayan proseslər üçün $\lambda R_\lambda 1 \equiv 1$;

b) $R_\lambda = R_\mu + (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$, $\lambda, \mu > 0$ (rezolvent tənliyi).

a) və b) şərtlərini ödəyən $r_\lambda(x, dv)$ nüvələrinin ixtiyari ailəsinə uyğun keçid funksiyası p (və ζ M. p.) həmişə mövcud olmur. Əgər $\mathcal{E}$ metrik kompakt olarsa, r_λ nüvələrinin ailəsi də Rey rezolventini əmələ gətirərsə (o cümlədən, bu onu ifadə edir ki, R_λ operatorları kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirir), onda r_λ nüvələri ailəsi sağdan kəsilməz ciddi hər hansı M. p.-nin rezolventidir.

r_λ rezolventi ζ prosesinin infinitezimal A operatoru ilə $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ (I – eynilik operatorudur) münasibəti ilə və ya məhdud ölçülən f funksiyalar üçün $AR_\lambda f - \lambda R_\lambda f = f$, $\lambda > 0$ bərabərliyi ilə əlaqələnilir. Ciddi M. p. üçün

$$M_x e^{-\lambda t} R_\lambda f(\zeta_t) - R_\lambda f(x) = -M_x \int_0^t e^{-\lambda s} f(\zeta_s) ds$$

münasibəti doğrudur (Dinkin düsturu).

Trayektoriyaların reqlulyarlıq xassələri rezolvent terminləri ilə rahat ifadə oluna bilər (bax, *Sağ Markov prosesi*). Rezolvent Martin sərhədlərinin qurulmasında, proseslərin sərhədlərdə davranışının araşdırılmasında, dual M. p.-lərinin tədqiqində vasitələrdən biridir. Rezolventin belə rolu $z_t = R_\lambda f(\zeta_t)$.

$t \geq 0$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı xassələri ilə bir qədər izah olunur:

1) z_t biricins prosedir, yəni $z_{t+s}(\omega) = z_t(\theta_s, \omega)$, burada θ_s – yerindəyişmə operatorudur;

2) $e^{-\lambda t} z_t, -\mathcal{A}_t \sigma$ – cəbrlərinə nəzərən supermartinqaldır.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getto R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV PROSESİ sağ «марковский процесс; правый, right Markov process» – bax, *Sağ Markov prosesi*.

MARKOV PROSESİ; sərhəd şərti «марковский процесс; граничное условие; Markov process; boundary condition» – n – ölçülü ($n \geq 1$) oblastın sərhədində verilən *Markov prosesinin* infinitezimal operatorunun təyin olunma oblastından olan olduqca hamar, bu oblastın qapayıcısında funksiyaların ödədiyi şərtidir. Baxılan prosesin, adətən, biricins olduğu və oblastdan çıxışa qədər özünü müəyyən diffuzion proses kimi apardığı fərz olunur, ümumi halda isə onun trayektoriyalarının sərhəddə olduğu anlarda sıçrayışlarının ola biləcəyi və sərhəddə qalmaması hallarının da mümkünlüyü fərz olunur. Birölçülü hal [1] məqaləsindən başlayan silsilədə V. Feller tərəfindən araşdırılmışdır. Çoxölçülü hallarda oxşar araşdırılmanın təşəbbüskarı A. D. Ventsel olmuşdur.

$n \geq 2$ olduqda sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi yaranır. Olduqca yaxşı ∂D sərhədinə malik olan n – ölçülü D oblastının qapayıcısı $\bar{D}$ -də

$$Au(x) = a^{-1}(x) \sum_{i,j=1}^n [a^{ij}(x) a(x) u'_{x_j}(x)]'_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u'_{x_i}(x) + c(x) u(x)$$

elliptik operatoru verilir, burada $u(x)$ – olduqca hamar funksiyadır, $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ əmsalları da özlerini reqlulyar kimi aparır. $c(x) \leq 0$, $\mathcal{A} = \|a^{ij}(x)\|$ matrisi isə simmetrik və müsbət müəyyən matrisdir, $a(x) = \det^{-1/2} \mathcal{A}$. $\bar{D}$ -də yuxarıda qeyd olunmuş tip Feller prosesinin varlığı fərz olunur; bu prosesin isə D oblastında hər hansı diffuzion prosesin davamı olduğu (bax, *Markov prosesi; davamı*), bu diffuzion prosesin infinitezimal operatorunun isə D -də olduqca hamar funksiyalarda $\mathcal{A}$ operatoru ilə üst-üstə düşdüyü fərz olunur. Onda $\bar{D}$ -də hamar olan, $\bar{D}$ -də prosesin infinitezimal operatorunun təyin olunma oblastına daxil olan hər bir $u(x)$ funksiyası üçün (bax, [3]) $Lu(x) = 0$, $x \in \partial D$ sərhəd şərti ödənilir; bu şərt Ventsel şərti adlanır. Burada

$$Lu(x) = \mathcal{B}u(x) + \alpha(x)u(x) + \beta(x)Au(x) - \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \mathcal{K}u(x), \quad x \in \partial D, \quad (*)$$

$\mathcal{B}$ hər hansı ola bilər ki, çirlişən, elliptik tip operator, $\mathcal{K}$ – xüsusi strukturlu integral operator, $\alpha, \beta, \gamma, -\partial D$ -də verilən,

müsbət olmayan funksiyalar, $\frac{\partial u}{\partial n}, -\partial D$ -yə daxili normal

istiqamətində təoremdir.

$\mathcal{B} \equiv 0$ və $\mathcal{K} \equiv 0$ olduqda (*) şərti xüsusi təoremlə tenliklər nəzəriyyəsinə yaxşı məlum olan şəkildə alır. $\mathcal{K} \equiv 0$ halında, yeni

prosesin $\bar{D}$ -də kəsilməz olduğu halda (*) şərtini belə interpretasiya etmək olar: D -də diffuziya edən hissəcik, ∂D sərhədində olaraq, dayana bilər, yox ola bilər, sərhəddən əks oluna bilər və ya müəyyən müddət ərzində sərhəddə dolaşa bilər, bu hərəkətin müəyyən kombinasiyalarında ola bilər, əgər hissəcik hərəkətdədirsə və yox olmamışdırsa, onda o, D oblastına qayıdır, sonra isə yenidən sərhəddə daxil olur və s. Əgər (*) sərhəd şərti $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$, $x \in \partial D$ münasibətləri şəklində ifadə olunarsa,

onda $\bar{D}$ -də ona uyğun proses D -də sərhəddə əks olunan diffuzion proses adlanır.

A operatoru və (*) sərhəd şərtinə görə $\bar{D}$ -də uyğun M. p.-nin qurulması tərs məsələsi də böyük maraq doğumuşdur (bax, [4], [5] – [7]).

Bütün qeyd olunan problemlər ixtiyari şəkildə M. p.-lərinin mümkün davamlarının təsviri məsələlərində daha ümumi cəhətdən də araşdırıla bilər (bax, *Markov prosesi; davamı*).

Bax, *Birölçülü diffuziya*.

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Вентцель А. Д., «Докл. АН СССР», 1956, т. 111, с. 269–72; [3] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 172–85; [4] Вентцель А. Д., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, с. 202–04; [5] Уено Т., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1967, v. 2, pt 2, p. 111–30; [6] Kunita H., «J. Math. Kyoto Univ.», 1970, v. 10, p. 273–335; [7] Silverstein M. L., «Lect. Notes Math.», 1976, № 516.

MARKOV PROSESİ sıçrayışvari «марковский процесс; скачкообразный; Markov jump process» – bax, *Sıçrayışvari Markov prosesi*.

MARKOV PROSESİ; sıfır-vahid qanunu «марковский процесс; закон нуль-единица; Markov process; zero-one law» – bax, Sıfır-vahid qanunu Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESİ standart «марковский процесс стандартный; standard Markov process» – bax, Standart Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ stasionar «марковский процесс стационарный; stationary Markov process» – bax, Stasionar Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ; statistik məsələlər «марковский процесс; статистические задачи; Markov process; statistical problems» – bax, Statistik məsələlər(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

MARKOV PROSESİ şərti «марковский процесс условный; conditional Markov process» – bax, Şərti Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ topoloji qayıdışlı «марковский процесс топологически возвратный; topologically recurrent Markov process» – bax, Qayıdışlı Markov prosesi.

MARKOV PROSESİ; trayektoriyaların daxili xassələri «марковский процесс; внутренние свойства траекторий; Markov process; intrinsic properties of paths» – yalnız Markov prosesi trayektoriyalarının keçdiyi nöqtələr çoxluğundan və zaman üzrə trayektoriyaların bu keçidləri qaydasından asılı trayektoriyaların xassələridir. Daha dəqiq, fərz olunur ki, sağ Markov prosesi $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasından qiymətlər alır. $\omega_1(t) \equiv \zeta_t(\omega_1)$ və $\omega_2(t) \equiv \zeta_t(\omega_2)$ – trayektoriyalardır, burada $t \geq 0$, ω_1 və $\omega_2 \in \Omega$, ω_1, ω_2 – elementar hadisələr, Ω – elementar hadisələr fəzasıdır; eger ele kəsilməz birqiymətli $\varphi: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ inikası varsa ki, $\omega_2(\cdot) \equiv \omega_1(\varphi(\cdot))$ münasibəti $[a_2, b_2]$ -də ödənilsin, onda $[0, \infty)$ -un $[a_1, b_1]$ və $[a_2, b_2]$ zaman intervallarında $\omega_1(t)$ və $\omega_2(t)$ trayektoriyaları bir-birinə ekvivalent hesab olunur. Əgər $\zeta_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ trayektoriyasının hər hansı xassəsi ona ekvivalent olan bütün trayektoriyalara xas olarsa, bu xassə trayektoriyaların daxili xassəsi adlanır (misal: trayektoriyaların hər hansı qeyd olunmuş vəziyyətlər çoxluğunda və ya belə bir neçə çoxluqda verilmiş qaydada olmasından ibarət xassə).

[4]-də təklif olunmuş formada (bax, həm də, [5]) Çekon-Cemison teoreminə hökm olunur: fərz olunur ki, $\mathcal{E}$ -də ζ prosesinin ləngidici vəziyyətləri, yəni t -nin bütün olduqca kiçik $t > 0$ qiymətlərində P_x – sanki yəqin $\zeta_t(\omega) = x$ olan x nöqtələri yoxdur. Onda verilən prosesin ilkin paylanması ixtiyari olduqda, ehtimalı sıfıra bərabər olan ele $\Omega_1 \subset \Omega$ ölçülən çoxluğu vardır ki, eger $\omega_1, \omega_2 \notin \Omega_1$ və $\zeta_t(\omega_1), \zeta_t(\omega_2)$ trayektoriyaları hər hansı $[a_1, b_1]$ və $[a_2, b_2]$ zaman intervallarında ekvivalent olarsa, onda $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ olur. Başqa sözlə: eger ω_1 və ω_2 göstərilən qayda ilə

seçilmişsə, onda $\zeta_t(\omega_1)$ trayektoriyasının hər bir hissəsi $a_1 \leq t < b_1$ olduqda ikinci trayektoriyanın uyğun trayektoriyası kimi «eyni sürətlə keçilir», yəni trayektoriyaların bu və ya digər hissələrinin «keçmə qaydasını» onun daxili xassələrinə aid etmək olar.

Qınlan M. p.-ləri halı da analoji qaydada izah olunur. Qeyd olunan teorem bir-birindən ya zamanın təsadüfi əvəz olunması, ya təsadüfi əvəzləmə və yox edilməsi ilə alınan M. p.-ləri cütünü xarakterizə edən nəticələri ümumiləşdirməyə imkan yaratmış oldu (bax, Markov prosesi; çevirmələr).

Əd.: [1] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y., 1968; [2] Chacon R. V., Jamison B., «Israel J. Math.», 1979, v. 33, p. 241–69; [3] Chacon R. V., Jamison B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 58, S. 169–82; [4] Le Jan Y., «Adv. Math.», 1981, v. 42, p. 136–42; [5] Walsh J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 68, S. 9–28.

MARKOV PROSESİ vəziyyətləri çoxluğu hesabi «марковский процесс со счетным множеством состояний; Markov process with a countable/denumerable state space» – hesabi $\mathcal{E}$ çoxluğundan (fəza fəzasından) qiymətlər alan kəsilməz zamanlı, qırılmayan Markov prosesi ζ -dir. Bu anlayış ilk dəfə 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən vəziyyətlər çoxluğu sonlu $\mathcal{E}$ olan M. p.-nin təbii ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur (bax, [1]). Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsində, emeliyyatların tədqiqində, fizikada, biologiyada texnoloji proseslərin təsvirində geniş surətdə tətbiq olunur. Puasson prosesi, doğum və ölüm prosesi belə proseslərdəndir.

Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p.-ləri nəzəriyyəsinin ilkin anlayışları vəziyyətləri çoxluğu sonlu Markov proseslərindən yalnız onunla fərqlənir ki, $i, j, \dots$ indeksləri sonlu sayda deyil, hesabi sayda qiymətlər alır. Bu – keçid ehtimalları $p_{ij}(s, t)$ [bircins halda $p_{ij}(t)$], keçid matrisi $P(s, t)$ [və ya $P(t)$], Markov xassəsi, Kolmoqorov – Çepmen tənliyi üçün, Kolmoqorov teoremi əsasında $P_{s,x}$ (və ya P_x) ölçülərinin qurulmasında, t anında mütləq paylanma düsturunda, q_i çıxış və q_{ij} keçid ehtimallarının sıxlıqları anlamı üçün də, düz və tərs Kolmoqorov differensial tənlikləri üçün də belə anlaşılır. Vəziyyətlər çoxluğunun hesabi olması spesifikasi özünü sonlu halda həmişə doğru olan infinitesimal xarakteristikalar üçün münasibətlərin pozulmasında, Kolmoqorov differensial tənliklər sisteminin həllinin yeganə olmasında və ya keçid ehtimalları üçün bunların doğru olmasında, trayektoriyaların qeyri – adiliyində biruzə verir. Əvvəllər «patoloji» kimi qəbul edilən misalların öyrənilməsi vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p.-ləri nəzəriyyəsinin inkişafı üçün stimullaşdırıcı oldu.

Hesabi, qeyri – bircins halda tərs Kolmoqorov differensial tənliklər sisteminin ödənilməsi üçün:

1)

$$q_i(t) = -q_u(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_u(t, t+h)}{h}, \quad i \in \mathcal{E} \quad (1)$$

çıxış ehtimalları sıxlıqlarının kəsilməz və (1)-də yığılma hər bir i qiymətində t üzrə müntəzəm olmalı;

2)

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h}, \quad i \neq j \in \mathcal{E} \quad (2)$$

keçid ehtimalları sıxlıqlarının kəsilməz və (2)-də yığılma ixtiyari i, j üçün t üzrə müntəzəm olmalı;

3)

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty, \quad i \in \mathcal{E} \quad (3)$$

şerti ödənilməlidir.

Düz Kolmoqorov differensial tənliklər sistemi üçün əlavə olaraq fərz olunur ki, (2)-də yığılma hər j qiymətində i üzrə müntəzəm olsun (bax, [1], [4]).

Vəziyyətləri çoxluğu hesabı bircins M. p.-ləri nəzəriyyəsi ən inkişaf edilmiş hesab olunur; bu nəzəriyyənin əsasları [2] – [5]-də qoyulmuşdur. Vəziyyətlərin sayı hesabı olduğu halda başlanğıc şərtləri

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (4)$$

olan,

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum p_{ij}(t) = 1 \quad (5)$$

teleblərini ödəyən

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad s \geq 0, t \geq 0, i, j \in \mathcal{E} \quad (6)$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliklərinin həlli ölçülən olmaya da bilər. Bütün $p_{ij}(t)$ funksiyalarının Lebeq mənaada ölçülənliyi onların ixtiyari (s, ∞) , $s > 0$ intervalında müntəzəm kəsilməzliyinə ekvivalentdir, həm də, ola bilər ki, (4)-dən fərqli olan $p_{ij}(+0)$ limitlərinin varlığına ekvivalentdir. Keçid ehtimalları ölçülənliyi fərziyyəsi alternativ hala:

$$p_{ij}(t) \equiv 0, t > 0 \quad \text{və ya} \quad p_{ij}(t) > 0, t > 0 \quad (7)$$

münasibətlərinə gətirir. Bütün sonrakı nəzəriyyə qurularkən

$$p_{ij}(+0) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{E} \quad (8)$$

fərziyyəsi qəbul olunur ki, bu da (4)-ün, həm də ölçülənlik telebinin güclənməsini təmin edir; (8) şərtini ödəyən

$P(t) = \| p_{ij}(t) \|$ keçid matrisləri standart matrislər adlanır.

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j \in \mathcal{E}$$

sonlu limitləri və sonlu və ya $+\infty$ -a bərabər

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii} = q_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{E} \quad (9)$$

limitləri mövcuddur,

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i \quad (10)$$

bərabərsizliyi də doğrudur.

Misallardan aydın olur ki, q_i -nin sonsuzluğa bərabər olması və (10)-da bərabərlik halının pozulması həqiqətdə mümkündür.

M i s a l 1. $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$, $q_1 = \infty$, $q_{1j} = 1$ ($j \geq 2$),

$q_i = q_{i1} > 0$, ($i \geq 2$) və

$$\sum_{i=2}^{\infty} q_i^{-1} < \infty, \quad (11)$$

və bütün digər q_{ij} -lərin 0 olduğu verilir. Aydındır ki, 1 vəziyyə-tindən digər vəziyyətlərə və tərsinə sonsuz sayda sıçrayışlar çox kiçik zaman ərzində baş verir (hər bir qeyd olunmuş $j \geq 2$ vəziyyətinə sıçrayışlar sayı sonludur). (11) şərtinə əsasən uyğun $p_{ij}(t)$ keçid funksiyaları qurulur.

M i s a l 2. $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $i \geq 2$ olduqda $q_i = q_{i,i-1} > 0$, $q_1 = 0$, $q_0 = 1$ digər q_{ij} -lər $q_{ij} = 0$ olur və (11) şərti ödənilir. Burada $q_0 > q_{01} + q_{02} + \dots = 0$. (11) şərti ödənilmədiyindən sistem sonlu zaman ərzində $\dots, i, \dots, 2, 1$ vəziyyətlərinin sonsuz zəncirini ardıcıl keçə bilər. 1 vəziyyətində udulma baş verir. 0 vəziyyətindən isə 1 intensivliklə bu zəncirin sonsuz uzaq başlanğıcına sıçrayış olur.

M i s a l 3. Burada sadəlik üçün (5)-də bərabərlik tələb olun-mur (proses qırıla bilər). $\mathcal{E}$ bütün r_i , $i \geq 1$ rəşional ədədlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür, sistem bu vəziyyətlərdə $-\infty$ -dan $+\infty$ -a qədər artan qaydada olur. Belə proses (11) şərtində mümkündür. Burada $i \neq j$ olduqda bütün q_{ij} -lər $q_{ij} = 0$ olur, bütün q_i -lər isə $q_i > 0$ və sonludur.

$q_i < \infty$ şərtini ödəyən i vəziyyətləri d a y a n ı q l ı, $q_i = \infty$ şərtini ödəyən i vəziyyətləri a n i vəziyyətlər adlanır.

(3) şərtini ödəyən $Q = \| q_{ij} \|$ infinitezimal matrisləri k o n s e r - v a t i v matrislər adlanır. Ani vəziyyətləri olan proses üçün Kolmoqorov differensial tənliklər sistemi öz mənasını itirmiş olur.

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} q_{ik} p_{kj}(t), \quad t \geq 0, i, j \in \mathcal{E} \quad (12)$$

tərs sisteminin doğruluğu üçün Q matrisinin konservativ matris olması zəruri və kafidir. Hətta Q matrisi konservativ olduqda belə

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad t \geq 0, i, j \in \mathcal{E} \quad (13)$$

düz sistemi mümkün olmaya da bilər və $p_{ij}(t)$ ehtimalları $Q = P'(0)$ matrisi ilə birqiymətli təyin olunmaya bilər, lakin (12) və (13) düsturları bunlarda $=$ işarəsi $\geq$ işarəsi ilə əvəz olunduqda həmişə doğrudur. q_i sıxlıqlarının məhdudluğu halında qeyd olunmuş «patologiyalar» istisnadır, sonlu saylı vəziyyətlər halı ilə tam analogiya müşahidə olunur. İsbat olunur ki, $p'_{ij}(0) = -q_i$ tələmlərinin məhdudluğu telebi aşağıdakı

şərtlərdən ixtiyari birinə ekvivalentdir: 1) $t \downarrow 0$ olduqda $p_{ii}(t) \rightarrow 1$ i -yə görə müntəzəm yığılmadır, 2) (9)-da limite yaxınlaşma i -yə görə müntəzəmdir. $p_{ij}(t)$ keçid funksiyaları $t > 0$ olduqda differensiallanandılar (bax, [6] – [9]). $p'_{ij}(t)$ tələmləri, $q_i = \infty$ olduqda, ola bilər ki, $t = 0$ nöqtəsində p'_{ii} istisna olmaqla, hər yerdə kəsilməzdir (bax, [10]). $t > 0$ olduqda ikinci tərtib $p''_{ij}(t)$ tələməsi ∞ ola bilər (bax, [8]), $t > 0$ olduqda $\mu_i(t) = P\{\zeta_t = i\}$ mütləq ehtimalları differensiallanmayan da ola bilər (bax, [11]). Belə bir hipotez söylənilmişdi ki, prosesin bütün vəziyyətləri ani vəziyyətlər ola bilməz (bax, [5]). Bunu inkar edən misallar asılı olmadan qurulmuşdur

(bax, [12] və [13]). Ani vəziyyətləri misalları ([17]-də) konstruksiyaları etrafı araşdırılmışdır; $q_i \equiv \infty$ olan bütün mümkün Q matrisləri tamamilə təsvir olunmuşdur. Keçid ehtimalları $p_{ii}(t)$ və $p_{ij}(t)$ ilə birləşən $f(t)$, $t \geq 0$ funksiyalarının xarakterizasiyası alınmışdır (bax, [21]).

ζ – separabel proses, $S_i(\omega) = \{t: t \geq 0, \zeta(t, \omega) = i\}$, – $i \in \mathcal{E}$ vəziyyətində qalma çoxluqları (rus. множества пребывания) olsun. Dayanıqlı i vəziyyəti üçün S_i çoxluğu, sanki yəqin, bir-birilə ümumi sərhəd nöqtələrinə malik olmayan $S_i^1, S_i^2, \dots$ intervallarından ibarətdir; bunların son ucları $\tau_i^1 < \tau_i^2 < \dots$ i vəziyyətinə birinci, ikinci və s. keçmə anları adlanır. Bütün S_i^m -lərin uzunluqları bir-birindən və prosesin digər vəziyyətlərindən asılı deyildir və bunlar $P\{|S_i^m| > t\} = \exp(-q_i t)$ eksponensial qanunu ilə paylanır. Hər bir dayanıqlı i vəziyyəti üçün belə intervalların sayı ixtiyari sonlu zaman parçasında sanki yəqin sonludur. i ani vəziyyət olduğu halda S_i çoxluğu sanki yəqin heç yerdə sıx deyildir; lakin ixtiyari $t > 0$ üçün $\zeta_t = i$ olduqda

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes}\{S_i \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)\} = 1$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur [$t = 0$ olduqda, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervalı $(0, 2\varepsilon)$ ilə əvəz olunmalıdır]. i ani vəziyyəti üçün bu vəziyyətə keçmə anlarından yalnız $\tau = \inf\{t: t \in S_i\}$ – birinci keçmə anı təyin olunmuşdur; i vəziyyətinə ikinci və s. keçmə anları bu halda təyin olunmur. Separabel proses halında, ümumiyyətlə, fiktiv vəziyyətlərdən istifadə olunur. Məs., misal 3-də hər bir realizasiya üçün t qiymətlərinin sanki yəqin ələ hesabı çoxluğu vardır ki, bu anlarda proses x_t vəziyyətlərindən heç birində olmur; yəni bu çoxluq ζ_t -nin irrasional nöqtələrində ötürmə anları çoxluğudur; bu çoxluq S_i -lərin açıq çoxluqları olduğu fərz olunduqda əsl Kantor çoxluğuna oxşardır. Ən sadə üsul (əgər tərsi nəzərdə tutulmursa, aşağıda təfərratlı olunan) yeganə fiktiv vəziyyət ∞ ilə kifayətlənməkdir, bu halda bu vəziyyətin artan indeksli $\{i_k\}$ vəziyyətlərinin ixtiyari ardıcılığının limiti olduğu fərz olunur. S_∞ – vəziyyətdə qalma çoxluğunun Lebeq ölçüsü sanki yəqin sıfıra bərabərdir. $t > 0$ olduqda $p_{i\infty}(t) = 0$ götürmək olar, $p_{\infty i}(t)$ ehtimalları isə, ümumiyyətlə, heç bir mənə daşımır [misal 3-də bütün irrasional ədədlərə müvafiq fiktiv α vəziyyəti üçün, lakin yeganə $\alpha = \infty$ üçün deyil, $p_{\alpha i}(t)$ ehtimalları təyin etmək ağırlıqlandır].

Trayektoriyaların ixtiyari $t \geq 0$ kəsilmə nöqtəsində $s \downarrow t$ olduqda (həm də, əgər $t > 0$ olarsa, $s \uparrow t$ olduqda) aşağıdakı alternativlərdən biri sanki yəqin doğrudur: 1) $\zeta_s \equiv i$, i – dayanıqlı vəziyyətdir; 2) $\zeta_s \rightarrow \infty$ (ola bilər ki, ∞ fiktiv qiymətini də alaraq); 3) ζ_s -in yalnız iki limit nöqtəsi: i və ∞ vardır, burada i ani vəziyyətdir.

Vəziyyətləri çoxluğu hesabı M. p. üçün ciddi Markov xassəsi tam olaraq doğru deyildir; bu xassə yalnız $\zeta_t \neq \infty$ şərtini ödəyən

τ dayanma anları üçün, həm də dayanıqlı i vəziyyətdən ilk çıxış anları $-\rho_i(\omega) = \inf\{t: t \geq 0, \zeta_t \neq i\}$ üçün doğrudur (bax, [8], [15]). Faza fəzası $\mathcal{E}$ -nin ele kompaktifikasiyası mümkündür ki, bu zaman sağdan kəsilməz ciddi M. p. qurulur, bu prosesin $\mathcal{E}$ -də izi ilkin ζ prosesi olmalıdır, lakin bu halda intuisiyanın tərzindən olduqca çox fiktiv vəziyyətlər daxil olunur (bax, [18]). q_i sıxlıqları məhdud olduğu halda sağdan kəsilməz ciddi M. p.-nin alınması üçün fiktiv vəziyyətlərə ehtiyac olmur.

Kolmoqorov düz və tərs differensial tənliklərinin doğruluğu üçün zəruri və kafi şərtlər trayektoriyaların kəsilməliyi terminləri ilə verilir (bax, [15]). Verilən i və bütün j -lər üçün (12) tənlikləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudurlar ki, i dayanıqlı vəziyyətdir və i vəziyyətindən başlayan trayektoriyaların ilk qınılması sanki yəqin hər hansı k vəziyyətinə sıçrayışdır (yəni $t \downarrow \rho_i$ olduqda, ya $\zeta_t \equiv k$, k isə dayanıqlı vəziyyətdir və ya ζ_t -nin iki limit nöqtəsi: k ani vəziyyəti və ∞ limit nöqtələri vardır). Verilən j və bütün i -lər üçün (13) tənlikləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, j dayanıqlı vəziyyətdir və hər bir $t > 0$ qiymətində $\zeta_t = j$ şərti ödənildikdə trayektoriyaların t anından əvvəlki qınılması ∞ -dan j vəziyyətinə 1-ə bərabər şərti ehtimalla sıçrayışa səbəb olmur (yəni ani k vəziyyətindən sıçrayış ehtimalı sıfıra bərabər olduğundan dayanıqlı k vəziyyətindən j -yə sıçrayış olur). Belə nəticə alınır ki, hər iki (12) və (13) sistemləri bütün i və j -lər üçün, yalnız və yalnız, o halda doğrudurlar ki, bütün vəziyyətlər dayanıqlı olsun və ixtiyari başlanğıc vəziyyətində trayektoriyalar sanki yəqin aşağıdakı xassəyə malik olsunlar: əgər $t \downarrow s$ olduqda $\zeta_t \rightarrow \infty$ olarsa, onda $t \uparrow s$ olduqda $\zeta_t \rightarrow \infty$ olur və əksinə.

ζ prosesinin $P'(0) = Q$ şərtini ödədiyi fərz olunur, burada Q – verilən matrisdir və $0 \leq q_{ij} < \infty$, $i \neq j$, $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq -q_{ii} = q_i \leq \infty$. Əgər bütün q_i -lər sonlu olarsa, onda $\bar{P}(0) = \mathbf{I}$, $\bar{P}'(0) = Q$ şərtlərini ödəyən $\bar{P}(t) = [\bar{p}_{ij}(t)]$ matrislərinin minimal semistoxastik semi – qrupu vardır. p_{ij} ədədləri i vəziyyətindən j vəziyyətinə t müddətli ərzində sonlu sayda sıçrayışla keçid ehtimalları kimi anlaşılır [$P'(0) = Q$ şərti ilə verilən ixtiyari ζ prosesi üçün]. $\bar{p}_{ij}(t)$ funksiyaları hər iki – (12) və (13) sistemlərini ödəyirlər. Əgər

$$\sum_j \bar{p}_{ij}(t) = 1, \quad t > 0, \quad i \in \mathcal{E}$$

olarsa, onda $\bar{P}(t)$ semi – qrupu $P(0) = \mathbf{I}$, $P'(0) = Q$ şərtlərini ödəyən yeganə stoxastik (həm də yeganə semistoxastik) semi – qrupdur. $\bar{p}_{ij}(t)$ funksiyaları (4) başlanğıc şərtlərində (12) və (13) sistemlərinin yeganə həlli olur; bu halda Q matrisi hök-mən konservativ matrisdir. Digər tərəfdən, əgər Q konservativ matris olarsa, $\bar{p}_{ij}(t)$ minimal həlli stoxastik olmazsa, onda son-suz sayda çoxlu müxtəlif $P(t)$ stoxastik semi – qrupları vardır ki, bunlar üçün $P'(t) = Q$. Bunların hamısı Kolmoqorov düz differensial tənliklər sistemini deyil, tərs sistemi ödəyirlər. Bütün bu proseslərin təsviri üçün çıxış – sərhəd, həm də, əgər varsa, giriş –

serhədın əvvəlcədən qurulması tələb olunur (misal 2-də giriş-serhəd birçə ∞ nöqtəsindən ibarətdir). Sonra çıxışlar $\mathcal{E}$ -dən vəziyyətlərlə və ya serhəd şərtlərinin vasitəsilə girişlərlə «calaşdırılır» (bax, *Markov prosesı*; *serhəd şərti*). Çıxış-serhəd sonlu olduğı halda və yalnız bu halda müəyyən dərəcədə aydın bir konstruksiya alınır (bax, [19], [20]).

Vəziyyətləri çoxluğu hesabı M. p. ζ -nın vəziyyətinin təsnifatı və ζ prosesinin zaman üzrə diskret $Y(n) = \zeta(nh)$, $h > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ yaxınlaşmasına keçməklə və ya bilavasitə kəsilməz zamana keçməklə aparmaq olar. Markov zənciri Y -in vəziyyətlərinin təsnifatı (bax, *Markov zənciri*; *vəziyyətlərin təsnifatı*) h -dan asılı deyildir və birinci yanaşmada, tərifə görə, ζ prosesinə də şamil olunur. (7) alternativinə görə vəziyyətlərin mühüm sinifləri tsiklik altısiniflərə ayrılır. İkinci yanaşmada i -dən j -yə ilk keçmə anları $\tau_{ij} = \inf \{t : t > \rho_i, \zeta_t = j \text{ və ya } t = \infty\}$ kimiyyətləri (τ_{ij} - i vəziyyətindən çıxan prosesin yenidən i vəziyyətinə ilk qayıdış anı adlanır), bu təsadüfi kimiyyətlərin paylanması və orta qiymətləri də daxil olunur; yeni

$$F_{ij}(t) = P_i \{ \tau_{ij} < t \}$$

paylanma funksiyaları,

$$m_{ij} = M_i \tau_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty t dF_{ij}(t), & \text{əgər } F_{ij}(+\infty) = 1 \text{ olarsa,} \\ +\infty, & \text{əgər } F_{ij}(+\infty) < 1 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

riyazi gözlemləri. Əgər hər hansı $t > 0$ üçün $F_{ij}(t) > 0$ olarsa, i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid mümkündür və bu halda j - i vəziyyətindən j -yə keçid mümkün olan vəziyyət adlanır (rus. - *j* достижимо из *i*); bu bütün $t > 0$ olduğı hallara da ekvivalentdir. Bu anlayışa əsaslanaraq, diskret zaman halında olduğı kimi, $\mathcal{E}$ çoxluğunun qeyri - mühüm vəziyyətlərin R sinfinə və bir-birilə qarşılıqlı əlaqəli mühüm vəziyyətlərin C_α siniflərinə bölgüsü alınır. Əgər i dayanıqlı vəziyyət və $F_{ii}(+\infty) = 1$ və ya i ani vəziyyət və ixtiyari $j \neq i$ üçün

$$F_{ij}(+\infty) = F_{ij}(+\infty)F_{ji}(+\infty)$$

[i ani vəziyyət olduqda $F_{ii}(t) \equiv 1$, $t > 0$] olarsa, i mühüm vəziyyətinə qayıdışlı vəziyyət deyilir. Qayıdışlı i vəziyyəti dayanıqlı və $m_{ii} < \infty$ olarsa və ya i ani vəziyyət və ixtiyari j üçün həm də $F_{ij}(t) > 0$ olduğı halda (i ani vəziyyət olduqda $m_{ii} = 0$) $m_{ij} + m_{ji} < \infty$ olarsa, qayıdışlı i vəziyyəti müsbət qayıdışlı vəziyyət adlanır. Müsbət olmayan qayıdışlı vəziyyət sıfır vəziyyəti adlanır. Vəziyyətlərin qayıdışlı, qayıdışsız, müsbət, sıfır xassəli vəziyyətlər olması vəziyyətlər sinfinin də xassəsi hesab edilir. i vəziyyəti, yalnız və yalnız, o halda qayıdışlı vəziyyətdir ki,

$$\int_0^\infty p_{ii}(t) dt = \infty$$

olsun; yalnız və yalnız, o halda müsbət qayıdışlı vəziyyətdir ki,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ii}(t) > 0$$

olsun. Dayanıqlı i vəziyyəti üçün

$$\int_0^\infty p_{ii}(t) dt = \frac{1}{q_i [1 - F_{ii}(+\infty)]}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ii}(t) = \frac{1}{q_i m_{ii}}$$

münasibətləri ödənilir.

Vəziyyətləri fəzası hesabı M. p.-nin stasionar paylanması və bunların ixtiyari yaxınlaşması diskret zaman halında eyni olur və bunlar diskret zaman halında olduğı kimi vəziyyətlər siniflərinin terminlərlə təsvir olunur. Requlyarlığın bəzi şərtlərində (məs., əgər q_i sıxıqlan məhduddurlarsa) stasionar μ paylanması $\mu Q = 0$ tənliyini ödəyir ki, bu tənlik isə $\mathcal{E}$ sonlu olduğı halda həmişə doğrudur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60-105; [2] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 52, p. 37-64; [3] Doob J. L., «Trans. Amer. Soc.», 1945, v. 58, p. 455-73; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 363-70; [5] Levy P., «Ann. sci. Ecole norm. super.», 1951, t. 68, p. 327-81; [6] Austin D. G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 751-61; [7] Austin D. G., «Duke Math. J.», 1958, v. 25, p. 625-29; [8] Юшкевич А. А., «Уч. зап. МГУ», 1959, в. 186, с. 141-59; [9] Ornstein D., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 66, p. 36-39; [10] Smith G., «Trans. Amer. Math. Soc.», v. 110, p. 185-95; [11] Orey S., «Quart. J. Math.», 1962, v. 13, p. 252-54; [12] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 4, с. 481-85; [13] Feller W., Mc Kean H. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 351-54; [14] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [15] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [16] Freedman D., Markov chains, San Francisco, 1971; [17] Freedman D., Approximating countable Markov chains, N. Y., 1983; [18] Doob J. L., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 10, S. 236-51; [19] Williams D., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 227-46; [20] Дынкин Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 2, с. 222-57; [21] Kingman J. F. C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, S. 248-70; Bd 9, S. 1-9; [22] Williams D., «Lect. Notes in Math.», 1976, v. 511, p. 216-34, 505-20; [23] Williams D., «Lect. Notes in Math.», 1978, v. 649, p. 310-31; [24] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV PROSESI vəziyyətləri çoxluğu sonlu « марковский процесс; с конечным множеством состояний; **Markov process** with finite state space » - sonlu $\mathcal{E}$ çoxluğundan (faza fəzasından) qiymətlər alan, kəsilməz zamanlı *Markov prosesidir*. $\mathcal{E}$ çoxluğunun bütün altçoxluqlarının ölçülən olduğı fərz olunur. $\mathcal{E}$ çoxluğunun elementlərini natural - 1, 2, ..., n ədədlərlə eyniləşdirmək qəbul olunmuşdur. Adətən, fərz olunur ki, ζ qırılmayan prosesdir (qırılan proses halı qırılmayan prosesə əlavə, $(n+1)$ uducu vəziyyətinin daxil edilməsilə alınır). Vəziyyətləri sayı sonlu, bircins və bircins olmayan M. p.-ləri, Markov proseslərinin ([1] terminologiyasında - *stoxastik təyin olunmuş*) ilk, sadə nümunələri olub, A. N. Kolmogorov tərəfindən 1931-də daxil olunmuşdur.

Bircins olmayan halda ζ prosesinə heqiqi oxun ixtiyari T intervalında baxılır. M. p.-nin ümumi müasir tərifinə uyğun olaraq, fərz olunur ki, $\zeta_t = \zeta(t)$ proses ixtiyari $s \in T$ anında ixtiyari $i \in \mathcal{E}$ vəziyyətdən başlaya bilər; bu şərtləri ödəyən, Ω əsas fəzasında təyin olunan ehtimal paylanması $P_{s,t}$ ilə işarə olunur.

Bezen ilkin vəziyyət əvəzinə başlanğıc paylanma $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ paylanmasına baxılır, burada

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_1 + \dots + \mu_n = 1. \quad (1)$$

Uyğun ölçü

$$\mathbf{P}_{s,\mu} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \mu_i \mathbf{P}_{s,i} \quad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur.

M. p.-nin əsas xarakteristikası keçid funksiyası $p(s, i, t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,i} \{ \zeta_t \in \Gamma \}$ olub, vəziyyətləri çoxluğu fəzası $\mathcal{E}$ sonlu (və ya hesabı) olduğu halda birözlü çoxluqlarda öz qiymətlərlə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$p(s, i, t, \Gamma) = \sum_{j \in \Gamma} p(s, i, t, j).$$

$$p_{ij}(s, t) = p(s, i, t, j), \quad s \leq t \in T, \quad i \in \mathcal{E}, \quad j \in \mathcal{E}$$

kəmiyyətləri prosesin *keçid ehtimalları* adlanır. Bu ehtimallar mənfə deyildir, $p_{ij}(t, t) = \delta_{ij}$

$$p_{ij}(t, t) = \delta_{ij} \quad (3)$$

və proses qınılmayan proses olduğundan

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij}(s, t) = 1, \quad i \in \mathcal{E} \quad (4)$$

şerti də ödənilir. Keçid ehtimalları

$$p_{ij}(s, u) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, u), \quad s < t < u \in T \quad (5)$$

düsturu ilə ifadə olunan Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyir. $P(s, t) = \| p_{ij}(s, t) \|$ matrisi prosesin *keçid matrisi* adlanır. $P(s, t)$ stoxastik matrisdir və (3), (5) şərtləri onun vasitəsilə $P(t, t) = \mathbf{I}$, $P(s, u) = P(s, t)P(t, u)$ münasibətlə ifadə olunur.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu (və ya hesabı) proseslər üçün *Markov xassəsi*ni yalnız bir nöqtevi çoxluqlar üçün postulat kimi qəbul etmək kifayətdir; bu aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{s,\mu} \{ \zeta(t_{m+1}) = i_{m+1} | \zeta(t_1) = i_1, \dots, \zeta(t_m) = i_m \} = \\ = p_{i_m i_{m+1}}(t_m, t_{m+1}), \quad s \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \in T, \\ i_1, \dots, i_{m+1} \in \mathcal{E}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Ehtimalların vurulması və toplanmasından və (2) və (6) düsturlarından istifadə edərək, ixtiyari silindrik çoxluqların ehtimallarını başlanğıc ehtimalı μ verildiyi halda,

$$\mathbf{P}_{s,\mu} \{ \zeta(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \zeta(t_m) \in \Gamma_m \}, \quad t_k \geq s, \quad \Gamma_k \subseteq \mathcal{E}, \quad (7)$$

keçid ehtimalları vasitəsilə ifadə etmək olur.

Verilən sonluözlü (7) paylanmaları ilə uzlaşdırılmış təsadüfi prosesin varlığı haqqında Kolmoqorov teoremi əsas Ω fəzasında ele uyğun $\mathbf{P}_{s,\mu}$ ölçüsünü qurmağa imkan verir ki, ζ M. p.-nin tənfinə daxil olan bütün şərtlər ödənilsin və $p_{ij}(s, t)$ funksiyaları,

həqiqətən də, ζ prosesinin keçid ehtimalları olsun. Beləliklə, 1) mənfə olmayan $p_{ij}(s, t)$, $s \leq t$, $s \in T$, $t \in T$, $i \in \mathcal{E}$, $j \in \mathcal{E}$ funksiyaları, yalnız və yalnız, o halda keçid ehtimalları ola bilər ki, (3) – (5) şərtləri ödənilmiş olsun; 2) hər bir belə funksiyalar toplusuna $\mathcal{E}$ -də $\{ \zeta_t \}_{t \in T}$ M. p. uyğundur. Bu qayda ilə təsadüfi prosesin qurulmasında çatışmayan cəhət ondan ibarət olur ki, $\mathcal{E}$ -də «tipik» təsadüfi proses üçün təbii sayılan bir çox «yaxşı» çoxluqlar ölçülməyən olur; məs., vəziyyətlərin sayı $n \geq 2$ olduqda və $p_{11}(s, t) = 1$ halında $\mathbf{P}_{s,1}$ ehtimalı – $h > 0$ olduqda yəqin hadisə sayılan $\{ \zeta_t = 1, t \in [s, s+h] \}$ hadisəsinin ehtimalı təyin olunmamışdır. Bu çətinlik ζ prosesinin *separabel ver-siyası* adlandırılan konstruksiya vasitəsilə və ya elementar nəticələr fəzasının digər «temizlənmə» üsullarının köməyiylə aradan qaldırılır (bax, [3], [6]).

Zaman üzrə vəziyyətlərin $\mu(t) = \{ \mu_i(t), \dots, \mu_n(t) \}$ mütləq paylanmasının evolyusiyası keçid ehtimalları vasitəsilə

$$\mu_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \mu_i(s) p_{ij}(s, t), \quad s \leq t \leq T, \quad j \in \mathcal{E}$$

düsturu ilə və ya matris yazılışda $\mu(t) = \mu(s) \mathbf{P}_{s,\mu}(s, t)$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $\mu_i(t) = \mathbf{P} \{ \zeta_t = i \}$.

Sonrakı nəzəriyyə prosesin keçid ehtimallarının bu və ya digər rəqulyarlığı fərziyyəsi ilə qurulur. Vəziyyətləri fəzası $\mathcal{E}$ sonlu (və ya hesabı) M. p. üçün sağdan stoxastik kəsilməzlik tələbi

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(t, t+h) = \delta_{ij}, \quad t \in T, \quad i \in \mathcal{E}, \quad j \in \mathcal{E} \quad (8)$$

və ya matris yazılışda $P(t, t+0) = \mathbf{I}$ şərtinə gətirilir.

Daha güclü şərtlər – birincisi $p_{ij}(s, t)$ funksiyalarının hər yerdə kəsilməzliyi fərziyyəsindən ibarətdir ki, bunlar (8) tələbini də əhatə edir və ikincisi bu funksiyaların $s \neq t$ olduqda xüsusi törəmələrinin varlığı fərziyyəsindən ibarətdir. Bu fərziyyədən

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t+h)}{h} = q_i(t) = -q_{ii}(t) \geq 0, \quad (9)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h} = q_{ij}(t) \geq 0, \quad i \neq j \quad (10)$$

sonlu limitlərinin varlığı və keçid ehtimalları üçün differensial tənliklərin iki sisteminin doğruluğu [1]-də isbat olunmuşdur. Aydındır ki, $q_{ij}(t)dt$, $-t$ -dən $t+dt$ -yə qədər keçən müddətdə i -dən j vəziyyətinə keçid ehtimalı, $q_{ij}dt$ isə bu zaman ərzində i vəziyyətindən çıxış ehtimalıdır. q_{ij} , $i \neq j$ ədədi i -dən j -yə keçid ehtimalı sıxlığı (keçid intensivliyi), q_i isə i -dən çıxış ehtimalı sıxlığı (çıxış intensivliyi) adlanır. Konkret məsələlərdə bunlar fiziki mülahizələr əsasında tapılır.

(4)-dən

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i \left(\sum_{j \in \mathcal{E}} q_{ij} = 0 \right), \quad i \in \mathcal{E} \quad (11)$$

olduğu alınır.

(9)–(10) münasibətlərini digər

$$Q(t) = \frac{\partial P(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=t}$$

şəklində yazmaq olar, burada $Q(t) = \|q_{ij}(t)\|$. Birinci və ya («irəliyə istiqamətlənmiş») Kolmoqorov düz differensial tənliklər sistemi –

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(s, t) q_{kj}(t), \quad s \leq t, \quad i, j \in \mathcal{E}; \quad (12)$$

ikinci və ya («geriyə istiqamətlənmiş») Kolmoqorov tərs differensial tənliklər sistemi –

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = - \sum_{k \in \mathcal{E}} q_{ik}(s) p_{kj}(s, t), \quad s \leq t, \quad i, j \in \mathcal{E};$$

matris yazılışda, uyğun olaraq

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = P(s, t) Q(t) \quad \text{və} \quad \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = -Q(s) P(s, t)$$

berabərlikləri kimi ifadə olunur. (12) tənlikləri i -nin hər bir qeyd olunmuş qiymətində $p_{i1}, \dots, p_{im}$ məchullan üçün qapalı sistemdir, j -nin qeyd olunmuş qiymətində tərs tənliklər də analogi olur. Əgər $q_{ij}(t)$ funksiyaları kəsilməzdirsə, onda (3) başlanğıc şərtlərlə verilən (12) sisteminin yeganə həlli vardır. Bundan başqa, ixtiyari məhdud kəsilməz $q_{ij}(t) \geq 0$, $t \in T$, $i \neq j$ funksiyaları və (11)-dən alınan $q_{ii}(t)$ funksiyaları üçün (3) başlanğıc şərtlərlə verilən (12) sisteminin həlli vardır və bu həll hər hansı qınılmayan ζ prosesinin keçid ehtimalları təyin edir. Prosesin separabel olduğu versiyasında, qeyd olunmuş fəziyyətlərlə, prosesin trayektoriyaları 1 ehtimalla hissevi sabitdirlər (ixtiyari sonlu zaman parçasında sonlu sayda sıçrayışları pilləvari funksiyalardır). Əgər $q_{ij}(t)$ ehtimal sıxlıqları qeyri – məhdud olarsa və ya mövcud olmazlarsa, onda prosesin trayektoriyaları, ümumiyyətlə, mürəkkəb quruluşa malik olur. Trayektoriyaların pilləvari olmaları üçün hansı şərtlərin ödənilməsi və keçid ehtimallarının differensiallanan olmadığı halında Kolmoqorov differensial tənliklərinin ümumiləşmələri öyrənilmişdir (bax, [7], [8]). Ehtimali strukturu zamanın yerindəyişməsinə nəzərən invariant olan vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins M. p.-ləri halında nəzəriyyə sadələşir. Bircins proseslər üçün $T = [0, \infty)$ götürülür, $P_{s,j}$ (və ya $P_{s,\mu}$) ölçüləri yalnız $s = 0$ halı üçün baxılır və P_i (P_μ) ilə işarə olunur. Vəziyyətləri çoxluğu sonlu (və ya hesabı) $\mathcal{E}$ fəzası olan bircins M. p.-nin əsas xarakteristikası i vəziyyətindən j vəziyyətinə t müddəti ərzində keçid ehtimalları: $p_{ij}(t) = P_i\{\zeta_t = j\}$, $t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{E}$.

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{E}; \quad \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in \mathcal{E} \quad (13)$$

şərtlərini və

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad t \geq 0, \quad s \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{E} \quad (14)$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyən ixtiyari funksiyalar $p_{ij}(t)$ keçid ehtimalları kimi hesab oluna bilər. Elementləri keçid ehti-

malları olan $P(t)$, $t \geq 0$ matrisi bircins ζ prosesinin keçid matrisi adlanır. (13), (14) münasibətlərindən aydındır ki, $P(t)$ stoxastik matrisdir və

$$P(0) = I, \quad P(s+t) = P(s)P(t) \quad (15)$$

[$P(t)_{t \geq 0}$ – stoxastik matrislərin semi – qrupudur]. t anında $\mu(t)$ mütləq paylanması $\mu(t) = \mu P(t)$ düsturu ilə $\mu = \mu(0)$ başlanğıc paylanması vasitəsilə ifadə olunur. (13), (14) münasibətlərindən alınır ki, $p_{ij}(t)$ funksiyaları $t > 0$ olduqda ölçüləndirlər və t -yə görə kəsilməzdir və $t \downarrow 0$ olduqda $p_{ij}(+0)$ limitlərinə malikdirlər (bax, [2]).

Lakin bu limitlər δ_{ij} ilə üst-üstə düşməyə bilər, məs., keçid matrisi aşağıdakı kimi verildiyi halda belə olur:

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Bu misalda ixtiyari başlanğıc vəziyyətində bütün ζ_t təsadüfi kəmiyyətləri $t > 0$ halında qarşılıqlı asılı olmayan və paylanmaları $\mu(t) = (0,5; 0,5)$ olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. ζ prosesinin trayektoriyaları olduqca qeyri – rəqulyardırlar. Belə potolojiyaların olmaması üçün həmişə fərz olunur ki, ζ prosesi stoxastik kəsilməzdir, bu isə $p_{ij}(+)$ funksiyalarının sıfırdan kəsilməzliyinə, yəni

$$P(+0) = I \quad (16)$$

şərtinə ekvivalentdir.

(16) şərtində $P(t)$, $t \geq 0$ matris funksiyası sıfırdan sağdan differensiallanandır (bax, [2]). $Q = P'(0)$ infinitezimal matrisinin elementləri keçid ehtimalları sıxlıqlarının ($-q_{ii} = q$, çıxış ehtimalları sıxlıqlarıdır) qeyri – bircinslik halındakı mənada anlaşılır və eyni (11) münasibətlərini ödəyirlər, lakin bu halda bunlar t -dən asılı olmur. Kolmoqorov düz və tərs differensial tənliklər sistemləri

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{i \in \mathcal{E}} q_{ii} p_{ij}, \quad t \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{E}$$

və ya matris yazılışında

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P'(t) = QP(t)$$

münasibətləri şəklində ifadə olunur. Sabit əmsallı bu xətti tənliklər sisteminin hər birinin (16) başlanğıc şərtində yeganə həlli vardır. Sonluölçülü paylanmalar baxımından n sayda vəziyyətli bircins M. p. $n^2 - n$ sayda mənfi olmayan q_{ij} sabitlərlə tamamilə təyin olunur, $i \neq j$ [q_{ii} bunlar vasitəsilə (11) düsturları ilə təyin olunur]; bunların qiymətləri ixtiyari ola bilər.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins M. p.-nin separabel versiyasında trayektoriyalar hissevi sabit olub, sıçrayışların ardıcıl baş verməsi ilə səciyyəvidir; trayektoriya kəsildiyi nöqtədə onun soldan və ya sağdan kəsilməz olduğunu hesab etmək olar. Adətən, elementar nəticələr fəzasının seçilməsində prosesin sağdan kəsilməz olması halına üstünlük verilir, belə ki, bu halda o,

ciddi Markov xassəsinə malik olur. Başlanğıc vəziyyəti i olan ζ prosesinin sağdan kəsilməzliyi aşağıdakı kimi təyin olunur. Başlanğıc vəziyyətdən ilk çıxış anı $\tau = \inf \{t: t \in [0, +\infty), \zeta_t \neq i\}$ parametri q_i -yə bərabər eksponensial paylanma ilə paylanır, yəni $P_i\{\tau > t\} = \exp\{-q_i t\}$, $t \geq 0$, $q_i = 0$ olduqda sanki yəqin $\tau = \infty$ olur və bu halda vəziyyət uducu vəziyyət adlanır. Əgər $q_i > 0$ olarsa, onda τ sanki yəqin sonludur, ζ_τ təsadüfi qiyməti τ -dan asılı olmayıb, $P_i\{\zeta_\tau = j\} = q_{ij}/q_i$, $j \neq i$, $j \in \mathcal{E}$ ehtimal paylanmasına malikdir. Sonra ciddi Markov xassəsinə görə eyni mənzərə təkrar olunur, bu şərtlə ki, başlanğıc anı olaraq τ , başlanğıc vəziyyəti ζ_τ götürülsün və s., bu halda ζ prosesinin ardıcıl dəyişən vəziyyətləri Markov zənciri (ola bilər ki, qınlı) vardır və bu zəncir üçün keçid ehtimalları

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & j \neq i, q_i > 0 \\ 0, & \text{digər hallarda.} \end{cases}$$

münasibətlə təyin olunur; bu zəncir ζ prosesinə görə daxil edilmiş zəncir adlanır.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu bir cins M. p.-nin stasionar paylanması həmişə mövcuddur, yəni elə başlanğıc paylanması μ vardır ki, zaman keçdikcə dəyişmir: $\mu = \mu P(t)$. Stasionarlıq üçün $\mu Q = 0$ olması zəruri və kafidir. Bu tənlikdən (1) ilə birlikdə, μ -nün tapılması üçün istifadə olunur. Stasionar paylanmanın yeganəlik məsələsi vəziyyətlərin təsnifi və $t \rightarrow \infty$ olduqda $p_{ij}(t)$ -nin asimptotikası ilə bağlıdır.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu M. p. üçün i və j verildiyi halda bütün $t > 0$ üçün ya $p_{ij}(t) \equiv 0$ və ya bütün $t > 0$ üçün $p_{ij}(t) > 0$ olur. Buna görə də, diskret zaman halından fərqli olaraq, belə proseslərin tsiklik altsinifləri olmur (başqa cəhətlərə görə təsnifat diskret zaman halına analoji; bax, Markov zənciri: vəziyyətlərin təsnifatı).

Tsiklik olmadığı halda bağlı olaraq $t \rightarrow \infty$ olduqda $p_{ij}(t)$ -lərin limitləri həmişə vardır və burada yığılma eksponensial sürətdə sürətli olur. Hər bir mühüm C_α sinfinə ζ prosesinin C_α -da toplanmış yeganə stasionar μ^α paylanması uyğundur; bu halda bütün $j \in C_\alpha$ üçün $\mu_j^\alpha > 0$ olur. Bundan başqa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \begin{cases} \mu_j^\alpha, & i \in C_\alpha, j \in \mathcal{E}, \\ \sum_{\alpha} \pi_{i\alpha} \mu_j^\alpha, & i \in R, j \in \mathcal{E}, \end{cases}$$

burada $\pi_{i\alpha}$ ədədləri hərəkətinin mühüm olmayan R sinfinin i vəziyyətindən başlayan sistemin C_α sinfinə uduqlu ehtimalı α -nın verilmiş qiymətində $\pi_{i\alpha}$ ehtimalları

$$\pi_{i\alpha} = \begin{cases} 0, & i \in \mathcal{E} \setminus (C_\alpha \cap R) \\ 1, & i \in C_\alpha \end{cases}$$

600 MARKOV

«sərhəd şərtlərlə» verilən

$$q_i \pi_{i\alpha} = \sum_{j \neq i} q_{ij} \pi_{j\alpha}, \quad i \in R$$

tənliklər sisteminin yeganə həllidir.

Uduqlu qədər keçən müddətin orta qiyməti

$$m_i = M_i \tau, \quad \tau = \inf \{t: t \geq 0, \zeta_t \in \mathcal{E} \setminus R\}, \quad i \in \mathcal{E}$$

– $m_i = 0$, $i \in \mathcal{E} \setminus R$ «sərhəd şərtlərlə»

$$q_i m_i = 1 + \sum_{j \neq i} q_{ij} m_j, \quad i \in R$$

tənliklər sistemindən tapılır. Bütün stasionar paylanmalar çoxluğu μ^α vektorlarının qapalı örtüyü ilə üst-üstə düşür. Stasionar paylanma, yalnız və yalnız o halda yeganədir ki, mühüm siniflərin sayı 1 olsun. Sonuncu halda ergodik teoremlər (böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu) doğrudur: $\mathcal{E}$ -də ixtiyari həqiqi f funksiyası üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\zeta_s) ds = \sum_{j \in \mathcal{E}} \mu_j f(j)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. M. p.-ləri üçün *merkezi limit teoremi* və *tekrar loqarifm qanunu* da ödənilir. Daxil edilmiş Markov zəncirlərinin tətbiqi belə limit teoremlərini diskret halda kəsilməz hala keçirməyə imkan yaradır. Vəziyyətləri çoxluğu sonlu M. p.-ləri kütləvi xidmət nəzəriyyəsi məsələlərində və əməliyyatların tədqiqində istifadə olunur; bunlar sifarişlər axını Puasson qanunu ilə paylandıqı xidmət müddətləri isə eksponensial qanunla paylandıqı halda da tətbiq olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [2] Doeblin W., «Bull. sci. math.», 1938, т. 62, р. 21–32, 1940; т. 64, р. 35–37; [3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [5] Карлин С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971; [6] Дынкин Е. Б., Основания теории Марковских процессов, М., 1959; [7] Добрушин Р. Л., «Матем. сб.», 1953, т. 33, с. 567–96; [8] Добрушин Р. Л., «Матем. сб.», 1954, т. 34, с. 541–56.

MARKOV PROSESİ; zamanın təsadüfi əvəzlənməsi «марковский процесс; случайная замена времени; Markov process; random time change» – Markov prosesinin hər bir ayrıca götürülmüş trayektoriyasında zamanın elə monoton çevrilməsidir ki, bu çevirmədə Markov xassəsi öz qüvvəsində qalır. Məs., $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ – fəza fəzası $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -də qınlı sağ M. p., $A_t = A_t(\omega)$, $t \in [0, \xi(\omega))$ olduqda ζ -nin kəsilməz additiv ciddi artan funksionalı olsun. Daha sonra, $0 \leq t < \xi(\omega)$ olduqda $\tilde{\zeta}(\omega) = A_\xi - (\omega)$, $\tau_t(\omega) = \inf \{s: A_s(\omega) > t\}$ və $\{A, \tau \leq t < \xi\} \in \mathcal{A}_t$ $\inf \{s: A_s(\omega) > t\}$ şərtini ödəyən bütün $A \subset \{\tau_t < \xi\}$ hadisələrinin çoxluğu $\tilde{\mathcal{A}}_t$ olsun. Onda $\tilde{\zeta} = (\zeta_{\tau_t}, \tilde{\xi}, \tilde{\mathcal{A}}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ ailəsi (bax, [1], [2]) $(\mathcal{E}, \mathcal{B}^*)$ fəza fəzasında ciddi sağdan kəsilməz M. p.-dir, burada $\mathcal{B}^*$ – $\mathcal{B}$ σ -cəbrinin $\mathcal{B}$ -də verilən bütün sonlu ölçülər üzrə tamamlanmasının kəsişməsidir (çox vaxt $\mathcal{B}^*$ -nu $\mathcal{B}$ ilə əvəz etmək

mümkün olur). ζ prosesi ilkin prosesdən zamanın təsadüfi əvəzlənməsindən alınır kimi deyim qəbul edilmişdir.

Blyumental-Getur-Makkin teoreminə (1962) göstərilir ki, geniş şərtlərlə, eyni fəzədə, eyni paylanma qanunu ilə verilən M. p., ixtiyari kompaktlara ilk çatım anlarında, bir-birindən zamanın göstərilən şəkili təsadüfi əvəzlənməsi vasitəsilə alınır (bax, [2]).

Zamanın təsadüfi əvəzlənməsinin bir qədər başqa şəkllərinə də baxılır (bax, [5]). Zamanın təsadüfi əvəzlənməsinə ilk dəfə [4]-də baxılmışdır.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getto R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. - L., 1968; [3] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [4] Волковский В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, с. 332-50; [5] Glover J., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, № 6, p. 1019-29.

MARKOV PROSESİ, SIÇRAYIŞVARI İDARƏOLUNAN « марковский скачкообразный управляемый процесс; controlled Markov jump process » – bax, idarəolunan siçrayışvari proses.

MARKOV SEMİ – QURUPU « марковская полугруппа; Markov semigroup » – bircins $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ Markov prosesi ilə əlaqəli,

$$P_t f(x) = M_x f(\zeta_t), t > 0$$

düsturu ilə təyin olunan, məhdud ölçülən funksiyalar fəzasında operatorlar ailəsidir. ζ prosesinin keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ ilə P_t operatorları

$$P_t f(x) = \int_{\mathcal{E}} p(t, x, dy) f(y)$$

münasibətlə əlaqəlidir.

Kolmoqorov – Çepmen tənliyinə əsasən P_t operatorları

$$P_{t+s} = P_t P_s, s, t > 0$$

semi – qrupunu əmələ gətirir. P_t operatorları daraldıcı (rus. сжимающие) operatorlardır, yəni

$$\|P_t f\| \leq \|f\|.$$

burada $\|f\| = \sup |f(x)|$ və $f \geq 0$ olduqda, $P_t f \geq 0$ şərtini ödəyir. Qınılmayan proseslər üçün, həm də, $P_t 1 \equiv 1, t > 0$ – konservativlik şərti də ödənilir. Ümumi halda, $P_t 1 \leq 1$; belə qruplar bəzən submarkov qrupları adlandırılır.

$\mathcal{E}$ – lokal kompakt metrik fəza olsun. Əgər P_t operatorları kəsilməz funksiyalar fəzasını özünə çevirirsə, M. s. Feller M. s. adlanır. Əgər M. s. Feller M. s.-dursa, onda ζ prosesini sağdan kəsilməz və ciddi Markov prosesi hesab etmək olar (daha dəqiq, bu xassələrə malik olan, ona stoxastik ekvivalent proses vardır). Digər, mühüm proseslər sinfi P_t operatorları sonsuzluqda sıfıra yığılan kəsilməz funksiyalar fəzasını özünə çevirdikdə yaranır. Bu halda ζ prosesini standart proses hesab etmək olar (bax, Standart Markov prosesi). Trayektoriyaların kəsilməzlik xassələri də P_t operatorları terminləri ilə ifadə olunur (bax, Markov prosesi).

M. s. ilə rezolvent – $R_\lambda, \lambda \geq 0$ operatorlarının ailəsi, əlaqəlidir: bu operatorlar

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt$$

düsturu ilə təyin olunur. R_λ operatorları $\lambda > 0$ olduqda məhdudurlar və rezolvent tənliyi adlanan

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu, \lambda, \mu > 0 > 0$$

tənliyini ödəyir.

$R = R_0$ operatoru potensial da adlandırılır, bu operator, ümumiyyətlə, məhdud deyildir. Onun xassələri, məs., ζ prosesinin qayıdışlı olması xassələri ilə də bağlıdır.

M. s.-nin tədqiqində infinitezimal operator mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV STRATEGİYASI « марковская стратегия; Markov strategy / policy » – bax, Strategiya, idarəolunan siçrayışvari proses, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı, Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi.

MARKOV TƏSADÜFİ DOLAŞMASI « марковское случайное блуждание; Markov random walk » – bax, Çoxölçülü təsadüfi dolaşma.

MARKOV TƏSADÜFİ MEYDANI « марковское случайное поле; Markov random field » – təyin olunduğu T oblastının kəsişməyən alt çoxluqlarının nizamlanmış (S_1, Γ, S_2) üçlüyünün qeyd olunmuş sistemine nəzərən Markov xassəsinə malik $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasıdır. Markov xassəsi onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ funksiyasının qiymətlər oblastının ixtiyari ölçülən B alt çoxluğu üçün ixtiyari $t_0 \in S_2$ qiymətində

$$P\{\zeta(t_0) \in B | \zeta(t), t \in S_1 \cup \Gamma\} = P\{\zeta(t_0) \in B | \zeta(t), t \in \Gamma\}$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilir (başqa sözlə, gələcək S_2 qeyd olunmuş indiki Γ şərtində keçmiş S_1 -dən asılı deyildir).

Misal 1. $T = \mathbb{R}^n, \{\Gamma\}$, – $\mathbb{R}^n$ -dəki bütün kürelərin ailəsi. S_1 , – Γ -nin daxili, S_2 , – Γ -nin xarici olsun. Bircins və izotrop Gauss $\zeta(t)$ təsadüfi meydanı $\{S_1, \Gamma, S_2\}$ sistemine nəzərən Markov xassəsinə, yalnız və yalnız, o halda malikdir ki, $\zeta(t) = \xi$ olsun, ξ – hər hansı təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [1]).

Bircins və izotrop M. t. m.-lanna aid qeyri – trivial misallar ümumiləşmiş meydanlara keçdikdə təsadüf olunur.

Misal 2. Əvvəlki misalın şərtlərində ümumiləşmiş Gauss bircins və izotrop təsadüfi meydanlar sinfində M. t. m. spektral sıxlığı $f(\lambda) = \lambda^{n-1} / (\lambda_0^2 + \lambda^2)$ olan sərbəst meydan adlandırılan (Nelson meydanı) meydandır (bax, [2]).

Misal 3. $\{S, \partial S, \bar{S}\}$ – bütün mümkün ola bilən üçlüklər ailəsi olsun və burada S , – $\mathbb{R}^n$ -də oblast, ∂S – onun sərhədi, $\bar{S}$ – onun qapayıcısının tamamlayıcısı olsun. Spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan bircins ümumiləşmiş Gauss təsadüfi meydanı $\zeta(\varphi)$.

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\{S, \partial S, \bar{S}\}$ sistemine nəzərən, yalnız və yalnız, o halda M. t. m.-dir ki, $1/f(\lambda)$ polinom olsun (bax, [3]).

M i s a l 4. Əvvəlki misalın şərtlərində S və ya $\bar{S}$ məhdud oblast olsun. $\mathbb{R}^n$ -də *Levi meydanı*, yalnız və yalnız, o halda M. t. m.-dir ki, n tek ədəd olsun.

M. t. m. üçün yuxarıda verilmiş təriflərdən başqa, parçalayan σ – cəbrlər (rus. *расщепляющая σ – алгебра*) və L – Markov xassəsi terminlərində də təriflər məlumdur (bax, [3]).

M. t. m. sinfi Z^n -də biricins Qauss meydanları, $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ fəzasında çoxölçülülü biricins ümumiləşmiş Qauss meydanları, həmçinin çoxölçülülü biricins və izotrop ümumiləşmiş Qauss təsadüfi meydanları üçün tamamilə təsvir olunmuşdur. M. t. m. anlayışı statistik fizika və kvant meydan nəzəriyyəsində mühüm təbiiqlərlə səciyyəvidir.

Bax, *Gibbs təsadüfi meydanı*.

Əd. [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984; [3] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [4] Розанов Ю. А., Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными, М., 1995.

L – MARKOV TƏSADÜFİ MEYDANI « L – марковское случайное поле; L – Markov random field » – bax, *Təsadüfi meydan*.

MARKOV YERİNİDƏYİŞMƏSİ « *Маркова сдвиг; Markov shift* » – $\omega = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots\}$ ikiterəfli ardıcılıqlarının ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında T yerinideyişməsidir, burada $y_i \in Y$, $(Y, \mathfrak{A})$ – ölçülən fəza, μ ölçüsü isə $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında $P(y, C)$, $y \in Y$, $C \in \mathfrak{A}$ stoxastik operatoru və bu operatorun invariant μ ölçüsü ilə təyin olunur və $A = \{\omega \in \Omega: y_i \in C_0, y_{i+1} \in C_1, \dots, y_{i+r} \in C_r\}$ silindrik çoxluqlarında $C_i \in \mathfrak{A}$, $r \geq 0$, $-\infty < i < \infty$

$$\mu(A) = \int_{C_0} d\sigma(y_0) \int_{C_1} P(y_0, dy_1) \dots \int_{C_r} P(y_{i+r-1}, dy_{i+r})$$

bərabərliyi ilə verilir.

Bu ölçü Kolmoqorov teoreminə görə bütün $\mathcal{A}$ σ – cəbrinə davam oluna bilər. T əksər hallarda Markov avtomorfizmi adlandırılır. Sonlu fəzalar halında M. y. ergodik xassələri tam araşdırmağa imkan verir. Əgər M. y. bir sinif və bir altsinifə malik olarsa, onda o, K – avtomorfizmdir və *Bernulli yerinideyişməsinə* izomorfudur.

Əd. [1] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

MARKOV YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « *марковское размещение частиц; Markov allocation of particles* » – hissəciklərin oyuqlar üzrə ele ardıcıl yerləşdirilməsi prosesidir ki, ardıcıl götürülən 1-ci, 2-ci, ... hissəciklərin yerləşdikləri oyuqların nömrələri *Markov zənciri* eməle gətirir. Markov zənciri trayektoriyasının parçasında müşahidə olunan vəziyyətlər saylarının paylanmalarını öyrənir. Hissəciklərin Markov yerləşməsi – *hissəciklərin polinomial yerləşməsi* sxeminin ümumiləşməsidir.

602 MARKOV

Əd. [1] Зубков А. М., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 4, с. 491–532; [2] Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика, 1984, т. 22, с. 3–60.

MARKOV ZƏNCİRİ « *Маркова цепь; Markov chain* » – ölçülən fəzədə verilmiş diskret zamanlı *Markov prosesidir*. M. z. nəzəriyyəsinin əsasları (her halda vəziyyətləri sayı M. z.-ni) [1]-də A. A. Markov tərəfindən qoyulmuşdur. Daha müəkkəb vəziyyətlər fəzası olan zəncirlərin araşdırılmasına 1931–37-də ən əvvəl A. N. Kolmoqorov (bax, [2] – [4]) və V. Döblin (bax, [5] – [6]) tərəfindən başlanılmışdır. M. z.-nin ümumi nəzəriyyəsinin əsas məsələsi M. z.-lərinin və bunlarla əlaqəli kəmiyyətlərin strukturunun və asimptotik xassələrinin aşkar edilməsidir ([7] – [14]) və əgər hal-hazırkı dövrə qədər vəziyyətləri çoxluğu hesabı və sonlu biricins M. z. nəzəriyyəsi müəyyən dərəcədə sona çatdırılmışdırsa, ümumi M. z. nəzəriyyəsində hələ mühüm irəliləyişlər mümkündür. M. z. özü-özlüyündə yalnız riyazi maraq doğurması ilə deyil, həm də, məs., bəzi müəkkəb asılılıqların və proseslərin tədqiqi üçün bir vasitə olması ilə səciyyəvidir; bunların riyaziyyata aid olmayan sahələrdə müxtəlif təbiiqləri olduqca tədqiqedici (bax, [7], [15], [16]).

Markov zəncirləri və keçid ehtimalları. M. z.-nin ən dəqiq tərifinin müxtəlif variantları vardır və ən sadə və intuitiv aydın tərif aşağıdakı kimi verilir: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında qiymətləri $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasından olan $\{\xi_n \equiv \xi_n(\omega); n \geq 0\}$ təsadüfi ardıcılığı verilir (müəyyənlik üçün n, m tipli bütün ədədi parametrlərin tamqiymətli olduğu fərz olunur). Əgər ixtiyari $n \geq 1$ qiymətlərində «*k e ç m i ş i n*» σ – cəbri $\mathcal{A}_{n-1} = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ «*g e l e c e y i n*» σ – cəbri $\mathcal{A}^{n+1} = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$ σ – cəbrindən, ξ_n məlum olduqda, yeni «*n d i k i*» vəziyyət məlum olduqda, şərti asılı olmayan cəbrlər olarsa, yeni bu ardıcılıq üçün *Markov xassəsi* ödənilərsə, $\{\xi_n\}$ ardıcılığı *klassik mənada Markov zənciri* adlanır (burada, məs., $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ – Ω -də $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir). Bu xassə ixtiyari $n \geq 1$, $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$ üçün $P\{\xi_n \in \mathbb{B} | \mathcal{A}_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \mathbb{B} | \xi_{n-1}\}$ bərabərliyinin sanki yəqin ödənilməsi ilə ekvivalentdir. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzası (və ya əgər $\mathbb{B}$ seçilməsi aydındırsa, $\mathcal{E}$ çoxluğunun özü) *zəncirin fəza fəzası* və ya *zəncirin vəziyyətlər fəzası* adlanır; $\mathcal{E}$ -nin nöqtələri vəziyyətlər kimi anlaşılır. Tərifə görə M. z.-nin başlanğıc paylanması $\mu(\mathbb{B}) = P\{\xi_0 \in \mathbb{B}\}$ ölçüsü ilə təyin olunur, $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$. M. z.-nin trayektoriyası qeyd olunmuş $\omega \in \Omega$ ilə $\{\xi_n(\omega); n \geq 0\}$ ardıcılığı ilə (ədədi ardıcılıq) təyin olunur.

M. z.-ləri bir-birindən asılı təkrarlanan sınaqların ele ümumiləşmiş sxemini ehatə edir ki, bu sxemdə ixtiyari bir sınaqda baş verən hadisənin ehtimalı yalnız bu sınaqdan əvvəlki sınağın nəticəsindən asılıdır. Bu halda hər bir sınaqda mümkün nəticələr (sonlu və ya hesabı sayda) $E_1, E_2, \dots$ olarsa, (zəncirin vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ işarə olunur), k -ci sınaqda E_j nəticəsini E_{jk} ilə işarə etdikdə E_{jk} -nin ehtimalı $p_j = P\{E_j\}$ şərtsiz ehtimalına bərabər olmur ($p_j = P\{E_j\} = P\{E_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$ bərabərliyi yalnız sınaqlar asılı olmadıqda doğrudur); bu ehtimal, yeni $P\{E_{jk}\}$ ehtimalı

$(k-1)$ -ci sınaqda hər hansı $E_{i_{k-1}}$ nəticəsinin baş verməsi şərti nəzərə alınmaqla $(E_{i_{k-1}}, E_{j_k})$ nəticəsinin şərti ehtimalı ilə verilir; bu ehtimal $p_{i_{k-1}j_k}$ ilə işarə olunur:

$$P\{(E_{j_k} | E_{i_{k-1}})\} = p_{i_{k-1}j_k}; \quad j_k, i_k = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Bu halda yalnız iki ardıcıl sınağın nəticəsinə baxıldığından $p_{i_{k-1}j_k}$ əvəzinə p_{ij} işarələməsindən də istifadə olunur. Beləliklə, Markov sxemində ixtiyari iki ardıcıl sınağın nəticəsinə p_{ij} şərti ehtimalı qarşı qoyulur:

$$P\{(E_{j_k} | E_{i_{k-1}})\} = p_{i_{k-1}j_k} = p_{ij} = P\{(E_{j_k} | E_{i_k})\}, \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, i_k, j_k = 1, 2, \dots$$

Markov sxemi ardıcıl sınaqlarla bağlı olduğundan iki, üç, dörd və s. sınaqlar ardıcılığının hər birinə uyğun nəticənin ehtimalı aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunmalıdır:

$$P\{(E_{j_1}, E_{j_2})\} = P\{(E_{j_1})\} \cdot P\{(E_{j_2} | E_{j_1})\} =$$

$$= p_{j_1} p_{j_1 j_2} = p_{j_1} p_{ji},$$

$$P\{(E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3})\} = P\{(E_{j_1})\} \cdot P\{(E_{j_2} | E_{j_1})\} \times$$

$$\times P\{(E_{j_3} | E_{j_2})\} = p_{j_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} = p_{j_1} p_{ji} p_{ir},$$

$$P\{(E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3}, E_{j_4})\} = p_{j_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} p_{j_3 j_4} = p_{j_1} p_{ji} p_{ir} p_{rs}$$

ve ümumiyyətlə,

$$P\{(E_{j_1}, \dots, E_{j_n})\} = p_{j_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-2} j_{n-1}} p_{j_{n-1} j_n}, \quad (2)$$

burada E_{j_1} -in j_1 -dəki «1» indeksi ilk sınağın nömrəsi kimi nəzərdə tutulur, bu nöqtəyi – nəzərdən, $p_{j_1} = p_j$, $j = 1, 2, \dots$ ehtimalları *başlanğıc ehtimalları* adlanır; p_{ij} sistemin bir addımında E_i vəziyyətindən E_j vəziyyətinə *keçid ehtimalı* adlanır.

Təbii ki, bu qayda ilə təyin olunmuş təkrarlanan asılı sınaqlara və ehtimallara uyğun hər hansı bir ehtimal fəzasını təyin etmək üçün müəyyən şərtlər ödənilməlidir: ilk növbədə

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (3)$$

şərtlərini ödəyən başlanğıc ehtimalları verilməlidir. p_{ij} ehtimallarının onlara verilən mənaya uyğun olmaları üçün onlar da aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

k -ci sınaqda E_i baş vermişdirsə, $(k+1)$ -ci sınaqda E_j -lərdən biri hökmən baş verməlidir, yeni bütün k -lər üçün və bütün i, j qiymətlərində

$$p_{ij} \geq 0, \quad p_{i1} + p_{i2} + \dots = \sum_j p_{ij} = 1 \quad (4)$$

şərtləri ödənilməlidir. (3) və (4) şərtlərini ödəyən, ixtiyari p_i və p_{ij} ədədləri ilə ifadə olunan və (2) düsturu ilə təyin olunan ehtimallar $(i, j = 1, 2, \dots)$ n sınağa uyğun elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş ehtimallardır.

M. z.-nin tərfi digər variantda aşağıdakı kimi verilir.

Fərz olunur ki, hər hansı bir sistemin vəziyyəti $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$ fəza fəzasındakı e_i nöqtələri ilə təyin olunur. Bu nöqtələri sadəcə 1, 2, ..., r ədədləri ilə işarə etmək olar. Fərz olunur ki, sistemin vəziyyəti T müddəti ərzində müşahidə olunur və $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Tədqiq olunan sistemin evolyusiyası $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_T)$ trayektoriyası ilə müəyyən olunur və burada $\{\omega_t = i\}$ – sistemin t anında i vəziyyətində olması təsadüfi hadisəsidir. Bu qayda ilə təyin olunmuş stoxastik eksperimentə uyğun trayektoriyalar fəzası – $\Omega = \{\omega\}$, $\mathcal{A}$ – cəbr – Ω fəzasının bütün alt çoxluqların sinfi, P isə elementar ehtimal $P(\omega)$ -lərlə təyin olunan ehtimal ölçüdür; yeni $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasıdır.

Hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ üçün $A_t(t) = \{\omega : \omega_t = i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$ hadisələri müəyyən bir α_i *bölgüsünü* təyin edir. Bu bölgü $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(\alpha_i)$ hadisələr cəbrini doğurur. Onda

$$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_T \quad (5)$$

hadisələr cəbrləri ardıcılığı təsadüfi sınaqlar ardıcılığı olacaqdır. Bir çox təsadüfi proseslər üçün bir model kimi tətbiq edilən, bir-birindən asılı sınaqlar ardıcılığı 1907-də A. A. Markov tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Bu model vasitəsilə təyin olunan proseslər qısa müddətdə böyük sayda araşdırılaraq dövrümüzdə *Markov prosesləri* nəzəriyyəsi səviyyəsinə yüksəlmişdir. Markov prosesinin sadəcə bir modeli – M. z. aşağıdakı kimi təyin olunur. (5) sınaqlar ardıcılığında hər hansı t anı qeyd olunur.

$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{t-1}$ cəbrlərinin doğurduğu $\mathcal{A}_0^{t-1}$ cəbr – keçmiş hadisələr cəbr; $\mathcal{A}_{t+1}, \mathcal{A}_{t+2}, \dots, \mathcal{A}_T$ cəbrlərinin doğurduğu $\mathcal{A}_{t+1}^T$ cəbr – gələcək hadisələr cəbr; $\mathcal{A}_0^{t-1}$ cəbrindən olan ixtiyari hadisəyə keçmiş hadisə, $\mathcal{A}_{t+1}^T$ cəbrindən olan hadisəyə gələcək hadisə, $\mathcal{A}_t$ cəbrindən olan hadisəyə indiki hadisə deyilir. Məs., $\{\omega : t < k < T \text{ şərtini ödəyən ele } k \text{ tapılar ki, } \omega_k = \omega_{k+1}\}$ – gələcək hadisədir;

$\{\omega : 0 \leq k < t \text{ şərtini ödəyən bütün } k\text{-lər üçün } \omega_k \neq r\}$ – keçmiş hadisədir.

Tərif. $1 \leq k < r$, $t = 1, 2, \dots, T-1$ şərtlərini ödəyən k və t -nin ixtiyari qiymətlərində ixtiyari qeyd olunmuş $\{\omega_t = k\} \in \mathcal{A}_t$ indiki hadisəsi üçün keçmiş $\mathcal{A}_0^{t-1}$ və gələcək $\mathcal{A}_{t+1}^T$ cəbrləri asılı olmayan cəbrlərdirsə, (5) sınaqlar ardıcılığına M. z. deyilir.

Başqa sözlə, $1 \leq k < r$ və $t = 1, 2, \dots, T-1$ şərtlərini ödəyən ixtiyari k , t -lər üçün və ixtiyari $A \in \mathcal{A}_0^{t-1}$, $B \in \mathcal{A}_{t+1}^T$ hadisələri üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilməlidir:

$$P\{A \cap B | \{\omega_t = k\}\} =$$

$$= P\{A | \{\omega_t = k\}\} \cdot P\{B | \{\omega_t = k\}\}. \quad (6)$$

Şərti ehtimalın tənfinə əsasən $P\{\{\omega_t = k\} \cap A\} > 0$ olduğundan (6) şərti

$$P\{B | \{\omega_t = k\} \cap A\} = P\{B | \{\omega_t = k\}\} \quad (7)$$

şerti ilə ekvivalentdir, yeni indiki hadisə – $\{\omega_t = k\}$ məlum olduqda sistemin gələcək vəziyyəti onun keçmişindən asılı deyildir.

M. z.-nin, digər variantda, təsadüfi kəmiyyətlər terminologiyasında tərif aşağıdakı kimidir.

Tərif. $\{\xi_t; t=0, 1, \dots\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $\mathcal{N}=\{1, 2, \dots, N\}$ sistemin vəziyyətlər fəzası olsun. Əgər $\sum \mathbf{P}\{\xi_t = k\} = 1, t=0, 1, 2, \dots$ olarsa və $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ ($n=1, 2, \dots$) şərtini ödəyən $t_1, \dots, t_n, s$ -lər, ixtiyari i, j elementləri ($i, j \in \mathcal{N}$) və $\mathbf{B}_i \subset \mathcal{N}, i=\overline{1, n}$ ardıcılıqları üçün

$$\mathbf{P}\{\xi_t = j | \{\xi_{t_1} \in \mathbf{B}_1, \dots, \xi_{t_n} \in \mathbf{B}_n, \xi_s = i\}\} = \mathbf{P}\{\xi_t = j | \xi_s = i\} \quad (8)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $\{\xi_t; t=0, 1, 2, \dots\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığına M. z. deyilir.

ξ_t – tədqiq olunan sistemin t anındakı ($t=0, 1, 2, \dots$) vəziyyətidir. (8) xassəsi onu ifadə edir ki, sistemin $s < t$, s anında qeyd olunmuş indiki vəziyyəti məlum olarsa, sistemin gələcək vəziyyəti onun keçmiş vəziyyətlərindən asılı deyildir; daha sadə deyilsə: sistemin indiki qeyd olunmuş məlum vəziyyətində gələcək keçmişdən asılı deyildir (Markov xassəsi).

(8) və ya (2) münasibətlərlə təyin olunan xassə Markov xassəsidir.

İxtiyari $i, j \in \mathcal{N}$ üçün

$$\mathbf{P}\{\xi_{t+1} = j | \xi_t = i\} = p_{ij}, \quad t=0, 1, \dots \quad (9)$$

bərabərliyi ödənilərsə, yeni p_{ij} ehtimalları t -dən asılı olmazsa, M. z. *bircins* M. z. adlanır. Bu halda elementləri (9) ehtimalları ilə təyin olunan $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ matrisinə *bircins* M. z.-nin keçid ehtimalları matrisi deyilir. Keçid ehtimalları üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_{ij} = 1. \quad (10)$$

$p = (p_1, \dots, p_N)$, $p_i = \mathbf{P}\{\xi_0 = i\}$, $i=\overline{1, N}$ vektoruna başlanğıc ehtimalları vektoru deyilir, burada

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (11)$$

Elementləri (10) şərtini ödəyən ixtiyari $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ matrisinə *stoxastik matris* deyilir; bu matrisin elementləri müsbətdir və hər bir sətir elementlərinin cəmi vahidə bərabərdir.

İxtiyari $\{\xi_t; t=0, 1, 2, \dots\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının M. z. olması üçün bu ardıcılıq (10), (11) və

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}, \xi_t = i_t\} = p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{t-1} i_t}, \quad i_k = 1, 2, \dots, k=1, 2, \dots \quad (12)$$

şərtlərini ödəməlidir.

M. z.-nin adı qaydada verilməsinə aid aşağıdakı misal verilir.

604 MARKOV

Bundan sonrakı şərh üçün M. z.-nin verilməsinin adı qaydası aşağıdakı misalda verilir.

Misal 1. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında $\{p_m(x, S); m \geq 0\}$ stoxastik nüvələr ailəsinin verildiyi fərz olunur $[p(x, S), x \in \mathcal{E}, S \in \mathcal{B}]$ funksiyası əgər S qeyd olunduqda $\mathcal{B}$ – ölçülən, x qeyd olunduqda $\mathcal{B}$ -də ehtimal ölçüsü olarsa, ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ stoxastik nüvə adlanır. $\mathcal{B}$ -də ehtimal ölçüsü μ -nü verərək başlanğıc paylanması μ olan, ixtiyari $S_0, \dots, S_n \in \mathcal{B}, n \geq 1$ üçün sonluölçülülük paylanmaları

$$\mathbf{P}\{\xi_0 \in S_0, \dots, \xi_n \in S_n\} = \int_{S_0} \mu(dx_0) \int_{S_1} p_0(x_0, dx_1) \dots \int_{S_n} p_{n-1}(x_{n-1}, dx_n) \quad (13)$$

düsturu ilə verilən $\{\xi_n; n \geq 0\}$ M. z.-ni qurmaq olur (bax, [9], [13]). (13)-ə görə (bax, həm də, [4]) $p_m(x, S)$ nüvələri həm bu M. z.-nin, həm də bu sonluölçülülük paylanmaları ixtiyari M. z.-nin bir addımlı keçid ehtimalları adlanır. $0 \leq m < n, x \in \mathcal{E}, S \in \mathcal{B}$ olduqda keçid ehtimalları $p(m, x, n, S)$ -lərin tam toplusu rekurrent prosedur vasitəsilə daxil olunur:

$p(m, x, n, \cdot)$ ehtimalları məlum olduğundan,

$$p(m, x, m+1, S) = p_m(x, S)$$

və sonra

$$p(m, x, n+1, S) = \int_{\mathcal{E}} p(m, x, n, dy) p_n(y, S)$$

götürülür; m və n -in qeyd olunmuş qiymətlərində $p(m, x, n, S)$ funksiyası stoxastik nüvədir və ixtiyari x, S və $m < k < n$ qiymətlərində

$$p(m, x, n, S) = \int_{\mathcal{E}} p(m, x, k, dy) p(k, y, n, S)$$

Kolmoqorov-Çepmen tənliyini ödəyir.

Bu funksiya baxılan M. z.-nin ehtimali mexanizmini idarə edir, yeni bütün $m < n$ və S üçün

$$p\{\xi_n \in S | \xi_m\} = p(m, \xi_m; n, S) \quad (13)$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilir və bu isə $p(m, x, n, S)$ funksiyasının $p\{\xi_n \in S | \xi_m = x\}$ şərti ehtimalı kimi adi interpretasiyasının doğruluğuna haqq qazandırır.

Misal 1 onu göstərir ki, klassik mənada M. z.-nin geniş sinfi üçün keçid ehtimalları təyin etmək mümkündür (məs., $\mathcal{E}$ – tam metrik separabel fəza, $\mathcal{B}$ isə bu fəzada təyin olunmuş Borel σ – cəbri olarsa). Digər tərəfdən misal 1 çərçivəsində $p_m(x, S)$ nüvələri üzrə yalnız bir zəncir deyil, bir-birilə uzlaşan, klassik mənada M. z.-lərinin bütöv bir sinfini qurmaq olar (bax, [13]). Daha dəqiq, elə

$$\mathcal{X} = \{\Omega, \mathcal{A}, \xi_n, \mathbf{P}_{kx}; k, n \geq 0, x \in \mathcal{E}\} \quad (14)$$

toplusu göstərmək olar ki, $(\Omega, \mathcal{A})$ – hər hansı ölçülən fəza, ξ_n , – $(\Omega, \mathcal{A})$ -nin $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -yə ölçülən inikası, $\mathbf{P}_{kx}$, –

$\mathcal{A}^k = \sigma(\xi_k, \xi_{k+1}, \dots)$ σ – cəbrlərində verilmiş əla ehtimallardır ki, bunlar üçün P_{kx} – sanki yəqin: a) $n > m \geq k$ olduqda

$$P_{kx}\{\xi_n \in S | \xi_k, \dots, \xi_m\} = P_{kx}\{\xi_n \in \Gamma | \xi_m\} = p(m, \xi_m; n, S) \quad (15)$$

berəberlikləri doğrudur; və b) $\xi_k \in S$, əgər $x \in S$ olarsa ($S \in \mathcal{B}$). $\mathcal{B}$ σ – cəbri $\mathcal{E}$ -nin bütün birməqəli çoxluqlarını da özündə saxladığından, b) şərti sadəcə, $\xi_k = x$ bərabərliyinin P_{kx} – sanki yəqin ödənildiyini ifadə edir, buna görə də, $k \geq 1$ anından başlayan M. z.-ləri halı üçün M. z.-nin ilkin tərifini ümumiləşdirərək $\{\xi_n; n \geq k\}$ toplusunu P_{kx} ölçüsünə nəzərən klassik mənada M. z. kimi, k anında x nöqtəsindən vəziyyəti ilə başlayan, biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(\cdot, \cdot)$, $m \geq k$ ilə M. z. kimi xarakterizə etmək olar.

Bundan sonra (14) toplusu da Markov zənciri adlandırılacaqdır, lakin əvvəlki tərifdən fərqləndirmək üçün (14) toplusu Markov zəncirinin açıqlanmış forması (rus. развернутая форма) adlandırılacaqdır. Bu halda yeri gəldikdə, uyğun $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəza fəzası və $p_m(x, S)$ biraddımlı keçid ehtimalları və ya $p(m, x; n, S)$ keçid ehtimallarının bütün toplusu göstərilməlidir. $p_m(x, S)$ nüvələrinin əvvəlcə verilməsi şərtindən və sonuncu (15) bərabərliyindən imtina edildikdə, $P_{mx}\{\xi_{m+1} \in S\}$, $S \in \mathcal{B}$ funksiyalarının x üzrə $\mathcal{B}$ – ölçülənliyi şərtində biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S) = P_{mx}\{\xi_{m+1} \in S\}$ ilə həmin tərif alınır. Keçid ehtimalları eyni olan M. z.-ləri ekvivalent zəncirlər hesab olunur. (14)-ün ətraflı ifadəsi daha qısa $X = (\xi_n, P_{mx})$ şəkildə yazılır.

Əgər başlanğıc paylanması μ və hər hansı keçid ehtimalları ilə verilən M. z.-ne baxılırsa, onda klassik mənada uyğun zəncirə baxıldığı nəzərdə tutulur. Belə zəncir eyni keçid ehtimallarına malik $X = (\xi_n, P_{mx})$ M. z. üzrə asanlıqla qurulur: buna görə

$$B \in \mathcal{A} \text{ üçün } P_\mu\{B\} = \int_{\mathcal{E}} P_{ox}\{B\} \mu(dx) \text{ götürərək } (\Omega, \mathcal{A}, P_\mu)$$

ehtimal fəzasında $\{\xi_n; n \geq 0\}$ ardıcılığına baxmaq kifayətdir.

Baxılan M. z. üçün zaman parametri n üzrə bircinslik şərtləri qoyulmadığından belə zəncirlər qeyri – bircins M. z. adlandırılır.

Bircins Markov zəncirləri: Zaman üzrə bircinslik xüsusilə maraqlıdır.

$(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında ya klassik mənada, ya da genişləndirilmiş formada M. z. verilir; bu zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S)$ -lər m -dən asılı deyildirlər: $p_m(x, S) \equiv p(x, S)$. Onda keçid ehtimalları $p(m, x; n, S)$ -lərin bütün toplusu bircinslik və ya stasionarlıq xassəsinə malikdir: $p(m, x; n, S) \equiv p(0, x; n-m, S)$ və $[m, n]$ zaman parçasında ($m < n$) zəncirin evolyusiyasının ehtimalı xüsusiyyəti, yalnız bu parçanın uzunluğu $(n-m)$ -dən və təbii ki, ξ_n -dən asılıdır. Buna görə də, belə zəncirlər bircins M. z.-ləri adlanır.

Lakin (14) şəkildə verilmiş bircins M. z. ilə əlaqədar məsələlərdə P_{mx} və P_{ox} ölçüləri arasında yaranan əlaqəni nəzərə alaraq, adətən (müvəqqəti olaraq), $P_x \equiv P_{ox}$ götürərək

$$\{\Omega, \mathcal{A}, \xi_n, P_x; n \geq 0, x \in \mathcal{E}\} \quad (16)$$

– redüslənmiş toplusuna baxılır. (16) toplusu aşağıdakı xassələrə malikdir: 1) ξ_n – $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasına ölçülən inikasıdır; 2) P_x – $\mathcal{A}$ -da ehtimal ölçüsüdür;

$$3) \quad p(x, S) = P_x\{\xi_1 \in S\}, \quad S \in \mathcal{B} \quad (17)$$

berəberliyi $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -də stoxastik nüvə təyin edir.

4) $P_x\{\xi_{n+1} \in S | \mathcal{A}_n\} = p(\xi_n, S)$ bərabərliyi P_x – sanki yəqin ödənilir (bax, [1]; $\mathcal{A}_n$ əvvəlki verilmiş mənada anlaşılır). Əgər əlavə şərtləşmələr olmasa, 1) – 4) xassələnlə verilən ixtiyari (16) toplusu konkret mənşəindən asılı olmayaraq açıqlanmış formada bircins Markov zənciri adlanır, bu zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $p(x, S)$ -lərdir. n addıma uyğun keçid ehtimalları $p(n, x, S)$ -lər

$$p(n, x, S) = P_x\{\xi_n \in S\}, \quad x \in \mathcal{E}, \quad S \in \mathcal{B}$$

düsturu ilə və ya misal 1-də verilmiş rekurent prosedür vasitəsilə təyin olunur; bu halda $p(1, x, S) \equiv p(x, S)$. Bu ehtimallar üçün $m, n \geq 0$ olduqda Kolmoqorov – Çepmen tənliyinin

$$p(m+n, x, S) = \int_{\mathcal{E}} p(m, x, dy) p(n, y, S)$$

bircins variantı doğrudur. (15) bərabərliyi bu halda P_x – sanki yəqin

$$P_x\{\xi_n \in S | \mathcal{A}_m\} = P_x\{\xi_n \in S | \xi_m\} = p(n-m, \xi_m, S), \quad n > m \geq 0$$

şəkildə olur.

Sırf Markov xassəsi – X bircins Markov zəncirinin (13) Markov xassəsinin gücləndirilmiş formasıdır (ciddi Markov zəncirinin tam tərfi Markov proseslərinin ümumi nəzəriyyəsi çərçivəsində verilir).

τ funksiyası X M. z.-nin Markov anı olsun. $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$, yeni τ , $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 0$ kimi təyin olunsun. (Misallar: $\tau \equiv m$, $m \geq 0$ və ya $\tau_S = \inf\{n > 0; \xi_n \in S\}$ – başlanğıc andan sonra S -ə ($S \in \mathcal{B}$) ilk çatma anı olsun; burada tərifə görə $\inf \emptyset = \infty$). $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ çoxluğunun altçoxluluğu $\mathcal{B}$ -nin ($\mathcal{B} \subset \Omega_\tau$) – τ anından gec olmayaraq baş verən hadisələr çoxluğu – $\mathcal{A}_\tau$ ailəsindən olduğu nəzərdə tutulur.

Ən sadə şəkildə sırf Markov xassəsi (bax, [12])

$$P_x\{\xi_{n+\tau} \in S | \mathcal{A}_\tau\} = p(n, \xi_\tau, S)$$

berəberliyinin Ω_τ çoxluğunda P_x – sanki yəqin ödənilməsinə getirilir. Qeyri – bircins zəncirlər üçün bu hökmün uyğun modifikasiyası doğrudur.

Misal 2. Bircins M. z.-ne aid mühüm misallar bircins sonlu Markov zəncirləri və hesabi Markov zəncirləri ilə əlaqədar alınır. Belə zəncirlər üçün uyğun $\mathcal{E}$ fəzası bu və ya digər qayda ilə sonlu $\{1, \dots, N\}$ toplusu ($N \geq 1$) və ya hesabi $\{1, 2, \dots\}$ toplusu ilə eyniləşdirilir; $\mathcal{B}$ σ – cəbrləri kimi $\mathcal{E}$ -nin bütün mümkün altçoxluluqları çoxluğu götürülür. Ənənəvi olaraq, belə zəncirlərin

keçid ehtimalları kimi (17) ölçülərinin tam toplusu deyil, yalnız $\{p_{ij}; i, j \in \mathcal{E}\}$ toplusu götürülür və burada $p_{ij} = p(1, i, \{j\})$,

– i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır. Bu hallara uyğun düsturlarda integrallanmanı cəmləmə ilə əvəz etmək mümkün olur (məs., Kolmoqorov – Çepmen tenliyində).

Misal 3. $\mathcal{E}$ kimi topoloji qrup götürülür. $\mathcal{B}$ uyğun Borel σ – cəbridir. $\mathcal{B}$ -də təyin olunmuş ixtiyari ehtimal ölçüsü μ hər hansı bir cins M. z.-nin biraddımlı keçid $p(x, S) = \mu(x^{-1}, S)$ ehtimalları doğurur. $x \in \mathcal{E}$, $S \in \mathcal{B}$, x^{-1} , – x -ə tərs element, $x^{-1}S = \{x^{-1}y; y \in S\}$. Bu bir cins M. z.-ne $\mathcal{E}$ -də sağ təsadüfi dolaşma və ya ixtiyari $y \in \mathcal{E}$ üçün $p(yx, yS) \equiv p(x, S)$ olduğundan $\mathcal{E}$ -də sol yerdəyişmələrə nəzərən invariant Markov zənciri deyilir, sol təsadüfi dolaşmalar analoji qaydada təyin olunur. Daxil olunmuş bu anlayışlar stoxastik qrup anlayışı ilə bilavasitə əlaqədardır (bax, [12], [17]).

Misal 4. Ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında verilmiş və biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S)$ olan qeyri – bir cins M. z.-ni araşdırmaq üçün qayda vardır, bu qayda ilə baxılan M. z. $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{B}}) = (\mathcal{E} \times T, \mathcal{B} \times \mathcal{B}_0)$ fəza fəzasında hər hansı bir cins M. z.-ne gətirilir, burada $T = \{0, 1, \dots\}$, $\mathcal{B}_0$, – T -nin bütün altçoxlularının çoxluğudur. Qeyd olunan zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{S})$, $x \in \mathcal{E}$, $S \in \mathcal{B}$, – $\tilde{x} = (x, m)$, $x \in \mathcal{E}$, $m \in T$, $S = \{y \in \mathcal{E}; (y, m+1) \in \tilde{S}\}$ olduqda $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{S}) = p_m(x, S)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Beləliklə, vəziyyətlərin T -dəki proyeksiyaları, yeni zəncirin $\mathcal{E} \times T$ -dəki trayektoriyalarının keçdiyi vəziyyətlərin proyeksiyaları, determinik olaraq dəyişir.

Ayrılmayan bir cins Markov zəncirləri.

Vəziyyətləri sayı hesabını aşmayan yaxşı araşdırılmış M. z.-nin tərif və nəticələrinin ümumi hal üçün ifadə olunması istiqamətində kifayət qədər səylər göstərilmişdir (bax, [5], [6], [9], [11], [12], [15]). $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verilmiş $X = (\xi_n, P_x)$ bir cins M. z.-nin n addıma keçid ehtimalları $p(n, x, S)$, μ , – $\mathcal{B}$ -də σ – sonlu ölçü olsun. Əgər $\inf_{n \geq 1} \{p(n, x, S)\} > 0$ və ya bu şərtlə eynigüdü $\mu(S) > 0$ olduqda ixtiyari $x \in \mathcal{E}$ üçün $P_x\{\tau_S < \infty\} > 0$ şərti ödənilərsə (τ_S -in tərif üçün bax yuxarı), X zənciri tərifə görə μ – ayrılmayan zəncirdir.

Ayrılmayan Markov zəncirinin klassik anlayışı sonlu və ya həssas $\mathcal{E}$ çoxluğu və $\mathcal{E}$ -nin hər bir nöqtəsinə müsbət çəki qarşı qoyan μ ölçüsünə görə təyin olunur: bu halda sonuncu tərifdəki bütün bərabərsizliklər S -in ixtiyari bımöqtəli çoxluqları üçün şübhəsiz ki, ödənilir və bu da nəzəriyyənin ciddi sadələşməsinə səbəb olur.

Ümumi halda belə çoxluqlar rolunu müəyyən qədər C – çoxluqları oynayır: ixtiyari $A \in \mathcal{B}$ çoxluğu üçün ələ $\nu(A) > 0$ və müsbət b və natural n varsa ki, $B \in \mathcal{B}$, $x \in A$ olduqda $p(n, x, B \cap A) \geq b\nu(B \cap A)$ olsun, onda C – çoxluq adlanır. Əgər $\mathcal{B}$ σ – cəbri özünün hesabı saydan çox olmayan elementlərinin doğurduğu σ – cəbr olarsa, onda ixtiyari $S \in \mathcal{B}$

$[\nu(S) > 0]$ özündə hər hansı C – çoxluğu saxlayır (bax, [11], [12], [25]).

X -in μ – ayrılmayan zəncir olmasından alınır ki, natural d ədədlərinin ələ sonlu toplusu vardır ki, bunlardan hər biri üçün cüt-cüt kəsişməyən $C_i \in \mathcal{B}$, $1 \leq i \leq d$ çoxluqlarını göstərmək mümkündür və bu çoxluqlar:

1) əgər $x \in C_i$, $i < d$ olarsa, $p(x, C_{i+1}) = 1$,

əgər $x \in C_d$, olarsa, $p(x, C_1) = 1$;

2) $\bigcup C_i$ birləşməsinin tamamlayıcısı D -nin ölçüsü μ , 0-a

bərabərdir və D tamamlayıcısı tranzitiv D_i , $i \geq 1$ çoxluqlarının hesabı birləşməsi kimi ifadə oluna bilər (D_i -nin tranzitivliyi: ixtiyari $x \in \mathcal{E}$ üçün $\xi_n \in D_i$, P_x – sanki yəqin yalnız n qiymətlərinin sonlu toplusu üçün doğrudur). Qeyd olunan xassələrə malik d ədədlərdən ən böyüyü zəncirin periodu adlanır ($d=1$ olduqda zəncir qeyri-periodik adlanır).

Tərifə görə uyğun $C_1, \dots, C_d$ çoxluqları M. z.-nin tsiklik sinifləridir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin

təsnifatı). Vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{E}$ -nin $\mathcal{E} = D \cup \left[\bigcup_{1 \leq i \leq d} C_i \right]$

ayrılığı ilə ν – ölçüsü sıfıra bərabər çoxluq dəqiqliyi ilə yeganədir (bax, [11]). Hər bir C – çoxluq olan S (ν – ölçüsü sıfıra bərabər çoxluq dəqiqliyi ilə) tsiklik siniflərin birinə daxildir və n -in olduqca böyük qiymətlərində bütün $x \in S$ -lər üçün eyni zamanda $p(nd, x, S) > 0$ olur.

Harris qaydışı. Diskret M. z. nəzəriyyəsinin mərkəzi anlayışlarından biri – *qaydışı Markov zənciri* anlayışı ümumi hal üçün baxıldıqda müxtəlif şəkillərdə ifadə olunur (məs., ölçülən strukturların seçilməsindən və ya $\mathcal{E}$ -də topologiyanın mümkünlüyündən asılı olaraq).

Geniş istifadə olunan tərif [18]-də şərh olunmuşdur. Bu tərif aşağıdakı kimi ifadə olunur. $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -də keçid ehtimalları $p(x, S)$ olan $X = (X_n, P_x)$ M. z.-nin verildiyi fərz olunur, ν , – $\mathcal{B}$ -də σ – sonlu ölçü olsun. Əgər $\nu(S) > 0$ olduqda bütün $x \in \mathcal{E}$ üçün $\tau_S < \infty$, P_x – sanki yəqin ödənilərsə, X zənciri Harris qaydışı və ya ν – qaydışı zəncir adlanır. Belə zəncir ν – ayrılmayıandır, sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə σ – sonlu $\mu \neq 0$ invariant ölçüsünə malikdir

[bütün $S \in \mathcal{B}$ üçün əgər $\int_{\mathcal{E}} p(x, S) \mu(dx) = \mu(S)$ olarsa,

$\mathcal{B}$ -də təyin olunmuş μ ölçüsü X üçün invariant ölçüdür] və μ – qaydışıdır. Belə bir fakt tez-tez tətbiq olunur: hər hansı $S \in \mathcal{B}$ üçün $\mu(S) > 0$, yalnız və yalnız, o halda olur ki, X_n nöqtəsi n -in sonsuz sayda çoxlu qiymətləri üçün P_x – sanki yəqin S çoxluğuna daxil ola bilsin, məhz bu Harris qaydışının tərif üçün əsas götürülür (bax, [12]).

X zəncirinin Harris qaydışı zəncir olması X -də bir sıra mühüm erqodik xassələrin varlığını təmin edir (bax, [12]). Belə ki, əgər f, g , – $\mathcal{E}$ -də verilən, μ üzrə integrallanan funksiyalar dırsa və $\mu(g) \equiv \int g d\mu \neq 0$ olarsa, onda P_x – sanki yəqin $x \in \mathcal{E}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=1}^n f(X_m) / \sum_{m=1}^n g(X_m) \right] = \mu(f)/\mu(g) \quad (18)$$

və μ – sanki hər yerdə $\mathcal{E}$ -də

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=1}^n \mathbf{P}^m f / \sum_{m=1}^n \mathbf{P}^m g \right] = \mu(f)/\mu(g) \quad (19)$$

münasibətləri ödənilir, burada, məs.,

$$\mathbf{P}^m g(x) = \int_{\mathcal{E}} g(y) p(m, x, dy), \quad m \geq 1.$$

Həqiqətdə də, (19) münasibəti $\mathcal{E}$ -də hər yerdə doğrudur, bu şərtlə ki, f və g funksiyaların olduqca geniş xüsusi bir sinfindən götürülsün (bax, [12]). $\mu(\mathcal{E}) < \infty$ olan mühüm xüsusi bir halda (18) böyük ədədlər qanununa gətirilir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^{-1} \sum_{m=1}^n f(X_m) \right] = \mu(f)/\mu(1)$$

münasibəti $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilir, $x \in \mathcal{E}$.

Orey teoreminə əsasən $\mathcal{E}$ -də ixtiyari $v_i, i=1, 2$ ehtimal ölçüləri üçün X -in qeyri – periodik olması tələbi $v_1 \mathbf{P}^n - v_2 \mathbf{P}^n$ nüvəsinin tam variasiyasının sıfıra $n \rightarrow \infty$ olduqda yaxınlaşmasını təmin edir, burada

$$v_i \mathbf{P}^n(\cdot) = \int p(n, y, \cdot) v_i(dy)$$

(xüsusi halda, $\mu(\mathcal{E}) < \infty$ və $\tilde{\mu} = \alpha_\mu, \alpha = \mu^{-1}(\mathcal{E})$ olarsa,

$v_1 \mathbf{P}^n - \tilde{\mu}$ tam variasiyası sıfıra yaxınlaşır).

M. z. ümumi nəzəriyyəsində Harris qayıdışı şərtindən başqa digər tələblərə də təsadüf olunur; məs., *Döblin şərti* belə tələblərdəndir, bu şərt uyğun zəncirlərin strukturu və asimptotikasını xarakterizə etməyə imkan yaradır.

M. z. anlayışının bir sıra bilavasitə alınan ümumiləşmələri vardır. Məs., zaman parametri n -in $\{\dots, -1, 0\}$ çoxluğundan adi qayda ilə və ya adi qaydaya tərs qayda ilə qiymətlər aldığı fərz etmək olar (bax, *Çevrilmiş Markov zənciri*). Markov prosesləri nəzəriyyəsi ilə analoji təsadüfi yaranış (doğum) anları və kəsilen anları M. z.-ləri və zamandan asılı vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən M. z. də daxil olunur (bax, *Mürəkkəb Markov zənciri*, *Semi – Markov prosesi*).

M. z.-nin ən yeni problematikası əsas etibarilə: M. z.-lərinin asimptotikasının araşdırılmasına istiqamətlənmişdir. Bu istiqamətdə əsas diqqət ehtimal nəzəriyyəsi üçün klassik üslublu limit teoremlərinin (bax, [21], [24]), erqodik teoremlərin, nisbətlər üçün limit teoremlərinin qoyuluşu ilə bağlı məsələlərə yönəlir (bax, [22], [23], həmçinin *Limit teoremləri Markov zəncirləri* üçün, *Limit teoremləri* M. z.-ndə nisbətlər üçün).

Qeyri – bircins Markov zəncirləri nəzəriyyəsi üzrə də araşdırmalar vardır.

Sonlu və ya hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə təyin olunan Markov prosesinə də bəzən M. z. kimi baxılır.

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-мат. об-ва Казан. ун-та», 1906, т. 15, с. 135–56; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [3] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1936, т. 1 с. 607–10; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математичес-

кая статистика, М., 1936, с. 183–97; [5] «Bull. Math. Soc. Roum. Sci.», 1937, т. 39, № 1, р. 57–115; № 2, р. 3–61; [6] Doedlin W., «Ann. Sci. Ecole norm. sup.», 1940, т. 57, р. 61–111; [7] Феллер В., Введения в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [8] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [9] Дуб Д. ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [10] Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, М., 1954; [11] Огеу S., Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities, N. Y., – [а. о.], 1971; [12] Revuz D., Markov chains, Amst. – Oxf. – N. Y., 1975 (рус. пер. – Ревюз Д., Цепи Маркова, М., 1997); [13] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [14] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [15] Баруча – Рид А. М., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [16] Королук В. С., Турбин А. Ф., Математические основы фазового укрупнения сложных систем, К., 1978; [17] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [18] Harris T. E., в сб.: Proceeding of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1956, р. 113–24; [19] Tweedie R. L., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, № 5, р. 840–78; [20] Mukherjea A., «Math. Z.», 1983, Bd 183, № 3, S. 293–309; [21] Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., «Теория вероят. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 219–28; [22] Шум М. Г., «Теория вероят. и ее примен.», 1984, т. 29, № 4, с. 692–702, 1985, т. 30, № 2, с. 241–51; [23] Карташов Н. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1985, т. 30, № 2, с. 230–41; [24] Малюновский Э., «Теория вероят. и ее примен.», 1985, т. 31, № 2, с. 315–32; [25] Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989; [26] Ширяев А. Н., Вероятность, М., Наука, 1980.

MARKOV ZƏNCİRİ açılmış formada «Маркова цепь в развернутой форме: Markov chain in the expanded form» – bax, *Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ atsiklik / aperiodik «Маркова цепь ациклическая / аперидическая; aperiodic / nonperiodic / non-cyclic Markov chain» – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ ayrılan «Маркова цепь приводимая / разложимая; reducible / decomposable Markov chain» – bax, *Ayrılan Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ ayrılmayan «Маркова цепь неразложимая, неприводимая; irreducible / indecomposable Markov chain» – bax, *Ayrılmayan Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ bircins «Маркова цепь однородная; homogeneous Markov chain» – bax, *Markov zənciri*, *Bircins Markov zənciri zaman üzrə*.

MARKOV ZƏNCİRİ çevrilmiş «Маркова цепь обращенная; reversed Markov chain» – bax, *Çevrilmiş Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ daxil edilmiş «Маркова цепь вложенная; embedded Markov chain» – bax, *Daxil edilmiş Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ dissipativ «Маркова цепь диссипативная; dissipative Markov chain» – bax, *Daxil edilmiş Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ; *ekssessiv funksiya* «**Маркова цепь;** экссессивная функция; **Markov chain;** excessive function» – bax, *Ekssessiv funksiya Markov zənciri üçün.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *ekssessiv ölçü* «**Маркова цепь;** экссессивная мера; **Markov chain;** excessive measure» – bax, *Ekssessiv ölçü Markov zənciri üçün.*

MARKOV ZƏNCİRİ *erqodik* «**Маркова цепь** эргодическая; **ergodic Markov chain**» – bax, *Erqodik Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *erqodik sinif* «**Маркова цепь;** эргодический класс; **ergodic class / set of a Markov chain**» – vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ sonlu və ya hesabi bircins Markov zəncirinin vəziyyətlərinin müsbət sinfidir (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*). Erqodik sinif adı onunla izah olunur ki, bütün vəziyyətləri bir erqodik sinif əmələ gətirən M. z.-ində yeganə $\{p_j\}_{j \in \mathcal{E}}$ stasionar paylanması vardır və bu halda erqodik teorem (böyük ədədlər qanunu) doğrudur, yəni ilkin (başlanğıc) paylanma ixtiyarı olduqda $\mathcal{E}$ -də ixtiyarı f funksiyası üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(X_i) = \sum_{j \in \mathcal{E}} f(j) p_j \quad (\text{sanki yəqin})$$

münasibəti sağ tərəfdəki sıra mütləq yığıldıqda doğrudur.

Bax, *Erqodik Markov zənciri.*

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

MARKOV ZƏNCİRİ; *əlaqəli vəziyyətlər* «**Маркова цепь;** сообщающиеся состояния; **Markov chain;** communicating states» – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *faza fəzası* «**Маркова цепь;** фазовое пространство; **state space of a Markov chain**» – bax, *Faza fəzası Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *fundamental matris* «**Маркова цепь;** фундаментальная матрица; **Markov chain;** fundamental matrix» – sonlu və ya hesabi vəziyyətləri və (sub) stoxastik keçid matrisi P olan bircins Markov zəncirində

$$Z = I + \sum_{n=1}^{\infty} (P^n - P^{\infty}) = [I - (P - P^{\infty})]^{-1}$$

matrisidir, burada, ümumiyyətlə, sıra Abelə görə (və ya Çezaroya görə) cəmlənəndir; P^{∞} limiti də belə mənada anlaşılır. Sonlu zəncirdə fundamental matris həmişə mövcuddur. Başqa bir çoxluğu ilk keçmə anına qədər (və ya proses qınlana qədər) müəyyən bir çoxluğa keçidlər sayının (təsadüfi kəmiyyət olan) birinci və ikinci momentləri fundamental matrislə yaxşı surətdə ifadə olunur; müxtəlif ilkin vəziyyətlərdə verilən çoxluğa keçidlərin gözlənilən saylarının limit fərqləri $n \rightarrow \infty$ olduqda və bu gözləmələr sonsuzluğa yaxınlaşdıqda və s. hallarda da bunu söyləmək olar. Fundamental matrislər potensial nəzəriyyəsində və idarəolunan M. z.-də də tətbiq olunur.

608 MARKOV

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

MARKOV ZƏNCİRİ; *harmonik funksiya* «**Маркова цепь;** гармоническая функция; **Markov chain;** harmonic function» – bax, *Harmonik funksiya Markov zənciri üçün.*

MARKOV ZƏNCİRİ *Harris qayıdışlı* «**Маркова цепь** возвратная по Харрису; **Harris recurrent Markov chain**», *v-qayıdışlı* – bax, *Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *hesabi* «**Маркова цепь;** счетная; **countable Markov chain**» – bax, *Hesabi Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *idarəolunan* «**Маркова цепь** управляемая; **controlled Markov chain**» – bax, *İdarəolunan Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *keçid ehtimalı* «**Маркова цепь;** переходная вероятность; **Markov chain;** transition probability» – bax, *Ehtimal; keçid ehtimalı.*

MARKOV ZƏNCİRİ *klassik mənada* «**Маркова цепь** в классическом смысле; **Markov chain in the classical sense**» – bax, *Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *qayıdışlı* «**Маркова цепь** возвратная; **recurrent Markov chain**» – bax, *Qayıdışlı Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *qayıdışsız* «**Маркова цепь** невозвратная; **transient/nonrecurrent Markov chain**» – bax, *Qayıdışsız Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *qeyri-bircins* «**Маркова цепь** неоднородная; **nonhomogeneous Markov chain**» – bax, *Qeyri-bircins Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *qeyri-dissipativ* «**Маркова цепь** недиссипативная; **non-dissipative Markov chain**» – bax, *Qeyri-dissipativ Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ *qeyri-periodik* «**Маркова цепь** непериодическая; **aperiodic Markov chain**» – *atsiklik Markov zənciridir* (bax, *Markov zənciri*).

MARKOV ZƏNCİRİ; *limit teoremləri* «**Маркова цепь;** предельные теоремы; **Markov chain;** limit theorems» – bax, *Limit teoremləri Markov zəncirləri üçün.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *limit teoremləri nisbətlər üçün* «**Маркова цепь;** предельные теоремы для отношений; **Markov chain;** ratio limit theorems» – bax, *Limit teoremləri Markov zəncirində nisbətlər üçün.*

MARKOV ZƏNCİRİ *mürəkkəb* «**Маркова цепь** сложная; **high-order Markov chain**» – bax, *Mürəkkəb Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; *mütləq paylanma* «**Маркова цепь;** абсолютное распределение; **Markov chain;** absolute probabilities» – bax, *Mütləq paylanma(sı) Markov zənciri və ya Markov prosesinin.*

MARKOV ZƏNCİRİ; orta qayıdış müddəti «Маркова цепь; среднее время возвращения; Markov chain; mean recurrence time» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ periodik «Маркова цепь периодическая; cyclic/periodic Markov chain» – bax, Tsiklik Markov zənciri.

MARKOV ZƏNCİRİ; potensial nəzəriyyəsi «Маркова цепь; теория потенциала; Markov chain; the potential theory» – bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov zənciri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ rəqulyar «Маркова цепь регулярная; regular Markov chain» – bax, Rəqulyar Markov zənciri.

MARKOV ZƏNCİRİ; statistik modelləşdirmə «Маркова цепь; статистическое моделирование; Markov chain; statistical modeling» – bax, Statistik modelləşdirilmə (si) Markov zəncirlərinin.

MARKOV ZƏNCİRİ; təkrar loqarifm qanunu «Маркова цепь; повторного логарифма закон; Markov chain; law of iterated logarithm» – bax, Təkrar loqarifm qanunu Markov zəncirləri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ tranzitiv «Маркова цепь транзитивная; transitive Markov chain» – bax, Qayıdışsız Markov zənciri.

MARKOV ZƏNCİRİ tsiklik «Маркова цепь циклическая; cyclic Markov chain» – bax, Tsiklik Markov zənciri.

MARKOV ZƏNCİRİ; tsiklik vəziyyət «Маркова цепь; циклическое состояние; cyclic/periodic state of a Markov chain» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; uducu vəziyyət «Маркова цепь; поглощающее состояние; Markov chain; absorbing state» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin altsinfi «Маркова цепь; подкласс состояний; Markov chain; cyclic subclass of states» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin çoxaldılması «Маркова цепь; укрупнение состояний; Markov chain; mergence of states» – Markov zəncirinin ehtimal ifadəsidir ki, vəziyyətlərin faza fəzasının kəsişməyən X_n vəziyyətlərinin siniflərinə

$$X = \bigcup_{n \in U} X_n$$

bölgüsünün varlığı halında mümkündür və bu halda $x \in X_n$ üçün $u(x) = u$ çoxaltma funksiyası U faza fəzasında

$$y_n = u(x_n), \quad n \geq 0$$

M. z. təyin edir. Tətbiqi hallarda, seriyalar sxeminde, $x_n^{(e)}$, $n \geq 0$ M. z.-nin vəziyyətlərinin asimptotik çoxaldılması

$$y_n^{(e)} = u(x_n^{(e)}), \quad n \geq 0$$

prosesinin (ümumiyyətlə, Markov prosesi olmayan) $\varepsilon \rightarrow 0$

olduqda limitdə U vəziyyətlər faza fəzasında y_n^0 , $n \geq 0$ M. z.-ne yığıldığı halda ən effektiv olur (ε – seriyanın parametridir).

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [2] Корольук В. С., Турбин А. Ф., Математические основы фазового укрупнения сложных систем, К., 1978.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin əhəmiyyətsiz sinfi «Маркова цепь; несущественный класс состояний; Markov chain; non-essential set/class of states» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin mühüm sinfi «Маркова цепь; существенный класс состояний; Markov chain; essential class/set of states» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin müsbət sinfi «Маркова цепь; положительный класс состояний; Markov chain; positiv class/set of class» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin sıfır sinfi «Маркова цепь; нулевой класс состояний; Markov chain; null set/class of states» – bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin təsnifatı «Маркова цепь; классификация состояний; Markov chain; classification of states» – faza fəzası $\mathcal{E}$ sonlu və ya hesabi olan bircins Markov zənciri vəziyyətlərinin arifmetik xassələri və n addıma keçid ehtimallarının asimptotikası üzrə siniflərə bölgüsüdür. 1937-də A. N. Kolmogorov tərəfindən təklif edilmişdir (bax, [1]). ($\mathcal{E}$ sonlu fəza olduqda V. Döblin tərəfindən [2]-də asılı olmadan alınmışdır).

p_{ij} , $(i, j) \in \mathcal{E}$ – zəncirin keçid ehtimalları, $P = \|p_{ij}\|$ –

Markov zəncirinin keçid ehtimallar matrisi olsun. $\|p_{ij}(n)\| = P^n$; bu bərabərlik $p_{ij}(n)$ n addıma keçid ehtimalları olduğu

halda doğrudur. Tərifə görə $\|p_{ij}(0)\| = I$. Vəziyyətlərin faza fəzası $\mathcal{E}$ sonlu olduğu halda (hesabi halda baxıla bilər) təsnifatın birinci mərhələsi P matrisində sıfırların yerləşməsi ilə təyin olunur (bu təsnifat vəziyyətlər fəzası sonlu olan zəncirləri əhatə edir). n -in hər hansı $n \geq 0$ qiymətində $p_{ij}(n) > 0$ olarsa, j vəziyyətinə i vəziyyətdən j vəziyyətinə keçid mümkün olan vəziyyət deyildir (rus. «состояние j достижимо из состояния i »), əgər bütün $n \geq 0$ qiymətlərində $p_{ij}(n) = 0$ olarsa, j i vəziyyətdən j -yə keçid mümkün olmayan vəziyyət adlanır (rus. «недостижимо из i »). Sonlu sayda addıma $i \in \mathcal{E}$ vəziyyətdən $j \in \mathcal{E}$ vəziyyətinə sıfırdan fərqli ehtimalla keçid mümkün

olub, j -dən i -yə keçid mümkün olmazsa, yeni ele m və j olarsa ki, $p_{ij}(m) > 0$ olub, bütün $n \geq 0$ qiymətlərində $p_{ij}(n) = 0$ olsun, onda i vəziyyətinə əhəmiyyətsiz (qeyri-mühüm) vəziyyət deyilir. Bütün əhəmiyyətsiz vəziyyətlərin çoxluğu $\mathcal{R}$ vəziyyətlərin əhəmiyyətsiz sinfi adlanır.

Sonlu Markov zəncirində $\mathcal{E} \setminus \mathcal{R}$ həmişə boş olmayan çoxluqdur, hesabı zəncirin bütün vəziyyətləri əhəmiyyətsiz vəziyyətlər ola bilər.

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{R}$ çoxluğuna aid vəziyyətlərə mühüm vəziyyətlər (rus. существенные состояния) deyilir. Əgər i vəziyyəti j -dən i -yə keçid mümkün olan vəziyyətdir və j vəziyyəti də i -dən j -yə keçid mümkün olan vəziyyətdir, i və j vəziyyətləri qarşılıqlı əlaqəli vəziyyətlər adlanır. Vəziyyətlərin bir-birilə əlaqəliliyi xassəsi refleksiv, simmetrik və tranzitivdir. Buna görə də, mühüm vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{E} \setminus \mathcal{R}$ kəsişməyən ele C_α mühüm sinflərinin birləşməsidir ki, hər bir sinfdə bütün vəziyyətlər öz aralarında əlaqədirlər, lakin müxtəlif mühüm sinflərdən olan vəziyyətlərdən birindən digərinə keçid mümkün deyildir. Hər bir C_α sinfində

$$\sum_{j \in C_\alpha} p_{ij} = 1, \quad i \in C_\alpha$$

berabərliyi ödənilir, odur ki, hər bir C_α sinfində müstəqil M. z. alınır. i mühüm vəziyyəti üçün $d = \text{e.b.o.b.} \{n: n \geq 1, p_{ii}(n) > 0\}$ ededine i vəziyyətinin periodu deyilir. C_α mühüm sinfinin bütün vəziyyətlərinin periodları bərabərdir; d C_α sinfinin periodu da adlandırılır. Əgər $d > 1$ olarsa, i vəziyyəti periodik (və ya tsiklik) vəziyyət, $d = 1$ olarsa, qeyri-periodik (atsiklik) vəziyyət adlanır. d periodlu C_α mühüm sinfi cüt-cüt kəsişməyən ele $C_\alpha^0, C_\alpha^1, \dots, C_\alpha^{d-1}$ altsinflərinin birləşməsidir ki, əgər $i \in C_\alpha^k$ olarsa, onda

$$\sum_{j \in C_\alpha^k} p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } l - k \equiv 1 \pmod{d} \\ 0, & \text{əgər } l - k \not\equiv 1 \pmod{d} \end{cases}$$

münasibəti doğrudur.

Beləliklə, hər bir addımda trayektoriya C_α^k altsinfindən C_α^{k+1} altsinfinə 1 ehtimalla keçir (C_α^{d-1} -dən C_α^0 altsinfinə). Əgər C_α^k altsinfi sonlu sayda vəziyyətlərdən ibarətdir, onda olduqca böyük bütün natural m ədədləri, ixtiyari $i, j \in C_\alpha^k$ vəziyyətlər cütü üçün $p_{ij}(md) > 0$ olur. Əgər C_α mühüm sinfi olub, yeganə i vəziyyətdən ibarətdir, onda i uducu vəziyyət adlanır; uducu vəziyyət üçün n -in bütün qiymətlərində $p_{ii}(n) = 1$.

Zəncirin vəziyyətlərinin sonrakı təsnifatı $\mathcal{E}$ faza fəzasının hesabı olduğu halı üçün mühümdür, lakin bu təsnifat sonlu $\mathcal{E}$ üçün formal olaraq öz qüvvəsində qalır. Bu təsnifat verilən vəziyyətə qayıdış ehtimalı və orta müddəti ilə bağlıdır.

$$\tau_i = \begin{cases} +\infty, & \text{əgər bütün } t \geq 1 \text{ qiymətlərində } X_t \neq i \text{ olarsa,} \\ \min\{t: t \geq 1, X_t = i\}, & \text{əks halda} \end{cases}$$

olsun.

i vəziyyətinə qayıdış ehtimalı f_{ii}

$$f_{ii}(n) = \mathbf{P}_i\{X_t \neq i, 0 < t < n, X_n = i \text{ olarsa}\},$$

olarsa,

$$f_{ii} = \mathbf{P}_i\{\tau_i < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)$$

düsturu ilə təyin olunur. Əgər $f_{ii} = 1$ olarsa, $i \in \mathcal{E}$ qayıdışlı vəziyyət, $f_{ii} < 1$ olarsa, qayıdışsız vəziyyət adlanır.

Sonlu Markov zəncirində qayıdışsız vəziyyətlər çoxluğu əhəmiyyətsiz vəziyyətlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür, hesabı zəncirdə əhəmiyyətsiz vəziyyət qayıdışsız vəziyyətdir, tərsi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir (bax, aşağı, misal 2). Əgər i qayıdışlı vəziyyətdir, onda trayektoriyanın bu vəziyyətə sonsuz dəfə qayıdış ehtimalı 1-ə bərabərdir, əgər i qayıdışsız vəziyyət olarsa, onda i -yə qayıdış ehtimalı sıfıra bərabərdir. i vəziyyətinin qayıdışlı vəziyyət olması üçün zəruri və kifayətdir ki, i vəziyyətinə qayıdışlar sayının riyazi gözləməsi sonsuzluğa bərabər olsun, yeni $\sum_n p_{ii}(n)$ sırası dağılan olsun. Bir C_α

sinfinin bütün vəziyyətlərinin hamısı ya qayıdışlı, ya da ki, hamısı qayıdışsızdır; bu hallarda C_α sinfi uyğun olaraq, qayıdışlı və ya qayıdışsız sinfi adlanır. i vəziyyətinə orta qayıdış müddəti aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$m_{ii} = \mathbf{M}_i \tau_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n), & \text{əgər } i \text{ qayıdışlı vəziyyətdir,} \\ +\infty, & \text{əgər } i \text{ qayıdışsız vəziyyətdir.} \end{cases}$$

Əgər $m_{ii} = \infty$ olarsa, i sıfır vəziyyət, $m_{ii} < \infty$ olarsa, i müsbət vəziyyət adlanır. Hər hansı C_α sinfində bütün vəziyyətlər eyni zamanda ya sıfır vəziyyətlər və ya eyni zamanda müsbət vəziyyətlərdir; C_α sinfi, bu hallarda uyğun olaraq, vəziyyətlərin sıfır sinfi və ya vəziyyətlərin müsbət sinfi adlanır. Sonlu sayda vəziyyətlər çoxluğu olan mühüm C_α sinfi (o cümlədən, faza fəzası $\mathcal{E}$ sonlu zəncirin ixtiyari mühüm sinfi) hökmən qarşılıqlı və müsbət sinfidir.

Vəziyyətlərin bu və ya digər sinfə aid olması addımlar sayı n -in böyük qiymətlərində keçid ehtimallarının asimptotikası ilə bağlıdır. Əgər i əhəmiyyətsiz, qayıdışsız və ya sıfır vəziyyət olarsa, onda ixtiyari $i \in \mathcal{E}$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0$$

münasibəti doğrudur. Eyni bir müsbət C_α sinfinin i və j vəziyyətləri üçün Çezaroya görə müsbət limitlər mövcuddur:

$$p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ij}(t) = \frac{1}{m_{jj}}, \quad \sum_{j \in C_\alpha} p_j = 1;$$

eger bundan başqa, C_α sinfinin periodu 1-ə bərabər olarsa, Çezaroya görə limiti adi limitlə evəz etmək olar. C_α müsbət d sinfinin periodu 1-dən böyük olarsa, $i \in C_\alpha^k$, $j \in C_\alpha^l$ olduqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(l-k+nd) = d/m_{ij}$$

münasibəti doğrudur və eger $t \not\equiv l-k \pmod{d}$ olarsa, $p_{ij}(t) = 0$ olur. Əgər $j \in C_\alpha$ müsbət qeyri - periodik vəziyyət, i əhəmiyyətsiz vəziyyət olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_{ia}/m_{ij}$$

münasibəti doğrudur, burada π_{ia} , - i vəziyyətindən çıxan trayektoriyanın C_α mühüm sinfində udulması ehtimalıdır; $d > 1$ olduqda bu münasibət Çezaro menada limit üçün də doğrudur.

Zəncirin müsbət sinifləri ilə stasionar paylanmalar, yeni $\mu_i \geq 0$, $\sum_i \mu_i = 1$ ele $\mu = \{\mu_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ ədədlər toplusu ilə bağlıdır ki, bunlar

$$\mu_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} \mu_i p_{ij}, \quad j \in \mathcal{E}, \quad (1)$$

münasibətilə təyin olunurlar.

Hər bir müsbət C_α sinfinə C_α -da toplanmış yeganə μ^α stasionar paylanması uyğundur, yeni $\mu_i^\alpha = \mu_i = m_i^{-1}$, $i \in C_\alpha$. α zəncirin bütün müsbət siniflərinin çoxluğunda dəyişdikdə, bütün stasionar paylanmaların çoxluğu μ^α vektorlarının qabarıq örtüyüdür. Əgər zəncirin müsbət sinifləri varsa (məs., əgər $\mathcal{E}$ sonlu fəza olarsa), onda stasionar paylanma vardır, əgər belə sinif yeganədirsə, stasionar paylanma da yeganədir.

Hər bir qarşılıqlı C_α sinfinə C_α -da toplanmış, sabit vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə invariant μ^α ölçüsü uyğundur: (1) münasibətini ödəyən, $\mathcal{E}$ -də sıfırdan fərqli mənfi olmayan sonlu funksiya; əgər C_α müsbət sinif olarsa, onda μ^α stasionar paylanmaya mütənəssibdir, əgər C_α sıfır sinif olarsa, onda $\sum_i \mu_i^\alpha = \infty$ olur. Qayıdışsız mühüm C_α sinfində və ya sonsuz əhəmiyyətsiz $\mathcal{R}$ sinfində (həmçinin $\mathcal{R}$ ilə sonsuz mühüm siniflərin birləşməsində) invariant ölçülər çox ola bilər, onların təsviri Markov zəncirinin sərhədinin qurulması ilə əlaqədardır.

Misal 1. (yanımoxda təsadüfi dolaşma). $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1 - p$, $i = 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$ olsun. $p_{01} = 1$ olduqda 0 vəziyyəti dolaşmanın əksedici vəziyyəti dir. Bu zəncirin bütün vəziyyətləri iki tsiklin altsinfe ayrılaraq yeganə mühüm vəziyyətlər sinfini əmələ gətirir: bunlar $C^0 = \{0, 2, 4, \dots\}$, $C^1 = \{1, 3, 5, \dots\}$ sinifləridir.

C sinfi $p > 1/2$ olduqda qayıdışsız sinif ($t \rightarrow \infty$ olduqda $\lim X_t = +\infty$ vahid ehtimalla ödənilir), $p = 1/2$ olduqda qayıdışlı və sıfır sinif, $p < 1/2$ olduqda qayıdışlı və müsbət sinifdir. Invariant μ ölçüləri

$$\mu_0 = a, \mu_i = a \frac{p^{i-1}}{q^i}, \quad i \geq 1. \quad (2)$$

düsturları ilə təyin olunurlar; burada $a > 0$, $p < 1/2$ olduqda $\sum_i \mu_i$ sırası yığılır və (2) düsturundan $a = (q-p)(q-p+1)^{-1}$ olduqda stasionar paylanma alınır.

Əgər $p_{00} = 1$, $p_{01} = 0$ götürülərsə (digər p_{ij} ehtimalları olduğu kimi saxlamaq şərtlə), sıfırda udulan dolaşma alınır. Burada əhəmiyyətsiz $R = \{1, 2, \dots\}$ sinfi və mühüm müsbət $C = \{0\}$ sinfi vardır; 0 vəziyyəti uducu vəziyyətdir. $i \geq 1$, $a > 0$ olduqda ixtiyari invariant ölçü $\mu_0 = a$, $\mu_i = 0$ olur.

Misal 2. (ədəd oxunda təsadüfi dolaşma).

Əgər $\mathcal{E} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1 - p$, $0 < p < 1$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olarsa, onda yeganə $C = \mathcal{E}$ mühüm sinfi vardır ki (iki tsiklik altsiniflərdən ibarət), bu sinif $p \neq 1/2$ olduqda qayıdışsız sinifdir və $p = 1/2$ olduqda qayıdışlı və sıfır sinifdir. $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\mu_i^{(1)} = 1$, $\mu_i^{(2)} = (p/q)^i$, $i \in \mathcal{E}$ olduqda ixtiyari invariant ölçü $\mu = a_1 \mu^{(1)} + a_2 \mu^{(2)}$ düsturu ifadə olunur. Qayıdışlı halda, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986; с.183-97; [2] Doeblin W., «С. г. Acad. sci.», 1936, т. 203, р. 24-26; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [5] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MARTİN KOMPAKTİ «Martina kompakt; Martin compactum / boundary» – bax, *Martin sərhədi*.

MARTİN SƏRHƏDİ Markov prosesinin «Martina граница марковского процесса: *Martin boundary for a Markov process*» – *Markov prosesinin* və ya onun fəza fəzasının R. Martinin verdiyi sxem üzrə qurulan hər hansı kompakt obrazının sərhədidir (bax, [1], [9]). M. s. nəzəriyyəsinin əsas problemləri arasında Markov prosesinin final gedışatının və eksessiv funksiyalarının konusunun strukturunun təsvirini qeyd etmək lazımdır (terminologiya ilə əlaqədar, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesinə üçün meq.-ne bax).

Martin sxeminin ehtimali izahı ilk dəfə eyni zamanda C. Dub tərəfindən [2]-də və T. Vatanabe tərəfindən [3]-də təklif olunmuşdur. M. s. nəzəriyyəsi Markov zəncirləri üçün işlənilmişdir (bax, [8]).

$\mathcal{E}$ – separabel lokal kompakt fəza. $\mathcal{B}$ – bu fəzanın Borel çoxluqlarının ailəsi olsun. $\xi = (\xi_t, \zeta, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $x \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$ bir-cins Markov prosesinin $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında öz keçid funksiyası $p(t, x; \Gamma)$ ilə verildiyi fərz olunur. Fərz olunur ki, $\mathcal{B}$ -də verilən hər hansı σ – sonlu μ ölçüsü təyin olunmuş bu proses üçün Qrin α – funksiyası $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$, $\alpha \geq 0$ qurmaq olar və $\mathcal{B}$ – də təyin olunmuş hər hansı σ – sonlu γ ölçüsünün potensialı

$$q(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} \rho_0(x, \cdot) \gamma(dx)$$

sonludur və müsbətdir. Geniş şərtlərlə (bax, [6]) ele $\mathcal{H}$ kompaktı (Martin kompaktı, $\mathcal{B}$ -də $K_y^\alpha(dx)$, $\alpha \geq 0$, $y \in \mathcal{H}$ ölçüləri və $i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ inikası vardır ki, bunlar aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

a) $\mathcal{E}$ -nin obrazı $\mathcal{H}$ -da sıxdır,
b) eger $f \in \mathcal{E}$ -də kompakt daşıyıcıları bütün kəsilməz funksiyalar ailesidirse, $K_y^{\alpha, f}(y) = \int_{\mathcal{H}} f(x) K_y^\alpha(dx)$ funksiyalar

nöqtələri ayırır və $\mathcal{H}$ -də kəsilməzdir;

c) $y \in \mathcal{E}$ üçün $K_{i(y)}^\alpha(dx) = k_y^\alpha(x) m(dx)$, burada $k_y^\alpha(x) = \rho_\alpha(x, y) q^{-1}(y)$.

$i(\mathcal{E})$ çoxluğunun $\mathcal{H}$ -də tamamlayıcısı Martin sərhədi adlanır (o həm də çıxış sərhədi də adlandırılır; bu isə giriş sərhədi anlayışının da olduğunu qeyd etmək məqsədilə belə adlandırılır, bax, [2], [7]).

$\mathcal{H}$ -də xassələr h -proseslər terminləri təsvir olunur [h -ekssessiv funksiya, h -proses isə keçid funksiyası

$$p^h(t, x; \Gamma) = h^{-1}(x) \int_{\Gamma} h(y) p(t, x; dy)$$

olan $(\mathcal{E}^h, \mathcal{B}^h)$ -də Markov prosesidir, burada

$$\mathcal{E}^h = \{x \in \mathcal{E}: 0 < h(x) < \infty\}, \quad \mathcal{B}^h = \{A \in \mathcal{B}: A \subset \mathcal{E}^h\}.$$

ξ prosesi də daxil olmaqla, bütün h -proseslər bunlar üçün ümumi olan elementar hadisələr fəzasında reallaşır, belə ki, bunlar yalnız $\mathbf{P}_x^h$ ölçüləri ailəsi ilə fərqlənirlər. $\mathcal{H}$ -də soldan kəsilməz ele z_t , $0 < t < \xi$ prosesi vardır ki, bu proses üçün $z_t = i(\xi_t)$ bərabərliyi $\mathbf{P}_x^h$ - sanki yəqin ödənilir və $z_\xi \equiv \equiv z_\xi - (t \geq 0, h \in L^1(\gamma))$ -nin limiti vardır.

$\mathcal{H}$ -də «çıkışlar fəzası» adlanan aşağıdakı xassələrə malik $\tilde{\mathcal{H}}$ çoxluğu seçilir: 1) $z_\xi \in \tilde{\mathcal{H}}$ münasibəti $h \in L^1(\gamma)$ olduqda $\mathbf{P}_x^h$ - sanki yəqin ödənilir; 2) $y \in \tilde{\mathcal{H}}$ olduqda $K_y^\alpha(dx)$ ölçüsünün m ölçüsünə nəzərən K_y^α sıxlığı vardır; 3) ixtiyari $h \in L^1(\gamma)$ funksiyasının

$$h(x) = \int_{\tilde{\mathcal{H}}} k_y^0(x) \mu(dy)$$

şəklində yeganə ayrılığı mümkündür (μ ölçüsü h funksiyasının spektral ölçüsü adlanır); 4) k_y^0 , $y \in \tilde{\mathcal{H}}$ funksiyası ekssessiv funksiyadır və onun spektral ölçüsü y nöqtəsində toplanmışdır.

Bax, Markov prosesi; faza fəzasının kompaktifikasiyası.

Əd.: [1] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137-72; [2] Doob J. L., «J. Math. and Mech.», 1959, v. 8, № 3, p. 433-58; [3] Watanabe T., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1960, v. 33, № 1, p. 39-108; [4] Kunita H., Watanabe T., «Ill. J. Math. », 1965, v. 9, № 3, p. 485-526; [5] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 170-75; [6] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 89-152; [7] Дынкин Е. Б., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Ser. I A», 1970, v. 17, pt 1-2, p. 37-100; [8] Певюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997;

[8] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. - B. - Hdlbg, 1984.

MARTİNGAL « martingal; martingale » - heqiqiqiy-melli, aşağıdakı tip təsadüfi prosesdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ - tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in T$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ - σ -cəbrlərinin azalmayan ailəsi, $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$ olsun ($t \in T$ parametri ekser hallarda zamanı ifadə edir, $\mathbb{A}$ ailəsi filtrasiya və ya axın, $\mathcal{B} = (\Omega, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$ stoxastik bazis adlanır). Əgər:

$\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesi $\mathbb{A}$ - uzlaşan proses (yeni ζ_t , - $\mathcal{A}_t$ - ölçülən, $t \in T$) olarsa,

$$\mathbf{M}[\zeta_t] < \infty, t \in T;$$

$$\mathbf{M}[\zeta_t | \mathcal{A}_s] = \zeta_s \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \quad s \leq t < \infty \quad (1)$$

olarsa, $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesinə martinqal ($\mathbb{A}$ axını və $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) deyilir.

Supermartinqal (submartinqal) anlayışının tərifləri martinqal anlayışının tərifindən (1) münasibətinə $=$ işarəsinin uyğun olaraq, $\geq$ ($\leq$) ilə əvəz olunması ilə alınır.

Əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesinin martinqal olduğu hökm edilsə və bu halda onun hansı σ -cəbrlər ailəsinə nəzərən martinqal olması qeyd olunmursa, onda $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$ σ -cəbrlər ailəsinin təbii σ -cəbrlər ailəsi, yeni $\mathcal{A}_t = \sigma\{\zeta_s \in B\}$, $s \leq t$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğu nəzərdə tutulur.

Misallər. a) $\xi_0, \dots, \xi_n, \dots$ - asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $\mathbf{M}\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Onda $\zeta_n = \xi_0 + \dots + \xi_n$ martinqaldır. Kəsilməz zaman halında belə $\mathbf{M}$ -in analoqu asılı olmayan artımlı $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesidir, $\mathbf{M}\zeta_t = 0$.

b) $w = (w_t)$, $t \in T$ - Viner prosesi, h_t - $\mathbb{R}$ -də harmonik funksiya olsun. Onda $h(w)$ - $\mathbf{M}$ -dir.

$\mathbf{M}$. nəzəriyyəsində $\Omega \times T$ fəzalar hasilində öngörül ($\mathcal{P}$) və opsiyal ($\mathcal{O}$) σ -cəbrləri mühüm rol oynayır, burada

$$\mathcal{P} = \sigma\{A \times [s, t]: A \in \mathcal{A}_s, s < t, s, t \in T\}$$

$$\mathcal{O} = \sigma\{(\omega, t): S(\omega) \leq t < \infty, s \in \mathcal{P}\}$$

$\mathcal{P}$ qiymətləri T -dən olan bütün dayanma anlarının ($\mathbb{A}$ -ya nəzərən) çoxluğudur. $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ σ -cəbrinin çoxluqları öngörül (opsional) çoxluqlar adlanır. Proses $\mathcal{P}$ -ölçüləndirsə ($\mathcal{O}$ -ölçüləndirsə), o öngörül (opsional) proses adlanır. $T = \mathbb{N}$ olduqda $\zeta = (\zeta_n)$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda öngörül (opsional) proses olur ki, ζ_n təsadüfi kəmiyyətləri $\mathcal{A}_{n-1}$ - ölçülən (ζ_n , - $\mathcal{A}_n$ - ölçülən) proses olsun, $n \in \mathbb{N}$. $T = \mathbb{R}_+$ olduğu halda, ixtiyari soldan kəsilməz (sağdan kəsilməz soldan limitləri olan) $\mathbb{A}$ - uzlaşmış proses öngörül (opsional) prosesdir. Ixtiyari $\mathbf{M}$ -in (supermartinqalın) opsiyal modifikasiyası vardır.

Zaman argumentinin təsadüfi dəyişməsində martinqallığın qalması (itməməsi) mühüm xassədir (sərbəst seçimin çevrilməsi haqqında teoremlər): əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ opsiyal supermartinqal sağdan qapalıqlıq şərtini ödəyirsə, yeni

ele inteqrallanan ξ təsadüfi kəmiyyəti varsa ki, $\zeta_t \geq \mathbf{M}[\xi | \mathcal{A}_t]$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin), $t \in T$ şərti ödənilir, onda ixtiyari sonlu $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ dayanma anları üçün $\zeta_{\tau_1}, \zeta_{\tau_2}$ kəmiyyətləri inteqrallandırlar və $\tau_1 \leq \tau_2$ üçün

$$\zeta_{\tau_1} \geq \mathbf{M}[\zeta_{\tau_2} | \mathcal{A}_{\tau_1}] \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}) \quad (2)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$\mathcal{A}_{\tau_1} = \sigma\{A \in \vee_t \mathcal{A}_t : A \cap (U \leq t) \in \mathcal{A}_t, t \in T\}$$

və $\vee_t \mathcal{A}_t, - \mathcal{A}_t, t \in T, \sigma$ – cəbrinin doğurduğu minimal σ – cəbrdir.

M. halında $(\zeta_t), t \in T$ ailesi müntəzəm inteqrallanan aile olarsa, sağdan qapalılıq şərti ödənilir. (2)-dən aydındır ki, əgər $\zeta = (\zeta_t), t \in T$ opsiyal M., $S \in \mathcal{T}$ olarsa, $\zeta^S = (\zeta_{S \wedge t})$, $t \in T$ prosesi M.-dir ($\mathbf{A}, \mathbf{P}$ -yə nəzərən), burada $S \wedge t = \min(S, t)$. ζ^S prosesi dayandırılmış martinqal adlanır. (2)-dən $\forall t$ eyniliyi alınır, yeni $\xi_0, \xi_1, \dots$ inteqrallanan asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\mathbf{M}(\xi_0 + \dots + \xi_S) = \mathbf{M} S \mathbf{M} \xi_0$$

düsturu doğrudur, burada $S, - \mathcal{A}_n = \sigma\{\xi_k, k \leq n\}$ ailesinə nəzərən inteqrallanan dayanma anıdır.

Aşağıdakı fundamental bərabərsizliklər doğrudur:

1) Əgər $\zeta = (\zeta_t), t \in T$ sağdan qapalı opsiyal supermartinqaldırsa, onda $\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{t \leq r} |\zeta_t| \geq \lambda\right\} \leq 3 \sup_{t \leq r} \mathbf{M}|\zeta_t|$, burada λ – müsbət sabitdir, $r \leq \infty$;

2) Əgər $\zeta = (\zeta_t), t \in T$ mənfə olmayan opsiyal submartinqaldırsa, onda

$$\left(\mathbf{M}\left[\sup_{t \in T} \zeta_t\right]^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t \in T} (\mathbf{M} \zeta_t^p)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Yığılma haqqında aşağıdakı teoremin çoxsaylı tətbiqi vardır: əgər $\zeta = (\zeta_t), t \in T$ opsiyal supermartinqalı L^1 -də məhduddursa, yeni

$$\sup_{t \in T} \mathbf{M}|\zeta_t| < \infty$$

olarsa, onda ele inteqrallanan ξ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki,

$$\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_t \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin});$$

$\zeta = (\zeta_t), t \in T$ müntəzəm inteqrallanan M.-dirsə, onda L^1 -də yığılma vardır və bu yığılma $\mathbf{P}$ – sanki yəqin yığılmadır və

$$\zeta_t = \mathbf{M}[\xi | \mathcal{A}_t] \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \quad t \in T.$$

$T = \mathbb{R}_+$ olduğu halda, opsiyal supermartinqalın demək olar ki, bütün trayektoriyalarının hər bir $x \in T$ nöqtəsində $t > 0$ olduqda soldan və $t \geq 0$ olduqda sağdan limitləri vardır.

Kəsilməz zamanlı martinqalların xassələri.

$\mathbf{A} = (\mathcal{A}_t), t \in \mathbb{R}_+$ σ – cəbrlər ailəsinin tamamlanma və sağdan kəsilməzlik kimi adi şərtləri ödədiyi fərz olunur, yeni $\mathcal{A}_0$ bütün $\mathbf{P}$ – sıfır çoxluqları özündə saxlayır. $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{s+}, s \in \mathbb{R}_+$, burada $\mathcal{A}_{s+} = \bigcap_{t > s} \mathcal{A}_t$.

Əgər $\zeta = (\zeta_t), t \in \mathbb{R}_+$ supermartinqalı üçün $t \rightarrow \mathbf{M} \zeta_t$ funksiyası sağdan kəsilməzdirsə, onda ζ –nin modifikasiyası vardır və bu modifikasiyanın bütün trayektoriyaları $t \geq 0$ olduqda sağdan kəsilməzdir və $t > 0$ olduqda bütün trayektoriyalarının soldan limiti vardır. Xüsusi halda, adi şərtlər daxilində ixtiyari M.-in belə modifikasiyası vardır.

Fərz olunur ki, baxılan proseslərin trayektoriyaları $t \geq 0$ olduqda sağdan kəsilməzdir və onların $t > 0$ olduqda soldan limitləri vardır. $\mathcal{M}, - \zeta = (\zeta_t), t \in \mathbb{R}_+, \zeta_0 = 0$ müntəzəm inteqrallanan M. fəzası; $\mathcal{M}^2$ ele $\zeta = (\zeta_t), t \in \mathbb{R}_+, \zeta_0 = 0$ M. fəzası olsun ki, $\mathbf{M} \sup_t |\zeta_t|^2 < \infty$ (kvadratı ilə müntəzəm inteqrallanan

M.-lar fəzası); $V^+, - A = (A_t), t \in \mathbb{R}_+, A_0 = 0$ artan $\mathbf{A}$ – uzlaşan proseslər fəzası $V = V^+ - V^-, A^+ = \{A = (A_t) \in V^+ : \mathbf{M} A_\infty < \infty\}, A = A^+ - A^-$ təsadüfi proseslərin hər hansı fəzasıdırsa, onda C təsadüfi proseslərin hər hansı fəzasıdırsa, onda $\zeta \in C_{\text{loc}}$ simvolik yazısı belə anlaşılır: $T_n \uparrow \infty$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) şərtini ödəyən $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ ardıcılığı və

$\zeta^{T_n} = (\zeta_{T_n \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+} \in C, n \in \mathbb{N}$ dayandırılmış prosesi vardır. $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ fəzasının elementləri lokal martinqallar adlanır. Əgər $\zeta \in \mathcal{N}$ münasibəti ixtiyari $T \in \mathcal{T}$ və $B \in \mathcal{A}_0$ üçün $\zeta^T \in \mathcal{N}$ və $\mathbf{I}_B \zeta \in \mathcal{N}$ münasibətlərini doğursa, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_{\text{loc}}$ altfəzası dayanıqlı fəza adlanır, burada $\mathbf{I}_B, - B$ çoxluğunun indikatorudur. $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ fəzası $\mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ və $\mathcal{M}_{\text{loc}}^d$ dayanıqlı altfəzalarının cəmi kimi ayrılışa malikdir, burada $\mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ kəsilməz lokal M. altfəzası, $\mathcal{M}_{\text{loc}}^d$ isə lokal M. altfəzasıdır, bunlar sırf kəsilməz M. adlanır. $\zeta \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ və $\zeta^* \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^d$ iki ixtiyari M.-in hasili – $\zeta \zeta^* \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ şərtini ödəyərsə, bu M.-lar ortoqonaldırlar.

Hər bir lokal ζ M. üçün bir sıra ayrılışlar vardır:

$$\zeta = \mathcal{M} + \mathcal{N}, \quad \mathcal{M} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2, \quad \mathcal{N} \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \cap \mathcal{M}_{\text{loc}};$$

$$\zeta = \zeta^c + \zeta^d, \quad \zeta^c \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c, \quad \zeta^d \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^d;$$

$\zeta^c, - \zeta$ M.-nin kəsilməz martinqal komponenti, ζ^d isə ζ –nin sırf kəsilməz komponentidir;

$\zeta = \mathcal{M} + \mathcal{N}, \mathcal{N} \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \cap \mathcal{M}_{\text{loc}}, \mathcal{M} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, |\Delta \mathcal{M}| \leq K$, burada $\Delta \mathcal{M} = (\Delta \mathcal{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \Delta \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t - \mathcal{M}_{t-}, t > 0$ olduqda, $\Delta \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0, K$ – öngörül artan prosesdir.

M. nəzəriyyəsinin müxtəlif tətbiqlərində $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}^2$ və ya $f \in \mathcal{M}_{loc}$ martinqalı üzrə $\int f d\zeta$ stoxastik integralı mühüm rol oynayır. Bu integralları tərifləri aşağıda daxil olunmuş $[\zeta, \zeta]$, $\langle \zeta, \zeta \rangle$ proseslərinə əsaslanır.

Hər bir $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}^2$ martinqalına əlavə yeganə $\langle \zeta, \zeta \rangle \in A_{loc}^+$ öngörül prosesini uyğundur ki, $\zeta^2 - \langle \zeta, \zeta \rangle$ fərqi $\zeta^2 - \langle \zeta, \zeta \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$ şərtini ödəyir. $\langle \zeta \rangle$ kimi də işarə olunan $\langle \zeta, \zeta \rangle$ prosesi ζ M.-nin öngörül xarakteristikası adlanır. Əgər $\zeta, \zeta^* \in \mathcal{M}_{loc}^2$ olarsa, onda bu martinqallara uyğun yeganə öngörül $\langle \zeta, \zeta^* \rangle \in A_{loc}$ ($\zeta \zeta^* - \langle \zeta \zeta^* \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$) prosesi vardır və bu proses

$$\langle \zeta, \zeta^* \rangle = \left(\zeta + \zeta^*, \zeta + \zeta^* \right) - \left(\zeta - \zeta^*, \zeta - \zeta^* \right) / 4$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və bu proses ζ və ζ^* proseslərinin qarşılıqlı öngörül xarakteristikası adlanır. Hər bir $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}$ prosesinə uyğun $[\zeta, \zeta] \in V^+$ prosesi vardır və bu proses

$$[\zeta, \zeta]_t = \langle \zeta^c, \zeta^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta \zeta_s)^2, \\ \Delta \zeta_s = \zeta_s - \zeta_{s-}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\zeta^c, -\zeta$ M.-nin ayrılışının kəsilməz komponentidir, sağdakı sıra $\mathbf{P}$ – sanki yaqın ixtiyari $t \in \mathbb{R}_+$ üçün yığılır. $[\zeta, \zeta]$ prosesi ζ martinqalının kvadratik variasiyası adlanır.

Hər bir $\zeta, \zeta^* \in \mathcal{M}_{loc}$ cütünə $[\zeta, \zeta^*] \in V$ prosesi qarşı qoyulur və $[\zeta, \zeta^*] - \zeta$ və ζ^* proseslərinin kvadratik kovariasiyası adlanır və

$$[\zeta, \zeta^*]_t = \langle \zeta^c, \zeta^{*c} \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta \zeta_s)(\Delta \zeta_s^*)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada sağdakı sıra $\mathbf{P}$ – sanki yaqın yığılır.

M.-lar üzrə stoxastik integrallar nəzəriyyəsində aşağıdakı Kunita–Vatanabe bərabərsizlikləri mühüm rol oynayır:

$$\left| \int_0^\infty H_s K_s d\langle \zeta, \zeta^* \rangle_s \right| \leq \\ \leq \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle \zeta, \zeta \rangle_s \right]^{1/2} \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle \zeta^*, \zeta^* \rangle_s \right]^{1/2}; \\ \left| \int_0^\infty H_s K_s d[\zeta, \zeta^*]_s \right| \leq$$

614 MARTINQAL

$$\leq \left[\int_0^\infty H_s^2 d[\zeta, \zeta]_s \right]^{1/2} \left[\int_0^\infty K_s^2 d[\zeta^*, \zeta^*]_s \right]^{1/2},$$

burada $H, K, -\mathcal{H} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ – ölçü funksiyalardır.

Fərz olunur ki, $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}^2, H \in \mathcal{P}$ və

$$\int_0^\infty H_s^2 d\langle \zeta, \zeta \rangle_s \in A_{loc}^+.$$

Onda əlavə yeganə $\zeta^* \in \mathcal{M}_{loc}^2$ prosesi vardır ki, bu proses aşağıdakı xassələri ödəyir: ixtiyari $Z \in \mathcal{M}_{loc}^2$ üçün

$$\langle \zeta^*, Z \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle \zeta, Z \rangle_s, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \Delta \zeta_t^* = H_t \Delta \zeta_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ζ^* prosesi H funksiyasının $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}^2$ üzrə stoxastik integralı adlanır və

$$\zeta_t^* = \int_0^t H_s d\zeta_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

kimi işarə olunur. Əgər $H \in \mathcal{P}$ və $\mathbf{M} \int_0^\infty H_s^2 d\langle \zeta, \zeta \rangle_s < \infty$ olarsa, onda

$$\zeta^* = \int H d\zeta \in \mathcal{M}^2.$$

Bu integralın konstruksiyası mahiyyətə Viner prosesi üzrə stoxastik integralın konstruksiyası ilə üst-üstə düşür.

$\zeta \in \mathcal{M}_{loc}, H \in \mathcal{P}$ funksiyası isə əlavə olsun ki,

$$\left(\int_0^\infty H_s^2 d[\zeta, \zeta]_s \right)^{1/2} \in A_{loc}^+$$

olsun. Onda əlavə yeganə $\zeta^* \in \mathcal{M}_{loc}$ prosesi vardır ki, bu proses aşağıdakı xassələrə malikdir: ixtiyari $Z \in \mathcal{M}_{loc}$ üçün

$$[\zeta^*, Z]_t = \int_0^t H_s d[\zeta, Z]_s, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \Delta \zeta_t^* = H_t \Delta \zeta_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ζ^* prosesi ζ lokal M. üzrə H funksiyasının stoxastik integralı adlanır və

$$\zeta_t^* = \int_0^t H_s d\zeta_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

kimi işarə olunur.

Əgər $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}$ olarsa, onda

$$c \mathbf{M}[\zeta, \zeta]_T^{p/2} \leq \mathbf{M}(\zeta_T^*)^p \leq C \mathbf{M}[\zeta, \zeta]_T^{p/2}, \quad p \geq 1$$

– mühüm rol oynayan Burkholder–Handi–Davis bərabərsizlikləri doğrudur, burada $\zeta_T^* = \sup_{s \leq T} |\zeta_s|$,

$T \in \mathcal{T}, c, C$ – universal sabitlərdir.

M. nezeriyyəsi ilə funksional fəzaların əlaqəsini müəyyən etmək üçün H^p , $p \geq 1$ və BMO (bounded mean oscillation) fəzaları mühüm rol oynamışdır. H^p , $p \geq 1$ ilə lokal ζ martinqallar fəzasıdır ki, $M[\zeta, \zeta]_{\infty}^{p/2} < \infty$. Bu fəza norması $\|\zeta\|_{H^p} = M[\zeta, \zeta]_{\infty}^{p/2}$ kimi təyin olunmuş tam, normalanmış fəzadır. Bu norma $M(\zeta_{\infty})^p$ kəmiyyəti ilə təyin olunan normaya ekvivalentdir. $\mathcal{M}_{loc}$ fəzası H_{loc}^1 fəzası ilə üst-üstə düşür.

ζ müntəzəm inteqrallanan M. olsun. Əgər ixtiyari $T \in \mathcal{T}$ üçün

$$M[\zeta_{\infty} - \zeta_T | \mathcal{F}_T] \leq c \quad (P - \text{sanki yəqin})$$

münasibəti ödənilsə, ζ martinqalı BMO fəzasındandır, deyilir. Bütün $T \in \mathcal{T}$ üçün bu bərabərsizliyi ödəyən minimal c sabiti $\|\zeta\|_{BMO}$ kimi işarə olunur.

BMO fəzası və H^1 fəzası ikilik xassəliyinə malikdirlər. Doğrudan da, əgər $I(\zeta) \in H^1$ -də xətti kəsilməz funksionaldırsa, onda $\zeta^* \in BMO$, $\|\zeta^*\|_{BMO} \leq 2\|I\|$ vardır ki, $I(\zeta) = M \zeta_{\infty} \zeta^*$. Bundan başqa,

$$|I(\zeta)| \leq c \|\zeta\|_{H^1} \|\zeta^*\|_{BMO},$$

c – sabitdir (Fefferman bərabərsizliyi).

M. ilə bağlı artan proseslərdən istifadə olunması yuxarıda şərh olunmuş yığılma haqqındakı nəticələri dəqiqləşdirməyə imkan yaratmışdır. $t \rightarrow \infty$ olduqda $\{\zeta \rightarrow\} = \{\omega: \zeta_t(\omega) \rightarrow \zeta_{\infty}(\omega)\}$.

$\zeta_{\infty}(\omega)$ – sonlu təsadüfi kəmiyyət və $\zeta \in \mathcal{M}_{loc}^2$ olsun. Onda

$$1) \{\zeta, \zeta\}_{\infty} < \infty\} \subseteq \{\zeta \rightarrow\} \quad (P - \text{sanki yəqin}),$$

2) əgər ixtiyari $S \in \mathcal{T}$ üçün $M[\Delta \zeta_s]^2 I_{\{s < \infty\}} < \infty$ olarsa, onda $\{\zeta, \zeta\}_{\infty} < \infty\} = \{\zeta, \zeta\}_{\infty} < \infty\} = \{\zeta \rightarrow\} \quad (P - \text{sanki yəqin})$ münasibətləri doğrudur.

$\zeta \in \mathcal{M}_{loc}$ olduğu halda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$1) \{A_{\infty} < \infty\} \subseteq \{\zeta \rightarrow\} \quad (P - \text{sanki yəqin})$$

2) əgər ixtiyari $S \in \mathcal{T}$ üçün $M[\Delta \zeta_s]^2 I_{\{s < \infty\}} < \infty$ olarsa, onda $\{A_{\infty} < \infty\} = \{\zeta, \zeta\}_{\infty} < \infty\} = \{\zeta \rightarrow\} \quad (P - \text{sanki yəqin})$, burada $A = \langle \zeta^c, \zeta^c \rangle + \tilde{B}$, $\tilde{B} \in \mathcal{P} \cap V^+$ edildir ki,

$$\sum_{0 < s \leq t} \frac{(\Delta \zeta_s)^2}{1 + |\Delta \zeta_s|} = \tilde{B}_t$$

lokal M.-dir.

Ümumiləşmiş M. nezeriyyəsinin bir sıra istiqamətləri mövcuddur: vektorqiyəməli M. nezeriyyəsi (məs., Banax qiymətli M. nezeriyyəsi) və operatorqiyəməli M. nezeriyyəsi; T – qismən nizamlanmış çoxluqla M. nezeriyyəsi (məs., $T = \mathbb{R}_+^2$, $T = \mathbb{N}^2$; $T = \mathbb{R}_+^2$ halı ən çox araşdırılan hallardandır, bax, [11]) və b.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Мейер П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Dellacherie C, Meyer P.-A., Probabilités et po-

tentiel. Théorie des martingales, t. 1–2. P., 1975–80; [4] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1979, № 714; [5] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [6] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и приложения, К., 1982; [7] Григелионис Б., Микунявичюс Р., «Лит. матем. сб.», 1981, т. 21, № 3, с. 1–24; [8] Гальчук Л. И., «Матем. сб.», 1980, т. 112, № 4, с. 483–521; [9] Lenglart E., «Lect. Notes Math.», 1980, № 784, p. 500–46; [10] Metivier M., Semimartingales, B. – N., Y., 1982; [11] Cairoli R., Walsh J. B., «Acta math.», 1975, t. 134, № 1–2, p. 111–83; [12] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

MARTINGAL dayandırılmış «мартингал остояновленный; stopped martingale» – bax, *Martingale*.

MARTINGAL; kvadratik xarakteristika «мартингал; квадратическая характеристика; martingale; quadratic characteristic of», $X = (X_t)$, $t \in T$ kvadratik inteqrallanan martinqalının

$(M \sup_t |X_t|^2 < \infty)$ öngörül kvadratik variyasiyası – $\langle X \rangle$, $\langle X \rangle'_0 = 0$ ($\langle X, X \rangle$ kimi də işarə olunan)

prosesidir ki, bu proses artandır ($s \leq t$ olduqda, $\langle X \rangle_s \leq \langle X \rangle_t$),

öngörüdür, inteqrallandır ($M \langle X \rangle_{\infty} < \infty$), $X^2 - \langle X \rangle$ fərqi müntəzəm inteqrallanan M.-dir. $\langle X \rangle$ kvadratik xarakteristikası

lokal kvadratik inteqrallanan X martinqalı üçün də təyin olunur. Lokal kvadratik inteqrallanan X , Y M.-ları üçün onların qarşılıqlı kvadratik xarakteristikası (və ya öngörül kvadratik kovariasiya) –

$$\langle X, Y \rangle = (\langle X+Y, X+Y \rangle - \langle X-Y, X-Y \rangle) / 4$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\langle X, Y \rangle$ prosesinə deyilir.

Əd.: [1] Meyer P.-A., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

MARTINGAL kvadratik inteqrallanan «мартингал квадратично интегрируемый; square-integrable martingale» – bax, *Kvadratik inteqrallanan martinqal*.

MARTINGAL; kvadratik variasiya «мартингал; квадратическая вариация; martingale; quadratic variation of», opsional kvadratik variasiya – $X = (X_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ martinqalının (lokal)

$$[X, X]_t = \langle X^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2$$

bərabərliyi ilə təyin olunan variyasiya – $[X, X]$ -dir, burada $\langle X^c \rangle$, – lokal X martinqalının ayrılışındakı kəsilməz X^c heddinin kvadratik xarakteristikasıdır, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$; $\sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2$

sırası ixtiyari $t \in \mathbb{R}_+$ üçün 1 ehtimalla yığılır. Əgər X , Y lokal

M-lar olarsa, onda $[X, Y]$ kvadratik kovariasiyası

$$[X, Y] = ([X+Y, X+Y] - [X-Y, X-Y])/4$$

düsturu ilə təyin olunur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Мейер Р.-А., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

MARTİNQAL; limit teoremləri «мартингал; предельные теоремы; limit theorems for martingale» – bax, *Limit teoremləri martinqal və semimartinqallar üçün*.

MARTİNQAL lokal «мартингал локальный; local martingale» – bax, *Lokal martinqal*.

MARTİNQAL; moment eynilikləri «мартингал; моментные тождества; moment identities for martingale» – *martinqalın momentləri* və onun xarakteristikaları arasında münasibətlərdir. m_t , – $\mathcal{A}_t$, $t \geq 0$ σ – cəbrlər axınına nəzərən birözlülük M. olsun. M-in xarakteristikalarına (öngörül) bezi şərtlərlə m_t -nin xarakteristikaları üzrə təyin olunan əmsalları, m_t -yə görə n tərtib polinom olan lokal $V_n(m_t, t)$ M-ni təyin etmək olar. Əgər $T \in \mathcal{A}_t$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anı olduqda $V_n(m_{t \wedge T}, t \wedge T)$ dayanmış prosesi t parametri üzrə müntəzəm inteqrallanan proses olarsa, onda

$$M[V_n(m_T, T) - V_n(m_0, 0)] = 0 \quad (*)$$

moment eyniliyi doğrudur. $\langle m \rangle_t$ M-in kvadratik xarakteristikası olduqda, $V_1(m_t) = m_t$, $V_2(m_t) = (m_t)^2 - \langle m \rangle_t$ eynilikləri doğrudur; bu halda (*) eyniliyinin ödənilməsi üçün uyğun olaraq, $M(\langle m \rangle_T)^{1/2} < \infty$ və $M\langle m \rangle_T < \infty$ şərtlərinin ödənilməsi kifəidir.

$n > 2$ olduqda, m_t sıçrayışlar ölçüsünün t üzrə kəsilməz kompensatorlu stoxastik inteqral tip M. halı üçün $V_n(m_t, t)$ prosesinin şəklil [1] – [2]-də təsvir olunmuşdur. Məsələn, əgər m_t standart Viner prosesi üzrə stoxastik inteqral olarsa, onda

$$V_n(m_t, t) = H_n\{m_t / \langle m \rangle_t^{1/2}\} \langle m \rangle_t^{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olur, burada $H_n\{x\}$ – Hermit çoxhədlisidir (çeki funksiyası $\exp\{-x^2/2\}$ olan); bu zaman (*) eyniliyinin doğruluğu üçün $M\langle m \rangle_T^{n/2} < \infty$ şərtinin ödənilməsi kifəidir.

Əd.: [1] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [2] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1984, т. 35, в. 3, с. 455–71.

MARTİNQAL; öngörül xarakteristika «мартингал; предсказуемая характеристика; martingale; predictable characteristic of» – bax, *Martinqal*.

616 MARTİNQAL

MARTİNQAL; öngörül kvadratik variasiya «мартингал; предсказуемая квадратическая вариация; martingale; predictable quadratic variation of» – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

MARTİNQAL ÇEVİRMƏSİ «мартингальное преобразование; martingale transformation», (diskret zamanlı) $(\zeta_n, \mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ martinqalının $(V_n, \mathcal{A}_{n-1})_{n \geq 0}$ öngörül ardıcılığının köməyiylə M. ç. ilə $(V, \zeta_n)_{n \geq 0}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır ki, bunlar üçün

$$V \cdot \zeta_n = V_0 \zeta_0 + \sum_{k=1}^n V_k (\zeta_k - \zeta_{k-1})$$

bərabərliyi ödənilir. Kəsilməz zaman halında M. ç.-nin analoqu martinqal üzrə stoxastik inteqraldır. Diskret zaman halında və sıfır başlanğıc şərtlərində lokal martinqallar və ümumi martinqalların M. ç.-nin topluları üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MARTİNQAL PROBLEMİ «мартингалов проблема; martingale problem» – *stoxastik differensial tənliklərin zəif həllərinin varlığı probleminin ekvivalentidir*. Fərz olunur ki: 1) $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ filtrasiyalı ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzası; 2) hər hansı $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}_0$ σ – cəbrində P_H ehtimal ölçüsü; 3) $D[0, \infty)$ – trayektoriyaları Skoroxod fəzasından olan $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{A}$ – uzlaşmış (vektor) prosesi verilmişdir. Əgər P ölçüsünün $\mathcal{H} \subseteq \sigma$ – cəbrinə daralması P_H ölçüsü ilə üst-üstə düşərsə, ζ prosesi stoxastik $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, P)$ bazisində lokal martinqal olarsa, $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında P ehtimal ölçüsü martinqallar probleminin həlli adlanır.

M. p.-nin ən sadə həlləri Viner və Puasson ölçüləridir. Bu hallarda $\mathcal{H} = (\mathcal{O}, \Omega)$; Viner ölçüsü P^w isə o xassə ilə seçiyəvidir ki, ζ kəsilməz lokal martinqaldır və $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, $Y_t = \zeta_t^2 - t$, – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, P^w)$ stoxastik bazisində lokal martinqaldır, Puasson ölçüsü P^x -nin daşıyıcısı $D\{1\}$, – $D[0, \infty)$ -dan hissəvi sabit funksiyalar fəzasıdır və bu funksiyalar sıfır nöqtəsindən başlanır, sıçrayışların ölçüsü vahidə bərabərdir və o, aşağıdakı xassə ilə seçiyəlenir ki, $Y_t = \zeta_t - t$ bərabərliyi ilə verilən $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ martinqalı $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, P^x)$ stoxastik bazisində lokal martinqaldır. Bu və digər misallar semimartinqallar üçün onun öngörül xarakteristikalarının (B, C, ν) tripleti terminlərində M. p.-nin həllərinin məhz xüsusi hallarıdır, burada $B = (B_t)_{t \geq 0}$, – $\mathbb{A}$ – öngörül sağdan kəsilməz, hər bir sonlu intervalda sonlu variyasiyalı proses, $C = (C_t)_{t \geq 0}$, – $\mathbb{A}$ – uzlaşmış kəsilməz artan proses (semimartinqalın ayrılışındakı kəsilməz martinqal komponentin kvadratik xarakteristikası), $\nu = \nu(dt, dx)$ – semimartinqal sıçrayışlar ölçüsünün $\mathbb{A}$ – kompensatorudur.

(B, C, ν) – yuxarıda qeyd olunan xassəli öngörül xarakteristikalar tripleti, P_H , – $(\Omega, \mathcal{H})$ -da ehtimal fəzası olsun. ζ , $\mathcal{H}$ və $(P_H; B, C, \nu)$ üçün M. p.-nin həlli $(\Omega, \mathcal{A})$ -da P ehtimal ölçüsüdür ki, P -nin $\mathcal{H}$ -da daralması P_H ilə üst-üstə düşür və $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$ öngörül xarakteristikalar tripleti (B, C, ν) olan

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ stoxastik bazisində semimartinqaldır. Xüsusi halda, əgər $v \equiv 0$ və

$$B_t = \int_0^t b(s, \zeta_s) ds, \quad C_t = \int_0^t c(s, \zeta_s) ds, \quad c(\cdot, \cdot) \geq 0$$

olarsa, onda M . p.-nin həlli

$$d\zeta_t = b(t, \zeta_t)dt + c^{1/2}(t, \zeta_t)dw_t$$

$w = (w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto stoxastik differensial tənliyinin zəif həllinin varlığı problemə ekvivalentdir; burada $b(s, x)$ və $c(s, x)$ – ölçülən funksiyalardır.

Əd.: [1] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [2] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [3] Жакоб Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

MASSE KRİTERİSİ « **Массе критерий; Masset criterion** » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

MEDİAN « **медiana; median** » – təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanması ədəd oxu üzərində ədədi xarakteristikasıdır. ξ – paylanma funksiyası $F(x)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. $P\{\xi \geq m\} \geq 1/2$ və $P\{\xi \leq m\} \geq 1/2$ münasibətlərinin ödənilməsinə təmin edən ixtiyari m ədədinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin (və ya F paylanmasının) medianı deyilir. M . həmişə vardır, lakin, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur. Riyazi gözlemə ilə yanaşı M . təsadüfi kəmiyyətin ədəd oxu üzərində mühüm yerləşmə xarakteristikasıdır və bir çox hallarda mərkəzləndirmədə istifadə olunur.

Riyazi statistikada müşahidələrin asılı olmayan nəticələri $X_1, \dots, X_n$ üzrə M -nin statistik qiyməti kimi seçimi median deyilir. Median istifadə olunur; bu statistik qiymət uyğun $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ variasion sırası əsasında təyin olunan medianlardır: əgər $n = 2k+1$ olarsa, yəni n tək olarsa, $X_{(k+1)}$, $n = 2k$ cüt olarsa, $(X_{(k)} + X_{(k+1)})/2$ ədədi seçimi M . kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

MEDİAN – MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « **медiana несмещенная оценка; median – unbiased estimator** » – medianı qiymətləndiriləcək təsadüfi kəmiyyətin özü ilə üst-üstə düşən statistik qiymətdir. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\theta)$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi elementinin realizasiyanı üzrə θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. $\theta \in \Theta$. Fərz olunur ki, $T = T(X)$ θ parametri üçün X -in müşahidələri üzrə qurulmuş statistik qiymətdir və $\text{med}_\theta T(X)$ T statistik qiymətinin medianıdır. Əgər $\text{med}_\theta T(X) = \theta$ bərabərliyi bütün $\theta \in \Theta$ üçün ödənilərsə, onda T θ parametrinin median-meylsiz statistik qiyməti adlanır. [1]-ə görə θ parametrinin statistik qiyməti T , əgər $M_\theta L(T, \theta) \leq M_\theta L(T, \theta')$ bərabərsizliyi bütün $\theta' \neq \theta$ üçün ödənilərsə, $M_\theta L(T, \theta)$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymət adlanır, burada $L(T, \theta)$ – əvvəlcədən seçilmiş itki funksiyasıdır. Mes.,

$L = |T - \theta|$ olsun, onda $M_\theta |T| < \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari T statistik qiyməti üçün median – meylsizlik anlayışı və $M_\theta |T - \theta|$ risk funksiyasına nəzərən meylsizlik anlayışları üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Voronov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their application, v. 1 – Univariate Case, Dordrecht, 1993.

MELLİN – STİLTYES ÇEVİRMƏSİ « **Меллина – Стильеса преобразование; Mellin – Stieltjes transform** » – mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F_ξ -nin aşağıdakı şəkildə integral çevirməsidir:

$$\mu_\xi(s) = M_\xi e^s = \int_0^\infty x^s dF_\xi(x)$$

və bu çevirməyə $\alpha, \beta \geq 0$ üçün hər hansı $-\alpha \leq \text{Re } s \leq \beta$ zolağından olan kompleks s -lər üçün də baxılır. $s = it$ qiymətləri üçün ($t \in \mathbb{R}^1$) M . – S. ç. həmişə vardır və $P\{\xi = 0\} = 0$ olduqda $o, \log \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası ilə üst-üstə düşür. Əgər F_ξ -nin sıxlıq funksiyası p_ξ olarsa, onda $\mu_\xi(s-1)$ analitik funksiyalar nəzəriyyəsində istifadə olunan, p_ξ funksiyasının Mellin çevirməsi ilə üst-üstə düşür. Təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxemində, mənfi təsadüfi kəmiyyətlər üçün M . – S. ç. ümumi halda xarakteristik çevirmələrin rolunu ifadə edir. F_ξ paylanma funksiyasının Laplas – Stilties çevirməsi $\varphi_\xi(q) = M \exp(-q\xi)$ ilə M . – S. ç.

$$\Gamma(1-s)\mu_\xi(s) + \int_0^\infty x^{-s} d\varphi_\xi(x) = 0,$$

$$-\alpha \leq \text{Re } s \leq \min(1, \beta)$$

bərabərliyi ilə bağlıdır.

Əd.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М. – Л., 1948; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69.

MELLOUS C_p – KRİTERİSİ « **Мэллоуса C_p – критерий; Mallows C_p – criterion** » – bax, *Prediktorların ən yaxşı altçıxlığının seçilməsi*.

MEŞƏ təsadüfi « **лес случайный; random forest** » – bax, *Təsadüfi meşə*.

META TEOREMİ « **Меты теорема; Mehta theorem** » – təsadüfi determinantlar üçün – bax, *Təsadüfi determinant*.

METEOROLOJİ İNFORMASIYANIN OPTİMAL İSTİFADƏSİ « **метеорологической информации оптимальное использование; optimal use of meteorological information** » – qeyri – müəyyən hava şəraitində qəbul olunan qərarların maksimal nəticəliyini təmin edən, meteoroloji informasiyanın təsvir formasını və ya qəbul olunma proseduru istehlakçının təsərrüfat tələblərinə uyğunlaşdıran

razılaşmadır. M. i. o. i. spesifikasiya məsələləri və meteoroloji informasiyanın iqtisadi effektivlik qiymətləri ilə sıx əlaqədardır.

M. i. o. i. üçün alqoritmlər statistik həllər nəzəriyyəsinə və «hava – meteoroloji informasiya (proqnozçu) – istehlakçı» sistemlərinin analizində tətbiq olunan digər statistik metodlara əsaslanır. Riyazi təsvirdə aşağıdakılar təyin olunur: meteoroloji vəziyyətlər çoxluğu F (bu vəziyyətlərdəki dəyişmələrə istehlakçı çox həssas olur); istehlakçının mümkün qərarları (həlləri) d -lərin çoxluğu; uduş (ziyan) funksiyası $u = u(F, d)$; məqbul strategiyalar çoxluğu S (bu strategiyalardan hər biri meteoroloji informasiyanın istifadə qaydasını təyin edir); optimallik kriterisi. Optimal strategiyanın seçilməsi, bir qayda olaraq, Beyes yanaşmasına əsaslanır, yəni uduşun orta qiyməti statistik mənada maksimumlaşdırılır və ya istehlakçının ziyanının orta qiyməti statistik mənada minimumlaşdırılır. İnvariant kriteri meteoroloji itkilərin orta qiymətlərinin minimizasiyasıdır (bax, *Meteoroloji itkilər funksiyası*). Məsələn, istehlakçının itki funksiyası fərq – xətti funksiya olarsa, normal qanunla paylanmış x meteoroelementinin regresion proqnozu x^* -nin istifadəsi üçün optimal strategiya x^*

proqnozundan bir qədər fərqli $a = x^* + t_0 \sigma \sqrt{1 - \rho^2}$ qiymətinə uyğunlaşan həllin qəbul edilməsinə gətirilir, burada σ , $-x$ -in standart yayınmasıdır; ρ , $-x$ və x^* arasında korrelyasiya əmsalındır; t – yerindəyişmə parametri olub, müxtəlif işarəli $\Delta = x - a$ xətalının təsərrüfat «çəkirlərinin» münasibətindən asılıdır.

M. i. o. i.-nin nəzəriyyə və metodları ilə: 1) istehlakçının qərarlarını (həllini) optimallaşdırmaq; 2) xüsusiləşdirilmiş meteoroloji təminatın optimal texnologiyasını qurmaq; 3) proqnozların özünü doğrultması üçün təsərrüfat baxımından əsaslandırılmış tələbləri ifadə etmək; 4) meteoroloji informasiyanın müxtəlif növlərinin potensial effektivliyini qiymətləndirmək mümkündür (bax, *Faydalılıq (g) proqnozun*). Qeyd olunmuş məsələlərə tətbiqi meteorologiyanın (iqtisadi meteorologiya) müstəqil oblası kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Багров Н. А., «Метеорология и гидрология», 1966, № 2, с. 3–12; [2] Жуковский Е. Е., Чудновский А. Ф., Методы оптимального использования метеорологической информации при принятии решений, Л., 1978; [3] Жуковский Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981; [4] Монин А. С., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1972, № 2, с. 218–28; [5] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [6] Омшанский М. А., «Ж. геофизики», 1933, в. 4, с. 489–99; [7] Murphy A. H., «Mon. Wea. Rev.», 1977, № 7, p. 803–16.

METEOROLOJİ İTKİLƏR FUNKSIYASI « meteorologicheskikh потерь функция; meteorological loss function » – hava şəraiti F -ə nəzərən ən əlverişli sayılan təsərrüfat həlli $d_0(F)$ əvəzinə hər hansı başqa $d \in \Omega_d$ həlli götürüldükdə, meteoroloji informasiyadan istehlakçının qazancının nə dərəcədə azalacağı və ya itkisinin nə dərəcədə artacağını göstərən, mənfi olmayan $r(F, d)$ funksiyasıdır, burada Ω_d – məqbul həllər çoxluğudur (bax, [1], [2]). Planlaşdırma gözlənilən hava şəraiti əsasında aparıldığı halda gözlənilən hava şəraitinin faktiki hava şəraitindən yayınmaları nəticəsində yaranan ziyanı M. i. f. təyin edilir.

M. i. f. $r(F, d)$ ilə faydalılıq funksiyası $u(F, d)$ birqiymətli əlaqəlidir; $u(F, d)$ funksiyası konkret istehlakçı üçün (F, d) hadisələr cütü çoxluğunda müəyyən

üstünlük şkalasını müəyyənləşdirir. u -nın artması ilə faydalılıq artırsa, onda $r(F, d) = u(F, d_0) - u(F, d)$ götürülür, burada $u(F, d_0) = \max_{\Omega_d} u(F, d)$; əgər u artdıqca faydalılıq azalırsa,

onda $r(F, d) = u(F, d) - u(F, d_0)$ götürülür, bu halda $u(F, d_0) = \min_{\Omega_d} u(F, d)$. Bir sıra hallarda M. i. f. $r = r(x, a)$

kimi ifadə oluna bilər, bu halda x – təsiredici meteoroloji X elementinin (temperatur, yağıntı, külək və s.) faktiki qiyməti, a X -in ele qiymətidir ki, bu qiymət əsasında qərar (həll) qəbul olunur. M. i. f.-ları $r(x, a) = \varphi(x-a)$ olan meteoroloji itkilərin fərqlər funksiyaları sinfi maraqlıdır. Məs.,

$$r(x-a) = \begin{cases} A_1(a-x), & x \leq a \text{ olarsa,} \\ A_2(x-a), & x > a \text{ olarsa} \end{cases}$$

funksiyası belələrindəndir, burada A_1, A_2 – müxtəlif işarəli $\Delta = x - a$ vahid qiymətli yayınmaların təsərrüfat əhəmiyyətini xarakterizə edən çəki əmsallarıdır.

$R = Mr(F, d)$ meteoroloji itkilərin orta qiyməti [ortalama təsadüfi hadisələr cütləri (F, d) -lərin ehtimal paylanmaları üzrə aparılır], adətən, keyfiyyət göstəricisi kimi meteoroloji informasiya əsasında qərarlar (həllər) qəbul edilməsində müxtəlif strategiyaların tutuşdurulması üçün istifadə olunur. Optimal strategiyanın seçilməsi R kəmiyyətinin minimizasiya şərtindən həyata keçirilir.

M. i. f. və meteoroloji itkilər üçün orta qiymətlər «təəssüf funksiyası» və «orta Beyes riski» kimi, *statistik həllər nəzəriyyəsinə* istifadə olunan ümumi anlayışların analoqlarıdır (bax, məs., [3], [4]).

Əd.: [1] Гандин Л. С., Жуковский Е. Е., «Метеорология и гидрология», 1973, № 2, с. 18–26; [2] Жуковский Е. Е., Чудновский А. Ф., Методы оптимального использования метеорологической информации при принятии решений, Л., 1978; [3] Чернов Г., Мозес Л., Элементарная теория статистических решений, пер. с англ., М., 1962; [4] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974.

METEOROLOJİ ÖLÇMƏLƏRİN STATİSTİK NƏZƏRİYYƏSİ « метеорологических измерений статистическая теория; statistical theory of meteorological measurement » – turbulentliyin statistik təsviri və alınan nəticələrin dəqiqlik qiymətlərinin statistik kriterilərinə əsaslanan turbulent atmosfer parametrlərinin ölçmə nəzəriyyəsidir.

M. ö. s. n.-ndə ölçüləcək $x = x(t)$ kəmiyyəti (temperatur, havanın rütubəti, küləyin sürəti və s.) müəyyən statistik strukturlu $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin realizasiyası kimi anlaşılır. Adətən, bu məqsədlə stasionar təsadüfi proseslər modeli istifadə olunur; qeyri – stasionar modellər, məs., ölçüləcək kəmiyyətin bütün gün ərzində (24 saat) dəyişmələrini nəzərə alan modellər az hallarda tətbiq olunur. Meteoroloji spektrlər xüsusi xassələrə malik olduqlarından (bax, məs., [1]) $\zeta(t)$ prosesinin bir sıra hallarda olduqca müxtəlif tezlik xarakteristikaları: turbulent pulsasiyalı «süretli» komponent və nisbətən «yavaş», yeni baxılan meteoroloji elementin daha da uzun çəkmə dəyişmələrini təsvir edən komponent kimi statistik asılı olmayan iki toplananın cəmi şəklində ifadə oluna bilməsi fərz olunur.

M. ö. s. n.-ndə meteoroloji xarakteristikaları ölçmə proseduru bir çox hallarda $\zeta(t)$ təsadüfi meteoroloji prosesinin, $\zeta(t)$ -ni ölçmə nəticəsində, $Z(t)$ -yə çevirən Φ filtrindən keçməsi kimi

interpretasiya olunur (bax, [2] – [4]). Ümumi halda, $Z(t) = \Phi\{\zeta(\tau)\}$ çevirməsi ölçmə sisteminin həyata keçirdiyi fiziki emeliyyatlardan başqa, verilənlər üzərində yenidən işlənilmələrlə bağlı, məs., hamarlama, zaman diskretizasiyası, səviyyə üzrə kvantlama, interpolasiya, diskret hesabatlara üzrə xüsusi statistik işləmələrlə bağlı bir sıra digər emeliyyatlar da həyata keçirir.

Xətti cihazla $\zeta(t)$ prosesini ölçmə üçün rejimi təsvir edən ən sadə model – $Z(t)$ çevirməsi

$$Z(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \zeta(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunan modeldir, burada $h(\tau)$ – uyğun ölçmə cihazının çəki (impuls keçid) funksiyasıdır. Meteoroloji cihazların ekseriyyəti üçün (bax, məs., [2], [5])

$$h(\tau) = \frac{1}{T_0} \exp(-\tau/T_0) \quad (2)$$

götürmək olar. Bu halda T_0 kəmiyyəti ölçmə cihazının inersiyasını xarakterizə edir və onun zaman sabiti adlanır.

M. ö. s. n.-ndə alınan nəticələrin dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün, adətən, xətin kvadrat ortası –

$$M\Delta^2(t) = M[Z(t) - G(t)]^2 \quad (3)$$

kəmiyyətdən istifadə olunur, burada $G(t) = A\{\zeta(\tau)\}$ – ölçmə zamanı təyin olunması tələb olunan kəmiyyətdir [məs., $G(t) = \zeta(t)$ meteoroloji elementinin anı qiymətlərini ölçdükdə, əgər meteoroloji elementin orta qiyməti T müddəti üçün təyin olunur-

sa, onda $G(t) = (1/T) \int_{t-T}^t \zeta(\tau) d\tau$ və s.].

$M\Delta^2(t)$ xətası t -dən asılı olduqda ölçmə dəqiqliyi əksər hallarda $M\Delta^2(t)$ kəmiyyətinin maksimal $(M\Delta^2)_{\max}$ və ya orta $(M\Delta^2)_{\text{or.}}$ qiymətilə, müəyyən $[t_1, t_2]$ müddəti üçün qiymətləndirilir.

M. ö. s. n.-nin köməyi ilə ölçmələrin optimizasiyası məsələlərinin bir çoxu olduqca sadə həll olunur, məsələn, ölçmə sisteminin optimal parametrlərini tapmaq kimi məsələ. M. ö. s. n. əsasında həll olunan optimizasiya məsələlərinin digər sinfi, meteoroloji ölçmə nəticələrinin optimal interpretasiyası adlandırılan interpretasiya ilə bağlıdır (bax, [5]). Bu halda ölçmə sisteminin (yeni Φ operatorunun) xarakteristikalarının, həmçinin A operatorunun ümumi şəklinin məlum olduğu hesab edilir və $G(t) = A\{\zeta(\tau)\}$ kəmiyyətinin $Z(t) = \Phi\{\zeta(\tau)\}$ çevirməsinə ən yaxın olmasını təmin edən (A operatorunun) parametrlərinin tapılması məsələsi qoyulur. Bu növ tipik məsələ – inersion meteoroloji cihazın köməyi ilə aparılan ölçmə nəticələrinin optimal interpretasiyası məsələsidir. Məsələn, əgər ölçmənin məqsədi eksponensial korrelyasiya funksiyası $r_{xx}(\tau) = \exp(-|\tau|/T_x)$ olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin anı qiymətlərini müəyyən etməkdən ibarətdirsə, onda [7]-yə əsasən, (3) xətasının kvadrat ortasının minimumu o halda alınacaqdır ki, çəki funksiyası (2) olan xətti cihazın cari t anında göstəricisi z daha əvvəllərdəki zaman anı $t' = t - \Delta t$ -dəki qiymətinə bərabər götürülsün, burada Δt aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\Delta t = \left(\frac{x}{x-1} \ln \frac{2}{x+1} \right) T_x, \quad x = T_0/T_x. \quad (4)$$

Həmin cihazdan $[t-T, t]$ zaman intervalı üzrə orta qiymət təyin etmək üçün meteoroloji proseslərin geniş sinfi üçün T -ni təqribən $1.7 T_0$ götürmək məqsədə uyğundur.

Ümummetodik cəhətdən M. ö. s. n.-nə fiziki ölçmələr üçün ümumi statistik nəzəriyyənin tətbiqlərindən biri kimi baxmaq olar (bax, məs., [8] – [10]). M. ö. s. n.-nin istifadəsinə aid konkret nəticələr [4] – [7]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Ламли Дж., Пановский Г., Структура атмосферной турбулентности, пер. с англ., М., 1966; [2] Hall F., «J. Meteor.», 1950, v. 7, № 2, p. 121–29; [3] Petersen D. P., Middleton D., «Tellus», 1963, v. 15, № 4, p. 387–405; [4] Персин С. М., Основы теории и проектирования автоматических измерительных систем, Л., 1975; [5] Яглом А. М., «Труды Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, в. 24(151), с. 112–62; [6] Гандин Л. С., Каган Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976; [7] Жуковский Е. Е., Киселева Т. Л., Мандельштам С. М., Статистический анализ случайных процессов в приложении к агрофизике и агрометеорологии, Л., 1976; [8] McCombie C. W., «Rep. Progress Phys.», 1953, v. 16, p. 266–320; [9] Невмировский А. С., Вероятностные методы в измерительной технике, М., 1964; [10] Новичкин П. В., Основы информационной теории измерительных устройств, Л., 1968.

METEOROLOJİ PROQNOZ alternativ « метеорологический прогноз альтернативный; forecast of meteorological binary variables or event » – bax, *Alternativ meteoroloji proqnoz*.

METEOROLOJİ ZAMAN SİRALARININ ƏLAQƏLİLİYİ « метеорологических временных рядов связность; connectedness of meteorological time series » – zaman üzrə dəyişən hər hansı meteoroloji $x(t)$

kəmiyyətinin ardıcıl müşahidə olunmuş bir sıra qiymətləri – $x(t_0), x(t_1), \dots$ (bunlar alınan müşahidə nəticələrinin üzərində yenidən işlənilməklə də götürülə bilər) kəmiyyətlərinin bir-birilə korrelyarlıdır (və ya ümumiyyətlə, bir-birindən statistik asılılıqdır). Adətən, $x(t)$ -yə təsadüfi prosesin realizasiyası kimi baxmaq olar (bu prosesi stasionar hesab etmək olar); bu halda M. z. s. ə., bir qayda olaraq, ona getirir ki, baxılan və $X(t)$ prosesinin ehtimal xarakteristikalarının qiymətləndirilməsində istifadə olunan sonlu $x(t_0), \dots, x(t_{n-1})$ seçimi eyni həcmli asılı olmayan müşahidələr ardıcılığı ilə müqayisədə daha az informativ olur (yeni dəqiqliyi daha az olan statistik qiymətlərin alınması ilə seçiyyəvi olur). Məs., əgər $X(t)$ riyazi gözləməsi

$MX(t) = m$, dispersiyası $M[X(t) - m]^2 = D_x$ və normalanmış korrelyasion funksiyası $M[X(t+\tau) - m][X(t) - m]/D_x = r(\tau)$ düsturu ilə təyin olunan stasionar təsadüfi proses, $x(t_0), \dots, x(t_{n-1})$ qiymətləri isə $(t_i = t_0 + i\Delta t)$

$$m^* = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} x(t_j)$$

ədədi orta statistik qiymətinin qurulmasında istifadə olunarsa, onda m^* statistik qiymətinin dispersiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$D_{m*} = D_x \lambda(n)/n,$$

$$\lambda(n) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-k/n) r(k \Delta(t)) \quad (1)$$

(bax, məs., [1], [3], [4]), burada $\lambda(n)$ vuruğu D_{m*} -nin qiymətinin n sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə hesablanmış ədədi orta statistik qiymətinin dispersiyasından fərqi xarakterizə edən kəmiyyət olub, demək olar ki, həmişə vahiddən böyük olur. D_{m*} üçün (1) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$D_{m*} = D_x/n_e, \quad n_e = n/\lambda(n), \quad (2)$$

burada n_e – asılı olmayan müşahidələr sayıdır və müşahidələr nəticəsində m^* üçün alınan dispersiya baxılan seçimi dispersiya ilə eynidir (bax, *Asılı olmayan sınaqların effektiv / ekvivalent sayı*). Praktikada tez-tez təsadüf olunan hallarda, $r(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ olduqda, (1)-dən aşağıdakı düstur alınır.

$$\lambda(n) = (1+p)/(1-p) - 2\rho(1-\rho^n)/n(1-\rho^2),$$

$$\rho = e^{-\alpha\Delta t} \quad (3)$$

(bax, məs., [2], [6]). n -in böyük qiymətlərində (3)-ün sağ tərəfindəki toplananı nəzərə almamaq olar, odur ki, bu halda

$$\lambda(n) \approx (1+p)/(1-p),$$

$$n_e \approx n(1-\rho)/(1+\rho)$$

olur.

Meteoroloji qiymətlərin gün ərzində orta qiymətləri ardıcılığı üçün uyğun M. z. s. ə., əksər hallarda, olduqca mühüm əhəmiyyət kəsb edir, belə ki, bu halda n_e -nin qiyməti n -dən olduqca kiçik olur (müqayisə et, [8]), belə sıralar üçün $n_e = n/3$ götürülməsi məsləhət görülür. Orta qiymətin, dispersiyanın və fluktuasiya edən meteoroloji kəmiyyətlərin statistik qiymətlərinin dəqiqliyinin analizində M. z. s. ə. haqqında bax, [3] – [7], [9].

Əd.: [1] Виленькин С. Я., Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования, М., 1967; [2] Гандин Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [3] Жуковский Е. Е., Киселева Т. Л., Мандельштам С. М., Статистический анализ случайных процессов в приложении к агрофизике и агрометеорологии, Л., 1976; [4] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [5] Крылов Е. В., Марченко А. С., «Тр. научно-исслед. Ин-та аэроклиматологии», М., 1967, в. 48, с. 28–35; [6] Марченко А., «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1965, т. 1, № 9, с. 906–13; [7] Маталас Н., в сб.: Статистические методы в гидрологии, пер. с англ., Л., 1970, с. 177–213; [8] Пановский Г. А., Брайер Г. В., Статистические методы в метеорологии, пер. с англ., Л., 1967; [9] Поляк И. И., Численные методы анализа наблюдений, Л., 1975.

METRİK ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLA(N)MA « метрическое многомерное шкалирование; metric multidimensional scaling » – bax, *Çoxölçülü şkalınlma*.

METRİK ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin « метрическая энтропия динамической системы; metric entropy of a dynamical system » – bax, *Entropiya(sı)* dinamik sistemin.

620 METRİK

METRİK ƏTRAF « метрическая окрестность; metric neighbourhood » – bax, *Robast statistik qiymet*.

METRİK İNVARİANT « метрический инвариант; metric invariant » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*.

METRİK İZOMORFİZM « метрический изоморфизм; metric isomorphism » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*.

METRİK MƏSAFƏLƏR METODU « метрических расстояний метод; metric distance method » – *ehtimal metrikaları* və *pseudomomentləri* istifadə edən аппроксимация tipli məsələlərdə limit münasibətlərinin və bərabərsizliklərin qurulması üçün lazım olan xassələrə malik müxtəlif üsullar toplusudur. Metodun ideyası ondan ibarətdir ki, qoyulan məsələnin həllində spesifik xassələri baxılan stoxastik modelin strukturu ilə yaxşı uzlaşan ehtimali metrikalarından istifadə olunur ki, bu halda məsələnin həlli olduqca asanlaşır. Digər metrikalara keçid *ehtimali metrikaların müqayisəsinə*, məs., ehtimali metrikalar arasında bərabərsizliklərə əsaslanır. Məsələnin həllinin qeyd olunan iki mərhələyə ayrılması məsələnin təbii mürəkkəbliyini pozmadan, mürəkkəbliyin əsas hissəsini ikinci mərhələyə keçirir. Belə üsullardan biri *minimal metrikalar metodudur*, digəri *ideal metrikalardan* istifadə ilə bağlıdır (limit teoremlərində yığılma sürətinin statistik qiymətlərinin qurulması) (bax, [4], [5]). M. m. m. limit teoremlərinin dəqiqləşdirilmələrində (bax, [2], [3]), paylanmaların xarakterizasiyasının dayanıqlılığı məsələlərində və bir sıra digər məsələlərdə geniş istifadə olunur.

M. m. m.-nin istifadəsi bəzən metrik yanaşma adlanır.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 1, с. 108–13; [3] Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 3, с. 573–77; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Золотарев В. М., «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 982, p. 7–17.

METRİK TRANZİTİV STASIONAR TƏSADÜFİ PROSES « метрически транзитивный стационарный случайный процесс; metrically transitive stationary random process » – bax, *Stasionar təsadüfi proses*.

METRİK TRANZİTİVLİK « метрическая транзитивность; metric transitivity » – bax, *Erqodiklik*.

* **MEYDAN; σ – MEYDAN** « поле; σ – поле; field;

σ – field » – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş, boş olmayan sonlu sayda bütün əməllərə görə qapalı sinfə; – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş, boş olmayan hesabi sayda bütün əməllərə görə qapalı sinfə deyildir. Hər bir σ – meydan meydandır. İkili prinsipinə əsasən inkar əməli və sonlu (hesabi) sayda kəsişmə əməlinə görə sinfin *qapalı sinif* olmasından (bax, *Qapalı sinif*) onun sonlu (hesabi) sayda birləşmə əməlinə görə qapalı sinif olması alınır və əksinə.

Əd.: [1] Лозе М., Теория вероятностей, М., 1962.

MEYER AYRILIŞI « Мейера разложение; Mayer expansion » – bax, *Ursell funksiyaları*.

MEYL « смещение; bias » – bax, *Sistematik xəta*.

MEYL(i) statistik qiymətin « смещение оценки; bias of an estimator » – bax, *Meylsiz statistik qiymet*.

* **MEYLƏDÜZƏLİŞ METODU** « поправка на смещение метод; method of correction to bias » – bax, *Boyskaut bıçağı (qatlanan bıçaq) metodu*.

MEYLLİ STATİSTİK QIYMƏT « смещенная оценка; biased estimator » – qiymətləndirilən kəmiyyətlə onun riyazi gözləməsinin üst-üstə düşmədiyi *statistik qiymətdir*. X – seçimi $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $T = T(X)$, – θ parametrinin statistik qiyməti olsun.

Əgər $\theta \in \Theta$, $M_\theta T \neq \theta$ olarsa, T meyli statistik qiymət adlanır. Bu halda $b(\theta) = M_\theta T - \theta$ -yə T statistik qiymətinin meyli və ya sistematik xətası deyilir.

Misal. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri asılı olmayan, $\alpha = M X_i < \infty$, $\sigma^2 = D X_i > 0$ parametrləri normal qanunla

paylanmış təsadüfi vektor, $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ olsun.

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

statistikası σ^2 dispersiyasının M. s. q.-dir, belə ki, $M s_n^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$. s_n^2 statistik qiymətinin meyli $b(\sigma^2) =$

$= M s_n^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$ ədədinə bərabərdir. Bu halda s_n^2 -nin

M. s. q.-dən σ^2 -nin meylsiz statistik qiyməti

$S_n^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2$ alınır, belə ki, bütün α və σ^2 üçün $MS_n^2 = \sigma^2$

olur. M. s. q. və meylsiz statistik qiymətin kvadratik risklərinin

$$R(s_n^2, \sigma^2) = M(s_n^2 - \sigma^2)^2 = \frac{2n-1}{n^2} \sigma^4,$$

$$R(S_n^2, \sigma^2) = M(S_n^2 - \sigma^2)^2 = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

ifadələrindən aydındır ki, $n \geq 2$ olduqda

$$R(s_n^2, \sigma^2) < R(S_n^2, \sigma^2)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Voinov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1–2, Dordrecht, 1993–96.

MEYLSİZ ETİBARLI ÇOXLUQ « несмещенное доверительное множество; unbiased confidence set » – parametrin ixtiyari bir qiymətini daxilinə alma ehtimalından kiçik olmayan ehtimalla parametrin nəmülum əsl qiymətini daxilinə alan *etibarlı çoxluqdur*. X – seçimi $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$ fəzasından ($\theta \in \Theta$) qiymətlər alan təsadüfi element, $C(X) \in \Theta$, – X -in müşahidəsi üzrə qurulmuş etibarlı çoxluq olsun; bu çoxluğun etibarlılıq əmsalının P -yə bərabər, yəni $P = \inf_{\theta \in \Theta} P_\theta \{ \theta \in C(X) \}$ olduğu fərz olunur. Əgər $C(X)$ çoxluğu ələ olarsa ki, $P \geq P_\theta \{ \theta' \in C(X) \}$ bərabərsizliyi ixtiyari $\theta' \neq \theta$ üçün ödənilsin, onda belə çoxluq meylsiz etibarlı çoxluq adlanır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

MEYLSİZ HƏLLEDİCİ FUNKSIYA « несмещенная решающая функция; unbiased decision function » – bax, *Meylsizlik*(y_i) statistik prosedurun.

MEYLSİZ XƏTTİ STATİSTİK QIYMƏT « несмещенная линейная оценка; unbiased linear estimator » – P_θ paylanmalar ailəsinin θ parametrinin funksiyası $f(\theta)$ -nin *xətti statistik qiymətidir*, onun P_θ paylanması üzrə orta qiymət bütün θ -lar üçün $f(\theta)$ -ya eyniliklə bərabərdir. M. x. s. q. ən çox xətti regressiya eksperimentlər üçün tətbiq olunur; burada $\theta \in \mathbb{R}^p$ nəmülum parametrlərinin xətti forması $I^T \theta$ üçün $a^T y$ statistik qiymətinin meylsizlik şərti $\Phi a = I$ şəklində olur; Φ – eksperimentin matrisidir.

MEYLSİZ KRITERİ « несмещенный критерий; unbiased test » – gücü ölçüsündən az olmayan *statistik kriteridir*. Əgər $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ parametrik fəzadırsa və $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ hipotezi yoxlanılırsa, onda M. k.-yə görə ixtiyari $\theta \in \Theta_0$ qiymətində H_0 hipotezini qəbul etməmək (səhvən) ehtimalı ixtiyari $\theta \in \Theta_1$ qiymətində H_0 hipotezini qəbul etməmək (doğru olaraq) ehtimalını aşmır. Əgər müntəzəm ən güclü kriteri varsa, onda bu kriteri M. k.-dir. Bir sıra məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriterinin olmadığı hallarda (bütün kriterilər sinfində) M. k.-lər sinfində müntəzəm ən güclü M. k. tapmaq mümkündür. Bunlar əsas etibarilə eksponensial paylanmalar ailəsinin birölçülü parametri haqqında hipotezin yoxlanılması məsələləridir (əngəlləyici parametrlər ola biləcəyi mümkünüyü halında).

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

MEYLSİZ ÖLÇMƏ « несмещенное измерение; unbiased measurement » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

MEYLSİZ PLAN « несмещенный план; unbiased plan » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

MEYLSİZ STATİSTİK QIYMƏT « несмещенная оценка; unbiased estimator » – riyazi gözləməsi qiymətləndirilən kəmiyyətin özü ilə üst-üstə düşən *statistik qiymətdir*. X – seçimi $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyət, $\theta \in \Theta$ və $T(X)$, – X üzərində aparılan müşahidə əsasında θ parametri üçün qurulmuş statistik qiymət olsun. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $M_\theta T(X) = \theta$ bərabərliyi ödənilsə, $T(X)$ statistikasına θ parametrinin meylsiz statistik qiyməti deyilir. Bir çox hallarda $T(X)$ M. s. q. orta mənada meylsiz statistik qiymət də adlandırılır, bu adlandırılma statistik qiymətin orta qiymətinin (riyazi gözləməsinin) qiymətləndirilən kəmiyyət ilə üst-üstə düşməsinə qeyd etmək məqsədilə olunmuşdur.

Misal. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri eyni üstlü qanunla paylanmış, paylanmalarının sıxlığı

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta^{-1} e^{-x/\theta}, & x \geq 0 (\theta > 1) \text{ olduqda,} \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

olan, asılı olmayan təsadüfi vektor olsun. Bu halda $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, θ parametrinin M. s. q.-dir.

Riyazi statistikanın inkişafı və onun ideyalarının statistik həllər funksiyaları (qaydaları) terminologiyasında, statistik həlledici qaydanın meylsizliyi anlayışının tərifı E. Leman (E. Lehmann, bax, [1]) tərəfindən verilmişdir; bu tərif seçilmiş itki funksiyası $L(T, X)$ -ə nəzərən parametrin $T(X)$ statistik qiymətinin risk funksiyası $M_\theta L(T, \theta)$ terminləri ilə ifadə edilmişdir. Əgər bütün $\theta' \neq \theta$ üçün $M_\theta L(T, \bar{X}) \leq M_\theta L(T, \theta')$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $T(X)$ statistik qiyməti $M_\theta L(T, \theta)$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymət adlanır. M. s. q.-in klassik tərifı (orta mənada) bu tərifin xüsusi halıdır. Doğrudan da, $L(T, X) = (T - \theta)^2$ olsun. T statistikası, yalnız və yalnız, o halda $M_\theta(T - \theta)^2$ kvadratik risk funksiyasına nəzərən θ parametrinin M. s. q.-dir ki, $T(X)$, θ parametrinin orta mənada M. s. q.-i olsun.

Əgər itki funksiyası kimi $L(T, \theta) = |T - \theta|$ götürülsə, onda T statistik qiyməti $M_\theta |T - \theta|$ risk funksiyasına nəzərən M. s. q., yalnız və yalnız, o halda olar ki, T statistikasının medianı $\text{med}_\theta T$, $\theta \in \Theta$ üçün $\text{med}_\theta T = \theta$ bərabərliyi ödənilsin. Belə statistik qiymət bir çox hallarda median - meylsiz statistik qiymət adlandırılır. Mes., qoyulan məsələnin şərtləri ilə

$$T_1 = \frac{n}{\ln 2} X^{(1)}$$

statistikası θ parametrinin median - M. s. q.-dir. $X^{(1)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ seçimi üzrə qurulmuş qaydalı statistikalar vektorudur.

Mühəndis praktikasında $P_\theta \{|T - \theta| \geq \varepsilon\}$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymətlər böyük rol oynayır, ε əvvəlcədən qeyd olunmuş müsbət ədəddir. Bu risk funksiyası

$$L(T, \theta) = \begin{cases} 1, & |T - \theta| \geq \varepsilon, \\ 0, & |T - \theta| < \varepsilon \end{cases}$$

itki funksiyasına uyğun olur.

Yuxarıda qeyd olunan meylsiz statistiklardan başqa praktikada modal meylsiz statistik qiymətlərdən də istifadə olunur. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ üçün $\text{mod}_\theta T = \theta$ olarsa, θ parametrinin qiymətləndirən statistik modal meylsiz statistik qiymət adlanır, $\text{mod}_\theta T$ statistikasının modasıdır. Mes., qoyulmuş məsələnin şərtləri ilə

$$T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n-1} \bar{X}_n$$

θ parametrinin modal - M. s. q.-dir. Əgər T_2 və $\bar{X}_n$ statistikaları $L(T, \theta) = (1/T - 1/\theta)$ itki funksiyasına nəzərən müqayisə olunarsa, onda bütün θ -lar üçün $M_\theta L(T, \theta) > M_\theta L(\bar{X}_n, \theta)$ bərabərsizliyi ödənilir, yəni bu halda modal - M. s. q. orta mənada M. s. q.-dən yaxşıdır. Əgər bu statistik qiymətlər $L(T, \theta) =$

$(T/\theta + \theta/T - 2)$ itki funksiyasına nəzərən müqayisə olunarsa, bu halda T_2 və $\bar{X}_n$ -in statistik qiymətləri bütün θ -lar üçün eyni riskə malik olur, lakin bu $\bar{X}_n$ -in T_2 statistikasından stoxastik kiçik, yəni $P_\theta \{\bar{X}_n < T_2\} = 1$ olmasından asılı olmayaraq belə olur.

Bax, *Asimptotik meylsiz statistik qiymət*.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Wasan T., Parametric estimation, N. Y. - [a. o.], 1970; [3] Voronov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their application, v. 1-2, Dordrecht, 1993-96.

MEYLSİZ STATİSTİK QIYMƏT ORTA MƏNADA « несмещенная в среднем оценка; mean unbiased estimator » - bax, *Meylsiz statistik qiymət*.

MEYLSİZ STATİSTİK QIYMƏT, RİSK FUNKSIYASINA NƏZƏRƏN « несмещенная относительно функции риска оценка; risk unbiased estimator » - bax, *Meylsiz statistik qiymət*.

MEYLSİZLİK statistik oyunlar nəzəriyyəsinə « несмещенность в теории статистических игр; unbiasedness in statistical game theory » - bütün həlledici qaydalar sinfinin yalnız meylsiz qaydalardan (qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *meylsiz statistik qiymətlərdən* və hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində *meylsiz kriterilərdən*) istifadə edilməsi hesabına daralması prinsipidir. D - həllər çoxluğu, Θ - parametrik çoxluq, $w(\delta, \theta)$, $\delta \in D$, $\theta \in \Theta$ - itki funksiyası, $X \in \mathcal{X}$, P_θ paylanmasından seçim olsun. Əgər ixtiyari θ , $\theta' \neq \theta$ qiymətlərində $M_\theta w(\delta(X), \theta) \leq M_\theta w(\delta(X), \theta')$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $\delta(X): \mathcal{X} \rightarrow D$ həlledici funksiyası meylsiz həlledici funksiya adlanır. Başqa sözlə, $v = \theta$ qiymətində $\min_v M_\theta w(\delta(X), v)$

alınır. Bu onu ifadə edir ki, $\delta(X)$ naməlum θ -ya orta hesabla hər hansı digər nöqtədən daha yaxındır [$w(\cdot, \cdot)$ məsafəsi anlamında].

Meylsiz statistik qiymətlər və meylsiz kriterilərin tərifləri bu tərifin xüsusi hallarıdır.

MEYLSİZLİK(yi) statistik prosedurun « несмещенность статистической процедуры; unbiasedness of a statistical procedure » - statistik prosedura qəbul edilən həllərin düzgün olmayan həllərdən ixtiyari birinə deyil, düzgün həllə yaxın olmasından ibarət, statistik prosedura xassəsidir. M. üçün ümumi tərif statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində E. Leman tərəfindən [1]-də verilmişdir; əgər Θ parametrik fəzasının bütün θ , θ' nöqtələri üçün $L(\theta, d)$ itki funksiyası verildiyi halda $M_\theta L(\theta, \delta(X)) \geq M_\theta L(\theta, \delta(X))$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $\delta = \delta(x)$ həlledici funksiyası meylsiz həlledici funksiya adlanır. Bu tərif əvvəllər məlum olan və geniş istifadə olunan xüsusi hallar kimi statistik praktikada parametrik $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin M.-nin tərifini: yəni

$M_\theta \hat{\theta} = \theta$ bərabərliyi ilə verilən tərifini (L - kvadratik itki funksiyasıdır; bax, *Meylsiz statistik qiymət*) və statistik kriterinin M.-nin təfiri: kriterinin gücü onun ölçüsündən böyükdür, tərifini (L - $0-1$ tipli itki funksiyasıdır) ehatə edir.

Bütün mümkün həllər funksiyaları sinfinin meylsiz həllər funksiyalar sinfinə daralması (tamamilə məqbul statistikalar olduqda) bu sinifdə müntəzəm minimal riskli həlledici funksiyaların tapıl-

masına xidmət edir. Lakin M.-in Ləman terifi parametrik qiymətləndirmə məsələlərinə Bayes yanaşması ilə bir araya sığmır (bax. [2], [3]): Bayes statistik qiymətləri, bir qayda olaraq, meyilli statistik qiymətlərdir və yalnız aprior riskləri sıfıra bərabər Bayes statistik qiymətləri meyilsiz statistik qiymətlər ola bilər.

Əd.: [1] Lehman E. L., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 587–92; [2] Блеквелл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; [3] Bickel P. J., Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, p. 1907–11.

MƏHDUD ŞAXƏLƏNƏN PROSES «ограниченный ветвящийся процесс; bounded branching process» – elə şaxələnen prosesdir ki, t anında hissəciklər sayı $\zeta(t)$, $\zeta(t-1)$ anındakı bütün hissəciklərin sayından və «məhdudlaşdırən» (ola bilsin ki, təsadüfi) $g(t)$ funksiyasının qiymətindən asılıdır. Məs., t və i -nin ixtiyari qiymətlərində $\xi_{t,i}$, – t -ci neslin i -ci hissəciyinin bilavasitə varislərinin sayı, $F(s) = M_s^{\xi_{t,i}}$ – onun doğuran funksiyası olsun; fərz olunur ki, $\xi_{t,i}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $M_s^{\xi_{t,i}} > 1$, $q = F(q) \in [0, 1)$ uyğun Qalton – Watson şaxələnen prosesinin cırlaşma ehtimalıdır. Əgər məhdud $\zeta(t)$ şaxələnen prosesi

$$\zeta(0) = 1, \quad \zeta(t+1) = \min \left\{ g(t), \sum_{i=1}^{\zeta(t)} \xi_{t,i} \right\}, \quad t \geq 0 \quad (*)$$

münasibətlərlə təyin olunarsa, onda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \zeta(t) = 0 \} = 1 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)} = \infty$$

münasibəti doğrudur, burada $g(t)$ – determine olunmuş funksiyadır (bax. [1]). (*)-nın digər variantlarına da baxılmışdır (bax. [2], [3]).

Əd.: [1] Зубков А. М., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 1, с. 9–18; [2] Севастьянов Б. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 238, № 4, с. 811–13; [3] Bruss F. T., «J. Appl. Probab.», 1978, v. 15, № 1, p. 54–64.

MƏHDUD TƏKRAR LOQARİFM QANUNU «ограниченный закон повторного логарифма; bounded law of the iterated logarithm» – bax. *Təkrar loqarifm qanunu* Banax fəzasında, *Təkrar loqarifm qanunu* empirik ölçülər üçün.

MƏHDUD TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR «ограниченный случайный линейный оператор; bounded random linear operator» – bax, *Təsadüfi xətti operator*.

MƏHDUD VARIASIYA «ограниченная вариация; bounded variation» – bax, *Variasiya(s)* ölçünün, *Vektor ölçü*.

MƏHDUDLAYICI «ограничитель; clipper» – bax, *Binar təsadüfi proses*.

MƏHDUDLUQ EHTİMALA GÖRƏ «ограниченность по вероятности; boundness in probability» – bax, *Stoxastik məhdudluq*.

MƏXSUSİ ƏDƏDLƏR, empirik kovarians matrislərin kənar məxsusi ədədləri «собственные числа крайние эмпирических ковариационных матриц extreme eigenvalue of empirical covariances matrices» – empirik

kovariasion $\hat{\Xi}_m$ matrisinin minimal və maksimal məxsusi ədədləridir. Əgər $\hat{\Xi}_m$ matrisi m – ölçülü X normal vektoru üzərində aparılan müşahidələr nəticəsində alınmışdırsa və $\hat{\Xi}_m$ matrisinin məxsusi ədədləri λ_i -lər m -dən asılı olmayan hər hansı bir ədədlə məhdudlarsa, onda n X vektoru üzərində asılı olmayan x_k müşahidələrin sayı olduqda, $\lim_{n \rightarrow \infty} mn^{-1} < 1$ şərti ödənilərsə,

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1(\hat{\Xi}) - \alpha_1) = 0,$$

$$\hat{p} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_m(\hat{\Xi}) - \alpha_2) = 0$$

münasibətləri doğrudur, burada $\alpha_1 = v_1(1-\gamma) + \gamma v_1^2 m^{-1} \times \sum_{p=1}^m (v_p - \lambda_p)^{-1}$, $\gamma = mn^{-1}$, $i = 1, 2$, $v_1, v_2, -$

$$1 - \gamma + 2\gamma v m^{-1} \sum_{p=1}^m (v - \lambda_p)^{-1} =$$

$$= \gamma v^2 m^{-1} \sum_{p=1}^m (v - \lambda_p)^{-2}, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$$

tenliyinin kəmiyyətce maksimal və minimal həlləridir,

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})^T, \quad \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Əd.: [1] Гірко В. Л., «Доповіді Укр. РСР», сер. А., 1998, № 10, с. 9–12.

MƏXSUSİ / CIRLAŞMAYAN PAYLANMA « собственное / невырожденное распределение; non-degenerate distribution » – X təsadüfi kəmiyyətinin $P\{X < \infty\} = 1$ şərtini ödəyən paylanmasıdır. Bax, *Cırlaşan paylanma*.

MƏQBUL HƏLLEDİCİ FUNKSIYA « допустимая решающая функция; admissible decision function » – elə həlledici funksiyadır ki, ondan ciddi dominar həlledici funksiya yoxdur. Araşdırılan obyekti xarakterizə edən $\theta \in \Theta$ parametrinin naməlum qiyməti haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunan δ həlledici funksiyasının risk funksiyası $R(\theta, \delta)$ olsun.

Əgər elə $\delta^* \in \mathcal{H}$ həlledici funksiyası yoxdursa ki, onun üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ bərabərsizliyində ciddi bərabərsizlik münasibəti Θ parametrik fəzasının heç olmazsa bir nöqtəsində ödənilsin, onda $\delta \in \mathcal{H}$ həlledici funksiyası $\mathcal{H}$ sinfində məqbul həlledici funksiya adlanır; belə δ^* həlledici funksiyası (dominar) δ həlledici funksiyasını üstələyir, deyilir. M. h. f.-lər çoxluğu həlledici funksiyaların mahiyyətce tam minimal sinfini əmələ gətirir. Bax, *Məqbulluq(ğ u) statistik prosedurun*, *Statistik prosedur*, tam sinif.

MƏQBUL KRİTERİ « допустимый критерий; admissible test » – məqbulluq xassəsinə malik statistik kriteridir (bax, *Məqbulluq(ğ u) statistik kriterinin*).

M. k. anlayışı *məqbul həlledici funksiya* ümumi anlayışının konkretləşdirilməsidir. Bütün məqbul kriterilər çoxluğu kriterilərin minimal tam sinfini təşkil edir.

Bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

* **MƏQBUL MATRİS** «*допустимая матрица; admissible matrix*» – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

* **MƏQBUL PLAN** «*допустимый план; admissible design*» – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

MƏQBUL STATİSTİK QIYMƏT «*допустимая оценка; admissible estimator*» – qəbul edilə bilən, yaxşılaşdırılması mümkün olmayan *statistik qiymətdir*. Daha dəqiq, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ – müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyəti ilə bağlı ölçülən fəza, $\{\theta_0, \theta \in \Theta\}$ isə $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzasında ehtimal

ölçüləri ailəsi olsun. Daha sonra, $L(\hat{\theta}, \theta)$ – *itki funksiyası*, $\mathcal{H}$ – hər hansı statistik qiymətlər sinfi, $R_{\hat{\theta}}$ isə $L(\hat{\theta}, \theta)$ itki

funksiyasına nəzərən $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin riski olsun. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $\tilde{\theta} \in \mathcal{H}$, $R_{\tilde{\theta}} \leq R_{\theta}^*$ şərtlərindən

$R_{\tilde{\theta}} = R_{\theta}^*$ bərabərliyi alınarsa, $\theta^* \in \mathcal{H}$ sinfində *məq-*

bul statistik qiymət adlanır. Beləliklə, əgər $\theta^* \in \mathcal{H}$ sinfində M. s. q.-dirsə, onda bu sinifdə elə statistik qiymət yoxdur ki, onun riski θ^* riskini aşmasın və θ -nın heç olmazsa bir qiymətində θ^* riskindən ciddi kiçik olsun. Əgər statistik qiymət bütün statistik qiymətlər sinfində məqbuldursa, onda o, *mütləq məqbul* və ya sadəcə *məqbul statistik qiymət* adlanır.

Risk funksiyasını minimallaşdıran statistik qiymətin seçilməsi baxımından, aydındır ki, qeyri – məqbul statistik qiymətlər qəbul olunmamalıdır. Elə hallar vardır ki, *ekvivariant statistik qiymət* qeyri – məqbul statistik qiymətdir. Məs., orta qiymətlər vektoru – m – ölçülü normal qanunun yerindəyişmə parametrinin statistik qiyməti qeyri – məqbuldur; $m \geq 3$. Digər tərəfdən M. s. q.-lərin ekseriyyətindən istifadə etmək məsləhət deyildir. $\Theta = \mathbb{R}$ olduğu halda $\tilde{\theta} = \text{const}$ məqbul statistik qiymətdir.

M. s. q.-lər nəzəriyyəsində mühüm fakt birölçülü və ikiölçülü yerindəyişmə parametrinin Pitmen statistik qiymətinin məqbulluğudur. Bütün elementləri məqbul statistik qiymətlər altsinfinin qurulması metodu aşağıdakı nəticədən alınır. Əgər hər bir $\hat{\theta}$ üçün risk funksiyası $R_{\hat{\theta}} \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ -ə görə kəsilməzdirsə və əgər

$\xi(\theta)$ daşıyıcısı θ olan aprior paylanmadırsa, onda $\xi(\theta)$ -ya uyğun Bayes statistik qiyməti məqbul statistik qiymətdir (bax, [1]). Qeyd etmək lazımdır ki, M. s. q. bəzi xüsusi şərtlərlə Bayes statistik qiymətlərinin limitidir (bax, [2]). Rao – Kramer bərabərsizliyində aşağı və yuxarı sərhədlərə çatımın təmin olunması analizinə əsaslanan məqbulluğun isbat metodları mövcuddur (bax, [3]). M. s. q. və bəzi təsadüfi dolaşmaların qayıdışlı olması arasında əlaqə [4]-də şərh olunmuşdur. Xüsusi tip statistik qiymətlərin məqbulluğu xassəsi əksərən, ehtimal ölçülərinin uyğun ailəsi üçün seçiyyəvi olur (bax, [5]).

M. s. q. anlayışı bir qayda olaraq, qeyd olunmuş n həcmli seçimlər üçündür. Lakin, bununla belə, bu anlayışla bağlı ikinci tərtib asimptotik məqbulluq anlayışı da mövcuddur ki, bu da

$n \rightarrow \infty$ olduqda statistik qiymətin riskinin asimptotik ayrılışında ikinci həddin qiymətinin yaxşılaşdırıla bilinməməsindən ibarətdir. İkinci tərtib asimptotik məqbulluq məsələsinin şərh Şredinger tənliyinin müsbət həllərinin xassələrilə əlaqəlidir (bax, [6]).

M. s. q.-lər sinfinin strukturunu itki funksiyasının qurulma prinsipinin əsası kimi götürmək olar. Məs., $x_1, \dots, x_n$ təkrarlanan seçimi əsasında qiymətləndirilmə halında M. s. q.-lər çoxluğunun simmetrik funksiyalardan ibarət olduğunu hesab etmək təbiidir. Arqumentlərin fərqiindən asılı itki funksiyası üçün M. s. q.-lər çoxluğunun belə strukturlu olması yalnız $L(\hat{\theta}, \theta)$ -nin qabarıqlığı halında mümkündür (bax, [7]).

Əd.: [1] Blyth C., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 22–42; [2] Stein C., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, p. 518–22; [3] Hodges J., Lehmann E., «Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist.», 1951, p. 13–22; [4] Brown L., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, p. 960–94; [5] Караган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [6] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, с. 309–38; [7] Какосян А. В., Клебанов Л. Б., Меламед И. А., Проблема построения моделей в статистической теории оценивания параметров, Тбилиси, 1986.

MƏQBUL STATİSTİK QIYMƏT xətti «*допустимая оценка линейная; admissible linear estimator*» – xətti statistik qiymətlər sinfində *məqbul statistik qiymətdir*.

Bax, *Məqbul statistik qiymət, Xətti statistik qiymət*.

MƏQBUL TOPOLOGİYA «*допустимая топология; admissible topology*», S – *топология*, – (sonsuzölçülü) fəzada topologiyadır, bu topologiyada müsbət – müəyyən funksionalın kəsilməzliyi onun hər hansı hesabı – additiv ölçünün xarakteristik funksionalı olması üçün zəruri və kafidir. Ekvivalent olaraq, M. t.-ni elə topologiya kimi təyin etmək olar ki, bu topologiyada silindrik ölçünün xarakteristik funksionalının kəsilməzliyi bu ölçünün hesabı – additivliyi ilə eynigüclüdür. M. t. Hilbert fəzası halında da mövcuddur (bax, *Sazonov topologiyası*). Nüvə hesabı – Hilbert fəzaları üçün ilkin topologiya – M. t.-dir. M. t.-yə digər misal *Gross topologiyasıdır*. M. t. həmişə mövcud deyildir. Hilbert fəzaları olmayan elə Banach fəzaları vardır ki, bunlar üçün M. t. mövcuddur.

Əd.: [1] Prokhorov Y. V., «Proc. 4-th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1961, v. 2, p. 403–19; [2] Мустари Д. Х., Вероятности и топологии в банаховых пространствах, Казань, 1989.

MƏQBUL YERİNİDƏYİŞMƏ(si) ölçünün «*допустимый сдвиг меры; admissible shift of a measure*», vektor fəzasında və ya qrupda verilmiş ölçünün, – fəza və ya qrupun elə elementidir ki, sıfır ölçülü ixtiyari çoxluqla onun birləşməsi nəticəsində alınan çoxluğun ölçüsü də sıfıra bərabər olur. T – vektor fəza və ya Abel qrupu olsun; $\mathcal{B}$, – T -nin elə altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun ki, əgər $B \in \mathcal{B}$ və $a \in T$ olarsa, onda

$$B + a = \{b + a : b \in B\} \in \mathcal{B}$$

münasibəti doğrudur, burada μ , – $\mathcal{B}$ -də hər hansı ölçüdür. Əgər hər bir B , $B \in \mathcal{B}$ üçün $\mu(B) = 0$ və $\mu(B + a) = 0$ olarsa, $a \in T$ elementi μ ölçüsünün məqbul yerindəyişməsi adlanır.

Əgər A_μ μ – ölçülü bütün məqbul yerindəyişmələr çoxluğu və $A_\mu = T$ olarsa, onda μ kvaziinvariant ölçü adlanır. Sonsuzölçülü Banach fəzalarında kvaziinvariant ehtimal ölçüləri yoxdur. M. y. çoxluğu sonsuzölçülü fəza halında bir qayda

olaraq, birinci dərəcəli çoxluq olur və bu çoxluğu təsvir etmək çətin məsələdir. M. y. Gauss ölçüləri və bezi digər ölçülər üçün sonsuzölçülü fəzalarda araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

MƏQBUL ZOLAQ « допустимая полоса; admissible band » – bax, *Etibarlı zolaq*.

MƏQBULLUQ (ğ u) həlledici funksiyanın «допустимость решающей функции; admissibility of a design function» – bax, *Məqbulluq* (ğ u) statistik prosedurun.

MƏQBULLUQ (ğ u) statistik kriterinin «допустимость статистического критерия; admissibility of a statistical test» – müntəzəm yaxşı xarakteristikalara malik digər statistik kriterinin olmadığını ifadə edən *statistik kriteri* xassəsidir. Eksperimentin aparılmasının ardıcıl sxeminə mühümlük ölçüsü, kriterinin gücü, seçimin orta həcmi (və ya müşahidə müddətinin orta qiyməti) və s. – belə müntəzəm yaxşı xarakteristikalardan sayılır. Statistik kriterinin M. anlayışı statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsi çərçivəsində statistik prosedurun *məqbulluğu* ümumi anlayışının konkretləşdirilmiş formasıdır (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*).

$\theta \in \Theta$ naməlum parametrdən asılı P_θ paylanmasına malik müşahidəolunan təsadüfi X seçimi üzrə $H_1: \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, Θ_0 və Θ_1 Θ -nın kəsişməyən, boş olmayan altçoxluqlarıdır və $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. K – hipotezlərin yoxlanılması üçün bu məsələdə kriterilərin baxılan sinfi olsun (K bütün kriterilər sinfi ilə üst-üstə düşə bilər). Əgər

$$M_\theta \Psi(X) \leq M_\theta \varphi(X), \quad \theta \in \Theta_0 \quad (1)$$

$$M_\theta \Psi(X) \geq M_\theta \varphi(X), \quad \theta \in \Theta_1 \quad (2)$$

münasibətlərinin heç olmazsa bir $\theta \in \Theta$ nöqtəsində ciddi bərabərsizlik münasibətləri ilə ödənilməsinə təmin edən $\Psi \in K$ kriterisi yoxdursa, $\varphi \in K$ kriterisi K sinfində məqbul kriteri adlanır.

$$\text{Bəzən mühümlük ölçüsü } \alpha: K_\alpha = \left\{ \varphi: \sup_{\theta \in \Theta_0} M_\theta \varphi(X) \leq \alpha \right\}$$

olan K_α kriterilər sinfinə baxıldıqda, (1) – (2) şərtləri yalnız (2) şərti ilə əvəz olunur. Müşahidələrin ardıcıl sxeminə (1) – (2) şərtlərinə $M_\theta N(\Psi) \leq M_\theta N(\varphi)$ tipli şərtlər əlavə oluna bilər, burada $N(\varphi)$, – φ kriterisini ardıcıl istifadə etdikdə seçimin təsadüfi həcmidir.

Hipotezlərin yoxlanılmasının müxtəlif statistik məsələləri üçün statistik kriterinin M.-nın zəruri (hərdən kafi) şərtləri müəyyən olunmuşdur. Bəzən, belə şərtlər statistik kriterinin bezi ümumi xassələri kimi müəyyən mənada monoton (bax, məs., *Doğruya-oxşarlıq nisbəti monoton*), hər hansı çevirmələr qrupuna görə invariant, seçimdən yalnız seçim üzrə qurulmuş kafi statistikanın qiyməti vasitəsilə asılı olması kimi xassələrlə ifadə olunur. Statistik kriterinin M.-nın zəruri və kafi şərtləri bəzən məqbul kriterinin strukturunun təsvirindəki terminlərlə verilir, məs., eksponensial ailələrin parametrləri üçün hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində məqbul kriterilərin strukturu haqqında ümumi nəticələr buna misaldır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələlərində statistik kriterinin asimptotik məqbulluğu anlayışı daxil olunmuşdur, bu halda, (1) və (2) münasibətləri asimptotik ödənilməlidir [$O(1)$ dəqiqliyi və ya daha dəqiqliklə].

Qeyri – parametrik hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələlərində və ya uzlaşmanın yoxlanılması məsələlərində məqbulluq və ya asimptotik məqbulluq haqqında ümumi nəticələr də məlumdur (bax, məs., [6]).

Əd.: [1] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [2] Matthes T. K., Truax D. R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, p. 681–97; [3] Eaton M. L., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, p. 1884–88; [4] Stein Ch., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, p. 616–23; [5] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 404–10; [6] Тюлягин А. Н., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1982, т. 46, № 3, с. 569–616.

MƏQBULLUQ (ğ u) statistik prosedurun «допустимость статистической процедуры; admissibility of a statistical procedure» – müntəzəm yaxşı xarakteristikalarının olmaması xassəsinə malik *statistik prosedurdur*. Statistik prosedur *həlledici funksiya* ilə eyniləşdirildiyi hallarda (məs., statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunduqda) həlledici funksiyanın məqbul olduğunu qəbul olunur və bu halda bu həlledici funksiya istifadə olunaraq qərar qəbul edilir.

$\mathcal{H}$ – həlledici funksiyaların hər hansı bir sinfi olsun. Əgər $\mathcal{H}$ sinfində ele $\delta^* \in \mathcal{H}$ həlledici funksiyası yoxdursa ki, bütün

$\theta \in \Theta$ parametrləri üçün $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ münasibəti hər hansı bir $\theta_0 \in \Theta$ nöqtəsində ciddi bərabərsizlik münasibətilə ödənilsin, onda $\delta \in \mathcal{H}$ həlledici funksiyası $\mathcal{H}$ sinfində məqbul həlledici funksiya adlanır, burada $R(\theta, \delta)$ – araşdırılan obyektə xarakterizə edən naməlum $\theta \in \Theta$

parametri haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunan δ həlledici funksiyasının risk funksiyasıdır. Statistik problemde həmişə yalnız məqbul həlledici funksiyalarla kifayətlənmək məqsəduyğundur və əgər müxtəlif həlledici funksiyalara müxtəlif risk funksiyaları uyğun olursa, onda ümumi halda hər hansı bir həlledici funksiyanı araşdırmadan, onu xaric etmək olmur, belə ki, bu halda qəbul ediləcək qərarların keyfiyyəti pisləşir (heç olmazsa $\theta \in \Theta$ parametrinin bezi qiymətlərində). Daha dəqiq, məqbul həlledici funksiyalar çoxluğu həlledici funksiyaların minimal mahiyyətə tam sinfini əmələ gətirir (bax, *Statistik prosedur*, tam sinfi). Bu nəticədən əksər hallarda tam sinflərin qurulması üçün istifadə olunur (minimal olması zəruri deyildir); həlledici funksiyanın hər hansı bir xassəsinin onun məqbulluğunun zəruri şərti olmasından bu xassəyə malik həlledici funksiyalar çoxluğunun tam sinfi əmələ gətirdiyini hökm etmək olar; əgər bu sinifdən olan bütün həlledici funksiyalar məqbul həlledici funksiyalardırsa, onda bu tam sinfi minimal tam sinfidir.

Statistik prosedurun M. anlayışı G. Neyman və O. Morqenştern tərəfindən oyunlar nəzəriyyəsinin məsələləri ilə əlaqədar daxil olunmuşdur (bax, [1]); statistik həllər nəzəriyyəsində bu anlayışı A. Vald daxil etmişdir (bax, [2]).

Əd.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–522; [3] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; [4] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MƏQBULLUQ(ğu) təsnifat prosedurunun « **допустимость** процедур классификации; **admissibility** of classification procedures » – müşahidələrin təsnifatı prosedurunun yalnız məqbul prosedurların mümkün qədər dar sinfi üzrə, müəyyən mənada optimal axtarışını məhdudlaşdırmağa imkan verən riyazi statistika anlayışdır (bax, [1]).

Təsnifat prosedurunun M. anlayışının kifayət qədər geniş variantları toplusu vardır və bu da məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq ən uyğun variantı seçməyə imkan verir.

Təsnifat prosedurunun M. üçün ən çox istifadə olunan nəticələr alınmışdır (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Fisher L., van Ness, John W., «Biometrika», 1971, v. 58, № 1, p. 91–104.

MƏQSƏDYÖNLÜ PROYEKSIYALA (N)MA(s) çoxölçülü verilənlərin « **целенаправленное** **проектирование** **многомерных** **данных**; **projection pursuit** of multivariate data » – *tədqiqi statistik analiz* mərhələsində istifadə olunan və ilkin verilənlərin xətti proyeksiyalarının tətbiqinə əsaslanan, verilənlər üzərində statistik işlər aparılması üçün metodlar toplusudur. M. p. təmini J. Fridman və J. Tyuki tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. M. p. metodları *çoxölçülü statistik analiz, faktor analiz, baş komponentlər analizi, xətti diskriminant analiz* və s. kimi klassik metodların təbii ümumiləşməsidir. M. p.-ya dəyişənlər fəzasının dim. – ölçülərinin əvvəlcədən azaldılması üçün yanaşmalardan biri kimi baxmaq olar, məs., *klaster – analiz* məqsədləri üçün.

$X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, – p – ölçülü müşahidələrdən n – ölçülü seçim olsun. dim. – ölçü $p > 3$ olduqda və verilənlərin generasiyasının fiziki modeli haqqında aprior informasiya ya az, ya da ki, heç olmadıqda M. p. texnikasından verilənlərin strukturuna xas olan xüsusiyyətlər haqqında təsəvvür yaratmaq məqsədilə istifadə etmək olar. M. p. texnikası ilkin verilənlərin «maraqlı» q – ölçülü proyeksiyaları – $Z^n = A^T X^{(n)}$ inikaslarının vizual analizinə əsaslanır. Formal baxımda, fərz olunur ki, U birölçülü proyeksiya təyin edən p – ölçülü vektordur və $Q(U, X^{(n)})$ «maraqlı» proyeksiya təyin edən hər hansı proyeksiyon indeksin seçimi qiymətidir. M. p.-da hər hansı q sayda $U_1, \dots, U_q$ proyeksiyon vektorlarının alınması üçün, adətən, ardıcıl (addımbaaddım) yanama istifadə olunur. U vektoru əvvəlcə

$$U = \arg \max_{\tilde{U}} Q(\tilde{U}, X^{(n)}) \quad (1)$$

maksimizasiya məsələsinin həlli kimi təyin olunur. Sonra hər bir növbəti vektor (1)-dən tapılır, lakin əlavə şərt qoyulur ki, əvvəl tapılmış vektorların təsiri bu və ya digər tərzdə nəzərə alınmışdır (bəzən, lakin həmişə yox: məs., $U_1, \dots, U_q$ vektorlarının cüt-cüt

ortoqonallıq şərti kifayətdir). Beləliklə, $Z = A^T X$ q – ölçülü proyeksiyasını təyin etmək olar, burada A matrisinin sütunları məhz $U_1, \dots, U_q$ vektorlarıdır. M. p. metodları təbii olaraq fəzanın dim. – ölçüsündən asılı olaraq, iki sinfə ayrılır və verilənlər bu sinflərə əks olunurlar. Əgər $q = 1, 2$ (çarəsiz qaldıqda 3) olarsa, onda metodlar ilk növbədə məhz tədqiqi analize aiddir, bu halda hər hansı proyeksiyon indeks üzrə optimizasiyanın hesablanması prosedurunun köməyi ilə ən səlis proyeksiyalar verən inikaslar axtarılır, son qərar isə vizual analiz yolu ilə qəbul edilir,

məs., display ekranında $q=1$ üçün əks olunmuş verilənlərin histoqramı və ya $q=2$ olduqda onların səpələnmə diaqramı.

Anomal müşahidələrin aşkar olunması, qarışmaların ayrılması, klasterizasiya kimi məsələlərdə ən səmərəli nəticələr almaq olur, yeni struktur aşkar-aydın olduğu halda. Lakin bəzi hallarda verilənlər o dərəcədə mürəkkəb olur ki, proyeksiyaların sayının nisbətən az olması onların təsviri üçün kifayət etmir və bu halda bu verilənlərin strukturunun informasiyanın aqreqatlaşdırılması (bu informasiya belə azölçülü, olduqca çoxsaylı proyeksiyalarda olur) əsasında təsviri məsələsi yaranır.

Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin sıxlığının bərpa olunması məsələsi, diskriminant analizdə siniflərin bəzi yerləşmə konfigurasiyaları qeyd olunmuş sinfin tipik məsələsidir. Aşağıda bəzi proyeksiyon indekslər verilmişdir.

Klasterlərin aşkar olunması üçün proyeksiyon indekslər. Bu məqsədlə proyeksiyon indekslərin

$$Q_\beta(U, X) = s^\beta \mathbf{M}_f f^\beta(z) \quad (\beta > 0) \quad (2)$$

şəklində birparametrlı ailəsindən istifadə etmək olar, burada $\mathbf{M}_f$, – $f(z)$ sıxlığı üzrə riyazi gözləmə operatoru, $f(z)$, – $z = U^T X$ birölçülü proyeksiyasının sıxlığı, $Q_\beta(U, X)$ – proyeksiyon indeksin seçimi $Q_\beta(U, X^{(n)})$ proyeksiyon indeksindən fərqli olaraq, «nəzəri» qiymətidir, s , – z -in dispersiyasıdır.

Birölçülü $z = U^T X$ proyeksiyaları üçün seçim üzrə (2) qiymətlərinin qiymətləndirilməsi qeyri – parametrik metodların köməyi ilə aparılır.

M. p.-da

$$Q(U, X) = -\mathbf{M}_f \ln f(z) + \ln s \quad (3)$$

entropik kriterisi geniş istifadə olunur ki, bu kriteriyə $\beta \rightarrow 0$ olduqda (2)-nin limit forması kimi baxmaq olar.

(2), (3) kriteriləri üzrə proyeksiya axtarışı üçün S – ortoqonallıq şərtindən (S kovariasiyalar matrisi və ya onun statistik qiymətidir) istifadə edərək addımbaaddım optimizasiya tətbiq etmək olar.

Anomal müşahidələri aşkar etmək üçün proyeksiyon indekslər. Belə proyeksiyon indeks kimi

$$Q(U, X^{(n)}) = s^2(U) / s_{\text{rob}}^2(U)$$

kriterisini istifadə etmək olar, burada $s^2(U)$ – dispersiyanın birölçülü proyeksiyada adi statistik qiyməti, $s_{\text{rob}}^2(U)$ – miqyas parametrinin hər hansı dayanıqlı statistik qiymətidir.

Əd.: [1] Friedman J. H., Tukey J. W., «IEEE Trans. Comput.», v. C-23», 1974, № 9, p. 881–90; [2] Huber P. J., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, p. 435–75; [3] Ен ю к о в И. С., Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа, М., 1986.

MƏLUMAT « сообщение; message » – bax, *informasiya nəzəriyyəsi*.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ « сообщений источник; message source » – məlumatlar hasil edən sistemdir. M. m. $\mathcal{U}$ -nun hasil etdiyi X məlumatı ölçülən $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ fəzasından qiymətlər alan, ehtimal paylanması $\mathbf{P}_X(\cdot) = p(\cdot)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir. $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ bir qayda olaraq, ölçülən fəzaların düz hasilı şəklində ifadə olunur:

$$(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}}) = \bigcup_{t \in \Delta} (\mathfrak{X}_t, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}_t});$$

burada $(\mathfrak{X}_t, S_{\mathfrak{X}_t})$ – eyni bir ehtimal fazasının nümunələridir. t parametri $\mathfrak{X}_t$, adətən, hər hansı həqiqi ədədlər intervalından (kəsilməz zamanlı məlumatlar mənbəi), tam ədədlər çoxluğundan (diskret zamanlı məlumatlar mənbəi) və ya k – ölçülü fazadan qiymətlər alır. Bu hallarda məlumatlar təsadüfi proseslər (və ya təsadüfi meydanlar), yeni $X = \{X(t), t \in \Delta\}$ təsadüfi prosesləri olur, $X(t)$, $-t$ anında hasil olunan məlumat, $X_s^t = \{X(\tau), s < \tau \leq t\}$ – məlumat parçasıdır.

Məlumatın – təsadüfi prosesin növündən asılı olaraq, M. m.-ləri də müxtəlif növlərə ayrılır. Məs., əgər $X(t)$ asılı olmayan qiymətləri, Markov, stasionar, ərqodik, Qauss və s. təsadüfi prosesi olarsa, onda M. m. də, uyğun olaraq, yaddaşsız, Markov, stasionar, ərqodik, Qauss və s. məlumatlar mənbəi adlanır.

Informasiya nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri M. m.-nin kodlanmasıdır (M. m.-nin kodlanma məsələlərinin bəziləri tətbiqdə verilənlər həcmiinin daraldılması, məlumatların kvantlanması və s. kimi adlandırılır). M. m.-nin kodlanması qeyd olunmuş uzunluqlu kodları, uzunluğu dəyişən kodları kodlanma, ardıcıl kodlanma, məlumatlar statistikasi naməlum olduğu halda universal kodlanma, məlumatların verilən dəqiqliklə bərpası şərtlə kodlanma kimi kodlanmalara ayrılır. Məs., fərz olunur ki, yaddaşsız diskret stasionar prosesi verilən dəqiqliklə bərpa ilə hasil edən M. m.-nin kodlanmasına baxılır.

$X^N = (X_1, \dots, X_N)$ – belə məlumatın parçası olsun; X_j , $j = 1, \dots, N$ sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alır və $\mathfrak{X}$ digər sonlu çoxluqdur. N uzunluqlu X^N məlumat parçasının M həcmli kodlanması $\mathfrak{X}^N$ -in $\mathfrak{X}^N$ çoxluğunun M elementindən ibarət çoxluğuna inikasına deyilir (X^N , $-\mathfrak{X}$ çoxluğunun N sayda nümunəsinin düz hasilidir). Nəhayət, fərz olunur ki, bərpa dəqiqliyi mənfəi olmayan $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$ funksiyası ilə verilir; $\rho(x, \tilde{x})$ təhrif ölçüsü adlanır və təhrifin orta qiyməti

$$\bar{\rho}_N = N^{-1} \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^N \rho(X_k, \tilde{X}_k) \right)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əsas kodlama teoremi epsilon – entropiya anlayışı əsasında formalaşır. Yaddaşsız stasionar M. m. üçün epsilon – entropiyanın qiyməti

$$\bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U}) = \inf I(X_1, \tilde{X}_1)$$

düsturu ilə hesablanır, burada $I(\cdot, \cdot)$ – informasiya miqdarıdır, infimum isə $P_X(\cdot) = p(\cdot)$ və $\mathbf{M}_\rho(X_1, \tilde{X}_1) \leq \varepsilon$ şərtlərini ödəyən $(X_1, \tilde{X}_1)$, $X_1 \in \mathfrak{X}$, $\tilde{X}_1 \in \tilde{\mathfrak{X}}$ cütlerinin paylanmalar üzrə götürülür.

M. m.-nin kodlama teoremi: $\mathcal{U}$ – yaddaşsız stasionar M. m., $M = \lfloor \exp NR \rfloor$ olsun; onda

1) $R > \bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U})$ olduqda M həcmli ele kodlanma vardır ki,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \bar{\rho}_N \leq \varepsilon;$$

2) $R < \bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U})$ olduqda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\rho}_N > \varepsilon;$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ və

$$\rho(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \tilde{x} = x \\ 1, & \tilde{x} \neq x \end{cases} \quad \text{olduqda}$$

olarsa, bu teoremlər məlumatın dəqiq bərpa olunduğu hal üçün kodlanma teoremi olur.

Əd.: [1] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, пер. с англ., М., 1982; [5] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [6] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ çoxkomponentli «сообщений источник многокомпонентный; multiple-component message source» – bax, Çoxkomponentli məlumatlar mənbəi.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ Марков «сообщений источник марковский; Markov message source» – bax, Markov məlumatlar mənbəi.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ yaddaşsız «сообщений источник без памяти; memoryless message source» – diskret zamanlı məlumatlar mənbəidir, k anlarında (k tam qiymətlər alır) hasil edilən məlumatlar olan X_k təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı ilə xarakterizə olunur. Məs., diskret stasionar yaddaşsız M. m. onunla xarakterizə olunur ki, bütün X_k -lər eyni sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alır, eyni $p(x) = P\{X_k = x\}$ paylanmasına malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Yaddaşsız diskret stasionar M. m.-nin $\mathfrak{X}$ məlumatlarını hasiletmə sürəti, təhrif ölçüsü $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$ olduqda

$$H_\varepsilon(\mathcal{U}) = \inf I(X, \tilde{X})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada I – informasiya miqdarıdır, infimum isə $P\{X = x\} = p(x)$ və $\mathbf{M}_\rho(X, \tilde{X}) \leq \varepsilon$ şərtlərini

ödəyən, qiymətləri uyğun olaraq, $\mathfrak{X}$ və $\tilde{\mathfrak{X}}$ -dən olan təsadüfi kəmiyyətlərin bütün $(X, \tilde{X})$ cütleri üzrə götürülür. Dəqiq

bərpada $\bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U}) = H(x)$ – paylanması $p(\cdot)$ olan X təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

MƏLUMATLARIN BƏRPAOLUNMA DƏQİQLİYİ «сообщений точность воспроизведения; accuracy of the message reproduction» – qəbul edən məlumatları bərpaetmə keyfiyyətinin ölçüsüdür. M. b. d., adətən, $(X, \tilde{X})$ cütü üçün mümkün olan birgə paylanmalar sinfi $\mathcal{W}$ -nin seçilməsi ilə verilir; X – ötürülən, $\tilde{X}$ – bərpa olunan (qəbul olunan) məlumatlardır. Xüsusi halda, $\mathcal{W}$ sinfi ölçülən mənfəi olmayan

$\rho(x, \tilde{x}) = (\rho_1(x, \tilde{x}), \dots, \rho_k(x, \tilde{x}))$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$ vektor-funksiyası ($\mathfrak{X}$ və $\tilde{\mathfrak{X}}$ – uyğun olaraq, ötürülən və bərpa olunan məlumatların qiymətlər fəzalarıdır), $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ε_j , $j = 1, \dots, k$ müsbət ədədləri vektoru ilə verilir və bu zaman fərz olunur ki, əgər $M\rho_j(X, \tilde{X}) \leq \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, k$ şərti ödənilərsə, $(X, \tilde{X})$ cütünün paylanması W sinfindəndir.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Бергер Т., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), [1971]; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

MƏLUMATLARIN HASİLOLUNMA SÜRƏTİ
«сообщений скорость создание; rate – distortion function», vahid zamanda epsilon – entropiya, – məlumatların verilən dəqiqliklə bərpasında vahid zaman ərzində informasiya miqdarını təsvir edən kəmiyyətdir. $X(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərdən alınmış $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ məlumatını hasil edən məlumatlar mənbəi $\mathcal{U}$ üçün M. h. s.

$$\bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - s)^{-1} H_\varepsilon(X'_s) \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, bu şərtlə ki, bu limit mövcud olsun, burada $H_\varepsilon(X'_s)$, – $X'_s = \{X(\tau), s < \tau \leq t\}$ məlumatlarının epsilon – entropiyasıdır.

X_n təsadüfi kəmiyyətlərlə alınan $X = \{X_n, -\infty < n < \infty\}$ məlumatını hasil edən diskret mənbə üçün dəqiq bərpa halında M. h. s. (1) düsturu şəklində deyil,

$$\bar{H}(\mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - m)^{-1} H(X_m^n) \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $H(X_m^n)$, – $X_m^n = \{X_l, m < l \leq n\}$ təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır.

Stasionar mənbələr üçün (2) limiti vardır və bu limit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H(X_0^n | X_1^m) = H(X_0 | X_1^\infty)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Yaddaşsız stasionar mənbələr və Gauss mənbələri üçün $\bar{H}_\varepsilon(\mathcal{U})$ -nın aşkar düsturları alınır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., 1985.

MƏLUMATLARIN KVANTLANMASI «сообщений квантование; messages quantization» – bax. Kvantlanma, məlumatların.

MƏNBƏİ, MƏLUMATLARIN «источник сообщений; source» – bax. Məlumatlar mənbəi.

MƏNBƏLƏR VƏ KANALLAR ŞƏBƏKƏLƏRİ
«источников и каналов сети; source-channel networks» – çoxsaylı abonentlərə xidməti reallaşdıran informasiya ötürmə sistemlərinin riyazi təsviri üçün istifadə olunan anlayışdır. M. və k. ş.-nin təsvir variantlarından biri M komponentli çoxkomponentli məlumatlar mənbəi U , kodlayıcı $E_1, \dots, E_K$ qurğular

çoxluğu, dekodlayıcı $D_1, \dots, D_J$ qurğular çoxluğu və kodlayıcı ilə dekodlayıcı qurğuları əlaqələndirən K girişli, L çıxışlı çoxkomponentli kanal vasitəsilə ifadə olunur. $1 \leq k \leq K$ olduqda, hər bir kodlayıcı E_k qurğusu üçün $A_k \subset \{1, \dots, M\}$ altçoxluğu verilir (U mənbəsinin E_k qurğusunu kodlaşdıran komponentlər). $1 \leq j \leq J$ olduqda, hər bir dekodlayıcı D_j qurğusu üçün $B_j \subset \{1, \dots, M\}$ altçoxluqları (U mənbəsinin verilən D_j qurğusu ilə ötürüləcək (bərpa ediləcək) komponentləri) və $C_j \subset \{1, \dots, L\}$ (verilən D_j qurğusunu müşahidə edən kanallar şəbəkələrinin çıxışları) verilir. K girişli və L çıxışlı çoxkomponentli kanal (diskret, stasionar, yaddaşsız) K sayda $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_K$ giriş əlifbası, L sayda $\tilde{\mathfrak{X}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{X}}_L$ çıxış əlifbası (bütün $\mathfrak{X}_k$, $\tilde{\mathfrak{X}}_l$ sonlu çoxluqlardır) və $1 \leq l \leq L$ üçün $\tilde{y}_l \in \tilde{\mathfrak{X}}_l$, $1 \leq k \leq K$ üçün $y_k \in \mathfrak{X}_k$ olduqda $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_K)$ keçid ehtimalları (giriş simvolları $y_1, \dots, y_K$ olduqda çıxış simvollarının $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L$ olması şərti ehtimalı) toplusu ilə verilir. İxtiyari N üçün $p^{(N)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_K)$ keçid ehtimallarının

$$p^{(N)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_K) = \prod_{n=1}^N p(\tilde{y}_{1n}, \dots, \tilde{y}_{Ln} | y_{1n}, \dots, y_{Kn}) \quad (1)$$

düsturu ilə verildiyi fərz olunur, burada $\tilde{y}_l \in \tilde{\mathfrak{X}}_l^N$, $y_k \in \mathfrak{X}_k^N$ ($\tilde{\mathfrak{X}}_l^N$, $\mathfrak{X}_k^N$ uyğun fəzaların N -ci dekart qüvvət üstləridir), $\tilde{y}_l = (\tilde{y}_{1l}, \dots, \tilde{y}_{Nl}) \in \tilde{\mathfrak{X}}_l^N$, $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{kN}) \in \mathfrak{X}_k^N$.

M. və k. ş. üçün (N_1, N_2) parametrləri kod K sayda kodlayıcı ϕ_k , $1 \leq k \leq K$ və J sayda dekodlayıcı ψ_j , $1 \leq j \leq J$ funksiyaları toplusu ilə verilir. E_k qurğusu üçün ϕ_k kodlayıcı funksiyası

$$\phi_k : \left(\prod_{m \in A_k} \mathfrak{X}_m \right)^{N_1} \rightarrow \mathfrak{X}_k^{N_2}$$

inikasıdır, burada $\prod$ – dekart hasilidir, $\mathfrak{X}_m$, – U mənbəsinin m -ci komponentinin əlifbasıdır. Dekodlayıcı ψ_j funksiyası –

$$\psi_j : \left(\prod_{l \in C_j} \tilde{\mathfrak{X}}_l \right)^{N_2} \rightarrow \left(\prod_{m \in B_j} \mathfrak{X}_m \right)^{N_1}$$

inikasıdır. ϕ_k , ψ_j funksiyalar toplusu (1) keçid ehtimalları və $p^{(N)}(x_1, \dots, x_m)$ mənbə ehtimalları ilə birlikdə $X_m^{N_1}$, $1 \leq m \leq M$; $Y_k^{N_2}$, $1 \leq k \leq K$; $\tilde{Y}_l^{N_2}$, $1 \leq l \leq L$; $\hat{X}_{jm}^{N_1}$, $1 \leq j \leq J$, $m \in B_j$ ($X_m^{N_1}$, $\hat{X}_{jm}^{N_1}$, $\mathfrak{X}_m^{N_1}$ -dən qiymətlər alır; $Y_k^{N_2}$, $\tilde{Y}_l^{N_2}$ isə $\tilde{\mathfrak{X}}_l^{N_2}$ -dən qiymətlər alır) təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanması

$$P\{X_m^{N_1} = x_m, Y_k^{N_2} = y_k, \tilde{Y}_l^{N_2} = \tilde{y}_l, \hat{X}_{jm}^{N_1} = \hat{x}_{jm}\} =$$

$$= \begin{cases} p^{(N_1)}(x_1, \dots, x_M) p^{(N_2)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_k), & \text{əgər} \\ & \text{bütün } k\text{-lər üçün } \varphi_k(x_m, m \in A_k) = y_k \text{ olarsa;} \\ \psi_j(\tilde{y}_l, l \in C_j) = (\hat{x}_{jm}, m \in B_j), & \text{bütün } j\text{-lər üçün;} \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

düsturu ilə təyin edilir.

M. və k. ş.-nin xəta ehtimalı $P_e(\varphi, \psi)$ kodlayıcı $\varphi = \{\varphi_k\}$ və dekodlayıcı $\psi = \{\psi_j\}$ funksiyaları vasitəsilə

$$P_e = 1 - P \{x_{jm} = x_m, \text{ bütün } j \text{ qiymətlərində, } 1 \leq j \leq J \\ \text{bütün } m \in B_j \text{ üçün} \}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində (N_1, N_2) parametrləri ilə (φ, ψ) kodu varsa ki, bu M. və k. ş. üçün $N_2 \leq (\theta + \varepsilon) N_1$ və $P_e(\varphi, \psi) < \varepsilon$ münasibətləri ödənilir, onda verilmiş M. və k. ş. üçün θ ləngiməsi mümkün ola bilər, deyilir. M. və k. ş. üçün kodlama nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri mümkün ola bilən ləngimələrin aşağı sərhədi θ -nın hesablanmasıdır. Hal-hazırda bu məsələnin həllinə müyəssər olunmamışdır. Bəzi məlum nəticələr *Geniş yayımlı kanal*, *İnterferens kanal*, *Çoxqırıqlı kanal*, *Kodlanma(sı)* əlavə informasiyalı mənbənin məqalələrində verilmişdir.

M. və k. ş. üçün kodlama məsələlərinin xüsusi halları çoxkomponentli məlumatlar mənbəi və çoxkomponentli kanal üçün kodlama məsələləridir. Birinci halda fərz olunur ki, çoxkomponentli kanalın ayrı-ayrı komponentləri asılı olmayandırlar, yəni $K = L$ və keçid ehtimalları

$$p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_L) = p_1(\tilde{y}_1 | y_1) \dots p_L(\tilde{y}_L | y_L) \quad (2)$$

berabərliyi ilə təyin olunur, burada $p_1, \dots, p_L$ – yaddaşsız diskret stasionar kanalların keçid ehtimallarıdır. $R_1, \dots, R_L$ – bu kanalların ötürücülük qabiliyyətləri xarakteristikaları olsun. Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün $\theta = 1$ ləngiməsi mümkün ola bilirsə, onda kodlayıcı E_L qurğuları və dekodlayıcı D_L qurğuları ilə verilən (yeni A_L, B_L, C_L alt çoxluqları ilə) kodlama sxemli çoxkomponentli U mənbəi üçün $R = (R_1, \dots, R_L)$ toplusu mümkün ola bilinəndir, deyilir. Şennon teoreminə əsasən, (2) növlü kanal üçün θ qiymətinin mümkünüyü yalnız R -dən asılı olub, konkret $p_1, \dots, p_L$ keçid ehtimalları toplusundan asılı deyildir. Mümkün ola bilən bütün $R = (R_1, \dots, R_L)$ toplusu çoxluğu, verilmiş kodlama sxemində, çoxkomponentli U mənbəi üçün $\mathcal{R}$ kodlamasının məqbul sürətlər oblastı adlanır. $M = L = 1$ (bir mənbə, bir kanal) halında mənbə üçün adi kodlama teoremi alınır: $\mathcal{R} = \{R \geq H(X)\}$; $H(X)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır. $K = L = 2$, $J = 1$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $B_1 = C_1 = \{1, 2\}$ olduqda

$$\mathcal{R} = \{(R_1, R_2), R_1 \geq H(X_1 | X_2), R_2 \geq H(X_2 | X_1), \\ R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2)\}$$

teoremi alınır (bax, *Kodlanma(sı)* əlavə informasiyalı mənbənin).

Analoji olaraq, $p(x_1, \dots, x_M) = p_1(x_1) \dots p_M(x_M)$ şərti ödənilən asılı olmayan komponentli mənbəyə baxdıqda ehtimal paylanması p_m olan X_m təsadüfi kəmiyyəti verildiyi halda $R_m = H(X_m)$ olduğu fərz olunur ($H(X_m)$, – U mənbəinin m -ci komponentinin entropiyasıdır). Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün $\theta = 1$ ləngiməsi mümkün ola biləndirsə, onda verilmiş kodlama sxemində $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L | y_1, \dots, y_k)$ keçid ehtimalları ilə verilən kanallar şəbəkəsi üçün $R = (R_1, \dots, R_m)$ toplusu mümkün ola bilər, deyilir. Yəni də Şennon teoreminə əsasən bu mümkünüyün $p_1, \dots, p_M$ ehtimal paylanmalarından deyil, məhz R -dən asılı olduğu alınır. Bütün mümkün ola bilən $R = (R_1, \dots, R_m)$, $R_m \geq 0$ toplusu oblastı $\mathcal{R}$ verilən kanallar şəbəkəsinin ötürücülük qabiliyyəti oblastı adlanır. Birkomponentli rabitə kanalı üçün $\mathcal{R} = \{0 \leq R \leq C\}$ alınır, C – keçid ehtimalları $p(\tilde{y} | y)$ olan kanalın ötürücülük qabiliyyətidir. Digər nəticələrlə *Çox yayımlı kanal*, *Çoxqırıqlı kanal*, *İnterferens kanal* məqalələrində tanış olmaq olar.

Bir qədər daha çətin M. və k. ş.-inə də baxmaq olar. Belə ki, bəzən şəbəkəyə aralıq qurğular və əlavə kanallar daxil olunur ki, bunda məqsəd informasiyanın mənbədən qəbul ediciyə ötürülməsinə kömək etməkdir (bu şəbəkələr *retranslyatorlu şəbəkələr* adlanır). M. və k. ş.-ə tərs rabitə (dekodlayıcı D_k qurğularından kodlayıcı E_k qurğularına), həm də kodlayıcı qurğular arasında müxtəlif tipli əlaqələr daxil etmək olar (bax *xışla kodlama* adlanan). *Məlumatların bərpə olunma dəqiqliyi* kriterisi kimi xətanın ehtimalına deyil, orta təhrifə (yalnışlığa) baxmaq lazımdır (təhrifin vektor ölçüsünə görə). Sistemə əlavə kanallar daxil etmək olar ki, bu kanallar vasitəsilə informasiya bir neçə istiqamətdə ötürülsün (*çoxtərəfli kanallar*).

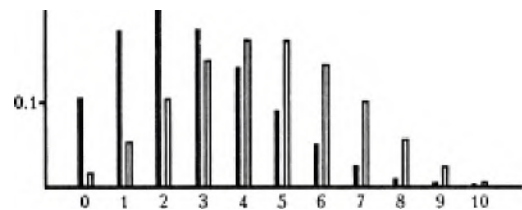
Nəhayət, kəsilməz əlifbalı və kəsilməz zamanlı M. və k. ş.-ə də baxmaq olar (bu halda, Gauss mənbələri və kanalları xüsusilə maraqlıdır).

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

MƏNFİ BİNOMIAL PAYLANMA «отрицательное биномиальное распределение; negative binomial distribution» – $k = 0, 1, 2, \dots$ tam qiymətləri

$$f(k; r, p) = P\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k \quad (*)$$

ehtimalları ilə alan $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *diskret paylanmasıdır*, $0 < p < 1$ və $r > 0$ (bax, şəkil).



$p = 0,3, r = 1$ və $p = 0,6, r = 6$ qiymətlərində mənfi binomial paylanma.

$f(k; r, p)$ – Bernulli sınaqlar ardıcılığında r -ci «müvəffəqiyyətə» qədər məhz k sayda «qeyri – müvəffəqiyyət», r -ci

«müvəffəqiyyətin» isə $(r+k)$ -ci sınaqda baş verməsi hadisəsinin ehtimalı kimi interpretasiya olunur (bax, [2]). M. b. p.-nin doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$\psi(s) = p^r (1 - qs)^{-r},$$

$$\phi(s) = p^r (1 - q e^{is})^{-r}$$

düsturları ilə ifadə olunur; $q = 1 - p$, p – Bernulli sınağında «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır.

Riyazi gözləmə və dispersiya uyğun olaraq rq/p və rq/p^2 :
asimetriya – $As = (2 - p)/\sqrt{r(1 - p)}$, eksess – $Es = 6/r + p^2/r(1 - p)$ ifadələri ilə təyin olunur. M. b. p. funksiyası beta-paylanma funksiyasının p nöqtəsində qiymətlərilə

$$F(k) = P\{\xi = k\} = \frac{1}{B(r, k+1)} \int_0^p x^{r-1} (1-x)^k dx$$

münasibətlə təyin olunur; $B(r, k+1)$ – beta – funksiyasıdır. «M. b. p.» (mənfi qüvvət üstlü binomun doğurduğu paylanma) termini (*) münasibətindəki ehtimalları $p^r (1 - qs)^{-r}$ -in (doğuran funksiyanın) s -ə görə ayrılışında əmsallar olduğu səbəbindən qəbul edilmişdir.

M. b. p. ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox tətbiqi məsələlərində tətbiq olunur. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi $r > 0$ tam qiymətlərində M. b. p. « r -ci müvəffəqiyyəti gözləmə müddəti»nin paylanması kimi interpretasiya olunur və bu formada, adətən, P a s k a l p a y l a n m a s ı adlanır və o, qamma – paylanmanın diskret analogudur. $r = 1$ olduqda, M. b. p. – h e n d e s i p a y l a n m a ilə üst-üstə düşür.

M. b. p.-ya paylanma parametrlərinin randomlanması ilə bağlı məsələlərdə çox tətbiq olunur: məs., ξ – təsadüfi λ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət, λ -nın paylanması sıxlıq funksiyası $\frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-ax}$, $x > 0$, $\mu > 0$

olan qamma – paylanma olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması – parametrləri $r = \mu$, $p = \alpha/(1 + \alpha)$ olan M. b. p.-dir. M. b. p. – Poya paylanmasının limit formasıdır.

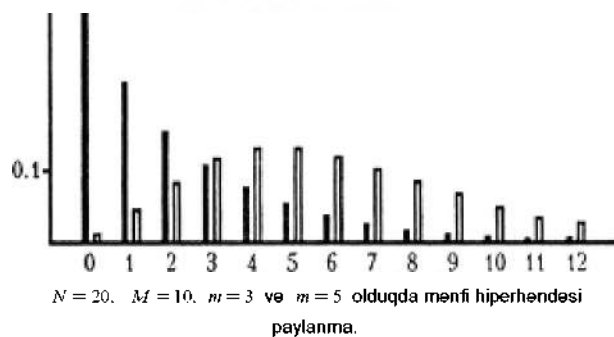
Parametrləri uyğun olaraq, p və $r_1, \dots, r_n$ olan M. b. p. ilə paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi parametrləri p və $r_1 + \dots + r_n$ olan M. b. p. ilə paylanır. r -in böyük, q -nün isə kiçik qiymətləri üçün $rq \sim \lambda$ olduqda M. b. p. λ parametrlili Puasson qanununa yaxınlaşır. M. b. p.-nin xassələrinin əksəriyyəti onun ümumiləşmiş Puasson prosesi olması faktoru ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984.

MƏNFİ HİPERHƏNDƏSİ PAYLANMA « отрицательное гипергеометрическое распределение; negative hypergeometric distribution » – $k = 0, 1, 2, \dots$ tam qiymətlərini

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{C_{k+m-1}^{M-m} C_{N-m-k}^M}{C_N^M} \quad (*)$$

ehtimalları ilə alan $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin diskret



paylanmasıdır, burada N, M, m – tam mənfi olmayan ədədlərdir və $m \leq M \leq N$. M. h. p. qaytarmamaq şərti ilə seçim sxeminə baxılan məsələlərdə alınır: hər hansı N həcmli ümumi çoxluqda M sayda «nişanlanmış», $N - M$ sayda «nişanlanmamış» eyni tipli element olsun. Bu çoxluqdan q a y t a r m a m a q ş e r t i l e s x e m i l e «nişanlanmış» elementlərin sayı qeyd olunmuş m -ə bərabər olana qədər ($0 \leq m \leq M$) seçim aparılır, onda seçimdəki «nişanlanmamış» elementlərin sayı – ξ təsadüfi kəmiyyəti (*) M. h. p. qanunu ilə paylanır. $\xi + m$ təsadüfi kəmiyyəti – seçimin həcmi – də M. h. p. qanunu ilə paylanır. M. h. p. – qaytarmamaq şərti ilə s x e m i l e alınan mənfi binomial paylanmaya analogi adlandırılmışdır.

M. h. p. ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq:

$$m \frac{N-M}{M+1} \quad \text{və} \quad m \frac{(N+1)(N-M)}{(M+1)(M+2)} \left(1 - \frac{m}{M+1}\right)$$

ifadələri ilə təyin olunur. $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, $N - M \rightarrow \infty$ olduqda, $M/N \rightarrow p$, $(N - M)/N \rightarrow 1 - p$ olduğundan M. h. p. m və p parametrlili mənfi binomial paylanmaya yaxınlaşır.

N, M, m parametrlili M. h. p.-nin paylanma funksiyası $F(m)$ parametrləri N, M, m olan hiperhəndəsi paylanmanın paylanma funksiyası $G(n)$ ilə $F(m) = 1 - G(n-1)$ münasibəti ilə bağlıdır. Bu münasibətə əsasən M. h. p. ilə bağlı riyazi statistika məsələlərinin həllində hiperhəndəsi paylanma üçün mövcud cədvəllərdən istifadə edilir. M. h. p., məs., keyfiyyətə statistik nəzarət məsələlərində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

MƏNFİ KORRELYASIYA « отрицательная корреляция; negative correlation » – iki təsadüfi kəmiyyət arasında ələ korrelyasiya asılılığıdır ki, bu asılılıq olduqda bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin artması digər təsadüfi kəmiyyətin şərti orta qiymətlərinin azalmasına səbəb olur. Əgər bu təsadüfi kəmiyyətlər üçün korrelyasiya əmsalı ρ varsa, onda $\rho < 0$.

Bax, Asılılıq.

MƏNFİ MÜƏYYƏN FUNKSIYA « отрицательно определенная функция; negative definite function » – mənfi – müəyyən nüvə, – müsbət müəyyən funksiya anlayışına dual anlayışdır. Λ – boş olmayan çoxluq olsun: əgər hər bir natural n , Λ -dan olan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ elementlərinin

üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik yaxınlaşma kimi standart normal qanunun paylanma funksiyası –

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$$

istifadə olunur və isbat olunur ki, X_j toplananlarının paylanmaları üçün müəyyən fərziyyələrə

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

münasibəti ödənilir.

20-ci əsrin 20-ci illərindən başlayaraq M. I. t.-lərinə daha ümumi konstruksiya çərçivəsində baxılmağa başlandı, yeni *seriyalar sxemi* emalə gətirən X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin limit ehtimal paylanmaları araşdırılmağa başlandı: seriyalar sxeminde cəmlər –

$$Z_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots + A_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

A_n – həqiqi sabitlərdir (bax, məs., [12]).

(1) sxemi ilə bağlı hər bir limit teoreminde çoxqat kompozisiyalar –

$$F_n(x) = (F_{n1} * F_{n2} * \dots)(x + A_n)$$

funksiyalarının asimptotikası araşdırılır, bunlar isə analitik baxımdan olduqca müəkkəb və böyük obyektlər olur. 20-ci əsrin əvvəllərinə qədər, A. M. Lyapunovun *xarakteristik funksiyalar metoduna* qədər, Muavr – Laplas teoreminin toplananları təsadüfi kəmiyyətlər olan daha geniş sinif üçün genişləndirilmiş məsələsi olduqca müəkkəb, məs., sadə ədədlərin paylanması məsələsi ilə müqayisə olunan bir məsələ idi. P. L. Çebışevin bu məsələni uğurla həll etməsinə baxmayaraq, o, M. I. t.-nin Lyapunov teoremi tipli halında isbatında yaranan bütün çətinliklərin öhdəsindən gələ bilməmişdi. Baxılan F_n , F_{nj} və Φ paylanmalarının f_n ,

f_{nj} , g xarakteristik funksiyalarından istifadə edərək, $n \rightarrow \infty$

olduqda, F_n -in Φ -ə qeyri – məhdud yaxınlaşmasının isbatı hər bir həqiqi t qiymətində

$$f_n(t) = f_{n1}(t)f_{n2}(t)\dots e^{-itA_n} \rightarrow g(t) = e^{-t^2/2}$$

münasibətinin isbatı ilə evez olundu.

Normal paylanma kəsilməz paylanma olduğundan, M. I. t.-ində paylanmaların həm zəif, həm də güclü yığılmasından (yeni həm L – *Levi metriksi*, həm də ρ – *müntəzəm metriksindən*) istifadə etmək olar.

F_n , F_{nj} – uyğun olaraq, Z_n , X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyaları olsun. 20-ci əsrin 60-cı illərinə qədər klassik modellərdə S_n cəmlərində toplananların sayı sonlu fərz olunurdu və bu cəmlər getdikcə artan Z_n -lər sxemi ilə bağlı olduğundan, bu şərtəndən imtina etmək mümkün olmurdu, lakin bununla belə, ümumi baxımdan, mahiyyəti dəyişmədən hesab etmək olar ki, Z_n -lər məhz asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin yığılan cəmləridir.

Kolmogorov modelində toplananlar *sonsuz kiçiklik şərtini* ödəyirlər: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sup \{ \mathbf{P} \{ |X_{nj}| > \varepsilon \} : j \geq 1 \} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

şərti ödənildikdə F_n -in Φ yığılmasının ən ümumi kriterisi aşağıdakı kimi ifadə olunur. [Bu kriteri $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $W = \lambda G$, $\lambda \geq 0$ və G – hər hansı paylanma funksiyası olduqda, ixtiyari sonsuz bölünən $G(x, \gamma, W)$ qanununa yığılma üçün ümumi kriterinin xüsusi halıdır; bu kriteri *Limit teoremləri* məq.-də verilmişdir]. (bax, həm də [4], [1]-də isə o, ənənəvi formada şərh olunmuşdur) [1]-də A_n sabitlərinin $A_n = C_1(X_{n1}) + C_1(X_{n2}) + \dots$ şəklində verildikləri fərz olunur, burada $C_1(X_{nj})$, – X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin *mərkəzidir*, bunlar (2)-yə əsasən n -in olduqca böyük qiymətləri üçün də mövcuddurlar.

$$\bar{F}_{nj}(x) = F_{nj}(x + C_1(X_{nj}))$$

və

$$W_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} d\bar{F}_{nj}(u), \quad n \geq 1$$

funksiyaları daxil edilir. Φ funksiyasına onun $\gamma = 0$, $W = E_0$ xarakteristikaları uyğundur, burada E_0 -la sıfırda cırlaşan paylanma işarə olunmuşdur. Qeyd olunmuş ümumi kriteriyə əsasən $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L(F_n, \Phi) \rightarrow 0 \Leftrightarrow L(W_n, E_0) \rightarrow 0 \quad (3)$$

münasibəti alınır. Bundan əlavə, limit qanununun kəsilməzliyinə əsasən

$$L(F_n, \Phi) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilir. (3) şərti aşağıdakı müddə ilə eynigüclüdür: hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_j \int_{|x| > \varepsilon} d\bar{F}_{nj}(x) \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\sum_j \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 d\bar{F}_{nj}(x) \rightarrow 1 \quad (5)$$

münasibətləri doğrudur. İlkin (2) şərti ödənildikdə, (4), (5) şərtləri F_n üçün limit qanununun varlığını və eyni zamanda bu qanunun məhz Φ olduğunu təmin edir. Əgər limit qanunun varlığı əlavə olaraq şərtləşdirilsə, onda normal qanuna yığılma kriterisi (ola bilər ki, standart normal qanun olmasın) yalnız (4) şərtindən ibarət olur, bu şərt və (2) nəzərə alınmaqla (2) şərtinin daha güclü formasını almaq olur: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P} \{ \sup_j |X_{nj}| > \varepsilon \} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (6)$$

münasibəti doğrudur (*Xinçin teoremi*). (1)-də təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərini mərkəzləşdirən A_n sabitlərinin seçilməsi müstəqil problemdir və bu problemin müxtəlif həll yolları araşdırılmışdır (bax, [4]). Ən sadə hal, X_{nj} -lərin sonlu momentlərə malik olduğu, bunların Z_n cəmində sonlu sayda olduğu hal sayılır, bu halda $A_n = \sum_j \mathbf{M}X_{nj}$ götürərək, $F_{nj}(x) = F_{nj}(x + \mathbf{M}X_{nj})$ paylanmalarından istifadə etmək olur.

Limit normal qanunu üçün spesifik (6) şərtinin şəkl i e k s t r e - mal k r i t e r i adlanan kriteri ilə sıx bağlıdır (bax, [2]).

(2) şərtindən imtina etdikdə F_n -in Φ -ə yığılma kriterisi bir qədər mürekkəbləşir (bax, [4]). Doğrudan da, $G_{nj}(x) = \Phi(x/b_{nj})$, $j \geq 1$ – orta qiymətləri sıfıra bərabər, dispersiyaları b_{nj}^2 ($b_{n1}^2 + b_{n2}^2 + \dots = 1$) olan normal paylanma funksiyaları olduğu halda baxıldıqda, $\Phi = G_{n1} * G_{n2} * \dots$ olur. K – bütün $v_n = \{G_{nj} : j \geq 1\}$ paylanmalarının çoxluğu və $\mathcal{A}_n(x)$ funksiyaları

$$\mathcal{A}_n(x) = \sum_{j=-\infty}^x \int \frac{u^2}{1+u^2} dG_{nj}(u), \quad n \geq 1$$

düsturu ilə təyin olunan funksiyalar olsun. Eyni qayda ilə $u_n = \{\bar{F}_{nj} : j \geq 1\}$ toplanları üzrə $\mathcal{A}_n(x)$ funksiyaları qurulur. Fərz olunur ki,

$$\mu(u_n, v_n) = \sup_j L(\bar{F}_{nj}, G_{nj}) + Z(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n).$$

$\rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ yığılma kriterisi belə anlaşılır: K -da ele v_n^* toplanları mövcud olmalıdır ki, bunlar üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\mu(u_n, v_n^*) \rightarrow 0$ olsun. Bu kriteridə (2) şərti rolunu

$$\alpha_n = \sup_j L(\bar{F}_{nj}, G_{nj}^*) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

şərti yerinə yetirir, bu şərtə görə u_n toplanlarından olan $\bar{F}_{nj}$ paylanmaları üçün onları v_n^* toplanlarından olan uyğun G_{nj}^* paylanmalarına yaxınlaşdıraraq (j üzrə müntəzəm) toplanları seçmək olar. Lakin (2)-dən fərqli olaraq, bu şərt, F_n və Φ -in asimptotik yaxınlaşması üçün zəruri şərt olur.

Əgər X_{nj} toplanlarının birinci və ikinci sonlu momentləri olarsa, onda kriteri olduqca sadələşir (bax, *Lindeberg – Feller teoremi*).

M. l. t. tətbiqində ən tez-tez təsadüf olunan halları əhatə edir. Bununla əlaqədar olaraq, onun dəqiqləşdirilməsi və müxtəlif analoqlarının qurulmasına çox diqqət yetirilmişdir: zəif və müntəzəm yığılmalardan fərqli topologiyalarda yığılmalar, yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi, asimptotik ayrılıqlar, böyük yayınmalar ehtimalının asimptotikası və s. kimi məsələlər öyrənilmişdir (bax, [3], [4]).

M i s a l l a r. $X_1, X_2, \dots$ – ümumi paylanma funksiyası F və xarakteristik funksiyası f olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. (1) cəmlərində $X_{nj} = X_j/B_n$; A_n və $B_n > 0$ – sabitlərdir. Aşağıda *tam variyasiya metrikası* σ ilə

$$\lambda_0(F_X, F_Y) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|$$

metrikası L_p – metrika ilə doğrulmuş yığılma topologiyalarına baxılırsa, burada $f_X, \dots, f_X$ paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır.

1) $\lambda_0(F_n, \Phi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ yığılması, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $L(F_n, \Phi) \rightarrow 0$ və $\limsup_{t \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$ münasibətləri ödənilsin (bax, [4]).

2) $\sigma(F_n, \Phi) \rightarrow 0$ yığılması, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $L(F_n, \Phi) \rightarrow 0$ münasibəti ödənilsin və $F^{*n}(F_n(x)) = F^{*n}((x + A_n)B_n)$ n – qat kompozisiyası n -in hər hansı qiymətində *Lebeq ayrılışında* mütləq kəsilməz komponente malik olsun (bax, [6]).

3) $p > 1/2$ olsun, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L_p(F_n, \Phi) = \int |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur (bax, [5]). Daha ümumi halda $|F_n - \Phi|^p$ əvəzinə $\varphi(F_n - \Phi)$ istifadə olunduqda və φ funksiyaların geniş bir sinfindən seçildikdə, məsafənin bu şəkildə seçilməsi mənasında F_n -in Φ -ə yığılma kriterisi [8]-də tapılmışdır.

4) $MX_1 = 0$, $DX_1 = 1$ hər hansı $r > 2$ üçün $\beta_r = M|X_1|^r < \infty$ (bu halda $A_n = 0$, $B_n^2 = n$ götürmək olar) və γ_r – standart normal qanunun r tərtib mütləq momenti olsun. Onda

$$\rho(F_n, \Phi) + |M|Z_n|^r - \gamma_r| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

münasibəti doğrudur. Bu faktın S. N. Bərmşteyn tərəfindən ümumiləşmiş halı [7]-də verilmişdir (bax, [11]).

5) Əvvəlki misalın fərziyyələrində $r = 3$ halında isbat olunmuşdur ki (bax, [9], [4]).

$$\rho(F_n, \Phi) \leq c_0 \beta_3 n^{-1/2} + o(n^{-1/2}), \quad (7)$$

burada $c_0 = (\sqrt{10} + 3)6\sqrt{2\pi} = 0,4097\dots$ – (7)-də istifadə olunan ən kiçik sabitdir. Mütləq qiymətlənmə *Berri – Esseen teoremi* meq.-də verilmişdir. Əgər $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^1$ -də verilmiş bütün normal paylanmalar çoxluğu olarsa, onda

$$\rho(F_n, \mathcal{Q}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \beta_3 n^{-1/2} + o(n^{-1/2}) \quad (8)$$

münasibəti doğrudur (bax, [10], [4]).

Hər iki asimptotik qiymətləndirmələrdə qeyd olunan moment şərtlərilə bağlı F paylanmalarını sinfi üzrə, ([7], [8]-də) qalıq hədləri $o(n^{-1/2})$ -lərin müntəzəm olması hələ ki, isbat olunmamışdır.

6) Eyni fərziyyələrlə (əvvəlki misaldakı) aşağıdakı qeyri-müntəzəm qiymətləndirmə də doğrudur:

$$\sup_x (1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq c \beta_3 n^{-1/2}, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

burada c – mütləq sabitdir (bax, [3]).

(7)–(9) tipli M. l. t.-də yığılma sürəti qiymətləndirmələri, bir qayda olaraq, F_n -lərin Φ -ə yaxınlaşmasındakı əsl xətanı yaxşı əks etdirmir (bunu hələ [13]-də A. M. Lyapunov qeyd etmişdi). Bu onunla izah olunur ki, bir tərəfdən F paylanmaları olduqca müxtəlif ola bilər və bunlar da ənənəvi olaraq yalnız bir neçə moment şərtlərilə seçilir, digər

tərəfdən qiymətləndirmə strukturu $F_n(x) - \Phi(x)$ fərqlərinin asimptotik ifadələri ilə bağlı verilir və bu da yalnız n -in böyük qiymətləri üçün təbii olur. M. l. t.-nin olduqca geniş istifadə edildiyi tətbiqi hallarda nəticələr çıxarıldıqda F_n -lərin Φ -ə yaxınlaşmalarının xətasının qiyməti haqqında məsələ ekser hallarda nəzərə alınmır, bu da ən tipik hallarda qiymətləndirmələrin mükəmməl olmadığına sübutdur.

M. l. t. ehtimal nəzəriyyəsinin, riyazi statistikanın, ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələrində tətbiq olunur. Aşağıdakı misaldan görünür ki, M. l. t. paylanmaların xarakterizasiyası kimi asimptotik yaxınlaşmalardan uzaq olan hallarda belə istifadə olunur.

7) Cırılşmayan F paylanmalarının çoxluğunda

$$F(x) = (F * F)(x/\sqrt{2}) \quad (10)$$

funksional tenliyi verilir, f , $-F$ paylanmasının xarakteristik funksiyası olsun. (10)-dan

$$f(t) = f^N(t/\sqrt{N}), \quad N = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

bərabərliyi alınır. Bu isə onu ifadə edir ki, ixtiyari t qiymətində $f(t) \neq 0$ və

$$d(t) = -N \operatorname{Re} \log f(t/\sqrt{N}),$$

N -dən asılı deyildir. $N \rightarrow \infty$ olduqda

$$\begin{aligned} dt &\sim N \operatorname{Re}(1 - f(t/\sqrt{N})) = \\ &= N \int (1 - \cos tx/\sqrt{N}) dF(x) \rightarrow \frac{1}{2} t^2 \int x^2 dF(x) \end{aligned}$$

münasibəti doğrudur, yeni F paylanmasının ikinci momenti σ^2 sonludur. (10) ilə birlikdə bu onu ifadə edir ki, F paylanmasının birinci momenti sıfır bərabərdir. M. l. t.-nə müvafiq olaraq

$$f^N(t/\sqrt{N}) \rightarrow g(t) = \exp(-\sigma^2 t^2/2)$$

olur, yeni $f(t) = g(t)$ və $F(t) = \Phi(x/\sigma)$.

Böyük ədədlər qanununa qarşı böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu qoyulduğu kimi M. l. t.-nin gücləndirilmiş analogunu axtarmaq təbii bir şeydir. Bu istiqamətdə araşdırmalar nəticəsində alınmış gücləndirilmiş M. l. t.-ni qeyd etmək olar (bax, [14]).

$\mathfrak{X}_F = \{X\}$ - ümumi F paylanmasına tabe bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu və $\mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$, və $\mathbf{M} \exp(c|X|) < \infty$ şərti hər hansı $c > 0$ üçün ödənilmiş olsun. $\mathfrak{N}$ - standart normal paylanma qanununa malik tabe bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu olsun. Onda ele $X_1, X_2, \dots \in \mathfrak{X}_F$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və ele asılı olmayan $Y_1, Y_2, \dots \in \mathfrak{N}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı vardır ki,

$$(X_1 + \dots + X_n) - (Y_1 + \dots + Y_n) = O(\log n), \quad n \rightarrow \infty$$

münasibəti l ehtimalla doğrudur.

M. l. t.-nin klassik variantları çoxsaylı daha mürekkəb müxtəlif modellər üçün, o cümlədən, Markov zəncirləri, zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün, Abel qrupları və semi - qruplar üçün, qeyri - kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi üçün alınmışdır.

Bax, *Limit teoremləri*.

634 MƏRKƏZİ

Əd. [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. - Л., 1949; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 66-70; [3] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [6] Прохоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 3, с. 112; [7] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 358-63; [8] Круглов В. М., «Матем. заметки», 1979, т. 26, № 3, с. 483-91; [9] Esseen C.-G., «Skand. aktuarietidskr.», 1956, v. 39, № 3-4, p. 160-70; [10] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 1, с. 125-27; [11] Круглов В. М., «Матем. заметки», 1973, т. 18, в. 4, с. 734-52; [12] Лозов М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [13] Ляпунов А. М., Избр. труды, М., 1948, с. 219-50; [14] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, H. 1, p. 33-58.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ Banax fəzasında «центральная предельная теорема в банаховом пространстве; central limit theorem in Banach space» - Banax fəzasında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər (təsadüfi elementlər) üçün *mərkəzi limit teoreminin* ümumiləşməsidir. İlk növbədə eyni qanunla paylanmış, klassik mənada normalanmış toplananlar halı maraq doğurur. $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcılığının separabel Banax fəzası B -də verildiyi fərz olunur. Əgər

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \right) \quad (1)$$

ardıcılığı B fəzasında hər hansı Qauss ölçüsünə paylanmaya görə yığılırsa, onda X M. l. t.-ni ödəyir, deyilir və bu $X \in \text{MLT}(B)$ şəklində simvolik [rus. ЦИТ(B)] yazılır. Əgər $B = \mathbb{R}^1$ və X təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $X \in \text{MLT}(\mathbb{R}^1)$,

yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\mathbf{M}X^2 < \infty$ və $\mathbf{M}X = 0$ olsun; bu halda (1) ardıcılığı $\mathbb{R}^1$ -də orta qiyməti sıfır bərabər, dispersiyası $\mathbf{M}X^2$ olan Qauss ölçüsünə yığılır. Bu halda Banax fəzasında M. l. t. üçün aşağıdakı müddəalar alınır. Əgər $X \in \text{MLT}(B)$ olarsa, onda

a) hər bir $x^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionalı üçün $\mathbf{M}(x^*(X))^2 < \infty$ olur, yeni X zəif 2-ci tertiblidir, deməli, R_X kovariasion operatoru təyin oluna bilər;

b) $\mathbf{M}X = 0$;

c) R_X kovariasion operatoru B -də (limit) Qauss ölçüsünün kovariasion matrisi ilə üst-üstə düşür (belə də deyirlər ki, X Qauss kovariasiyasına malikdir və ya X pre-Qauss təsadüfi elementidir).

Məlumdur ki, əgər $X \in \text{MLT}(B)$ olarsa, onda

q) $\lim_{p \rightarrow 2} \mathbf{P}\{\|X\| > t\} = 0$, məsələn $\mathbf{M}\|X\|^p < \infty$, $p < 2$ (lakin ola bilər ki, $\mathbf{M}\|X\|^2 = \infty$ olsun).

Əgər $B = L_p$, $1 \leq p < \infty$ olarsa, onda a), b), c), q) $X \in \text{MLT}(B)$ olması üçün kafi şərtlərdir. Lakin ümumi halda bu şərtlər M. l. t.-nin doğruluğunu təmin etmir. Məsələn, kəsilməz

funksiyaların $C[0, 1]$ fazasında ele məhdud təsadüfi X elementi vardır ki, (belə təsadüfi element üçün ixtiyari $p > 0$ qiymətində $\mathbf{M}\|X\|^p < \infty$), onun orta qiyməti sıfır bərabərdir.

R_X – Gauss kovariasiyasıdır, lakin X M. l. t.-ni ödəmir. Bu misal ümumi Banax fəzaları üçün M. l. t. probleminin çətinliyini göstərir.

Ümumi halda $X \in \text{MLT}(B)$ olması üçün a), b), c), q) şərtlərinin və kiçik kürelər kriterisinin (bax, [8]) ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu kriteri belə ifadə olunur: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

2 tip və 2 kotip fəzalarda M. l. t. ən çox araşdırılmış haldır. 2 kotip fəzalar üçün M. l. t. xüsusilə sadə ifadə olunur: əgər B 2 kotip fəzadırsa, onda $X \in \text{MLT}(B)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, X elementi a), b), c) şərtlərini ödəsin. Tersinə də doğrudur: əgər a), b), c) şərtləri B -də M. l. t.-nin doğruluğu üçün kafi şərtlədirsə, onda B 2 kotip fəzadır (bax, [5]).

2 tip fəzalar üçün sadə kafi şərt vardır: əgər B 2 tip fəzadırsa, əgər $\mathbf{M}X = 0$ və $\mathbf{M}\|X\|^2 < \infty$ olarsa, onda $X \in \text{MLT}(B)$. Və tərsinə: əgər B ele fəzadırsa ki, bu şərtlər B -də M. l. t.-nin doğruluğu üçün kafidir, onda B , – 2 tip fəzadır (bax, [6]).

Banax fəzasında ilk M. l. t. [4]-də G – fəzalar adlanan fəzalar halı üçün ifadə olunmuşdu, lakin orda isbat olunmuş nəticə mahiyyətə bazisli, 2 tip fəzada M. l. t. idi. 2 kotip fəzalarda mərkəzlənmə və preqausssluq şərtlərinin M. l. t. üçün kafiliyi hələ [2]-də isbat olunmuşdu, burada M. l. t. I_p , $1 \leq p \leq 2$ fəzaları üçün isbat olunmuşdu.

Metriklenen kompaktı kəsilməz funksiyaların $C(S)$ fəzasında M. l. t. halı ən azı iki səbəbdən mühümdür. Birincisi, kəsilməz funksiyalar fəzası – təsadüfi proseslərin geniş sinfinin realizasiyalarının fəzasıdır. İkincisi, $C[0, 1]$ fəzası üçün M. l. t. probleminin həlli, onun universallığına görə, bu problemin həllini prinsip etibarilə, ümumi separabel Banax fəzası üçün verə bilərdi. Ən mühüm məlum nəticələr aşağıdakılardır.

X – orta qiyməti sıfır olan, Gauss kovariasiyasına malik $C(S)$ fəzasında təsadüfi element, Γ , – $C(S)$ -də Gauss təsadüfi elementi, $Y \geq 0$ isə $\sup_{t>0} t^2 \mathbf{P}\{Y \geq t\} < \infty$ xassəli təsadüfi

kəmiyyət olsun.

Əgər

$$|X(t) - X(s)| \leq Y \mathbf{M}|\Gamma(t) - \Gamma(s)|, \quad s, t \in S$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $X \in \text{MLT}(C(S))$ (bax, [8]).

X – orta qiyməti sıfır olan, Gauss kovariasiyasına malik, $C(S)$ -də təsadüfi element olsun. Əgər hər hansı $\alpha > 0$, bütün $s, t \in S$ və $\lambda \in \mathbb{R}^1$ qiymətlərində

$$\mathbf{M} \exp \{ \lambda |X(t) - X(s)| \} \leq \exp \{ \alpha \lambda^2 \mathbf{M}(X(t) - X(s))^2 \}$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $X \in \text{MLT}(C(S))$ münasibəti doğrudur.

Əgər X orta qiyməti sıfır olan,

$$|X(t)| \leq 1, \quad \mathbf{M}|X(t) - X(s)| \leq |t - s|, \\ s, t \in [0, 1]$$

şərtlərini ödəyən, $C[0, 1]$ -də təsadüfi elementdirsə, onda $X \in \text{MLT}(C[0, 1])$ doğrudur. Lakin, əgər $\mathbf{M}|X(t) - X(s)| \leq |t - s|$ şərti əvəzinə $\mathbf{M}|X(t) - X(s)|^2 \leq |t - s|$ şərtinin ödənilməsi tələb olunarsa, onda X M. l. t.-ni ödəməyə bilər. Məs., bu halda aşağıdakı kontur misalı göstərmək olar: orta qiyməti sıfır olan, 2-ci zəif tərtibə malik və Viner kovariasiyalı (yeni $\mathbf{M}|X(t) - X(s)|^2 = |t - s|$), $C[0, 1]$ -də ele təsadüfi element vardır ki, M. l. t.-ni ödəmir.

M. l. t.-nin Banax fəzasında isbatına aid bütün məlum metodlarda metrik fəzada ehtimal ölçüləri ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının Proxorov kriterisi bu və ya digər formada istifadə olunur.

Banax fəzalarında M. l. t. invariantlıq prinsipi ilə əlaqədardır. $t \in [0, 1]$ və $n \in \mathbb{N}$ üçün

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{k=1}^{[nt]} X_k + (nt - [nt]) \cdot X_{[nt]+1} \right\}$$

olsun, burada $[nt]$, – nt -nin tam hissəsidir. Y_n prosesinin paylanması ν_n Banax fəzası $C([0, 1], B)$ -də $C[0, 1]$ -də Viner ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, $X \in \text{MLT}(B)$ ödənilsin.

Riyazi statistikada M. l. t.-nin tətbiqi. $X_1, \dots, X_n, \dots$ – paylanma funksiyası kəsilməz F olan, asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər və

$$Y_t(t) = I_{[X_t < t]} - F(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

olsun. Y_t -lə $H = L_2(-\infty, +\infty, dF)$ Hilbert fəzasında, eyni qanunla paylanmış mərkəzlənmiş təsadüfi elementlər ardıcılığı kimi baxmaq olar; R uyğun kovariasion operatorudur və onun nüvəsi

$$r(s, t) = F(\min(s, t)) - F(s)F(t)$$

düsturu ilə təyin olunur. H -da M. l. t.-nə əsasən

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{D} \Gamma$$

münasibəti doğrudur, burada Γ – kovariasion operatoru R olan, H -da mərkəzlənmiş Gauss təsadüfi elementidir. Beləliklə, $\sqrt{n}(G_n - F) \xrightarrow{D} \Gamma$ münasibəti doğrudur, burada $G_n(t)$, – F paylanmasından olan, n həcmli $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyasıdır. Onda

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} (G_n(t) - F(t))^2 dF(t) \xrightarrow{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^2(t) dF(t)$$

münasibəti doğrudur, burada sağ və sol tərəflərdəki paylanmalar F -dən asılı olmur, sağ tərəf isə ω^2 – paylanma qanununa tabədir. Bu münasibət Kramer – Mizes kriterisinin əsasını təşkil edən

Smirnov teoremidir. Banax fəzalarında M. I. t.-nin empirik ölçülərlə əlaqələri haqqında bax, «Yığılma(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin» məqaləsinə.

Təsadüfi elementlər və fəzaların hendesəsi üzərinə qoyulan müəyyən məhdudiyyətlərlə hər bir seriyada asılı olmayan təsadüfi elementlərin ümumi seriyalar sxeminə (bu təsadüfi kəmiyyətlərin eyni qanunla paylanması şərt deyildir) Gauss ölçüsünə yığılma şərtləri də araşdırılmışdır (bax, [3]). Banax fəzalarında M. I. t.-ndə yığılma sürətinə çoxsaylı işlər həsr olunmuşdur. Hilbert fəzası halı üçün alınmış nəticələr ən sona çatdırılmış hesab oluna bilər. Məs., (bax, [10]), əgər $S_n = n^{-1/2} \sigma^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{M}X_i)$,

$\sigma^2 = \mathbf{M}|X_1 - \mathbf{M}X_1|^2$ – qiymətləri separabel H fəzasından olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin normalanmış cəmi, $V X_1$ kəmiyyətinin kovariasion operatoru və Y orta qiyməti sıfır bərabər, kovariasion operatoru $\sigma^2 V$ olan H – qiymətli Gauss təsadüfi kəmiyyəti olarsa, onda ehtimal c sabiti vardır ki, ixtiyari $a \in H$, $r > 0$ üçün

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}\{S_n - a\} < r\} - \mathbf{P}\{Y - a\} < r\}| \leq \\ & \leq c \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^{-1} \right) \sigma^3 \mathbf{M}|X_1 - \mathbf{M}X_1|^3 (1 + |a|^3) n^{-1/2} \end{aligned}$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots$, – V operatorunun məxsusi qiymətləridir.

Əd.: [1] Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю., Точность аппроксимации в центральной предельной теореме, Вильнюс, 1987; [2] Vakhania N., «С. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, p. 1560–62; [3] Araujo A., Gine E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y. – [a. o.], 1980; [4] Fortet R., Mourier E., «Studia Math.», 1955, v. 15, p. 62–79; [5] Pisier G., «Séminaire Maurey – Schwartz», 1975–76, exp. 3–4; [6] Hoffmann-Jorgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587–99; [7] Ledoux M., Talagrand M., «Probab. Theory and Related Fields», 1983, v. 77, p. 29–47; [8] Andersen N. T., Gine E., Ossander M., Zinn J., «Probab. Theory and Related Fields», 1983, v. 77, p. 271–305; [9] Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В., «Матем. сб.», 1989, т. 180, № 12, с. 1587–1613.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ qruplarda «центральная предельная теорема на группах; central limit theorem on groups» – qiymətləri hər hansı lokal qrupdan olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin kompozisiyasının ehtimal paylanmasının bu qrupda Gauss paylanmasına zəif yığılması üçün şərtlər göstərilən bir sıra *limit teoremlərinin* ümumi adıdır.

G qrupunun vahidi e -nin ($e \in G$) ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mu_t(G \setminus U) = 0 \quad (1)$$

münasibətini ödəyən, G qrupunda μ_t , $t \geq 0$ ölçülərinin kəsilməz konvolüsyon semi – qrupuna daxil olan, G qrupunda sonsuz bölünən μ paylanmasına G qrupunda Gauss paylanması deyilir. (1) xassəli μ_t semi – qrupuna

Qauss semi – qrupu deyilir. G -də hər bir Gauss semi – qrupu G qrupunun vahidinin əlaqə komponentində toplanmışdır, yəni bütün $t \geq 0$ üçün $\mu_t(G_0) = 1$. (ψ_1, ψ_2, η) üçlüyü ilə ifadə olunan kanonik ifadəsi mümkün olan μ_t semi – qrupu (bax, *Konvolüsyon semi – qrupu ölçülərin kanonik ifadəsi*), yalnız və yalnız $\eta = 0$ şərtini ödədiyi halda Gauss semi – qrupudur (bax, [1]).

μ_{nj} , $j = 1, \dots, k_n$ – ölçülərin infinitezimal sistemi, $\hat{\mu}_{nj}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, – G -də μ_{nj} ehtimal paylanmalarının *Furye çevirməsi* olsun. Fərz olunur ki, $\{\mu_{nj}\}$ kommutativ ölçülər sistemidir, yəni

$$\mu_{nj} * \mu_{nk} = \mu_{nk} * \mu_{nj}, \quad j, k = 1, \dots, k_n,$$

həmçinin bütün $\gamma \in \Gamma$ və $u \in \mathcal{H}_0(\gamma)$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{j=1}^{k_n} \left| \langle \hat{\mu}_{nj}(\gamma)u - u, u \rangle \right| < \infty \quad (2)$$

şərti ödənilir, burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – ifadənin $\mathcal{H}(\gamma)$ fəzasında skalyar hasil, $\mathcal{H}_0(\gamma)$, – $\mathcal{H}(\gamma)$ -də altfəzadır və differensiallanan vektorlar adlandırılan vektorların fəzasıdır (bax, [2]). $\{\mu_{nj}\}$, – $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n}$ paylanmaların konvolüsyonlarının ardıcılığı olsun. (2) şərti zəif yığılma topologiyasında $\{\mu_n\}$ paylanmalar ardıcılığının müşayiətedici Puasson paylanmalarının $\nu_n = \exp(\lambda_n)$ ardıcılığı ilə yaxınlaşmasını təmin edir, burada

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{k_n} (\mu_{nj} - \delta_e), \quad \exp(\lambda_n) = \delta_e + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{*k} / k!,$$

λ_n^{*k} , – λ_n ölçüsünün konvolüsyonuna eməlinə görə k -cı dərəcəsidir, δ_e^{**} , – e vahidində cırlaşmış paylanmadır. Əgər $\{\mu_n\}$ və ya $\{\nu_n\}$ ardıcılıqlarından hər hansı biri yığılırsa, onda digər ardıcılıq da yığılır və bunların limitləri üst-üstə düşür.

Əgər (2) şərti və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mu_{nj}(G \setminus U) = 0$$

münasibəti də G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün ödənilərsə, onda $\{\mu_n\}$ ardıcılığı G -də bütün ehtimal ölçülərinin $\mathcal{H}^1(G)$ çoxluğunda nisbi kompaktıdır və onun ixtiyari cırlaşmayan limit nöqtəsi μ G -də Gauss paylanmasıdır (bax, [2]). Bu M. I. t.-nin variantlarından biridir.

Əgər G Li qrupu, φ G -də Hant funksiyasıdırsa, onda Lindeberq teoreminə analoq aşağıdakı teorem doğrudur.

Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

- 1) $\sum_{j=1}^{k_n} \int_G \varphi(x) \mu_{nj}(dx) \leq k < \infty$, bütün $n \geq 1$ üçün;
- 2) ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ehtimal kompakt $K_\varepsilon \subset G$ ətrafı vardır ki,

bütün $n \geq 1$ üçün $\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{nj}(G \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$;

3) G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\sum_{j=1}^n \int_{G \setminus U} \varphi(x) \mu_{nj}(dx) \rightarrow 0$$

(Lindeberg şərti), $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_{j=1}^n \int_U y_i(x) y_k(x) \mu_{nj}(dx) \rightarrow a_{ik} = a_{kj},$$

$$\sum_{j=1}^n \left| \int_U y_i(x) \mu_{nj}(dx) \right| \rightarrow 0,$$

burada $\{y_1, \dots, y_d\}$ - G -də kanonik koordinatlar sistemidir. Onda $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n}$ paylanmalarının ardıcılığı G Li qrupunda kovariasiyalar matrisi $\alpha = \|\alpha_{ik}\|$ olan Gauss paylanmasına zəif yığılır.

Birəlaqəli nilpotent Li qrupları üçün daha güclü nəticələr alınmışdır (bax, [9], [10]).

Abel lokal kompakt G qrupu üçün yuxarıda şərh olunmuş nəticələrdən birincisinə analoq aşağıdakı nəticədir. Fərz olunur ki, ele $x_n \in G$ elementləri vardır ki, $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} * \delta_{x_n}$ ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda μ ehtimal paylanmasına zəif yığılır. Aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir: a) μ , - G -də Gauss paylanmasıdır; b) G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu_{nj}(G \setminus U) = 0$$

ve G qrupunun xarakterlər qrupu $\hat{G}$ -dən bütün γ -lar üçün

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^n \int (1 - \operatorname{Re} \gamma(x)) |\mu_{nj}|^2(dx) < \infty$$

(bax, [3]).

Ölçülərin infinitezimal sistemi əvəzinə $\mu_n = \nu_1 * \dots * \nu_n$ konvolüsyonlar ardıcılığının sistemine baxıldıqda əlavə çətinliklər yaranır, burada $\{\nu_n, n \geq 1\}$, - $\mathcal{M}^1(G)$ -də hər hansı qeyd olunmuş ardıcılıqdır. Bu halda, μ_n ölçülərinə tətbiq olunduqda ölçülərin nisbi kompakt $\{\tau(\mu_n)\}$ ardıcılığına gətirən normalayıcı $\{\tau_n\}$ çevirmələr ardıcılığının tapılması zəruridir. Klassik halda ($G = \mathbb{R}^d$ olduqda), $\mathbb{R}^d$ -də çirəşməyən xətti operatorlarla, yeni $\mathbb{R}^d$ qrupunun avtomorfizmləri ilə doğurulan çevirmələr tətbiq olunurdu. Qeyri - Abel qrupları üçün belə kompaktifikasiyalayıcı avtomorfizmlər ardıcılığı mövcud deyildir. Li qruplarının bezi xüsusi sinifləri üçün M. I. t. G qrupunun elementlərinin qrupun spesifikasından istifadə olunaraq xüsusi şəkildə ifadə olunması ilə isbat olunmuşdur (bax, [4] - [8]).

Bax, həm də, *Cazibə oblastı operator dayanıqlı paylanmanın, Diffuzion proses qrupda.*

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Siebert E., «Adv. Math.», 1981, v. 39, p. 111-54; [3] Wehn D., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1962, v. 48, p. 791-95; [4] Тутубалин В. Н., «Вестн. МГУ Матем. Мех.», 1966, № 2, с. 70-77; [5] Тутубалин В. Н., «Вестн. МГУ Матем. Мех.», 1967, № 6, с. 100-08; [6] Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 3, с. 531-39; [7] Вирцер А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.»,

1970, т. 15, в. 4, с. 685-704; [8] Вирцер А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 84-103; [9] Пар Г., «Prob. Math. Stat.», 1993, v. 14, p. 287-312; [10] Scheffler H.-R., «Prob. Math. Stat.», 1993, v. 14, p. 327-45.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ Markov prosesləri üçün «центральная предельная теорема для марковских процессов; **central limit theorem for Markov processes**» - Markov prosesləri halında, məsələn, Markov zəncirləri halında asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün *mərkəzi limit teoreminə* aid bəzi faktların ümumiləşməsidir. Tipik misal Lindeberg teoreminin aşağıdakı ümumiləşməsidir (bax, [5]). $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2, \dots\}$ - ölçülən fəzaların ardıcılığı, $P_1(A_1)$, - $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ fəzasında ehtimal paylanması, $P_i(\omega_{i-1}, A_i)$, - $(\Omega_{i-1}, \mathcal{A}_{i-1})$ -dən $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ -yə keçid ehtimalı, $X_i = X_i(\omega_i)$, - $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ -də həqiqi ölçülən funksiya olsun. $P_1(A_1)$, $P_2(\omega_1, A_1)$, $P_3(\omega_2, A_2)$,... ardıcılığı Markov zəncirini tam mənası ilə təyin edir. Bu zəncirle doğurulmuş X_i , $i = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri, bir çox hallarda Markov zəncirləri ilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlər adlandırılır.

$$\alpha(k) = 1 - \sup \left\{ |P_k(\omega', A) - P_k(\omega'', A)| : \omega' \in \Omega_{k-1}, A \in \mathcal{A}_k \right\}$$

$$\alpha_n = \min \{ \alpha(k) : 2 \leq k \leq n \};$$

$F_i(x)$, - X_i , $i = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, $B_n^2 = \mathbf{M}(X_1 + \dots + X_n)^2$, $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/B_n$ olsun. Əgər hər bir $\delta > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} B_n^{-2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > \delta \alpha_n B_n} |x|^2 dF_i(x) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, onda S_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya zəif yığılır.

Əd.: [1] Спирожиднов С. X., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Таш., 1955; [2] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 72-89; [3] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 67-86; [4] Статулявичус В. А., «Литов. матем. сб.», 1969, т. 9, № 2, с. 345-62; [5] Статулявичус В. А., «Proc. 2-nd Jap. - USSR Symp. on Probab. Theory», 1973, v. 1, p. 433-43.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ təsadüfi çoxluqlar üçün «центральная предельная теорема для случайных множеств; **central limit theorem for random sets**» - bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün.*

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ təsadüfi determinantlar üçün «центральная предельная теорема для случайных детерминантов; **central limit theorem for random determinants**» - bax, *Təsadüfi determinant.*

MƏRKƏZİ MOMENT «центральный момент; **central moment**» - *təsadüfi kəmiyyətin* $k = 1, 2, \dots$ tertib mərkəzi momenti

$$M|X - MX|^k < \infty$$

şertini ödəyən $\mu_k = M(X - MX)^k$ kəmiyyətinə deyilir. İkinci tərtib M. m. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası DX -dir.

M. m.-in xassələri X -in uyğun momentlərinin xassələrinə analojiçdir, o cümlədən, M. m., yalnız və yalnız, uyğun momentin varlığı halında mövcuddur.

MƏRKƏZLƏNMİŞ VƏ NORMALANMA(SI) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıının «центрированное и нормированное последовательностей случайных величин; centering and norming of sequences of a random variables» – ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan qaydadır: Y_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıından $Z_n = B_n^{-1}Y_n - A_n$ – təsadüf olmayan və cırlaşmayan xətti çevirmələrinin vasitəsilə Z_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıının alınması məqsədilə tətbiq olunur ki, Z_n -lərin paylanmaları G_n -lər zəif nisbi kompakt çoxluq əmələ gətirsin (əgər Y_n ardıcılığıının paylanmaları bu xassəyə malik olmazlarsa). Bu qayda bir çox limit teoremlərinin isbatında hazırlıq məqsədilə istifadə olunur və aşağıdakı mülahizələrlə izah olunur.

Fərz olunur ki, limit approksimasiyasına Levi – Proxorov metrikası π -dən zəif olmayan hər hansı μ metrikası mənasında baxılır (bax, Ehtimal metrikalarının müqayisəsi), onda

$$\mu(G_n, G_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \pi(G_n, G_0), \quad n \rightarrow \infty$$

münasibəti doğrudur. Deməli, $\{G_n\}$ çoxluğunun zəif kompaktlığı G_n -in G_0 -a μ – yığılması üçün zəruri şərtidir. M. və n. biröçölülük təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilməsi üçün istifadə olunduğu kimi, çoxölçülük təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilməsi üçün də istifadə olunur. Sonuncu halda normalayıcı B_n^{-1} operatorları rolunda bu və ya digər cırlaşmayan matrislər seçilir, məs., baş diaqonal elementləri eyni b_n^{-1} olan matrislər (skalyar normalanma).

Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər üçün A_n və B_n^2 sabitləri kimi MY_n və DY_n ədədi xarakteristikalarını seçmək olar, bu şərtlə ki, bunlar mövcud olsunlar. Ümumi halda, analitik nöqtəyi – nəzərdən, A_n kimi Y_n təsadüfi kəmiyyətlərinin mərkəzinə götürmək münasibdir. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıının paylanmaları çoxluğunun xətti çevirmələr vasitəsilə zəif kompakt çoxluğunun alınmadığı çoxsaylı hallar vardır (bax, məs., Darling teoremi).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М. – Л., 1949; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых величин, М., 1986.

MƏRKƏZLƏNMİŞ KORRELYASIYON FUNKSIYA «центрированная корреляционная функция; centered correlation function» – bax, Korrelyasiya funksiya.

MƏRKƏZLƏNMİŞ QARŞILIQLI KORRELYASIYA FUNKSIYASI «центрированная взаимная корреляционная функция; centered cross correlation function of» – bax, Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası.

MƏRKƏZLƏNMİŞ QARŞILIQLI KORRELYASIYA FUNKSIYASI təsadüfi proseslərin «центрированная взаимная корреляционная функция случайных процессов; centered cross correlation function of random process» – bax, Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası.

MƏŞĞULLUQ PERİODU «занятности период; busy period» – xidmət sistemi cihazının (kanalının) məşğul vəziyyətdə olduğu bütün zaman intervalıdır. Birkanallı sistemlər halında M. p. sistemdə heç olmasa bir tələbin olduğu bütün zaman intervalı ilə üst-üstə düşür. M. p. ξ müddətinin paylanması semi – Markov prosesləri ilə təsvir olunan sistemlər halı üçün araşdırılmışdır. «Gözləməli» sistemdə orta xidmət müddəti τ olan λ intensivlikli ən sadə giriş axını halında $\lambda\tau < 1$ olduqda

$$M\xi = \tau/(1 - \lambda\tau);$$

$\lambda\tau = 1$ olduqda $M\xi = \infty$, $\lambda\tau > 1$ olduqda müsbət ehtimalla $\xi = \infty$ olur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987.

MİKROKANONİK PAYLANMA «микрoканоническое распределение; microcanonical distribution» – hissəciklərin sayı və onların enerjiləri cəmi qeyd olunduqda yaranan Gibbs paylanmasıdır.

MİQRASIYA şaxələnən prosesdə «миграция в ветвящемся процессе; migration in a branching process» – bax, Şaxələnən proses miqrasiyası.

MİQYAS ÇEVİRMƏSİ «масштабное преобразование; scale transformation» – bax, Renormalizasiya qrup.

MİQYAS PARAMETRİ «масштабный параметр; scale parameter» – $F_b(x)$ funksiyalar ailəsində b parametridir.

$b \in B \subset \mathbb{R}$, $b > 0$, $x \in X \subset \mathbb{R}^k$ və bu funksiyalar $F_b(x) = F_1(x/b)$ şərtini ixtiyari $b \in B$, $x \in X$ üçün ödəyirlər.

Əgər $\mathbb{R}^k$ -da verilən, paylanma funksiyası $F(x)$ olan paylanma, paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan paylanma tipli olarsa, onda $F(x) = F_0((x-a)/b)$ bərabərliyi doğrudur. Burada $b > 0$

M. p.-dir, $a \in \mathbb{R}^k$ yerindəyişmə parametridir.

MİQYAS PARAMETRİ; statistik qiymət «масштабный параметр; оценка: estimator of scale parameter» – $\sigma > 0$ parametri üçün müşahidələr nəticəsində $x_j = \sigma \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, n$ şəklində alınan ixtiyari statistik qiymətdir. ε_j – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan

təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər ε_j kəmiyyətləri müsbət olarsa, onda σ parametrinə müsbət həqiqi ədədlərin multiplikativ $\mathbb{R}_+$ qrupunun elementi kimi baxmaq olar. Bununla əlaqədar, əksər hallarda, M. p.-nin ekvivariant statistik qiymətlərinə baxılır ki, bunlar arasında isə ən yaxşısı Pitman statistik qiymətidir. $\mathbb{R}_+$

qrupunun həqiqi ədədlərin additiv qrupu $\mathbb{R}$ -ə izomorf olduğuna əsasən, parametrin yerindəyişməsi üçün statistik qiymətlərin alınmış bir çox nəticələri M. p.-nin statistik qiymətləri üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984.

MINIMAKS HƏLL (QƏRAR) « минимаксное решение; minimax decision » – minimaks həlledici funksiyalar əsasında qəbul edilən həldir (qərar) . Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

MINIMAKS KRİTERİ « минимаксный критерий; minimax test » – mühümlük ölçüsü (bütün mümkün olan alternativlərə görə) verilmiş bütün kriterilər arasında 2-ci növ səhv ehtimalının maksimal qiymətini minimallaşdıran statistik kriteridir.

M. k. bəzən maksimin kriteri də adlanır, çünki bu kriteri güc funksiyasının minimumunu maksimallaşdırır. M. k. statistik həllər nəzəriyyəsində minimaks həlledici funksiya ümumi anlayışının konkretləşməsidir (statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində).

X – paylanması P_θ olan müşahidə olunan təsadüfi seçim olsun. θ – namelum parametrdir, $\theta \in \Theta$. X üzrə alternativ $H_1: \theta \in \Theta_1$ hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1 , – Θ -nın kəsişməyən boş olmayan altçoxluqlardır. $\beta(\theta; \varphi) = M_\theta \varphi(x)$, – $\varphi(\cdot)$ kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta; \varphi) \leq \alpha$$

və bütün belə $\{\varphi\}$ kriteriləri arasında

$$\inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta; \varphi) = \sup_{|\varphi|} \inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta; \varphi)$$

olarsa, $\varphi(\cdot)$ α həddüdlü minimaks kriteri adlanır.

M. k. üçün A. Vald tərəfindən (bax, [1]) alınmış ümumi nəticə – olduqca ümumi şərtlər daxilində M. k.-nin varlığı və onun ən elverişsiz aprior paylanmalara nəzərən *Beyes kriterisi* olmasıdır.

M. k. meylsiz kriteridir.

Əd.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1979; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

MINIMAKS RİSK « минимаксный риск; minimax risk » – risk funksiyasının supremumunun bütün həlledici funksiyalar üzrə aşağı serhedidir. Əgər minimaks həlledici funksiya varsa, onda M. r. minimaks həlledici funksiyanın risk funksiyasının supremumuna bərabərdir. Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

MINIMAKS STATİSTİK QİYMƏT « минимаксная оценка; minimax estimator » – risk funksiyasının ən böyük qiymətini minimallaşdıran *statistik qiymətdir* (bax, *Minimaks yanaşma*). Əgər M. s. q. yeganədirsə, onda o, məqbul statistik qiymətdir.

M i s a l. n həcmli seçimli sınaqların binomial sxemində «müvəffəqiyyət» ehtimalı θ -nın M. s. q.-i kvadratik itki funksiyası $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ olduğu halda $(\nu + \sqrt{n}/2)(n + \sqrt{n})$ -ə bərabərdir; ν – müvəffəqiyyət baş verən sınaqlar sayıdır; belə θ_n^* statistik qiyməti üçün

$$\sup_{0 < \theta < 1} M_\theta L(\theta, \theta_n^*) \leq \sup_{0 < \theta < 1} M_\theta L(\theta, \hat{\theta}_n)$$

bərabərsizliyi θ parametrinin ixtiyari $\hat{\theta}_n$ statistik qiymətində ödənilir, ν/n standart tezlik statistik qiyməti, $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / (\theta(1 - \theta))$ itki funksiyası olduğu halda, qiymətləndirmənin nisbi xətasını nəzərə alan M. s. q.-dir.

Bax, *Aprior informasiyadan istifadə. Asimptotik minimaks statistik qiymət, Statistik qiymətləndirmə*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MINIMAKS STRATEGİYA statistik oyunlar nəzəriyyəsində « минимаксная стратегия » в теории статистических игр; **minimax strategy in the game theory** – maksimal itkiləri (namelum parametrlər üzrə) minimallaşdıran statistika (həlledici funksiya) strategiyasıdır.

Bax, *Oyunu, iki şəxsin, Statistik oyun*.

MINIMAKS YANAŞMA « минимаксный подход; minimax approach » – statistik prosedurların optimallığının təyin edilməsi üçün mövcud yanaşmalardan biridir və bu yanaşmada həlledici δ funksiyası risk funksiyası $R(\theta, \delta)$ -nin ən böyük qiyməti $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$ -nin minimallaşdırılması şərtinə əsasən seçilir.

Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

MINIMAKSLIQ (ğı) statistik prosedurun « минимаксность статистической процедуры; minimax property of a statistical procedure » – maksimal riski minimallaşdıran *statistik prosedurun* minimaks mənada optimallığını qəbul etməyə əsas verən, riyazi statistikada optimallıq üçün tətbiq edilən variantlardan biridir. *Həlledici funksiyalar* terminləri statistik prosedurun M. aşağıdakı kimi təyin olunur. Fərz olunur ki, X təsadüfi kəmiyyəti $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$ seçimi fəzasından qiymətlər alır, $\theta \in \Theta$ və $\Delta = \{\delta\}$, – X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları əsasında D həllər (qərarlar) fəzasından d həllini seçmək məqsədilə istifadə olunan həlledici funksiyalar çoxluğu, yəni $\delta(\cdot): \mathcal{X} \rightarrow D$ olsun; bu halda $\Theta \times D$ -də təyin olunmuş müəyyən bir $L(\theta, d)$ itki funksiyası verilir. Onda, əgər bütün $\delta \in \Delta$ üçün

$$\sup_{\theta \in \Theta} M_\theta L(\theta, \delta^*(X)) \leq \sup_{\theta \in \Theta} M_\theta L(\theta, \delta(X))$$

münasibəti ödənilərsə, $\delta^* \in \Delta$ statistik proseduruna $L(\theta, d)$ itki funksiyasına nəzərən statistik qərar qəbulu məsələsində minimaks statistik prosedur deyilir, burada δ statistik proseduruna (həlledici qaydaya) müvafiq olan risk funksiyasına

$$M_\theta L(\theta, \delta(X)) = R(\theta, \delta) = \int_{\mathcal{X}} L(\theta, \delta(x)) dP_\theta(x)$$

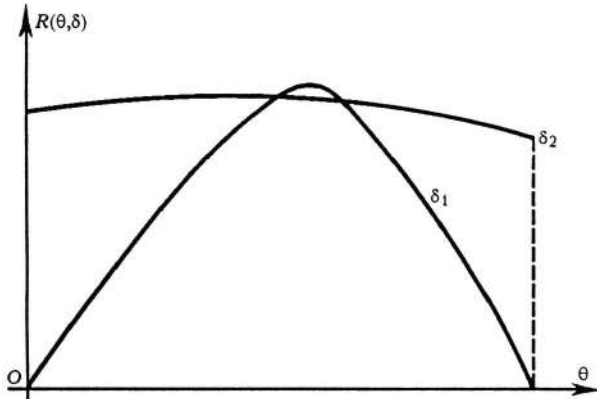
minimaks risk funksiyası deyilir; müşahidə olunmuş x realizasiyasına və minimaks δ^* proseduruna müvafiq $d^* = \delta^*(x)$ həlli isə minimaks həll adlanır.

$\sup_{\theta \in \Theta} M_{\theta} L(\theta, \delta(X))$ kəmiyyəti $\delta \in \Delta$ prosedurunun tətbiqi nəti-

cəsində gözənilən itkiləri xarakterizə etdiyindən, δ^* statistik prosedurunun minimaksılığı onu ifadə edir ki, əgər d həllinin D həllər fazasından seçilməsi məsələsində δ^* proseduruna riayət olunarsa, onda ən böyük gözənilən risk – $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta^*)$ müm-

kün ola bilən qədər kiçik olacaqdır. Statistik prosedurun M. prinsipi həmişə səmərəli nəticələr vermir (bax, şəkil); bu halda baxmayaraq ki, $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta_1) > \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta_2)$ münasibəti ödə-

nilir, bununla belə δ_2 deyil, δ_1 proseduru əlverişlidir.



Statistik prosedurun M. θ parametri haqqında aprior informasiya olmadığı hallarda statistik qərarların qəbul edilməsi məsələlərində səmərəli hesab olunur.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MINİMAKSLIQ KRİTERİSİ « минимаксности критерий; minimax criterion » – bax, *Oyunu, iki şəxsin*.

MINİMAL EKSSİSSİV FUNKSİYA « минимальная эксцессивная функция; minimal excessive function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

MINİMAL HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « минимальная решающая функция; minimal decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

MINİMAL KAFİ STATİSTİKA « минимальная достаточная статистика; minimal sufficient statistic » zəruri kafi statistika, – ehl $T(x)$ statistikasıdır ki, $\mathcal{P} = \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün kafi statistikadır və $\mathcal{P}$ ailəsi üçün ixtiyari kafi digər statistikanın ölçülən funksiyasıdır. M. k. s. sabit adlandırılan qiymətlərini ehl x -lər çoxluğunda alır ki, bu çoxluqlarda ixtiyari kafi statistika sabitdir. Kafi statistika, yalnız və yalnız, o halda M. k. s.-dir ki, onun doğurduğu σ -cəbr minimaldır, yəni onun doğurduğu σ -cəbr ixtiyari kafi σ -cəbrin tərkibində olsun.

$\mathcal{P}$ – minimal kafi statistika (σ -cəbr) anlayışından da istifadə olunur. $\mathcal{B}$ kafi σ -cəbri (və uyğun kafi statistika) $\mathcal{P}$ – minimal kafi σ -cəbr yalnız o halda adlandırılır ki, $\mathcal{P}$

üçün kafi ixtiyari $\mathcal{B}$ σ -cəbrinin $\mathcal{B}$ tamamlanmasında $\mathcal{B}_0$ σ -cəbri olsun. Əgər $\mathcal{P}$ ailəsi σ -sonlu μ ölçüsü ilə dominarlanırsa, onda

$$\left\{ p(x, \theta) = \frac{dP_{\theta}}{d\mu}(x), \theta \in \Theta \right\}$$

sıxlıq funksiyaları ailəsinin doğurduğu $\mathcal{B}_0$ σ -cəbri kafi və $\mathcal{P}$ – minimal kafi σ -cəbrdir. Bu hökm əsasında $\mathcal{P}$ – minimal σ -cəbrlərinin qurulmasının ümumi qaydası təyin olunur. Seçimi fəzanın ekvivalentlik siniflərinə bölgüsünə baxıldığı fərz olunur, bu bölgüdə x və x' nöqtələrinin eyni bir sinfə, yalnız və yalnız, o halda aid olduğu fərz olunur ki, $p(x, \theta)/p(x', \theta)$ nisbəti θ -dan asılı olmasın. Bu bölgünün doğurduğu σ -cəbr kafi və $\mathcal{P}$ – minimal σ -cəbr olur və M. k. s. bu ekvivalentlik siniflərində sabitdir.

M i s a l 1. Sıxlıq funksiyası

$$p(x, \theta) = C(\theta) \exp \left\{ \sum_{j=1}^n Q_j(\theta) T_j(x) \right\}$$

düsturu ilə verilən eksponensial paylanmalar ailəsi üçün $T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$ statistikası M. k. s.-dir.

M i s a l 2. $\mathcal{P}$ ailəsi üçün bezi rəqulyarlıq şərtləri ödənilirdi halda $\hat{\theta}(x)$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistikası yeganə olarsa, onda o, həm kafi statistika, həm də M. k. s.-dir.

Əd.: [1] Б а р р а Ж.-П., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] С о л е Ж.-Л., Основные структуры математической статистики, пер. с франц., М., 1972; [4] Ш м е т т е р е р Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976.

MINİMAL KƏSİYİ, QRAFIN « минимальный разрез графа; minimal cut of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu*.

MINİMAL METRİKA « минимальная метрика; minimal metric » – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanması fazasında ehl *sadə ehtimali metrikadır* ki, o, qeyd olunmuş marginal paylanmalarlı bütün birgə paylanmalar çoxluğu üzrə digər bir metrikanın (*protominimal metrika* adlandırılan) qiymətlərinin aşağı sərhədi ilə üst-üstə düşür. Məs., ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün *tam variasiya metrikası* –

$$\sigma(\xi, \eta) = \sup |P\{\xi \in A\} - P\{\eta \in A\}|;$$

indikator metrikası –

$$\tau(\xi, \eta) = P\{\xi \neq \eta\}$$

üçün M. m.-dir,

$$\kappa_1(\xi, \eta) = \int |P\{\xi < x\} - P\{\eta < x\}| dx$$

orta metrikası isə mürekkəb $M|\xi - \eta|$ metrikası üçün M. m.-dir.

Hər hansı metrika üçün bərabərsizliklərdən M. m. üçün bərabərsizliklərə keçid bir sıra hallarda qeyri – trivial qiymətlər almağa imkan verir.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

MINİMAL METRİKALAR METODU « МИНИМАЛЬНЫХ МЕТРИК МЕТОД; minimal metric method »

metrik məsafələr metodunun üsullarından biri olub, *minimal metrikaların və protominimal metrikaların* uyğun cütlerinin istifadəsinə əsaslanan metoddur. M. m. m. ideyasının ən sadə variantı aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\hat{\mu}_n$ — $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ təsadüfi vektorlar fəzasında hər hansı sadə metrika, μ — bu metrikeyə uyğun protominimal metrika olsun. Mürəkkəb metrikaları qiymətləndirmək bir çox hallarda sadə metrikaları qiymətləndirməkdən sadə olur. Əgər ν_k heqiqi təsadüfi kəmiyyətlər fəzasında hər hansı ehtimal metrikaları, $\hat{\nu}_k$ bunlara uyğun minimal metrikalardırsa, $\psi(u_1, \dots, u_n)$ isə bütün dəyişənləri üzrə sağdan kəsilməz və azalmayan funksiyadırsa və

$$\mu(X, Y) \leq \psi(\nu_1(X_1, Y_1), \dots, \nu_n(X_n, Y_n)) \quad (*)$$

qiymətləndirməsi varsa, onda (*)-dan aşağıdakı bərabərsizliklə ifadə olunan qiymətləndirmə alınır:

$$\hat{\mu}(X, Y) \leq \psi(\hat{\nu}_1(X_1, Y_1), \dots, \hat{\nu}_n(X_n, Y_n))$$

M i s a l. *Ki Fan metrikası* K üçün minimal metrika və $\nu(X, Y) = \mathbf{M}|X - Y|$ metrikası üçün minimal metrika, uyğun olaraq, π *Levi – Proxorov metrikası* və κ_1 *orta metrikasıdır*. İxtiyari $\varepsilon > K(X, Y)$ üçün $\nu(X, Y) \geq \mathbf{M}|X - Y|I(|X - Y| > \varepsilon) > \varepsilon^2$ olduğundan, $\varepsilon \rightarrow K(X, Y)$ olduqda $K^2(X, Y) \leq \nu(X, Y)$ bərabərsizliyi alınır.

Minimal metrikalara keçdikdə, ümumi halda, yaxşılaşması mümkün olmayan $\pi^2(X, Y) \leq \kappa_1(X, Y)$ bərabərsizliyi alınır.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] Золотарев В. М., Современная теория независимых случайных величин, М., 1986.

MINİMAL MƏSAFƏ FUNKSIONALI / MM FUNKSIONAL « МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ ФУНКЦИОНАЛ / МД функционал; minimal distance functional » – bax. *Robast statistik qiymet*.

MINİMAL MƏSAFƏ STATİSTİK QIYMƏTİ « МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ ОЦЕНКА; minimum distance estimate » – bax. *Robast statistik qiymet*.

MINİMAL TAM SİNİF(f_i) KRİTERİLERİN « МИНИМАЛЬНЫЙ ПОЛНЫЙ КЛАСС КРИТЕРИЕВ; minimal complete class of tests » – bax. *Statistik kriteri; tam sinif*.

MINİMAL TAM SİNİF(f_i) STRATƏGIYALARIN « МИНИМАЛЬНЫЙ ПОЛНЫЙ КЛАСС СТРАТЕГИЙ; minimal complete class of strategies » – bax. *Oyunu, iki şəxsin*.

MINİMAL ZƏNCİRİ, QRAFİN « МИНИМАЛЬНАЯ ЦЕПЬ ГРАФА; minimal path of a graph » – bax. *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu*.

MINİMAL ZƏNCİRLƏR VƏ KƏSİKLƏR METODU « МИНИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ И РАЗРЕЗОВ МЕТОД; minimal paths and cuts method » – şəbəkə strukturlu sistemlərin etibarlılıq göstəricilərinin yuxarı və aşağı sərhədlərinin alınması üçün istifadə olunan etibarlılıq qiymətləndirmə metodudur.

Sistem ikiqütblü $G(X)$ qrafı ilə təsvir olunur; $X = (x_1, \dots, x_n)$ qrafın bütün tillərinin altçoxludur. Qrafın *minimal zənciri* α (sade zənciri) onun tillərinin ele altçoxluluğuna deyilir ki, bu çoxluq giriş və çıxış təpələrinin əlaqəsini təmin etmiş olsun, lakin tillərdən ixtiyari birinin xaric olunması əlaqənin pozulmasına səbəb olur (qrafın minimal zəncirə daxil olmayan digər tillərinin xaric olunması şərtlə). Qrafın *minimal (sade)* kəsiyi onun tillərinin ele altçoxluluğuna deyilir ki, onun qrafdan xaric olunması (digər tillərin qalması şərtlə) əlaqənin pozulmasına səbəb olur, lakin bu altçoxluluğun ixtiyari bir tilinin daxil olunması qrafın giriş və çıxış təpələrinin əlaqəsini təmin edir.

Qiymətləndirmənin iki əsas sinfi inkişaf etdirilmişdir: minimal zəncirlər və minimal kəsiklərin tam çoxluğu vasitəsilə və tili-kəsişməyən minimal zəncirlər və minimal kəsiklər çoxluğu vasitəsilə qiymətləndirmə.

Birinci üsulla $\mathbf{P}$ ehtimalı üçün qiymətləndirmə (bax, [1])

$$\prod_{1 \leq k \leq M} \left(1 - \prod_{i \in \beta_k} (1 - r_i) \right) \leq \mathbf{P} \leq 1 - \prod_{1 \leq j \leq N} \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} r_i \right)$$

münasibətlə ifadə olunur, burada α_j – minimal zəncir, β_k – minimal kəsik; N – minimal zəncirlərin sayı və M – G qrafında kəsiklərin sayı, r_i – G qrafının i -ci tilinin varlığı ehtimalıdır.

İkinci üsulla $\mathbf{P}$ ehtimalı üçün qiymətləndirmə (bax, [2])

$$\max_{1 \leq i \leq T} \left[1 - \prod_{\alpha_j \in A_i} \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} r_i \right) \right] \leq \mathbf{P} \leq \min_{1 \leq s \leq S} \prod_{\beta_k \in B_s} \left(1 - \prod_{i \in \beta_k} (1 - r_i) \right)$$

münasibətlə ifadə olunur, burada A_i – tili – kəsişməyən zəncirlərin bəzi altçoxluluqlarıdır, yeni əgər $\alpha_i \in A_i$ və $\alpha_j \in A_i$ olarsa, onda $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$; B_s – tili – kəsişməyən kəsiklərin bəzi altçoxluluqlarıdır, yeni əgər $\beta_i \in B_s$ və $\beta_j \in B_s$ olarsa, onda $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$; T və S – uyğun olaraq, tili – kəsişməyən müxtəlif zəncirlər altçoxluluqlarının və tili – kəsişməyən müxtəlif kəsiklər altçoxluluqlarının sayıdır. Sonuncu qiymətləndirmə hesablamə nöqtəyi – nəzərdən daha konstruktivdir (bax, [3]). Digər tərəfdən, bu qiymətləndirmə təbii ümumiləşdirilmə üçün imkan verir ki (bax, [2], [3]), bu da ilkin qrafın bir sıra fraqmentlərindən bilavasitə istifadə edilməsi hesabına qiymətləndirmənin dəqiqliyinə xidmət edir.

Baxılan qiymətləndirmələrdən ikiqütblü qrafların digər parametrlərinin tapılmasında da istifadə etmək olar (bax, [4]).

Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984; [2] Литвак Е. И., Ушаков И. А., «Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика», 1984, № 3, с. 3–17; [3] Ушаков И. А., Литвак Е. И., Обобщенные показатели при исследовании сложных систем, М., 1985; [4] Ушаков И. А., Литвак Е. И., «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1977, № 1, с. 72–79.

MINKOVSKI BƏRABƏRSİZLİYİ « МИНКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО; Minkowski's inequality » – ξ , η və $\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mütləq momentləri üçün, ixtiyari $p \geq 1$ qiymətində

$$\left(\mathbf{M}|\xi + \eta|^p \right)^{1/p} \leq \left(\mathbf{M}|\xi|^p \right)^{1/p} + \left(\mathbf{M}|\eta|^p \right)^{1/p}$$

berəbersizliyədir.

MINKOVSKI ƏMƏLLƏRİ « МИНКОВСКОГО ОПЕРАЦИИ; Minkowski operations » – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının alt çoxluqlarının $\oplus$ toplama, $\ominus$ çıxma, $\lambda \in \mathbb{R}$ ədədinə vurma əməlləridir; bu əməllər uyğun olaraq aşağıdakı qaydalarla ifadə olunur:

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A, B \in \mathbb{R}^n;$$

$$A \ominus B = (A^c \oplus B^c)^c, \quad A^c = \mathbb{R}^n \setminus A;$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

M. ə.-nin köməyi ilə təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin bir çox konstruksiyaları təyin olunur. Məs., böyük ədədlər qanunları

$$\frac{1}{n} (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)$$

ardıcılıqlarının cırlaşmış təsadüfi çoxluğa yığılması teoremləridir (burada A_j – təsadüfi çoxluqlardır);

$A_j, j = 1, \dots, n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan çoxluqlar olduqda

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)$$

ardıcılığının asimptotik paylanması tədqiqi – mərkəzi limit teoreminin əsas məzmununu təşkil edir (bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*).

A təsadüfi çoxluğunun ən çox yayılmış çevirmələri (bunların köməyi ilə yeni təsadüfi çoxluqlar qurulur) aşağıdakılardır:

$A \ominus (-1)B$, – B vasitəsilə A -nin dilatasiyası (lat. dilatatio – genişlənmə, dartılma);

$A \oplus (-1)B$, – B vasitəsilə A -nin eroziyası;

$(A \ominus (-1)B) \oplus B$, – B vasitəsilə A -nin doldurulması (rus. заполнение);

$(A \oplus (-1)B) \oplus B$, – B vasitəsilə A -nin tamamlanması (rus. пополнение).

Məs., qabarıq B -lər üçün λB -nin ($\lambda > 0$) vasitəsilə A -nin doldurulması *qranulometriyanın* tipik misalıdır, yəni

$$\psi_\lambda(a) = (A \ominus (-\lambda)B) \oplus (\lambda B).$$

A təsadüfi çoxluğunun paylanması və onun müxtəlif çevirmələri arasında, bir qayda olaraq, sadə əlaqə mövcuddur, məs.,

$$T_{A \oplus B}(K) = T_A(K \ominus B),$$

burada A – qapalı təsadüfi çoxluq, B – determinik kompakt çoxluq, K – kompakt, T – *müşayiətedici funksionaldır*.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

MINKOVSKI FƏZASI « МИНКОВСКОГО ПРОСТРАНСТВО; Minkowski space » – hər hansı $S \subset \mathbb{R}^n$ küresində kəsilməz funksiyaların $C(S)$ fəzasının vektor altfəzasıdır. K $\mathbb{R}^n$ -də kompakt, $\alpha \in S$, (α, x) α, x vektorlarının skalyar hasil

olduqda, M. f. $f_K(\alpha) = \sup_{x \in K} (\alpha, x)$ şəklində funksiyaların bütün

mümkün fərqlərindən ibarətdir. K kompaktına f_K funksiyasını qarşı qoyan inikasin köməyi ilə kompakt təsadüfi çoxluqlar ardıcılıqlarının asimptotik xassələri haqqında məsələlər M. f.-nin təsadüfi elementləri haqqında analoji məsələlərə gətirir ki, bu da Banax fəzalarında paylanmanın və limit teoremlərinin məlum xassələrini istifadə etməyə imkan verir (bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*).

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Рокфеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973.

MINKOVSKI FUNKSIONALI « МИНКОВСКОГО ФУНКЦИОНАЛ; Minkowski functional » – hamar çoxobrazlıların (məs., əyrinin uzunluğu, səthin sahəsi kimi) müxtəlif integral xarakteristikalarını ümumiləşdirən çoxluq funksiyasıdır. M. f.-dən təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində istifadə təsadüfi həndəsi obyektlərə qarşı təbii həndəsi interpretasiyası olan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər toplusunun qoyulmasına imkan verir.

$M(A, r)$, – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında A qabarıq kompaktının r – ətrafının həcmi olsun. A kompaktında M. f.-nin M_p qiyməti $M(A, r)$ -in doğuran funksiyasının r qüvvət üstlərinə görə ayrılışında r^p -nin əmsali kimi təyin olunur. C^2 – sərhədinə malik kompakt üçün üçölçülül halda, $M_0(A)$ əmsali qabarıq A cisminin həcmidir, $M_1(A)$ bu cismin səthinin sahəsi, $M_2(A)$ onun integral orta ayrılığı, sonuncu sıfırdan fərqli $M_3(A)$ əmsali isə A -dan, ümumiyyətlə, asılı deyildir: bu əmsal vahid radiuslu kürenin həcmidir.

Sabit vuruqlar dəqiqliyi ilə M. f. $M_p(A)$ A -nin integral ən ölçüləri ilə üst-üstə düşür, yeni $\mathbb{R}^n$ altfəzasına A -nin p köölçülü ortoqonal proyeksiyalarının izotrop ortalanmış həcm-lərlə üst-üstə düşür. M. f.-nin universallığı onun aşağıdakı xassəsilə ifadə olunur: bütün mümkün olan müsbət artan C – additiv və $\mathbb{R}^n$ -də hərəkətlərə nəzərən invariant funksionallar konusu $\mathbb{R}^n$ -də daxil olma əməlinə görə hissevi nizamlanmış bütün qabarıq kompaktlar çoxluğunda M_p funksionalları ilə doğurulur.

M. f.-lan qabarıq kompaktların sonlu birləşmələri üçün də təyin olunur, bu halda M. f.-lan bu kompaktların topoloji invariantı – Eyler – Puankare xarakteristikası ilə sıx əlaqəli olur. Bunlar bir sıra integral ifadələrində, rekurrent münasibətlərdə və bərabərsizliklərdə də iştirak edir. M. f.-lan nəzəriyyəsi qarışıq həcm-lər həndəsəsində ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Санта́ло Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [2] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [3] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 947–72; № 6, с. 1205–38; 1938, т. 3, № 1, с. 27–46; № 2, с. 227–51.

MINKOVSKI GÖZLƏNİLƏN ÖLÇÜSÜ « МИНКОВСКОГО ОЖИДАЕМАЯ МЕРА; Minkowski expected measure » k tərtib – $\mathbb{R}^n$ -də sanki yəqin qabarıq qapalı təsadüfi W_k^A çoxluğunun xarakteristikalarından biri olub,

$$f(\varphi) = \mathbf{M} \left(\int \varphi W_k^A \right)$$

şəklində, $\mathbb{R}^n$ -dən olan kəsilməz φ funksiyalar çoxluğunda verilmiş, $\mathbb{R}^n$ -də funksionaldır. W_k^A simvolu bütün φ -lər üçün

$$\int_{A \oplus B} \varphi(\Pi_A x) dx = \sum_{k=0}^n C_n^k r^k \int \varphi(x) W_k^{(A)}(dx)$$

eyniliyini ödəyən ölçü, Π_A , $\mathbb{R}^n$ -in hər bir $x \in \mathbb{R}^n$ nöqtəsinə ona yaxın $y \in A$ nöqtəsinə qarşı qoyan $\mathbb{R}^n$ -dən $\mathbb{R}$ -ə operator. $\oplus$ – Minkovski toplama simvolu (bax, *Minkovski emelleri*). B , $\mathbb{R}^n$ -də vahid radiuslu küredir. $W_0^{(A)}$ ölçüsünün sıxlığı $W_k^{(A)}$ çoxluğunun indikatoru ilə üst-üstə düşür, $k > 0$ qiymətləri üçün $W_k^{(A)}$ ölçüləri $W_k^{(A)}$ çoxluğunun sərhədində toplanmışdır.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

MINLOS TEOREMİ « Минлоса теорема; Minlos theorem » – bax, *Sazonov topologiyası*.

MİZES BƏRABƏRSİZLİYİ « Мизеса неравенство; Mises' inequality » – diskret paylanmanın mütləq momentləri arasında əlaqə təyin edən bərabərsizlikdir. X tam x_j qiymətlərini

alan təsadüfi kəmiyyət, $v_k = M|X - MX|^k < \infty < \infty$ olsun, onda ixtiyari natural k ədədi üçün $2v_k \geq cv_{k-1}$ olur, burada $c = \min_j (x_j - x_{j+1})$ (bax, [2], səh. 33). Əgər X təsadüfi kəmiyyəti x_1 və x_2 qiymətlərini p və $q = 1 - p$ ehtimalları ilə alarsa, onda bu halda $v_1 = 2pq$ və $v_1 = c^2 pq$ olur və deməli M. b. bərabərliyə çevrilir.

Əd.: [1] Мисес Р., «Skand. aktuarietidskr.», 1939, t. 22, № 1, S. 32–36; [2] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

MODA « мода; mode » – düzətdə ehtimal paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır. Əgər paylanma sıxlıq funksiyası olan mütləq kesilməz paylanmadırsa, $p(x)$ -in hər bir lokal maksimum nöqtəsi x_0 m o d a adlanır. $x_k = a + hk$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ nöqtələrində $p_k = P\{\xi = x_k\}$ ehtimalları ilə təyin olunan səbəkevari paylanmanın modası elə x_m nöqtəsinə deyilir ki, $p_m > p_{m-1}$ və $p_m \geq p_{m+1}$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Yeganə modaya malik paylanmalar – *unimodal paylanmalar* – ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada ən mühüm rol oynayan xarakteristikalardandır. Unimodal paylanmalar üçün M. müəyyən mənada ən böyük ehtimalı ədəddir (təsadüfi kəmiyyətin qiyməti).

MODAL – MEYLSİZ STATİSTİK QIYMƏT « модально несмещенная оценка; mode unbiased estimator » – modası qiymətləndirilən kəmiyyətlə üst-üstə düşən nöqtəvi statistik qiymətdir. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi elementinin realizasiyaları üzrə θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. $\text{mod}_\theta T(X)$, – θ parametri üçün statistik qiymət kimi qurulmuş T statistikasının modası olsun. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $\text{mod}_\theta T(X) = \theta$ olarsa, T statistik qiymətinə modal – meylsiz statistik qiymət deyilir.

M i s a l. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri paylanmalarının sıxlıq funksiyaları

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta^{-1}, & 0 < x < \theta, \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan, eyni qanunla paylanan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor olsun. Onda $X_{(n)} = \max_{0 \leq i \leq n} X_i$ kafi statistikasi θ parametri üçün

M. – m. s. q.-dir.

Qiymətləndirilən θ parametrinin yayınma ehtimalı $P\{|T - \theta| > \varepsilon\}$ -nin minimallaşdırılması tələb olunan statistik qiymətləndirmə məsələlərində M. – m. s. q.-dən istifadə müəyyən rola malik olur.

Əd.: [1] W a s a n M. T., Parametric estimation, N. Y., 1970; [2] Воннов В. Г., Никulin М. С., Несмещенные оценки в их применении, М., 1989.

MODEL « модел; model » – bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

F – **MODEL** « F – модел; F – model » – bax, *Ümumiləşmiş regressiya eksperiment*.

XY – **MODELİ** « XY – модель; XY – model » – bax, *Heyzenberq modeli*.

XYZ – **MODELİ** « XYZ – модель; XYZ – model » – bax, *Heyzenberq modeli*.

$P[\varphi]_2$ – **MODELLƏRİ, KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİNİN** « $P[\varphi]_2$ – модели квантовой теории поля; $P[\varphi]_2$ – models of quantum field theory » –

ikiölçülü $\mathcal{M}^2$ Minkovski fəzasında skalyar neytral bozon özü-özünə təsiredən meydanın sadə modelleridir. Modelin sadə formal laqranjiani

$$L(\varphi(x), \varphi'_{x^{(0)}}(x), \varphi'_{x^{(1)}}(x)) =$$

$$= -(\varphi'_{x^{(0)}})^2 + (\varphi'_{x^{(1)}})^2 + m^2 \varphi^2(x) + \lambda P(\varphi(x)) \quad (*)$$

şəklində ifadə olunur, burada $x = (x^{(0)}, x^{(1)}) \in \mathcal{M}^2$, $\varphi(x)$ – meydan, $m^2 > 0$, $\lambda > 0$ – konstantlar, $P(\cdot)$ – ikidən böyük cüt dereceli çoxhedlidir, böyük əmsalı 1-ə bərabərdir.

(*) şəklində ixtiyari laqranjian üzrə (olduqca kiçik λ ilə) $\mathcal{M}^2$ fəzasında kvant meydanı $\{\varphi(t), t \in S(\mathcal{M}^2)\}$ qurmaq olar. Bu meydan Evklid yanaşması adlandırılan yanaşmanın köməyiylə qurulur: əvvəlcə $\mathbb{R}^2$ -də $P[\varphi]_2$ – Evklid meydanı qurulur, sonra isə yaxşı işlənmiş prosedurun köməyiylə bu meydan «xeyali zamana davam olunur» (yeni $\mathcal{M}^2$ fəzasına). $P[\varphi]_2$ – Evklid meydanı isə ümumiləşmiş Markov meydanıdır; bu meydan isə kovariasion funksionalı olan Gauss ümumiləşmiş $\{X(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}^2\}$ meydanının məhdud $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ oblastlarında Gibbs yenidənqumalarının $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ olduqda termodinamik limiti kimi konstruksiya olunur. $\langle X(\varphi_1) X(\varphi_2) \rangle = ((-\Delta + m^2)^{-1} \times \varphi_1, \varphi_2)_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^2)$ [(*) laqranjianının kvadratik hissəsinə uyğun sərbəst Evklid meydanı]. Yenidənqurma

$$U_\Lambda(X) = \lambda \int_\Lambda : P((X(x))) : d^2 x$$

əməliyyatı vasitəsilə həyata keçirilir; :: işarələməsi $P(X(x))$ çoxhedlisinin *Vik nizamlanmasını* ifadə edir.

Əd.: [1] Саймон Б., Модель $P[\varphi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математический методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [3] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977.

MODELLƏŞDİRİLMƏSİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR VƏ FUNKSIYALARIN « моделирование случайных величин и функций; simulation of random variables and functions » – statistik modelləşdirmə metodunun (Monte – Karlo metodunun) realizasiyası üçün uyğun seçimi qiymətlərin imitasiyasıdır.

1. Təsadüfi kəmiyyətlərin modelləşdirilməsi, bir qayda olaraq, $(0, 1)$ -də müntəzəm paylanmış təsadüfi və ya psevdotəsadüfi α kəmiyyətinin asılı olmayan qiymətlərinin çevrilməsi yolu ilə, yeni

$$\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (1)$$

modelleyici düsturu ilə həyata keçirilir. α -nın seçimi qiymətləri ardıcılığı, adətən, EHM-da nəzəri – ədədi alqoritmlər vasitəsilə alınır ki, bunlar arasında ən çox istifadə olunan çıxıqlar metoduudur: bu halda $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} \cdot 5^{2^{p+1}} \pmod{2^m}$, $\alpha_n = u_n \cdot 2^{-m}$ götürülür, burada m – EHM mantissasının dərəcələri sayı, $p = \max \{q: 5^{2^{q+1}} < 2^m\}$. Belə ədədlər psevdotəsadüfi ədədlər adlanır. Çıxıqlar metodunun belə variantının periodunun uzunluğu 2^{m-2} -yə bərabərdir.

Paylanması $P\{\xi = x_n\} = p_k$, $k = 0, 1, \dots$ olan ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin standart modelləşdirilməsi aşağıdakı kimidir: eger α -nın seçilmiş qiyməti üçün

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k \leq \alpha < \sum_{k=0}^m p_k$$

münasibəti ödənilərsə, $\xi = x_m$ fərz olunur.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin standart modelləşdirilmə metodu (başqa sözlə, ters funksiya metodu) – $\xi = F^{-1}(\alpha)$ ifadəsindən istifadədən ibarətdir, burada F – paylanma sıxlığı verilmiş $f(x)$ olan paylanma funksiyasıdır.

Bəzən randomizasiya (başqa sözlə, superpozisiya metodu) səmərəli olur, bu metod $f(x) = \sum_k p_k f_k(x)$

ifadəsinə əsaslanır. Randomizasiyadan istifadə edərkən əvvəlcə paylanması $P\{m = k\} = p_k$ olan nömrə seçilir, sonra sıxlığı $f_m(x)$ olan paylanmadan ξ -nin seçimi qiyməti alınır.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modelləşdirilməsində digər ümumi üsul xaricətmə metodudur (başqa sözlə, seçmə metodu); bu metodda hökm olunur ki, eger (ξ, η) nöqtəsi $|G|$ sahəsinin $G = \{(x, y): 0 \leq y \leq g(x)\}$ oblastında müntəzəm qanunla paylanmışdırsa, onda $f_g(x) = g(x)/|G|$. Xaricətmə metodunda $G_1 > G$ oblastı üzrə müntəzəm olaraq, (ξ_0, η) nöqtəsi seçilir və eger $(\xi_0, \eta) \in G$ olarsa, $\xi = \xi_0$ qəbul edilir, əks halda, seçim təkrarlanır və s. (ξ_0, η) nöqtəsini $G_1 = \{(x, y): 0 \leq y \leq g_1(x)\}$ oblastı üzrə müntəzəm seçmək

üçün ξ_0 kəmiyyətini paylanma sıxlığı $g_1(x)/|G|$ olan paylanmadan seçmək və $\eta = \alpha g_1(\xi_0)$ götürmək kifayətdir.

$g_1(x) \geq g(x)$ şərtini ödəyən $g_1(x)$ funksiyasını ele seçmək məqsəduyğundur ki, ξ_0 təsadüfi kəmiyyətini standart metodla modelləşdirmək mümkün olsun. Məs., eger $a \leq \xi \leq b$ və $g(x) = cf(x) \leq R$ olarsa, onda $\xi_0 = a + (b - a)\alpha_1$ və $c = R\alpha_2$ olduğunu fərz etmək olar. Xaricətmə metodunda apanlan əməliyyatların orta sayı $|G_1|/|G|$ kəmiyyətinə mütənəsibdir.

n kəmiyyəti, adətən, (1) modelleyici düsturunun dim. – ölçüsü adlandırılır. $\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin tələb olunan paylanması $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vektorunun uyğun hiperkubda müntəzəm paylanmasının nəticəsidir, yeni istifadə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin n – dim. – ölçülü müntəzəm paylanmaya malik olması nəticəsidir. Buna görə də, kiçik dim. – ölçülü modelleyici düsturlardan istifadə etmək məsləhət görülür. Standart ters funksiya metodundan F^{-1} funksiyasının realizasiyasının çətinliyi baxımından, praktik olaraq, nadir hallarda istifadə olunur, xüsusilə də, məsələnin həlli prosesində dəyişən parametrlər olduğu halda. Bir sıra ehtimal paylanmalar üçün xüsusi modelleyici düsturlar aşağıda verilir (bax, [1]):

1) p parametrlili həndəsi paylanma: $\xi = [\ln \alpha / \ln(1 - p)]$, burada $[x]$ – x -in tam hissəsidir.

2) $1, \dots, n$ ədədlər çoxluğunda diskret müntəzəm paylanma: $\xi = [\alpha n] + 1$. Bu düsturdan ixtiyari diskret paylanmanın modelləşdirilməsinin ehtimallarının müntəzəm «laylaşdırılması» və mümkün uyğun qiymətlərin təkrarlanması yolu ilə yaxşılaşdırılması məqsədilə istifadə olunur (bax, [2]).

3) Standart normal paylanma $N(0, 1)$:

$$\xi = (-2 \ln \alpha_1)^{1/2} \cos(2\pi \alpha_2), \quad \eta = (-2 \ln \alpha_1)^{1/2} \sin(2\pi \alpha_2).$$

ξ və η – asılı olmayan, $N(0, 1)$ qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir.

4) $(0, 1)$ intervalında p və tam $q = m$ parametrləri beta – paylanma:

$$\xi = \exp \left(\sum_{k=1}^m \frac{\ln \alpha_k}{p + k - 1} \right)$$

Bu düsturun randomizasiyası vasitəsilə ixtiyari parametrləri beta – paylanmanı modelləşdirmək olur (bax, [1]).

5) v parametrlili qamma – paylanma:

$$\xi = -\ln \left(\prod_{k=1}^m \alpha_k \right) - \xi_m \ln \alpha_{m+1}$$

burada $m = [v]$, ξ_μ isə $p = v - m$, $q = 1 + m - v$ parametrləri beta – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyətdir.

II. Təsadüfi vektorların modelləşdirilməsi. Kəsilməz $X = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun modelləşdirilməsinin standart alqoritm X -in komponentləri üçün qiymətlərin şərti paylanmalarla ifadə olunan

$$f_X = f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2|x_1) \dots f_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

münasibətindən seçilməsindən ibarətdir. Xaricetmə metodu və superpozisiya metodu deyiləndən çoxölçülü hala köçürülür, yalnız bu halda X və x -ə təsadüfi vektorlar kimi baxılmalıdır. Məs., dim. – ölçüsü çox da böyük olmayan $X = (X_1, \dots, X_n)$

Qauss vektorunu $X = AY + MX$ düsturu ilə modeləşdirmək olar, burada $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ – asılı olmayan standart – normal təsadüfi kəmiyyətlər toplusu, A – üçbucaq matrisidir və bu matrisin elementləri məlum rekurrent üsulla hesablanır (bax, [1]).

Birölçülü paylanmaları və mənfi olmayan kovariasiyaları ilə verilmiş xüsusi təsadüfi vektorların qurulması üçün «təkrarlama metodu» işlənmişdir (bax, [3]); bu metoddan istifadə etmək üçün vektorun komponentləri çoxluğunun təsadüfi bölgüsü – qeyd olunmuş bölgü üçün eyni qiymətlərin asılı olmayan qruplara bölgüsü modeləşdirilir.

III. Təsadüfi funksiyaların modeləşdirilməsi. Əgər stasionar $\zeta(t)$ Gauss prosesinin spektral sıxlığı

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k (i\lambda)^k / \sum_{k=0}^n a_k (i\lambda)^k \quad (2)$$

iki çoxhədlinin nisbəti kimi verilmişdirsə, məxrəcdəki çoxhədlinin sıfırları isə yuxarı yarımmüstəvidə yerləşmişdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesini $\Phi(t)$ təsadüfi funksiyası və onun ilk $(m-1)$ sayda ilk törəmələrinin xətti kombinasiyası şəklində qurmaq olar, yəni

$$\zeta(t) = b_0 \Phi^{(m-1)}(t) + \dots + b_m \Phi(t)$$

burada $a_0 = 1$, a_k , b_k – heqiqi sabitlər, $\Phi(t)$ – sabit əmsallı

$$\Phi^{(n)}(t) + a_1 \Phi^{(n-1)}(t) + \dots + a_n \Phi(t) = W(t) \quad (3)$$

xətti stoxastik tənliyin həlli, $W(t)$ – bəyaz küy prosesidir (bax, [1]). Xüsusi şəkilli spektral sıxlıqları təsadüfi meydanlar üçün analoji ifadələr almaq olur; məs., Gauss spektral sıxlıqlı təsadüfi meydan başlanğıc qiyməti kimi bəyaz küy götürülən istilik-keçimə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli kimi alınə bilər (bax, [4]).

Diskret zaman anlarında stasionar proseslərin realizasiyalarının (zaman sıralarının) alınması üçün, adətən, (3) tənliyinin onun sonluferqlər analoqu ilə təqribi həvə olunmasından istifadə olunur. Kesri – rəşional spektral sıxlığı (2) ilə ifadə olunan zaman sıralarının dəqiq realizasiyasını avtoregressiya və sürüşən orta qanışq modelinin əsasında qurmaq olar (bax, [1]).

Gauss təsadüfi meydanlarının bir sıra modellərinə [5]-də bəxılmışdır. Birölçülü paylanma funksiyası $F_{\xi}(t)$ və verilmiş qabañq korrelyasion funksiyası $k(t) \geq 0$ olan $\xi(t; k)$ stasionar təsadüfi prosesinin xüsusi modeli məlumdur; bu model t uzunluqlu intervalda $k(t)$ ehtimalı sıfır nöqtələri olan Palm stasionar nöqtəvi $\{\tau_k\}$ axını əsasında qurulmuşdur. $\xi(t; k)$ prosesi aşağıdakı kimi modeləşdirilir: a) $(0, T)$ -də $\{\tau_k\}$ axını qurulur; b) hər bir (τ_{i-1}, τ_i) intervalı üçün $\xi(t) = \xi_i$ fərz olunur, burada $\{\xi_i\}$ – paylanma funksiyası $F_{\xi}(x)$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu model $\xi_m(t) = \sum_{i=1}^{(m)} \xi_i^{(m)}(t; k)$ düsturundan

istifadə edərək yaxşılaşdırmaq olar [fərz olunur ki, hər bir natural

m ədədi üçün $\xi = \xi_i^{(m)} + \dots + \xi_m^{(m)}$ ifadəsi doğrudur, burada $\xi_i^{(m)}$ – asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir]. $\xi_m(t)$ prosesinin realizasiyanı $\xi(t; k)$ ilə müqayisədə kəsilməz funksiyalara yaxınlıq mənada nisbətən yaxşılaşdırılmış hesab olunur. $\xi_m(t)$ -lərə uyğun sonluölçülü paylanmaların uzlaşma şərtlərini ödəyən paylanmalara zəif yığılması və Kolmoqorov – Çentsov kriterisinə əsaslanan teorem də isbat olunmuşdur.

Əgər $|k''(t)| < c < \infty$ münasibəti $[0, T]$ -də ödənilsə və $\xi \geq 0$ olarsa, onda $\xi_m(t)$ prosesləri (D metrikasına nəzərən) limit sonluölçülü paylanmaları ilə təyin olunan, korrelyasion funksiyası $k(t)$ və birölçülü paylanma funksiyası $F_{\xi}(x)$ olan prosese zəif yığılırlar.

$\xi(r; k)$ bircins meydanları üçün analoji $\xi(t; k)$ modelləri müxtəlif koordinat oxları üzrə Palm axınlarının düz hasilələri ilə alınan təsadüfi şəbəkələr üzrə qurulur; izotrop meydanlar üçün olduqca təbii modeller $\xi(r; k)$ -nin realizasiyalarının təsadüfi fırlanması və cəmlənməsi vasitəsilə alınır (bax, [5]).

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Кнут Д. Я., Яо Э., «Кибернетич. сб.», 1983, № 19, с. 97–158; [3] Михайлов Г. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 873–79; [4] Марченко А. С., Огородников В. А., «Журн. Вычислит. матем. и матем. физики», 1984, т. 24, № 10, с. 1514–19; [5] Михайлов Г. А., «Журн. вычислит. матем. и матем. физики.», 1983, т. 23, № 3, с. 558–66.

MODELLƏYİCİ FORMULA « моделирующая формула; simulation formula » – bax, *Modeləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaları*.

MODULYASIYA VƏ DEMODULYASIYA « модуляция и демодуляция; modulation and demodulation » – informasiya nəzəriyyəsinin fiziki rabitə kanalı ilə siqnalları ötürmə metodunu təsvir edən anlayışdır.

Modulyasiya (M) – ötürülən $a(t)$ siqnalının qiymətlərinə uyğun olaraq, $v(t, \lambda)$ periodik funksiyasının (daşıyıcı siqnal) bir və ya bir neçə parametrlərinin dəyişikliyi. M nəticəsində modulyasiyalanmış siqnal – $V(t) = v(t, Ba(t))$ siqnalı yaranır, burada B – hər hansı, ümumiyyətlə isə, qeyri – xətti operatorudur.

Demodulyasiya (D) – rabitə kanalı ilə keçən modulyasiyalanmış siqnaldan $a(t)$ siqnalının ayrılmasıdır. M nəticəsində ötürülən siqnal spektrinin yerindəyişməsi baş verir və bununla da, rabitə kanalını daha da adekvat surətdə istifadə etmə imkanı yaranır və bu rabitə kanalı ilə siqnalları ötürülməsini minimal dəyişikliklərlə həyata keçirmək olur.

Daşıyıcı siqnal kimi, əksər hallarda, $\sqrt{2P} \cos[\omega_0 t + \varphi_0]$ harmonik rəqsi istifadə olunur. Bu halda modulyasiyalanmış siqnal $\sqrt{2p} A(t) \cos[\theta(t)]$ şəklində olur və aşağıdakı M -lər mümkündür:

$$A(t) = 1 + ma(t), \quad \theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

– amplitud M .

$$A(t) = 1, \quad \theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi a(t)$$

– faza M .

$$A(t) = 1, \quad \theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta \omega \int_0^t a(s) ds$$

– tezlik M.

Rabite texnikasında diskret (rəqəmlə) M. geniş tətbiq olunur və bu növ M. rabite kanalı ilə hər hansı əlifba simvollarının ardıcılığının ötürülməsi məqsədilə istifadə olunur. Bu halda $v(t, \lambda)$ daşıyıcı signalının λ parametrinin dəyişiklikləri yalnız diskret kT , $k=0, 1, \dots$ anlarında baş verə bilər. λ parametri isə yalnız sonlu sayda müəyyən qiymətlər ala bilər. Diskret M.-nin ən sadə forması ikifazlı faza manipulyasiyasıdır ki, bunun köməyiylə $d_i \in \{0, 1\}$ olan ikilik d_i simvolları ötürülür. Modulyasiyalanmış signal bu halda aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$V(t) = \sqrt{2P} \sin \left[\omega_0 t + \sum_i d_i \theta_T(t + iT) \right],$$

$$\theta_T(t) = \begin{cases} \pi, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

D. məsələlərinin riyazi qoyuluşu, adətən, sadə olur. Məs., $n(t)$ additiv bəyaz küylü rabite kanalından keçən ikizolaqlı amplitudlu M. signalının D.-si üçün

$$x(s) = \sqrt{2P} a(s) \cos[\omega_0 s] + n(s), \quad s \in (-\infty, \infty)$$

tesadüfi prosesi üzrə müşahidələr əsasında $a(t)$ Gauss stasionar prosesinin statistik qiyməti $\hat{a}(t)$ -ni qurmaq tələb olunur. Bu halda fərz olunur ki, optimal $\hat{a}(t)$ statistik qiyməti $\mathbf{M}[\hat{a}(t) - a(t)]^2$ kvadratik orta riskini minimallaşdırmalıdır. $a(\cdot)$ prosesinin spektral sıxlığı $G_a(\omega)$ və Gauss bəyaz küynün spektral sıxlığı $N_0/2$ məlum hesab olunur və $|\omega| > \omega_0$ olduqda $G_a(\omega) = 0$. Optimal statistik qiymət xəttidir və aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{a}(t) = \sqrt{\frac{2}{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) \cos[\omega_0 s] x(s) ds,$$

burada

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{N_0/2P}{G_a(\omega) + N_0/2P} d\omega.$$

Real rabite kanallarında, bir qayda olaraq, additiv küylə yanaşı daşıyıcı harmonik rəqsin fluktuasiyaları da aşkar olunur. Buna görə də, D.-də bu fluktuasiyalara nəzarət kimi mühüm məsələ qarşıya çıxır. Ən sadə halda bu məsələ aşağıdakı şəkildə ifadə oluna bilər:

$$x(s) = \sqrt{2P} \cos[\omega_0 s + \varphi(s)] + n(s), \quad s \in [0, t]$$

tesadüfi prosesi üzrə müşahidələrə görə $\mathbf{M}[\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)]^2$ kvadratik ortasını minimallaşdıran $\hat{\varphi}(t)$ statistik qiymətini qurmaq tələb olunur, burada $\varphi(\cdot)$ – Gauss stasionar prosesi, $n(\cdot)$ – Gauss bəyaz küyüdür. Bu məsələnin həllini optimal qeyri – xətti

filtrasiyanın Markov nəzəriyyəsi çərçivəsində almaq olur (bax, [4], [5]). Praktikada bu məsələnin həllinə geniş yayılmış yanaşmalardan biri faza sinxronizasiyası prinsipinə əsaslanır (bax, [8]). Bu prinsip rabite texnikasında tezliyin faza avtoqurma sistemlərinin (rus. – системы фазовой автоподстройки частоты, qısaca – ФАПЧ) köməyiylə reallaşır. ФАПЧ-ın riyazi nəzəriyyəsi D. statistik nəzəriyyəsinin əsas elementlərindən biridir.

Əd.: [1] Котельников В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, М. – Л., 1956; [2] Сакрисон Д., Лекции по аналоговой связи, пер. с англ., М., 1974; [3] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [4] Стратонович Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., 1966; [5] Тихонов В. И., Кульман Н. К., Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, М., 1975; [6] Витерби Э. Д., Принципы когерентной связи, пер. с англ., М., 1970; [7] Ван Трис Гарри Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1–2, М., 1972–75; [8] Линдсей В., Системы синхронизации в связи и управлении, пер. с англ., М., 1978.

MODULYASIYALANMIŞ SİQNAL « модулированный сигнал; modulated signal » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya*.

MOMENT « момент; moment » – ehtimal paylanmasının ededi xarakteristikasıdır. ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib momenti m_k ($k > 0$ tam ədəddir) $\mathbf{M} \xi^k$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi kimi (əgər bu riyazi gözləmə varsa) təyin olunur. Əgər $F(x)$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdırsa, onda

$$m_k = \mathbf{M} \xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) \quad (1)$$

düsturu ilə; ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots$ mümkün qiymətləri və $p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\}$, $i=1, 2, \dots$ ehtimalları toplusu ilə verilərsə,

$$m_k = \mathbf{M} \xi^k = \sum_i x_i^k p_k \quad (2)$$

düsturu ilə k tərtib M. təyin olunur. Ehtimal nəzəriyyəsində M.-in təyin olunmasında mexanikada mühüm rol oynayan uyğun anlayışla bərabər analogiyadan istifadə olunur: (1) düsturu ilə kütlənin paylanması M.-i təyin olunur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin birinci tərtib M.-i (mexanikada statik M.) riyazi gözləmədir, yəni $m = \mathbf{M} \xi$. $\mathbf{M}(\xi - a)^k$ kəmiyyəti ξ təsadüfi kəmiyyətinin a -ya nəzərən k tərtib momenti adlanır, $\mu_k = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M} \xi)^k$ kəmiyyətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib mərkəzi momenti deyilir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ikinci tərtib mərkəzi momenti $\mathbf{D} \xi = \sigma^2 = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M} \xi)^2$ – dispersiya adlanır (mexanikada inersiya momenti). $\nu_k = \mathbf{M} |\xi|^k$, – k tərtib mütləq moment adlanır. $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının (bax, *Çoxölçülü paylanma*) M.-i analogi təyin olunur: $k_1 + \dots + k_n = k$ şərtini ödəyən ixtiyari $k_i \geq 0$ tam ədədləri üçün $\mathbf{M}(\xi_1^{k_1}, \dots, \xi_n^{k_n})$ riyazi gözləməsi – k tərtib qarışıq moment, $\mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M} \xi_1)^{k_1} \dots (\xi_n - \mathbf{M} \xi_n)^{k_n}$, – k tərtib

mərkəzi qarışıq moment adlanır. İkiterib qarışıq moment – $M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2) - \xi_1$ və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin *kovariasiyası* adlanır və bu kəmiyyət təsadüfi kəmiyyətlər arasında əsas asılılıq xarakteristikalarından biridir (bax, *Korrelasiya*). Belə bir fakt doğrudur ki, ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $g(k) = \log M|\xi|^k$ funksiyasının təyin olduğu hər bir sonlu intervalda $g(k)$, k -yə görə qəbənq funksiyadır, $(M|\xi|^k)^{1/k}$ k -yə görə azalmayan funksiyadır. M -in bütün xassələri (o cümlədən, M -lər üçün bərabərsizliklər) bu faktın nəticəsidir. $M\xi^k$ və $M(\xi - \alpha)^k$ M -ləri, yalnız və yalnız, $M|\xi| < \infty$ olduğu halda mövcuddur. Əgər $M|\xi|^{k_0}$ M -i vardırsa, onda $k \leq k_0$ şərtini ödəyən bütün k qiymətlərində bütün k tərtib M -lər vardır. Əgər bütün $i = 1, \dots, n$ qiymətlərində $M|\xi_i|^k < \infty$ olarsa, onda $k_1 + \dots + k_n \leq k$ şərtini ödəyən bütün $k_i \geq 0$ qiymətlərində $M\xi_1^{k_1}, \dots, M\xi_n^{k_n}$ qarışıq M -ləri mövcuddur. Bəzi hallarda M -i təyin etmək üçün momentlərin doğuran funksiyası adlandırılan $\psi(t)$ funksiyasından istifadə olunur ki, bu funksiyanın ayrılışında paylanmanın momentləri emsallar kimi götürülür: tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər üçün bu funksiya $\varphi(s)$ doğuran funksiyası ilə $\psi(t) = \varphi(e^t)$ münasibətilə bağlıdır. Əgər $M|\xi|^k < \infty$ olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası $f(t)$ k tərtib də daxil olmaqla k -dan kiçik, bütün tərtib kəsilməz törəmələrə malikdir, bu halda k tərtib M , $f(t)$ -nin t -yə görə ayrılışında $(it)^k k!$ -nin emsalıdır, yəni:

$$M\xi^k = (-i)^k \frac{d}{dt^k} f(t) \Big|_{t=0}.$$

Əgər xarakteristik funksiyanın $2k$ tərtib törəməsi sıfırda vardırsa, onda $M|\xi|^{2k} < \infty$.

M ilə semi – invariantlar arasında əlaqə haqqında «Semi – invariant» adlı məq.-yə bax.

Əgər paylanmanın momentləri məlum olarsa, onda təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən yayınma ehtimaları haqqında bəzi müddəaları bərabərsizliklər təminatları ilə ifadə etmək olar; belə bərabərsizliklərdən ən çox məlum olanı

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

– Çebişev bərabərsizliyi və onun ümumiləşmələridir.

Ehtimal paylanmalarının onun momentlərinin ardıcılığı ilə təyin olunması məsələsi momentlər problemi adlanır. Bu məsələyə ilk dəfə, 1874-də P. L. Çebişev limit teoremlərinin tədqiqi ilə əlaqədar baxmışdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanmasının özünün $\alpha_k = M\xi^k$ M -ləri ilə birqiymətli təyin olunması üçün kafidir ki, məs.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k})^{-1/2k} = \infty$$

Karlemann şərti ödənilsin. Analoji hökm təsadüfi vektorların M -ləri üçün də doğrudur.

Limit teoremlərində M -dən istifadə aşağıdakı fakta əsaslanır. F_n , $n = 1, 2, \dots$ – paylanma funksiyaları ardıcılığı olsun; fərz olunur ki, bu paylanmaların uyğun bütün $m_k(n)$ momentləri sonludur və hər bir tam $k \geq 1$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $m_k(n) \rightarrow m_k$ münasibəti ödənilir; m_k -lər sonludur. Onda $e F_n$ altardıcılığı vardır ki, bu ardıcılıq F paylanma funksiyasına zəif yığılır, bu F_n paylanmalarının M -ləri isə m_k -lərdir. Əgər M -lər F -i birqiymətli təyin edərsə, onda F_n altardıcılığı F -ə zəif yığılır.

Momentlər metodu adlandırılan metod bu fakta əsaslanmışdır və xüsusi halda, riyazi statistikada empirik paylanmanın nəzəri paylanmadan yayınmalarının öyrənilməsində və paylanma parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsində istifadə olunur (bax, *Empirik paylanma*).

MOMENT ÖLÇÜSÜ nöqtəvi prosesin «momentная мера точечного процесса; moment measure of a point process» – e ölçüdür ki, onun B Borel çoxluğunda qiyməti nöqtəvi prosesin B çoxluğundakı nöqtələr sayının (bu say tam bölünən ədəd olmalıdır) orta qiymətinə bərabərdir. Əgər Φ , – $(A, \mathfrak{A})$ fəza fəzasında təyin olunmuş təsadüfi prosesdirsə, onda Φ nöqtəvi prosesinin M . ö. $\Lambda \in \mathfrak{A}$ çoxluqlarında $\Lambda(B) = M\Phi(B)$ münasibətilə təyin olunur.

$S = \{t_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, – $\mathbb{R}^1$ oxunda t_i nöqtələrinin təsadüfi ardıcılığı olsun, $t_i < t_{i+1}$. Φ təsadüfi nöqtəvi prosesinə baxılır, B Borel çoxluğu üçün $\Phi(B)$ $t_i \in B$ nöqtələrinin sayına bərabərdir. Φ prosesinin M . ö. B çoxluğundakı t_i nöqtələrinin orta qiymətinə bərabərdir. $M\Phi(B)^k$, $M\Phi(B_1)^l \Phi(B_2)^m$ momentlərini hesablamaq üçün Φ nöqtəvi prosesinin faktorial M . ö.-lərindən istifadə olunur. $k = 2$, $l = m = 1$ olduqda $\Lambda_{(2)}$ ikinci faktorial M . ö.-ndən istifadə olunur və $\Lambda_{(2)}$ -ni təyin etmək üçün ilkin təsadüfi S ardıcılığının $t_i \neq t_j$ şərtini ödəyən bütün t_i, t_j nöqtələrinin (t_i, t_j) cütələrinə baxılır. $\mathbb{R}^2$ müstəvisində C Borel çoxluğu üçün $\Lambda_{(2)}(C)$ C -dən olan $t_i \neq t_j$ şərtini ödəyən (t_i, t_j) nöqtələrinin tam bölünmə ədədlərinin saylarının $\Phi(\{t_i\})\Phi(\{t_j\})$ hasilələrinin cəminin orta qiymətinə bərabərdir.

Əgər $S = \{t_i \geq 0, i = 1, 2, \dots\}$ bərpa prosesinə uyğundursa, onda $C \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ üçün

$$\begin{aligned} \Lambda_{(2)}(C) = & \int \int_{C \cap \{t_1 < t_2\}} dH(t_2 - t_1) dH(t_1) + \\ & + \int \int_{C \cap \{t_1 > t_2\}} dH(t_1 - t_2) dH(t_2), \end{aligned}$$

burada $H(t)$ – bərpa funksiyasıdır. Əgər B_1, B_2 , – $\mathbb{R}^1$ -də kəsişməyən parçalarıdır, onda $M\Phi(B_1)\Phi(B_2) = \Lambda_{(2)}(B_1 \times B_2)$, burada $B_1 \times B_2$ tərəfləri B_1, B_2 olan düzbucaqlıdır. İkinci

faktorial moment $M\Phi(B_1)[\Phi(B_1) - 1] = \Lambda_{(2)}(B_1 \times B_2)$ düsturu ilə ifadə olunur.

M. ö. təsadüfi proseslərin realizasiyalarla səddi aşmalarının araşdırılmasında istifadə olunur.

Bax, *Həndəsi proses*.

Əd.: [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 341–78.

MOMENT SPEKTRAL SIXLIĞI « моментная спектральная плотность; moment spectral density » – bax, *Moment spektri*.

MOMENT SPEKTRİ « моментный спектр; moment spectrum », k tərtib moment spektral sıxlığı, – $M\zeta(t) = 0$ şərtini ödəyən birölçülü stasionar $\zeta(t)$ prosesinin k tərtib momentinin Furiye çevirməsidir.

$k = 2, 3$ tərtibləri M. s.-ləri uyğun semi – invariant spektrlərlə üst-üstə düşür (bax, *Spektral semi – invariant*, *Spektral sıxlıq*). Zaman sıralarının yüksək tərtib momentlərinin Furiye – analizi [1]-də təklif olunmuşdur, lakin sonralar yüksək tərtib semi – invariantların Furiye – analizi sürətlə inkişaf etmiş oldu.

Əd.: [1] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Théorie des fonctions, aléatoires, P., 1953; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

MOMENTLƏR FUNKSIYASI « моментов функция; moment function » həqiqi təsadüfi prosesin və ya $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyasının

$$m_{j_1, \dots, j_k}(t_1, \dots, t_k) = M[\zeta(t_1)]^{j_1} [\zeta(t_2)]^{j_2} \dots [\zeta(t_k)]^{j_k},$$

$$j_v > 0, \quad v = 1, \dots, k$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, $t_1, \dots, t_k \in T$ arqumentlərinin funksiyasıdır. $q = j_1 + \dots + j_k$ kəmiyyəti M. f.-nin tərtibi adlanır. q tərtib M. f.-nin təyin olunması üçün $\zeta(t)$ funksiyasının bütün $t \in T$ qiymətlərində q tərtib $M|\zeta(t)|^q$ sonlu momentinin varlığı fərz olunmalıdır. Bu halda $p \leq q$ şərtini ödəyən bütün p tərtib M. f.-ləri təyin olunmuşdur.

M. f.-ni

$$m_{j_1, \dots, j_k}(t_1, \dots, t_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_k^{j_k} dP\{\zeta(t_1) < x_1, \dots, \zeta(t_k) < x_k\}$$

düsturu ilə tapmaq olar.

Əgər $(\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k))$ təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyası

$$\varphi(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k) = M \exp \left\{ i \sum_{v=1}^k z_v \zeta(t_v) \right\}$$

məlum olarsa, onda tamqiymətli $j_1, \dots, j_k$ indeksli M. f.

$$m_{j_1, \dots, j_k}(t_1, \dots, t_k) = (-i)^q \frac{\partial^q \varphi}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_k^{j_k}} \Big|_{z_1 = \dots = z_k = 0}$$

düsturu ilə təyin olunur. Birinci tərtib M. f.

$$m_1(t) = m(t) = M\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dP\{\zeta(t) < x\}$$

– təsadüfi funksiyanın riyazi gözləməsi və ya orta qiyməti adlanır; ikinci tərtib M. f.

$$m_2(t_1, t_2) = M\zeta(t_1)\zeta(t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dP\{\zeta(t_1) < x_1, \zeta(t_2) < x_2\}$$

əksər hallarda $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının kovariasion funksiyası (və ya korrelyasion funksiyası) adlanır.

$\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının mərkəzi momentlər funksiyaları

$$\begin{aligned} \mu_{j_1, \dots, j_k}(t_1, \dots, t_k) &= \\ &= M[\zeta(t_1) - M\zeta(t_1)]^{j_1} \dots [\zeta(t_k) - M\zeta(t_k)]^{j_k}, \\ j_v &> 0, \quad v = 1, \dots, k \end{aligned}$$

düsturu ilə ifadə olunur və bunlar mərkəzlənmiş $\zeta_1(t) = \zeta(t) - m_1(t)$ təsadüfi funksiyasının (bu funksiyanın riyazi gözləməsi bütün $t \in T$ qiymətlərində sıfır bərabərdir) M. f.-lərdir. $q = j_1 + \dots + j_k$ kəmiyyəti bu halda da mərkəzi momentlər funksiyasının tərtibi adlanır.

İkinci tərtib mərkəzi momentlər funksiyası –

$$\begin{aligned} \mu_{12}(t_1, t_2) &= B(t_1, t_2) = \\ &= M[\zeta(t_1) - M\zeta(t_1)][\zeta(t_2) - M\zeta(t_2)] \end{aligned}$$

$\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi prosesinin (və ya təsadüfi funksiyasının) korrelyasion funksiyası adlanır.

Əgər $\{\zeta(t), t \in T\}$ Qauss təsadüfi funksiyası olarsa, onda onun birinci və ikinci tərtib M. f. $m_1(t)$ və $m_2(t_1, t_2)$ $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyasının sonluölçülü paylanmalarını birqiymətli təyin edirlər və deməli, $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyasının özünü də tamamilə təyin etmiş olurlar. Ümumi halda, ilk iki M. f.-nin deyil, hətta ixtiyari sonlu sayda M. f.-ləri haqqında bilgi təsadüfi funksiyayı tam mənada təsvir etmək üçün kifayət deyildir.

Əgər $\{\zeta(t), t \in T\}$ dar mənada stasionar təsadüfi prosesdirsə və hər hansı $t \in T$ qiymətində $M|\zeta(t)|^q$ momenti sonludursa, onda $h + t_j \in T$, $j = 1, \dots, k$ münasibətini ödəyən ixtiyari $h \in T$ üçün $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi prosesinin M. f. üçün

$$m_{j_1, \dots, j_k}(t_1, \dots, t_k) = m_{j_1, \dots, j_k}(t_1 + h, \dots, t_k + h)$$

bərabərliyi doğrudur.

q tərtib M. f. və q tərtib semi – invariant funksiyaların arasında Leonov – Şirayevin sonlu, əlaqələr düsturu vardır (bax, [1]).

Əd.: [1] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М.,

1964; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

MOMENTLƏR METODU « МОМЕНТОВ МЕТОД; moments method of » – *mərkəzi limit teoreminin* isbatı üçün P. L. Çebişevin təklif etdiyi metoddur (bax, [1]). A. A. Markov bu metodla [2]-də Lyapunov teoreminin (normal qanuna yığılma) hökmünü isbat etmişdir. Bu metodla isbat ideyası ondan ibarətdir ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin tam qüvvət üstlü momentlərinin müəyyən şərtlərlə hər hansı paylanma qanununun uyğun (limit) momentlərinə yığılması bu cəmlərin paylanmalarının həmin qanuna yığılmasını doğurur. M. m. qüvvət üstlü momentlər problemi ilə təbii əlaqə ilə bağlıdır.

Çebişev metodunu təkmilləşdirən A. A. Markov ilk dəfə təsadüfi kəmiyyətlərin «kəsilməsi» (rus. «урезание») anlayışını istifadə etmişdi ki, bu üsulla ixtiyari tərtib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlərlə iş görmək mümkün olur. Sonralar M. m. texniki cəhətdən çox çətin olduğundan xarakteristik funksiyalar metodu kimi geniş şəkildə istifadə olunmadı.

Əd.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М. – Л., 1948, с. 229–39; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.

MOMENTLƏR METODU « МОМЕНТОВ МЕТОД; moments method » riyazi statistikada – ehtimal paylanmaları parametrlərinin *statistik qiymətlərinin* qurulması üçün ümumi metodlardan biridir. M. m.-nin müəllifi K. Pirsondur (K. Pearson). M. m. proseduru belədir: qiymətləndiriləcək parametrlərin sayına bərabər miqdarda seçimi momentlər ümumi çoxluğun uyğun momentlərinə bərabər götürülür; alınan tənliklər sistemi parametrlərə görə həll olunur, alınan həllər tələb olunan statistik qiymətləri ifadə edir. M. m. ilə bağlı hesablamalar, adətən, olduqca sadədir. Olduqca ümumi rəqulyarlıq şərtlərində M. m. ilə təyin olunan statistik qiymətlər asimptotik meylsiz statistik qiymətlərdən və bunlar müvafiq normallaşmadan sonra asimptotik normal paylanma ilə paylanırlar (bax, [1]).

M. m.-nin çatışmayan cəhətləri: 1) M. m. statistik qiymətləri bütün statistik qiymətlər arasında asimptotik effektivlik mənasında ən yaxşı statistik qiymətlər deyildirlər; 2) M. m. statistik qiymətlərinin dəqiqliyini artırmaq mümkün deyildir. M. m.-nin korrekt adlandırılan variantı bu çatışmazlıqları nisbətən aradan qaldırmağa imkan verir (bax, [2]). Statistik qiymətləri təyin etmək üçün seçimi momentlərin sayını bu metodun köməyiylə qiymətləndiriləcək parametrlərin miqdarı ilə müqayisədə artırmaq mümkündür. Müəyyən momentlər problemi olan paylanmalar üçün götürüləcək seçimi momentlərin sayını artırıqda M. m.-nin korrekt variantı *maksimal doğruxaoxşarlıq metodu* olur. M. m.-nin korrekt variantına xas üstünlüklərə malik olan, lakin «xətti strukturlu» M. m.-nin başqa bir fərqli modifikasiyası vardır. M. m.-nin korrekt və modifikasiya olunmuş variantlarının statistik qiymətləri də asimptotik meylsiz statistik qiymətlər olub, normallaşmadan sonra asimptotik normal paylanma ilə paylanırlar.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Коган А. М., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, в. 2, с. 20–42.

MOMENTLƏR PROBLEMİ « МОМЕНТОВ ПРОБЛЕМА; moments problem » – bax, *Moment*.

MOMENTLƏR PROBLEMİ qüvvət üstlü «моментов проблема степенная; power moment problem» – bax, *Qüvvətüstlü momentlər problemi*.

MONOTON ARTAN HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « *монотонно возрастающая последовательность событий; monotone increasing sequence of events* » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

münasibətlərini ödəyən $\{A_n\}$ hadisələr ardıcılığına deyilir; $A_n \subset \Omega$, $n=1, 2, \dots, \Omega$ – stoxastik eksperimentin uyğun elementar hadisələr fəzasıdır. *Monoton artan hadisələr ardıcılığının limiti* vardır və bu limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. a. h. a.-nin yuxarı və aşağı limitləri bərabərdir və

$$A^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_* = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

M. a. h. a. üçün

$$A^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A_* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

münasibəti doğrudur.

Bax, *Təsadüfi hadisələr ardıcılığının yuxarı limiti, Təsadüfi hadisələr ardıcılığının aşağı limiti, Təsadüfi hadisələr ardıcılığının limiti*.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MONOTON AZALAN HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « *монотонно убывающая последовательность событий; monotone decreasing sequence of events* » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$$

münasibətlərini ödəyən $\{A_n\}$ hadisələr ardıcılığına deyilir; $A_n \subset \Omega$, $n=1, 2, \dots, \Omega$ – stoxastik eksperimentin uyğun elementar hadisələr fəzasıdır. *Monoton azalan hadisələr ardıcılığının limiti* vardır və bu limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. a. h. a.-nin yuxarı və aşağı limitləri bərabərdir və

$$A^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_* = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

M. a. h. a. üçün

$$A^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A_* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

münasibəti doğrudur.

Bax, *Təsadüfi hadisələr ardıcılığının aşağı limiti, Təsadüfi hadisələr ardıcılığının yuxarı limiti, Təsadüfi hadisələr ardıcılığının limiti*.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MONOTON ÇOXLUQLAR SİNFİ « МОНОТОННЫЙ КЛАСС МНОЖЕСТВ; monotone class of sets » – elə boş olmayan çoxluqlar sinfidir ki, bu sinfdən olan, ixtiyari daxil olma əməlinə görə monoton (artan və ya azalan) çoxluqlar ardıcılığının limiti də bu sinfdəndir. Müxtəlif mülahizələr və isbatlar prosesində σ – cəbr və σ – halqalarla müqayisədə monoton siniflərlə iş

görmək ehtimal nəzəriyyəsi və ölçü nəzəriyyəsində mühüm təbiiqlərlə təsbit olunmuşdur.

Verilən çoxluqlar cəbrinin σ – cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir, verilən çoxluqlar cəbrinin doğurduğu σ – cəbr bu cəbrin doğurduğu monoton sinif ilə üst-üstə düşür (yəni bu cəbri özündə saxlayan, daxil olma əməlinə görə minimal sinif ilə).

Analoji olaraq, verilən çoxluqlar halqasının eyni zamanda həm də σ – halqa olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir. Verilən halqanın doğurduğu çoxluqlar σ – halqası bu halqanın doğurduğu M. ç. s. ilə üst-üstə düşür. Xüsusi halda, əgər hər hansı M. ç. s. verilən çoxluqlar halqasını özündə saxlayırsa, onda bu sinif verilən halqanın doğurduğu çoxluqlar σ – halqasını da özündə saxlayır.

M. ç. s. anlayışı çoxluqların normal sinfi anlayışı ilə sıx bağlıdır, belə ki, çoxluqların normal sinfi onun elementlərinin azalan ardıcılıqlarının kəsişmələrinə görə və onun elementlərinin dizyunkt ardıcılıqlarının birləşmələrinə görə qapalı sinifdir. Normal siniflər üçün yuxarıda qeyd olunan mülahizələrə analoji mülahizələr vardır. Məs., normal sinif olan ixtiyari çoxluqlar halqası σ – cəbrdir; verilən çoxluqlar cəbrinin doğurduğu normal sinif bu halqanın doğurduğu σ – cəbr ilə üst-üstə düşür və s. Çoxluqların normal sinifləri də ölçü nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərində tez-tez istifadə olunur.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ъ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [4] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

MONOTON DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ

« **монотонное отношение правдоподобия; monotone likelihood ratio** » – doğruyaoxşarlıq nisbətini hər hansı statistikaya nəzərən monotonluğunu ifadə edən, *paylanmalar* ailəsinə xas olan xassədir. $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1\}$ – həqiqi θ parametridən asılı, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən $p(x, \theta)$ sıxlıq funksiyalarına malik paylanmalar ailəsi olsun. Əgər ixtiyari θ və $\theta' > \theta$ qiymətləri üçün P_θ və $P_{\theta'}$ paylanmaları müxtəlif olarsa, elə $T(x)$ funksiyası varsa və $p(x, \theta')/p(x, \theta)$ doğruyaoxşarlıq nisbəti $T(x)$ funksiyasına nəzərən monoton olarsa, $\mathcal{P}$ ailəsi **monoton doğruyaoxşarlıq nisbətinə** malikdir, deyilir.

M. d. n.-nə malik ailələrin mühüm xassəsi – paylanması $P_\theta \in \mathcal{P}$ olan X təsadüfi kəmiyyəti üzərində bir müşahidə nəticəsi x üzrə $H_0: \theta \leq \theta_0$ və $H_1: \theta > \theta_0$ hipotezlərinin müqayisəsi məsələsində müntəzəm ən güclü kriterinin varlığı xassəsidir. Müəyyənlik üçün, doğruyaoxşarlıq nisbətini $T(x)$ -in artan funksiyası olduğunu hesab edərək, isbat olunmuşdur ki, bu məsələdə müntəzəm ən güclü kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } T(x) < C, \\ \gamma, & \text{əgər } T(x) = C, \\ 1, & \text{əgər } T(x) > C \text{ olarsa,} \end{cases} \quad (1)$$

burada mühümlük ölçüsü α -nın verilmiş qiymətində (1)-dəki C və γ sabitləri

$$M_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha \quad (2)$$

şərtindən təyin olunurlar. Bu kriterinin güc funksiyası $\beta(\theta) = M_\theta \varphi(X)$, $\beta(\theta) < 1$ şərti ödənilən bütün θ nöqtələrində artır və ixtiyari $\theta < \theta_0$ qiymətlərində (1) kriterisi [2] münasibətini ödəyən bütün kriterilər arasında $1 - \beta(\theta)$ 1-ci növ səhv ehtimalı minimallaşdırır. Reqlulyarlıq üçün olduqca ümumi şərtlər ödənilərsə, bu nəticənin tərsi də doğrudur (bax, [9], [4]): əgər yuxarıda baxılan paylanmanın birölçülü parametri haqqında H_0 və H_1 hipotezlərinin müqayisəsi məsələsində müntəzəm ən güclü kriteri varsa, onda $\mathcal{P}$ ailəsi M. d. n. xassəsinə malikdir.

M. d. n.-nə malik paylanmalar ailəsinin qeyd olunan xassəsi yalnız birparametrlilik üçün müntəzəm ən güclü kriterilər qurmaq üçün deyil, digər aşağıda göstərilən hallarda da istifadə olunur. Məs., bunlar engelleyici parametrlilik məsələlərində (hipotezlərin müqayisəsi haqqında ilkin məsələ şərti paylanmalara nəzərən məsələyə gətirildikdən sonra) ən güclü oxşar kriterilərin qurulması və ya müntəzəm ən güclü invariant kriterilərin qurulması üçün (maksimal invariantlara keçdikdən sonra) istifadə olunur.

Əgər yuxarıda təsvir edilmiş məsələ statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində iki $\{d_i: H_i\}$ hipotezi qəbul olunur, $i = 0, 1\}$ həlləri və itki funksiyası $l(\theta, d)$ olan məsələ kimi ifadə olunarsa, onda

$$(l(\theta, d_1) - l(\theta, d_0))(\theta - \theta_0) \leq 0$$

münasibəti ödənildikdə (1) şəklində kriterilər ailəsi (müxtəlif C və γ üçün) mahiyyətə tam sinif əmələ gətirir və əgər P_θ paylanmasının daşıyıcısı θ -dan asılı olmazsa, bu sinif minimal sinif olacaqdır. Bu nəticə statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində ümumi nəticəyə görə xüsusi nəticədir: M. d. n. xassəli ailələr üçün (və ya daha ümumi bəzi monotonluq xassələri) monoton prosedurlar mahiyyətə tam sinif təşkil edir; bu nəticə müxtəlif statistik problemlər – qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması, çoxsaylı hipotezlərin müqayisəsi üçün konkret ifadə olunur (bax, [3] – [8]).

M. d. n.-nin xassəsi $\mathcal{P}$ ailəsində olduqca güclü nizamlanma doğurur və paylanmalar ailəsinin stoxastik nizamlanmasının daha zəif xüsusi halıdır, yəni M. d. n. xassəli ailə $T(x) = x$ funksiyasına nəzərən stoxastik nizamlanmış ailədir; ümumi halda tərs müddəə doğru deyildir.

M. d. n. xassəli ailəyə aid misal paylanma sıxlığı

$$p(x, \theta) = c(\theta) h(x) \exp\{Q(\theta)T(x)\}$$

olan birparametrlilik eksponensial paylanmalar ailəsidir, burada $Q(\theta)$, $-\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ parametrinin ciddi monoton funksiyasıdır.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Ш м е т т е р Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [5] F e r g u s o n T. S., Mathematical statistics: a decision theoretic approach, v. 1, N. Y., 1967; [6] K a r l i n S., R u b i n H., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 272–99; [7] B r o w n L., C o h e n A., S t r a w d e r m a n W., «Ann. Math. Statist.», 1976, v. 4, № 4, p. 712–22; [8] R u s h e n d o r f L., «Math. Operationsforsch. und Statist. Sec. Statist.», 1983, Bd 14, № 2, S. 243–50; [9] P f a n z a g l J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1962, Bd 1, № 2, S. 109–15.

MONOTON INVARIANT « монотонный инвариант; monotone invariant » – bax, *Statistik həlledici qaydalar kateqoriyası*.

MONOTON PAYLANMA « монотонное распределение; monotone distribution » – qiymətləri sonlu

$\mathfrak{X}$ fəzasından olan $x_0 \in \mathfrak{X}$ təsadüfi elementinin *paylanmasıdır* ki, onun üçün $x_0 \in \mathfrak{X}$ və *yaxınlıq ölçüsü* ρ vardır ki, $\rho(x, x_0) > \rho(y, x_0)$ münasibətindən ixtiyari $x, y \in \mathfrak{X}$ üçün $P\{X = x\} < P\{X = y\}$ münasibəti alınır. Əgər $\mathfrak{X}$ izotrop fəza olarsa (aşağıya bax), onda X üçün ρ -ya görə *orta kəmiyyət* $M(X, \rho)$ X -in paylanmasının *modası* x_0 ilə üst-üstə düşür; hətta ixtiyari ciddi artan $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(0) = 0$ funksiyası üçün $M(X, f(\rho)) = x_0$ olur. Əgər $\mathfrak{X}$ izotrop fəza olmazsa, onda $M(X, \rho)$ kəmiyyəti x_0 ilə üst-üstə düşməyə bilər (bax, [1]). Əgər ixtiyari $x \in \mathfrak{X}$ üçün $\{\rho(x, y), y \in \mathfrak{X}\}$ ədədlər çoxluğu eyni bir çoxluq olarsa və əgər bu halda hər hansı $x \in \mathfrak{X}$ üçün $\rho(x, y) = t$ bərabərliyi yalnız k sayda $y \in \mathfrak{X}$ elementləri üçün ödənilərsə, onda ixtiyari başqa bir $z \in \mathfrak{X}$ üçün də $\rho(z, y) = t$ bərabərliyi, həmçinin yalnız k sayda $y \in \mathfrak{X}$ elementləri üçün və bütün mənfi olmayan t qiymətlərində ödənilərsə, $\mathfrak{X}$ fəzası *izotrop fəza* adlanır.

M. p. və izotrop fəza anlayışı qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin *statistikasında* geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

MONOTON STRUKTURU, SİSTEMİN « монотонная структура системы; monotone structure of a system » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

MONTE – KARLO METODU « Монте – Карло метод; Monte Carlo method », statistik sınaqlar metodu, – təsadüfi kəmiyyət və təsadüfi funksiyaların paylanma xarakteristikalarının hesablanması məqsədilə onların *statistik modeləşdirilməsidir*. Metodun ən sadə proseduru böyük ədədlər qanununa əsaslanaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi

gözləməsinin qiymətləndirilməsi üçün $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ orta qiymə-

tindən istifadə etməkdir, burada ξ_i -lər ξ -nin modeləşdirilən asılı olmayan realizasiyalardır. Əgər $M\xi^2 < \infty$ olarsa, onda mərkəzi limit teoreminin nəticəsi olaraq N -in olduqca böyük qiymətlərində

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - M\xi \right| < \frac{\gamma \sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$$

münasibəti vahidə yaxın ehtimalla ödənilir, burada γ – etibarlılıq üçün verilən şərtlərlə təyin olunan konstantdır. Digər limit teoremlərindən istifadə olunduqda M. – K. m. üçün digər prosedurlar qurmaq olur.

Təsadüfi kəmiyyətləri və funksiyaları modeləşdirdikdə ilkin olaraq təsadüfi bitlər toplularından istifadə olunur; təsadüfi bitlər – 0 və ya 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Belə xassəli (təxminən) bitlər, EHM-da *təsadüfi kəmiyyətlər vergəci* (rus. датчик) vasitəsilə alınır. Sonra modeləşdirmə alqoritmləri istifadə olunur ki, bu alqoritmlərin keyfiyyəti mühüm əhəmiyyətə malikdir. Alqoritmlərdən ələlərinə üstünlük verilir ki, paylanmanın modeləşdirilmə çətinliklərinin qiyməti

bunlar üçün optimal qiymətə yaxın olsun. M. – K. m.-nin köməyi ilə elm və texnikanın müxtəlif sahələrində istifadə olunan mürəkkəb ehtimal modellərini tədqiq etmək mümkündür; bununla da, bu metodun mühüm olduğu aydın olur. M. – K. m. statistik fizika məsələlərinin həlli, hesablama riyaziyyatı (inteqralların hesablanması, tənliklərin həlli), xidmət sistemlərinin modeləşdirilməsi üçün geniş surətdə tətbiq olunur. M. – K. m.-nin inkişafında bu metodun xətti və qeyri – xətti köçürmə məsələlərinin həlli üçün tətbiqinin mühüm əhəmiyyəti olmuşdur; bununla bağlı olaraq, onun effektivliyinin artırılması üçün müxtəlif üsullar yaranmışdır.

M. – K. m.-ndən $\int f(x) \mu(dx)$ inteqralının μ ehtimal ölçüsünə görə hesablanması üçün bir vasitə kimi onun ən sadə prosedurunun yaxşılaşdırılmasının aşağıdakı qaydalarından istifadə oluna bilər: 1) təsadüfi düyünlərli *kvadratur düsturlardan* istifadə; 2) əgər Radon – Nikodim törəməsi du/dv varsa, doğru fərz olunan

$$\int f(x) \mu(dx) = \int f(x) \frac{d\mu}{dv}(x) v(dx)$$

bərabərliyinə əsaslanan mühüm seçim metodu (ölçünün əvəz olunması); bu isə y_i -lər asılı olmayan və v qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i) \frac{d\mu}{dv}(y_i)$$

statistik qiymətinə gətirir, v -nün uğurlu seçimi isə statistik qiymətin kiçik dispersiyalı olmasına təmin edir; 3) bəzi dəyişənlər üzrə analitik və ya klassik ədədi vasitələrin köməyi ilə inteqrallamanın aparılmasına əsaslanan metodlar; 4) parametrdən asılı olan inteqralların hesablanılmasında asılı sınaqlardan istifadə. Qeyd olunan üsullar əksər hallarda EHM-da «fiktiv» modelin realizasiyasına (ilkin modeldən fərqlənən) gətirir və bunlara imitasion eksperimentin planlaşdırılma metodları kimi baxılır.

Əd.: [1] Соболев И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Марчик Г. И. и др., Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [4] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [5] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984.

M. – K. m. müxtəlif ekstremal məsələlərin həllinin randomlandırılmış alqoritmlərində geniş tətbiq olunur, məs., çoxsaylı dəyişənlər funksiyasının maksimum və ya minimumlarının axtarılmasında, ekstremal xassəli kombinator obyektlər və ya həndəsi konfigurasiyaların qurulmasında. M. – K. m.-nin belə tətbiqinə aid misallar modeləşdirilən soyuma modeli və genetik alqoritmlərdir.

Əd.: [6] Aarts E., Korst J., Simulated annealing and Boltzmann machines (A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing), Chichester, 1989; [7] Fishman G. S., Monte Carlo: concepts, algorithms and applications, B., 1996; [8] Goldberg D. E., Genetic algorithms in search, optimization and machine learning, Addison – Wesley, 1989; [9] van Laarhoven P. J. M., Aarts E. H. L., Simulated annealing: theory and applications, Dordrecht – Boston, 1987; [10] Winkler G., Image analysis, random fields and dynamic Monte Carlo methods (A mathematical introduction), B., 1995; [11] Эволюционные вычисления и генетические алгоритмы. Обзор прикладной и промышленной математики, 1996, т. 3, в. 5; [12] Батищев Д. И., Генетические алгоритмы решения экстремальных задач, Воронеж, 1995.

MONTE – KARLO METODU; alqoritmın zəmanətli dəqiqliyi « **Монте – Карло метод;** гарантируемая точность алгоритма; **Monte Carlo method;** guaranteed accuracy of an algorithm» – ele $\delta_{N,\eta}$ ədədidir ki, onun alqoritmın təsadüfi

Δ xətasından böyük olacağı ehtimalı (modeləşdirilmiş sınaqlar sayı N -dən asılı olaraq) 1-ə yaxın olan hər hansı etibarlılıq həddüdü $(1-\eta)$ -dan kiçik deyildir. Adətən, η -nı 0,01 – 0,05 arasında götürmək məsləhət görülür. M. – K. m. üçün $Mf(\omega) = \int f(\omega)P(d\omega)$ riyazi gözləməsinin asılı olmayan ω_i

sınaqları üzrə $N^{-1}[f(\omega_1) + \dots + f(\omega_N)]$ orta qiymətinə yaxınlaşması haqqında əsas məsələdə xətanın kobud etibarlılıq statistik qiyməti $\delta_{N,\eta} \leq (Df/\eta N)^{1/2}$ şəklində ifadə olunan Çebişev bərabərsizliyindən alınır. N -in olduqca böyük qiymətlərində, η -nın isə çox da kiçik olmayan qiymətlərində mərkəzi limit teoreminə görə asimptotik dəqiq statistik qiymətdən, yeni $\delta_{N,\eta} \approx x_\eta (Df/N)^{1/2}$ qiymətindən istifadə etmək olar. Adətən, $x_\eta = 3$ qiyməti götürülür; bu qiymət $\eta = 0,027$ qiymətinə uyğundur (üç sigma qaydası) və əvvəlcədən naməlum $Df = Mf^2 - (Mf)^2$ dispersiyası isə eksperimental orta qiymətlərə yaxınlaşdırılır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

MONTE – KARLO METODU; elliptik tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение эллиптических уравнений; **Monte Carlo method;** solution of elliptic equations» – bax, *Elliptik tənlik*; Monte–Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; xətti tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение линейных уравнений; **Monte Carlo method;** solution of linear equations» – bax, *Xətti tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; qeyri-xətti tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение нелинейных уравнений; **Monte Carlo method;** solution of non-linear equations» – bax, *Qeyri-xətti tənlik*; Monte–Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; statistik paylanmanın naməlum sıxlığının qiyməti « **Монте – Карло метод;** оценка неизвестной плотности; **Monte Carlo method;** unknown density estimation» – ehtimal paylanmasının naməlum sıxlığını və ya təsadüfi nöqtələrin yerləşmə sıxlığını qiymətləndirmək üçün imitasiya eksperiment nəticələrinin üzərində işlənilməsi və qurulması üçün alqoritmlər toplusudur. Əgər imitasiya eksperimentin nəticələri də təsadüfi nöqtələr olarsa (məs., paylanma sıxlığının tapılması tələb olunan ədədi və ya vektor təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri), bunlar üzərində işlənilmə üçün adi statistik metodlar tətbiq olunur (bax, *Sıxlığı paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət). Tərtibinə görə ele spesifik alqoritmlər daha dəqiq olur ki (bax,

[1]), bunlarda imitasiya olunan təsadüfi hadisə və ya proses ele modifikasiya olunur ki, axtarılan $p(y)$ sıxlığı üçün $p(x) = Mf(\omega, x)$ integral ifadəsi olsun, burada ω – modeləşdirilən təsadüfi hadisə və ya prosesin təsadüfi elementar nəticəsidir. Məs., D oblastında keçid sıxlığı $q(x, y)$ olan Markov eksesslərinin (prosesin verilən andan növbəti ən yaxın bərpə anına qədər qalan müddət) $\{x_0 \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \zeta_v\}$ modelində və mənbənin x_0 nöqtəsindən hasil olunan, D -dən çıxışında udulan hissəciklərin sıxlığını tam udulan ana qədər modeləşdirilmiş $\{x_0, \zeta_{1,j}, \dots, \zeta_{v(j),j}\}$ trayektoriyaları üzrə qiymətləndirmək olur, məs., $\zeta_{k,j}$ nöqtələri üzrə histogram quraraq. Lakin köçürmə (rus. перенос) məsələlərinin statistik modeləşdirmə ilə həllində istifadə olunan

$$p^*(y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{v_j} q(\zeta_{k-1,j}; y)$$

tipli statistik qiymətlər daha məqsəduyğun hesab edilir (bax, *Toqquşmalar metodu*; qiymətləndirilmənin, bax, həm də [2], [3]).

Əd.: [1] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероят. и математич. статистике, Вильнюс, 1962, с. 425–37; [2] Kalos M., «Nuclear Sci. and Eng.», 1963, v. 16, p. 111–17; [3] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

MONTE – KARLO METODU; zəruri işin həcmi « **Монте – Карло метод;** объем необходимой работы; **Monte Carlo method;** required amount of work» – verilən zəmanətli ε dəqiqliyi ilə məsələnin həlli üçün alqoritm və ya EHM işlərində zəruri olan addımların sayıdır. Nəzəri məsələlərdə iş prosesində bir addım – ədədlər üzərində cəbri və ya məntiqi bir əməl, yaxud bitlər üzərində bir unar və ya binar əməl nəzərdə tutulur. Praktikiada kompüter taktlarının sayı əvəzinə sərf olunan maşın vaxtı ölçülür. Maşın vaxtı yalnız analitik metodun analitik realizasiyası keyfiyyətindən deyil, kompüterin xassələrindən də asılıdır. M. – K. m. üçün əsas N sayda asılı olmayan $f(\omega_i)$ müşahidələrinin

ədədi ortası üzrə $Mf = \int f(\omega)P(d\omega)$ riyazi gözləməsinin hesablanması məsələsində N_ε -ya bərabər olan zəruri işin həcmi $\tau Df \varepsilon^{-2}$ kəmiyyətinə mütənəsibdir, burada Df – dispersiya, τ – $f(\omega)$ -nin bir realizasiyasına sərf olunan işdir (hesablama müddəti), ε – M. – K. m.-unda alqoritmın tələb olunan zəmanətli dəqiqliyidir.

Əd.: [1] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в сб.: Методы программирования и решения задач на цифровых вычислительных машинах, Ногинск, 1959, с. 140–47; [2] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (Монте – Карло) и его реализация на цифровых машинах, М., 1961.

MORQAN ƏDƏDLƏRİ « **Моргана числа; Morgan numbers**» – bax, *Kombinator ədədlər*.

MOZAIKA « **мозанка; tessellation / mosaic**» – bax, *Təsadüfi mozaika*.

MÖVSÜM DƏYİŞMƏLƏRİ « **сезонные изменения; seasonal effect**», mövsüm effekti – təsadüfi prosesdə periodik xarakterli sistemə komponent olduğu halda təsadüfi prosesin evolyusiyasının xüsusiyyətidir. Əksər hallarda

M. d. zaman sırası modelinə sırf təsadüfi $X(t)$ və təsadüfi olmayan periodik $g(t)$ komponentinin cəmi kimi daxil olunur:

$$Y(t) = g(t) + X(t).$$

Beləliklə, mövsüm effekti faktiki olaraq periodik trenddir. Lakin ədəbiyyatda trend anlayışı və M. d. anlayışları bir qayda olaraq fərqləndirilir: trend, adətən, uzun müddət ərzində dayanıqlı sistemə dəyişmə və ya, başqa sözlə, aşağı tezlikli sistemə rəqs kimi anlaşılır, M. d. isə trendlə müqayisədə daha yüksək tezlikli sistemə rəqslərdir.

Bezi hallarda, məs., zaman sırasının proqnoz məqsədilə analizi aparıldığı halda $g(t)$ funksiyasının statistik qiymətini qurmaq zəruri olur. Buna görə, adətən, *multiplikativ modelin* qurulması metodikasından istifadə olunur (bax, [1]). Digər hallarda, iqlim effektini qiymətləndirmədən, onu kənarlaşdırmaqla kifayətlənmək yetərli olur, bu məqsədlə *sürüşən ortalar metodundan* istifadə olunur (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Бокс Дж. Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [3] Кендалл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

MÖVSÜM EFEKTI «сезонный эффект; seasonal effect» – bax, *Mövsüm dəyişmələri*.

MÖVSÜM MODELİ / HARRISON MÖVSÜM MODELİ «сезонная модель Харрисона; Harrison seasonal model» – bax, *Harrison mövsüm modeli*.

MUAVR – LAPLAS TEOREMİ «Муавра – Лапласа теорема; de Moivre – Laplace theorem» – ehtimal nəzəriyyəsinin tarixən ilkin *limit teoremlərindən* biridir. S_n – müvəffəqiyyət ehtimalı p -yə bərabər, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, n sayda Bernulli sınaqlarında müvəffəqiyyətlər sayı olsun. Onda

$$P\{S_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad m, n - \text{tam ədəddir,}$$

ehtimalı üçün

$$P\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2} (1 + \alpha_n) \quad (*)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $n \rightarrow \infty$ olduqda $x = (m - np)/\sqrt{npq}$ hər hansı intervala daxil olmaq şərtinə gətirilən bütün m -lər üçün $\alpha_n \rightarrow 0$ müntəzəm olaraq sıfıra yaxınlaşır.

Binomial paylanmanın müntəzəm normal approksimasiyalardan en güclüsü aşağıdakı yaxınlaşma hesab edilir:

$$P\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2} \left[1 + \frac{(q-p)(x^3 - 3x)}{6\sqrt{npq}} \right] + \Delta,$$

burada

$$|\Delta| < \frac{0,15 + 0,25|p-q|}{(npq)^{3/2}} + e^{-3/2\sqrt{npq}},$$

bu şərtlə ki, $npq \geq 25$.

A. Muavr teoremi ümumi şəkildə isbat etmişdir. Binomial paylanmanın normal paylanmaya yaxınlaşması haqqında əsas nəticələr [1]-in beşinci kitabında və «A Method of approximating the

Sum of the Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expended into a Series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of assent which is to be given to Experiments» (1733) əsərində şərh olunmuşdur. Bu əsərin latın originalı, K. Pirsonun [3]-də hesab etdiyinə görə 1733-də «Analitik etüdlər» nüsxələrinə (satılmamış) əlavələr kimi cildləndirilmişdir (bax, [1]) və buna görə də, yalnız bir neçə etüd nüsxələri mövcuddur. Müəllif tərcüməsində əlavənin ingilis variantı bir qədər gec – 1738-də «Şanslar doktrinası» əsərində şərh olunmuşdur (bax, [2]).

P. Laplas Muavr teoremini yenidən isbat etmişdir və aldığı nəticə onun [5] kitabı ilə olduqca məşhurlaşmışdır. M. – L. t.-nin isbatı tarixi daha ətraflı [3], [4], [9] əsərlərində və [8]-ə verilmiş kommentarılarda əks olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, M. – L. t. müddəasına N. Bernulli [10]-də bilavasitə yaxınlaşmışdır. (*) ifadəsi, adətən, Lokal M. – L. t. kimi adlandırılır. Bundan fərqli olan M. – L. t.-nin nəticəsi kimi alınan integral M. – L. t. isə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\sum P\{S_n = m : a < x < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx (1 + \alpha_n).$$

M. – L. t.-nin lokal və integral limit teoremlərinə ayrılması, P. Laplas və A. Muavr tərəfindən edilməmişdir, bu ayrılma sonralar olunmuşdur (bax, [6]).

Əd.: [1] Moivre A. de, Miscellanea analytica seriebus et quadraturis, L. 1730; [2] Moivre A. de, Doctrine of chances, L., 1718, 2 ed., L., 1738; 3 ed., L., 1756; [3] Pearson K., «Biometrika», 1924, v. 16, № 3–4, p. 402–04; [4] Todhunter J., History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace, Camb. – L., 1865; [5] Laplace P. S., Theorie analytique des probabilités, P., 1812; [6] Mises R., «G. Ist. Ital. attuari», 1934, Anno V., № 4, p. 483–95; [7] Uspenskiy J., Introduction to mathematical probability, N. Y. – L., 1937; [8] Бернулли Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986; [9] Шейнин О. Б., К истории предельных теорем Муавра – Лапласа, в кн.: История и методология естественных наук, в. 9, [М.], 1970, с. 199–211; [10] Юшкевич А. П., «Теория вероятности и ее примен.», 1986, т. 31, в. 2, с. 333–52.

MUD KRİTERİSİ «Муда критерий; Mood test» –

$$\sum_{i=1}^m \left[R_i - \frac{1}{2}(m+n+1) \right]^2$$

statistikasına əsaslanan kriteridir, burada R_i – ümumi variasion sırada X_i müşahidələrinin rəngidir, bu variasion sıranın kəsilməz paylanma funksiyaları F və G olan uyğun asılı olmayan iki təkrar – $X_1, \dots, X_m$ və $Y_1, \dots, Y_n$ seçimləri üzrə qurulmuş olduğu fərz olunur. M. k. [2]-də daxil olunmuşdur və bircinslik hipotezi: $F = G$ hipotezinin alternativ – F və G mütləq kəsilməz paylanma funksiyalarıdır və yalnız miqyas parametrlərlə fərqlənirlər – hipotezinə qarşı yoxlanılması üçün kriteridir.

Əd.: [1] Гаяк Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Mood A. M., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, № 3, p. 514–22; [3] Sukhatme B. V., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 1, p. 188–94.

MULTİEKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN PLAN- LAŞDIRILMASI « многоэкстремальных экспери- ментов планирование; design of multiextremal experiments » – multiektremal funksiyaların (yəni bir neçə

lokal ekstremuma malik funksiyaların) hər hansı F sinfindən olan naməlum $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ funksiyasının hesablanması üçün nöqtələrin seçilməsidir; bu həmin funksiyanın global ekstremumunu (ümumiliyi pozmadan – maksimumunu) təqribi hesab-
lamaq və maksimum alınan $x^* = \arg \max_{x \in X} f(x)$ nöqtəsini təyin

etmək məqsədilə edilir. X fəzası kompakt metrik fəzadır, f funksiyası təsadüfi xəta ilə hesablanırsa bilinir (yəni *reqressiya* funksiyası ola bilər).

Qoyulan məsələnin həllinə yanaşmaların təsnifi və təsviri möv-
cuddur (bax, [1] – [3]). $X \subset \mathbb{R}^1$; $X \subset \mathbb{R}^n$, n -in kiçik qiymətlər-
ində M. e. p.-nin effektivliyi alqoritmləri (yəni global optimizasiya
alqoritmləri) vardır, burada n – kiçik ədəd, F – Lipsits şərtini
ödəyən funksiyalar çoxluğudur (məs., separabel funksiyalar
sinfi). M. e. p.-nin müəkkəb məsələlərinin həllində (məs.,
 $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, F funksiyaların olduqca geniş sinfi olduqda)
M. e. p.-nin ehtimal metodları daha geniş yayılmış metodlardır. Bu
metodlar iki əsas sinfə ayrılır (bax, [1]): a) *şaxələr və ehtimal*
sərhədləri metodları, b) *nəsillər*
metodları. a) qrupunun metodları axtarış çoxluğu X -in
 X -də sonlu sayda $x_1, x_2, \dots$ nöqtələrini təsadüfi qaydada
(məs., müntəzəm) seçməklə, Z_i altçoxluqlarına bölgüsünə, yəni

$$X = \bigcup_{i=1}^m Z_i$$

şəklində ifadə olunmasına və Z -də $P(dx)$ paylanmalarına
malik təkrar $\{x_1, \dots, x_N\} = \Xi$ seçimləri üzrə $Z = Z_i$ üçün
 $M_Z = \sup_{x \in Z} f(x)$ kəmiyyətinin qiyməti haqqında statistik nəticə-
lərin irəli sürülməsinə əsaslanır. $\eta_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ çevir-
məsindən sonra Ξ seçimi üzrə M_Z haqqında statistik nəti-
cələrin irəli sürülməsi məsələsi paylanma funksiyası

$$F(t) = \int_{f(x) < t} P(dx)$$

olan təsadüfi kəmiyyətin yuxarı sərhədi – $\text{vrai sup } \eta$ kəmiyyəti-
nin qiyməti haqqında $\{\eta_i\}$, $i = 1, \dots, N$ seçimi üzrə statistik
nəticələrin irəli sürülməsinə gətirilir (bax, *Təsadüfi kəmiyyət*;
sərhədlərin qiymətləndirilməsi).

b) sinfinin metodları ehtimal ölçülərinin ardıcıl modeləşdirilmə-
sindən ibarətdir; bu ölçülər əvvəlki hesablama nəticələrinin istifa-
də olunması əsasında qurulur və global ekstremum nöqtələri ətra-
fında toplanmış ölçüyə yığılır.

Əd.: [1] Жиглявский А. А., Математическая теория гло-
бального случайного поиска, Л., 1985; [2] Жилинская А. Г.,
Глобальная оптимизация, Вильнюс, 1986; [3] Стронгин Р. Г.,
Численные методы в многоэкстремальных задачах, М., 1978.

**MULTİKOLLİNEARLIQ « мультиколлинеарность;
multicollinearity »** – prediktor dəyişənlərinin verilənlər matrisi
 X -in tam rəngi olduğu [yəni $\text{rank}(X) = \min(n, p)$, n , – X

matrisinin sətirləri (müşahidələr) sayı, p – sütunlar (prediktor
dəyişənləri) sayıdır], lakin matrisin sütunları «sanki» asılı olduğu
haldə vəziyyətin təsviri üçün *reqression analiz*də istifadə olunan

anlayışdır. Onda normal tənliklər sisteminin $X^T X$ matrisi cırlaş-
mış matrisə yaxın olur, onun bir və ya bir neçə məxsusi qiymətləri
olduqca kiçik olur və reqressiya tənliyinin əmsallarının ən kiçik
kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymətləri kiçik məxsusi
qiymətlərə uyğun məxsusi vektorlar hesabına olduqca dayanıqsız
olacaqdır. Məs., X matrisinin elementlərində çox da böyük
olmayan xətalər (yuvarlaqlaşdırmada olan xətalər tipli) kəmiy-
yətin mühüm dəyişikliyinə və hətta reqressiya tənliyində əmsal-
ların işarəsinin dəyişməsinə səbəb ola bilər. M.-in müstəsna halı
 X matrisinin rənginin natamam olduğu haldır.

M.-in dərəcəsini ölçən ən yaxşı ölçülərdən biri $X^T X$ matrisinin
şərtləşdirilmə ədədidir, yəni $\delta = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ –
maksimal məxsusi qiymətin minimal məxsusi qiymətə nisbətidir.

Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətlərinə M.-in olduqca
pis təsirinin qarşısını almaq üçün yalvarı reqressiya, baş kompo-
nentlərə reqressiya, addımlı reqressiya və s. yanaşmalardan
istifadə olunur.

Əd.: [1] С е б е р Д. Ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с
англ., М., 1980.

**MULTİMODAL PAYLANMA « мультимодальное
распределение; multimodal distribution »**, *çox xır-
vəli paylanma*, – modalarının sayı iki və ya daha çox olan
ehtimal *paylanmasıdır* və onun ehtimal sıxlığının iki və ya daha
çox lokal maksimum nöqtəsi vardır. Arksinus paylanma M. p.-dir.
M. p. tətbiqdə unimodal paylanmalarla müqayisədə az təsadüf
olunur və adətən, bir neçə unimodal paylanmanın qarışığı kimi
əmələ gəlir.

**MULTİNOMİAL PAYLANMA « мультиномнальное
распределение; multinomial distribution »** – bax,
Polinomial / multinomial paylanma.

**MULTİPLİKATİV ERQODİK TEOREM « мультип-
ликативная эргодическая теорема; multiplicative
ergodic theorem »** – erqodik *stasionar təsadüfi proses-
lərin* realizasiyaları boyunca götürülən təsadüfi matrislərin hasil-
lərinin asimptotikası haqqında müddəadır. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – nöqtə-
ləri sonsuz $\omega = \{\omega_n\}$ ardıcılıqları olan ehtimal fəzası olsun,
 $n \in \mathbb{Z}$, burada bütün ω_n -lər hər hansı I çoxluğunun element-
ləri, T Ω -da ölçünü saxlayan erqodik yerindəyişmə çevir-
məsidir, $A = A(\omega)$ $M(\ln|A|)$ riyazi gözləməsi sonlu, qiymət-
ləri $m \geq 1$ tərtib kvadrat matrislər fəzasından olan təsadüfi
kəmiyyətdir. Onda

$$\Lambda(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} ([A^{(n)}(\omega)] * [A^{(n)}(\omega)]^{1/2n})$$

limiti sanki yəqin vardır (bax, [1], [2]), burada $A^{(n)}(\omega) =$
 $= A(\omega)A(T\omega) \dots A(T^{n-1}\omega)$, $[\cdot]^*$ isə qoşma matrisdir. M. e. t.-
in çoxsaylı tətbiqləri hamar dinamik sistemlər nəzəriyyəsi, təsa-
düfi əmsallı differensial operatorların spektral nəzəriyyəsi, təsa-
düfi mühitlərdə təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsi ilə bağlıdır. Digər
isbatlar [3], [4]-də verilmişdir.

Əd.: [1] О с е л е д е ц В. И., «Тр. Моск. Матем. об-ва», 1968,
т. 19, с. 179–210; [2] М и л л и о н щ и к о в В. М., «Матем. сб.»,
1969, т. 78, № 2, с. 179–202; [3] R a g h u n a t h a n М., «Isr. J.
Math.», 1979, v. 32, p. 356–62; [4] З а х а р е в и ч М. И., «Вестн.
Ленингр. ун-та», 1978, № 7, с. 28–34; [5] K r e n g e l У., Ergodic
theorems, B. – N. Y., 1985.

MULTİPLİKATİV FUNKSIONAL « мультипликативный функционал; multiplicative functional » – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

MULTİPLİKATİV FUNKSİYA « мультипликативная функция; multiplicative function » – bax, *Arifmetik modeləşdirilmə(s)i* təsadüfi proseslərin, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi*.

MULTİPLİKATİV MODEL « мультипликативная модель; multiplicative model » – *təsadüfi proseslərin* mövsüm dəyişmələrini təsvir edən modellərdən biridir. Z_t , $t = 0, \pm 1, \dots$ təsadüfi ardıcılığında S periodlu mövsüm effektinin olduğu fərz olunur. Z_t üçün M. m.

$$\varphi_p(B) \Phi_p(B^S) Z_t = \theta_q(B) \Theta_q(B^S) \varepsilon_t \quad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $BZ_t = Z_{t-1}$, $B^S Z_t = Z_{t-S}$, p, q, P, Q – hər hansı natural ədədlərdir, $\varphi_p(B)$, $\theta_q(B)$, $\Phi_p(B^S)$, $\Theta_q(B^S)$ – uyğun arqumentlərin p, q, P, Q qüvvət üstlü çoxhədliləridir, ε_t – orta qiyməti sıfıra bərabər Qauss bəyaz küyüdür. Əgər t parametrinin bütün dəyişmə oblastı S uzunluqlu mövsüm tsikllərinə bölünərsə, onda Z_t ardıcılığını $\{X_{i,j}\}$ matrisi kimi ifadə etmək olar, $j = 1, \dots, S$, $i = 0, \pm 1, \dots$ bu halda t zaman anlarına $i = [t/S]$, $j = t - Si + 1$ indekslər cütləri uyğun olur. Onda (*) onu ifadə edir ki, hər bir qeyd olunmuş j üçün $X_{i,j}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ardıcılığı matrisin j -ci sütununda *avtoreqressiv – sürüşən orta* (ARSO) prosesidir, yəni

$$\Phi_p(B^S) x_{ij} = \Theta_q(B^S) \alpha_{ij}$$

prosesidir, burada $B^S X_{ij} = X_{i-1,j}$. Bu halda eyni zamanda «tsikl daxilində», yəni hər sətirdə α_{ij} qiymətləri də ARSO – prosesidir:

$$\varphi_p(B) \alpha_{ij} = \theta_q(B) \varepsilon_j.$$

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов, пер. с англ., в. 1, М., 1974.

MULTİVARIANT NÖQTƏVİ PROSES « мультивариантный точечный процесс; multivariate point process » – «hadisələrin» baş vermə anları T_n -lər artan ardıcılıq təşkil edən $(T_n, X_n)_{n \geq 1}$ *nişanlanmış nöqtəvi prosesidir*. M. n. p.-in sıçrayışları ölçüsü μ

$$\mu([0, t] \times \Gamma) = \sum_{n \geq 1} I_{[0, t] \times \Gamma}(T_n, X_n)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada Γ – «nişanlar» faza fəzasında ölçülən çoxluqdur. Martinqal nəzəriyyəsində fərz olunur ki, T_n – hər hansı $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anlarıdır, X_n təsadüfi kəmiyyətləri $\mathcal{A}_{T_n}$ – ölçüləndirilər. M. n. p. üçün geniş fərziyyələrlə sıçrayışları ölçüsünün kompensatoru prosesin paylanması birqiymətli təyin edən xarakteristikadır.

Əd.: [1] Jacod J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 31, H. 3, S. 235–53.

MUR QRUPU « Мура группа; Moore group » – ehtimal kompakt qrupdur ki, onun bütün ayrılmayan ifadələri sonlu ölçülüdürlər.

MUSTAFA TEOREMİ « Мустафы теорема; Mustafa theorem » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

MÜFƏSSƏL SİNİF « исчерпывающий класс; exhausting class » – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası, $\mathcal{A} = \{A_i \in \mathcal{F}, i \in \Lambda\}$ – asılı olmamazlıq xassəsinə malik sinif (yeni k -nin ixtiyari müxtəlif qiymətlərində $i_1, \dots, i_k \in \Lambda$, $k \geq 2$ indeksləri üçün

$$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənilən) verilərsə, elementləri

$$P\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right) = 1 \quad (2)$$

şərtini ödəyən $\mathcal{A}$ sinfinə *müfəssəl sinif* deyilir.

Asılı olmamazlıq xassəsinə ödəyən sinif müfəssəl sinif olmaya bilər (bax, [1], səh. 39–41).

Əd.: [1] Стоянов Й., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

MÜHÜM ELEMENT(i) sistemin « существенный элемент системы; essential element of system » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

MÜHÜM PREDİKTORLARIN SEÇİLMƏSİ « существенных предикторов отбор; screening of significant predictors » – meteoroloji parametrlərin (potensial prediktorların) bütün çoxluğundan prediktanta, yəni havanın gözənilən vəziyyətinin proqnozlanan xarakteristikasına olduqca mühüm dərəcədə təsir edən çox miqdarda olmayan kəmiyyətlərin seçilməsi prosedurudur.

M. p. s. *Hava statistik proqnozları* metodlarının inkişafı üçün vacibdir, belə ki, atmosferin müşahidə olunan xarakteristikalarının – prediktorlar kimi istifadə oluna bilən xarakteristikalarının ümumi sayı olduqca (ölçülməz dərəcədə) çoxdur, müşahidələrdən alınan məlumatlar (verilənlər) isə həmişə kifayət qədər dəqiq olmur. Buna görə də, bütün potensial $X = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$ prediktorlar çoxluğundan hər hansı $X' = \{x'_i, i = 1, \dots, p\}$ altçoxluğu seçilir ki, bu halda, adətən, $p \ll n$ olur və bu altçoxluq öngörmələrin tələb olunan dəqiqliyini təmin edir. Bu məsələnin həllində prediktorların «araşdırılması yolunun» optimal seçilməsi və informativlik kriterisinin əlabatan seçimi mühüm rol oynayır. İnformativlik kriterisi kimi, adətən, proqnozların keyfiyyətlərinin bu və ya digər statistik qiymətləri istifadə olunur (bax, *Proqnozu havanın; keyfiyyətin statistik qiyməti*). «Araşdırılma yolunun» seçilməsində vəziyyət daha çətin olur. n və p -nin böyük qiymətlərində prediktorların tam surətdə araşdırılması olduqca çətin hesablama prosedurudur. Bundan başqa, bu halda dayanıqlı nəticə almaq demək olar ki, mümkün olmur, belə ki, n və p -nin artması ilə əlaqədar (müşahidə verilənlərinin sınaq məqsədilə seçilməsi üçün məhdud sayda götürülməsi ilə əlaqədar) səhv əlaqələrin (yəni olduqca artırılmış) ehtimalı kəskin artır və bununla bağlı seçimi statistik qiymətlərin etibarlı intervalları genişləndir (bax, məs., [1], [2]). Araşdırılma prosedurunun ixtisar olunmasına «addımlı süzgeçləmə» vasitəsilə nail olunur, bu işə

belə bir ferziyyəyə əsaslanan alqoritmle aparılır: q sayda prediktorlardan ibarət optimal çoxluq, $p > q$ olduqda, p – ölçülü optimal çoxluğun altçoxludur. Süzgəcləmə alqoritmləri arasında iki qrup fərqləndirilir: dəyişənlər əlavə etməklə süzəcləmə («irəliyə süzəcləmə») və dəyişənləri xaric etməklə süzəcləmə («geriyə süzəcləmə»). Lakin asılı olmayan seçimdə nəzarət olmadığı halda süzəcləmə metodu da korrelyasiya əmsalının səhvən böyüdülməsinin təsirindən xilas olmağa imkan vermir.

Dəyişənlərin seçilməsinin bu metodları regression və diskriminant analizdə, obrazların aşkar olunması məsələlərində istifadə olunan metodlara analojiqdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Журнал геофизики», 1933, т. 3, в. 1, с. 78–82 (Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 161–67); [2] Яглом А. М., в кн.: Тр. Всесоюзного научного метеорологического совещания, т. 2, Л., 1963, с. 221–34; [3] Груза Г. В., Равькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983.

MÜHÜM SINFI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin «**существенный класс состояний**» цепи Маркова; **essential class / set of states** of a Markov chain» – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MÜHÜM VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin «**существенное состояние**» цепи Маркова; **essential state** of a Markov chain» – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MÜHÜMLÜK KRİTERİSİ «**значимости критерий; significance test**» – $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması haqqında irəli sürülmüş H_0 hipotezində bu təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyaları kimi interpretasiya olunan müşahidələr nəticələri $x_1, \dots, x_n$ -lərin uyğunluğunun yoxlanılması üçün tətbiq olunan *statistik hipotezlərin yoxlanılmasının* əsas metodlarından biridir. M. k. müşahidə olunmuş müəyyən $T = T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ statistikasının qiymətindən asılı olaraq H_0 hipotezini qəbul edir və ya qəbul etmir, bu isə qoyulan məsələnin mahiyyətindən asılı olur. M. k.-ni tətbiq etdikdə, ümumiyyətlə, H_0 hipotezi qəbul olunmadıqda qəbul olunan hər hansı alternativ H_1 hipotezinin olduğu fərz olunur, lakin əgər H_1 alternativ hipotezi verilsə, onda statistik hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi nəzəriyyəsinə əsasən alternativ H_1 hipotezi kriteri gücünün maksimizasiyası prinsipinə uyğun olaraq T statistikasının seçilməsinə təyin edilir.

Adətən, M. k. aşağıdakı kimi tətbiq edilir. H_0 hipotezi əsasında kriterinin $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ statistikası onun paylanmasına görə və əvvəlcədən verilmiş mühümlük ölçüsü α , $0 < \alpha < 0,5$ üzrə seçilir, sonra kriterinin elə t_α kritik qiyməti təyin olunur ki, $P\{T \geq t_\alpha | H_0\} \leq \alpha$ münasibəti ödənilsin. α həddə M. k.-ne uyğun olaraq, əgər $T(x_1, \dots, x_n) \geq t_\alpha$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul edilmir. Əgər $T(x_1, \dots, x_n) < t_\alpha$ olarsa, onda H_0 hipotezinin müşahidələrin nəticələri $x_1, \dots, x_n$ ilə ziddiyyət yaratmadığı hesab olunur, lakin bu o vaxta qədər belə hesab olunur ki, müşahidənin aldığı yeni nəticələr onun digər qərar qəbul etməsinə səbəb olmasın.

656 MÜHÜMLÜK

M i s a l. Sayğac birinci saat ərzində Puasson prosesinin 150 impulsunu, ikinci saat ərzində isə 117 impulsunu qeyd almışdırsa, hesab etmək olarmı ki, vahid zaman ərzində impulsların daxilolma intensivliyi sabitdir (H_0 hipotezi).

Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda müşahidə olunmuş 150 və 117 qiymətlərini naməlum λ parametrlili eyni Puasson qanunu ilə paylanmış asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, aldığı qiymətlər kimi interpretasiya etmək olar. H_0 hipotezində $Y_1 = \sqrt{4\xi_1 + 1} - 2\sqrt{\lambda}$ və $Y_2 = \sqrt{4\xi_2 + 1} - 2\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyətləri asimptotik olaraq $(0, 1)$ parametrləri normal qanuna tabe olduğundan,

$$\xi^2 = [Y_1 - Y_2]^2 / 2 = [\sqrt{4\xi_1 + 1} - \sqrt{4\xi_2 + 1}]^2 / 2$$

statistikası təqribi olaraq, sərbəstlik dərəcəsi sayı 1 olan χ^2 qanunu ilə paylanır, yəni

$$P\{\chi_1^2 > x | H_0\} \approx P\{\chi_1^2 > x\}.$$

χ^2 – paylanma cədvəlləri üzrə $\alpha = 0,05$ mühümlük ölçüsünə uyğun olan $\chi_1^2(0,05) = 3,841$ kritik qiyməti tapılır, yəni

$$P\{\chi_1^2 \geq 3,841\} = 0,05$$

olur.

Daha sonra, müşahidə olunmuş $\xi_1 = 150$ və $\xi_2 = 117$ qiymətləri üzrə kriterinin statistikası ξ^2 -nin

$$\xi^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{4 \cdot 150 + 1} - \sqrt{4 \cdot 117 + 1}]^2 = 4,087$$

qiyməti hesablanır. $\xi^2 = 4,087 > \chi_1^2(0,05) = 3,841$ olduğundan mühümlük ölçüsü $\alpha = 0,05$ olan χ^2 tipli M. k. üzrə intensivliyin sabitliyi haqqında H_0 hipotezi qəbul olunmur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [4] Девятков Б. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1969, т. 14, в. 1, с. 175–78; [5] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to Chi-squared Testing, N. Y., 1996.

MÜHÜMLÜK ÖLÇÜSÜ «**значимости уровень; significance level**» – *statistik hipotezlərin yoxlanılması* məsələsinin standart qoyuluşunda kriterinin ölçüsünü yuxarıdan məhdudlaşdıran müsbət ədəddir (və ya, ekvivalent olaraq, 1-ci növ səhvin ehtimalıdır). M. ö. cədvəllərinin tərtibatında: 0,1; 0,05; 0,01 və s. tipli standart qiymətlərdən biri götürülür. Müşahidələrin verilmiş həcmində M. ö.-nün azalması, kriterinin «həssaslığının» azalması hesabına 1-ci növ səhvin ehtimalının azalmasına səbəb olur (2-ci növ səhvin ehtimalının artmasına). Buna görə də, real məsələlərdə M. ö.-nün seçilməsi 1-ci və 2-ci növ səhvlərin praktiki cəhətdən təsirlərini nəzərə alan məzmunlu mülahizələrə əsaslanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MÜKƏMMƏL ÖLÇÜ « совершенная мера; perfect measure » – B. V. Gnedenko və A. N. Kolmogorov tərəfindən [1]-də daxil olunmuş ölçüdür; «abstrakt ölçü nəzəriyyəsi və metrik fəzalarda ölçü nəzəriyyəsi ilə tam harmoniyanın alınması» məqsədilə daxil olunmuşdur. Bu anlayışın dəyərliyi digər cəhətləri nəzəriyyənin sonrakı inkişafında aydın olmuşdur: bir tərəfdən M. ö. sinfi olduqca genişdir, digər tərəfdən isə M. ö. çərçivəsində mümkün olan bir sıra xoşagəlməz texniki çətinliklər mümkün deyildir.

Ω çoxluğunda ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası və $f^{-1}(E) \subset \mathcal{A}$ münasibətini ödəyən ixtiyari $E \subset \mathbb{R}$ çoxluğu üçün

$$\mu(f^{-1}(E)) = \inf \{ \mu(f^{-1}(G)) : G \supset E, G \in \mathcal{B} \},$$

münasibətini ödəyən, Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ -cəbrində təyin olunmuş sonlu μ ölçüsü **m ü k ə m - m ə l ö l ç ü** adlanır, $\mathcal{B}$ – $\mathbb{R}$ -in açıq altçoxluqlarının sinfidir. μ -nün mükəmməl ölçü olması üçün kifədir ki, Ω -da ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün $\text{ele } B \subset \mathbb{R}$ Borel çoxluğu olsun ki, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(\Omega)$ bərabərliyi və zəruridir ki, Ω -da ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ şərtini ödəyən ixtiyari $E \subset \mathbb{R}$ çoxluğu üçün $\text{ele } B \subset E$ Borel çoxluğu olsun ki, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(B))$ bərabərliyi ödənilsin.

Hər bir diskret ölçü mükəmməl ölçüdür. Bütün açıq çoxluqları özündə saxlayan separabel metrik fəzanın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ -cəbrdə verilmiş ölçü, yalnız və yalnız, ixtiyari ölçülən çoxluğun ölçüsü bu çoxluqdakı kompaktların ölçülərinin yuxarı sərhədi olduqda mükəmməl ölçüdür. Mükəmməl μ ölçüsü $\mathcal{A}$ σ -cəbrinin ixtiyari σ -altcəbrində məhdudlaşdırıldıqda da mükəmməl ölçüdür. Hər bir $S \in \mathcal{A}$ altçoxluğunda $\mu(S) > 0$ şərtini ödəyən μ M. ö. ilə doğrulmuş ölçü mükəmməl ölçüdür. $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasının digər ölçülən fəzaya inikasında μ M. ö.-nün obrazı da M. ö.-dür. Ölçü, yalnız və yalnız, o halda M. ö.-dür ki, onun tamamlayıcısı da M. ö. olsun. Ω çoxluğunun altçoxluqlarının σ -cəbri $\mathcal{A}$ -nın ixtiyari σ -altcəbrində ixtiyari ölçünün M. ö. olması üçün, ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün $f(\Omega)$ çoxluğunun mütəq ölçülən olması (yeni bu çoxluğun $\mathbb{R}$ -də ixtiyari Borel ölçüsünün tamamlayıcısının təyin olunma oblastından olması) zəruri və kifədir. Əgər $\Omega \subset \mathbb{R}$ və $\mathcal{A}$ Ω -nın Borel altçoxluqlarının σ -cəbridirsə, onda $\mathcal{A}$ -da ixtiyari ölçü, yalnız və yalnız, o halda M. ö.-dür ki, Ω mütəq ölçülən çoxluq olsun.

M. ö.-lü hər hansı $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ele fəza olarsa ki, $\mathcal{A}$ Ω -nın nöqtələrini ayıran, hesabı sayda onu təşkil edən $\{\mathcal{A}_i\}$ -lərə malik olsun (yeni ixtiyari $x \neq y$, $x, y \in \Omega$ üçün $\text{ele } i : x \in \mathcal{A}_i, y \notin \mathcal{A}_i$ və ya $x \notin \mathcal{A}_i, y \in \mathcal{A}_i$ tapılar ki, i indeksli $\{\mathcal{A}_i\}$ -lər Ω -nın nöqtələrini ayırsın və bunlar hesabı sayda olsun), onda bu fəza hər hansı $(L, \mathcal{B}, \lambda)$ fəzasına sanki izomorfdur $(L, \mathcal{B}, \lambda)$ fəzası sonlu parçada Lebeq ölçüsü və müsbət kütləli nöqtələrin hesabını aşmayan ardıcılığı ilə təşkil olunmuşdur [$N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$ olan ele çoxluq və L -də ele qarşılıqlı birqiymətli $\varphi : \Omega \setminus N$ vardır ki, φ və φ^{-1} ölçüləndirir və $\lambda = \mu\varphi^{-1}$].

I – indekslerin ixtiyari çoxluğu olsun və hər bir $i \in I$ indeksinə M. ö.-yə malik $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ fəzası uyğun olsun; $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$,

$\mathcal{F}$ isə $\{x \in \Omega : x_i \in A_i \in \mathcal{A}_i\}$ tipli çoxluqlar sinfinin doğurduğu cəbr olsun. Əgər $\mathcal{F}$ -də ele sonlu – additiv μ' ölçüsü verilərsə ki, ixtiyari $i \in I$ və $A_i \in \mathcal{A}_i$ üçün $\mu'(\{x \in \Omega : x_i \in A_i\}) = \mu_i(A_i)$ bərabərliyi ödənilsin, onda: 1) μ' $\mathcal{F}$ -də hesabı – additiv ölçüdür, 2) μ' ölçüsünün $\mathcal{F}$ cəbrinin doğurduğu $\mathcal{A}$ σ -cəbrinə davamı μ müntəzəm ölçüdür.

$\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ – mükəmməl P ölçülü fəza, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ $\mathcal{A}$ σ -cəbrinin iki σ -altcəbri olsun; belə ki, $\mathcal{A}_1$ hesabı sayda doğuruculara malikdir. Onda $\mathcal{A}_1$ -də $\mathcal{A}_2$ şərtinə nəzərən ele rəqulyar şərti ehtimal vardır ki, yeni $\Omega \times \mathcal{A}_1$ -də ele $p(\cdot, \cdot)$ funksiyası vardır ki: 1) x qeyd olunduqda $p(x, \cdot)$ $\mathcal{A}_1$ -də ehtimal ölçüsüdür, 2) E qeyd olunduqda $p(\cdot, E)$ $\mathcal{A}_2$ -yə nəzərən ölçüləndir, 3) bütün $E \in \mathcal{A}_1$ və $F \in \mathcal{A}_2$ üçün $\int_F p(x, E) P(dx) = P(E \cap F)$ bərabərliyi doğrudur. Bundan başqa, $p(\cdot, \cdot)$ funksiyasını ele seçmək olar ki, $p(x, \cdot)$ ölçüləri müntəzəm ölçü olsunlar. $(\Omega, \mathcal{A}), (S, \mathcal{F})$ – iki ölçülən fəza olsun və $q(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathcal{F}$ fəzasında keçid ehtimalı olsun, yeni $q(\cdot, E)$ $\mathcal{A}$ -ya nəzərən ölçülən funksiyadır və ixtiyari $x \in \Omega$, $E \in \mathcal{F}$ üçün $q(x, \cdot)$ $\mathcal{F}$ -də ehtimal ölçüsüdür. Əgər $q(x, \cdot)$ diskret olarsa, P isə $\mathcal{A}$ -da mükəmməl ehtimal ölçüsü olarsa, onda $\int q(x, \cdot) P(dx)$ M. ö.-dür.

M. ö.-lər kompakt ölçülərlə sıx bağlıdır. Əgər $K_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots, \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ münasibəti hər hansı n üçün

$\bigcap_{i=1}^n K_i = \emptyset$ hadisəsini doğurarsa, onda altçoxluqlar sinfi $\mathcal{K}$ kompakt sinif adlanır. Əgər ele $\mathcal{K}$ kompakt sinfi varsa ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $E \in \mathcal{A}$ üçün $K \in \mathcal{K}$ və $E_1 \in \mathcal{A}$ çoxluqlarını ele seçmək mümkün olsun ki, $E_1 \subset K \subset E$ və $\mu(E \setminus E_1) < \varepsilon$ şərtləri ödənilsin, onda $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında sonlu μ ölçüsü kompakt ölçü adlanır. Hər bir kompakt ölçü M. ö.-dür. Ölçünün mükəmməl ölçü olması üçün zəruri və kifədir ki, bu ölçü hesabı sayda doğuruculan olan ixtiyari σ -altcəbrdə məhdudlaşdırıldıqda kompakt ölçü olsun.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Marczewski E., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 113–24; [3] Ryll-Nardzewski C., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 125–30; [4] Сазонов В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 391–414; [5] Ramachandran D., Perfect measures, pt 1 – Basic theory, pt 2 – Special topics, Delhi, 1979.

MÜNTƏZƏM APPROKSİMASIYASI, SEMİMAR-TİNQALIN « равномерная аппроксимация семимартингала; **uniform approximation of semimartingale** » – bax, *Stoxastik differensial tənlik Stratonoviç formasında; kükrəntilərə nəzərən dayanıqlılıq.*

MÜNTƏZƏM ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « равномерно наиболее мощный критерий; **uniformly most powerful test** » – mürekkəb H_1 alternativ hipotezinə qarşı H_0 mürekkəb hipotezinin yoxlanılması üçün mühümlük ölçüsü verilmiş statistik kriteridir; H_1 hipotezinin gücü H_1 -ə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan, eyni mühümlük ölçüsünə malik ixtiyari statistik kriterinin gücündən kiçik deyildir.

$H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ mürekkəb hipotezinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ mürekkəb hipotezinin yoxlanıldığı fərz olunur; yoxlanılan H_0 hipotezi əslində doğru olduğuna baxmayaraq, statistik kriteriyə əsaslanaraq onu qəbul etmədikdə 1-ci növ səhvin ehtimalının yuxarı sərhədi α -nın, $0 < \alpha < 1$ verildiyi fərz olunur (α ədədi kriterinin mühümlük ölçüsü, kriterinin özü isə α həddüdlü kriteri adlanır). 1-ci növ səhv ehtimalı üzərinə qoyulan məhdudiyyət H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan bütün statistik kriterilər sinfinə qədar olur. Statistik kriterinin $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ güc funksiyası terminləri mühümlük ölçüsü α -nın qeyd olunması onu ifadə edir ki, $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$ yuxarı

sərhədi vardır. Əgər H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan α həddüdlü bütün statistik kriterilər sinfində eləsi varsa ki, onun güc funksiyası $\beta^*(\theta)$

$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta^*(\theta) = \alpha$, $\beta^*(\theta) \geq \beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ şərtini ödəyir, onda

bu kriteri H_1 -ə qarşı H_0 -ın yoxlanılması üçün α həddüdlü müntəzəm ən güclü kriteri adlanır, burada $\beta(\theta)$ – qeyd olunan sinfdən ixtiyari başqa bir kriterinin güc funksiyasıdır. Əgər kriterilərin müqayisəsi kriterilərin gücü terminləri apanlırsa, M. ə. g. k. ən yaxşı kriteri sayılır. α ədədi bu kriterinin ölçüsü adlanır.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

MÜNTƏZƏM FAKTOR EKSPERİMENT « равномерно факторный эксперимент; **uniform factorial experiment** » – bax, *Фактор эксперимент.*

MÜNTƏZƏM İNTEQRALLANAN FUNKSIYA « равномерно интегрируемая функция; **uniformly integrable function** » – bax, *Мüntəzəm inteqrallananlıq.*

MÜNTƏZƏM İNTEQRALLANANLIQ « равномерно интегрируемость; **uniform integrability** » – *tesadüfi kəmiyyətlər ailəsinin aşağıdakı kimi təyin olunan xassəsidir. $\{X_t, t \in T\}$ – eyni $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş tesadüfi kəmiyyətlər ailəsi olsun.*

Əgər

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{|X_t| > c} |X_t| dP = 0$$

olarsa, $\{X_t, t \in T\}$ müntəzəm inteqrallanan tesadüfi kəmiyyətlər ailəsi adlanır.

Müntəzəm inteqrallananlıq kriterisi. Fərz olunur ki, eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş tesadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $\{X_n\}_{n \geq 1}$ X tesadüfi kəmiyyətinə sanki hər yerdə yığılır və $M|X_n| < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Aşağıdakı üç şərt ekvivalentdir:

1) $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ardıcılığı müntəzəm inteqrallandır;

2) $M|X_n| < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M|X_n - X| = 0$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} M|X_n| = M|X|$.

Bu müddəaların hər birindən aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M X_n = M X.$$

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

MÜNTƏZƏM KƏSİLMƏZ SEMİ – QURUP « равномерно непрерывная полугруппа; **even-continuous semi-group** » – bax, *Semi – grup.*

MÜNTƏZƏM KVADRATİK METRİKA « равномерно квадратичная метрика; **uniformly quadratic metric** » – *sadə ehtimal metrikasıdır, X, Y həqiqi tesadüfi kəmiyyətlər olduqda*

$$\rho_*^2(X, Y) =$$

$$= \sup_{r > 0} \frac{1}{2r} \int [\mathbf{P}\{|X - x| \leq r/2\} - \mathbf{P}\{|Y - x| \leq r/2\}]^2 dx$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. M. k. m. X, Y tesadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyaları f_X, f_Y terminləri ilə aşkar şəkildə ifadə olunur:

$$\rho_*^2 = \sup_{r > 0} \frac{1}{2r} \int \left(\frac{\sin rt}{rt} \right)^2 |f_X(t) - f_Y(t)|^2 dt.$$

Bu xassə xüsusi bir cəhəti ifadə edir, belə ki, M. k. m. ρ müntəzəm metrikasına ekvivalentdir (o mənada ki, M. k. m.-da yığılma ρ müntəzəm metrikasında yığılmanı doğurur və əksinə).

M. k. m. və ρ bir-birilə $\rho_*^2 \leq 2\rho$ bərabərsizliyi ilə əlaqəlidir.

Lakin sıfırdan fərqli və $\psi(\rho) \leq \rho_*$ bərabərsizliyini ödəyən $\psi(\rho)$ funksiyası mövcud deyildir.

M. k. m. xətti invariantlıq xassəsinə malikdir: ixtiyari $a \in \mathbb{R}^1$, $b > 0$ və ixtiyari X, Y tesadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\rho_*(bX + a, bY + a) = \rho_*(X, Y).$$

M. k. m.-nin tərifi sonluölçülü tesadüfi kəmiyyətlər fəzası halı üçün də təyin oluna bilər.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

MÜNTƏZƏM METRİKA « равномерная метрика; uniform metric », Kolmoqorov metriki, – ehtimal metrikalarından ən qədimi və ən çox istifadə olunanlardan biridir. Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\rho(X, Y) = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)|$$

berabərliyi ilə təyin olunan M. m.-nin unikal xassələrindən statistikada ilk dəfə uğurla A. N. Kolmoqorov istifadə etməsinə baxmayaraq, rus ədəbiyyatında da «Kolmoqorov metriki» termini nadir hallarda istifadə olunur, burada F_X – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Bu xassələr aşağıdakılardır:

1) $\mathbb{R}^1$ -də ixtiyari kəsilməz və ciddi monoton $G(x)$ funksiyası üçün $\rho(G(X), G(Y)) = \rho(X, Y)$;

2) $\mathbb{R}^1$ -də bütün diskret paylanmaların çoxluğu $\mathbb{R}^1$ -də bütün paylanmalar çoxluğunda sıxdır (müntəzəm yığılma mənasında).

Berri – Esseen bərabərsizliyi xarakteristik funksiyalar terminlərində M. m.-nin yuxarı sərhədini təyin edir.

Çoxölçülü X təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları P_X üçün M. m.-nin müxtəlif analoqları mövcuddur. Bunlar, adətən,

$$\rho(X, Y; \mathfrak{A}) = \sup \{ |P_X(A) - P_Y(A)| : A \in \mathfrak{A} \}$$

strukturlu olur, burada $\mathfrak{A}$ – Borel çoxluqlarının hər hansı bir sistemidir. İndiyə qədər ən çox istifadə olunan sistemlər bu və ya digər kürelər sistemi, bütün qabanq çoxluqlar sistemi və Borel çoxluqları sistemi olmuşdur. Sonuncu halda *tam variasiya metriki* alınır.

MÜNTƏZƏM OPTİMAL PLAN « равномерно оптимальный план; uniformly optimal design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

MÜNTƏZƏM OPTİMAL STRATEGİYA « равномерно оптимальная стратегия; uniformly optimal strategy / policy » – bax, *Oyunu, iki şəxsin, idarə olunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

MÜNTƏZƏM PAYLANMA « равномерное распределение; uniform distribution » – «bərabər imkanlı nəticələr» ideyasının kəsilməzlik halı üçün yaranan ehtimal paylanmaları sinfinin ümumi adıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində M. p. normal paylanma kimi bəzi məsələlərdə dəqiq paylanma kimi, bəzilərində isə limit paylanması kimi alınır.

Ədəd oxunun $[a, b]$ parçasında M. p. (düzbucaqlı paylanma) – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

münasibətilə verilən kəsilməz ehtimal paylanmasıdır. M. p.-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası, uyğun olaraq, $(b+a)/2$ və $(b-a)^2/12$ ədədlərinə bərabərdir. M. p.-nin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ (x-a)/(b-a), & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

münasibətilə, xarakteristik funksiyası isə

$$f(x) = \frac{1}{i(b-a)} (e^{itb} - e^{ita})$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. p. *Pirson paylanmaları* sisteminə tip II-nin xüsusi halıdır.

$[0, 1]$ parçasında M. p.-ya malik təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı kimi qurmaq olar. $1/2$ ehtimalı ilə 0 və 1 qiymətlərini alan asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığı və

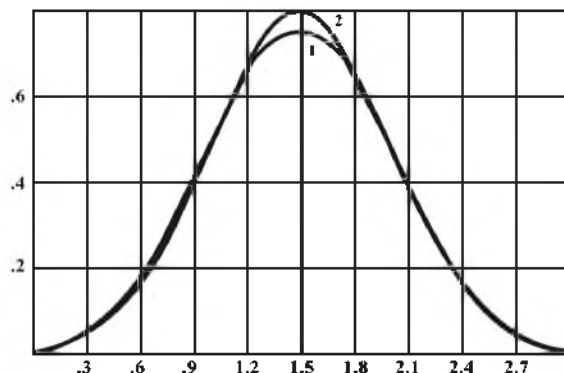
$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$$

götürülür (X_n – X -in ikilik ayrılışında rəqəmlərdir). X təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ parçasında M. p. qanununa tabedir. Bu faktın mühüm statistik tətbiqləri vardır (bax, məs., *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər*). $[a, b]$ -də M. p. anlayışı bu parçada nöqtənin təsadüfi seçilməsinin ixtiyari qaydada aparılması ilə eləqədar yaranır.

Əgər X_1 və X_2 asılı olmayan, $[0, 1]$ -də M. p. qanununa tabe təsadüfi kəmiyyətlərsə, onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $X_1 + X_2$ təsadüfi kəmiyyəti $x \in [0, 2]$ üçün paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_2(x) = 1 - |1 - x|$ olan $[0, 2]$ parçasında üçbucaq (Simpson) paylanmasına malikdir. $[0, 1]$ -də M. p.-ya malik üç asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanması sıxlıq funksiyası

$$p_3(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x < 1, \\ (x^2 - 3(x-1)^2)/2, & 1 \leq x < 2, \\ (x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2)/2, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

münasibətilə verilən $[0, 3]$ parçasında paylanmadır (bax, şəkil).



Paylanmanın sıxlıq funksiyalarının qrafikləri: (1) $p_3(x)$ – müntəzəm paylanmanın üçqat kompozisiyası; (2) riyazi gözləməsi $\alpha = 1.5$

və dispersiyası $\sigma^2 = 1/4$ olan normal paylanma.

Ümumi halda asılı olmayan, $[0, 1]$ -də M. p. qanununa tabe $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $X_1 + \dots + X_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x-k)_+^{n-1}, \quad 0 \leq x \leq n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $z_+ = \begin{cases} z, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$ $n/2$ riyazi

gözləməsi və $\sqrt{n/12}$ kvadratik orta yayınması ilə normalanmış $X_1 + \dots + X_n$ cəminin paylanması n -in artması ilə 0 və 1 parametrləri normal paylanmaya sürətlə yaxınlaşır ($n=3$ olduqda yaxınlaşma bir çox praktik məqsədlər üçün kafi sayılır).

Statistik təbiiqlərdə verilmiş $F(x)$ paylanma funksiyası olan təsadüfi kəmiyyətin qurulması aşağıdakı fakta əsaslanır. Y təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ -də müntəzəm qanunla paylanmışdır və $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməzdir və ciddi artandır. Onda $X = F^{-1}(Y)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ -dir, ümumi halda, X -in təyin olunmasında $F^{-1}(y)$ funksiyasını onun analoqu –

$$G(y) = \inf_x \{x : F(x) \leq y \leq F(x+0)\}$$

funksiyası ilə əvəz etmək lazımdır.

M. p. parçada limit paylanması kimi. Aşağıda $[0, 1]$ parçasında M. p.-nin limit paylanması kimi yaranmasına aid tipik misallar şərh olunur (bax, həmçinin *Puasson cəmləmə düsturu*).

1) $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – eyni kəsilməz paylanma funksiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin modul 1 üzrə cəmi S_n -in paylanması, yeni başqa sözlə, S_n cəminin kəsi hissəsi $\{S_n\}$ -in paylanması $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmaya yığılır.

2) α və β parametrlərinin mütləq kəsilməz birgə paylanmaya malik olduqları fərz olunur; onda $t \rightarrow \infty$ olduqda $\{\alpha t + \beta\}$ -nin paylanması $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmaya yığılır.

3) M. p. natural n arqumentinin bezi $g(n)$ funksiyalarının kəsi hissələrinin limit paylanması kimi təsadüf olunur. Məs., α irrasional olduqda $1 \leq m \leq n$ şərtlə təyin olunan m -lərin $0 \leq a \leq \{n\alpha\} \leq b \leq 1$ münasibəti ödənilən n -lərdən hissələri $n \rightarrow \infty$ olduqda $b - a$ -ya yaxınlaşır.

$\mathbb{R}^k$ -nin alt çoxluqlarında M. p. Düzbucaqlıda M. p.-ya aid misal *Byuffon məsələsində* artıq şərh olunmuşdur (bax, *Həndəsi ehtimallar, Stoxastik həndəsə*). $\mathbb{R}^k$ fəzasında hər hansı məhdud D çoxluğunda M. p. paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x_1, \dots, x_n) = C \neq 0$ olan paylanma kimi təyin olunur, burada C , $-D$ çoxluğunun k – ölçülü həcminə tərs kəmiyyətdir.

Seth üzərində də M. p.-lərə baxılır. Məs., «təsadüfi istiqamət» (məs., $\mathbb{R}^3$ -də) koordinat başlanğıcından vahid radiuslu kürə səthinin ixtiyari nöqtəsinə istiqamətlənən vektorla təyin olunur, bu nöqtənin müntəzəm qanunla paylanması nöqtənin fəzanın hər hansı bir hissəsinə düşüyü səthin sahəsi bu hissənin sahəsinə mütənəsis olması kimi anlaşılar.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

660 MÜNTƏZƏM

MÜNTƏZƏM SONSUZ KİÇİLƏNLİK ŞƏRTİ «равномерной бесконечной малости условие; uniform infinitesimality condition» – bax, *Sonsuz kiçilənlik şərti*.

MÜNTƏZƏM SPEYSİNG «равномерный спейсинг; uniform spasing» – bax, *Seçimi bloklar*.

MÜNTƏZƏM TUTARLI QIYMƏTLƏNDİRMƏ «равномерно состоятельное оценивание; uniformly consistent estimation» – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə*.

MÜNTƏZƏM YIĞILMASI(sı) empirik paylanmaların «равномерная сходимость эмпирических распределений; uniform convergence of empirical distributions» – $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} |P_n(A) - P(A)| \rightarrow 0 \quad \text{sanki yəqin} \quad (1)$$

tipli müddədir, burada P_n , $-P$ paylanması ilə n – ölçülü seçimin əsasında qurulmuş empirik paylanma, $\mathcal{B}$ – ixtiyari ölçülən $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzasının ölçülən alt çoxluqlarının hər hansı alt sinfidir. Ümumi halda (1)-dəki supremum təsadüfi kəmiyyət olmaya da bilər. Əgər $\mathcal{B}$ sonlu sayda alt çoxluqlardan ibarət olarsa, onda $\mathcal{B}$ sinfi üzrə empirik paylanmaların M. y.-sı *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunundan* alınır.

Əgər

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$$

olarsa, onda (1) münasibəti Qlivenko – Kantelli teoreminin müddəasını ifadə edir.

İxtiyari ölçülən $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzalannda empirik paylanmaların M. y.-nı $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ sinfinin entropik xarakteristikaları vasitəsilə ifadə etmək rahat olur. $H_1(\varepsilon, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ – aşağıdakı şərtləri ödəyən $A_i \in \mathcal{A}$ alt çoxluqlarının minimal sayının loqarifmi olsun: ixtiyari $B \in \mathcal{B}$ üçün elə A_1, A_2 vardır ki, $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$, $\mathbf{P}\{A_2 \setminus A_1\} \leq \varepsilon$. Əgər bütün $\varepsilon > 0$ üçün $H_1(\varepsilon, \mathcal{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olarsa, onda (1) münasibəti ödənilir (bax, [1]). $\mathbf{P}$ ixtiyari olduqda $H_1(\varepsilon, \mathcal{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olan $\mathcal{B}$ siniflərinə k – ölçülü kürələr çoxluqları, koordinat müstəvilərinə paralel üzvləri, k – ölçülü paralelepipedləri misal göstərmək olar.

Əgər $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^k$ -nin bütün qapalı alt çoxluqlarının sinfidirsə, $k \geq 2$, $\mathbf{P}$ – sıxlığı məhdud olan mütləq kəsilməz paylanmadırsa, onda $H_1(\varepsilon, \mathcal{B}, \mathbf{P}) < \infty$. Əgər $\mathbf{P}$ $\mathbb{R}^k$ -də kürə üzərində kəsilməz paylanma olarsa, onda belə $\mathcal{B}$ üçün (1) ödənilir. Əgər $\mathbf{P}$ $\mathcal{X}$ -də ixtiyari diskret paylanma olarsa, onda ixtiyari $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ üçün $H_1(\varepsilon, \mathcal{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olur.

Ölçülənliyin müəyyən şərtlərində (1)-in ödənilməsi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{M} \ln \Delta_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (2)$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $\{X_i\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ($\mathbf{P}$ X_1 -in paylanmasıdır), $\Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\} \cap B$, $B \in \mathcal{B}$ tipli müxtəlif alt çoxluqların sayıdır (bax, [2]). İxtiyari $\mathbf{P}$ üçün *Vapnik – Çervonenkis sinfi* $\mathcal{B}$ (2) münasibətini ödəyir (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Dehardt J., «Ann Math. Statist.», 1971, v. 42, p. 2050–55; [2] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 2, с. 264–79; [3] Dudley R. M., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1097, p. 1–142.

MÜNTƏZƏM YİĞİLMƏ (s) paylanmaların « равномерная сходимость распределений; uniform convergence of distributions » – F_n paylanma funksiyalarının F paylanma funksiyasına $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\rho(F_n, F) \rightarrow 0$$

münasibətilə təyin olunan *yığılmasıdır*, burada ρ *müntəzəm metrikadır*. ρ metriyasında yığılma *tam variasiya metriyasında* yığılma, bəzən, güclü yığılma adlandırılır. F kəsilməz olduğu halda M. y. *zəif yığılmaya* ekvivalentdir.

MÜRƏKKƏB HİPOTEZ « сложная гипотеза; composite hypothesis » – bax, *Statistik hipotez, Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

MÜRƏKKƏB MARKOV ZƏNCİRİ « сложная цепь Маркова; high-order (composite) Markov chain » – diskret zamanlı eht. $\{\zeta(t)\}$ *təsadüfi prosesidir* ki, t anına qədərki bütün anlarda prosesin trayektoriyalarının qiymətlərinin məlum olması şərtinə nəzərən $\zeta(t)$ -nin şərti ehtimalı, $\zeta(t-1)$, $\zeta(t-2)$, ..., $\zeta(t-s)$ məlum qiymətlərində $\zeta(t)$ -nin şərti ehtimalı ilə üst-üstə düşür, burada s – qeyd olunmuş natural ədəddir. Məs., mətndə hərflərin bir-birini əvəz etməsi M. M. z. ilə yaxşı təsvir olunur, bu şərtlə ki, $s=1$ halı deyil, $s=2$, $s=3$ olsun. $s=1$ olduqda, M. M. z. adi *Markov zəncirinə* çevrilir. M. M. z.-nin Markov zəncirinə çevrilməsi faza fəzasının mürəkkəbləşdirilməsi hesabına olur: əgər $\zeta^*(t) = \{\zeta(t), \zeta(t+1), \dots, \zeta(t+s-1)\}$ götürülsə, $\{\zeta^*(t)\}$ ardıcılığı Markov zənciri əmələ gətirir.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) kodlama və dekodlamanın « сложность кодирования и декодирования; coding and decoding complexity » – *kodlama və dekodlamayı* reallaşdıran alqoritm və qurğuların mürəkkəbliyinin müxtəlif kəmiyyət xarakterizasiyalarının ümumi adıdır. Kodlama və dekodlamanın vahid universal ölçüsü mövcud deyildir, çünki, kodlama və dekodlama metodlarını praktik olaraq ən müxtəlif qaydalarla: universal və ya xüsusi EHM-da, funksional elementlərdən ibarət sxemlərdə və s. reallaşdırmaq olar. Praktik vəziyyətdən asılı olaraq mürəkkəblilik ölçüsü kimi: əməliyyatların sayı, yaddaşı tələb olunan tutumu, işləmə müddəti, proqramın uzunluğu (universal EHM-da realizasiyada), elementar məntiqi elementlərin sayı, onlar arasındakı əlaqələrin sayı (xüsusi EHM-nin qurulmasında) kəmiyyətlərini götürmək olar. Kodlama və dekodlamaya xüsusi alqoritmlər sinfi kimi baxaraq ümumi alqoritmlər nəzəriyyəsi baxımından onların mürəkkəbliyini araşdırmaq olar.

Nəzəri cəhətdən n uzunluqlu blok kodlarının kodlama və dekodlaması M.-nin n -in böyük qiymətlərində asimptotikası daha maraqlıdır. Aydın olmuşdur ki, bu asimptotik nəticə istifadə olunan mürəkkəblilik ölçüsündən asılı deyildir. İsbat olunmuşdur ki (bax, [2]), ötürmə sürəti sıfırdan fərqli, kodlama və dekodlama M. n -ə görə polinomial artan, səhvlərin xətti (n üzrə) sayını düzəltməyi təmin edən böyük n uzunluqlu ikilik xətti kodlar mövcuddur. [3]-də R. Gallagerin daxil etdiyi az sıxlıqlı kodlar $n \log n$ tərtib kodlama və dekodlama M.-də səhvlərin xətti sayını düzəltməyə imkan verir.

Əd.: [1] Бассалыго Л. А., Зяблов В. В., Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1977, т. 13, № 3, с. 5–17; [2] Зяблов В. В., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 1, с. 5–13; [3] Галлагер Р., Коды с малой плотностью проверок на четность, пер. с англ., М., 1966.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) paylanmanın modelləşdirilməsinin; statistik qiymət « сложность моделирования распределения; оценка; complexity of non-uniform random number generation; evaluation of » – $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri və ya psevdotəsadüfi ədədləri modelləşdirilən qanunla paylanan nöqtələrə çevirən alqoritmə sərf olunan zamanın (orta qiymətinin) və ya ritmin uzunluğunun qiymətidir (bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların, Monte – Karlo metodu; zəruri işin həcmi, Planlaşdırılması, imitasion eksperimentin*). [1]-də paylanmanın modelləşdirilməsinin M. $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətin bitlərinin – verilən təsadüfi kəmiyyətin k sayda ilk bitlərinin hesablanması üçün zəruri bitlərin orta sayı kimi təyin olunur. [1] mənasında optimal alqoritm $(k+2)$ -dən artıq bit istifadə etmir.

Əd.: [1] Кунт Д., Яо Э., «Кибернетич. сб.» 1983, в. 19, с. 97–158.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) sonlu obyektlərin « сложность конечных объектов; algorithmic / Kolmogorov complexity of finite objects » – bax, *Alqoritmik entropiya*.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) sözün « сложность слова; algorithmic / Kolmogorov complexity a word » – bax, *Alqoritmik entropiya*.

MÜSBƏT MÜƏYYƏN FUNKSİYA « положительная / неотрицательная определенная функция; positive semi – definite / nonnegative definite function », müsbət müəyyən nüvə, – eht. $k: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ (Λ – boş olmayan çoxluqdur) inikasıdır ki, hər bir natural k ədədi, ixtiyari $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_i \in \Lambda$ toplusu və $c_1, \dots, c_n$ kompleks ədədlərinin ixtiyari toplusu üçün

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j k(\lambda_i, \lambda_j) \geq 0$$

bərabərsizliyi doğrudur. M. m. f. həmçinin müsbət tipli funksiya, müsbət tipli nüvə, qeyri-mənfi müəyyən funksiya, Hermit müsbət funksiyası kimi də adlandırılır.

Əgər $X(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ 2-ci tərtib təsadüfi funksiyadırsa, onda

$$k(s, t) = \mathbf{M} X(s) \overline{X(t)}, \quad s, t \in \Lambda, \quad (*)$$

M. m. f.-dir. Tərsi də doğrudur: hər bir M. m. f. (*) şəklində ifadə olunur (*Aronşayn – Kolmoqorov teoremi*). M. m. f.-nin alınmasının digər metodu *Şenberq teoremi* ilə verilir (bax, *Mənfi müəyyən funksiya*).

Əgər Λ qrupdursa, $(s, t) \rightarrow \chi(s-t)$ münasibətini ödəyən ikideyişənli funksiya yuxarıda verilən mənada M. m. f. olarsa, onda $\chi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyası M. m. f. adlanır.

M. m. f. harmonik analiz və ehtimal nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Bu anlayışın müxtəlif ümumiləşmələri mövcuddur; məs., kompleks M. m. f.-lar əvəzinə müsbət müəyyən operatorqiyəmətlili funksiyalara baxılır.

Əd.: [1] Л о з в М., Теория вероятностей, пер. с англ., 1962; [2] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975; [3] Райков Д. А., «Тр. Матем. ин.-та АН СССР», 1945, т. 14, с. 1–86; [4] Крейн М. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64–98; 1950, т. 2, с. 10–59; [5] Stewart J., «Rocky Mountain J. Math.», 1976, v. 6, № 3, p. 403–34; [6] Sasvagi Z., Positive definite and definable functions, B., 1994.

MÜSBƏT MÜƏYYƏN NÜVƏ « положительно определенное ядро; positive definite kernel » – bax, *Müsbət müəyyən funksiya*.

MÜSBƏT VƏZİYYƏT « положительное состояние; positive state » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabı*.

MÜSBƏT VƏZİYYƏTLƏR SİNFİ Markov zəncirinin « положительный класс состояний » цепи Маркова; *class of positive states of a Markov chain* – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MÜSTƏVİ – SİXLAŞMIŞ AİLƏ(si) ehtimal ölçülərinin « плоско концентрированное семейство вероятностных мер; flatly concentrated family of probability measures » – sonluölçülü altfəzaların kiçik ətraflarında müntəzəm sıxlaşmış, *Banach fəzasında ehtimal ölçülərinin* ailəsidir. Daha dəqiq: S^ε , $S \subset B$ Banach fəzasının ε – ətrafı, $\mathcal{M}$, B Banach fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin ailəsi olduqda, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ele sonlu ölçülü $S \subset B$ olarsa ki, $\inf \{\mu(S^\varepsilon) : \mu \in \mathcal{M}\} > 1 - \varepsilon$ şərti ödənilsin, onda $\mathcal{M}$ ehtimal ölçülərinin müstəvi – sıxlaşmış ailəsi adlanır.

«M. – s. a.» anlayışı [1]-də A. Akosta tərəfindən daxil olunmuşdur. Bu anlayışın köməyiylə metrik fəzada ehtimal ölçülərinin zəif nisbi kompaktlığının Proxorov kriterisini Banach fəzası halında tətbiqdə konkretləşdirmək mümkündür. Doğrudan da, B Banach fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathcal{M}$, yalnız və yalnız, o halda zəif nisbi kompaktdır ki, aşağıdakı iki şərt ödənilmiş olsun: (a) B -də ixtiyari kəsilməz xətti γ funksionalı üçün ədəd oxunda ölçülər ailəsi $\{\gamma^{-1} \circ \mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ zəif nisbi kompaktdır; (b) $\mathcal{M}$ ailəsi M. s. a.-dir.

Əd.: [1] Acosta A. de, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 152, № 1, p. 273–98.

MÜŞAHİDƏ XƏTASI « наблюдения ошибка; observation error » – naməlum determinik a kəmiyyətinin ölçmə nəticəsi müəyyən ξ təsadüfi kəmiyyətinin (müşahidənin) realizasiyası kimi interpretasiya olunan eksperiment xətasıdır.

Hər hansı a kəmiyyətinin ölçülməsi üçün aparılan eksperiment nəticəsinin ξ təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunan realizasiyası kimi interpretasiya olunduğu fərz olunur. Onda $X = \xi - a$ təsadüfi kəmiyyəti ξ -nin müşahidə xətası adlanır və bu halda $\xi = a + X$ naməlum ölçülən a kəmiyyəti və müşahidə xətası X -in cəminə bərabərdir. $b = MX$ müşahidə xətası

X -in riyazi gözləməsi olsun. Əgər b sıfırdan fərqli olarsa, onda M. x. X -də sistematik xəta vardır, deyilir və bu xəta b -yə bərabərdir. $\delta = X - b$ fərqi eksperimentin təsadüfi xətası adlanır və $M\delta = 0$. Beləliklə, M. x. $X = b + \delta$ sistematik xəta b ilə təsadüfi xəta δ -nin cəminə bərabərdir və $M\delta = 0$. ξ müşahidəsi $\xi = a + X = a + b + \delta$ cəminə bərabər olub, ölçülən a kəmiyyəti, müşahidə xətası X , sistematik xəta b və təsadüfi xəta δ təminlərilə ifadə olunur (bax, *Təsadüfi xəta, Sistematik xəta*).

MÜŞAHİDƏ OLUNAN ÖLÇÜ « наблюдаемый размер; attained size / level » – bax, *Kritik hədd*.

MÜŞAHİDƏLƏNƏN « наблюдаемая; observable » – qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. Cəbri baxımdan M. ilkin anlayışdır: verilmiş sistemi təsvir edən C^* – cəbrinin özü-özünə qoşma hər bir elementi məhdud həqiqi M. sayılır (bax, *Cəbri, müşahidələnenlərin*). Kommutativ cəbrlər üçün M. anlayışı təsadüfi kəmiyyət anlayışına çevrilir.

Kvant mexanikasında həqiqi M. sistemin Hilbert fəzası H -də özü-özünə qoşma ixtiyari X operatoru ilə verilir. Həqiqi oxda yerləşən spektr nöqtələri X müşahidələneninin ölçmələrdə alınan qiymətləri kimi interpretasiya olunur. İxtiyari statistik vəziyyətdə verilmiş M.-nin nəticəsi, ümumiyyətlə, təsadüfidir; sıxlıq operatoru S ilə təsvir olunan vəziyyətin bu nəticələrinin orta qiyməti $M_S\{X\} = \text{tr}SX$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Kvant mexanikasında postulat kimi qəbul edilən bu mülahizələrdən ölçmə nəticəsində X üçün alınan M.-lərin ehtimal paylanması

$$\mu_S^X(B) = \text{tr}S\mathbf{M}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – həqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxunun Borel altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, X operatorunun spektral ölçüsüdür, odur ki,

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbf{M}(dx). \quad (*)$$

Özü-özünə qoşma operatorlar və spektral ölçülər arasında (*) uyğunluğu qarşılıqlı birqiyəmətlili olduğundan kvant M.-i alternativ surətdə vahidin H -də ortoqonal ayrılışı kimi də təyin oluna bilər, yeni $\{\mathbf{M}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ orta proyektorların ele ailəsi kimi ki, ədəd oxunun ixtiyari ölçülən $\{B_i\}$ bölgüsü üçün $\sum \mathbf{M}(B_i) = \mathbf{I}$ bərabərliyi ödənilir, burada $\mathbf{I}$ – vahidi operatorudur, sıra isə güclü operator topologiyasında yığılır.

$\mathbf{M}_S\{X\}$ orta qiymətindən başqa M.-nin dispersiyası da mühüm rol oynayır:

$$\mathbf{D}_S\{X\} = \int (x - \mathbf{M}_S\{X\})^2 \mu_S^X(dx) = \text{tr}S(X - \mathbf{M}_S\{X\})^2 \mathbf{I}$$

düsturu ilə təyin olunan dispersiya S vəziyyətində X üçün alınan M.-lərin qeyri – müəyyənlik ölçüsünü təyin edir.

$X_1, \dots, X_n$ M.-lərinin uyğun operatorları kommutasiya olunan $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ spektral ölçülərinə malik olarsa, $X_1, \dots, X_n$ -lər u y u ş a n M. adlanır. Bu halda $\mathbf{M}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbf{M}_1(B_1) \times \dots \times \mathbf{M}_n(B_n)$ münasibəti $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -də ele M birgə spektral ölçüsünü təyin edir ki,

$$X_j = \int \dots \int x_j \mathbf{M}(dx_1 \dots dx_n), \quad j=1, \dots, n;$$

burada $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

M-in birgə ölçmə nəticələri $X_1, \dots, X_n$ -lərin birgə ehtimal paylanması bu halda

$$\mu_S^{X_1, \dots, X_n}(B) = \text{tr } S \mathbf{M}(B)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur; $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Uyşmayan M-lərə kvant mexanikasında dəqiq birgə ölçmə aparılması mümkün olmayan əla və M-lər kimi baxılır (bax, Qeyri – müəyyənliklər münasibəti).

M-ə şərh olunmuş tərzdə baxış kvant mexanikasının bir çox məsələlərini həyata etməyə kifayət etməsinə baxmayaraq, böyük çətinliklərin yaranmasına səbəb olur; məs., bucağın növü və ya fazanın «tsiklik» M-ini təyin etmək istədikdə bu çətinliklər yaranır. Bu çətinlikləri aradan qaldırmaq məqsədilə daha ümumi – kvant ölçmə anlayışından istifadə olunur və bu halda vahidin ayrılığı yalnız ortoqonal deyil, ixtiyari ayrılığı ola bilər.

Əd.: [1] Нейман Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Холев А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980.

MÜŞAHİDƏLƏRİN DAVAMOLUNMA ÇOXLUĞU
« множество продолжения наблюдений; set of continuation of observations » – bax, *Ardıcıl analiz*.

MÜŞAHİDƏLƏRİN DAYANDIRILMA ÇOXLUĞU
« множество прекращения наблюдений; set of stopping of observations » – bax, *Ardıcıl analiz*.

MÜŞAHİDƏLƏRİN YENİDƏN İŞLƏNİLMƏSİ
« наблюдений обработка; processing of observations » – müşahidələrin nəticələrini kompaktlaşdırmaq və statistik analiz aparmaq üçün ən yararlı şəkildə gətirmək məqsədilə nəticələrin müxtəlif çevirmələrini aparmaq üçün qaydalaradır.

Müşahidələrin analizində riyazi statistikanın metodlarından o hallarda istifadə olunur ki, bu müşahidələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyası kimi interpretasiya oluna bilsin, yeni araşdırılan hadisə və ya prosesin ehtimali modelini qurmaq mümkün olsun. Bu mənada «müşahidə» termini «təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası» termininin sinonimidir. Bəzən «müşahidə» terminindən təsadüfi kəmiyyət üçün də istifadə olunur və bu halda müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyət deyilir. Bir qayda olaraq, statistik nəticələr müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalarına görə bilavasitə alınır, bu nəticələr realizasiyaların məqsədəuyğun surətdə seçilmiş funksiyalarına görə alınır; bu funksiyalar statistikalar adlanır. Riyazi statistikada «statistika» termini ənənəvi olaraq, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində ixtiyari çevirmələr üçün istifadə olunur. Hər bir konkret halda M. y. i. məsələsinin özünün tələb etdiyi şərtlər əsasında çevirmə seçilir, məs., hipotezlərin yoxlanılması məsələsi və ya statistik qiymətləndirmə məsələsi. Müşahidələrin kompaktifikasiyası kafi statistiklardan istifadə olunması hesabına (əgər belə statistikalar mövcuddursa) aparılır ki, nəticə etibarilə yenidən işlənilməsi tələb olunan müşahidələrin sayı bir çox hallarda lazımlı informasiyanın itkisi olmadan olduqca azalır.

İkinci müşahidələrin çevirməsinin və ya artıq kafi statistikalarla ifadə olunmuş çevirmənin seçimi məqsədəuyğun xassələrə malik olan statistika almaq məqsədilə aparılır və bu da riyazi statistikanın əsas məsələlərindən biridir.

M i s a l. $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir; X_i – parametrləri $\mu_x = \mathbf{M}X_i$, $\sigma_x^2 = \mathbf{D}X_i$ ($|\mu_x| < \infty$, $\sigma_x^2 > 0$) olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir,

Y_j isə parametrləri $\mu_y = \mathbf{M}Y_j$ və $\sigma_y^2 = \mathbf{D}Y_j$ ($|\mu_y| < \infty$, $\sigma_y^2 > 0$) olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir.

μ_x , σ_x^2 , μ_y , σ_y^2 parametrlərinin naməlum olduğu fərz olunur. Bu misalda alınmış məlumatları sadələşdirmək məqsədilə $n + m$ sayda $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ müşahidələrindən 4 – ölçülü

$$T = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{j=1}^m Y_j, \sum_{j=1}^m Y_j^2 \right)$$

vektoru götürülür ki, statistika minimal kafi statistikadır. Əgər $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ müşahidələrinin yenidən işlənilməsi məsələsi naməlum μ_x , μ_y , σ_x^2 , σ_y^2 parametrlərinin nöqtəvi statistik qiymətlərinin qurulmasıdır, onda T kafi statistikasını terminlərlə ifadə olunan

$$\bar{X}_n = \bar{X}_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$S_x^2 = S_x^2(T) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2,$$

$$\bar{Y}_m = \bar{Y}_m(T) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j,$$

$$S_y^2 = S_y^2(T) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m Y_j^2 - \frac{m}{m-1} \bar{Y}_m^2.$$

statistikaları uyğun olaraq, μ_x , σ_x^2 , μ_y , σ_y^2 parametrləri üçün ən yaxşı (kvadratik riskin minimumu mənasında) *məyus statistik qiymətlərdir*. Daha sonra, məs., $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ hipotezinin doğru olub-olmadığını yoxlamaq tələb olunur. İsbat etmək olar ki, H_0 hipotezini yoxlamaq üçün ən yaxşı statistik kriteri $F = S_x^2/S_y^2$ statistikasına əsaslanır. H_0 hipotezi doğru olduqda, $H_1: \mu_x = \mu_y$ hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır; bu məsələnin həlli

$$t = \frac{\sqrt{mn(n+m-2)}}{n+m} \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}}$$

statistikasından istifadə edilməklə həyata keçirilir.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması, Statistik qiymətləndirmə*.

Əd.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [2] Воинов В. Г., Никulin М. С., Несмешенные оценки и их применения, М., 1989.

MÜŞAYİƏTEDİCİ FUNKSIONAL « сопровождающий функционал; associated functional » – *qapalı təsadüfi çoxluğun* paylanma xarakteristikalarından biridir. Əgər A topoloji S fəzasında qapalı təsadüfi çoxluqdirsə, onda T_A M. f.-i S -də hər bir K kompaktına $T_A(K) = \mathbf{P}\{A \cap K \neq \emptyset\}$ ədədini qarşı qoyur. M. f. təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətlər üçün paylanma funksiyasının oynadığı rol

ifadə edir; o, S -in bütün altçoxlularının çoxluğuna Şoke tutumu qədər davam oluna bilinir. T_A -nın kompaktlarda verilməsi

$P\{A \in \mathfrak{P}\}$ şəklində ehtimalları tamamilə təyin edir, yəni A təsadüfi çoxluğunun paylanması təyin edilir, burada $\mathfrak{P}$ – qapalı çoxluqlar fəzasında ixtiyari Borel ailəsidir. Bəzi statistik məsələlərdə (bax, *Statistika(sı)*) təsadüfi çoxluqlar) M. f. haqqında tam informasiya olmur və yalnız təsadüfi çoxluğun nöqtəvi paylanma qanunu məlum olur.

Əd.: [1] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

MÜŞAYİƏTEDİCİ SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « сопровождающее безгранично делимое распределение; accompanying infinitely divisible distribution » – ixtiyari ehtimal paylanması F -ə

$$e(F * E_a) = e^{-1} \left[E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F * E_a)^{*k}}{k!} \right]$$

qaydası ilə uyğun götürülən ehtimal paylanmasıdır, burada E_a , – $a \in \mathbb{R}^1$ nöqtəsində cırılmiş ehtimal paylanmasıdır. Ehtimal paylanmalarının kompozisiyası, $L_n = F_1 * \dots * F_n * E_{a_n}$, $A_n \in \mathbb{R}^1$ üçün M. s. b. p.

$$R_n = e \left(\sum_{j=1}^n F_j * E_{a_{nj}} \right) = e(F_1 * E_{a_{n1}}) * \dots * e(F_n * E_{a_{nn}})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsinə daxil olunmuş M. s. b. p.-nin daxil edilməsi səbəbi, onun ələ əsas xassəsidir ki, a_{nj} sabitləri və A_n -i münasib seçdikdə $\{L_n\}, \{R_n\}$ çoxluqlarından birinin nisbi kompaktlığı digərinin nisbi kompaktlığını doğurur. M. s. b. p.-lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərində istifadə olunan analitik aparatın mühüm hissəsidir (bax, [1]).

M. s. b. p. anlayışı $\mathbb{R}^1$ -də paylanmalar halından Abel qrupları və semi – qruplarda bir çox hallar üçün təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984; [3] Parthasarathy K., Probability measure on metric spaces, N. Y., 1967.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZ PAYLANMA « абсолютно непрерывное распределение; absolutely continuous distribution » – paylanma sıxlığına malik ehtimal paylanmasıdır. $P(A)$, – $\mathbb{R}^n$ -də ehtimal paylanması, yəni $\mathbb{R}^n$ -in Borel altçoxlularından təşkil olunmuş σ – cəbrdə təyin olunmuş ehtimal ölçüsü olsun. Lebeq ölçüsü sıfır olan ixtiyari E Borel çoxluğu üçün $P(E) = 0$ olarsa, $P(A)$ paylanması mütləq kəsilməz (Lebeq ölçüsünə nəzərən) paylanma adlanır. $P(A)$ paylanmasının mütləq kəsilməzliyi

$$P(A) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

bərabərliyi ödəyən mənfii olmayan inteqrallanan Borel funksiyası – $f(x_1, \dots, x_n)$ -in varlığı ilə eynigüclüdür. $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası $P(A)$ paylanmasının n – ölçülü sıxlıq funksiyası adlanır. M. k. p.-lər sinfinə ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqində mühüm yer tutan paylanmalar – normal paylanma, müntəzəm paylanma, Koşi paylanması, eksponensial paylanma və s. kimi paylanmalar aiddir.

Mütləq kəsilməzlik anlayışı daha ümumi şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur: $(\Omega, \mathcal{F})$ – ölçülən fəza, P və μ – uyğun olaraq $(\Omega, \mathcal{F})$ -də verilmiş ehtimal paylanması və σ – sonlu ölçü olsun. $\mu(A) = 0$ olduqda $P(A) = 0$ olarsa, P paylanması μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz paylanma adlanır. M. k. p.-nin μ ölçüsünə nəzərən ehtimal sıxlığı f vardır (Radon – Nikodim teoremi):

$$P(A) = \int_A f d\mu.$$

Paylanmanın mütləq kəsilməzlik anlayışı paylanmalar ailəsinin dominarlıq anlayışı ilə sıx əlaqədardır: əgər $(\Omega, \mathcal{F})$ -də σ – sonlu ν ölçüsü olarsa ki, $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülən fəzasında $\mathcal{P}$ ehtimal paylanmalar ailəsindən olan hər bir μ paylanması ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz olsun, onda $\mathcal{P}$ ehtimal paylanmalar ailəsi $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmalarının dominarlanan ailəsi adlanır. Paylanmalar ailəsinin dominarlanan olması fərziyyəsi riyazi statistikanın bəzi teoremlərində mühüm mənə daşıyır.

Bax, *Mütləq kəsilməzliyi, ölçülərin*.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

***MÜTLƏQ KƏSİLMƏZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT** « абсолютно непрерывная случайная величина; absolute continuous random variable ». Ω – элементар hadisələr fəzası, $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ bu fəzada təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət.

$$F(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

isə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan mənfii olmayan $f(x)$ funksiyası varsa, $\xi(\omega)$ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət adlanır; $f(x)$ -ə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması – sıxlıq funksiyası deyilir. (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqral Riman mənada, ümumi halda isə Lebeq mənada inteqral adlanır.

Bax, *Təsadüfi kəmiyyət*.

Əd.: [1] Гихман И. Н., Скороход А. В., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZLİK « абсолютная непрерывность; absolute continuity » – inteqralın M. k.-yi qeyri – müəyyən inteqralın (Lebeq inteqralının) bir xassəsidir. f funksiyası $\mathcal{E}$ çoxluğunda μ – inteqrallanan olsun. μ – ölçülən $E \in \mathcal{E}$ altçoxlığında f -in inteqralı μ ölçüsünə görə mütləq

kəsilməz çoxluq funksiyasıdır; yeni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ele $\delta > 0$ vardır ki, $\mu(E) < \delta$ şərtini ödəyən ixtiyari E çoxluğu üçün

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon \text{ münasibəti ödənilir. Ümumiyyətlə, çoxluğun son-}$$

lu additiv funksiyası μ -yə görə integral istər skalyar, istər vektor f və ya μ -lər üçün həmişə mütləq kəsilməz funksiyadır.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZLİYİ, ÖLÇÜLƏRİN « абсолютная непрерывность мер; absolute continuity of measures » – ümumi ölçü nəzəriyyəsinin ən mühüm anlayışlarından biridir. E – əsas bazis fəzası, S , – E -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ – halqa. μ və λ isə dəyişkenişərəli, S -də təyin olunmuş iki ixtiyari ölçü (yeni yük) olsun.

Əgər ixtiyari $A \in S$ üçün $|\lambda|(A) = 0$ olduqda $\mu(A) = 0$ olarsa, μ ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür, deyilir. ($|\lambda|$ – dəyişkenişərəli λ ölçüsünün tam variasiyasıdır). Mütləq kəsilməzlik anlayışı əksər hallarda adi ölçülər üçün və həm də μ dəyişkenişərəli ölçü, λ isə adi ölçü olduğu hallar üçün baxılır. μ ölçüsünün λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü olduğu $\mu \ll \lambda$ simvolik yazılışı ilə ifadə olunur. Aşağıdakı münasibətlər bir-birilə ekvivalentdir:

1) $\mu \ll \lambda$;

2) $\mu^+ \ll \lambda$ və $\mu^- \ll \lambda$, burada μ^+ və μ^- , – μ yükünün uyğun olaraq yuxarı və aşağı variasiyalarıdır.

3) $|\mu| \ll |\lambda|$.

$\mu \ll \lambda$ və dəyişkenişərəli μ ölçüsü sonlu olsun. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ele $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $|\lambda|(A) < \delta$ şərtini ödəyən ixtiyari $A \in S$ çoxluğu üçün $|\mu|(A) < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. Qeyd olunan xassə «dəyişkenişərəli ölçülərin mütləq kəsilməzliyi» termininin yaranmasını müəyyən mənada aydınlaşdırır. S σ – halqasında verilmiş bütün ölçülər sinfi $M(E, S)$ -də $\mu \ll \lambda$ münasibəti qayda münasibətidir, yeni refleksiv və tranzitiv münasibətdir. $\mu \ll \lambda$ və $\lambda \ll \mu$ münasibətlərini ödəyən μ və λ ekvivalent ölçülər adlanır. Ölçülərin ekvivalentliyi bəzən $\mu \equiv \lambda$ simvolu ilə işarə olunur. $\mu \equiv \lambda$ münasibəti $M(E, S)$ sinfində müəyyən ekvivalentlik münasibətini ifadə edir və deməli, bu münasibət $M(E, S)$ sinfinin boş olmayan, kəsişməyən, altsiniflərinə bölgüsünü təyin edir. Bu altsiniflər əksər hallarda, dəyişkenişərəli ölçülərin spektral tipləri adlanır.

$\mu \ll \lambda$ münasibəti $M(E, S)$ sinfində təbii olaraq ölçülərin bütün spektral tipləri çoxluğunda qayda münasibətini doğurur.

$(\mu_i)_{i \in I}$, – S σ – cəbrində təyin olunmuş σ – sonlu ölçülərdən ibarət ixtiyari hesabi ailə olsun. Onda bu S σ – cəbrində təyin olunmuş ele adi σ – sonlu λ ölçüsü hökmən vardır ki, bütün $(\mu_i)_{i \in I}$ ölçüləri λ -ya nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdir. Dəyişkenişərəli σ – sonlu ölçülərdən ibarət qeyri – hesabi $(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsi üçün analoji hökm, ümumiyyətlə, doğru olmayacaqdır.

$(\mu_i)_{i \in I}$, – S σ – halqasında verilmiş ölçülərin ixtiyari ailəsi, λ , – σ – cəbrdə verilmiş hər hansı bir ölçü olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün həmişə ele $\delta > 0$ ədədi tapılsa ki, $|\lambda|(A) < \delta$ münasibətini ödəyən ixtiyari $A \in S$ çoxluğu və ixtiyari $i \in I$ indeksi üçün $|\mu_i|(A) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsi λ -ya nəzərən müntəzəm mütləq kəsilməz ailə adlanır (bax, [2], [3]; Vitali – Han – Saks teoremi). Bu teoremə görə, məs., belə nəticə alınır: əgər $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ S σ – cəbrində sonlu yüklərin ele ardıcılığıdırsa ki, hər bir $A \in S$ çoxluğu üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

limiti mövcuddur, onda çoxluqlar funksiyası μ S -də hesabi-additivdir (başqa sözlə, μ , – S -də yüküdür).

Dəyişkenişərəli ölçülərin mütləq kəsilməzlik anlayışı ilə bağlı ən mühüm faktorlardan biri Radon – Nikodim teoremidir. Bu teoremin ümumiləşmələri, gücləndirilmiş variantları vardır. Ölçülərin M. k. anlayışı $\mu \ll \lambda$ λ verilmiş S σ – cəbrində adi ölçü, μ isə bu S σ – cəbrində təyin olunmuş vektor (vektorqiymətli) ölçü olduğu və öz qiymətlərini hər hansı topoloji vektor fəzada aldığı halda dolğun mənə kəsb edir (bax, [3]).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ М., 1953; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч.1, М., 1962.

***MÜTLƏQ MOMENT « абсолютный момент; absolute moment »** – təsadüfi kəmiyyətin modulunun momentinə bərabər olan ədədi xarakteristikadır. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ bu fəzada verilmiş təsadüfi kəmiyyət olsun. Tam və mənfi olmayan qiymətlər alan r üçün $m_r =$

$= \mathbf{M}|\xi|^r < \infty$ şərti ödənilərsə, $\mathbf{M}|\xi|^r \rightarrow \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin r tərtibli mütləq momenti deyilir. $\mathbf{M}|\xi|$ başlanğıc mütləq moment, $\mathbf{M}|\xi| - \mathbf{M}\xi$ mərkəzləşmiş mütləq moment adlanır. r – tərtib M. m. tam olmayan $r > 0$ qiymətləri üçün də təyin olunur.

$0 < k < r$ olduqda $|x|^k \leq |x|^r + 1$ bərabərsizliyi ödənilməyindən, r – tərtib M. m.-in varlığından $k < r$ şərtini ödəyən k – tərtib bütün M. m.-lərin varlığı alınır.

Təsadüfi kəmiyyətin r – tərtib momenti olmaya da bilər, M. m.-lər isə həmişə təyin olunur və M. m. sonsuzluq qiymətini də ala bilər. M. m.-lər üçün aşağıdakı xassələr ödənilir:

1. əgər $\mathbf{M}|\xi|^r < \infty$ olarsa, $k \leq r$ qiymətlərində $\mathbf{M}|\xi|^k$ sonludur və $k \leq r$ olduqda $\mathbf{M}|\xi|^k$ vardır və sonludur;
2. $\log \mathbf{M}|\xi|^r$, – r -in funksiyasıdır və qabarıq funksiyadır;
3. $[\mathbf{M}|\xi|^r]^{\frac{1}{r}}$ – r -in funksiyasıdır və azalmayan funksiyadır;
4. $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ olarsa, $\mathbf{M}|\xi_n|^r \rightarrow \mathbf{M}|\xi|^r$.

M. m. təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikası olub, müxtəlif qiymətləndirmə və bərabərsizliklərdə tez-tez təsadüf olunur (bax, məs., *Berri – Esseen bərabərsizliyi*, *Çebışev bərabərsizliyi*). Mütləq momentlər arasında aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

1. əgər $0 < s < t$ olarsa, $\left(M|\xi|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(M|\xi|^t \right)^{\frac{1}{t}}$ (*Lyapunov bərabərsizliyi*);

$$2. M|\xi| \leq \left(M|\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \dots \leq \left(M|\xi|^n \right)^{\frac{1}{n}};$$

$$3. 1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ olduqda}$$

$M|\xi|^p < \infty, M|\eta|^q < \infty$ olarsa, $M|\xi\eta| < \infty$ və

$$M|\xi\eta| \leq \left(M|\xi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(M|\eta|^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ (Hölder bərabərsizliyi)};$$

$$4. M\xi^2 < \infty, M\eta^2 < \infty \text{ olarsa,}$$

$$M|\xi\eta| < \infty \text{ və}$$

$$\left(M|\xi\eta| \right)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2 \text{ (Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyi)};$$

$$5. M|\xi|^p < \infty, M|\eta|^q < \infty, 1 \leq p < \infty \text{ olarsa,}$$

$$M|\xi + \eta|^p < \infty \text{ və}$$

$$\left(M|\xi + \eta|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(M|\xi|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(M|\eta|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (Minkovski bərabərsizliyi)}.$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MÜTLƏQ MOMENT r TƏRTİB « абсолютный момент r -го порядка; absolute moment of order r » – bax, *Mütləq moment*.

MÜTLƏQ PAYLANMA(sı) Markov zənciri və ya Markov prosesinin « абсолютное распределение цепи Маркова или марковского процесса; absolute distribution of a Markov chain or process » – zaman parametri $t, t \in T$ qeyd olunduqda $\zeta(t)$ təsadüfi vəziyyətinin şərtsiz paylanması $\mu(t)$ -dir:

$$\mu(t, S) = P\{\zeta(t) \in S\}, S \in \mathcal{B};$$

($\mathcal{E}, \mathcal{B}$) – ζ prosesinin faza fəzasıdır. $t \geq t_0$ olduqda M. p.-nin varlığı üçün başlanğıc paylanması $\mu(t_0)$ verilməlidir; bu halda

$$\mu(t, S) = \int_{\mathcal{E}} \mu(t_0, dx) p(t_0, x; t, S) \quad (*)$$

olur, burada $p(s, x; t, S)$ – zəncir və ya ζ prosesinin keçid funksiyasıdır. Zəncir və ya proses bircins olarsa, onda $p(s, x; s+t, S) = p(t, x, S)$ bərabərliyi doğrudur (burada $t_0 = 0$ fərz olunur) və bu halda (*) düsturu

$$\mu(t, S) = \int_{\mathcal{E}} \mu(0, dx) p(t, x, S), t \geq 0, S \in \mathcal{B}$$

şəklində ifadə olunur.

t -dən asılı olmayan mütləq paylanma *stasionar paylanma* adlanır.

MÜTLƏQ PSEVDOMOMENT « абсолютный псевдомомент; absolute pseudomoment » – bax, *Pseudomoment*.

MÜTLƏQ ŞKALA « абсолютная шкала; absolute scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

MÜTLƏQ TEZLİK « абсолютная частота; absolute frequency » – bax, *Histogram*.

NADARAYA – VATSON STATİSTİK QIYMƏTİ

«Надарая – Ватсона оценка; Nadaraya – Watson estimator» – bax, Qeyri – parametrik regression analiz.

NAT «нат; nat» – informasiya miqdarının tərifində natural loqarifmlər istifadə olunduqda, informasiya miqdarının natural vahididir («N.» ingiliscədən «natural digit»-in qısaldılmış şəklidir). Keçid düsturu

$$1N = 1/\ln 2 \text{ bit} \approx 1,44 \text{ bit}$$

münasibətilə təyin olunur.

NATAMAM BLOK PLANI «неполный блочный план; incomplete block design» – bax, Blok plan, Dispersion analiz.

NATAMAM GİRİŞLİ XİDMƏT SİSTEMİ «неполнодоступная система обслуживания; partially available queueing system» – bax, Xidmət sistemi imtinalı.

NATAMAM LATIN KVADRATI «неполный / частичный латинский квадрат; partial Latin square» – bax, Latin kvadratı.

NATURAL ADDİTİV FUNKSİONAL «натуральный аддитивный функционал; natural additive functional» – bax, Markov prosesi; additiv funksional.

NATURAL PARAMETR «натуральный параметр; natural parameter» – bax, Kanonik və natural parametrizasiya.

NATURAL PARAMETRİZASIYA «натуральная параметризация; natural parametrization» – bax, Kanonik və natural parametrizasiya.

NATURAL PSEVDOMOMENT «натуральный псевдомомент; natural pseudomoment» – bax, Pseudomoment.

NATURAL VAHİD(i) informasiya miqdarının, nat «натуральная единица количества информации, нат. nat» – bax, Entropiya, Bit.

NAVYE – STOKS STOXAŞTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ «Навье – Стокса стохастическое дифференциальное уравнение; Navier – Stokes stochastic differential equation» –

$$du(t, x) + (u(t, x), \nabla) u(t, x) dt = -\nabla p(t, x) dt + \nu \Delta u(t, x) dt + dw(t), \quad (1)$$

$$(\nabla, u(t, x)) = 0 \quad (2)$$

şəklində tənliklər sistemidir, burada $w(t)$ – hər hansı vektor semimartinqaldır, (1) tənliyi isə stoxastik differensial hesabı

mənasında anlaşılır. $w(t)$ – qiymətləri L^2 -dən olan Viner prosesi olduğu halda, (1) – (2) sistemi üçün ilk başlanğıc – sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi problemi araşdırılmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Н о в и к о в Е. А., «Ж. эксп. и теор. физики», 1964, т. 47, № 5, с. 1919–26; [2] М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [3] В и ш и к М. И., Ф у р с и к о в А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980; [4] V i o t М., Solution faibles d' équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires, [P., 1976].

NAYKVİST TEZLİYİ «Найквиста частота; Nyquist frequency» – bax, Diskretizasiya problemi.

NELSON MEYDANI «Нельсона поле; Nelson field» – bax, Markov təsadüfi meydanı.

NEYMAN ERQODİK TEOREMİ «Неймана эргодическая теорема; von Neumann ergodic theorem» – tarixən ilk statistik erqodik teoremdir, [1]-də J. Neymann tərəfindən verilmişdir. $X_0, X_1, \dots$ – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş geniş mənada stasionar təsadüfi

ardıcılıq; $H_X = \sum_{i=1}^m a_i X_k$ ($1 \leq m < \infty$, a_i – konstantlardır)

şəklində təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunun qapayıcısı olan, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də altfəza; U , – H_X -də $UX_i = X_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$, $J_X = \{\gamma: \gamma \in H_X, U\gamma = \gamma\}$ şərtlərilə təyin olunan izometrik xətti operator; $\bar{M}(X_0|J_X)$, – X_0 təsadüfi kəmiyyətinin J_X altfəzasına ortoqonal proyeksiyası olsun. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i - \bar{M}(X_0|J_X) \right|^2 = 0.$$

Geniş mənada stasionar $X(t)$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesləri üçün də analogi müddəə doğrudur, bu halda $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ cəmi əvəzinə

$\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ təsadüfi kəmiyyətlərinə $T \rightarrow \infty$ olduqda baxılır.

Bu teorem sonradan qruplarda və semiqruplarda bircins təsadüfi meydanlara və Banax fəzalarında operatorların müxtəlif semi – qruplarına ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] N e u m a n n J. von, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1932, v. 18, p. 70–82.

NEYMAN $C(\alpha)$ – KRİTERİSİ «**Неймана $C(\alpha)$ – критерий**; **Neyman $C(\alpha)$ – test**» – bax, *Statistik kriteri $C(\alpha)$* .

NEYMAN METODU, ETİBARLI İNTERVALLARIN «**Неймана метод доверительных интервалов**; **Neyman's method of confidence intervals**» – ehtimal qanunlarının namelum parametrlərinin müşahidələr nəticələri üzrə *interval statistik qiymətlərinin* alınması üçün *etibarlı qiymətləndirmə* metodlarından biridir. Yu. Neyman tərəfindən təklif olunmuş və inkişaf etdirilmişdir (bax, [1], [2]). Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı mülahizələrlə ifadə olunur. $X_1, \dots, X_n$ – çoxölçülü paylanma funksiyası $F(x, \theta)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ parametridən asılı olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. θ parametridin nöqtəvi statistik qiyməti kimi paylanma funksiyası $G(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$ olan, $T = T(X_1, \dots, X_n)$ statistikasından istifadə olunduğu fərz olunur. Onda $0.5 < P < 1$ intervalından olan ixtiyari P ədədi üçün θ dəyişəninə görə iki tənlikdən ibarət

$$G(T, \theta) = \begin{cases} P, \\ 1 - P \end{cases} \quad (*)$$

sistemi təyin etmək olar. $F(x, \theta)$ funksiyasının praktikada təsadüf edilən, demək olar ki, bütün maraqlı hallarında ödənilən müəyyən rəqulyarlıq şərtlərində, (*) sisteminin eht. $\underline{\theta} = \underline{\theta}(T)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(T)$, $\underline{\theta}, \bar{\theta} \in \Theta$ yeganə həlli vardır ki, $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 2P - 1$.

$(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \in \Theta$ çoxluğu namelum θ parametri üçün $2P - 1$ ehtimalı etibarlı interval adlanır. $\underline{\theta}$ və $\bar{\theta}$ statistikaları uyğun olaraq, seçilmiş etibarlılıq əmsali P -yə uyğun aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər adlanır. $p = \inf_{\theta \in \Theta} P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\}$ ədədi $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ etibarlı intervalının etibarlılıq əmsali adlanır. Beləliklə, E. i. N. m. etibarlılıq əmsali $p \geq 2P - 1$ olan interval statistik qiymətlərinin alınmasına gətirir.

E. i. N. m. Beyes metodundan və Fişer fidusial yanaşmasına əsaslanan metoddan olduqca fərqlənir. E. i. N. m.-da $F(x, \theta)$ paylanma funksiyasının namelum θ parametri sabit kəmiyyət kimi anlaşılır. $(\underline{\theta}(T), \bar{\theta}(T))$ etibarlı intervalı isə eksperimente qədər qurulur ki, bu zaman T statistikasının qiyməti də hesablanır. Deməli, bu metoda əsasən, $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$ bərabərsizliklərinin eyni zamanda ödənilməsi ehtimalı $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ etibarlı intervalının θ parametridin namelum əsl qiymətini «daxilinə almasının» aprior ehtimalıdır. Aydındır ki, eger θ təsadüfi kəmiyyət olarsa, əslinə qalarsa, Neyman etibarlılıq metodu öz qüvvəsində qalır, belə ki, E. i. N. m.-da interval statistik qiyməti eksperiment aparılana qədər qurulur, deməli, bu statistik qiymət parametridin aprior paylanmasından asılı deyildir. E. i. N. m. θ parametri haqqında aprior informasiyadan asılı olmaması xüsusiyyətinə görə əlverişli olub, Beyes və fidusial yanaşmalardan fərqlidir. Fişer metodu ilə müqayisədə isə məntiqi cəhətdən qüsurusuzdur. E. i. N. m.,

ümumi halda, namelum parametr üçün etibarlı intervalları tam bir sistemine gətirir və bununla əlaqədar olaraq, meyilsizlik, selektivlik və ya oxşarlıq və s. xassələrə malik optimal interval statistik qiymətinin qurulması məsələsi yaranır, bu məsələ isə öz həllini statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsi çərçivəsində tapır.

Əd.: [1] Neyman J., «Ann. Math. Stat.», 1935, v. 6, p. 111–16; [2] Neyman J., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1937, v. 236, p. 333–80; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 1, с. 187–92; [5] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

NEYMAN STRUKTURU «**Неймана структура**; **Neyman structure**» – kafi statistikadan asılı olmayan *statistika* ilə təyin olunan strukturdur. N. s. anlayışı Yu. Neyman tərəfindən (J. Neyman, bax, [1]) statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində *oxşar kriterilərin* qurulması məsələsilə əlaqədar daxil olunmuşdur və «N. s.» termini statistik kriterinin strukturuna görə o halda istifadə olunur ki, onun kritik funksiyası N. s.-na malik olsun. Seçimi $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$ fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin seçimi qiymətləri üzrə (realizasiyaları üzrə) $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ mürəkkəb hipotezini yoxlamaq tələb olunur, belə ki, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi üçün paylanması $\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$ ailəsindən olan T kafi statistikasının varlığı fərz olunur. Bu halda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün α səddli ixtiyari statistik kriteri N. s.-na malikdir, bu şərtlə ki, onun kritik fəzası φ

$$M\{\varphi(X)|T = t\} = \alpha \quad (1)$$

bərabərliyini sanki yəqin P_θ^T , $\theta \in \Theta_0$ ölçüsünə görə ödəmiş olsun. Aydındır ki, eger statistik kriterinin N. s. varsa, onda bu kriteri $\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ ailəsinə nəzərən oxşar kriteridir, çünki bütün $\theta \in \Theta_0$ qiymətlərində

$$M_\theta\{\varphi(X)\} = M_\theta\{M\{\varphi(X)|T = t\}\} = \alpha.$$

(1) şərtinin ödənilməsi, H_0 mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsinə mahiyyətce T kafi statistikasının qeyd olunmuş hər bir t qiymətində, H_0 sadə hipotezinin yoxlanılmasına gətirir.

M i s a l. Parametrləri uyğun olaraq, namelum λ_1 və λ_2 olan Puasson qanununa tabe, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətləri araşdırılır və $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ hipotezi yoxlanılır. X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan, $T = X_1 + X_2$ statistikası $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır və X_1, X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin $\{T = t\}$ şərtinə nəzərən şərti paylanmaları uyğun olaraq $t, \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ və $t, \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ parametrlili binomial paylanmalar olur, yeni

$$P\{X_i = k | T = t\} = C_t^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{t-k}, \quad k = 0, 1, \dots, t. \quad (2)$$

H_0 hipotezi doğru olarsa, T statistikası namelum ümumi $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ qiyməti üçün kafi statistikadır, (2)-dən isə aydındır ki,

əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda kafi statistikanın $T = t$ qeyd olunmuş qiymətində X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması t və $1/2$ parametrləri binomial paylanmadır, yəni H_0 hipotezində

$$P\{X_1 = k | T = t\} = C_t^k \left(\frac{1}{2}\right)^t, \quad k = 0, 1, \dots, t.$$

Beləliklə, bu məsələdə H_0 mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsi sadə H_0 hipotezinin yoxlanılması məsələsinə gətirildi ki, bu halda X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması ($X_1 + X_2 = t$ qeyd olunduğu halda) t və $1/2$ parametrləri binomial paylanmadır. H_0' hipotezinin yoxlanılması üçün, məs., *işarələr kriterisindən* istifadə etmək olar.

N. s. anlayışı mürəkkəb statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində böyük əhəmiyyətə malikdir, belə ki, məhz N. s.-lu kriterilər arasında əksər hallarda ən *güclü kriteri* olur. E. Leman (E. Lehmann) və H. Şeffe (H. Scheffé) isbat etmişlər ki, $H_0: \theta \in \Theta_0$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteri T kafi statistikasına nəzərən, yalnız və yalnız, o halda N. s.-lu olur ki, $\{P_{\theta}^T, \theta \in \Theta_0\}$ T statistikasına ilə doğrulmuş statistika məhdud tam ailə olsun. N. s. anlayışı əsasında oxşar kriterilərin qurulması üçün ümumi metodlar işlənilmişdir. Bax, *Tam ailəsi, paylanmaların, Oxşar kriteri*.

Əd.: [1] Нейман Д. Ж., Текущие задачи математической статистики, пер. с англ., Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954, М., 1961; [2] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Ливиник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

NEYMAN – PIRSON LEMMASI « Неймана – Пирсона лемма; Neyman – Pearson lemma » – sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı sadə H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsində *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinin* verilmiş *mühümlük ölçüsü* eyni olan bütün statistik kriterilər arasında *ən güclü kriteri* olduğunu hökm edən lemmadır.

N. – P. I. J. Neyman və E. Pirson tərəfindən [1]-də isbat olunmuşdur. N. – P. I. bəzən riyazi statistikanın *fundamental lemması* kimi adlandırılır. Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», Ser. A, 1933, v. 231, p. 289–337; [2] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

NEYMAN – ULAM SXEMİ « Неймана – Улама схема; Neumann – Ulam scheme » – bax, *Xətti tənlilik; Monte-Karlo metodu* ilə həll.

NƏSİLLƏR METODU « поколений метод; method of generations » – bax, *Multiiekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

NƏZARƏT / KONTROL KARTI « контрольная карта; control chart » – bax, *Statistik nəzarət / keyfiyyətə statistik nəzarət*.

NƏZARƏT OLUNAN DƏYİŞƏNLƏR(i) regressiion eksperimentin « контролируемые переменные регрессионного эксперимента; controlled variables / factors in design of a regression experiment » – *regressiya* funksiyasının ele argumentləridir ki, bunların qiymətləri dəqiqliklə məlumdur (*konflyuent analizin* əksinə olaraq).

NƏZARƏT / KONTROL PLANI « контроля план; inspection / control plan » – məmulatların nəzarət olunan

$\mathfrak{D}$ partiyasından (obyektlər çoxluğundan) təsnifedici əlaməti, nəzarəti dayandırma qaydasını və qərar qəbul etməni, nəzarət üçün məmulatların (obyektlərin) seçilməsi üsulunu təyin edən qaydalar sistemidir. Qaytarmamaq şərti ilə təsadüfi seçmə geniş istifadə olunur (bax, *Seçim, Seçimi metod*). Alternativ əlamət üzrə nəzarətdə məmulatlar qüsursuz və qüsurlu kimi təsniflənir. Keyfiyyət əlamətinə görə məmulatlar (obyektlər) m sayda ($m > 2$) mümkün siniflərdən birinə aid edilir. Məmulatların təsnifi dolayı əlamətlər üzrə aparılırsa, onda səhv qərarlar da verilə bilər. Məs., qüsurlu məmulat səhvən qüsursuz kimi hesab oluna bilər. Kəmiyyət əlamətinə görə nəzarətdə nəzarət edilən məmulatların həqiqi qiymətlər alan parametrləri ölçülür.

Birpəlləli plan, yəni $\mathfrak{D}$ çoxluğunun alternativ əlamətə görə nəzarət planı qaytarmamaq şərti ilə n həcmli seçimin həcmi (n -in) verilməsi ilə və qəbul etmə ədədi c ilə xarakterizə olunur. Əgər seçimdəki qüsurlu məmulatların sayı d qəbul etmə ədədi c -dən böyük olmazsa, onda $\mathfrak{D}$ partiyası qəbul edilir, əgər $d > c$ olarsa, $\mathfrak{D}$ qəbul olunmur. Sonuncu halda məmulatın növündən asılı olaraq, partiyanın qüsurlu olması haqqında qərar – ya partiyanın seçimə olmayan bütün məmulatlarının yoxlanılması və ya məhsulun növünün aşağı elan edilməsi kimi anlaşılır. Qəbul edilmiş dövlət standartlarında birpəlləli planlarla yanaşı ikipəlləli, çoxpəlləli, ardıcıl planlardan da istifadə olunur.

İkipəlləli planda birinci və ikinci seçimlərin həcmli – n_1 və n_2 , qəbul etmə ədədləri c_1 və c_2 , qüsurlu məmulatların sayı r_1 və r_2 verilir ($r_1 > c_1 + 1$, $r_2 = c_2 + 1$). Əgər birinci seçimdə qüsurlu məmulatların sayı $d_1 \leq c_1$ şərtini ödəyərse, onda $\mathfrak{D}$ qəbul edilir, əgər $d_1 \geq r_1$ olarsa, onda $\mathfrak{D}$ qəbul olunmur, qüsurlu hesab edilir. Əgər $c_1 < d_1 < r_1$ olarsa, ikinci seçim götürülür. Əgər d_2 ikinci seçimdə qüsurlu məmulatların sayıdırsa və $d_1 + d_2 \leq c_2$ olarsa, onda $\mathfrak{D}$ qəbul olunur, əgər $d_1 + d_2 \geq r_2$ olarsa, $\mathfrak{D}$ qəbul edilmir.

N. p.-nın bir çox göstəricilərini onun *operativ xarakteristikası* əsasında hesablamaq olar.

Məmulatların kəsilməz axınının (partiyalarla birləşməyən) nəzarəti üçün N. p.-nın digər tiplərindən istifadə olunur.

Əd.: [1] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

NƏZƏRİ – EHTİMALİ XASSƏ « теоретико – вероятностное свойство; theoretic – probability property » – yalnız və yalnız *paylanmalar* vasitəsilə ifadə olunan xassəyə deyilir. $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin N. – e. x.-ləri ilə xassələrdir ki, bu xassələr onun paylanma funksiyası F_{ξ} ilə ifadə oluna bilsin.

Əd.: [1] Лоев М., Теория вероятностей, М., 1962.

NƏZƏRİ KORRELOQRAM « теоретическая коррелограмма; theoretical correlogram » – bax, *Korrelogram*.

NİSBİ BİKOMPАКТ ÇOXLUQ « относительно бикompактное множество; relatively bicompat set » – bax, *Bikompaht*.

NİSBİ EFFEKTİVLİK(y_i) kriterinin «относительная эффективность критерия; relative efficiency of a test» – bax, *Asimptotik effektivlik*(y_i) kriterinin.

NİSBİ ENTROPİYA «относительная энтропия; relative entropy» bir ehtimal paylanmasının digərinə nəzərən nisbi entropiyası – riyazi statistikada əsas informasiya miqdarlarından (*informasiya məsafələrindən*) biridir. N. e. ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasının eyni bir $\mathcal{A}$ hadisələr cəbrində ixtiyari iki ehtimal paylanması P və Q üçün

$$I(P:Q) = \int_{\Omega} [\ln P(d\omega) - \ln Q(d\omega)] P(d\omega)$$

inteqralı ilə təyin olunur, bu şərtlə ki, inteqral cəmlərində $0 \ln 0 = 0$ qeyri – müəyyənliyi açılmış olsun. N. e. həmişə mənfi deyildir, lakin 0, sonsuz ola bilər. N. e. – Kullbak–Leybler–Sanov informasiya miqdarı (information yayınması, məsafəsi və s.) kimi də adlandırılır, ilk dəfə [1]-də baxılmışdır. N. e. təbii olaraq böyük yayınmalar nəzəriyyəsində yaranır (bax, [2]). Asılı olmayan sınaqlar sxemində N. e. additivlik xassəsinə malikdir, yəni əgər $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}''$, $P = P' \otimes P''$, $Q = Q' \otimes Q''$ olarsa, onda

$$I(P:Q) = I(P':Q') + I(P'':Q'')$$

bərabərliyi doğrudur.

Sade P hipotezinin sadə Q alternativ hipotezinə qarşı yoxlanılması nəzəriyyəsində N. e. 1-ci növ səhv ehtimalının $\alpha_N \rightarrow 0$ bərabər olduğu halda α_0 həddinin qeyd olunmuş qiymətində asılı olmayan müşahidələr sayı N -in artması ilə 2-ci növ səhvin ehtimalı β_N -in azalma asimptotikasını təyin edir, belə ki, $\ln \beta_N \sim -N I(P:Q)$. $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ ehtimal paylanmalarının hamar ailəsi üçün asimptotik olaraq

$$2I(P_0: P_{\theta+\Delta t}) \approx \sum_{i,j=1}^k \Delta t^i \Delta t^j I_{ij}(\theta)$$

münasibəti ödənilir, burada $(I_{ij}(\theta))_{i,j=1}^k$ – ailənin P_0 nöqtəsində Fişer informasiya matrisidir. Kanonik parametrizasiyalı eksponent ailələr nəzəriyyəsində N. e. xüsusi rol oynayır, bu halda o, Gauss ən kiçik kvadratlar metodunda Evklid məsafəsinin kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqu kimi ifadə olunur; onun üçün Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantı doğrudur. Statistik nöqtəvi qiymətləndirmə məsələsində R nəticəsinə gəldiyi halda universal itki funksiyası kimi $2I(R:P_0)$ miqdarından istifadə olunduqda $\theta \in \Theta$ parametrinin asimptotik effektiv statistik qiymətlərində uyğun risk asimptotik olaraq, $N^{-1} \dim \Theta$ kəmiyyətinə bərabərdir, burada N – istifadə olunmuş asılı olmayan müşahidələrin sayıdır.

P – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanması, $Q = P_1 \otimes P_2$, – X_1 və X_2 kəmiyyətlərinin P_1 və P_2 marginal paylanmalarının hasilə olarsa, N. e. bir təsadüfi kəmiyyətdə digərinə nəzərən olan *informasiya miqdarı* olur, informasiya ötürmə nəzəriyyəsində istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlər arasında

ehtimali məsafədir, P_1 və P_2 uyğun olaraq X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin marginal paylanmalarıdır.

Bax, *Kullbak – Leybler informasiya kəmiyyəti*.

Əd.: [1] Kullback S., Leibler R. A., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 79–86; [2] Санов И. Н., «Матем. сб.», 1957, т. 42, в. 1, с. 11–44; [3] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

NİSBİ KOMPAKT ÇOXLUQ «относительно компактное множество; relatively compact set» – bax, *Kompakt*.

NİSBİ KOMPAKTLIQ($\mathcal{G}$) ölçülər ailəsinin «относительная компактность семейства мер; relative compactness of a family of measures» – bax, *Kompaktlıq*($\mathcal{G}$) ölçülər ailəsinin.

NİSBİ TEZLİK «относительная частота; frequency ratio» – bax, *Histogram, Tezlik*(y_i) təsadüfi hadisənin.

NİŞAN «метка; score» – bax, *Rəng korrelyasiyası*.

NİŞANLANMIŞ NÖQTƏVİ PROSES «маркированный точечный процесс; marked point process» – (t_n, k_n) təsadüfi ardıcılığıdır, burada $t_n \in \mathbb{R}$ – hadisənin anı, $k_n \in K$ – «nişan»-dır, yəni baxılan hadisə haqqında əlavə əlaqədir (K nişanlar fəzası adlanan ölçülən fəzadır, $n \in \mathbb{Z}$).

Fərz olunur ki, bütün n -lər üçün $t_n \leq t_{n+1}$ və $t_n(\tau) + \tau$ τ anından sonra n -ci hadisənin baş verdiyi andır, $k_n(\tau)$ bu hadisənin nişanıdır. Əgər $(t_n(\tau), k_n(\tau))$ ardıcılığının paylanması τ -dan asılı olmazsa, N. n. p. stasionar N. n. p. adlanır. Nöqtəvi proseslərə xas olan bütün xassələr stasionar N. n. p.-lər üçün də ödənilir (parametrin varlığı, intensivliyin, Palm – Xinqin funksiyalarının varlığı). Əgər (t_n) nöqtəvi prosesi ordinardırsa,

N. n. p. (t_n, k_n) – ordinar N. n. p. adlanır. $z_n \in \mathbb{R}^+$, $k_n \in K$ olduqda (z_n, k_n) (stasionar) ardıcılığı speysinq adlanır. Stasionar ordinar N. n. p.-lər və speysinqlər arasında aşağıdakı kimi interpretasiya olunan qarşılıqlı birqiyəmli uyğunluq yaranır. Əgər τ anında N. n. p.-in hadisəsi baş verirsə, onda $t_n(\tau) = z_1 + \dots + z_n$, $k_n(\tau) = k_n$ olur, bu halda (z_n, k_n) speysinqdir. N. n. p.-lər nəzəriyyəsi kütləvi xidmət sistemlərinin, o cümlədən, mürekkəb strukturlu (prioritetli, çoxfazlı), ixtiyari stasionar giriş ardıcılıqları ilə idarəolunan sistemlərin xarakteristikaları arasında ergodik münasibətləri əsaslandırmağa imkan yaratmışdır.

Əd.: [1] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

NİŞANLAR FƏZASI «меток пространство; mark score» – bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*.

NOMİNAL ƏLAMƏT «номинальный признак; nominal criterion» – bax, *Çoxölçülü statistik analiz*.

NOMİNAL ŞKALA «номинальная шкала; nominal scale» – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

NOMOGRAM «номограмма; nomogram» – funksional asılılığı həndəsi təsvir etmək üçün çertyojdur. N. hesablama aparmaq məqsədlərində, asılılığı araşdırmaq üçün istifadə olunur. N. vasitəsilə ekstremal xassələri, nəticə dəyişəninə dəyişənlərin

tesirini, həllərin varlığı oblastını araşdırmaq olar. N.-in müxtəlif tipləri məlumdur (düzəldilmiş nöqtələrdən ibarət, bir-birindən bərabər uzaqlıq olan nöqtələrdən ibarət, pərgar, barisentrlik və s. N.-lar). Hər bir tip ona müvafiq asılılığı – kanonik formanı təsvir edir. Əsasını kanonik formalar təşkil edən, verilən asılılıqların approksimasiyası yolu ilə alınan (məs., çoxqırışlı cədvəllərlə) təqribi N.-lar da tətbiq olunur. N.-in qurulması metodları işlənmişdir (bax, [1], [2]).

Bəzi statistik asılılıqlar üçün dəqiq və təqribi N.-lar qurulmuşdur. Məs., stoxastik tələb halında ehtiyatları idarə etmə modeli – dörd dəyişənli tənlik üçün düzəldilmiş nöqtələrdən ibarət təqribi N. (bax, [3]); Puasson paylanması parametrisinin interval statistik qiymətini təyin etmək üçün üç dəyişən parametrlili iki tənliklər sisteminin dəqiq barisentrlik N.-i (bax, [4]). N. ehtimal nəzəriyyəsinə və riyazi statistikada tətbiq olunur ([5]-də bibliografiyaya bax).

Əd.: [1] Хованский Г. С., Основы номографии, М., 1976; [2] Хованский Г. С., Номография сегодня, М., 1987 (Новое в жизни, науке, технике. Математика. Кибернетика, № 12); [3] Козлова Е. Г., Подлевских Л. В., Синько В. И., Применение номограмм в управлении запасами на машиностроительном предприятии, М., 1981; [4] Степанова Н. В., Номографический метод определения доверительной оценки параметра распределения Пуассона. Приложение «Надежность и контроль качества», 1986, № 5, с. 3–5; [5] Степанова Н. В., Обзор номограмм, применяемых в теории вероятностей и математической статистике. Межвузовский семинар «Современные проблемы номографии», 24–30 мая 1981 г. (Программа и тезисы докладов), М., 1981, с. 42–44.

NORMA(sı) təsadüfi elementin « норма случайного элемента; norm of a random element », $X(\omega)$ təsadüfi elementinin N.-sı $-\omega \rightarrow |X(\omega)|$ inikasıdır, burada $X(\omega)$ -nin qiymətləri $|\cdot|$ norması təyin olunmuş B normalanmış fəzasındandır. N.-nin ölçülən olması üçün $S_R = \{x \in B : |x| < R\}$ kürələrinin $X^{-1}(S_R)$, $R \geq 0$ proobrazlarının ölçülən olması zəruri və kafidir.

NORMAL APPROKSİMASIYA « нормальная аппроксимация; normal approximation » – normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin paylanması approksimasiyasıdır.

Misal. X_n , $n = 1, 2, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $MX_n = 0$,

$$B_n = \sum_{j=1}^n MX_j^2 > 0, S_n = B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j$$

olsun. Onda mərkəzi limit teoreminə əsasən, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{S_n < x\} \rightarrow \Phi(x),$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. Əgər

$M|X_n|^3 < \infty$ olarsa, onda

$$|P\{S_n < x\} - \Phi(x)| < CL_n$$

berəbersizliyi doğrudur, burada $L_n = B^{-3/2} \sum_{j=1}^n M|X_j|^3$, C –

mütləq sabitdir. N. a. S_n üçün böyük xəyata səbəb olarsa, onda normal paylanmaya əsaslanan asimptotik ayrılışa baxmaq lazımdır (bax, Paylanma funksiyası; asimptotik düstur, Asimptotik normal çevirmə).

N. a.-ya digər misal ikiölçülü normal paylanmalı seçimdə seçimi korrelyasiya əmsalı r üçün aşağıdakı şəkildə ifadə olunan Fişer z – çevirməsidir.

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}.$$

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

NORMAL CAZİBƏ OBLASTI dayanıqlı G qanununun « нормального притяжения область устойчивого закона G ; domain of normal attraction of a stable law » – ehtimal F paylanma funksiyalarının çoxluğu ki, α , $-G$ qanununun xarakteristik göstəricisi, n^* , n – qat kompozisiya simvolu olduqda, $n \rightarrow \infty$ olarsa, hər hansı seçilmiş $a > 0$ və bütün x -lər və mərkəzləyici A_n ardıcılığı üçün

$$F^{n*}(an^{1/\alpha}x + A_n) \rightarrow G(x)$$

münasibəti doğrudur. N. c. o. G qanununun cazibə oblastının bir hissəsidir. Hər bir dayanıqlı qanun özünün N. c. o.-ndandır və bu halda $\alpha = 1$.

$F(x)$ paylanma funksiyasının $0 < \alpha < 2$ şərtini ödəyən α göstəricisi və $B_n = an^{1/\alpha}$ ardıcılığı ilə dayanıqlı G qanununun N. c. o.-na aid olması üçün

$$F(x) = (C_1 x^\alpha + o(1))|x|^{-\alpha}, x \rightarrow -\infty$$

və

$$F(x) = 1 - (C_2 x^\alpha + o(1))x^{-\alpha}, x \rightarrow \infty$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, $C_1 + C_2 > 0$.

$F(x)$ paylanma funksiyasının normal paylanmanın N. c. o.-na aid olması üçün $F(x)$ -in dispersiyasının sonlu olması zəruri və kafidir.

Operator dayanıqlı paylanmanın N. c. o. haqqında bax, Cazibə oblastı operator dayanıqlı paylanmanın.

Əd.: bax, Cazibə oblastı məqaləsinə.

NORMAL CAZİBƏ ZONASI « нормального притяжения зона; zone of normal attraction » – bax, Normal yığılma zonası.

NORMAL FƏZA « нормальное пространство; normal space » – ehtimal topoloji fəzadır ki, onun kəsişməyən hər bir qapalı çoxluqlar cütü açıq çoxluqlarla ayrılır. F_1 və F_2 – topoloji $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ fəzasında qapalı çoxluqlar və $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Əgər $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ normal fəza dırsa, onda ehtimal $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ və $U_2 \in \mathfrak{S}$ açıq çoxluqları vardır ki, $F_i \subseteq U_i$ və $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Bu tərif adi topoloji fəzalar üçün doğru olduğu kimi σ – topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

NORMAL KEÇİD FUNKSİYASI « нормальная переходная функция; normal transition function » – bax, Keçid funksiyası, Markov prosesi üçün.

NORMAL MARKOV PROSESİ « нормальный марковский процесс; normal Markov process » – bax, Sifir – vahid qanunu Markov prosesləri üçün, Qınıma anı.

NORMAL PAYLANMA « нормальное распределение; normal distribution » – ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm ehtimal paylanmalarından biridir. K. Pirsona (K. Pearson) məxsus «N. p.» termini təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimal paylanmalarının istifadə olduğu kimi, bir neçə təsadüfi kəmiyyətlərin, yeni sonluölçülü təsadüfi vektorların çoxölçülü birgə paylanmalar, təsadüfi elementlər və təsadüfi proseslərin ehtimal paylanmaları üçün də tətbiq olunur. N. p. əvvəllər Qauss qanunu, Qauss – Laplas paylanması, Q a u s s p a y l a n m a s ı kimi adlandırılmışdı. N. p.-nin ümumi tərif birölçülü halda aşağıdakı kimi verilir.

Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty), \sigma > 0 \quad (1)$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması n o r m a l paylanma adlanır (şəkil 1).

(1) ifadəsile verilən N. p.-lar ailəsi a və $\sigma > 0$ parametrlərindən asılıdır. Bu halda a və σ parametrlili normal qanuna tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x; a, \sigma)$

$$F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, x \in (-\infty, +\infty)$$

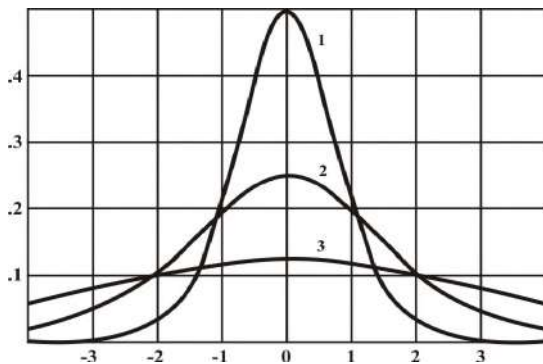
düsturu ilə təyin olunur. $a = 0$, $\sigma = 1$ olduqda, normal paylanma standart normal paylanma adlanır. Bu halda

$$F(x; a, \sigma) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

olur. Ümumi halda (2) düsturu ilə verilən N. p.-nin paylanma funksiyası $F(x; a, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ düsturu ilə təyin olunur. $\Phi(t)$

funksiyası və onun bezi təoremləri üçün geniş cədvəllər tərtib olunmuşdur (bax, [1], [2]).

$p(x; a, \sigma)$ funksiyasının qrafiki Qauss əyrisi adlanır.



Şəkil. 1. $a = 0$ və 1) $\sigma = 0.5$; 2) $\sigma = 1$; 3) $\sigma = 2$ hallarında birölçülü paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

$p(x; a, \sigma)$ funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur;
- 2) x -in bütün qiymətlərində müsbətdir, yeni Qauss əyrisi absis oxundan yuxarıdadır;
- 3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x; a, \sigma) = 0$, yeni absis oxu Qauss əyrisinin üfqi asimptotudur;
- 4) (1) düsturundan

$$p'(x; a, \sigma) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğu aydındır.

Əgər $x < a$ olarsa, $p'(x; a, \sigma) > 0$;

$x = a$ olarsa, $p'(x; a, \sigma) = 0$;

$x > a$ olarsa, $p'(x; a, \sigma) < 0$

olur. Deməli, $x = a$ qiymətində $p(x; a, \sigma)$ funksiyası

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ -yə bərabər maksimal qiymətini alır.

$$5) p''(x; a, \sigma) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right]$$

olduğundan, aydındır ki, $x = a \pm \sigma$ qiymətlərində $p''(\cdot)$ sıfıra bərabərdir. Qauss əyrisi bu nöqtələrdən keçərkən öz işarəsini dəyişir (bu nöqtələrdə funksiyanın qiyməti $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}$ -yə bərabərdir).

Beləliklə, $\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}\right)$ və $\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}\right)$

Qauss əyrisinin əylmə nöqtələridir.

6) $x - a$ fərqi $p(x; a, \sigma)$ -nin analitik ifadəsində ((1) düsturu) kvadratı ilə verildiyindən Qauss əyrisi $x = a$ düz xəttinə görə simmetrikdir;

7) σ sabit qalıb, a parametri dəyişdikdə, Qauss əyrisinin forması dəyişmir, o, yalnız absis oxu boyunca sürüşür: əgər a artarsa, əyri sağa, a azalarsa, əyri «paralel» olaraq sola sürüşür.

8) σ parametri artdıqda Qauss əyrisinin ordinatı kiçilir və əyri absis oxuna doğru sıxılır, σ azaldıqca əyri «hündürləşərək» ordinat oxu istiqamətində yuxarıya doğru «drtlir» (bax, şəkil 1).

$\xi(a, \sigma)$ parametrləri normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olduqda $|\xi - a| > k\sigma$ bərabərsizliyinin ehtimalı

$$P\{|\xi - a| > k\sigma\} = 1 - \Phi(k) + \Phi(-k)$$

k -nin artması ilə sürətlə azalır (bax, cədvəl).

k	Ehtimal	k	Ehtimal
1	0.31731	3	$0.26998 \cdot 10^{-2}$
2	$0.45500 \cdot 10^{-1}$	4	$0.63342 \cdot 10^{-4}$

Bu baxımdan $k = 3$ qiymətinə uyğun halda, tətbiqi məsələlərdə $P\{|\xi - a| > 3\sigma\}$ ehtimalı cədvəldən göründüyü kimi kiçik ədəddir.

Əgər $P\{|\xi - M\xi| \leq 3\sigma\} = 0.9973$ olarsa, ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyətinin normal qanunla paylanmış olduğunu fərz etmək olar, bu şərt «üç sigma» qaydası adlanır.

N. p.-ya bir çox təbiiq məsələlərdə təsadüf olunur. N. p.-nın nadir rola malik olduğunu ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremləri* nəzəri olaraq əsaslandırır (bax, *Laplas teoremi*, *Lya-punov teoremi*). Təsadüfi kəmiyyət çoxlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi ifadə olunursa və toplanan təsadüfi kəmiyyətlərdən maksimal cəm – təsadüfi kəmiyyətlə müqayisədə kiçik olarsa, onda cəm – təsadüfi kəmiyyətinin paylanması normal paylanmaya yaxınlaşır (bax, *Mərkəzi limit teoremi*).

N. p.-ya bəzi məsələlərin dəqiq həlli kimi də təsadüf olunur (təsadüfi hadisə və proseslərin qəbul edilmiş riyazi modeli çərçivəsində). Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin əsas model-lərindən biri Braun hərəkəti prosesi buna misaldır. Dəqiq N. p.-nın yaranmasına klassik misallar K. Qaussa (C. Gauss, müşahidələr xətlərinin paylanma qanunu) və C. Maksvelə (J. Maxwell, molekulların sürətlərinin paylanma qanunu) məxsusdur (bax, *Asılı olmamazlıq, Xarakterizasion teoremlər*).

İxtiyari qeyd olunmuş $t \in \mathbb{R}^n$ qiymətində (t, X) skalyar hasilə ya N. p.-ya malik olarsa və ya sabit olarsa (dispersi-yası sıfıra bərabər olan N. p. halı), onda $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş $X = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun paylanması və ya $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması **çoxölçülü normal paylanma** adlanır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxölçülü normal paylanmasının xarakteristik funksiyası

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i \mathbf{M}(t, X) - \frac{1}{2} Q(t) \right\}, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\mathbf{M}(t, X) = t_1 \mathbf{M}X_1 + t_2 \mathbf{M}X_2 + \dots + t_n \mathbf{M}X_n$$

– xətti forma,

$$Q(t) = \mathbf{M}(t, X - \mathbf{M}X)^2 = \sum_{k,l=1}^n \sigma_{kl} t_k t_l$$

– mənfi olmayan müəyyən kvadratik forma, $\|\sigma_{kl}\|$, – X vektorunun kovariasion matrisidir.

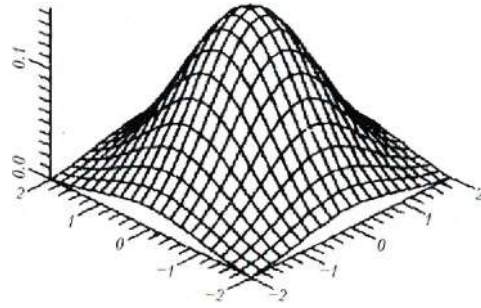
Müsbət – müəyyənlik halına uyğun N. p.-nın sıxlıq funksiyası (bax, şəkil 2)

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \exp \{ -Q^{-1}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) \}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada Q^{-1} , – Q -yə tərs kvadratik norma, $a_1, a_2, \dots, a_n$ parametrləri isə uyğun olaraq $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri, C sabiti isə

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \|\sigma_{kl}\|}}$$

düsturu ilə verilir. N. p.-nı təyin edən parametrlərin ümumi sayı $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ – 1-ə bərabər olub, n artdıqca sürətlə artır ($n=1$ olduqda, o, 2-yə, $n=5$ olduqda 20-yə, $n=10$ olduqda 65-ə bərabərdir).



Şəkil 2. İkiölçülü normal paylanmanın sıxlıq funksiyaları;

$$a_1 = a_2 = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 1, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Çoxölçülü N. p. **çoxölçülü statistik analizin** əsas modelidir. Bu paylanma təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinə də istifadə olunur (N. p. sonsuzölçülü fəzalarda baxıldığı hallarda; bax, *Təsadüfi element, Viner ölçüsü, Viner prosesi, Qauss prosesi*).

N. p.-nın əsas xassələrindən aşağıdakıları da qeyd etmək zəruridir. N. p.-ya malik asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanması N. p.-dır. Əksinə, əgər $\xi = \xi_1 + \xi_2$ N. p.-ya malikdirsə və ξ_1, ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda ξ_1 və ξ_2 -nin paylanması N. p.-dır (*Kra-mer teoremi*); əgər ξ -nin paylanması N. p.-ya «yaxın» paylanmırsa, onda ξ_1 və ξ_2 -nin paylanması da N. p.-ya «yaxın» paylanmadır. Mühüm paylanmalardan *loqarifmik normal paylanma*, *qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma*, *Styudent paylanması*, *Uişart paylanması*, *Fişer z – paylanması*, *Hotelling T^2 paylanma*, *xi – kvadrat paylanma* N. p. ilə əlaqədardır.

Müşahidələrin nəticələri əsasında N. p. parametrlərinin qiymətləndirilməsi ilə bağlı məsələlər haqqında *Meylsiz statistik qiymət* məqaləsinə bax. Normal paylanma olub-olmaması hipotezinin yoxlanılması məsələsi ilə bağlı *Riyazi statistika*; qeyri – parametrik metodlar məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и её нормированных производных, М., 1960; [3] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [4] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [5] К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [6] К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

NORMAL SİNFİ, ÇOXLUQLARIN « нормальный класс множеств; normal class of sets » – bax, *Monoton çoxluqlar sinfi*.

NORMAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ « нормальных уравнений система; system of normal equations » –

$\Phi^T W \Phi \theta = \Phi^T W y$ sistemidir və bu münasibət aşağıdakı faktı ifadə edir: $\Phi \theta$ regressiya funksiyasının ən kiçik kvadratlara metodu ilə alınmış $\Phi \theta$ öngörül statistik qiyməti

$$y = \Phi \theta + \varepsilon, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^N, \quad \theta \in \mathbb{R}^p,$$

$$M\varepsilon = 0, \quad \text{cov} \varepsilon = W^{-1}$$

xətli *reqression eksperimentinin* ölçmələr vektoru y -in *reqression eksperiment matrisi* Φ -in sütunlarını örtən altfəzaya ortoqonal proyeksiyasıdır ($\|x\|^2 = x^T W x$ metrikasında). Əgər Φ matrisinin rəngi p -yə bərabərdirsə, onda ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymət $\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W y$ birqiymətli təyin olunur, əks halda meyilsiz statistik qiymətləri olan $/^T \hat{\theta}$ xətti funksiyalarının statistik qiymətləri $/^T \hat{\theta}$ birqiymətli təyin olunur, burada $\hat{\theta}$ – N. t. s.-nin ixtiyari həllidir.

NORMAL TƏSADÜFİ ELEMENT « нормальный случайный элемент; normal random element » – bax, *Təsadüfi element*.

NORMAL TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « нормальная случайная величина; normal random variable » – bax, *Qauss təsadüfi kəmiyyəti*.

NORMAL TİPLİ PROSES « нормального типа процесс; normal type process » – bax, *Spektral nəzəriyyə*(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

NORMAL YİĞİLMƏ ZONASI « нормальной сходимости зона; zone of normal convergence », normal cazibə zonası – eht. $0 \leq x \leq \psi(n)$, $n = 1, 2, \dots$ intervallının ardıcılığıdır ki, bunlar üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{P\{Z_n \geq x\}}{1 - \Phi(x)} \rightarrow 1, \quad \frac{P\{Z_n < -x\}}{\Phi(-x)} \rightarrow 1 \quad (*)$$

münasibətləri x üzrə müntəzəm ödənilir; burada $Z_n = (X_1 + \dots + X_n) / \sqrt{n}$ – asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin normalanmış cəmləridir, $M X_1 = 0$, $M X_1^2 = 1$ və Φ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır. $\psi(x)$ -in N. y. z.-nda kəsilməz və $x \rightarrow \infty$ olduqda qeyri-məhdud artan funksiya olduğu fərz olunur. N. y. z. [1]-də daxil olunmuş və öyrənilmişdir (bax, [2]). Bu anlayış daha ümumi strukturlu Z_n təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığı üçün də təyin olunmuşdur, məs., müxtəlif paylanmalara malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri halında (bax, [3] və *Böyük yayımlar ehtimaları*).

N. y. z.-na ikitərəfli variantda olduğu kimi birtərəfli variant üçün də baxıla bilinir (bax, məs., [5] – böyük yayımlar haqqında Kramer teoreminin birtərəfli versiyası halı).

Mərkəzi limit teoremindən aydındır ki, baxılan halda N. y. z. vardır. Müəyyən artım tərtibi ilə verilən $\psi(x)$ funksiyalarının (*) münasibətini ödəməsi üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda $P\{|X_1| > t\}$ ehtimalı üzərinə əlavə şərtin qoyulması tələb olunur. Belə ki, $\psi(x)$ -in $\psi(x) = \sqrt{q \log x}$, $q > 0$ şəklində seçilməsi üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|X_1| > t\} = o(t^{-2-q} (\log t)^{(1+q)/2})$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu tip N. y. z. tədrici yayımlar zonası adlanır (bax, [4]). *Kramer*

674 NORMALANMIŞ

teoremine əsasən (*) münasibəti yalnız artım tərtibi $o(x^{1/6})$ -ni aşmayan $\psi(x)$ funksiyaları üçün ödənilə bilər.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 2, с. 145–63; в. 4, с. 377–91; 1962, т. 7, в. 2, с. 121–34; [2] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] С л а с т н и к о в А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 340–57; [5] З о л о т а р е в В. М., «Лит. матем. сб.», 1965, т. 5, № 2, с. 233–50.

NORMALANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının « нормирование последовательности случайных величин; norming of sequences of random variables » – bax, *Mərkəzlənmə və normalanma(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının*.

NORMALANMIŞ ADAMAR MATRİSİ « нормализованная матрица Адамара; normalized Hadamard matrix » – bax, *Adamar matrisi*.

NORMALANMIŞ BUL CƏBRİ « нормированная булева алгебра; normalized Boolean algebra » – bax, *Təsadüfi hadisə*.

***NORMALANMIŞ KORRELYASIYON FUNKSIYA** « нормированная корреляционная функция; normalized correlation function » – bax, *Korrelyasiya funksiyası*.

NORMALANMIŞ QARŞILIQLI KORRELYASIYA FUNKSIYASI təsadüfi proseslərin « нормированная взаимная корреляционная функция случайных процессов; normalized cross correlation function of random processes » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası*.

NORMALANMIŞ LATIN DÜZBUCAQLISI « нормализованный латинский прямоугольник; normalized Latin rectangle » – bax, *Latin düzbucaqlısı*.

NORMALANMIŞ ÖLÇÜ « нормированная мера; normed measure » – bax, *Ölçü*.

NORMALANMIŞ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « нормированная случайная величина; standardized random variable » – ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə $\xi^* = (\xi - M\xi) / \sqrt{D\xi}$ xətti çevirməsi ilə əlaqəli ξ^* təsadüfi kəmiyyətidir (fərz olunur ki, $M\xi$ və $D\xi$ sonludurlar). N. t. k.-in riyazi gözləməsi həmişə sıfır, dispersiyası 1-ə bərabərdir, $M\xi^* = 0$, $D\xi^* = 1$. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti (a, σ) parametrləri normal qanunla paylanmışdırsa, onda N. t. k.-ə keçdikdə $\xi^* = (\xi - a) / \sigma$ təsadüfi kəmiyyətinin vasitəsilə, ixtiyari $\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$ hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimi sadə şəkildə ifadə olunur:

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \Phi((x_2 - a) / \sigma) - \Phi((x_1 - a) / \sigma);$$

bu düsturun sağ tərəfindəki $\Phi(x)$ Laplas funksiyası üçün, yeni

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$$

üçün cədvəl tərtib olunmuşdur.

NÖQTƏVİ PAYLANMA QANUNU т е с а д ү ф и
ç o x l u ğ u n « т о ч е ч н ы й з а к о н р а с п р е д е л е н и я
случайного множества; **space law of the distribution**
of random set » – $\mathcal{S}$ topoloji fəzasında təsadüfi qapalı çoxluğun müşayiətedici funksionalının $\mathcal{S}$ -in bütün sonlu altçoxluqlarının çoxluğuna daralmasıdır. Bax, *Təsadüfi çoxluq*.

NÖQTƏVİ PROSES « т о ч е ч н ы й п р о ц е с с ; **point process** » – $\mathbb{R}^1$ -də $\{t_i, g_i\}, \dots < t_0 < 0 \leq t_1 < t_2 < \dots, g_i = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığına uyğun *təsadüfi prosesdir*. t_i kəmiyyətləri təsadüfi N. p.-in nöqtələri, g_i isə t_i nöqtələrinin təkrarlanma sayıdır. N. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsinə xidmətlənmə üçün daxil olan sifarişlərin anları ilə, biologiyada əsəb tellərinin impuls anları ilə yaranır. Təkrarlıq sayı g_i kütləvi xidmət sistemində eyni zamanda daxil olan sifarişlər qrupunun ölçüsünə bərabərdir (bax, [1]).

N. p.-ə $t > 0$ olduqda $t_i \in (0, t]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i -lərin cəmi və ya $t \leq 0$ olduqda $t_i \in (t, 0]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i -lərin cəminə bərabər olan $N(t)$ sayıcı təsadüfi prosesini qarşı qoymaq olar. $N(t)$ prosesi $\mathbb{R}^1$ -də N. p.-i birqiymətli təyin edir. İxtiyari $u < v$ edədləri üçün $N(v) - N(u)$ kəmiyyəti $t_i \in (u, v]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i -lərin cəminə bərabərdir. Bəzən N. p.-ə t -nin yalnız mənfi olmayan qiymətləri üçün baxılması məqsəduyğundur. $MN(t) = \Lambda(t)$ riyazi gözləməsi N. p.-in aparıcı funksiyası adlanır. $\Lambda(t)$ -nin artımları N. p.-in moment ölçüsünü birqiymətli təyin edir. Aparıcı funksiyanın töreməsi varsa, o. N. p.-in intensivliyi adlanır. Əgər $N(t)$ stasionar artımlı proses olarsa, nöqtəvi proses stasionar N. p. adlanır. Stasionar N. p. üçün $\Lambda(t) = \lambda t$ olur. Əgər N. p.-in bütün sıçrayışları $\Delta N(t_i) = N(t_{i+1}) - N(t_i) = g_i = 1$ şərtini ödəyirsə, N. p. sadə N. p. adlanır.

$\{t_{ni}, g_{ni}\}, i = 1, \dots, k_n$ N. p.-nin sayıcı prosesi $N_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} N_i(t)$ olan seriyası $\{t_{ni}, g_{ni}\}, i = 1, \dots, k_n$ N. p.-nin superpozisiyası adlanır. Əgər ixtiyari t üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq k_n} P_{ni} \{N_{ni}(t) \neq 0\} = 0$$

olarsa, N. p.-in seriyaları ardıcılığı sonsuz kiçilən adlanır, burada $P_{ni} = \{t_{ni}, g_{ni}\}$ N. p.-nin hadisələr çoxluğunda ehtimal paylanmasıdır.

Əgər N. p.-in seriyaları ardıcılığı sonsuz kiçiləndirsə, onda

$$N_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} N_{ni}(t) \text{ sayıcı prosesinin aparıcı funksiyası}$$

$\Lambda(t)$ olan Puasson prosesinə zəif yığılması üçün ixtiyari $u < v$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} P_{ni} \{N_{ni}(v) - N_{ni}(u) = 1\} = \Lambda(v) - \Lambda(u),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} P_{ni} \{N_{ni}(u) \geq 2\} = 0$$

şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir (bax, [2]).

$0 < c < 1$, c ehtimalı ilə asılı olmayan seyrəklənən əməli ondan ibarətdir ki, $\{t_i, g_i\}$ N. p.-nin hər bir t_i nöqtəsi $C_{g_i}^{2i}$ ehtimalı ilə xaric olunur, təkrarlıq sayı l_i olan, $1 \leq l_i \leq g_i$, t_i nöqtəsi $C_{g_i}^{2i} (1-c)^{l_i} C_{g_i-l_i}$ ehtimalı ilə, digər nöqtələrin seyrəklənmə nəticələrindən asılı olmayaraq xaric olunmur. Seyrəklənmiş N. p.-ə $N_c(t)$ sayıcı prosesi uyğundur.

Əgər $\lim_{|S| \rightarrow \infty} N(S)/|S| = L$ münasibəti ehtimala görə ödənilsə, onda $c \uparrow 1$ olduqda $N_c(t/(1-c))$ prosesi intensivliyinin qiyməti təsadüfi λ olan Puasson prosesinə zəif yığılır (bax, [3], [4]) və $P\{\lambda \leq x\} = P\{L \leq x\}$.

Qarşılıqlı asılı olmayan $\{\xi_i\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı sadə N. p.-in t_i nöqtələrinin asılı olmayan $t'_i = t_i + \xi_i$ yerindəyişmələrini təyin edir. Asılı olmayan yerindəyişmələr nəticəsində N. p.-in Puasson prosesinə zəif yığılması üçün şərtlər alınmışdır (bax, [5]).

$\{t_i, g_i\}, \dots < t_0 < 0 \leq t_1 < t_2 < \dots$ N. p.-ne $\{t'_i, g_i\}, \dots < t'_0 < t'_1 < t'_2 < \dots$ N. p.-ni qarşı qoymaq olar, burada $t'_i = t_i - t_1$, $t'_1 = 0$. $\{t'_i, g_i\}$ N. p. $\{t_i, g_i\}$ N. p. üçün sinxron N. p. adlanır. P ehtimallar paylanması $\{t_i, g_i\}$ stasionar N. p. təyin etdiyi fərz olunur. P paylanmasına uyğun olan $\{t'_i, g_i\}$ sinxron N. p.-nin ehtimal paylanması P^0 Palm paylanması adlanır. P və P^0 paylanmaları arasında uyğunluğun xüsusi halı sadə N. p.-lər üçün, bütün g_i -lərin $g_i = 1$ olduğu halında, aşağıdakı Palm – Xinçin tənlikləridir:

$$P\{N(t) \geq k\} = \lambda \int_0^t P^0\{N^{-1}(u) = k-1\} du,$$

burada $N(t)$ və $N'(t)$ – uyğun olaraq $\{t_i, 1\}$ N. p.-ne və $\{t'_i, 1\}$ sinxron N. p.-inə uyğun sayıcı proseslərdir (bax, [6], [7]).

$N(t)$, $t \geq 0$ sayıcı prosesinə $\mathcal{A}_t = \sigma(N(s), s \leq t)$ σ – cəbrlər axınına nəzərən submartinqal kimi baxmaq olar. Sadə N. p.-lərin tədqiqində martinqallar nəzəriyyəsindən istifadə olunur (bax, [8]). Əsas anlayışlardan biri N. p.-in kompensatoru anlayışdır. Tətbiq üçün özü-özünə ehtizazlanan N. p.-lər sinfi mühüm əhəmiyyətə malik olub, martinqallar nəzəriyyəsi ilə sıx əlaqədardır (bax, [9], [10]).

Borel çoxluqlarının σ – cəbri $\mathfrak{A}$ və məhdud Borel çoxluqlarının sinfi $\mathfrak{A}_0$ olan tam separabel metrik $\mathcal{A}$ fəzasında verilmiş N. p.-lərin ümumi nəzəriyyəsi N. p. anlayışına tamqiymətli lokal məhdud təsadüfi ölçü kimi yanaşmaya əsaslanır.

M – tamqiymətli lokal məhdud $\phi(\cdot)$ ölçülərinin çoxluğu olsun; $\phi(b) < \infty$, $B \in \mathfrak{A}_0$, $\phi(B) = 0, 1, 2, \dots$. M çoxluğunda

$\{\varphi(\cdot): \varphi(B) = k\}$, $k = 0, 1, \dots$, $B \in \mathfrak{A}_0$ altçoxluluğunun doğruluğu $\mathfrak{M}$ σ -cəbri verilir. Vəziyyətlərinin faza fəzası $(A, \mathfrak{A}_0)$ olan Φ N. p. $(M, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında P ehtimal ölçüsünün verilməsi ilə təyin olunur.

$\delta_a(\cdot)$, $a \in A$ nöqtəsində toplanmış vahidi ölçü, yeni $a \in B$ olduqda $\delta_a(B) = 1$, $a \notin B$ olduqda isə $\delta_a(B) = 0$ şərtlərlə təyin olunan ölçü olsun. Faza fəzası $(A, \mathfrak{A}_0)$ olan Φ N. p.-nin realizasiyası

$$\Phi(\cdot) = \sum_{a \in S_\Phi} \Phi(\{a\}) \delta_a(\cdot)$$

bərabərliyi ifadə olunur, burada $S_\Phi = \{a: \Phi(\{a\}) > 0\}$, Φ N. p.-nin nöqtələri çoxluğu, $\Phi(\{a\})$ kəmiyyəti isə $a \in A$ nöqtəsinin təkrarlıq sayıdır.

$\mathbb{R}^1$ -də $\{t_i, g_i\}$ N. p. üçün daxil edilmiş bir çox anlayışlar $(A, \mathfrak{A})$ faza fəzasında Φ N. p. üçün ümumiləşdirilir (bax, *Kempbel ölçüsü*, *Kempbel teoremi*, *Moment ölçüsü nöqtəvi prosesin*, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*, *Ordinar nöqtəvi proses*, *Sade nöqtəvi proses*, *Sonsuz bölünən nöqtəvi proses*).

N. p.-lər nəzəriyyəsinin nəticələri müxtəlif məsələlərdə tətbiq olunur (bax, [11]), təsadüfi proseslərin realizasiyalarının səviyyələrinin kəsilmələrinin tətbiqində (bax, [12]), biologiyada populyasiyanın analizində istifadə olunur (bax, [13]).

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 1, B., 1983; [2] Г р и г е л и о н и с Б. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 189–94; [3] Б е л я е в Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 175–84; [4] N a w g o t z k i K., «Math. Nachr.», 1962, Bd 24, S. 201–17; [5] К е р с т а н Ы., М а т т е с К., Безгранично делимое точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [6] Х и н ч и н А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [7] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1985; [8] L i p t s e r R. S., S h i r y a e v A. N., Statistics of random processes. II Applications, N. Y. – [a. o.], 1978; [9] S t u d e r D. L., Random point processes, N. Y. – [a. o.], 1975; [10] С о х D. R., I s h a m V., Point processes, L. – N. Y., 1980; [11] Stochastic point processes, ed. By P. A. W. L e w i s, N. Y. – [a. o.], 1972; [12] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [13] D i g g l e P. J., Statistical analysis of spatial point patterns, N. Y. – [a. o.], 1983; [14] K a r r A. F., Point processes and their statistical inference, N. Y. – [a. o.], 1986.

NÖQTƏVİ PROSES; а р а г і с і ф у н к ц і я «точечный процесс; ведущая функция; leading function of a point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES; asılı olmayan seyrəklənmə «точечный процесс; независимое прореживание; independent thinning of a point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES; asılı olmayan yerindəyişmə «независимый сдвиг точечного процесса; independent shift of a point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES ən sadə «точечный процесс простейший; simplest point process» – bax, *Puasson nöqtəvi proses*.

676 NÖQTƏVİ

NÖQTƏVİ PROSES; интенсивность «точечный процесс; интенсивность; intensity of a point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES keçmiş məhdud təsirli «точечный процесс с ограниченным последствием; recurent point process» – $\dots < t_{-1} < t_0 < 0 \leq t_1 < t_2 < \dots$, münasibətini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərin $\{t_i\}$ ardıcılığı ilə verilən və bu ardıcılığın bütün $s_i = t_{i+1} - t_i$ intervalları qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan *nöqtəvi prosesdir*. Keçmiş məhdud təsirli N. p. bərpə prosesləri ilə sıx əlaqəlidir (bax, *Bərpə nəzəriyyəsi*).

$$F(x) = P\{s_i \leq x\}, i \neq 0, m = \int_0^\infty x dF(x)$$

olsun.

$$P\{-t_0 > u, t_1 > v\} = \frac{1}{m} \int_{u+v}^\infty [1 - F(x)] dx$$

olarsa, keçmiş məhdud təsirli N. p. stasionar proses olur.

Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində keçmiş məhdud təsirli N. p.-lərə kütləvi xidmət sistemində daxil olan tələblərin giriş axını modeli kimi baxılır.

NÖQTƏVİ PROSES(i) К о к с «точечный процесс Кокса; Cox point process» – bax, *Koks nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES; kompensator «точечный процесс; компенсатор; compensator of a point process» – bax, *Kompensator(u) nöqtəvi prosesin*.

NÖQTƏVİ PROSES qrupda «точечный процесс на группе; point process on a group» – lokal kompakt topoloji qrupda *nöqtəvi prosesdir*. Soldan və ya sağdan qrup əməlinə nəzərən invariant N. p.-lərə baxılır. Əgər qrupda N. p. sonlu intensivliyə malik olarsa və sol – (sağ –) invariant olarsa, onda onun sağ moment ölçüsü sol – (sağ –) invariant Haar ölçüsüdür. Qruplarda N. p.-lər nəzəriyyəsinin spesifik anlayışı *Palm paylanmalarıdır*; bu paylanmalar aşağıdakı kimi təyin olunur. Qrupda solinvariant sonlu intensivlikli N. p.-in realizasiyalarının $\{y_i\}$ çoxluğundan olan hər

bir y elementinə müvafiq nişan – $\{y^{-1}y_i\}_i$ sol «getirilmiş» realizasiyası qarşı qoyulur. Alınan nişanlanmış N. p.-in sağ moment ölçüsü Λ zəruri olaraq faktorlanır (bax, *Həndəsi proses*): $\Lambda = H + \lambda P_0$, burada λ – N. p.-in intensivliyi, H – qrupun sol Haar ölçüsüdür. «Tipik getirilmiş realizasiyanın» paylanması P_0 sol *Palm paylanması* adlanır. Sağinvariant N. p.-in sağ *Palm paylanması* sağ «getirilmiş» $\{y_i y^{-1}\}_i$ realizasiyası vasitəsilə analoji təyin olunur. Bir qədər kobud deyimdə, *Palm paylanması* qrup vahidinin realizasiyaya aid olması şərtinə nəzərən N. p.-in şərti paylanmasıdır.

N. p.-ləri $\mathbb{R}^n$ -də araşdırdıqda affin qruplarda N. p.-lər meydana gəlir. Aşağıda iki misal verilir.

1) ω – müstəvidə Puasson N. p.-nin təsadüfi realizasiyası, X – ω -dan «səhə və şeyp» üzrə seyrəldilmiş nöqtələr üçlüyünün sonlu intensivlik prosesi olsun (bax, *Həndəsi proses*, misal 1). S sahəsinin üçbucaq əmələ gətirən x nöqtələrinin hər bir

nizamlanmış üçlüyünə yeganə affin çevirməsi uyğundur və bu çevirmə x -i qeyd olunmuş nöqtələr üçlüyünə çevirir, bu nöqtələr isə həmin sahənin üçbucağını əmələ gətirir. X prosesi müstəvinin affin çevirmələrinin sahəsini olduğu kimi saxlayan qrupda biinvariant N. p. doğurur.

2) Müstəvidə Puasson düz xətlər prosesinin realizasiyalarının hər bir düz xəttində asılı olmayan Puasson nöqtələr prosesinə baxılır. Hər bir «düz xətt və nöqtə» cütünə müstəvinin Evklid hərəkəti uyğundur. Müstəvidə alınmış nöqtəvi proses müstəvinin Evklid hərəkətləri qrupunda biinvariant N. p. doğurur. Uyğun Palm paylanması Palm düz xətlər prosesinin paylanması təyin olunması üçün əsas olur. Şəbəkəvari qruplarda N. p.-lərin öyrənilməsi Zigel məsələsinə gətirir.

Əd.: [1] Mecke J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 9, S. 36–58.

NÖQTƏVİ PROSES; момент ölçüsü «точечный процесс; моментная мера; moment measure of a point process» – bax. *Moment ölçüsü nöqtəvi prosesin.*

NÖQTƏVİ PROSES multivariant «точечный процесс мультивариантный; multivariant point process» – bax. *Multivariant nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES nişanlanmış «точечный процесс маркированный; marked point process» – bax. *Nişanlanmış nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES ordinar «точечный процесс ординарный; ordinary point process» – bax. *Ordinar nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES(i) Puasson «точечный процесс пуассоновский; Poisson point process» – bax. *Puasson nöqtəvi prosesi.*

NÖQTƏVİ PROSES sadə «точечный процесс простой; simple point process» – bax. *Sadə nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES sonsuz bölünən «точечный процесс безгранично делимый; infinitely divisible point process» – bax. *Sonsuz bölünən nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES stasionar «точечный процесс стационарный; stationary point process» – bax. *Nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ STATİSTİK QIYMƏT «точечная оценка; point estimator» – 1) qiymətləndirilən parametrin və ya parametrik funksiyanın fəzasının ayrı-ayrı nöqtələri həll kimi qəbul edilən *statistik qiymətdir*. «N. s. q.» termini əsas etibarilə, yalnız N. s. q.-i *interval statistik qiymətinə* qarşı qoyduqda istifadə olunur. Məs., seçimi orta $\bar{x}$ normal paylanmanın orta qiymətinin N. s. q.-idir, lakin $(\bar{x} - t_{p,s}/\sqrt{n}, \bar{x} + t_{p,s}/\sqrt{n})$ onun interval statistik qiymətidir (etibarlı interval).

Əd.: [1] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Леман Э., Теория точечного оценивания, пер. с англ., М., 1991.

2) hər hansı təsadüfi hadisə və ya proses üzərində aparılan bir və ya bir neçə asılı olmayan müşahidələrin nəticələrinin müşahidəçiyə məlum olmayan ehtimal paylanması $P\{\cdot\}$ -nin *statistik qiymətidir*. Müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün elementar nəticələri ω -ların ölçülən fəzası $(\Omega, \mathcal{A})$ -nin məlum olduğu fərz olunur, P -ni $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında bütün

ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ -nin nöqtəsi kimi qiymətləndirmək tələb olunur. Nəməlum P paylanmasının hər hansı xarakteristikalarının statistik qiymətlərindən N. s. q. bu cəhəti ilə fərqlənir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi əhəmiyyəti əksərən onunla təyin olunur ki, o, hər hansı təsadüfi hadisə və ya prosesin riyazi modeli üzrə onun müşahidə olunan tezlik xarakteristikalarını daha çox və ya daha az dəqiqliklə və daha çox və ya daha az etibarlılıqla öncədən verə bilər. Statistik qiymətləndirmə məsələləri qeyd olunan mənada ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərinə tərs məsələdir.

Statistik həllər nəzəriyyəsinin tələb etdiyi kimi N. s. q. məsələsinin qoyuluşuna $L(P, P^*)$ itki funksiyası daxildir, bu funksiya

müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin paylanması P verildiyi hallarda P^* həllinin qəbul edilməsindən alınan itkiləri xarakterizə edir. Xüsusi halda, P^* həllinin xətasını $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ çoxluğunda hər hansı bir metrikada ölçmək olar (bax. [3]), məs., $|P^* - P|$ variasiyası üzrə məsafə ilə.

Riyazi statistikada, adətən, üç tip ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzalarına baxılır: 1) $\mathcal{A}$ – sonlu cəbr olduqda, bu halda Ω – dizyunkt $\mathcal{A}$ – atomların sonlu birləşməsidir; 2) Ω – dizyunkt $\mathcal{A}$ – atomların hesabı birləşməsi olduqda; 3) $(\Omega, \mathcal{A})$ – Lebeq ölçülən fəza olduqda, yeni $(E, \mathcal{L})$ fəzasının qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı ölçülən obrazı olduqda, burada $\mathcal{L}$, $E \subset R$ vahid uzunluqlu parçanın bütün mütləq Lebeq altçoxluqlarının σ -cəbridir. Asılı olmayan müşahidələr sayı N -in artması ilə N. s. q. məsələsinin əqləbatan qoyuluşları qeyd olunan hər bir tip üçün bir-birindən fərqlənir.

Riyazi statistikanın bir çox qeyri – trivial tərs məsələləri kimi 3) tipli çoxluqlar üçün N. s. q. məsələsi korrekt deyildir (o cümlədən, variasiya üzrə məsafənin xətasının ölçülməsində). Məsələnin korrektiliyi üçün müşahidə olunan P haqqında əlavə, kəmiyyətçə aprior informasiya tələb olunur (bax. [4]). Riyazi statistikada bu qəbildən məhdudiyyətlərin zəruriliyi onun inkişafının ilkin mərhələlərindən intuitiv aydın idi.

N. s. q. məsələsinin korrekt olduğu təbii geniş altçoxluqlar aşağıdakı şərtlə seçilir: müşahidə olunan P ölçüsü məlum P_0 ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir. Onda P -ni təyin etmək üçün histoqram qurmaq lazımdır (bax. [5], [6]). Lakin belə altçoxluqlar olduqca geniş olur. Bunlarda 2) tipli çoxluqlarda olduğu kimi P -yə görə müntəzəm dəqiq və etibarlı statistik qiymətlər yoxdur. Əqləbatan, daha dar sinifləri informasiya diametrləri (rus. поперевах) terminləri ilə ayırd etmək olur (bax, [3]); P^* -nu qurmaq üçün onun sıxlıq funksiyanının loqarifminin funksiyaalan xətti aqreqatı ilə yaxınlaşmasından istifadə edilir.

Riyazi statistikanın klassik obyektı hamar, parametrikləşdirilmiş $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailələridir, θ – ədədi və ya vektor parametrdir. Belə altçoxluqlar üçün N. s. q. məsələsi paylanmanın parametrlərinin qiymətləndirilməsinə gətirilir, belə ki, belə ailələr üçün bütün $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ çoxluğundan deyil, yalnız ailənin özündən qiymətlər

alan P^* statistik qiymətləri ilə kifayətlənmək olar (bax. [3]).

Əgər universal itki funksiyası $L(P, P^*)$ kimi Kullbak – Leylber – Sanovun

$$I[P^*: P] = \int_{\Omega} [\ln\{d\omega\} - \ln P^*\{d\omega\}] P\{d\omega\} \quad (1)$$

ikiqat $I[\mathbf{P}^*: \mathbf{P}]$ informasiyası götürülsə, onda baxılan məsələdə

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \inf_{\Pi(N)} \sup_{\theta} \mathcal{R}_{\Pi(N)}(\mathbf{P}_\theta) = \dim \theta \quad (2)$$

olur, burada $\mathcal{R}$ riski N müşahidələri üzrə həlledici $\Pi(N)$ qaydasından istifadə edildikdə

$$\mathcal{R}_{\Pi(N)}(\mathbf{P}_\theta) = \int_{cap(\Omega, \mathcal{A})} \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} 2I[\mathbf{P}; \mathbf{P}_\theta] \times \\ \times \Pi(\omega_1, \dots, \omega_N; d[\mathbf{P}^*]) \mathbf{P}_\theta\{d\omega_1\} \dots \mathbf{P}_\theta\{d\omega_N\}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, $d[\mathbf{P}^* \{ \cdot \}]$ üzrə integral təsadüfi ölçülər nəzəriyyəsi mənasında anlaşılır (bax. [7], [3]). (2) münasibəti parametrin optimal qiymətləndirilməsinin bütün nəzəriyyəsinin yığcam ifadəsini müəyyən edir.

Universal itki funksiyalarının təbii sinfi (bax. [3]) statistik həllər qaydası kateqoriyasına nəzərən monoton invariant, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ -nün bütün birləşmələrində $L(\mathbf{P} \text{ III}, \mathbf{Q} \text{ III}) \leq L(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ şərti ödənilən və mənə kəsib edən III həlledici qaydasının $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ funksiyalarının sinfidir. Məs., (1) funksiyası və variasiyası üzrə məsafə bu sinfə aiddirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, monoton metrika üçün

$$p(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \frac{1}{8} \rho(R_{1/2}, R_{1/4}) \cdot |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada R_θ , $-R_\theta(\varepsilon_1) = \theta$, $R_\theta(\varepsilon_2) = 1 - \theta$ kimi iki nəticəsi olan ehtimal paylanmasıdır. Analogi olaraq, əgər L - ixtiyari $\mathbf{P}$ üçün $L(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = 0$ şərtini ödəyən monoton itki funksiyasıdırsa və $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q} \Rightarrow L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) > 0$ olarsa, onda $0 \leq z \leq 2$ qiymətlərində ele monoton ciddi müsbət $g(z)$ funksiyası vardır ki, $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq g(|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|)$ bərabərsizliyi doğrudur, burada $g(\cdot)$, $-1 \leq x, y \leq 1$ kvadratında $L(R_x, R_y)$ funksiyasının qiymətləri ilə təyin olunur. Ona görə də, N. s. q. məsələsinin korrektiliyi haqqında yuxarıda qeyd olunanlar bu həlledici qaydanın xətasının ölçülməsi üçün göstərilən qaydalarda da öz qüvvəsində qalır (bax. [8]).

Əgər xəta hər hansı zəif metrikada qiymətləndirilsə, N. s. q. məsələsi korrekt olur, məs., C və L_2 -də paylanma funksiyaları arasında məsafə ilə, yaxud daha ümumi halda Levi - Proxorov metrikasında [bu fakt Qlivenko teoremi (bax. [9]) və onun ümumiləşmələrindən alınır]. Bu qayda universal deyildir, belə ki, o, $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasının təsvirindən asılıdır. Bundan başqa, zəif metrikada paylanmaların yaxınlığından ixtiyari məhdud ölçülən funksiyaya görə bunların orta qiymətlərinin yaxınlığı haqqında mülahizə yürütmək olmur.

[3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Ченцов Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 15-31; [5] Абу-Жауде С., «Ann. Inst. H. Poincaré», Sec. B., 1976, т. 12, р. 213-31; [6] Надарая Э. А., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1976, т. 82, № 2, с. 277-80; [7] Прохоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 1, с. 53-55; [8] Ченцов Н. Н., «Дополнение 1 к кн.: Девро й Л., Дьерфи Л., Непараметрическое оценивание плотности», L_1 -подход, пер. с англ., М., 1988; [9] Гливенко В. Н., «Giozn Ist. Ital. degli Attuari», 1933, т. 4, № 1, р. 1-10.

678 NÖQTƏVİ

NÖQTƏVİ TƏSADÜFİ MEYDAN «точечное случайное поле; random point field» - $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən

fəzasında ehtimal ölçüsüdür, burada Ω - ixtiyari məhdud V altçoxluluğu ilə $N_V(\omega)$ -nin sonlu kəsişməsi olan, hər hansı metrik fəzada bütün hesabı ω altçoxluluqlarının çoxluğu, $\mathcal{A}$, - Ω fəzasının N_V təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu altçoxluluqlarının σ - cəbridir.

Бак, *Нөqtəvi təsadüfi proses.*

Әд.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

NÖQTƏVİ TƏSADÜFİ PROSES q o ş u l m u ş

təsadüfi kəmiyyətlərli «точечный случайный процесс с присоединенными случайными величинами; point random process with adjoint random variables» - ele $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$

kəsilen təsadüfi prosesidir ki, onun kəsilmə nöqtələri t_n -lər düz xətt üzərində nöqtəvi təsadüfi proses əmələ gətirir (yəni $\{t_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ - heqiqi təsadüfi kəmiyyətlərin monoton artan ardıcılığıdır), $t_{n-1} < t \leq t_n$ intervallarında isə $\zeta(t)$ prosesi sabit ζ_n qiymətlərini alır və bunlar eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır ki, onların orta qiyməti m və dispersiyası σ^2 -nin verildikləri fərz olunur. Xüsusi halda, $t_n = nT_0 + \theta$, T_0 - qeyd olunmuş ədəd, θ , - T_0 uzunluqlu intervalda müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətləri N. t. p. riyazi gözləməsi $M\zeta(t) = m$ və (mərkəzlənmiş) korrelyasion funksiyası

$$b(\tau) = M[\zeta(t + \tau) - m][\zeta(t) - m] = \max \{ \sigma^2(1 - |\tau|/T), 0 \}$$

olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesidir; əgər $t_n = nT_0$ olarsa (t_n nöqtələr ardıcılığı təsadüfi ardıcılıq deyildir), onda $\zeta(t)$ T_0 periodlu periodik korrelyar (və periodik paylanmış) təsadüfi prosesdir. $\{t_n\}$ ədəd oxunda λ intensivlikli bircins Puasson nöqtəvi proses (yəni ən sadə axın) olduğu halda, qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlər Kubo - Anderson prosesi və ya qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli Puasson nöqtəvi prosesi adlanır; bu halda $\zeta(t)$ zaman üzrə bircins kəsilen Markov prosesi, həmçinin orta qiyməti m -ə bərabər, korrelyasion funksiyası $b(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$ olan stasionar təsadüfi proses olur. Kubo - Anderson təsadüfi prosesinin ümumiləşməsi kənquru tipli təsadüfi proseslərdir və bu proseslər üçün $\{\zeta_n\}$ və $\{t_n\}$ təsadüfi ardıcılıqlar artıq bir-birindən asılı olmur.

n -in bütün qiymətlərində $t_n - t_{n-1} = T_0 = \text{const}$ və ζ_n -nin eyni ehtimalla $+a$ və $-a$ qiymətlər aldığı fərz olunduğu halda qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətləri N. t. p.-ə [1], [2]-də N. Viner və [3], [4]-də S. Rays tərəfindən baxılmışdır; qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli N. t. p.-in ümumi tərifini 1950-də U. Grenander (U. Grenander; bax, [5]) vermişdir. Kubo - Anderson proseslər [6], [7]-də daxil olunmuşdur; bu işlər optik spektroskopiyanın statistik məsələlərinə həsr edilmiş və sonradan fiziki araşdırmalarda defələrlə istifadə olunmuşdur (bax, məs., [8], [9]).

Әд.: [1] Wiener N., «Acta math.», 1930, т. 55, № 2-3, р. 117-258; [2] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, пер. с англ., М., 1963, гл. IV; [3] Rice S. O., «Bell System Techn.

J.», 1944, v. 23, № 3, p. 282–332; 1945, v. 24, № 1, p. 46–156; [4] Райс С., в сб.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, пер. с англ., М., 1953, с. 88–238; [5] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [6] Anderson P. W., «J. Phys. Soc. Japan», 1954, v. 9, № 3, p. 316–39; [7] Kubo R., «J. Phys. Soc. Japan», 1954, v. 9, № 6, p. 935–44; [8] Brissand A., Frisch U., «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, № 5, p. 524–34; [9] Шапиро В. Е., Логинов В. М., Динамические системы при случайных воздействиях, Новосиб., 1983.

NÖVBƏ « очередь; queue » – *xidmət sistemləri nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. N. hər hansı bir əməliyyatın başlanmasını və ya sona çatmasını gözləyən tələblər toplusudur. Növbələrin təşkilinə növbə kəmiyyətinə qoyulan mümkün məhdudiyyətlər, N.-dən tələblərin seçilməsi qaydası (daxil olduğu qayda ilə, inversion qaydada, təsadüfi qaydada), baxılan növbə üçün kanala girişlilik, prioritet qaydalar daxildir. Kanallar və ya onların qrupları və s. üçün N.-lər ümumi N. və ayrılan N.-yə bölünür. N. tiplərinin əksər müxtəlifliyi kibernetik sistemlərin xidmətində meydana gəlir.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979.

NÖVBƏ; uzunluğu « очередь; длина; length of queue » – bax, *Növbə; uzunluq kəmiyyəti*.

NÖVBƏ; uzunluq kəmiyyəti « очередь; величина; length of queue », *növbə uzunluğu, xidmət sistemi nəzəriyyəsində – t anında sistemdəki tələblərin sayı $v(t)$ ədədidir. Növbə kəmiyyəti xidmət gözləyən tələblərin sayı və məşğul kanallar sayının cəminə bərabərdir. Ən sadə giriş axınlı və xidmət müddəti eksponensial qanuna tabe xidmət sistemlərində N. kəmiyyəti doğum və ölüm prosesidir. Daha müəkkəb sistemlərdə N. kəmiyyətlərinin öyrənilməsində semi – Markov proseslərinin metodları tətbiq olunur. Prioritetli xidmət sistemləri nəzəriyyəsində çoxölçülü $v_i(t)$ prosesi araşdırılır, $v_i(t)$ i-ci prioritetli sinifdə t anındakı tələblərin sayıdır.*

NÖVBƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « очередьей теория; queueing theory » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

NÜVƏ « ядро; kernel » – bax, *Rey rezolventi, Nüvə statistik qiyməti*.

NÜVƏ(sı) potensialların « ядро потенциа-лов; potential kernel » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov zəncirləri üçün*.

α – NÜVƏ(sı) potensialların « α – ядро потенциалов; potential α – kernel » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov zəncirləri üçün*.

NÜVƏ STATİSTİK QİYMƏTİ « ядерная оценка; kernel estimator » – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə*.

NÜVƏ STATİSTİK QİYMƏTİ sıxlığı n « ядерная оценка плотности; kernel density estimator » ümumi təbiətli (kəsilməz və ya diskret) $\mathfrak{X}$ fəzasında –

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{\rho(x, X_i)}{h_n} \right), \quad x \in \mathfrak{X}$$

statistikasıdır (bax, [1]), burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ – qiymətləri $\mathfrak{X}$ -dən olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlərdir; $\rho: \mathfrak{X}^2 \rightarrow [0; +\infty)$ funksiyası $\mathfrak{X}$ -də yaxınlıq ölçüsüdür və $K: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ funksiyası bəzi requlyarlıq şərtlərini ödəyir, bu funksiya n üvə adlanır, h_n – müsbət ədədlər ardıcılığı olub, $h_n \rightarrow 0$, $nh_n \rightarrow \infty$ şərtlərini ödəyir.

$f_n(x)$ statistikasının xassələri $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$ halında sıxlığın klassik N. s. q.-nin xassələrinə analojiçdir (bax, [2]). Sıxlığın N. s. q. $\mathfrak{X}$ -də hər hansı v ölçüsü üzrə X_1 təsadüfi elementinin sıxlığının qiymətləndirilməsində, reqressiyanın, modanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində, diskriminant analizdə və qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., в кн.: Прикладная статистика, М., 1983, с. 12–40; [2] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь, 1995, с. 68–75.

OXŞAR KRİTERİ « подобный критерий; similar test »

– ilkin hipotezi təşkil edən bütün paylanmalar üçün güc funksiyası sabit olan mürekkəb hipotezleri müqayisə məsələsində statistik kriteridir. «O. k.» anlayışı Yu. Neyman və E. Pirson tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]). x – ixtiyari X seçimi üzərində müşahidənin nəticəsi, $\mathbf{P}_\omega$ – x -in naməlum $\omega \in \Omega$ parametridən asılı paylanması olsun. x üzrə $H_1: \omega \in \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ alternativ hipotezinə qarşı mürekkəb ilkin $H_0: \omega \in \Omega_0$ hipotezi yoxlanılır (Ω_0 çoxluğunun elementlərinin sayı birdən çoxdur, $\Omega_0 \subset \Omega$). Əgər $\beta(\omega|\varphi) = \mathbf{M}_\omega \varphi(X) = \alpha$ bərabərliyi bütün $\omega \in \Omega_0$ üçün ödənilsə, $\varphi(x)$ α səviyyəli oxşar kriteri adlanır. Statistik məsələlərdə əksər hallarda mürekkəb hipotezleri müqayisə məsələlərində yalnız O. k.-yə baxılmaqla kifayətlənilir, lakin nəzərə alınmalıdır ki, ümumi halda konkret məsələlərdə qeyri – oxşar kriterinin də varlığı mümkündür və belə hallarda bu kriteri üçün bütün $\omega \in \Omega_0$ elementləri üzrə $\beta(\omega|\varphi) \leq \alpha$ olur və bu kriterinin gücü ən güclü O. k. ilə müqayisədə müntəzəm böyük güc olur (bax, [3]). Əgər O. k. randomlaşmayırsa, onda onun kritik oblası oxşar oblastdır.

O. k. anlayışı bezen, bütün $\omega \in \Omega_0$ elementləri üçün $\beta(\omega|\varphi) \leq \alpha$ bərabərsizliyi və bütün $\omega \in \Omega_1$ üçün $\beta(\omega|\varphi) \geq \alpha$ bərabərsizliyi ödənilən α səviyyəli meylsiz φ kriterilərinin baxılması ilə də yaranır. Əgər Ω_0 və Ω_1 çoxluqları ümumi Γ sərhədinə malikdirsə və $\beta(\omega|\varphi)$ Γ -də kəsilməzdirsə, onda $\omega \in \Gamma$ olduqda $\beta(\omega|\varphi) \equiv \alpha$ olur və φ kriterisi Γ sərhədində oxşar kriteridir.

O. k.-lər həmişə mövcuddur [məs., $\varphi(x) \equiv \alpha$ trivial kriterisi] və problem qeyri – trivial O. k.-lərin qurulması və bunlar arasında optimallıq tapılmasından ibarətdir. Ən tam nəticələr engelleyici parametrlərli eksponensial paylanmalar ailəsinin bir-ölçülü parametri haqqında hipotezi yoxlama məsələlərində alınmışdır (bax, [4]). $\mathbf{P}_{\xi, \theta}$ paylanmalar ailəsinin $(k+1)$ – ölçülü

parametrdən asılı olduğu və $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^1$, $\theta \in \Theta \in \mathbb{R}^k$ olduğu fərz olunur və bu paylanmalar ailəsi σ – sonlu ν ölçüsünə nəzərən

$$\frac{d\mathbf{P}_{\xi, \theta}}{d\nu} = c(\xi, \theta) h(x) \exp\{\xi U(x) + \sum_j \theta_j T_j(x)\} \quad (*)$$

sıxlıq funksiyası ilə təyin olunur. ξ parametrinə görə ilkin hipotez $H_0: \xi = \xi_0$ yoxlanılır və $H_1: \xi' > \xi_0$ birtərəfli alternativ hipotez (və ya $H_1^*: \xi \neq \xi_0$ ikitərəfli hipotez), θ engelleyici parametrdir. $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))$ statistikası θ engelleyici

parametri üçün kafi statistikadır və $T(x) = t$ qeyd olunmuş qiymətində $\mathbf{P}_{\xi}^{U|T}(\cdot|t)$ şərti paylanması θ -dan asılı olmur. Buna görə də, hər bir t qiymətində $U(x)$ -ə əsaslanan α səviyyəli $\varphi(x|t)$ şərti kriterisini qurmaq olar (H_1' alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü kriteri və ya H_1'' alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü meylsiz kriteri). İlkin məsələdə şərtsiz kriteri kimi baxılan $\psi(x) = \varphi(x|T(x))$ kriterisi müntəzəm ən güclü O. k.-dir və ya uyğun olaraq, müntəzəm ən güclü meylsiz O. k.-dir.

Ümumi halda ixtiyari tip $\mathbf{P}_{\xi, \theta}$ ailəsi halında, əgər ilkin hipotezin şərtlərində ($\{\mathbf{P}_{\xi_0, \theta}; \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün) θ engelleyici parametri üçün $T(x)$ kafi statistikası mövcuddursa, bezen analogi yanaşmadan istifadə etmək olur. Onda hər bir $T(x) = t$ qiymətində bu və ya digər optimallıq xassələrli α səviyyəli şərti kriteri qurmaq mümkündür [məs., əgər şərti paylanmalar ailəsi $\mathbf{P}_{\xi_0}^{U|T}(\cdot|t)$ doğruxoxşarlıq nisbətinin monotonluq xassəsinə malik olarsa] və şərtsiz kriteri kimi baxılan bu kriteri lokal optimal xassələri eyni olan O. k. olacaqdır.

Yuxarıda şərh olunmuş misallarda $\psi(x)$ şərtsiz kriteriləri bütün $\theta \in \Theta$ və $T(x)$ kafi statistikasının bütün t qiymətlərində $\mathbf{M}_{\xi_0, \theta}(\psi(X)|T(X) = t) \equiv \alpha$ xassəsinə malikdirlər, yəni bu kriterilər T kafi statistikasına nəzərən Neyman strukturuna malikdirlər. Aydındır ki, Neyman strukturuna malik bütün kriterilər O. k.-lərdir; L e m a n – Ş e f f e t e o r e m i ilə ifadə olunan əks nəticə də doğrudur; bütün O. k.-lərin $\mathbf{P}_{\xi_0, \theta}$ ailəsi üçün $T(x)$ kafi statistikasına nəzərən Neyman strukturuna malik olması üçün bu kafi statistikanın $\mathbf{P}_{\xi_0, \theta}^T$ paylanmasının məhdud tam olması zəruri və kafidir [(*) eksponensial paylanmalar ailəsi üçün məhdud tamlıq xassəsi ona ekvivalentdir ki, Θ çoxluğu boş deyildir]. Neyman strukturundan istifadə O. k.-nin qurulması üçün klassik metoddur.

Ümumi halda hipotezleri müqayisə məsələlərində yalnız trivial O. k.-lər mövcuddur və O. k.-lər nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafı paylanması $\mathbf{P}_\omega$ olan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində n sayda asılı olmayan müşahidələrin nəticələri toplusu $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ olan x müşahidəsi ilə əlaqədar asimptotik məsələlərin araşdırılması ilə bağlıdır və $n \rightarrow \infty$ olduqda kriterilərin $\{\varphi_n(x^{(n)})\}$, $n = 1, 2, \dots$ ardıcılığının asimptotikası öyrənilir. Əgər bütün

$\omega \in \Omega_0$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n(x^{(n)}) d\mathbf{P}_\omega^{(n)} \equiv \alpha$ olarsa, onda $\{\varphi_n\}$ α səviyyəli asimptotik oxşar kriterilər ardıcılığı adlanır, burada $\mathbf{P}_\omega^{(n)} = \mathbf{P}_\omega \times \dots \times \mathbf{P}_\omega$ (n dəfə). Belə kriterilər ardıcılığı (bu və ya digər mənada) asimptotik oxşar

kriteriler ardıcılığı qurulması mümkün ola bilən məsələlərin geniş sinfində mövcuddur.

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20A, pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289–337; [3] Lehmann E. L., Stein C., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, № 4, p. 495–516; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [5] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [6] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [7] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [8] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [9] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56.

OXŞAR OBLAST « подобная область; similar region », $\mathcal{P} = \{P\}$ ehtimal ölçüləri ailəsinə nəzərən α səviyyəli oxşar oblast – bütün $P \in \mathcal{P}$

ehtimal ölçüləri üçün P – ehtimalları α -ya bərabər olan seçimi fəzanın oblastıdır. Statistik tətbiqi məsələlərdə O. o., $\mathcal{P}$ ilkin hipotezi təşkil edən paylanmalar çoxluğu qəbul olunduqda, mürekəb hipotezləri müqayisə məsələsində randomlaşmayan oxşar kriterinin kritik oblastı kimi anlaşılır. «O. o.» termini Yu. Neyman və E. Pirsən tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]) və «bütün seçimi fəzaya oxşar oblast» ifadəsinin qısa şəklidir: bu da onunla bağlıdır ki, seçimi fəza trivial şəkildə, $\alpha = 1$ halında O. o.-dır. O. o. ilə bağlı əsas problemlərdən biri onların varlığı və qurulmasıdır. $\mathcal{P}$ sonlu çoxluq olduğu halda A. A. Lyapunov O. o.-nın varlığını isbat etmişdir (bax, [3]); bu nəticələrin sonrakı ümumiləşməsi və genişləndirilməsi Yu. V. Linnik və onun şagirdlərinin əsərlərində şərh olunmuşdur. $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ parametrik paylanmalar ailəsinə görə O. o. qurulması metodu ən geniş yayılmış metodlardandır və bu metod θ parametri üçün T kafi statistikasından istifadəyə əsaslanır. Seçimi oblastın hər bir $\{T = t\}$ kəsiyində A_t oblastı qurulur və bu oblastın $T = t$ şərtində şərti ehtimalı (bu ehtimal θ -dan asılı deyildir) α -ya bərabərdir. Əgər müxtəlif t -lər üçün bütün A_t oblastlarını bir-birilə «ölçülənlikli cəmləndirmək» mümkün olarsa, onda alınan oblast α səviyyəli O. o. olur. Beləliklə, qurulmuş O. o. $\mathcal{P}$ ailəsinə nəzərən Neyman strukturlu oblast olur; əgər T məhdud tam kafi statistika olarsa, onda bütün O. o. Neyman strukturlu oblastlardır. Bəzən bütün $P \in \mathcal{P}$ paylanmaları $|P(A) - \alpha| \leq \varepsilon$ şərtini ödəyirsə, onda « ε – təqribi A oxşar oblastı» arasdırılır.

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20A, pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289–337; [3] Ляпунов А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 6, с. 456–78; [4] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [5] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56.

OXŞAR STATİSTİKA « подобная статистика; ancillary statistic » – paylanması baxılan paylanmalar ailəsinin bütün elementləri üçün eyni olan *statistikadır*. Əgər $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ölçülən $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$ fəzasında paylanmalar ailəsidirsə, T statistikasına isə $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$ fəzasını digər $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikas etdirsə, $B \in \mathfrak{B}$ üçün $P_\theta(B) = \text{const}$, $\theta \in \Theta$ olarsa, onda T $\mathcal{P}$ -yə nəzərən oxşar statisti-

ka dır. O. s.-dan axtarılan paylanmanın $\mathcal{P}$ ailəsindən olması haqqında hipotezin (mürekəb) oxşar kriterilərinin qurulması üçün istifadə olunur. O. s. sifrin meylsiz statistik qiymətlərinin, yəni $\theta \in \Theta$, $M_\theta \chi = 0$ xassəli $\chi(T)$ statistikasının qurulmasında da istifadə olunur, bu terminlərdə parametrik funksiyanın meylsiz statistik qiymətinin optimalıq şərti ifadə olunur.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

OXŞARLIQ NƏZƏRİYYƏSİ « подобия теория; similarity theory » – bax, Monin – Obukhov oxşarlıq nəzəriyyəsi.

OQAVA KONSTRUKSIYASI « Огавы конструкция; Ogawa construction » – bax, Genişləndirilmiş stoxastik integral.

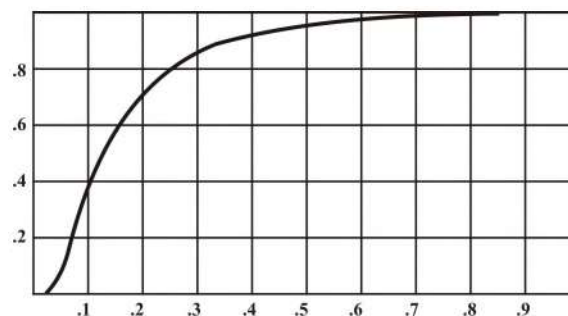
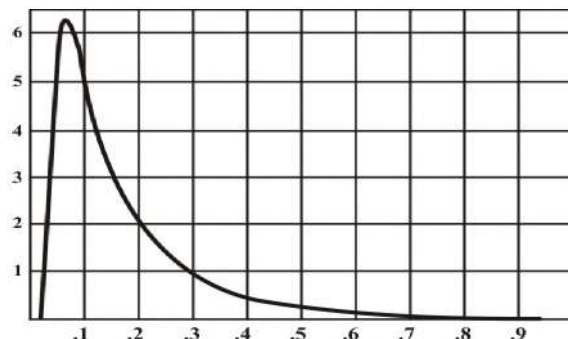
OMEGA – KVADRAT PAYLANMA, ω^2 – paylanma « омега – квадрат распределение; ω^2 – distribution » –

$$\omega^2 = \int_0^1 Z^2(t) dt$$

tesadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır, burada $Z(t)$ – şərti Viner prosesidir. Xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2it}{\pi^2 k^2} \right)^{1/2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. O. – k. p.-ya riyazi statistikada aşağıdakı halda təsadüf olunur. $X_1, \dots, X_n$ – $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F_n(\cdot)$ isə bu təsadüfi kəmiyyətlər üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun.



Omega – kvadrat paylanmanın 1) paylanmasının sıxlıq funksiyasının və 2) paylanma funksiyasının qrafikləri.

Bu halda $Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ prosesi şərti Viner prosesinə zəif yığılır, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 Z_n^2(t) dt < \lambda \right\} = \mathbf{P} \{ \omega^2 < \lambda \} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{e^{-t^2 \lambda/2}}{\sqrt{-t \sin t}} dt, \lambda > 0$$

münasibəti alınır.

Bax, *Kramer – Mizes kriterisi*.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», М., 1937, т. 2, с. 973–93; [2] Anderson T., Darling D., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 193–212.

OPERATİV HAZIROLMA ƏMSALI « оперативной готовности коэффициент; availability index » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin*.

OPERATİV XARAKTERİSTİKA(sı) alternativ əlamətə görə nəzarət planının « оперативная характеристика плана контроля по альтернативному признаку; operating characteristic of a sampling inspection plan on alternative attribute » – qüsurlu məmulatlar sayı D -nin funksiyası (və ya $q = D/N$ hissələri) kimi baxılan.

N sayda məmulatdan nəzarət edilən p partiyasının qəbul olunma ehtimalıdır, $D = 0, 1, \dots, N$. Birpilləli nəzarət planı üçün (bax, *Nəzarət / kontrol planı*) təsadüfi seçimin həcmi n , qəbul olunma ededi c olduqda $O. x.$

$$\mathbf{P}\{D\} = \sum_{d=0}^c h_{N,D}^{n,d}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $h_{N,D}^{n,d}$ – hiperhəndəsi paylanma ehtimallarıdır. Qüsurlu məmulatlar üçün $D_1 < D_2$ şərtini ödəyən verilmiş iki D_1 və D_2 qiymətlərinə uyğun olaraq p partiyasının səhvən qüsurlu olduğu ehtimalı $\alpha = 1 - \mathbf{P}\{D_1\}$ və p -nin səhvən qəbul edilməsi ehtimalı isə $\beta = \mathbf{P}\{D_2\}$ götürülür. $D_{0,5}$ ededine (bu halda $\mathbf{P}\{D_{0,5}\} = 0,5$ və $0,5$ yaxın bir eded olur) partiyanın qüsurlu hissəsi $q_{0,5} = D_{0,5}/N$ kəmiyyəti uyğun olur, bu halda $q_{0,5}$ qüsurlu məmulatların əhəmiyyətli hissəsi adlanır.

OPERATİV XARAKTERİSTİKA(sı) kriterinin « оперативная характеристика критерия; operating characteristic of a test » – statistik kriterinin güc funksiyasının (2-ci növ səhvin) 1-ə qədər tamamlanmasıdır. $O. x.$ ənənəvi olaraq ardıcıl analizdə istifadə olunur.

OPERATOR DAYANIQLI PAYLANMA « операторно устойчивое распределение; operator stable distribution » – sonlu $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında ele ehtimal paylanmasıdır ki, bu paylanma

$$Y_n = A_n(S_n - a) \quad (1)$$

təsadüfi vektorlarının paylanmaları ardıcılıqlarının zəif limitidir, burada $S_n = X_1 + \dots + X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorların cəmi, $a_n \in \mathbb{R}^d$, A_n – $\mathbb{R}^d$ -də xətti operatorlardır.

Əgər A – $\mathbb{R}^d$ -də xətti operator, μ isə $\mathbb{R}^d$ -də ehtimal ölçüsüdürsə, onda A_μ ilə $\mathbb{R}^d$ -də ele ehtimal ölçüsü işarə olunur ki, bu ölçü $A_\mu(E) = \mu(A^{-1}(E))$ şərtini ödəsin. δ_x ilə $x \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsində cırlaşan paylanma işarə olunur. $\mathbb{R}^d$ fəzasında μ ehtimal paylanması $(d-1)$ – dim. – ölçülü heç bir hiperüstəvi-də toplanmamışdırsa, μ tam ehtimal paylanması adlanır. $O. d. p.$ olan hər bir paylanma $\mathbb{R}^d$ -də tam ehtimal paylanmasıdır və ya münasib yerindəyişmədən sonra $\mathbb{R}^d$ fəzasının hər hansı altfəzasında tam ehtimal paylanması olur (bax, [1]). Buna görə də, ümumiliyi pozmadan, yalnız $O. d. p.$ -lara baxmaq olar.

İxtiyari $O. d. p.$ $\mathbb{R}^d$ -də sonsuz bölünən paylanmadır. Əgər f μ $O. d. p.$ -nin xarakteristik funksiyasıdırsa, onda ixtiyari $t > 0$ üçün f^t funksiyası da hər hansı μ^t ehtimal paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır. $\mathbb{R}^d$ -də ehtimal paylanmalarının toplusu $\{\mu^t, t > 0\}$ * kompozisiya əməlinə görə ölçüləri kəsilməz birparametrik semi – qrupunu əmələ gətirir, yeni ixtiyari $t, s > 0$ qiymətlərində $\mu^t * \mu^s = \mu^{t+s}$ və $t \rightarrow 0$ olduqda $\mu^t \rightarrow \delta$ zəif yığılması ödənilir.

Tam sonsuz bölünən ehtimal paylanması μ , yalnız və yalnız, o halda $O. d. p.$ -dir ki, cırlaşmayan $t^B = \exp(B \cdot \ln t)$ xətti operatorlarının $\mathbb{R}^d$ -də birparametrik qrupu və

$$\mu^t = t^B(\mu) * \delta_{x_t} \quad (2)$$

şərtini ödəyən $x_t \in \mathbb{R}^d$ vektorları mövcud olsun. B operatoru $O. d. p.$ μ -nün eksponenti adlanır. B operatorunun spektri $\operatorname{Re} z \geq 1/2$ yarımmüstəvisində yerləşir və onun $\operatorname{Re} z = 1/2$ düz xəttində yerləşən bütün məxsusi qiymətləri sadə məxsusi qiymətlərdir. μ_1 və μ_2 ehtimal ölçüləri uyğun olaraq, $R_1 \cap R_2 = \{0\}$, $R_1 \oplus R_2 = \mathbb{R}^d$ şərtlərini ödəyən R_1 və R_2 altfəzalarında toplanmış olduğu halda μ $O. d. p.$ $\mu = \mu_1 * \mu_2$ ayrılışı şəklində ifadə oluna bilər. μ_1 paylanması R_1 -də tam Qauss ölçüsü, μ_2 Qauss komponentinə malik olmayan, R_2 -də tam sonsuz bölünən paylanmadır. R_1 və R_2 B – invariant altfəzalıdır (və deməli, ixtiyari $t > 0$ üçün t^B – invariantdır). Bu iki altfəza B operatoru ilə birqiymətli təyin olunur. Əgər B_1 və B_2 , B operatorunun R_1 və R_2 altfəzalarına uyğun məhdudiyyətləridirsə, onda B_1 operatorunun spektri $\operatorname{Re} z = 1/2$ düz xətti, B_2 operatorunun spektri isə $\operatorname{Re} z > 1/2$ yarımmüstəvisində yerləşir (bax, [2]).

İxtiyari sonsuz bölünən paylanma üçün olduğu kimi $O. d. p.$ μ -nün xarakteristik funksiyası f -i də (α, C, M) üçlüyü ilə *Levi – Xinqin kanonik ifadəsi* şəklində göstərmək olur, burada

$\alpha \in \mathbb{R}^d$, C – müsbət müəyyən, $\mathbb{R}^d$ -də özü-özünə qoşma xətti operator (kovariasion operator), M , – $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür (Levi spektral ölçüsü). μ^t ölçüsünə uyğun üçlük $(t \cdot \alpha, t \cdot C, t \cdot M)$ kimi yazılır. (2) münasibətindən isə $t^B C (t^B)^* = t \cdot C$, $t^B M = t \cdot M$ münasibətləri alınır. O. d. p. μ -nün spektral ölçüsü M -ə xətti t^B operatorlarının birparametrik qrupu uyğundur və bu ölçü aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$M(E) = \int_{L_B} \int_0^\infty \mathbf{I}_E(t^B x) t^{-2} dt K_B(dx),$$

burada $\mathbf{I}_E$, – E çoxluğunun indikatorudur, $L_B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1 \text{ və } \|t^B x\| > 1 \text{ bütün } t > 1 \text{ üçün}\}$, $K_B(F) = M(\{t^B x : x \in F, t \geq 1\})$.

μ O. d. p.-sının strukturu və xassələrinin təsvirində simmetriyalar qrupu (və ya invariantlıq qrupu) $S(\mu) = \{A \in GL(d) :$

$A\mu * \delta_a = \mu$ hər hansı $a \in \mathbb{R}^d$ üçün} mühüm rol oynayır, burada $GL(d)$, – $\mathbb{R}^d$ -də bütün cırlaşmayan xətti operatorlar qrupudur. Məs., μ , yalnız və yalnız, o halda tam paylanmadır ki, $S(\mu)$ qrupu kompakt olsun. Əgər $E(\mu)$ O. d. p. μ -nün bütün eksponentləri çoxluğu olarsa, onda $E(\mu) = B + TS(\mu)$ münasibəti doğrudur, burada B – hər hansı qeyd olunmuş eksponentdir, $TS(\mu)$, – $S(\mu)$ qrupunun toxunan fəzasıdır, yeni $n \rightarrow \infty$ olduqda $(A_n - \mathbf{I})/c_n$ ardıcılıqlarının bütün limit nöqtələrinin çoxluğudur, $A_n \rightarrow \mathbf{I}$, $c_n \rightarrow 0$, $A_n \in S(\mu)$, $c_n \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{I}$ – vahidi operatorudur. O. d. p. μ -nün bütün eksponentləri arasında $S(\mu)$ qrupunun ixtiyari elementi ilə kommutativ olan elementlər vardır. Bundan başqa, əgər $E_C(\mu)$ – bütün belə kommutasiyalayıcı eksponentlər çoxluğu, $CS(\mu)$, – $S(\mu)$ qrupunun mərkəzidir, onda $E_C(\mu) = B + TCS(\mu)$ olur. Bir çox hallarda kommutasiyalayıcı eksponentlər xüsusilə sadə şəkildə olur (bax, [3]).

G , – $GL(d)$ qrupunun hər hansı altqrupu olsun; əgər ixtiyari $A_1, A_2 \in G$ üçün ələ $A_3 \in G$ və $a \in \mathbb{R}^d$ varsa ki, $A_1 \mu * A_2 \mu = A_3 \mu * \delta_a$ münasibəti ödənilsin, μ ehtimal paylanması G -dayanıqlı paylanma adlanır (bax, [1]). Vahiddən fərqli G altqrupları üçün hər bir G -dayanıqlı paylanma – operator dayanıqlı və ya semidayanıqlı paylanma olacaqdır (aşağıya bax). Əgər G öz strukturuna görə olduqca zəngin qrupdursa, onda G -dayanıqlı paylanması bu və ya digər əlavə xassələrə də malik ola bilər. Məsələn, $G = GL(d)$ üçün μ – normal paylanmadır (bax, [4]).

Sonsuz bölünən μ paylanması $(n_{k+1}/n_k) \rightarrow q$, $k \rightarrow \infty$, $1 \leq q < \infty$ şərtini ödəyən n_k indeksləri (1) şəklində olan Y_{n_k} təsadüfi vektorlarının hər hansı altardıcılığının zəif limiti kimi alınarsa, onda μ – operator semidayanıqlı paylanma adlanır. Operator semidayanıqlı paylanma hər hansı

$\{t^B, t > 0\}$ qrupu üçün (2) münasibətini ödəyir, lakin bu münasibət bütün $t > 0$ qiymətləri üçün deyil, yalnız $t_0 > 0$, $k \geq 1$ şərtlərini ödəyən $t = kt_0$ üçün doğru olur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] S c h m i d t K., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, S. 19–31; [2] S h a r p e M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 136, p. 51–56; [3] H u d s o n W. N., J u r e k Z. J., V e e h J. A., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, № 3, p. 1014–23; [4] P a r t h a s a - r a t h y K. R., «Sankhya», 1973, v. 35, Ser. A, p. 35–38; [5] К р у г - л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 723–32; [6] J a j t e R., «Studia Math.», 1977, v. 61, p. 29–39; [7] J u r e k Z. J., M a s o n J. D., Operator-limit distributions in probability theory, N. Y., 1993.

OPERATOR METODU « операторный метод; operator method » – funksional fəzalarda operatorlar nəzəriyyəsinə əsaslanan analitik metoddur. Məs., $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəza olarsa, $p(x, A)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$ Markov keçid funksiyasına $\mathcal{A}$ -ya nəzərən ölçülən məhdud funksiyaların $B(X, \mathcal{A})$ fəzasında P xətti operatoru uyğundur və bu operator

$$Pg(x) = \int_X g(y) p(x, dy), \quad g \in B(X, \mathcal{A})$$

düsturu ilə təyin olunur (bax, [1], [2]). X_j keçid ehtimalı

$p(\cdot, \cdot)$ olan bircins Markov zənciri olarsa, $\sum_{j=1}^n f(X_j)$ cəminin

xarakteristik funksiyası operator təminləri ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$P(\theta)g(x) = \int_X e^{i\theta f(y)} g(y) p(x, dy).$$

$P(\theta)$ operatorunun spektri kükrəntilər nəzəriyyəsi vasitəsilə araşdırılır (bax, [1]). Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinə xətti operatorların semi – qruplar nəzəriyyəsi tətbiq olunur. O. m. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərinin isbatında da istifadə olunur (bax, [4], [5]).

Əd.: [1] Н а г а е в С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, № 4, с. 389–416; [2] Н е в ъ Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [5] Л а м п е р т н Д. Ж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973.

OPERATOR ÖLÇÜ « операторная мера; operator measure », operator qiymətli ölçü – bax, Vektor ölçü.

OPERATOR STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK « операторное стохастическое дифференциальное уравнение; operator stochastic differential equation » – hər hansı H' Hilbert fəzasında $\zeta(t)$ diffuzion tənliyini təsvir edən

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + A(t, \zeta(t))dw(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau \quad (1)$$

şəklində stoxastik differensial tənlikdir. Burada $w(t)$ – ən sadə vektor diffuzion proses (Viner prosesi) olub, H Hilbert fəzası ilə kanonik əlaqəlidir, $a(t, x)$ – aparı əmsalı və $A(t, x)$ – diffuziya əmsalıdır və bunlar $[t_0, \tau] \times H'$ fəzasında təyin

olunmuş, uyğun olaraq H' fazasından və H -dan H' -ə təsir edən Hilbert – Şmidt operatorlarının $\mathcal{H}(H, H')$ fazasından qiymətlər alan funksiyalardır.

$A(t, x) \equiv 0$ olduqda (1) tənliyi H' Hilbert fazasında $\frac{d\zeta}{dt} = a(t, \zeta)$ adi differensial tənliyinə çevrilir. (1) tənliyi, tərifi görə, aşağıdakı İto stoxastik integral tənliyinə ekvivalentdir:

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{t_0}^t a(s, \zeta(s)) ds + \int_{t_0}^t A(s, \zeta(s)) dw(s), \quad t_0 \leq t \leq \tau. \quad (2)$$

Bu tənlikdə sonuncu integral vektor Viner prosesi $w(t)$ üzrə operator stoxastik integraldır.

$w(t)$ prosesini

$$w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j w_j(t) \quad (3)$$

sırasının cəmi kimi təyin etmək olar, burada $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – H -da ortobazis, $\{w_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ – eyni Ω ehtimal fazasında təyin olunmuş, cüt-cüt asılı olmayan skalyar Viner prosesləri ardıcılığıdır və $Mw_j(t) = 0$, $Mw_j(t)w_k(s) = \delta_{jk} \min(t, s)$.

(3) sırası kvadratik orta mənada $H_- \supset H$ Hilbert fazası normasında yığılır, H fazası H_- fazasına Hilbert – Şmidt operatoru

ilə daxil olunmuşdur: $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_{H_-}^2 < \infty$. Lakin $A \in \mathcal{H}(H, H')$

olduqda $Aw(t)$ prosesi H' fazasındandır (sanki yəqin). $w(t)$ prosesi ilə əsas ehtimal fazasının altçoxluqlarının σ -cəbrlər axını $\mathcal{A}_t$ və bu axına nəzərən təsadüfi funksiyanın qeyri – antisipativliyi adi qaydada əlaqələndirilir. Qiymətləri H' -dan olan $\int_{t_0}^t A(s, \omega) dw(s)$ şəklində stoxastik integrallar qeyri – antisipativ

operator təsadüfi $A(s, \omega) \in \mathcal{H}(H, H')$ funksiyaları üçün (sanki yəqin) təyin olunurlar və onlar aşağıdakı münasibətlərə tabedirlər:

$$\begin{aligned} M \int_{t_0}^t A(s) dw(s) &= 0; \\ M \left(\int_{t_0}^t A_1(s) dw(s), \int_{t_0}^t A_2(s) dw(s) \right)_{H'} &= \\ &= \int_{t_0}^t \text{tr} A_2^*(s) A_1(s) ds. \end{aligned}$$

Əgər $\zeta(t) \in H'$ prosesi

$$\zeta(t) = \zeta(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \omega) ds + \int_{t_0}^t A(s, \omega) dw(s)$$

şəklində ifadə olunarsa, tərifi görə onun stoxastik differensialı var və bu differensial

$$d\zeta(t) = a(t, \omega) dt + A(t, \omega) dw(t)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $a(t, \omega) \in H'$, $A(t, \omega) \in \mathcal{H}(H, H')$ – qeyri – antisipativ funksiyalardır.

$u(x)$, – $G \subset H'$ oblastında təyin olunmuş, qiymətləri H'' Hilbert fazasından olan funksiya olsun. Əgər bu funksiyanın G -də kəsilməz törəmələri varsa, yəni

$$u(x+h) - u(x) = u'(x)h + \frac{1}{2} u''(x)(h, h) + o(\|h\|^2),$$

$u'(x) \in L_1(H', H'')$, $u''(x) \in L_2(H', H'')$ olarsa, onda $u(x)$ funksiyası $C_2(G, H'')$ sinfinə aid olunur, burada $L_j(H', H'')$, – H' -dən H'' fazasına təsir edən j -xətli məhdud operatorlar fazasıdır.

Stoxastik differensiallar üçün İto düsturu doğrudur: əgər $d\zeta(t) = a(t, \omega) dt + A(t, \omega) dw(t)$ və $Y = f(\zeta)$, $f \in C_2(H', H'')$ olarsa, onda

$$\begin{aligned} dY &= (f'(\zeta(t)) a(t) + \frac{1}{2} \text{tr} f''(\zeta(t)) (A(t) \cdot, A(t) \cdot)) dt + \\ &+ f'(\zeta(t)) A(t) dw(t) \end{aligned}$$

düsturu doğrudur, burada

$$\text{tr} f''(\zeta)(A \cdot, A \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} f''(\zeta)(Ae_j, Ae_j),$$

$\{e_j\}$, – H -da ortobazisdir.

(1) O. s. d. t.-nin həlli (güclü həll) ele qeyri – antisipativ $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinə deyilir ki, onun stoxastik differensialı tənliyin sağ tərəfində onun əvəz olunması ilə alınır, yəni (1)-in həlli ele prosesdir ki, onun (2) tənliyində əvəz olunması nəticəsində bu tənlik eyniliyə çevrilir (sanki yəqin).

Başlanğıc qiyməti $\mathcal{A}_t$ – ölçülən ζ_0 olan (1) O. s. d. t.-nin Koşî məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən klassik şərtlər $(t, x) \in [t_0, \tau] \times H'$ dəyişənlərinin toplusu üzrə $a(t, x)$, $A(t, x)$ əmsallarının kəsilməzliyi və

$$\left. \begin{aligned} \|a(t, x_2) - a(t, x_1)\|_{H'} &\leq \alpha \|x_2 - x_1\|_{H'} \\ \|A(t, x_2) - A(t, x_1)\|_{\mathcal{H}(H, H')} &\leq \alpha \|x_2 - x_1\|_{H'} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Lipşits şərtləridir.

Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminin bu şərtlərlə isbatı

$$\|\zeta\|^2 = \sup_t M \|\zeta(t)\|_{H'}^2$$

norması ilə təsadüfi funksiyalar fazasında daraldıcı inikasların klassik metodu ilə həyata keçirilir.

Xüsusi törəmələri stoxastik differensial tənliklərə tətbiqlərlə bağlı olaraq, aparı əmsalının $a(t, x) = a_0(t)x + a_1(t, x)$ şəklində qeyri – məhdud operator olduğu halında daha ümumi vəziyyət alınır, burada $a_0(t)$ – təyin olunma oblası $\mathcal{Q}$ həmişə sıx olan, H' -də qeyri – məhdud operatorudur, bu operator H' -də

$$\frac{dU(t, s)}{dt} = a_0(t) U(t, s), \quad U(s, s) = I,$$

$$U(t, s) = U(t, \theta) U(\theta, s), \quad s \leq \theta \leq t$$

$U(t, s)$ operatorlarının evolyusion ailəsini doğurur.

Bu halda (1) tənliyi üçün Koşi məsələsi

$$\begin{aligned} \zeta(t) = & U(t, t_0) \zeta_0 + \int_{t_0}^t U(t, s) a_1(s, \zeta(s)) ds + \\ & + \int_{t_0}^t U(t, s) A(s, \zeta(s)) dw(s) \end{aligned}$$

integral tənliyinə ekvivalentdir.

Sonuncu tənlik də yuxarıdakı metodlarla araşdırılır, bu şərtlə ki, onun əmsalları $t > s$ olduqda (4) tipli şərtləri ödəməlidir və $t = s$ olduqda inteqrallananlıq xüsusiyyətlərinə malik olmalıdır.

Təsvir edilən şərtlərdə (1) tənliyinin həlli $\zeta(t)$ H' faza fəzasında Markov təsadüfi prosesidir və onun keçid ehtimalları $P(s, t; x, A) = \mathbf{P}\{\zeta_{s,x}(t) \in A\}$ düsturu ilə təyin olunurlar, burada $\zeta_{s,x}$ – (1) tənliyinin $\zeta(s) = x$ başlanğıc şərtində həllidir.

$\zeta(t)$ prosesinə H' faza fəzasında kəsilməz məhdud funksiyaların $C(H')$ fəzasında $V(s, t)$ xətti operatorlarının evolyusion ailəsi qarşı qoyulur:

$$V(s, t)f(x) = \mathbf{M}f(\zeta_{s,x}(t)) = \int_{H'} f(y) \mathbf{P}(s, t; x, dy), \quad s < t.$$

Bu ailənin doğuran operatoru

$$\mathfrak{A}(t) = \frac{d}{ds} V(s, t) \Big|_{s=t}$$

2-ci tərtib elliptik differensial operatorudur, yəni

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(t)f(x) = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{tr} f''(x) (A(t, x) \cdot, A(t, x) \cdot) + (a(t, x), f'(x))_{H'}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u = 0 \end{aligned}$$

parabolik tipli differensial tənlik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün Kolmoqorov tərs tənliyi adlanır. Bu tənlik üçün Koşi məsələsinin $u(\tau, x) = f(x) \in C_2(H', \mathbb{R})$ başlanğıc şərti ilə, funksional törəmələr və hamar əmsallarla həlli $u(t, x) = V(t, \tau)f(x)$, $t \leq \tau$ düsturu ilə təyin olunur və bu həll $C_2(H', \mathbb{R})$ sinfindən olur.

H' faza fəzasında Borel ölçüləri fəzasında qoşma evolyusion ailə və ölçülər fəzasında bu ailə ilə bağlı differensial tənlik – Kolmoqorov düz tənliyi analoji təyin olunur.

Stoxastik tənliklərin araşdırılması metodları təsadüfi qeyri – antisipativ əmsalları (1) tipli O. s. d. t. üçün də təyin olunur. Məsələn, $dY(t) = b(t, \omega) Y(t) dt + B(t, \omega) Y(t) dw(t)$ şəklində xətti tənliyə belə metodları tətbiq etmək olur, burada $b(t, \omega)$, $B(t, \omega)$ – təsadüfi xətti operatorlardır və H'' fəzasın-

dan uyğun olaraq H'' və $\mathcal{H}(H, H'')$ fəzalarına təsir göstərilir. Belə tənlik H'' fəzasında təsadüfi xətti evolyusion ailə təyin edir:

$$S(t, \tau): Y(t) \mapsto Y(\tau),$$

$$S(t, \tau) = S(t, \theta) S(\theta, \tau), \quad t \leq \theta \leq \tau \quad (\text{sanki yəqin}).$$

Fərz olunur ki,

$$b(t, \omega) = b(t, \zeta(t, \omega)); \quad B(t, \omega) = B(t, \zeta(t, \omega))$$

əmsalları $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin təsadüfi olmayan funksiyalarıdır. Onda $S(t, \tau)$ operatorlarının ailəsi $\zeta(t)$ prosesinin operator multiplikativ funksionalı adlanır.

$$V(t, s)f(x) = \mathbf{M} S^*(s, t)f(\zeta_{s,x}(t)) \quad (5)$$

düsturu qiymətləri H'' -dan olan H' -də məhdud funksiyaların fəzası $\mathcal{H}(H, H')$ -də evolyusion ailə təyin edir. Bu ailənin doğuran operatorunu İto düsturunun vasitəsilə hesabladığımızda Kolmoqorov tənliklərinin vektor variantı alınır.

Məs., $B = 0$ olduqda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u + b(t, x)u = 0$$

Koşi məsələsinin həlli üçün

$$u(t, x) = \mathbf{M} \exp \int_t^\tau b^*(s, \zeta(s)) ds \cdot f(\zeta_{t,x}(\tau)); \quad t \leq \tau$$

ifadəsi alınır və bu düstur skalyar halda ($H'' = \mathbb{R}$) Feynman – Kaks düsturu adlanır. (5) tipli düsturla bağlı mülahizələr, skalyar halda, apan əmsalları müxtəlif olan stoxastik tənliklərə müvafiq trayektoriyalar fəzasında ölçülərin mütləq kəsilməzliyi haqqında teoremlərə gətirir.

Əd.: [1] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [2] Крылов Н. В., Розовский Е. Л., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1979, с. 71–146.

OPERATORQIYMƏTLİ ÖLÇÜ « операторно – значная мера; operator – valued measure », operator ölçü – bax, Vektor ölçü.

OPSİONAL ÇOXLUQ « опциональное множество; optional set » – bax, Martinqal.

OPSİONAL PROSES « опциональный процесс; optional process » – bax, Tamamile ölçülən proses, Martinqal.

OPSİONAL PROYEKSİYASI, PROSESİN « опциональная проекция процесса; optional projection of process » – bax, Tamamile ölçülən proyeksiyası, prosesin.

OPTİMAL AN « оптимальный момент; optimal stopping time » – bax, Optimal dayanma(sı) təsadüfi prosesin.

OPTİMAL BEYES HƏLLİ / π – OPTİMAL HƏLL « оптимальное Байесовское решение / π – оптимальное решение; optimal Bayesian decision / π – optimal decision » – bax, Ardıcıl analiz.

OPTİMAL DAYANMA « оптимальная остановка; optimal stopping » – bax, *Ardıcıl analiz*.

OPTİMAL DAYANMA(sı) təsadüfi prosesin « оптимальная остановка случайного процесса; optimal stopping of a random process » – optimal τ^* anlan üçün eger

$$Mg(X_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} Mg(X_{\tau})$$

mövcuddursa və ya ε – optimal τ_{ε} anlan üçün

$$Mg(X_{\tau_{\varepsilon}}) > \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} Mg(X_{\tau}) - \varepsilon$$

münasibəti ödənilərsə, $S = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} Mg(X_{\tau})$ dəyərinin (qiymətinin) axtarılması məsələsidir. Məsələnin belə (ən sadə) şəkildə ifadə olunmasında $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinin, hər hansı $X = (X_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinin və $\mathfrak{M} = \{\tau\}$ Markov anları ailəsinin, yeni qiymətləri $[0, \infty]$ -dan olan, hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\{\tau \leq t\} \in F_t$ şərtini ödəyən τ təsadüfi kəmiyyətləri ailəsinin verildiyi fərz olunur.

Mahiyyətə eynigüclü iki – «marginal» və «Markov» yanaşmaları vardır. «Marginal» yanaşmada X prosesi olduqca ixtiyari ola bilər, «Markov» yanaşmasında X -in vəziyyətlər fəzası olduqca ümumi olan Markov prosesi olduğu fərz olunur. Birinci halda S qiymətinin xarakterizasiyası üçün supermartinqal tip anlayışlardan istifadə olunur. İkinci halda uyğun xarakterizasiya eksessiv funksiyalar anlayışını istifadə edir. Fəza fəzası (E, B) olan, diskret zamanlı $X = (X_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_x)$, $n = 0, 1, \dots$ birinci Markov proseslərinin O. d. nəzəriyyəsinin tipik nəticəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur. $s(x) = \sup_{\tau} M_x g(X_{\tau})$ olsun. Onda

belə məlum olur ki, $s(x)$, – $g(x)$ funksiyasının ən kiçik eksessiv majorantıdır, yeni $g(x) \leq f(x)$,

$M_x f(x_1) \leq f(x)$ şərtlərini ödəyən $f = f(x)$ funksiyalarından ən kiçiyidir. Bu halda $s(x)$, – $s(x) = \max \{g(x), M_x f(x_1)\}$ Bellman – Vald tənliyini ödəyir və $\tau_{\varepsilon} = \inf \{n \geq 0, s(x_n) \leq g(x_n) + \varepsilon\}$ anı ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimaldır və bu bütün $x \in E$ üçün $M_x g(x_{\tau_{\varepsilon}}) \geq s(x) - \varepsilon$ mənasında anlaşılır.

Dayanmanın optimal qaydalarının ümumi nəzəriyyəsi həm diskret, həm də kəsilməz zaman hallarında [1] – [4]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чжоу И., Теория оптимальных правил остановки, пер. с англ., М., 1977; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [3] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977.

ε – **OPTİMAL DAYANMA ANI** « ε – оптимальный момент остановки; ε – optimal stopping time » – bax, *Ardıcıl analiz*.

OPTİMAL EHTİYATDA SAXLAMA « оптимальное резервирование; optimal redundancy » – bütün istifadə olunan resurslara (dəyər, çəki, eşyanın ölçüləri və s.

nəzərdə tutulur) məhdudiyyətlər qoyulduğu halda əlavə (ehtiyatda olan) elementlərdən istifadə olunması hesabına sistemin struktur etibarlılığını artırmaq üçün üsuldur. O. e. s.-nin riyazi məsələsi qeyri – xətti tamqiymətli proqramlama məsələsidir. Bir neçə məhdudiyyət olduğu halda, O. e. s. məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\max_X \{R(X): C_j(X) \leq C_j^0, j = 1, \dots, N\},$$

burada $X = (x_1, \dots, x_n)$ – sistemdəki n tip ehtiyat elementlər çoxluğu, $R(X)$ – sistemin etibarlılığını xarakterizə edən verilmiş funksionaldır, bu şərtlə ki, sistemdə i tipli x_i elementlərindən ehtiyat vardır, $i = 1, \dots, n$, $C_j(X)$ – sistemdə X ehtiyatının olması ilə bağlı olan j tipli məsələlər funksionalı, N – resurs məhdudiyyətlərinin tiplərinin sayı, C_j^0 , – j tipli mümkün olan resurs məsələləridir. Adətən, O. e. s. məsələsi bir məhdudiyyətə faktor halı üçün qoyulur. Bu halda təbii olaraq, O. e. s. məsələsinə ters məsələ qoyulur:

$$\min_X \{C(X): R(X) \geq R^0\},$$

burada R^0 – sistemin etibarlılıq göstəricisinə görə verilmiş məhdudiyyətdir.

Ənənəvi O. e. s. məsələsində, ehtiyat elementləri ilə hər bir özünəməxsus tip təmin olunan qarşılıqlı asılı olmayan altsistemlərdən ibarət sistemə baxılır. Bu halda imtinəsiz işləmə ehtimalı və ya hazırlama əmsali kimi göstəricilər üçün

$$R(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} R_i(x_i)$$

ifadəsini yazmaq olar, burada R_i – özündə x_i ehtiyat elementləri olan i -ci altsistemin uyğun etibarlılıq göstəricisidir. Məhdudiyyətlər, bir qayda olaraq,

$$C(X) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x_i$$

kimi götürülür, burada c_i , – i tipli bir elementin dəyəridir.

Məsələnin belə ənənəvi qoyuluşunda onun dəqiq həllini dinamik proqramlama və ya onun modifikasiyası vasitəsilə almaq mümkündür. Bu halda dominar vektorlar ardıcılığ adlanan ele $X^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ardıcılığı qurulur ki,

$R(X^k) < R(X^{k+1})$ olsun və ixtiyari X^k üçün bütün mümkün həllər çoxluğunda ele X^* vektoru yoxdur ki, bu vektor üçün

$$R(X^*) > R(X^k), C(X^*) \leq C(X^k)$$

şərtləri eyni zamanda ödənilsin.

O. e. s. məsələsi üçün dominar vektorların tam ardıcılığının altardıcılığını koordinatlar üzrə ən sürətli enmənin köməyi ilə qurmaq olar. Həllərin qanəddici statistik qiymətlərini ümumiləşmiş Lagranj vuruqlar metodu ilə almaq olur (bax, [3]).

Məqsəddəşirici $R(X)$ funksionalı multiplikativ xarakterli olduqda (məs., $R(X)$ imtinaya qədər orta işləmə müddəti olarsa), O. e. s. məsələsinin həlli olduqca mürəkkəbləşir. Bu halda məsələnin həlli üçün ya təqribi metod (bax, [3]) və ya statistik realizasiyaların nəticələri əsasında optimizasiyadan istifadə metodu tövsiyə olunur.

Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984;

- [2] Вопросы математической теории надежности. М., 1983;
[3] Надежность технических систем. Справочник, М., 1985.

OPTİMAL HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « оптимальная решающая функция; optimal decision function » – bax, *Optimallıq (ğ ı)* statistik prosedurun.

OPTİMAL İNTERPOLYASIYA meteorologiya-da « оптимальная интерполяция в метеорологии; **optimal interpolation in meteorology** » – n nöqtədə müşahidələr üzrə meteoroloji elementin ixtiyari «sıfır» nöqtəsinə xətti interpolyasiyasıdır:

$$\hat{f}_0 = \sum_{i=1}^n p_i f_i,$$

O. i. – xətin kvadratının orta qiyməti:

$$\mathbf{M}\Delta_0^2 = \mathbf{M} \left[f_0 - \sum_{i=1}^n p_i \hat{f}_i \right]^2$$

kəmiyyətin minimumunu təmin edir, burada f_0 və $\hat{f}$ – uyğun olaraq, seçilmiş «sıfır» nöqtəsində f -in əsl və interpolasiya olunmuş qiymətləridir. $\hat{f}_i$ – f -in i nöqtəsində müşahidə olunmuş qiymətidir, $\hat{f}_i$ – f -in bu nöqtədəki qiymətindən təsadüfi $\delta_i = \hat{f}_i - f$ ($\mathbf{M}\delta_i = 0$) xətası ilə fərqlənir, p_i – çəki əmsalındır.

Adətən, O. i.-da meteoroloji f_i elementinin mütləq qiymətləri əvəzinə onun anomaliyalanna, yəni onun uyğun orta qiyməti $\mathbf{M}f_i$ -dən yayınması – $f'_i = f_i - \mathbf{M}f_i$ kəmiyyətinə baxılır. Bu şərt daxilində $\mathbf{M}\Delta_0^2$ xəta kvadratının orta qiymətinin minimumunu təmin edən optimal p_i^0 çəkili

$$\sum_{j=1}^n p_i^0 (\mu_{ij} + \gamma_{ij} + \gamma_{ji} + \alpha_{ij}) = \mu_{0i} + \gamma_{0i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

şəklində n sayda xətti tənliklər sisteminin həlli kimi tapılır, burada $\mu_{ij} = \mathbf{M}(f'_i f'_j)$, $\gamma_{ij} = \mathbf{M}(f'_i \delta_j)$ və $\alpha_{ij} = \mathbf{M}(\delta_i \delta_j)$.

Minimal xəta – $(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \min_{p_i} \mathbf{M}\Delta_0^2$ aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \mu_{00} - \sum_{i=1}^n p_i^0 (\mu_{0i} + \gamma_{0i}).$$

Praktiki məsələlərin həllində hesablamaları olduqca sadələşdirən bəzi hipotezlər qəbul etmək olar. Məs., bir çox hallarda hesab etmək olar ki, anomaliyalar meydanı f' bircins və izotropdur, müşahidə xətalrı δ_i -lər bütün nöqtələr üçün dəyişməz olan σ_δ^2 dispersiyasına malikdirlər və nə öz aralarında, nə də ki, ölçülən meteoroloji elementin qiymətləri ilə korrelyar deyildirlər. Bu halda (1) tənliyi və (2) düsturu uyğun olaraq aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\sum_{j=1}^n p_i^0 r_{ff}(l_{ij}) + \eta^2 p_i^0 = r_{ff}(l_{0i}), \quad i = 1, \dots, n$$

və

$$(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \sigma_f^2 \left[1 - \sum_{j=1}^n p_i^0 r_{ff}(l_{0i}) \right],$$

burada $r_{ff}(l_{ij})$ – meteoroloji f elementinin meydanının normalanmış korrelyasiya funksiyasıdır və bu funksiya yalnız baxılan nöqtələr arasındakı l_{ij} məsafəsindən asılıdır, σ_f^2 – meydanın bütün nöqtələri üçün eyni olan, f elementinin dispersiyasıdır, η^2 – müşahidə xətasının ölçüsü olub, σ_δ^2 -nin σ_f^2 -na nisbəti kimi təyin olunur.

O. i.-nin dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün bəzən $\mathbf{M}\Delta_0^2$ mütləq kəmiyyəti əvəzinə $\varepsilon_0^2 = \mathbf{M}\Delta_0^2 / \sigma_f^2$ nisbi göstəricisindən istifadə olunur, bu kəmiyyət η^2 ilə analogi interpolasiya xətasının ölçüsü adlandırılır.

O. i. prosedurunun ümumləşməsi meteoroloji meydanların optimal uzlaşma prosedurudur, bu prosedur meteoroloji f elementi haqqında yalnız f üzərində müşahidə nəticələri əsasında informasiyanın alınmasından ibarət olmayıb, eyni zamanda digər meteoroloji elementlər haqqında məlumatlardan da istifadə edir. Uzlaşma proseduru hətta o hallarda da aparılır ki, bir meteoelementin müxtəlif müşahidələr sistemi ilə alınmış meydanları alınır və ya meydanın bir faktiki müşahidələrdən, digəri proqnozun nəticəsindən ibarət olur.

O. i. ilə analogi olaraq meteoroloji meydanların optimal uzlaşma proseduru f meteoelementinin «sıfır» nöqtəsində təqribi qiymətinin f üzərində $i = 1, \dots, m$ nöqtələrində m sayda müşahidə nəticələrinin və hər hansı digər φ meteoelementi üzərində ilk $k = 1, \dots, n$ nöqtələrində üst-üstə düşən müşahidə nəticələrinin (qismən və ya tamamilə) xətti kombinasiyası kimi axtarılmasına gətirilir. Bu halda uzlaşma düsturu aşağıdakı şəkildə olur:

$$\tilde{f}_0 = \sum_{i=1}^m p_i \hat{f}_i + \sum_{k=1}^n q_k \hat{\varphi}_k,$$

burada çəki elementləri p_i, q_k

$$\mathbf{M}\Delta_0^2 = \mathbf{M} \left[f_0 - \left(\sum_{i=1}^m p_i \hat{f}_i + \sum_{k=1}^n q_k \hat{\varphi}_k \right) \right]^2$$

kəmiyyətinin minimizasiyası şərtindən tapılır.

O. i.-da olduğu kimi meteoroloji meydanların optimal uzlaşma proseduru, adətən, $f'_i = f_i - \mathbf{M}f_i$ və $\varphi'_k = \varphi_k - \mathbf{M}\varphi_k$ normalanmış meydanlarına nəzərən realizə olunur. Fərz olunsun ki, bu meydanlar bircins və izotropdur, müşahidələrin təsadüfi xətalının $\sigma_{\delta_{fi}}^2 = \mathbf{M}[\hat{f}_i - f_i]^2 = \sigma_{\delta_f}^2$ və $\sigma_{\delta_{\varphi_k}}^2 = \mathbf{M}[\hat{\varphi}_k - \varphi_k]^2 = \sigma_{\delta_\varphi}^2$ dispersiyaları nöqtədən nöqtəyə keçdikdə dəyişməzdirlər, həmçinin δ_f və δ_φ xətalrı müxtəlif nöqtələrdə öz aralarında və ölçülən meteoroloji f və φ elementləri ilə qeyri – korrelyardırlar, optimal çəki əmsalları p_i^0 və q_k^0 aşağıdakı $m + n$ sayda xətti tənliklər sistemindən tapılır:

$$\sum_{j=1}^m p_i^0 r_{ff}(l_{ij}) + \lambda \sum_{k=1}^n q_k^0 r_{f\varphi}(l_{ik}) + \eta^2 p_i^0 = r_{ff}(l_{0i}),$$

$$i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i^0 r_{f\varphi}(l_{ik}) + \lambda \sum_{v=1}^n q_v^0 r_{\varphi\varphi}(l_{kv}) + \lambda \xi^2 q_k^0 = r_{\varphi\varphi}(l_{0k}),$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Burada $r_{ff}(l_{ij})$ və $r_{\varphi\varphi}(l_{kv})$ – uyğun nöqtələr arasında məsafədən asılı olan, f və φ meteoroloji elementlər meydanlarının normalanmış korrelyasion funksiyalarıdır, $r_{f\varphi}(l_{ik}) = \mathbf{M}(f_i' \varphi_k') / \sigma_f \sigma_\varphi$ – bu meydanların normalanmış qarşılıqlı korrelyasion funksiyalarıdır və bunlar yalnız i -ci və k -cı nöqtələr arasında məsafədən asılıdırlar, $\eta^2 = \sigma_{\delta_f}^2 / \sigma_f^2$, $\xi^2 = \sigma_{\delta_\varphi}^2 / \sigma_\varphi^2$, $\lambda = \sigma_\varphi / \sigma_f$.

Meteoroloji meydanların optimal uzlaşma xətasının ölçüsü

$$\varepsilon_0^2 = 1 - \sum_{i=1}^m p_i^0 r_{ff}(l_{0i}) - \lambda \sum_{k=1}^n q_k^0 r_{\varphi\varphi}(l_{0k})$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Meteorologiyada O. i. ideyası A. N. Kolmoqorovun [6] və N. Vinerin [8] işləri ilə başlanmışdır (bax, həm də [7]). Hal-hazırda O. i. və meteoroloji meydanların optimal uzlaşması obyektiv analizin avtomatlaşdırılmış hesablama prosedurunun əsasını təşkil edir; bu prosedur ədədi proqnozdan əvvəl aparılır və hər hansı rəqulyar şəbəkənin qovşaqlarında meteoroloji element meydanının ayrı-ayrı nöqtələrdəki verilənlər üzrə təqribi qiymətlərinin bərpası məqsədini və ya onun izoxetlər ailəsi şəklində təsvir edilmə məqsədini güdür (bax, [1], [9]). O. i.-nin meteorologiyada digər tətbiqləri müşahidə şəbəkəsinin rəşional planlaşdırılması, meteoroloji müşahidələrin nəticələrinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi, meteoroloji meydanların orta qiymətlərinin təyin olunması kimi məsələlərin həlli ilə əlaqədardır (bax, məs., [1], [3], [4], [5]). Peyk meteorinformatasiyasının öyrənilməsində effektiv sxemlərin işlənilməsi sahəsində O. i. metodları geniş surətdə yayılmışdır (dördölçülü analiz, bax, [2], [10]).

Əd.: [1] Г ан д и н Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [2] Г ан д и н Л. С., Четырёхмерный анализ метеорологических полей, Л., 1976; [3] Г ан д и н Л. С., Ка г а н Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976; [4] Д р о з д о в О. А., Ш е п е л е в с к и й А. А., «Тр. научно-исследовательских учреждений Главного управления Гидрометеослужбы», 1946, сер. 1, в. 13, с. 65–115; [5] Ка г а н Р. Л., Осреднение метеорологических полей, Л., 1979; [6] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3–14 (Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63); [7] Я г л о м А. М., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 5, с. 3–168; [8] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949; [9] P a n o f s k y H. A., «J. Meteorol.», 1949, v. 6, № 6, p. 386–92; [10] Miyakoda K., Talagrand O., «Tellus», 1971, v. 23, № 4–5, p. 310–17.

OPTİMAL KRİTERİ « оптимальный критерий; optimal test » – konkret anlamda dəqiqləşdirilən, hər hansı mənada «ən yaxşı» gücə malik *statistik kriteridir*. Məs., *müntəzəm ən güclü kriteri* və ya hər hansı aprior paylanmaya uyğun Bayes kriterisi və b. belə kriterilərdir. Bax, *Optimallıq (ğ i) statistik prosedurun*.

OPTİMAL STRATEGİYA « оптимальная стратегия; optimal strategy / policy » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin; idarəolunan diffuzion proses; idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

688 OPTİMAL

ε – OPTİMAL STRATEGİYA « ε – оптимальная стратегия; ε – optimal strategy / policy » – bax, *idarəolunan diffuzion proses; idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

OPTİMALLIĞIN YOXLANILMASI, PLANIN « оптимальности плана проверка; checking of the optimality of a design » – regression eksperimentin informasiyon matrisi $m(\xi)$ -nin $m(\xi^*)$ -da differensiallanan qabarıq Φ funksiyası üzrə kriterisinə görə ξ^* planının optimallığının yoxlanılmasıdır. Bu şəkildə P. o. y., ekvivalentlik teoreminə əsasən,

$$\max_{x \in X} \psi_T(x) = \text{tr } T m(\xi^*)$$

şərtinin yoxlanılmasına gətirilir, burada $\psi(t) = f^T(x) T f(x)$, $T = \Phi(m(\xi^*))$, – $\Phi(m)$ funksiyasının qradient matrisi, $f(x)$ – prediktorlar vektorudur (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

OPTİMALLIQ (ğ i) statistik prosedurun « оптимальность статистической процедуры; optimality of a statistical procedure » – statistik prosedurun effektivliyini xarakterizə edən hər hansı funksionala ekstremum təmin edən (baxılan prosedurlar sinfində) *statistik prosedurun* xassəsidir. Statistik prosedurun effektivliyi bu prosedur əsasında edilən statistik nəticələrin doğruluğu nöqtəyi – nəzərdən statistik prosedurun keyfiyyətini təyin etməyə və bu prosedurla təyin olunan statistik eksperimentin aparılmasına sərf olunan məsrəfləri təyin etməyə xidmət edən anlayışdır. Statistik prosedurun O. anlayışı o qədər də dəqiq təyin olunmadığına baxmayaraq, bu anlayış konkret təriflərdə (məs., minimaks mənada optimallıq, orta mənada optimallıq) ciddi riyazi mənə alır.

Adətən, statistik həllər nəzəriyyəsində prosedurun effektivlik ölçüsü kimi onun tam riski anlaşılır. Statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunduğu və statistik prosedur həlledici funksiya ilə eyniləşdirildiyi halda, statistik prosedurun O. uyğun həlledici funksiyasının optimallığı kimi anlaşılır.

K – həlledici funksiyaların baxılan sinfi olsun. Əgər K -da ele müntəzəm yaxşı δ^* həlledici funksiyası varsa ki, bu funksiya $\delta \in K$ üzrə $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının minimumunu Θ parametrik fəzasının bütün $\theta \in \Theta$ nöqtələrində eyni zamanda təmin

etsin, onda bu həlledici funksiya K sinfində *optimal həlledici funksiya* adlanır. Ya baxılan sinif qeyd olunduqda qısalıq üçün və ya bu sinif bütün həlledici funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşdüyü halda və ya bəzən «optimal həlledici funksiya» termini həlledici funksiyaların baxılan sinfinə aid olmadan belə istifadə olunur. Lakin riyazi statistikanın bir çox məsələlərində müntəzəm yaxşı həlledici funksiyalar yalnız həlledici funksiyaların olduqca dar sinfində olur və buna görə də, optimallıq üçün daha zəif kriterilərdən istifadə olunur; bu zaman optimal həlledici funksiyayı təyin edərkən, bu optimallıqdan hansı mənada anlaşıldığı göstərilir. Belə yanaşmada həlledici funksiyanın effektivlik ölçüsü (adətən, onun riski) $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının funksionalı $\Phi(\delta)$ kimi təyin olunur və bu funksional isə araşdırılan obyektə xarakterizə edən $\theta \in \Theta$ parametrinin naməlum qiyməti haqqında qərar qəbul etmək üçün həlledici funksiyadan istifadə edən statistikın meruz qaldığı orta itkini ifadə edir.

Misal 1. $\Phi_1(\delta) = R(\theta_0, \delta)$ olsun, burada θ_0 – θ parametrinin qeyd olunmuş qiymətidir (yeni Φ_1 – Vald riskidir). Φ_1 funksionalının minimumunu təmin edən (verilən K sinfində)

$\delta^* \in K$ həlledici funksiyası θ_0 nöqtəsində optimal həlledici funksiya adlanır. Bununla yanaşı, bu həlledici funksiya θ_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında yerləşən bütün θ -lar üçün eyni zamanda $\delta \in K$ üzrə $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının minimumunu təmin edərsə, onda belə həlledici funksiya θ_0 nöqtəsində lokal optimal həlledici funksiya adlanır.

Misal 2. $\Phi_2(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$. Belə funksional minimaks

mənada O. anlayışına uyğundur. $\Phi_2(\delta)$ funksionalının minimumu təmin edən δ^* həlledici funksiyası minimaks mənada optimal həlledici funksiya adlanır [$\Phi_2(\delta^*)$ kəmiyyəti minimaks riskə bərabərdir].

Misal 3. $\Phi_3(\delta) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta) G(d\theta)$, burada $G(\cdot)$, –

Θ -da verilmiş hər hansı ölçüdür. Bu funksionala orta mənada (çəki funksiyası G olan) O. anlayışı uyğundur, $\Phi_3(\delta)$ funksionalının minimumu təmin edən δ^* həlledici funksiyası orta mənada optimal həlledici funksiya adlanır. Əgər G ölçüsü kimi θ parametrinin aprior paylanması kimi baxılan ehtimal ölçüsü götürülsə (bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə), onda bu δ^* həlledici funksiyası optimal Bayes (və ya sadəcə Bayes) həlledici funksiyası adlanır və $\Phi_3(\delta^*)$ kəmiyyəti bu halda Bayes riskinə bərabərdir.

Əgər optimal həlledici funksiyanın tərifindəki həlledici funksiyalar sinfi K həlledici funksiyaların hər hansı xassəsi ilə təyin olunarsa (məs., meylsiz həlledici funksiyalar sinfi), bəzən optimal həlledici funksiyanın adına müvafiq dəyişdirilmə daxil olunur (məs., optimal meylsiz həlledici funksiya, optimal invariant həlledici funksiya).

Statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunmadığı halda həlledici funksiyanın O. anlayışı, adətən, verilən prosedurla təyin olunan statistik eksperimentin aparılmasına sərf olunan məsərəflərin minimallaşdırılması ilə əlaqələndirilir, bu şərtlə ki, verilmiş məhdudiyyətlər son qərarların keyfiyyətində nəzərə alınsın. Məs., ardıcıl analizdə iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsində həlledici funksiyanın O. orta müşahidə müddətini (dayanma anına qədər) minimallaşdırır, orta müşahidə müddəti verilən prosedurun köməyi ilə bu hipotezlərin müqayisəsi üçün tələb olunur və bu hipotezlərin ehtimalları birinci növ və ikinci növ səhv ehtimalları olub, verilmiş qiymətləri aşmamalıdır. θ parametrinin interval qiymətləndirilməsində (müşahidələrin ardıcıl sxemində) elə optimal statistik prosedur vermək olar ki, bu prosedur verilən etibarlı ehtimalla θ parametrisini daxilinə alan verilən uzunluqlu etibarlı intervalın qurulması üçün zəruri olan orta müşahidələr sayını minimallaşdırsın.

Konkret statistik məsələlərdə O.-ın digər təriflərinə də təsadüf olunur.

Riyazi statistikanın asimptotik məsələlərində seçimin həcmi n və ya müşahidə müddətinin, adətən, qeyri – məhdud olaraq artdığı hallarda, statistik prosedurun effektivlik ölçüsü kimi sonlu n və ya T üçün hesablanmış uyğun xarakteristikaların limit qiymətləri ($n \rightarrow \infty$ və ya $T \rightarrow \infty$ olduqda) götürülür və təbii olaraq, eyni adlı statistik prosedurun asimptotik O. anlayışı daxil olunur (məs., minimaks mənada asimptotik optimal prosedur). Adətən, optimal statistik prosedurların alınması çətin məsələ sayılır, lakin, bununla belə, bu məsələlərdə asimptotik yanaşma

ilə asimptotik optimal prosedurlar almaq mümkün olur. Bir çox konkret məsələlərdə adi tətbiq edilən prosedurların bu və ya digər mənada asimptotik O.-nı isbat etmək olur (məs., *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi* asimptotik minimaks, asimptotik Bayes kriterisidir), bununla belə, n və T sonlu olduğu bir çox hallarda bu prosedurlar heç bir O. xassələrinə malik olmur (məs., qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti*).

Riyazi statistikanın konkret bölmələrində statistik prosedurların digər effektivlik ölçüləri və bunlarla bağlı optimal prosedurlar anlayışlarına da təsadüf edilir.

OPTİMALLIQ PRİNSİPİ *stoxastik « оптимальности принцип стохастический; stochastic optimality principle »* – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma*.

OPTİMALLIQ TƏNLİYİ *« оптимальности уравнение; optimality equation »* – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma, idarəolunan sıçrayışvari proses, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

ORDİNAL DƏYİŞƏN *« порядковая переменная; ordinal variable »* – bax, *Predikant*.

ORDİNAL ƏLAMƏT *« ординальный признак; ordinal criterion »* – bax, *Çoxölçülü statistik analiz*.

ORDİNAL YANAŞMA *« ординалистский подход; ordinal approach »* – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ORDİNAR MODEL(i) *« ординарная модель; ordinary model »* süzgeçləyici eksperimentlərin planlaşdırılmasının – ölçmələrin (kanalların) elə şərti paylanmasıdır ki, planların ən böyük asimptotik sürəti xətlərin ixtiyari kiçik ehtimalları ilə kanalın giriş və çıxışı arasında Şennon informasiyasının maksimal qiymətinə bərabərdir. Əgər z çıxışı $[x(\lambda_1) + x(\lambda_2) + x(\lambda_3)] \times (\bmod 2) + x(\lambda_4)$, $x(\cdot) = 0$ və ya 1 olarsa, onda model ordinar deyildir. Şərti entropiya terminlərində ordinarlığın kafi şərtləri verilmişdir. Əgər, məs., kanal simmetrik olarsa, yəni çıxış paylanması girişlərin nömrələrini dəyişdikdə dəyişmirsə, onda kanal bircinsdir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983, гл. 15; [2] М а л ю т о в М. Б., М а т е е в П. С., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 1, с. 109–27.

ORDİNAR NÖQTƏVİ PROSES *« ординарный точечный процесс; ordinary point process »* – elə təsadüfi *nöqtəvi* Φ *prosesidir* ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün bu prosesin vəziyyətlərinin faza fəzasının elə $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{Z_{a\varepsilon}\}$ bölgüsü tapılar ki,

$$\sum_a P\{\Phi(Z_{a\varepsilon}) > 1\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənsin. O. n. p. *sadə nöqtəvi prosesdir*. Əgər düz xətdə stasionar təsadüfi nöqtəvi Φ prosesi üçün $h \rightarrow 0$ olduqda

$$P\{\Phi((t, t+h]) > 1\} = o(h)$$

münasibəti ödənilərsə, Φ prosesi O. n. p.-dir.

ORDİNARLIĞI, AXININ *« ординарность потока; simplicity of a flow »* – *giriş axının* elə xassəsidir ki, axın hadisələrinin anları t_n -lər 1 ehtimalla müxtəlifdir. Giriş axını stasionar olduğu (bax, *Stasionarlığı, axının*) halda A. o. onun aşağıdakı xassələrindən alınır: qeyd olunmuş Δ uzunluqlu

zaman intervalında axında birdən çox hadisə baş verməsi ehtimalı, $\Delta \rightarrow 0$ olduqda, $\alpha(\Delta)$ -ya bərabərdir. Giriş axınları nəzəriyyəsinin elementar şərhində A. o.-nın tərfi kimi elə bu xassə götürülür. Ani intensivlik və ani parametrlər eynilik kimi üst-üstə düşməsi A. o.-na səbəb olur (bax, Qeyri – stasionar axın).

Əd.: [1] Ф р а н к е н П. И. др., Очереди в точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

OREY TEOREMİ « Орей теорема; Orey theorem » – S. Oreyin Harris qayıdışlı Markov zəncirləri üçün *ergodik teoremdir*. Bax, Markov zənciri.

ORNŞTEYN METRIKASI « Орнштейна метрика; Ornstein metric », d – m e t r i k a, – vəziyyətləri sayı sonlu və diskret zamanlı dar mənada stasionar $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ təsadüfi prosesləri çoxluğunda (daha dəqiq, belə proseslərin sonsuzölçülülük paylanmaları çoxluğunda) metrikadır; D. Ornşteyn tərəfindən daxil edilmişdir (bax, [1], [2]). Bu metrika $\bar{d}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(\mu_n, \nu_n)$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada μ_n, ν_n –

uyğun olaraq, $(X_1, \dots, X_n)$ və $(Y_1, \dots, Y_n)$ təsadüfi vektorlarının paylanmalarıdır, d_n – Kantoroviç mənada bu paylanmalar arasında məsafə olub (bax, [3], [4]), n uzunluqlu ardıcılıqlar fəzasında Hemming normalanmış metrikasına uyğundur. Dar mənada stasionar təsadüfi ardıcılıqlar çoxluğunu, ölçü saxlanılmaqla qarşılıqlı birqiyəmetli olaraq eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığına sanki yəqin yəqin kodlaşdırmaq mümkün olduğundan, belə çoxluq O. m.-da qapalıdır (bax, [2]). Bu metrika terminlərində yenidən kodlaşdırılması mümkün olan ayrıca götürülmüş stasionar təsadüfi ardıcılığının qapalı olduğu üçün zəruri və kafi şərtlər ifadə etmək mümkündür (bax, [2]). Vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari olan təsadüfi proseslər halı üçün O. m.-nin ümumiləşmələri mövcuddur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] О р н ш т е й н Д., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 3, с.125–36; [2] О р н ш т е й н Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [3] К а н т о р о в и ч Л. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–29; [4] К а н т о р о в и ч Л. В., Р у б и н ш т е й н Г. Ш., «Докл. АН СССР», 1957, т. 115, № 6, с. 1058–61; [5] Г р а у Р., Н е у - х о ф ф Д., Ш и е л д с Р., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 2, p. 315–28; [6] S c h w a r z G., «J. Math. Analysis and Appl.», 1980, v. 76, № 1, p. 146–58.

ORNŞTEYN – ULENBEK PROSESİ « Орнштейна – Уленбека процесс; Ornstein – Uhlenbeck process » – riyazi gözleməsi sıfıra bərabər, korrelyasion funksiyası eksponensial «sönən» və aşağıdakı kimi ifadə olunan

$$MV(t)V(t+\tau) = B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \alpha > 0$$

$V(t)$ – Gauss stasionar təsadüfi prosesidir. O. – U. p.

$$m dV(t) + \beta V(t)dt = dw(t) \quad (*)$$

şəklində stoxastik tənliyin (Lanjeven tənliyi) stasionar həlli kimi də təyin oluna bilər, burada $w(t)$ – Viner prosesidir (odur ki, $dw(t)/dt$ – bəyaz küy ümumiləşmiş təsadüfi prosesdir), m və β – müsbət sabitlərdir və $\beta/m = \alpha$.

(*) tənliyi sərbəst hissəciyin birölçülü Braun hərəkətini təqribən təsvir edir, bu zaman $V(t)$ – hissəciyin sürəti kimi interpretasiya

olunur, m onun kütləsi, $\beta V(t)$ – sürətə münasib olan «özlü sürtünmə» qüvvəsidir. Radiusu a -ya bərabər sferik hissəcik üçün β əmsalı hidrodinamik Stoks düsturuna əsasən $6\pi\eta a$ -ya bərabərdir, η – özlülük əmsalıdır. $w'(t)$ bəyaz küyü istilik hərəkətində olan mühit molekullarının xaosik zərbələrinin yaratdığı və Braun hərəkətinə əsas səbəb olan «təsadüfi qüvvədir». A. Eynşteyn (A. Einstein) və M. Smoluxovski (M. Smolouchowski) tərəfindən 1905 – 06-cı illərdə inkişaf etdirilmiş Braun hərəkətinin ilkin nəzəriyyəsində hissəciyin inersiyası nəzərə alınmırdı, yeni hesab olunurdu ki, $m=0$; belə olan halda (*) tənliyi o nəticəyə gətirirdi ki, Braun hissəciyinin koordinatı

$$X(t) = \int_0^t V(t') dt'$$

$\beta^{-1}w(t)$ -yə bərabərdir, yeni Viner prosesidir. Beləliklə, Viner prosesi Braun hərəkətinin E y n ş t e y n – S m o l u x o v s k i modelini təsvir edir (bu hərəkətin digər Braun hərəkəti prosesi adı buna görədir); bu proses differensiallanan olduğundan Eynşteyn – Smoluxovski nəzəriyyəsində Braun hərəkəti edən hissəciyin sonlu sürəti yoxdur. (*) tənliyinə istinadlanan Braun hərəkətinin dəqiqləşdirilmiş nəzəriyyəsində $m \neq 0$ şərti 1930-da L. Ornşteyn və Q. Ulenbek tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [1], [2]); sonradan, 1934-də S. N. Bernşteyn (bax, [3]) və A. N. Kolmoqorov tərəfindən bu nəzəriyyə [1]-dəki metodlardan fərqli metodlar istifadə edilərək irəli sürülmüşdür. Ornşteyn – Ulenbek nəzəriyyəsində Braun hissəciyinin sürəti $V(t)$ sonludur, lakin onun təcili sonsuzdur (çünki, O. – U. p. differensiallanmayandır); təcilin sonlu olması üçün nəzəriyyə dəqiqləşdirilməlidir və bu zaman ideallaşdırılmış $w'(t)$ bəyaz küyü ilə təsadüfi qüvvə arasında fərq nəzərə alınmalıdır.

(*) tənliyinin harmonik ossilyatorunu birölçülü Braun hərəkətinin təsviri üçün istifadə etmək olar, lakin bu zaman onun kütləsi nəzərə alınmamalı və $V(t)$ -nin ossilyatorun koordinatı olduğu.

$-m \frac{dV}{dt}$ -nin özlü sürtünmə qüvvəsi olduğu, $-\beta V$ -nin ossilya-

toru saxlayan rəqulyar möhkəmlik qüvvəsi $w'(t)$ -nin isə molekulyar nöqtələrin emələ gətirdiyi təsadüfi qüvvə olduğu fərz olunmalıdır. Beləliklə, O. – U. p. sərbəst hissəciyin Braun hərəkətinin Eynşteyn – Smoluxovski modelinə yaxın, Braun hərəkəti edən harmonik ossilyatorun koordinatının pulsasiyalar modelini də ifadə edir.

O. – U. p. diffuzion tipli zaman üzrə biricins Markov prosesidir və əksinə, eyni zamanda stasionar təsadüfi proses, Gauss prosesi və Markov prosesi olan $V(t)$ prosesi O. – U. p.-dir. O. – U. p.-ni Markov prosesi kimi onun keçid ehtimal sıxlığı $p(t, x, y)$ ilə xarakterizə etmək məqsədəuyğun olur, $p(t, x, y)$ funksiyası

$$p(t, x, y) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})^2]} \exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})}\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur və o,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \frac{\partial(y p)}{\partial y} + \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

şəklində uyğun Fokker – Plank tənliyinin (yeni Kolmoqorov düz tənliyinin) fundamental həllidir.

O. – U. p.-nin bir çox xassələrini (onun Markov xassəliliyi də daxil olmaqla) Viner prosesinin məlum xassələrindən almaq olur, bu halda

$$w_0(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sigma} V\left(\frac{\ln t}{2\alpha}\right)$$

prosesinin standart Viner prosesi olduğundan istifadə olunur (bax, [5]). Buradan alınır ki, O. – U. p.-nin realizasiyaları kəsilməzdir və sanki yəqin heç yerdə differensiallanmayandılar və sanki yəqin

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|V(t) - V(0)|}{(4\alpha\sigma^2 t \ln \frac{1}{t})^{1/2}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|V(t)|}{(2\sigma^2 \ln t)^{1/2}} = 1$$

münasibətlərini ödəyirlər. Bax, *Lançevən təntişi*.

Əd.: [1] U h l e n b e c k G. E., O r n s t e i n I. S., «Phys. Rev.», 1930, v. 36, № 3, p. 823–41; [2] Ч а н д р а с е к а р С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Б е р н ш т е й н С. Н., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 1, с. 1–9; № 7, с. 361–65; [4] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 168–70; [5] Д о о б J. L., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 351–69.

ORTA ƏLAQƏ ALQORİTMİ « средняя связи алгоритм; average linkage algorithm » – *təsnifatın iyerarx prosedurlarının* ele xüsusi halıdır ki, burada iki sinif arasında yaxınlıq ölçüsü bu siniflərə aid olan obyektlərdən təşkil olunmuş bütün mümkün cütler üçün yaxınlıq ölçülərinin ədədi ortası kimi təyin olunur (cütlerdeki obyektlər müxtəlif siniflərdən olmalıdır).

ORTA FAYDALILIQ « средняя полезность; mean utility » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ORTA GƏLİR KRİTERİSİ « среднего дохода критерий; average reward criterion » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

ORTA İŞLƏNİLMƏ MÜDDƏTİ « средняя наработка; mean operating time » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin*.

ORTA KƏMİYYƏT « средняя величина; mean value » – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasında* aşağıdakı kimi təyin olunan anlayışdır (bax, [1]). Ümumi təbiətli $\mathfrak{X}$ fəzasında qiymətlər alan X təsadüfi elementi üçün $\rho: \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1]$ yaxınlıq ölçüsünə nəzərən O. k.

$$M(X, \rho) = \arg \min_{y \in \mathfrak{X}} M \rho(X, y)$$

düsturu ilə təyin olunur və burada riyazi gözlemə X təsadüfi elementinə uyğun ehtimal ölçüsü üzrə götürülür. $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{X}$ seçimi üçün yaxınlıq ölçüsü ρ -ya nəzərən O. k.

$$M_n(\rho) = \arg \min_{y \in \mathfrak{X}} \sum_{i=1}^n \rho(X_i, y)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Böyük ədədlər qanunlarının analoqları bu halda aşağıdakı kimi ifadə olunur: bezi rəqulyarlıq şərtlərində seçimi orta $M_n(\rho)$ n artıqda nəzəri orta $M(X, \rho)$ -ya yığılır (bax, [2]).

$\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$ olduqda $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^1$ seçimi üçün orta

k ə m i y y ə t ele $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiya

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq f(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

münasibətini ödəsin (bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi, Kəməni medianı, Kolmoqorov orta kəmiyyətləri*).

Əd.: [1] О р л о в А. И., в кн.: Вопросы кибернетики, М., 1979, в. 58, с. 17–33; [2] О р л о в А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12.

k – ORTA KƏMİYYƏTLƏR METODU « k – средних метод; k – means method » – k sayda ($k \ll n$)

verilən siniflər üzərində n sayda müşahidələrin araşdırılan ardıcıl təsnifatmə prosedurlarından ən ümumi və ən tədqiq olunmuş birisidir (bax, [1]). k – O. k. m.-nün işləmə sxemi k sayda etalon nöqtənin bunlara qarşı qoyulan çəkirlərin uyğun hesablanması ilə ardıcıl hesablanılmasından ibarətdir. Etalon nöqtələr və çəkirlərin hesablanması başa çatdıqdan sonra müşahidələr k qrupa bölünür. Bu halda j -ci etalon nöqtəsi ən yaxın nöqtə olan (hər hansı metrika mənasında) müşahidələr j -ci qrupa aid olunur, $j = 1, \dots, k$.

Əd.: [1] M a c Q u e e n J., в кн.: Proceed Fifth. Berk. Symp. Math. Stat. and Probab., v. 1, Berk. – Los Ang., 1967, p. 281–97.

ORTA KƏMİYYƏTLƏR VEKTORU « средних вектор; vector of means » – çoxölçülü $X = (X_1, \dots, X_p)^T$

təsədüfi kəmiyyətinin komponentlərinin qruplaşma mərkəzinin xarakteristikasıdır. O. k. v., nəzəri olaraq, riyazi gözlemələr vektoru $MX = (MX_1, \dots, MX_p)^T$ kimi təyin olunur. n həcmli seçim üzrə p – ölçülü $X_1, \dots, X_n$ müşahidələrinin O. k. v.-nün statistik qiyməti hər bir komponenti bu komponentin müşahidə olunan qiymətlərinin (x_i -lərin) seçimi ortası olan vektordur (ədədi ortasıdır), yəni

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i$$

statistikasıdır.

Əd.: [1] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., 1963.

ORTA QİYMƏT « среднее; оценка; estimator of mean », orta statistik qiymət. – ümumi çoxluğun uyğun riyazi gözleməsinin *statistik qiymətidir*. $x_1, \dots, x_n$ – riyazi

gözleməsi θ və dispersiyası σ^2 olan paylanmadan n həcmli seçim olarsa, seçimi orta

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

düsturu ilə ifadə olunur, $\bar{x}$, – θ parametrinin minimal dispersiyalı xətti statistik qiymətidir.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

ORTA QİYMƏT(i) μ ehtimal ölçüsünün « среднее вероятностной меры μ ; mean / barycenter of a probability measure », bərimərkəz – B fəzasının özünə eyniliklə X inikasının, bu və ya digər

menada, $\int X d\mu$ inteqralıdır, burada μ , B fəzasının altçoxlularından təşkil olunmuş σ – cəbrdə təyin olunmuş ölçüdür.

Misal. B – separabel Banax fəzası, μ , B fəzasında ele Borel ehtimal ölçüsü olsun ki, $\int_B |x| \mu(dx) < \infty$ şərtini ödəsin.

Onda μ ölçüsünün O. q. – $\int_B x \mu(dx)$ Boxner inteqralıdır.

ORTA QIYMƏT(i) təsadüfi çoxluğun «*среднее значение случайного множества*»; **mean value of a random set**» realizasiyalari A fəzasında olan X təsadüfi çoxluğunun orta qiyməti –

$$Mp(X, B) = \inf_{K \subseteq A} Mp(X, K)$$

xassələrini ödəyən $B \in A$ çoxluğudur, burada ρ , $A \times A$ fəzasından olan, həqiqi qiymətləri hər hansı funksiyadır (bir qayda olaraq, metrika, psevdometrika, simmetrika və b.). X təsadüfi çoxluğunun $X_1, \dots, X_n$ realizasiyalari üzrə qurulmuş, ρ metrikasına nəzərən empirik O. q.

$$\sum_{k=1}^n \rho(X_k, B) = \inf_{K \subseteq A} \sum_{k=1}^n \rho(X_k, K)$$

xassəsini ödəyən $K \subseteq A$ çoxluğuna deyilir.

Təsadüfi çoxluqlar statistikasında təsadüfi çoxluğun O. q.-nin rolu böyük ədədlər qanununun doğru olması ilə (ödənilməsi ilə) təyin olunur (bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün, *Statistika(sı)* qeyri-ədədi təbiətli obyektlərin).

ORTA QIYMƏT(i) / RİYAZİ GÖZLƏMƏ(sı) təsadüfi elementin «*среднее значение / математическое ожидание случайного элемента*»; **mean / expectation value of a random element** – bax, *Riyazi gözləmə(sı)* təsadüfi elementin.

ORTA QIYMƏT(i) / RİYAZİ GÖZLƏMƏ(sı) təsadüfi funksiyanın «*среднее значение / математическое ожидание случайной функции*»; **mean / expectation value of a random function** – bax, *Momentlər funksiyası*.

ORTA QIYMƏT(i) / RİYAZİ GÖZLƏMƏ(sı) təsadüfi kəmiyyətin «*среднее значение / математическое ожидание случайной величины*»; **mean / expectation value of a random variable** – bax, *Riyazi gözləmə*.

ORTA METRİKA «*средняя метрика*; **mean metric**» – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda

$$\kappa_1(X, Y) = \int |F_X(x) - F_Y(x)| dx$$

düsturu ilə təyin olunan sadə *ehtimal metrikasıdır*, burada F_X , X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Əgər $F_X^{-1}(t) = \sup\{u: F_X(u) \leq t\}$ funksiyası F_X -ə tərs funksiyadırsa, onda

$$\kappa_1(X, Y) = \int_0^1 |F_X^{-1}(t) - F_Y^{-1}(t)| dt.$$

O. m.-nin təbii ümumiləşməsi q çəkili orta metrikdir, yəni

$$\mu(X, Y) = \int |F_X(x) - F_Y(x)| q(x) dx$$

düsturu ilə təyin olunan metrikdir, burada q , $\mathbb{R}^1$ -in ixtiyari sonlu intervalında inteqrallanan hər hansı mənfii olmayan funksiyadır. Ən çox istifadə olunan və maraqlı hal $q > 0$ şərtinin sanki hər yerdə ödənilməsi halıdır.

$$Q(x) = \int_0^x q(u) du, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

olsun; μ , κ_1 və Levi – Proxorov metrikası π , –

$$\mu(X, Y) = \kappa_1(Q(X), Q(Y)), \quad \pi^2(X, Y) \leq \kappa_1(X, Y)$$

münasibəti ilə əlaqədirlər.

O. m. mürəkkəb $M[X - Y]$ metrikasına nəzərən *minimal metrikdir*. O. m. təsadüfi kəmiyyətlərin cəm və maksimumu eməllərinin hər birinə nəzərən $T_c x = cx$, $x \in \mathbb{R}^1$, $c > 0$ çevirmələr sistemi ilə birlikdə birinci tərtib *ideal metrikdir*, $q(x) =$

$= s|x|^{s-1}$, $s \geq 1$ olduqda, μ metrikası s tərtib fərq *pseudomomenti* ilə üst-üstə düşür. O. m. üçün *Berri – Esseen* bərabərsizliklərinin analoqu vardır (bax, [1], [2]). O. m. və çəkili O. m.-nin çoxölçülü analoqları məlumdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Esseen C.-G., «Trans. Roy. Inst. Techn.», 1958, № 121, p. 1–31; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94.

ORTA MODULYAR REQRESSİYA «*средняя модульная регрессия*; **mean modular regression**» – bax, *Xətti reqressiya*.

ORTA MÜDDƏT(i) qayıdışın «*среднее время возвращения*»; **mean recurrence time**, orta qayıdış müddəti – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov zənciri*; orta qayıdış müddəti.

ORTA MÜDDƏT udulmaya qədər «*среднее время до поглощения*»; **expected absorption time** – bax, *Markov zənciri vəziyyətləri sayı* sonlu.

ORTA MÜTLƏQ YAYINMA(sı) seçimin «*среднее абсолютное отклонение выборки*»; **mean absolute deviation** – bax, *Səpələnmə(sı)* seçimin.

ORTA NİSBİ YAYINMA(sı) seçimin «*среднее относительное отклонение выборки*»; **sample coefficient of variation** – bax, *Səpələnmə(sı)* seçimin.

ORTA RİSK «*средний риск*; **average risk**» – bax, *Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi*, *Meteoroloji itkilər funksiyası*.

ORTA YAŞAMA MÜDDƏTİ «*среднее время жизни*; **mean life time**» – bax, *Sığortalamanın riyazi nəzəriyyəsi*.

ORTA YIĞILMA çəkili « средняя сходимость с весом; mean convergence with weight » – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının çəkili orta metrika ilə doğrulmuş (bax, Orta metrika) yığılma topologiyasıdır:

$$\mu(X, Y) = \int |F_X(x) - F_Y(x)| q(x) dx$$

– çəkili orta metrikadır, burada $F(x)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, q , – $\mathbb{R}^{-1}$ -in ixtiyari sonlu intervalında inteqrallanan, mənfi olmayan funksiyadır. q sanki hər yerdə müsbət funksiya olduğu halda, q çəkili O. y. zəif yığılmadan zəif deyildir. Doğrudan da,

$$\mu(X, Y) \geq \pi^2(Q(X), Q(Y))$$

berəbersizliyindən bu aydın olur, burada π – Levi – Proxorov metrikaçıdır və

$$Q(x) = \int_0^x q(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

$\mathbb{R}^1$ -də paylanmaların hər hansı $\mathfrak{A}$ çoxluğunun μ – kompaktlıq kriterisi

$$\sup \left\{ \int_{|x| > N} |Q(x)| dF(x) : F \in \mathfrak{A} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

şərtinin ödənilməsindən ibarətdir.

ORTALANMA(sı) oyunun « усреднение игры; randomization of a game » – randomizasiya deməkdir.

ORTALANMA PRİNSİPİ təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün « усреднения принцип для дифференциальных операторов со случайными коэффициентами; averaging / homogenization principle for differential operators with random coefficients » – sürətlə ossilyarlaşan təsadüfi əmsallarlı operatorların daha sadə quruluşlu operatorlara yaxınlaşması haqqında teoremlərin yığcam adıdır.

$f(x, t, \omega)$ təsadüfi meydanı üzərinə təbii şərtlər qoyulduğu halda ($x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, ω – elementar nəticədir)

$$dx^\varepsilon/dt = f(x^\varepsilon, t/\varepsilon, \omega),$$

tənliyinin həlli $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda, eyni başlanğıc şərtlərlə sağ tərəfi təsadüfi olmayan «ortalanmış» $\tilde{f}(x)$ olan tənliyinin həlli ilə yaxınlaşır (o fluktuasiyalann sistematik şərti və təsviri [1]-də verilmişdir).

İxtiyari tərtib xətti parabolik (bax, [2]) və elliptik (bax, [3]) operatorların ortalınması G – yığılma anlayışından istifadə edilərək araşdırılmışdır (əgər $A_\varepsilon^{-1}f$ ixtiyari f üçün $A_0^{-1}f$ -ə zəif yığılarsa, A_ε koersitiv operatoru A_0 -a G – yığılır). Fərz olunur ki, məs.,

$$\mathcal{L}_\varepsilon u(x) \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x/\varepsilon, \omega) D_x^\beta u(x)), \quad (*)$$

burada $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $D_x^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_d)^{\alpha_d}$ və fərz olunur ki, ölçülən təsadüfi meydanların bütün realizasiyaları

$a_{\alpha\beta}(y, \omega)$ bütün fəzada məhduddurlar və elliptiklik şərtini ödəyirlər: ixtiyari $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ funksiyası üçün

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D_y^\alpha v, D_y^\beta v) \geq c \sum_{|\alpha| = m} (D_y^\alpha v, D_y^\alpha v)$$

berəbersizliyi doğrudur; $c > 0$, $(\cdot, \cdot)$ – $L^2(\mathbb{R}^d)$ -də skalyar hasilidir. Əgər əmsallar meydanı bircins və erqodik olarsa, onda sabit və təsadüfi olmayan $\hat{a}_{\alpha\beta}$ əmsallarlı, $(*)$ şəklində $\mathcal{L}_0$ operatoru vardır ki, ixtiyari məhdud Q oblastı və məqbul sağ tərəf üçün $\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = f$ tənliyinin $\overset{0}{H}_m(Q)$ Sobolev fəzasından olan həlli $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda 1 ehtimalla $\overset{0}{H}_m(Q)$ -də $\mathcal{L}_0 u_0 = f$ tənliyinin həllinə zəif yığılır (bax, [3]). Ortalanmış operatorun əmsalları

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \left\langle a_{\alpha\beta} + \sum_{|\gamma| = m} a_{\alpha\gamma} D^\gamma N_\beta \right\rangle, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m$$

berəbərliliyi ilə verilir, burada N_β , –

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| = m} (-1)^m D_y^\alpha (a_{\alpha\gamma}(y, \omega) D_y^\gamma N_\beta(y)) = \\ = - \sum_{|\alpha| = m} (-1)^m D_y^\alpha a_{\alpha\beta}(y, \omega), \quad |\beta| \leq m \end{aligned}$$

köməkçi tənliklərinin münasib ümumiləşmiş həlləridir. $\langle A \rangle$ isə bircins A meydanının fəzavi orta qiymətidir.

Oxşar nəticələr parabolik operatorlar üçün də məlumdur (bax, [2]).

2-ci tərtib operatorlar üçün ortalınmanı doğuran operatoru $\mathcal{L}_\varepsilon$ olan (təsadüfi mikro – qeyri – bircins mühitdə diffuziyalı) diffuzion proseslərin paylanmalarının «ortalınmış» diffuziyalann paylanmalarına zəif yığılması kimi interpretasiya etmək olar. Ortalanma və təsadüfi mühitlərdə təsadüfi dolaşmaların xassələri arasında əlaqələr haqqında, bax, [4].

Ortalanma haqqında teoremlər qeyri – divergent formada operatorlar üçün də məlumdur (bax, [4], [5]-də xülasəyə). Məs., doğuran operatoru

$$\mathcal{Q}_\varepsilon \equiv \sum_{i, j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x, \omega) \partial^2 / \partial x_i \partial x_j, \quad a_{ij}^\varepsilon(x, \omega) = a_{ij}(x/\varepsilon, \omega)$$

olan diffuziyanın paylanması $a_{ij} = a_{ji}$ əmsallarının meydanı bircins olduğu halda, təbii məhdudiyyətlərlə əmsalları $\hat{a}_{ij} = \langle a_{ij} p \rangle / \langle p \rangle$ olan diffuziyanın paylanmasına yığılır: p , – $\mathcal{Q}$ -in invariant sıxlığıdır.

Ortalanmış əmsalların hesablanması üçün aşkar düsturlar $d=1$ halında və bəzi $d > 1$ xüsusi halları üçün məlumdur (bax, [2]). Bunlar üçün statistik qiymətlər vardır (bax, [2], [3], [6]).

Bax, Limit teoremləri stoxastik differensial tənliklər üçün.

Əd.: [1] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных

возмущений, М., 1979, с. 424; [2] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 1, с. 11–58; [3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Хатъен Н. Г. о. а. н., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, № 5, с. 65–133; [4] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, № 2, с. 61–120; [5] Сиражуддинов М. М., «Дифференциальные уравнения», 1983, т. 19, № 11, с. 1949–56; [6] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1989, т. 44, в. 2, с. 79–120.

ORTALANMIŞ ENERGETİK SPEKTR «осредненный энергетический спектр; averaged energy spectrum» – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq*.

ORTALANMIŞ GÜC SPEKTRİ «осредненный спектр мощности; averaged power spectrum» – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq*.

ORTALANMIŞ KORRELYASİON FUNKSIYA «осредненная корреляционная функция; averaged correlation function» – diskret zamanlı (tamqıymətli) və ya kəsilməz zamanlı, korrelyasion funksiyası $B(t, s) = M\zeta(t)\bar{\zeta}(s)$ kəsilməz, təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin tamqıymətli və ya ixtiyari həqiqi τ arqumentinin funksiyası $B_{av}(\tau)$ -dur, $\tau \geq 0$ olduqda

$$B_{av}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} B(t+\tau, t)$$

və ya

$$B_{av}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} B(t+\tau, t) dt$$

bərabərliyi ilə, $\tau < 0$ olduqda isə $B_{av}(\tau) = \overline{B_{av}(-\tau)}$ bərabərliyi ilə verilir. O. k. f.-ya malik proseslər sinfi [1] və [2]-də daxil olunmuşdur. Sonradan [3]–[8]-də bu tipli proseslərə baxılmışdır. Bu sinif ortalananmış spektrli təsadüfi proseslər sinfi adlanır, bütün stasionar proseslər bu sinfidəndir [bunlar üçün $B_{av}(\tau)$ adi korrelyasion $B(\tau)$ funksiyası ilə üst-üstə düşür], qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin bəzi kateqoriyaları da bu sinfə daxildir (bax, *Təsadüfi proses ortalananmış spektrli*, burada belə proseslərin təklif edilmiş digər adları da verilmişdir).

Əgər τ parametrindən asılı $\zeta_\tau^*(t) = \zeta(t+\tau)\bar{\zeta}(t)$ təsadüfi prosesi qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün *böyük ədədlər qanununa* tabe olarsa, $B_{av}(\tau)$ funksiyasının

$$B_\tau^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-\tau} x(t+\tau)\bar{x}(t)$$

və ya

$$B_\tau^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau)\bar{x}(t) dt$$

statistik qiyməti tutarlı statistik qiymətdir (bax, [5], [6]), [burada $x(t)$ – ortalananmış spektrə malik təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyasıdır]. Əgər O. k. f. $B_{av}(\tau)$ vardırsa, onda o, τ -nın kəsilməz mənfi olmayan müəyyən funksiyasıdır; buna görə də, Boxner teoreminə əsasən (və ya τ diskret olduğu halda, Herhlots teoreminə əsasən), bu funksiya məhdud, azalmayan

$F_{av}(\lambda)$ funksiyasına görə Furiye – Stilyes inteqralı şəklində göstərilə bilər, bu funksiya $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalananmış spektral funksiyası* adlanır ($F_{av}(\lambda)$ mütləq kəsilməz funksiya olduqda, $f_{av}(\lambda)$ mənfi olmayan *ortalananmış spektral sıxlığın* qeyri – müəyyən inteqralı şəklində).

Əd.: [1] Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., 1951; [2] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Théorie des fonctions aléatoires, P., 1953; [3] Fortet R., «L'onde électrique», 1954, t. 34, № 329/330, p. 683–87; [4] Харкевич А. А., «Радиотехника», 1957, т. 12, в. 5, с. 5–11; [5] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [6] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [7] Kampé de Fériet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [8] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103.

ORTALANMIŞ SPEKTRAL FUNKSIYA «осредненная спектральная функция; averaged spectral function» – ortalananmış spektrə malik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalananmış korrelyasion funksiyası* $B_{av}(\tau)$ -nın

$$B_{av}(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda} dF_{av}(\lambda)$$

Furiye – Stilyes inteqralı şəklində ifadəsində məhdud monoton azalmayan, λ arqumentinin funksiyası $F_{av}(\lambda)$ -dır [$\zeta(t)$ – diskret zamanlı təsadüfi proses olduqda $\lambda \in [-\pi, \pi)$, kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olduqda $\lambda \in (-\infty, \infty)$], burada $\Lambda \in [-\pi, \pi)$ və ya $(-\infty, \infty)$.

O. s. f. [1]-də Yu. A. Rozanov tərəfindən daxil olunmuşdur, burada o. bunu sadəcə $\zeta(t)$ prosesinin spektri [prosesin özü $\zeta(t)$ -ni isə spektrə malik proses] adlandırmışdır. Sonradan bu funksiya [2]-də qeyri – stasionar $\zeta(t)$ prosesinin inteqrallananmış spektri, [3]–[4]-də Forte – Xarkeviç – Rozanov spektri, [5]-də $\zeta(t)$ prosesinin əlavə olunmuş (və ya assosiasiyalanmış) spektri kimi adlandırılmışdır.

O. s. f. $F_{av}(\lambda)$ -nın tutarlı statistik qiyməti geniş şərtlərlə $\zeta(t)$ prosesinin periodogramı $I_T(\lambda')$ -dən $-\pi$ -dən (və ya $-\infty$ -dən) λ -ya qədər inteqral olacaqdır (bax, məs., [6]).

Əd.: [1] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [2] Kampé de Fériet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [3] Драган Я. П., Структура и представление моделей стохастических сигналов, Киев, 1980; [4] Драган Я. П., Яворский И. Н., Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы, Киев, 1982; [5] Chang D. K., Rao M. M., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 7–118; [6] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, p. 87–103.

ORTALANMIŞ SPEKTRAL SIXLIQ «осредненная спектральная плотность; averaged spectral density», ortalananmış energetik spektr, ortalananmış güc spektri, – ortalananmış spektrə malik və Furiye çevirməsi olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalananmış korrelyasion funksiyası* $B_{av}(\tau)$ -nın Furiye çevirməsi olan [yeni ele prosesin ki, $B_{av}(\tau)$, $|\tau| \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra olduqca sürətlə yaxınlaşır], mənfi olmayan $f_{av}(\lambda)$ funksiyasıdır (burada diskret zamanlı

proseslər üçün $-\pi \leq \lambda < \pi$, kəsilməz zamanlı proseslər üçün $-\infty < \lambda < \infty$ olur. Əgər $F_{ab}(\lambda)$ $\zeta(t)$ prosesinin ortalanan spektral funksiyasıdır, onda $f_{ab}(\lambda) = F'_{ab}(\lambda)$ olur.

O. s. s. anlayışı [1], [3]-də (bax, həm də [4] – [8]) daxil olunmuş və baxılmışdır. Mühəndislər üçün nəzərdə tutulan ədəbiyyatda (məs., [4], [5]) O. s. s. əksər hallarda qeyri – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral sıxlığı adlandırılır (və ya qısaca – spektri).

Stasionar təsadüfi proseslərin spektral sıxlıqları haqqında bir çox nəticələr ortalanan spektrə malik $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinin O. s. s.-i üçün də ifadə oluna bilər. Məs., zaman üzrə xətti invariant $\mathcal{L}$ sisteminin girişinə O. s. s.-i $f_{av}(\lambda)$ olan belə $\zeta(t)$ prosesini daxil etdikdə, bu sistemin çıxışındakı proses də ortalanan spektrə malik olur və onun O. s. s. $|\mathcal{H}(\lambda)|^2 f_{av}(\lambda)$ -ya bərabər olur, burada $\mathcal{H}(\lambda)$, – $\mathcal{L}$ sisteminin ötürücü funksiyasıdır. Stasionar proseslərin spektral $f(\lambda)$ sıxlıqlarının qeyri – parametrik qiymətləndirilməsinin demək olar ki, bütün nəzəriyyəsi $f_{av}(\lambda)$ O. s. s.-nin qiymətləndirilməsində tətbiq oluna bilər, lakin bu zaman stasionar prosesin korrelyasion funksiyasının statistik qiyməti əvəzinə $B_{av}(\tau)$ funksiyasının statistik qiyməti kimi $B_T^*(\tau)$ -nu götürmək (bax, *Ortalanmış korrelyasion funksiya*), stasionar prosesin periodogramı $I_T(\lambda)$ -nı isə ortalanan spektrə malik qeyri – stasionar $\zeta(t)$ prosesinin periodogramı ilə əvəz etmək lazımdır.

Əd.: [1] Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., 1951; [2] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Théorie des fonctions aléatoires, P., 1953; [3] Розанов Ю. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [5] Kampé de Fériet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [6] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103; [7] Rao M. M., в кн.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [8] Чанг Д. К., Рао М. М., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 2–118.

ORTALANMIŞ YAYINMA «срединное отклонение; semi – interquartile range» – bax, *Ehtimal olunan yayınma*.

ORTAÖLÇÜLÜ ÇOXLUQ «среднемерное множество; average measure set / medium – measured set» – təsadüfi çoxluğun orta qiymətinin aşağıdakı kimi təyin olunan analoqudur. K – sonlu çoxluq, $\mathcal{M}$ – onun bütün altçoxluqlarının çoxluğu, μ , – $\mathcal{M}$ cəbrində birnöqtəvi çoxluqlarda müsbət qiymətlər alan ölçü, X – sonlu, qiymətləri $\mathcal{M}$ -dən olan təsadüfi çoxluq, $\varphi(x) = P\{x \in X\}$ olsun. Əgər bütün $B \in \mathcal{M}$ çoxluqları üçün $\mu(A)$ -ya bərabər ölçü ilə

$$M\mu(A\Delta X) \leq M\mu(B\Delta X)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, A çoxluğu X -ə nəzərən ekstremal çoxluq adlanır, burada Δ – çoxluqların simmetrik fərqi işarəsidir. $h \in [0, 1]$ və

$$V(h) = \{A | A \in \mathcal{M}, \inf_{x \in A} \varphi(x) \geq h, \sup_{x \in K \setminus A} \varphi(x) \leq h\}$$

olsun.

O. ç.-lar sinfi $S(x)$ ekstremal çoxluqlar siniflərindən $V(h)$ sinfinə deyildir ki, bu sinfe daxil olan çoxluqların ölçüləri $\lambda = M\mu(X)$ ədədinə daha yaxındır. Başqa sözlə, $S(X) = V(h^*)$, burada $h^* = (H + h)/2$,

$$H = \sup \{t | t \in [0, 1], v(t) \geq \lambda\},$$

$$h = \inf \{t | t \in [0, 1], v(t) \leq \lambda\},$$

$$v(t) = \mu\{x | x \in K, \varphi(x) \geq t\}.$$

O. ç.-lar sinfi anlayışı sonluölçülü ixtiyari separabel fəzanın təsadüfi ölçülən altçoxluğu üçün də korrekt olaraq təyin oluna bilər.

Əd.: [1] Воробьев О. Ю., Среднемерное моделирование, М., 1984.

ORTOQONAL AYRILIŞ(ı) təsadüfi prosesin «ортогональное разложение случайного процесса; orthogonal expansion of a random process» – bax, *Karunen – Loev ayrılışı*.

ORTOQONAL BLOKLAR «ортогональные блоки; orthogonal blocks» – D eksperimentinin faktor planının kəsişməyən $D_0, \dots, D_{s-1}$ altçoxluqlarıdır ki, planın hər bir nöqtəsi D_i , $i = 0, 1, \dots, s-1$ altçoxluqlarından yalnız birinə daxildir və aşağıdakı ortoqonallıq şərti ödənilir: F – blok faktoru, yəni D_i , $i = 0, 1, \dots, s-1$ altçoxluğunun sınaqları üçün i qiymətini alan faktor olsun və X – parametrlərinə görə xətti verilmiş model üçün D planının əmsallar matrisi olsun. Daha sonra fərz olunur ki, X matrisindən F blok faktoruna uyğun sütunlar silinmiş, alınan matris isə X' ilə işarə olunmuşdur. Onda $D_0, \dots, D_{s-1}$ bloklarının ortoqonallıq şərti – F faktorunun ixtiyari baş effekt vektorunun X' matrisinin ixtiyari sütununa ortoqonal olmasıdır. Blokların ortoqonallığı blok effektlərinin digər parametrlərin və ya parametrik funksiyaların statistik qiymətlərinə təsir etməsinə imkan yaradır, belə ki, bu ortoqonallıq araşdırılan faktorların effektlərinin statistik qiymətlərinin blok effektlərindən qeyri – korrelyasiya olduğunu doğrurur.

Əd.: [1] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976.

ORTOQONAL CƏDVƏL «ортогональная таблица; orthogonal table» – bax, *Faktor eksperiment*.

ORTOQONAL FIRLANMA(sı) faktor oxları – nın «ортогональное вращение факторных осей; orthogonal rotation of factorial axes» – bax, *Faktorial oxların fırlanması*.

ORTOQONAL FUNKSIYALAR empirik «ортогональные функции эмпирические; empirical orthogonal functions» – bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*.

ORTOQONAL KUBLAR «ортогональные кубы; orthogonal cubes» – eyni bir $s \times s \times s$ ölçülü, üçölçülü $K_1, \dots, K_n$ matrisləridir ki, bu matrislərin simvolları uyğun olaraq, $S_1, \dots, S_n$ çoxluqlarıdır və simvolların ixtiyari nizamlanmış cütü (a, b) , $a \in S_p$, $b \in S_p$ üçün ixtiyari $K_p = \|a_{ijk}\|$.

$K_q = \|b_{jk}\|$ matrislərində $a_{ijk} = a$, $b_{ijk} = b$ şərtlərini ödəyən (i, j, k) indekslər üçlüklərinin sayı p və q -nün verilmiş qiymətlərində sabitdir.

O. k.-lar eksperimentin planlaşdırılmasında *ortoqonal kvadratlar* analoji istifadə olunur. Əsas maraq doğuran *ortoqonal Latin kublarıdır*. Belə *ortoqonal latin kubları* cütü *yunan-latın kubu* u, ikiden çox saylı belə *ortoqonal latin kubları* çoxluğu *hiperyunan-latın kubu* adlanır. Birinci tərtib $s \times s \times s$ ölçülü *ortoqonal latin kublarının* maksimal sayı $s^2 + s + 2$ -ni aşmır, belə ki, s sadə ədədin qüvvət üstü olarsa, onda bu say $s^2 + s + 2$ -yə bərabər olur. 2-ci tərtib *ortoqonal latin kubları* cütü mövcud deyildir, lakin cüt-cüt *ortoqonal olan bir neçə 1-ci tərtib latin kubları* və 2-ci tərtib bir *latin kubundan* ibarət *latin kubları* çoxluğu mövcuddur.

Əd.: [1] Марков Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979; [2] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976; [3] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

ORTOQONAL KVADRATLAR « ортогональные квадраты; orthogonal squares » – eyni, $s > 1$ ölçülü n sayda kvadratlardır, yeni s sayda müxtəlif simvollarla təşkil olunmuş s tərtib *ele kvadrat matrislərdir* ki, bunlardan ixtiyari ikisi üçün $(A = \|a_{ij}\|$ və $B = \|b_{ij}\|)$, hər bir nizamlanmış simvollar cütü (a, b) üçün yalnız yeganə (i, j) indekslər cütü vardır ki, $a_{ij} = a$, $b_{ij} = b$. *Ortoqonallığın* bu şərti ilə verilən *Latin kvadratları* – *ortoqonal Latin kvadratları* xüsusi maraq kəşf edən *latin kvadratlarındandır*. *Ortoqonal latin kvadratları* cütü *yunan-latın kvadratı*, ikiden çox sayda *ortoqonal latin kvadratları* çoxluğu *hiperyunan-latın kvadratı* adlanır. Əgər λ_s , s ölçülü *ortoqonal latin kvadratlarının* maksimal saydırsa, onda $\lambda_s \leq s - 1$, $\lambda_s \geq \min(p_i^{h_i} - 1)$ bərabərsizlikləri doğrudur,

burada $s = \prod_{i=1}^r p_i^{h_i}$, s ədədinin kanonik ayrılışıdır, bu zaman

p_i – sadə, h_i isə natural ədədlərdir, $i = 1, \dots, r$. Əgər s sadə ədədin tam qüvvət üstüdürsə, onda $\lambda_s = s - 1$.

Ortoqonal latin kvadratlarının varlığı və s -in verilmiş qiymətində onların qurulması sadə məsələlər deyildir. Məs., 1782-də L. Eyler (L. Euler) fərz etmişdir ki, $s = 4k + 2$, $k = 1, 2, \dots$ qiymətlərinin heç biri üçün *ortoqonal latin kvadratları* yoxdur. Yalnız 1959-da (bax, [1]) bu fərziyyənin doğru olmadığı aşkar edildi, belə ki, $s = 2$ və $s = 6$ qiymətlərindən başqa bütün s -lər üçün *ortoqonal latin kvadratlarının* varlığı isbat olundu.

n sayda O. k.-dan ibarət hər bir topluya $(n + 2)$ – faktor eksperimentinin planı uyğun olur və bu faktorların hamısı s səviyyəlidir, ölçmələrin ümumi sayı s^2 -na bərabərdir. Əgər (i, j) ölçməsinde birinci faktor i -ci səviyyədə qeyd olunarsa, ikinci faktor j -ci səviyyədə qeyd olunarsa, $(k + 2)$ -ci faktor, $k = 1, \dots, n$ isə k -ci kvadratın (i, j) -ci yerində olan simvolla təyin olunarsa, qeyd olunan uyğunluq alınır.

696 ORTOQONAL

Əd.: [1] Parker E. T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1959, v. 45, p. 859–62; [2] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970.

ORTOQONAL LATIN DÜZBUCAQLILARI « ортогональные латинские прямоугольники; orthogonal Latin restangles » – bax, *Latin düzbucaqlısı*.

ORTOQONAL LATIN KVADRATLARI « ортогональные латинские квадраты; orthogonal Latin squares » – bax, *Latin kvadratı*, *Ortoqonal kvadratlar*.

ORTOQONAL PLANLAŞDIRILMA « ортогональное планирование; orthogonal design » – bax, *Adamar matrisi*.

ORTOQONAL REQRESSİYA « ортогональная регрессия; orthogonal regression » – eksperimentin planında prediktorları *ortoqonal olan regression eksperimentidir*.

O. r. üçün en kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin komponentləri mehz ölçmə vektorları və prediktorların normalanmış skalyar hasiləridir; bunlar prediktorlar çoxluğu genişləndirildikdə dəyişirlər; informasiya matris diaqonal matrisdir. Ölçmələr normal paylanma qanununa tabe olduğu halda bezi, asılı olmayan $\hat{\theta}$ komponentlərinin mühümlüyünü yoxlamaq sadə olur.

Bax, *Xətti reqressiya*.

ORTOQONAL TƏSADÜFİ MATRİS « ортогональная случайная матрица; orthogonal random matrix » – n – tərtib *ele H_n təsadüfi matrisidir* ki, onun transponirə olunmuş H_n^T matrisi H_n^{-1} ters matrisi ilə üst-üstə düşür. H_n matrisinin məxsusi qiymətləri: n cüt olduqda $\exp(\pm i\lambda_k)$, $k = 1, \dots, n/2$ və n tək olduqda isə $\exp(\pm i\lambda_k)$, $k = 1, \dots, (n-1)/2$ və 1-ə bərabər olur, burada λ_k – heqiqi ədədlərdir, $0 \leq \lambda_k < 2\pi$. Qoşma olmayan məxsusi qiymətlərə uyğun məxsusi u_k vektorları *ortoqonaldırlar*.

O. t. m. H_n -in məxsusi qiymətləri aşağıdakı kimi nizamlanır: $\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{n/2}}, e^{-i\lambda_{n/2}}, 2\pi > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n/2} \geq 0\}$, n cüt olduqda məxsusi qiymətlərdən bəzilərinin ± 1 -ə bərabər olduğu hal da mümkündür, onda nizamlama aşağıdakı kimi olur: $\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{(n-2)/2}}, e^{-i\lambda_{(n-2)/2}}, +1, -1, 2\pi > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{(n-2)/2} \geq 0\}$; n tək olduğu halda məxsusi qiymətlər aşağıdakı kimi nizamlanır: $\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{(n-1)/2}}, e^{-i\lambda_{(n-1)/2}}, \xi, 2\pi > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{(n-1)/2} \geq 0\}$ sonuncu məxsusi ξ qiyməti hər hansı $+1$ və ya -1 qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyətdir.

H_n O. t. m. 1 ehtimalla n cüt olduğu halda, yeni n , $q = (n - 2)/2$ qiymətində

$$H_n = U_n \times \times \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 \\ -\sin \lambda_1 & \cos \lambda_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos \lambda_q & \sin \lambda_q \\ -\sin \lambda_q & \cos \lambda_q \end{bmatrix}, +1, -1 \right\} U_n^T,$$

n tək olduqda, $s = (n - 1)/2$

$$H_n = U_n \times \left\{ \begin{bmatrix} \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 \\ -\sin \lambda_1 & \cos \lambda_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos \lambda_s & \sin \lambda_s \\ -\sin \lambda_s & \cos \lambda_s \end{bmatrix}, \xi \right\} U_n^T$$

şəklində ifadə olunur, burada U_n – vektor sütunları $\text{Re } u_k$, $\text{Im } u_k$ olan ortoqonal matrisdir.

Əgər n cüt olarsa və O. t. m. H_n -in $+1$ və -1 -ə bərabər məxsusi qiymətləri yoxdursa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \dots, n$; əgər n cüt olarsa və H_n matrisinin $+1$ və -1 -ə bərabər məxsusi qiymətləri varsa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \dots, n-2$, $u_{1,n-1} \geq 0$, $u_{1n} \geq 0$, burada u_{1m} – U_n matrisinin elementləridir. Əgər n tək olarsa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \dots, n-1$, $u_{1n} \geq 0$.

Fərz olunur ki, G – n – ölçülü ortoqonal həqiqi matrislər qrupu, μ – bu qrupda normalanmış Haar ölçüsü, $\mathcal{B}$ – G qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri, n – tək ədəddir. Əgər H_n O. t. m. μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirsə, onda ixtiyari $L \in \mathcal{B}$ çoxluğu və həqiqi α_j, β_j , $j = 1, \dots, (n-1)/2$, $0 \leq \alpha_j \beta_j < 2\pi$ ədədləri üçün

$$P \{ U_n \in L, \alpha_j \leq \lambda_j < \beta_j, j = 1, \dots, (n-1)/2, \xi = \pm 1 \}$$

ehtimalını hesablamaq mümkündür (bax, [1]).

Əd.: [1] Г н р к о В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106; [2] М у р н а г а н Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

OSSİLYAR TƏSADÜFİ PROSES «осциллирующий случайный процесс; oscillatory random process» – bax, *Spektral nəzəriyyələri* (i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin, *Evolusionar spektral ifadə*.

OYUN statistik «игра статистическая statistical game» – bax, *Statistik oyun*.

OYUNU, İKİ ŞƏXSİN «игра двух лиц; two – person game» – ixtilaf şəraitində iki tərəfin qarşılıqlı hərəkətlərində optimal qərarların qəbul edilməsinin riyazi modelidir. İxtilaf şəraitində oyunçu adlandırılan tərəflərin hər birinin hərəkətləri (strategiyaları) çoxluğunun və bu hərəkətlərin nəticələri çoxluğunun verildiyi fərz olunur. Formal olaraq İ. ş. o.-nu (D, Θ, w) üçlüyü

kimi təyin etmək olar, burada D – I oyunçunun strategiyaları – d -lərin çoxluğu, Θ – II oyunçunun strategiyaları – θ -lərin çoxluğu, $w = w(d, \theta)$ – I oyunçu d strategiyasını, II oyunçunun isə θ strategiyasını seçdikdə, I oyunçunun itkisini təyin edən, $D \times \Theta$ fəzasında təyin olunmuş funksiyadır. Lakin cəmi sıfıra bərabər olan ən çox öyrənilmiş oyunlar üçün II oyunçunun itki funksiyası $\bar{w}(d, \theta) = -w(d, \theta)$ da verilir, odur ki, I oyunçunun itkisi mehz II oyunçunun uduşu olur, oyunçuların maraqları bir-birinə əksdir və burada heç bir razılığa gəlmə şərti nəzərdə tutulmur. Riyazi statistikaya tətbiqi məsələlərdə II oyunçu kimi «təbiət» götürülür və bu halda onun itki funksiyası $\bar{w}(d, \theta)$ -ni ixtiyari surətdə, məsələn, cəmi sıfır olan oyunlara baxılmaqla kifayətlənərək vermək mümkündür. Aşağıda mehz belə oyunlara baxılır.

İ. ş. o. nəzəriyyəsinin əsas məsələsi I oyunçu üçün optimal strategiyanın seçilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə strategiyalar çoxluğu nizamlanmalıdır. I oyunçunun optimal strategiyalarının seçilməsi üçün aşağıdakı yanaşmalar qəbul olunmuşdur: altsiniflərdə müntəzəm optimal strategiyaların axtarılması; Beyes strategiyalarının qurulması; minimaks strategiyaların qurulması; bütün yaxşılaşmayan strategiyalar küllüsünün təyin olunması (strategiyaların tam sinfi adlanan).

1. Altsiniflərdə müntəzəm optimal strategiyalar.

Əgər $\delta_1 \in D$ və $\delta_2 \in D$ strategiyaları üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$w(\delta_1, \theta) \leq w(\delta_2, \theta) \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə və heç olmasa ələ bir $\theta_1 \in \Theta$ qiyməti varsa ki, $w(\delta_1, \theta_1) < w(\delta_2, \theta_1)$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda δ_1 strategiyası δ_2 strategiyasından yaxşıdır, deyilir. Əgər yalnız (1) şərti ödənilərsə, onda δ_1 strategiyası δ_2 strategiyasından pis deyildir, deyilir. Bütün $\delta \in D_0$, $\theta \in \Theta$ üçün

$$w(\delta_0, \theta) \leq w(\delta, \theta)$$

şərtini ödəyən δ_0 strategiyasına $D_0 \subset D$ altsinfində müntəzəm optimal strategiya deyilir.

Bütün D sinfində müntəzəm optimal strategiyalar real məsələlərdə demək olar ki, mövcud olmur, lakin kifayət qədər dar altsiniflərdə onlar ola bilər. Riyazi statistika məsələlərində, əksər hallarda, baxılan strategiyalar sinfini ələ daraltmaq (simmetriya, prosedurun təbiiyi, hesablamaların sadəliyi baxımından) mümkün olur ki, bu daraltmadan sonra «qalan» strategiyalar sinfində müntəzəm optimal strategiya olur. Bununla da, optimal strategiyanın seçilməsi problemi həll olunur. Belə yanaşmada eyni zamanda strategiyalar sinfinin daraldılması nəticəsində olduqca yaxşı nəticənin alınması mümkünlüyünün itməməsi məsələsinin araşdırılması da zəruridir. Statistik oyunlar çərçivəsində belə yanaşmaya misallar meylsiz statistik qiymətlərin altsinfində parametrin ən yaxşı (effektiv) statistik qiymətləri və bütün invariant və ya meylsiz kriterilərin altsiniflərində müntəzəm ən güclü kriterilərdir.

2. Beyes kriteriləri. Bu strategiyalar o hallarda yaranır ki, II oyunçu öz strategiyasını təsadüfi surətdə Θ -dan hər hansı bir paylanma ilə (məlum, ya naməlum) seçir. Bu yanaşmada D və Θ strategiyalar sinifləri ölçülən fəza strukturlu olur, yəni Θ və D -də altçoxluqlardan təşkil olunmuş təbii $\mathcal{F}_D$ və $\mathcal{F}_\Theta$ σ -cəbrləri təyin olunur.

$(D, \mathcal{F}_D)$ fəzasında π paylanması və $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ fəzasında Q paylanması uyğun olaraq, I və II oyunçunun qarışıq və ya randomlanmış strategiyaları adlanır. Q (əksər hallarda) aprior paylanma adlanır. π və Q paylanmalar verildikdə $(D \times \Theta, \mathcal{F}_{D \times \Theta}, \pi \times Q)$ ehtimal fəzası doğurulur, burada $\mathcal{F}_{D \times \Theta}$ – $\mathcal{F}_D$ və $\mathcal{F}_\Theta$ σ -cəbrlərindən olan çoxluqların düz hasilinin doğurduğu σ -cəbrdir; $\mathcal{F}_D$ və $\mathcal{F}_\Theta$ σ -cəbrləri ələ seçilir ki, onlar aşağıdakı şərtləri ödəsinlər: a) $\mathcal{F}_D$ və $\mathcal{F}_\Theta$ uyğun olaraq $\{\delta\}$ və $\{\theta\}$ birməqətli çoxluqlarını özündə saxlayır, b) itki funksiyası $w(\delta, \theta)$ $\mathcal{F}_{D \times \Theta}$ σ -cəbrinə nəzərən ölçüləndir.

I və II oyunçunun bütün qarışıq strategiyalarının çoxluqlarına [yeni $(D, \mathcal{P}_D)$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu $\tilde{D}$ və $(\Theta, \mathcal{P}_\Theta)$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu $\tilde{\Theta}$] xalis $\delta \in D$ və $\theta \in \Theta$ strategiyalarını bu nöqtələrdə toplanmış paylanmalarla eyniləşdirərək, D və Θ çoxluqlarının genişlənməsi kimi baxmaq olar. π , Q qarışıq strategiyalarını istifadə etdikdə $\tilde{w}$ itkiləri

$$\tilde{w}(\pi, Q) = M_{\pi \times Q} w(\delta, \theta) = \int w(u, t) \pi(du) Q(dt) \quad (2)$$

berəberliyi ilə təyin olunur.

Beləliklə, ilkin oyunla yanaşı itki funksiyası (2) bərabərliyi ilə verilən $(\tilde{D}, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyununa da baxmaq olar ki, bu da (D, Θ, w) oyununun ortalanması və randomizasiyası adlanır.

Cırlaşmış paylanmaların xalis strategiyalarla eyniləşdirilməsi haqqında qəbul edilmiş razılaşmaya uyğun olaraq $\tilde{w}(\delta, \theta) = w(\delta, \theta)$ olur. (D, Θ, w) oyununun randomlanması strategiyaları çoxluğu ilkin oyunla müqayisədə daha geniş olan oyuna keçmək kimi anlaşılır, bu halda ilkin oyun «daxil edilmiş» oyundur və ilkin oyun hər iki oyunçunun xalis strategiyalarına baxıldıqda alınır. (D, Θ, w) və $(\tilde{D}, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyunlarında strategiyaların nizamlanması məsələləri sıx bağlıdır.

$\tilde{w}(\pi_Q, Q) = \inf_{\pi} \tilde{w}(\pi, Q)$ şərtini ödəyən $\pi = \pi_Q$ strategiyası aprior Q paylanmasına uyğun Bayes strategiyası adlanır, yeni Bayes strategiyası ortalanmış oyunda verilmiş Q üçün ən yaxşı π strategiyasıdır. $\tilde{w}(\delta_Q, Q) = \inf_{\pi} \tilde{w}(\pi, Q)$ şərtini ödəyən $\delta_Q \in D$ strategiyası xalis Bayes strategiyası adlanır. Əgər verilmiş Q üçün qarışıq Bayes strategiyası π_Q varsa, onda eyni xalis Bayes strategiyası δ_Q vardır ki, $\tilde{w}(\delta_Q, Q) = \tilde{w}(\pi_Q, Q)$ olur. Beləliklə, əgər $\inf_{\pi} \tilde{w}(\pi, Q)$ alınarsa, onda bu infimum xalis strategiyalarda da alınır.

Bayes strategiyalarının praktik olaraq istifadə edilməsi olduqca incə məsələdir. Əgər aprior paylanma hər hansı real fiziki mexanizmlə şərtləndirilmişsə, bu yanaşmadan istifadə etmək mübahisə doğurmur. Bununla yanaşı, Bayes yanaşması ekserən o hallarda da özünü doğruldur ki, o, bəzi, ola bilər ki, hətta subyektiv və həmişə olduqca tam ola bilməyən, lakin bunların nəzərə alınmaması mümkün olmayan təsəvvürlərin olması ilə əlaqələndirilsin. Bundan başqa, Bayes yanaşması minimaks strategiyaların axtarılmasında ümumi bir vasitə kimi olduqca əhəmiyyətlidir.

3. Minimaks strategiyalar. Əgər θ -ya görə aprior informasiya yoxdursa, onda strategiyaların nizamladıqda II oyunçunun ən «alverişsiz» strategiyasına istiqamətlənmək olar. Əgər δ strategiyası seçilərsə, onda maksimal itkilər $\sup_{\theta} w(\delta, \theta) \equiv$

$\equiv w(\delta, \uparrow)$ olur. Bu kəmiyyət $w(\delta, Q)$ -nin qiymətləri kimi yalnız δ -dan asılı olur və δ -ni nizamlamağa imkan verir.

Əgər

$$w(\bar{\delta}, \uparrow) = \inf_{\delta} w(\delta, \uparrow) \equiv w^*$$

olarsa, $\bar{\delta}$ strategiyası minimaks strategiya adlanır. «Minimaks» termini

$$w(\bar{\delta}, \uparrow) = \min_{\delta} \max_{\theta} w(\delta, \theta)$$

münasibətinin sağ tərəfindəki əməllərin adlarının birləşməsindən yaranmışdır. İxtiyari θ üçün

$$w(\bar{\delta}, \theta) \leq w(\bar{\delta}, \uparrow) = w^*$$

olduğundan $\bar{\delta}$ minimaks strategiyası onunla xarakterizə olunur ki, bu strategiya I oyunçunun itkiləri ölçüsünün w^* -dan böyük olmamasını təmin edir.

$$w^* = \inf_{\delta} w(\delta, \uparrow), \quad (w(\delta, \uparrow) = \sup_{\theta} w(\delta, \theta)),$$

$$w_* = \sup_{\theta} w(\downarrow, \theta), \quad (w(\downarrow, \theta) = \inf_{\delta} w(\delta, \theta))$$

qiymətləri uyğun olaraq, oyunun yuxarı və aşağı qiyməti (dəyəri) adlanır. Əgər $w^* = w_*$ olarsa, onda oyunun qiyməti (dəyəri) vardır, deyilir və o, w^* və w_* -nın ümumi qiymətinə bərabərdir (bax, [2]).

II oyunçu birinciye analoji hərəkət edərək və eyni minimaks mülahizələrə əsaslanaraq öz $\bar{\theta}$ strategiyasını seçərək, w_* -dan kiçik olmayan uduşu həmişə təmin edə bilər. Deməli, əgər oyunun qiyməti vardırsa, minimaks $\bar{\delta}$ strategiyasını seçən oyunçu özünü üçün yaxşılaşmayan nəticəni təmin edir, yəni əgər II oyunçu $\bar{\theta}$ -ni seçərsə, onda heç bir digər strategiya w_* w^* qiymətindən kiçik olan itkiləri verməyəcəkdir.

Əgər $\bar{\delta}$ və $\bar{\theta}$ minimaks strategiyaları varsa, onda $\bar{w}(\bar{\delta}, \bar{\theta}) = w^* = w_*$ olur. Ümumi halda $w^* \geq w_*$ bərabərsizliyi həmişə ödənilir.

Əgər $w^* > w_*$ olarsa, minimaks $\bar{\delta}$ strategiyasını qarışıq strategiyalar daxil etməklə yaxşılaşdırmaq mümkündür. Qarışıq strategiyaların əsas təyinatlarından biri bundan ibarətdir.

$\bar{\pi}$ və $\bar{Q}$ – ortalanmış oyun üçün minimaks strategiyalar (əgər varsa) və

$$\tilde{w}^* = \inf_{\pi} \sup_Q \tilde{w}(\pi, Q),$$

$$\tilde{w}_* = \sup_Q \inf_{\pi} \tilde{w}(\pi, Q)$$

olsun. Onda $w^* \geq \tilde{w}^* \geq \tilde{w}_* \geq w_*$ bərabərsizlikləri həmişə doğrudur.

Oyunlar nəzəriyyəsinin minimaksliq haqqında teoremlər adlanan ilk fundamental teoreminə görə, olduqca geniş fərziyyələrlə ortalanmış oyunlar $\tilde{w}^* = \tilde{w}_*$ dəyərinə malikdirlər və bunlar üçün minimaks strategiyalar vardır (riyazi statistikada bu hökm «statistik oyun» məqaləsində əks olunmuşdur).

Bayes və minimaks strategiyalar anlayışları bir-birilə bağlı anlayışlardır. Əgər:

1) $\tilde{w}(\bar{\pi}, \theta) = C = \text{const}$, $\theta \in \Theta_0$ olarsa,

2) $\tilde{w}(\bar{\pi}, \theta) \leq C$ bərabərsizliyi bütün θ -lar üçün ödənilərsə, $\bar{\pi}$ strategiyası $\Theta_0 \subset \Theta$ çoxluğunda düzəldici (rus. уравнивающая) strategiya adlanır.

Fərz olunur ki, $\bar{Q}$ aprior paylanması və ona uyğun Bayes strategiyası $\pi_{\bar{Q}}$ vardır; $\pi_{\bar{Q}}$, $\bar{Q}$ paylanmasının daşıyıcısı $N_{\bar{Q}}$ -də

düzəldici strategiyadır. Onda $\pi = \pi_{\bar{Q}}$ minimaks strategiyadır. Əgər $N_{\bar{Q}} = \Theta$ olarsa, onda düzəldici $\bar{\pi}$ strategiyası II oyunçunun oyununu onun özündən asılı olmayan oyun edir. $\pi_{\bar{Q}}$

Beyes minimaks strategiyasını müəyyən edən $\bar{Q}$ paylanmasının gözlə bir xassəsi vardır: əgər Beyes itkiləri $\tilde{w}(\pi_Q, Q)$ bu paylanma üçün maksimal olarsa, o, ən əlverişsiz paylanmadır.

Əgər

$$\tilde{w}(\pi_{\bar{Q}}, \bar{Q}) = \sup_Q \bar{w}(\pi_Q, Q),$$

və ya başqa sözlə,

$$\tilde{w}(\downarrow, \bar{Q}) = \sup_Q \bar{w}(\downarrow, Q)$$

münasibətləri ödənilərsə, $\bar{Q}$ ən əlverişsiz (rus. наименее благоприятное или наимхудшее) paylanma adlanır.

Fərz olunur ki, $(\tilde{D}, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyununun qiyməti (dəyəri) vardır və hər iki oyunçunun minimaks strategiyaları $\bar{\pi}$ və $\bar{Q}$ -dir.

Onda $\bar{Q}$ ən əlverişsiz paylanmadır, $\bar{\pi}$ və $\bar{Q}$ -yə uyğun $\bar{\pi} = \pi_{\bar{Q}}$ bərabərliyini ödəyən Beyes strategiyasıdır. Yuxarıdakı mülahizələrlə sıx bağlı minimaksliq kriterisi aşağıdakı kimi ifadə olunur: $(\tilde{D}, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyunu dəyəre və minimaks strategiyalara malikdir, onda aşağıdakı üç şərt

ekvivalentdir: 1) $\bar{\pi}$ – minimaks strategiyadır, 2) $\bar{\pi}$ – Beyes və düzəldici strategiyadır, 3) $\bar{\pi}$ – Beyes strategiyasıdır və o, ən əlverişsiz $\bar{Q}$ paylanmasına uyğun strategiyadır: $\bar{\pi} = \pi_{\bar{Q}}$.

4. Strategiyaların tam sinfi. Əgər yuxarıda şərh olunmuş yanaşmalara görə strategiyaları birqiyəmli seçmək mümkün olmur, məsələnin həlli strategiyaların tam sinfinin təsviri ilə məhdudlanır. Əgər ixtiyari $\pi \notin D^c$ üçün π -dən yaxşı $\pi_0 \in D^c$ strategiyası varsa, $D^c \subset \tilde{D}$ strategiyaların tam sinfi adlanır. Əgər D_0^c strategiyaların tam sinfi olarsa, onun heç bir altsinfi isə tam sinif olmazsa, onda D^c minimal tam sinif adlanır. Başqa sözlə, minimal tam sinif yalnız yaxşılaşmayan strategiyalardan ibarətdir.

D -dən olduqca kiçik olan minimal tam sinif və ya tam sinfin qurulmasının əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bu $(\tilde{D}, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyununu daha sadə strukturlu $(D^c, \tilde{\Theta}, \tilde{w})$ oyununa çevirməyə imkan yaradır. Geniş fərziyyələrlə bütün Beyes strategiyaları sinfi $\{\pi_Q\}$, $Q \in \tilde{\Theta}$ strategiyaların tam sinfidir (oyunlar nəzəriyyəsinin ikinci fundamental teoremi; bax, *Statistik oyun*).

Əd.: [1] Мак-Кинси Дж., Введение в теорию игр, пер. с англ., М., 1960; [2] Боровков А. А., Математическая статистика (Дополнительные главы), М., 1984.



ÖLÇMƏ / ÖLÇÜLMƏ «измерение; measurement» – bax. *Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlerin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.*

***ÖLÇMƏ XƏTASI** «измерения ошибка; metering error» – bax, *Sistematik xəta.*

ÖLÇMƏ ŞKALASI «измерений шкала; measurement scale» – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasının hissəsi kimi *ölçmə nəzəriyyəsində* əsas anlayışdır. A – münasibətlər (reallığı təsvir edən) verilmiş empirik sistem, B – münasibətlər verilmiş ədədi sistem, f , – A -dan B -yə homomorfizm olsun. [1]. [2]-yə müvafiq olaraq $\langle A, B, f \rangle$ üçlüyü *şkala* adlanır.

Praktiki cəhətdən mühüm hallarda şkalanın məqbul $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çevirmələrinin ele $\Phi = \Phi(A, B) = \{\varphi\}$ qrupu vardır ki, A -dan B -yə bütün homomorfizmlər çoxluğu $\{f\}$ $\langle \varphi \circ f_0 : \varphi \in \Phi \rangle$ şəklində olur, burada f_0 , – $\{f\}$ -in ixtiyari qeyd olunmuş elementidir. Şkalanın məqbul çevirməsi $\varphi \in \Phi$ $\langle A, B, f \rangle$ şkalasını ona ekvivalent (məzmunca) $\langle A, B, \varphi \circ f \rangle$ şkalasına çevirir. Ekvivalent şkalalar sinfi *ölçmə şkalasının tipi* adlanır. Tip Φ qrupu ilə təyin olunur, buna görə də, bəzən Φ -in məqbul çevirmələri qrupu anlayışı *ölçmə nəzəriyyəsində*, xüsusilə də, onun tətbiqi bölmələrində ilkin anlayış kimi götürülür.

Ö. ş.-nin təsnifatı Φ -in məqbul çevirmələri qruplarının köməyi ilə aparılır. *Nominal şkala* (adlar şkalası) üçün $\Phi = \Phi_1$ olur, burada Φ_1 , – $\mathbb{R}$ -in özünə bütün qarşılıqlı birqiyəmətlilik inikasları qrupudur. *Qaydalı şkala* üçün $\Phi = \Phi_2$, burada Φ_2 , – $\mathbb{R}$ -in özünə bütün ciddi artan çevirmələr qrupudur. *İntervallar şkalası* üçün $\Phi = \Phi_3 = \{\varphi(x) = ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ Nisbət şkalası üçün $\Phi = \Phi_4 = \{\varphi(x) = ax, a > 0\}$. Fərqlər şkalası üçün $\Phi = \Phi_5 = \{\varphi(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$. Mütləq şkala üçün $\Phi = \Phi_6 = \{\varphi(x) = x\}$. Digər tip şkalalardan da istifadə olunur.

Konkret kəmiyyətin Ö. ş. uyğun tətbiq oblastının mülahizələrindən təyin olunur və həll olunan məsələdən asılı olur. Məs., temperaturu qaydalı şkalada (temperaturun artması-azalması), intervallar şkalasında (Selsiy, Reomiyur, Farenqeyt şkalalarında) və nisbət şkalasında (Kelvin şkalasında mütləq sıfırdan hesablanan temperaturlar) ölçmək olar.

Əd.: [1] Суппес П. Зинес Дж., в кн., Психологические измерения, пер. с англ., 1967, с. 9–110; [2] Пфанцаль И., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [3] Орлов А. Н., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

700 ÖLÇMƏ

ÖLÇMƏ ŞKALASI təsnifat «измерений шкала классификация; measurement scale classification» – bax. *Ölçmə şkalası.*

ÖLÇMƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ «измерений теория; measurement theory» – statistik verilənlər ölçülən şkalalardan asılı olaraq statistik nəticələrin araşdırılmasına həsr olunmuş, qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasının bölməsidir. Ö. n.-nin əsas problemləri təmsil etmə, yeganəlik və adekvatlıq problemləridir (bax. [1]–[3]).

Təmsil etmə problemi. Empirik sistem A münasibətləri ilə verilir. B münasibətləri ilə ehtimal sistem varmı ki, A -nı bu sisteme homomorf inikas etmək mümkün olsun?

Yeganəlik problemi. Empirik sistemin ədədi sisteme bütün homomorf inikaslarının çoxluğu $\{f\}$ -i təsvir etmək. Ən mühüm praktiki hallarda şkalanın mümkün olan $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çevirmələrinin ele $\Phi = \{\varphi\}$ qrupu vardır ki, $\{f\} = \{\varphi \circ f_0$:

$\varphi \in \Phi\}$; burada f_0 , – A -dan B -yə homomorfizmlərdən biridir (bax, *Ölçmə şkalası*). Əgər $x = (x_1, \dots, x_n)$ verilənləri şkalada mümkün olan çevirmələr qrupu Φ ilə ölçülmüşdürsə, onda $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ x -in daşıdığı informasiyanı daşıyır. Buna görə də, $\mathfrak{A}(x)$ nəticəsinin adekvatlığı üçün zəruridir ki, ixtiyari $\varphi \in \Phi$ və $x \in \mathbb{R}^2$ üçün $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{A}(\varphi(x))$ bərabərliyi ödənilsin, yeni $\mathfrak{A}(x)$ -in ixtiyari $\varphi \in \Phi$ -ə görə invariantlığı zəruridir.

Adekvatlığın düz problemi. Mümkün olan çevirmələr qrupu Φ ilə şkalada $\mathfrak{A}(x)$ statistik nəticəsinin hansı qaydaları adekvatdır?

Adekvatlığın ters problemi. $\mathfrak{A}(x)$ statistik nəticəsinin qaydası verilir. Hansı şkalalarda (yeni hansı Φ -lər üçün) bu qayda adekvatdır?

Invariantlıq şərti məqbul statistikanın ifadəsində ciddi məhdudiyyətlərə səbəb olur. $x = (x_1, \dots, x_n)$ və $y = (y_1, \dots, y_n)$ toplusının orta qiymətlərinin müqayisəsinin invariantlığı buna misaldır. $f(x) < f(y)$ bərabərsizliyinin, yalnız və yalnız, $f(\varphi(x)) < f(\varphi(y))$ bərabərsizliyi ödənilirdi halda ödənilirdi fərz olunur;

burada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – hər hansı orta qiymət və $x, y, \dots \in \mathbb{R}^n$ -in ixtiyari nöqtələridir. Əgər bu şərt bütün φ -lər, $\varphi \in \Phi_2$ üçün ödənilərsə, f isə arqumentlərindən simmetrik asılı və kəsilməz funksiyadırsa, onda ehtimal i nömrəsi vardır ki, $f(x)$ i -ci qaydalı statistikasına eyniliklə üst-üstə düşür (bax. [3]). Əgər f Kolmogorov mənasında ortadırsa və baxılan şərt bütün φ -lər, $\varphi \in \Phi_3$ üçün ödənilərsə, onda f ədədi ortadır; eger bütün φ -lər, $\varphi \in \Phi_4$ üçün bu şərt ödənilərsə, onda f qüvvət-üstü orta və ya həndəsi ortadır (təbii rəqulyarlıq şərtlərində; bax. [4]).

Statistik nəticələrin korrektiliyinin zəruri şərti real statistik verilənlərin ölçmə şkalalarına nəzərən onların adekvatlığıdır.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967, с. 9–110; [3] Пфанцгаль Н., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [4] Орлов А. И., «Матем. заметки», 1981, т. 30, № 4, с. 561–68.

ÖLÇÜ «мера; measure» – parçanın uzunluğu, müstəvi fiqurunun sahəsi və cismin həcmi anlayışlarının daha ümumi təbiətə malik çoxluqlar üçün ümumiləşmədir. Ən ümumi şəkildə $\bar{O}$ hesabı – additiv çoxluq funksiyasıdır. Lakin nəzəri planda olduğu kimi təbiətdə də ədədi ölçülər (yeni ədədi qiymətlər alan $\bar{O}$) daha mühüm rol oynayır. Belə $\bar{O}$ -lərin təyin olunma oblasları, adətən, müxtəlif semi – halqalar, halqalar və çoxluqların σ – halqalarıdır.

S – əsas bazis fəzası X -in hissələrinin hər hansı boş olmayan sistemi olsun. Əgər aşağıdakı münasibətlər ödənilərsə, S sistemi (X -də) çoxluqların semi – halqasıdır, deyilir:

1) $Y \in S \& Z \in S \Rightarrow Y \cap Z \in S$;

2) $Y \subset Z$ münasibətini ödəyən $Y \in S$ və $Z \in S$ elementlərinin ixtiyari cütü üçün S -in elementlərinin sonlu dizyunkt $(Y_j)_{1 \leq j \leq m}$ ailəsi həmişə tapılır və bu ailənin elementlərinin birləşməsi Z ilə üst-üstə düşür və bu ailə üçün $Y_i = Y$ olur ($m \geq 2$).

Boş çoxluq X fəzasında S -in çoxluqlarının ixtiyari semi – halqasına daxildir. Bununla yanaşı $X \in S$ olarsa, onda S – X -də çoxluqlar semi – cəbri adlanır.

Əsas bazis fəzası X -in hissələrinin aşağıdakı xassələri ödəyən ixtiyari boş olmayan sistemi S -ə X -də çoxluqlar halqası deyilir.

1) $Y \in S \& Z \in S \Rightarrow Y \cup Z \in S$;

2) $Y \in S \& Z \in S \Rightarrow Y \setminus Z \in S$.

Çoxluqların verilən semi – halqasını özündə saxlayan, daxilolma emeline görə ən kiçik çoxluqlar halqası bütün $\bigcup_{1 \leq j \leq m} Y_j$ birləşmə-

lərinin sinfi ilə üst-üstə düşür, burada $(Y_j)_{1 \leq j \leq m}$ – verilən semi – halqanın elementlərinin ixtiyari sonlu dizyunkt ailəsidir. Əgər X -də S çoxluqlar halqası $X \in S$ şərtini də ödəyirsə, S – X fəzasında çoxluqlar cəbri adlanır.

Çoxluqlar halqası öz elementlərinin bütün mümkün olan hesabı birləşmələrinə görə qapalı olarsa, bu halqa çoxluqlar σ – halqası adlanır.

S – X -də ixtiyari çoxluqlar semi – halqası, μ – S -də təyin olunmuş, genişlənmiş heqiqi $\bar{\mathbb{R}}$ oxundan qiymətlər alan hər hansı funksiya olsun. Əgər:

1) $\mu(Y) \geq 0, Y \in S$,

2) μ – hesabı – additiv funksiya,

3) $\mu(\emptyset) = 0$

olarsa, μ funksiyası (ədədi, müsbət) ölçüdür, deyilir. İxtiyari $Y \in S$ üçün $\mu(Y)$ -in qiyməti Y çoxluğunun μ – ölçüsü adlanır (və ya kontekstdən aydın olarsa ki, μ -dən söhbət gedir, sadəcə, Y çoxluğunun ölçüsü). Əgər $\mu(Y) < +\infty$ olarsa, Y sonlu ölçülü çoxluqdur, deyilir. Əgər Y sonlu ölçülü çoxluqların hesabı ailəsinin birləşməsi kimi ifadə olunarsa, $Y \subset X$ çoxluğu σ – sonlu ölçü -

lü çoxluq adlanır. Əgər əsas bazis fəzası X σ – sonlu ölçülü çoxluqdursa, μ ölçüsü σ – sonlu ölçü adlanır.

Əgər ixtiyari $Y \in S$ üçün $\mu(Y) < +\infty$ olarsa ($X \in S$ olduğu halda bu şərt $\mu(X) < +\infty$ şərti ilə eynigüclüdür), μ ölçüsü sonlu ölçü adlanır. Əgər $X \in S$ və $\mu(X) = 1$ olarsa, μ normalanmış ölçü (və ya ehtimal ölçüsü) adlanır.

μ – əsas bazis fəzası X -in hissələrinin hər hansı semi – halqası S -də ölçü olsun; $H(S)$ – X fəzasının bütün ele hissələrinin sinfi olsun ki, bunlardan hər birini S semi – halqasının elementlərinin hesabı ailəsi ilə örtmək mümkün olsun. İxtiyari $Z \in H(S)$ üçün fəz olunur ki,

$$\mu^*(Z) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \mu(Y_i) : (Y_i)_{i \in I} \right\}$$

S -in elementləri ilə Z çoxluğunun hesabı örtüyüdüür.

Bununla da, $H(S)$ sinfində μ^* funksiyası təyin olunur və μ^* – ilkin μ ölçüsü ilə assosiativ xarici ölçü adlanır.

Əgər ixtiyari $Z \in H(S)$ çoxluğu üçün

$$\mu^*(z) = \mu^*(Z \cap Y) + \mu^*(Z \setminus Y)$$

berəberliyi ödənilərsə, $Y \in H(S)$ çoxluğu μ^* – ölçülən çoxluq adlanır.

Bütün mümkün μ^* – ölçülən çoxluqların çoxluğu S^* özündə ilkin S semi – halqasını saxlayan σ – halqadır. μ^* funksiyalarının S^* σ – halqasına daralması μ ölçüsünün davamı olan tam ölçüdür (Karateodori teoremi). Məs., ilkin μ ölçüsü verilmiş S semi – halqasının doğurduğu σ – cəbrə həmişə davam oluna bilinir. Əgər ilkin μ ölçüsü σ – sonlu olarsa, onda belə davam olunma yeganədir (bax, Davam olunması, ölçülərin).

Ümumiliyi pozmadan, yalnız çoxluqlar σ – halqalarında təyin olunmuş ölçülərə baxmaq olar. Adətən, (X, S, μ) şəklində nizamlanmış üçlüyə baxılır, burada X – əsas bazis fəzası, S – X fəzasının altçoxluqlarının hər hansı σ – halqası, μ – S σ – halqasında təyin olunmuş hər hansı ölçüdür. Bu şəkili ixtiyari üçlük ölçülü fəza adlandırılır. X – əsas bazis fəzası, S – X -in hissələrinin hər hansı σ – halqası olarsa, (X, S) şəklində ixtiyari cütlük ölçülən fəza adlanır. Əgər (X, S, μ) ölçülü fəzadırsa, onda (S, μ) cütlüyü əsas bazis çoxluğu X -də tamamilə müəyyən növ strukturdur (Ö. strukturu). Beləliklə, Ö. nəzəriyyəsini ümumi cəhətdə göstərilən növ strukturları öyrənən riyazi nəzəriyyə kimi seçiyə bilərik. Lakin praktikada əksərən ele strukturlara təsadüf olunur ki, Ö. strukturu digər növ strukturlarla sıx qarşılıqlı əlaqəli olur. Məs., eger əsas bazis çoxluğu X -də hər hansı topologiya verilmişsə, S σ – halqası isə bu topologiya ilə hər hansı bir şəkildə əlaqəlidirsə, onda S σ – halqasında verilən μ ölçüsünün topoloji xassələri haqqında mülahizə aparmağın mənası vardır. Belə situasiyaya tipik misal S -in X topoloji

fəzasının Borel σ – cəbri olduğu halıdır. Bu halda S -də verilən μ ölçüsü Borel ölçüsü adlanır. Belə $\bar{O}$ -nün xassələri X -in fəzasının özünün topoloji xassələrindən olduqca asılıdır. $\bar{O}$ strukturunun digər növ strukturlarla (məhz cəbri strukturla) qarşılıqlı təsirinə tipik misal – əsas bazis çoxluğu X özünün çevirmələrinin hər hansı qrupu (və ya hətta semi – qrupu) ilə verildiyi və bu çevirmələrə nəzərən μ ölçüsünün müəyyən mənada dayanıqlı olduğu halıdır. Bu halda μ ölçüsünün kvaziinvariantlıq və ya onun verilmiş çevirmələrə nəzərən invariantlıq kimi cəbri xassələri haqqında mülahizə aparmaq olar (bax, *Ölçülü fəza*). Elə situasiyalara da təsadüf edilir ki, əsas bazis çoxluğu X eyni zamanda ölçü, topologiya və cəbri struktur kimi üç bir-birilə sıx əlaqəli strukturla verilir, məs., X fəzası lokal kompakt topoloji qrup, μ bu qrupda köçürmələrə nəzərən invariant, X -də Borel Haar ölçüsü olduğu hal.

Ölçülü ümumi fəzalar üçün təbii surətdə morfizm (homomorfizm) anlayışı daxil olunur, ümumi ölçülən fəzalar üçün isə ölçülən inikas anlayışı uyğun olaraq daxil olunur (bax, *Ölçülü fəza*). Bu ilkin anlayışların köməyi ilə inisial və final struktur terminlərində, adi sxem üzrə ölçülərin hasilı, $\bar{O}$ -nün inikasında obrazı, $\bar{O}$ -nün inikasa nəzərən proobrazı kimi anlayışlar da daxil olunur. Ümumi ölçü nəzəriyyəsinin əsas məsələləri məhz bu anlayışlar ətrafında cəmləşir, əsas diqqət homomorfizm və ya ölçülən inikaslarda müəyyən mənada qorunub saxlanılan xassələrin öyrənilməsinə yetirilir (məs., ixtiyari ehtimal ölçüsünün homomorf obrazı, aydındır ki, ehtimal ölçüsüdür, lakin σ – sonlu ölçünün homomorf obrazı, ümumiyyətlə, σ – sonlu ölçü olmur).

Abstrakt $\bar{O}$ nəzəriyyəsinin qurulması üçün ilkin modellər adi $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında Jordan ölçüsü və Lebeq ölçüsü kimi klassik riyazi obyektlər olmuşdur. Jordan ölçüsü tarix etibarilə Lebeq ölçüsündən əvvəl təyin olunmuş və Evklid həndəsəsi və klassik riyazi analiz çərçivəsində təbii olaraq formalaşmışdır. Jordan ölçüsünü təyin etmək üçün, bir qayda olaraq, $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında sadə həndəsi fiqurlar sinfi bu fəzada bütün mümkün çoxüzvlülər sinfi əsas götürülür ($\mathbb{R}^n$ -də qapalı n – ölçülü simplekslərin sonlu ailəsinin birləşməsi kimi ifadə olunan, $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari altçoxluğu σ o x ü z l ü adlanır; məs., boş çoxluq $\mathbb{R}^n$ -də çoxüzvlüdür). $\mathbb{R}^n$ -də ixtiyari çoxüzvlünün həcmi adi qaydada təyin olunur. Əgər ixtiyari həqiqi $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $Z \subset Y \subset Z'$, $v(Z') - v(Z) < \varepsilon$ münasibətlərini ödəyən $Z \subset \mathbb{R}^n$, $Z' \subset \mathbb{R}^n$ çoxüzvlüləri tapılsa, $Y \subset \mathbb{R}^n$ çoxluğu Jordan mənada ölçülən çoxluq adlanır, v bütün çoxüzvlülər sinfində verilmiş, $\mathbb{R}^n$ fəzasında standart həcm funksiyasıdır. $\mathbb{R}^n$ fəzasının Jordan mənada ölçülən bütün mümkün altçoxluqlarının çoxluğu çoxluqlar halqasıdır. v funksiyası bu halqaya

$$v(Y) = \sup\{v(Z) : Z \subset Y \text{ və } Z, - \mathbb{R}^n\text{-də çoxüzvlüdür}\}$$

düsturu ilə davam olunur, burada Y , $- \mathbb{R}^n$ -də Jordan mənada ölçülən ixtiyari altçoxluqdur. Belə alinan v funksiyası $\mathbb{R}^n$ fəzasında Jordan ölçüsü (Jordan həcmi) adlanır. Jordan həcmi sonlu – additiv çoxluq funksiyası olub, $\mathbb{R}^n$ fəzasının izometrik çevirmələrinə nəzərən invariantdır. Lakin E. Borel (E. Borel) qeyd etmişdir ki, Jordan həcmi eyni zamanda həm də hesabı – additiv çoxluq funksiyasıdır. Buna əsaslanaraq sonradan Lebeq ölçüsünün tərfi verilmişdir; Lebeq ölçüsünü –

Jordan ölçüsünün davamı və çoxluqlar σ – halqasında verilən,

$\mathbb{R}^n$ fəzasında ən kiçik (daxilolma əməlinə görə) tam ölçü kimi xarakterizə etmək olar. Lebeq ölçüsü də $\mathbb{R}^n$ fəzasında izometrik çevirmələrə nəzərən invariant ölçüdür. Lebeq ölçüsünün təyin olunma oblastına daxil olan çoxluqlar Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar adlanır. $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari Borel altçoxluğu Lebeq mənada ölçüləndir, lakin Lebeq mənada ölçülən elə çoxluqlar vardır ki, onlar Borel çoxluqları deyildir (hətta Jordan mənada ölçülən çoxluqlar da mövcuddur ki, onlar Borel çoxluqları deyildir). Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar çoxluğu $\mathbb{R}^n$ fəzasının bütün altçoxluqları sinfini tamamilə əhatə etmir. $\mathbb{R}^n$ fəzasının Lebeq mənada ölçülməyən altçoxluqlarının varlığı müxtəlif metodlarla müəyyən olunmuşdu. Bütün bu metodlar, əsasən, seçim aksiomuna əsaslanmışdı. Bu da təsadüfi olmamışdı. İsbat olunmuşdu ki [R. Sollovey, (R. Sollovay), 1970], seçim aksiomunun qeyri – hesabı formalarından istifadə etmədən $\mathbb{R}^n$ fəzasında Lebeq mənada ölçülməyən çoxluqların varlığını müəyyən etmək mümkün deyildir. $\mathbb{R}^n$ fəzasında onun izometrik çevirmələrinə nəzərən invariant və həm də Lebeq ölçüsünün ciddi davamı olan $\bar{O}$ qurmaq mümkündür (bax, [8]).

Sonsuzölçülü vektor topoloji fəzada Lebeq ölçüsünə analoq ölçünün varlığı məsələsinin hətta sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzasında həlli yoxdur (bax, [5]). Daha dəqiq, aşağıdakı müddəə doğrudur: Əgər E sonsuzölçülü separabel Banax fəzası və G , $- E$ -dən olan kompaktların hesabı ailəsinin birləşməsində olmayan və E -nin additiv qrupunun altqrupu olarsa, onda E fəzasının Borel σ – cəbrində sıfır olmayan, G -dən paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant σ – sonlu $\bar{O}$ təyin etmək olmaz. $G = E$ olduqda bu müddəə bilavasitə o faktdan alınır ki,

E fəzasında qapalı, vahid radiuslu küre (həmçinin, ixtiyari qabarıq cisim) E fəzasının hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdə verilən, sıfır olmayan σ – sonlu E kvazi – invariant ölçüyə nəzərən ölçülən deyildir. Əgər E qeyri – separabel Banax fəzası olarsa, G E -nin additiv qrupunun hər yerdə sıx altqrupudursa, onda E -də bütün mümkün olan kürelərin doğurduğu σ – cəbrdə sıfır olmayan, G -dən paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant ölçü təyin etmək mümkün deyildir. Digər tərəfdən, əgər E sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzasıdırsa, onda E -də bəzi hər yerdə sıx vektor altfəzalarına nəzərən invariant (və deməli, həm də kvazi – invariant), sıfır olmayan σ – sonlu Borel ölçüləri vardır. $\bar{O}$ -nün Borel çoxluğu olmadığı fərz olunan halda, seçim aksiomunun qeyri – hesabı formalarının köməyi ilə sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzası E -də həqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}$ -də adi Lebeq ölçüsünə izomorf və E fəzasının bütün paralel köçürmələrinə nəzərən invariant $\bar{O}$ qurmaq olar (bax, [9]).

Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyekti (X, S, μ) şəklində üçlükdür, yəni ölçülü ümumi fəzadır. Belə fəzalar arasında ehtimal fəzası xüsusilə seçilir və bu elə (X, S, μ) şəkilli üçlükdür ki, burada $X \in S$ və $\mu(X) = 1$. Ehtimal fəzaları ehtimal nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyektidir. Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin mühüm suallarından biri aşağıdakıdır: S σ – halqası nə dərəcədə geniş olmalıdır ki, onda X fəzasının bütün birləşmələri çoxluqlarında sıfır qiymətləri alan ehtimal ölçüsü vermək mümkün olsun? Məsələn, bu şərt daxilində S σ – halqası X fəzasının bütün altçoxluqlarının çoxluğu ilə üst-üstə düşə bilərmi? Bəzi nəzəri – çoxluq hipotezlərin doğruluğu fərz olunarsa (X bazis fəzasının gücünü hər hansı dərəcədə məhdudlaşdırın),

onda isbat etmək olur ki, $S \sigma$ – halqası X fəzasının bütün altçoxlularının çoxluğundan həmişə fərqlidir (bu halda, həm də deyilir ki, X fəzasının gücü geniş mənada ölçülən deyildir).

Kontinuum hipotezinin ödənilməsi fərz olunarsa, onda $[0, 1]$ parçasının hissələrindən ələ doğrurulmuş hesabı – additiv σ – cəbr qurmaq olar ki, bu σ – cəbrdə $[0, 1]$ parçasının birtəqəli altçoxlularında sıfır qiymətlərini alan ehtimal ölçüsü təyin etmək mümkün deyildir (bax, [9]).

Topoloji (ayrılan) fəzalarda baxılan σ -lər üçün ən mühüm anlayış ölçünün reqlularlıq (bu və ya digər mənada) anlayışdır. X – topoloji fəza, μ , – X fəzasının hissələrinin hər hansı sinfində verilmiş (bu sinif $\text{dom}(\mu)$ kimi işarə olunur) ədədi müsbət funksiya olsun. Əgər ixtiyari $Y \in \text{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \sup \{ \mu(Z) : Z \in \text{dom}(\mu), Z \subset Y \text{ və } Z$$

X -də qapalı çoxluqdur }

bərabərliyi doğru olarsa, μ funksiyası daxilən reqlularlıdır, deyilir. Əgər ixtiyari $Y \in \text{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \inf \{ \mu(Z) : Z \in \text{dom}(\mu), Y \subset Z \text{ və } Z$$

X -də açıq çoxluqdur }

bərabərliyi doğru olarsa, μ funksiyası xaricən reqlularlıdır, deyilir. Əgər μ funksiyası eyni zamanda həm daxilən, həm xaricən reqlular çoxluq funksiyası olarsa, μ reqlular funksiyadır, deyilir.

μ – topoloji X fəzasının hissələrinin hər hansı cəbrində təyin olunmuş, ixtiyari sonlu müsbət additiv funksiya olsun. Onda:

- 1) μ daxilən reqlularlıdır,
- 2) μ xaricən reqlularlıdır,
- 3) μ reqlularlıdır

münasibətləri öz aralarında ekvivalentdirlər. Aşağıdakı Aleksandrov teoremi doğrudur: kompakt topoloji fəzanın hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı cəbrdə verilmiş ixtiyari sonlu müsbət additiv reqlular funksiyası hesabı – additiv funksiyadır (yeni bu cəbrdə ölçüdür).

Əgər hər bir $Y \in \text{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \sup \{ \mu(Z) : Z \in \text{dom}(\mu), Z \subset Y \text{ və } Z$$

X -də qapalı çoxluqdur }

bərabərliyi ödənilərsə, topoloji X fəzasının altçoxlularının hər hansı sinfində təyin olunmuş, ədədi müsbət μ funksiyası daxilən kompakt reqlular funksiyası adlanır. Topoloji X fəzasında Borel μ ölçüsü daxilən kompakt reqlular və lokal sonlu olarsa, o, Radon ölçüsü adlanır [lokal sonluluq – X -in ixtiyari x nöqtəsinin ələ açıq $U(x)$ ətrafı vardır ki, $\mu(U(x)) < +\infty$ – kimi anlaşılır]. X – ixtiyari lokal kompakt topoloji qrup olsun. Onda X qrupunun Borel σ – cəbrində yeganə (sabit əmsal dəqiqliyi ilə) sıfır olmayan, bu qrupun bütün (sol) köçürmələrinə nəzərən invariant Radon ölçüsü μ təyin etmək olar. Belə μ ölçüsü X topoloji qrupunun Haar (sol) ölçüsü adlanır. Əksinə, əgər X topoloji qrupunun Borel σ – cəbrində bu qrupun bütün (sol) köçürmələrinə nəzərən invariant, heç olmasa birçə sıfır olmayan Radon ölçüsü varsa,

onda X lokal kompakt topoloji qrupdur (A. Veyl, A. Weil).

Evklid fəzası $\mathbb{R}^n$ -də klassik Lebeq ölçüsünə $\mathbb{R}^n$ fəzasının vahid ölçülü kubunda 1 qiymətini alan $\mathbb{R}^n$ -də belə Haar ölçüsünün təməllənməsi kimi baxmaq olar.

Ayrılan topoloji fəzada hər bir sonlu (uyğun olaraq lokal sonlu) Borel ölçüsü daxilən kompakt reqlular ölçü olarsa, bu fəza Radon (uyğun olaraq güclü Radon) fəzası adlanır. Lindelef xassəsinə malik Radon topoloji fəzası həmişə güclü Radon fəzasıdır (Lindelef xassəsi: topoloji fəzanın ixtiyari açıq örtüyündən hesabı altörtük ayırmaq olar). Güclü Radon fəzalarına mühüm misallar Suslin fəzalarıdır, yəni ələ metrikləşən topoloji fəzalar ki, bunlar polski topoloji fəzalarının kəsilməz obrazlarıdır. Məsələn, hər bir polski fəzası güclü Radon fəzasıdır (S. Ulam). Əgər X gücü geniş mənada ölçülməyən ixtiyari metrik fəzadırsa, onda X fəzasında hər bir σ – sonlu Borel ölçüsü μ üçün separabel daşıyıcı vardır, yəni ələ separabel qapalı $F \subset X$ çoxluğu vardır ki, $\mu(X \setminus F) = 0$. Əgər

qeyd olunan X fəzası tam fəza olarsa, onda o, Radon fəzası olacaqdır (X metrik fəzasının gücü üzərinə heç bir məhdudiyyət qoymadan, yalnız onu hökm etmək olar ki, X -də ixtiyari sonlu Borel ölçüsü reqlular ölçüdür). Radon topoloji fəzaları bir sıra digər, olduqca yaxşı xüsusiyyətlərə malikdir və bunlardan biri onların universal ölçülənliyidir (bax, [1]). Radon fəzası olmayan kompakt topoloji fəzaya misal: ω_1 -i (ω_1 birinci qeyri – hesabı ordinaldır) aşmayan, adi qaydalı topologiya ilə verilmiş bütün ordinal ədədlər çoxluğudur.

Müsbət ədədi qiymətlər alan σ -lərdən başqa, tez-tez dəyişkənlişəli ədədi ölçülərə (*yüklərə*), həm də kompleks ədədlər meydanında qiymətlər alan ölçülərə də baxılır. Daha ümumi hallarda topoloji vektor fəzalarda qiymətlər alan σ -lərə də baxılır. (X, S) – ölçülən fəza, S – bazis çoxluğu X -in hissələrindən

təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr, E – topoloji fəza olsun. Əgər ixtiyari kəsilməz xətti $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funksionalı üçün çoxluq funksiyası $g \circ \mu: Y \rightarrow g(\mu(Y))$, $Y \in S$ – sonlu tam variasiyalı ədədi dəyişkənlişəli ölçü olarsa, $\mu: S \rightarrow E$ inikası vektor ölçüdür, deyilir. μ vektor ölçüsünün hesabı – additivliyini tətbiqi nöqtəyi – nəzərdən mühüm olan bir çox hallar üçün isbat etmək olur. Məs., əgər E Banax fəzasıdırsa, onda μ E -dən qiymətlər alan, hesabı – additiv çoxluq funksiyasıdır.

Ölçü nəzəriyyəsinin sonsuzölçülü vektor fəzaları ilə bağlı bölməsində ölçülən vektor fəza (yəni vektor strukturu ölçülən fəza strukturu ilə uzlaşan əsas bazis fəzası) və silindrik σ – cəbr anlayışı xüsusi rol oynayır. Bu bölməyə vektorqiymətli inikasların müxtəlif inteqrallama nəzəriyyələri (Pettis zəif inteqrallaması, Bochner güclü inteqrallaması və s.) aiddir.

Müasir ölçü nəzəriyyəsinin böyük bir bölməsini müxtəlif təsvir teoremləri təşkil edir: lokal kompakt topoloji fəzalarda kəsilməz xətti funksionalın dəyişkənlişəli ölçülər üzrə inteqrallar vasitəsilə təsviri haqqında Riss teoremi, qəbəriq metrikləşən kompaktın ekstremal nöqtələri çoxluğunda toplanmış ehtimal ölçülərinə nəzərən qeyd olunan kompakt nöqtələrinin ağırlıq mərkəzləri (bərimərkəzlər) olması haqqında Şoke teoremi tipli nəticələr, abstrakt cəbri strukturlarda (məs., Bul halqalarında) verilən ölçülər və adi ölçülən fəzalarda verilən ölçülər arasında metrik izomorfizmlər haqqında nəticələr və s.

Ö. nəzəriyyəsinin digər böyük bir bölməsi X bazis çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş eyni bir $S \sigma$ – halqasında təyin olunmuş ölçülərin müxtəlif siniflərinə bu və ya digər topologiyaların daxil olunması və ölçülərin müxtəlif yığılma növlərinin

araşdırılması ilə bağlıdır. Burada mühüm anlayış Borel ölçülərinin zəif (dar) yığılma anlayışdır və əsas nəticələrdən biri *Proxorov teoremidir* ki, bu teoremdə tamamilə rəqulyar topoloji X fəzasında (yəni Tixonov fəzasında) verilən Radon ehtimalları ölçüləri ailəsinin nisbi kompaktlığını (zəif topologiyada) təyin edən kriteri müəyyən olunur.

Müasir ölçü nəzəriyyəsinin daha da xüsusi suallarından – Ö.-nün strukturu ilə topoloji fəzalarda Borel xassəsi arasında əlaqələr haqqında sualları (bax, [10]), ehtimal nəzəriyyəsində (xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsində), ümumi topologiyada və analizdə çoxsaylı təbii olan ölçülən selektorlar haqqında müxtəlif nəticələri qeyd etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan digər ölçülər haqqında bax, *Təsadüfi ölçü* məqaləsinə [Viner təsadüfi Ö.-sü, Gauss Ö.-sü, Markov Ö.-sü, asılı olmayan qiymətləri Ö., ortoqonal qiymətləri Ö., Puasson Ö.-sü, rəqulyar (səpələnmə, diffuz) Ö., struktur Ö., sayıcı Ö., empirik təsadüfi Ö.,].

Tamamlanması, ölçünün; Davam olunması, ölçülərin; Proyektiv sistemləri, ölçülərin; Ekvivalent ölçülər; Elementar ölçü məqalələrinə də bax.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [5] Скороход А. В., Интегрирование в гильбертовом пространстве, М., 1975; [6] Прохоров Ю. В., «Теория вероятностей и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [7] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч.1, М., 1962; [8] Харазисвили А. В., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983; [9] Харазисвили А. В., Топологические аспекты теории меры, К., 1984; [10] Оксто-би Дж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974.

ÖLÇÜ asılı olmayan qiymətlərli «мера с независимыми значениями; **measure with independent values**» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

ÖLÇÜ(sü) birölçülü diffuziyanın «мера одномерной диффузии; **measure of one-dimensional diffusion**» – bax, *Birölçülü diffuziya*.

ÖLÇÜ; daşıyıcı «мера; носитель; **measure support of**» – bax, *Daşıyıcı(sı) ölçünün*.

ÖLÇÜ(sü) kriterinin «размер критерия; **size of a test**» – ilkin hipotezə müvafiq, paylanmalar ailəsi üzrə 1-ci növ səhv ehtimalının yuxarı serhedidir. Bax, *Statistik hipotezlerin yoxlanılması*.

ÖLÇÜ; məqbul yerindəyişmə «мера; допустимый сдвиг; admissible shift of a **measure**» – bax, *Məqbul yerindəyişmə(sı) ölçünün*.

ÖLÇÜ ortoqonal qiymətlərli «мера с ортогональными значениями; **measure with orthogonal values**» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

ÖLÇÜ təsadüfi «мера случайная; **random measure**» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

ÖLÇÜ; variasiya «мера; вариация; **variation of a measure**» – bax, *Variasiya(sı) ölçünün*.

σ – ÖLÇÜ «σ – мера; σ – **measure**» – bax, *Ölçü*.

ÖLÇÜLƏN AXIN «измеримый поток; **measurable flow**» – ölçülü $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzasının *avtomorfizmlərinin* $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ *ailesidir*, aşağıdakı şərti ödəyən *axındır*:

$\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ -də Borel σ – cəbri olarsa, ixtiyari $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülən funksiyası üçün $f_1(x, t) = (T^t x)$ bərabərliyi ilə təyin olunan $f_1: (X \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyası $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir. Hər bir Ö. a. *kəsilməz axındır*. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Lebeq fəzası olduqda, ixtiyari kəsilməz $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ axınından T^t -ni hər bir t üçün sıfır ölçülü çoxluqda evez edərək, Ö. a. almaq olur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Бершник А. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 127–36; [2] Маруяма Г., «J. Math. Soc. Japan», 1966, v. 18, № 3, p. 303–30.

ÖLÇÜLƏN BÖLGÜ «измеримое разбиение; **measurable partition**» – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının ele C_α , $\alpha \in A$ (A hesabi olmaya da bilər) çoxluqlarına $\mathcal{P}$ bölgüsüdür ki, bu çoxluqlardan hər birini bu çoxluqda P_α ehtimal ölçüsü (C_α -da şərti ölçü) verməklə P – sanki ehtimal fəzasına çevirmək olar, bu şərtlə ki,

$$P(B) = \int_{\Omega} P_\alpha(B \cap C_\alpha(\omega)) P(d\omega)$$

tam ehtimal düsturu ödənilsin, burada $B \in \mathcal{A}$, $C_\alpha(\omega) \in C_\alpha$ çoxluqlarından ələsidir ki, $\omega \in \Omega$ nöqtəsi ona daxildir. Sonlu və ya hesabi $\mathcal{P}$ bölgüsünün ölçülənliyi C_α çoxluqlarından hər birinin ölçülənliyi ilə ekvivalentdir. İki Ö. b. o halda *ekvivalent* adlanır ki, onlar fəzanın sıfır ölçülü, lazım bilinən çoxluğu xaric olunduqdan sonra üst-üstə düşsün. Lebeq fəzaları olan ölçülü fəzalarda ekvivalent Ö. b. sinifləri və ölçülən çoxluqların σ – cəbrlərinin tam σ – altcəbrləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Lebeq fəzasının Ö. b. nəzəriyyəsi [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Прохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107–50.

ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQ «измеримое множество; **measurable set**» – bax, *Ölçü*.

C – ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQ «C – измеримое множество; **C – measurable set**» – bax, *Tutum*.

ÖLÇÜLƏN FƏZA «измеримое пространство; **measurable space**» – bax, *Ölçülü fəza, Ölçü*.

ÖLÇÜLƏN FUNKSIYA «измеримая функция; **measurable function**» – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında (və ya bu fəzanın Lebeq ölçülü hər hansı altçoxluğunda) təyin olunmuş ele ədədi f funksiyasıdır ki, ixtiyari həqiqi t ədədi üçün

$\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) < t\}$ Lebeq ölçülü çoxluqdur. Lebeq mənada ölçülən bütün çoxluqların sinfi olduqca genişdir. Bundan başqa, Lebeq mənada ölçülməyən funksiyanın varlığının isbatı yalnız belə funksiyanın seçilməsi aksiomunun olduqca güclü formalaından istifadə edilməklə mümkündür. Lebeq mənada ölçülən bütün funksiyalar sinfinin mühüm xassələrindən biri bu sinfin təbii cəbri əməllərə və hesabi limit keçidlərinə görə qapalı sinif olması xassəsidir.

Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin inkişafı ilə əlaqədar olaraq Ö. f. anlayışı müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir. E – əsas bazis fəza, S , E -də hər hansı çoxluqlar σ – halqası, f , –

E -də verilmiş ədədi funksiya olsun. Əgər hər bir həqiqi t ədədi üçün $\{x \in E: f(x) \neq 0 \text{ \& } f(x) < t\}$ çoxluğu S σ halqasından olarsa, f ölçülən funksiya *deyilir*. S çoxluqlar σ - cəbri olduğu halda, f funksiyanın ölçülənliyinin tərif ixtiyari həqiqi t ədədi üçün $\{x \in E: f(x) < t\}$ çoxluğunun bu S σ - cəbrinə aid olması tələb ilə ifadə olunan tərifi çevrilir.

(E_1, S_1) və (E_2, S_2) - iki ixtiyari ölçülən fəza. $f, - E_1$ bazis fəzasının E_2 bazis fəzasına hər hansı inikası olsun. Əgər ixtiyari Y çoxluğu üçün $Y \in S_2 \Rightarrow f^{-1}(Y) \in S_1$ implikasiyası ödənilirsə, $f(S_1$ və S_2 -yə) ölçülən inikasıdır, deyilir. Bütün ölçülən fəzalar sinfi bu fəzalar arasındakı bütün mümkün ölçülən inikaslar sinfi ilə birlikdə ümumi ölçü nəzəriyyəsi və onun tətbiqində əsas tədqiqat obyektini təşkil edir.

Ö. f. anlayışının xüsusi halı əsas ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət anlayışdır; ölçülən inikas anlayışının mühüm xüsusi halı bir topoloji fəzanın digərinə Borel inikası anlayışdır. Ölçülən fəzada təyin olunmuş və topoloji vektor fəzada qiymətlər alan inikaslar üçün zəif (skalyar) ölçülənlik anlayışı çox faydalıdır (bax, [3]).

Ölçü ilə verilmiş qeyd olunmuş fəzada verilən Ö. f.-lara aid çoxsaylı fakt və müddəalar arasında Yeqorov teoremi, Ö. f.-lar ardıcılığı üçün sanki yəqin yığılma və müntəzəm yığılma arasında dərin əlaqəni müəyyənləşdirən teorem, həmçinin Ö. f.-nın strukturunu onun nisbi kəsilməzliyi nöqtəyi - nəzərindən və bu funksiyanın ölçülü hər hansı topoloji fəzada verildiyi halında aydınlaşdırən C - xassə haqqında Luzin teoremi xüsusilə seçilir (bax, [1] - [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Данфорт Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

σ - ÖLÇÜLƏN FUNKSIYA « σ - измеримая функция; σ - measurable function» - σ topoloji fəzada təyin olunmuş və bu fəzanın Borel σ - cəbrinə nəzərən ölçülən, ədədi funksiya *dir*. E - əsas bazis çoxluq, U - bu çoxluğun altçoxluqlarının hər hansı sistemi olsun, əgər

1) $\emptyset \in U$ və $E \in U$;

2) U -nun ixtiyari iki çoxluğunun kəsişməsi də U sistemində daxil olarsa;

3) U -nun çoxluqlarının hər bir hesabı ailəsinin birləşməsi də U sistemində daxil olarsa, (E, U) cütünə σ - topoloji fəza (və ya Aleksandrov fəzası [1]) deyilir.

Bu halda U sisteminin özü verilmiş σ - topoloji E fəzasının bütün açıq çoxluqlarının sistemi adlanır. Məs., hər bir adi topoloji fəza σ - topoloji fəzadır. Lakin tərs müddəa, ümumiyyətlə, doğru deyildir. Həqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}$ hesabı bazaya malik olduğundan $\mathbb{R}$ -ə eyni zamanda həm topoloji, həm də σ - topoloji fəza kimi baxmaq olar. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya, yalnız və yalnız, o halda σ - ölçülən funksiya *dir* ki, ixtiyari $t \in \mathbb{R}$ ədədi üçün $\{x \in E: f(x) < t\}$ çoxluğu E fəzasının Borel σ - cəbrinə daxil olsun (yəni U sistemini də özündə saxlayan daxilolma əməlinə görə minimal σ - cəbr). Əgər ixtiyari t üçün f funksiya daha güclü

$$(t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \{x \in E: f(x) < t\} \in U \text{ \& } \{x \in E: f(x) > t\} \in U$$

xassəsinə malik olarsa, onda f funksiya σ - kəsilməz funksiya adlanır. Hər hansı σ - topoloji fəzanın digərinə σ - ölçülən inikası və σ - kəsilməz inikası ümumi anlayışları analoji surətdə daxil olunur.

Əgər hər bir $X \in U$ çoxluğu üçün $\text{ele } f: E \rightarrow \mathbb{R}$ σ - kəsilməz funksiya varsa ki, $X = \{x \in E: f(x) \neq 0\}$ olsun, onda σ - topoloji E fəzası tamamilə normal fəza adlanır. E tamamilə normal σ - topoloji fəza olarsa, E -də təyin olunmuş ixtiyari σ - Ö. f. bu fəzanın Borel σ - cəbrinə nəzərən ölçülən funksiya *dir* (yəni E -də bütün σ - kəsilməz ədədi funksiyalar sinfinin doğruduğu σ - cəbrə nəzərən), belə ki, baxılan halda Borel və Borel σ - cəbrləri üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307-48; 1941, т. 9, № 3, с. 563-629; 1943, т. 13, № 2-3, с. 169-238; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3-68.

ÖLÇÜLƏN İNİKAS « измеримое отображение; measurable mapping» - bax, *Ölçülən funksiya, Ölçülü fəza*.

ÖLÇÜLƏN QRP « измеримая группа; measurable group» - özünün altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ - cəbri ilə verilən ele qrupdur ki, bu qrupa nəzərən bütün qrup əməlləri ölçüləndirir. Daha dəqiq, T - Abel qrupu, $\mathcal{B}$ - onun altçoxluqlarının hər hansı σ - cəbri olsun; əgər $T \times T$ -dən T -yə və T -dən T -yə $(t_1, t_2) \rightarrow t_1 + t_2$ və $t_1 \rightarrow -t_1$ inikasları uyğun olaraq, $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ və $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ σ - cəbrlər cütünə nəzərən ölçülən olarlarsa, $(T, \mathcal{B})$ cütünə ölçülən qrup deyilir. Borel σ - cəbri ilə verilən metriklə bilinen separabel topoloji qrup Ö. q.-dur. Əgər T Hausdorff topoloji qrupdursa və bu qrupun gücü kontinuum gücü ciddi aşarsa, onda T özünün Borel σ - cəbri ilə Ö. q. deyildir. Əgər $(T, \mathcal{B})$ Ö. q.-dursa, onda T -nin iki təsadüfi elementinin nöqtəbə-nöqtə cəmi də təsadüfi element *dir*.

ÖLÇÜLƏN PARALELEPİPED « измеримый параллелепипед; measurable parallelepiped» - bax, *Hasil(i) ölçüləri*.

ÖLÇÜLƏN SEÇMƏ « измеримый выбор; measurable selection» - bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

ÖLÇÜLƏN SEMİ - AXIN « измеримый полупоток; measurable semiflow» - bax, *Semi - axın*.

ÖLÇÜLƏN VEKTOR FƏZA « измеримое векторное пространство; measurable vector space» - ele vektor fəzası və onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ - cəbr cütüyüdür ki, vektor fəzasının əməlləri bu σ - cəbrə nəzərən ölçüləndir. T - vektor fəzası (həqiqi ədədlərin meydanı $\mathbb{R}$ üzərində), $\mathcal{B}$ - onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ - cəbr olsun; $(T, \mathcal{B})$ cəm əməlinə görə ölçülən qrup və $\mathbb{R} \times T$ fəzasından T fəzasına $(\alpha, t) \rightarrow \alpha t$ inikası $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B})$ cütünə nəzərən ölçülən olarsa, $(T, \mathcal{B})$ cütü ölçülən vektor fəza adlanır. Borel σ - cəbri ilə verilən separabel metriklənən topoloji fəza (xüsusi halda, separabel normalanmış fəza) Ö. v. f.-dir. Silindrik σ - cəbri ilə verilən ixtiyari lokal qabanq fəza

Ö. v. f.-dir. Əgər $(T, \mathcal{B})$ gücü kontinium gücünü aşan normallanmış fəzadırsa, onda T Borel σ -cəbri ilə Ö. v. f. deyildir. Əgər $(T, \mathcal{B})$ Ö. v. f.-dirsə, onda T -nin ixtiyari iki təsadüfi elementinin nöqtəbənöqtə cəmi də təsadüfi elementdir.

Bax, Ölçü.

ÖLÇÜLƏNLİK Бохнерə görə «измеримость по Бохнеру; Bochner measurability» – bax, Güclü ölçülən inikas.

ÖLÇÜLƏNLİK Лебегə görə «измеримость по Лебегу; Lebesgue measurability» – bax, Ölçü, Ölçülən funksiya.

ÖLÇÜLƏNLİK Luzinə görə «измеримость по Лузину; Luzin measurability» – Radon ölçülü topoloji fəzada təyin olunmuş inikas üçün ölçülənlik anlayışdır. Əgər Ω Hausdorff topoloji fəzası, μ Ω -da Radon ehtimal ölçüsü, T topoloji fəza olarsa və əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $K_\varepsilon \subset \Omega$ kompakt altçoxluğu tapılsa ki, $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ və f -in daralması K_ε -də kəsilməz olsun, onda $f: \Omega \rightarrow T$ inikası Luzinə görə μ -ölçülən inikas adlanır. Əgər $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}(\Omega)$ Borel σ -cəbrinin μ -yə nəzərən tamamlanması olarsa, onda $f: \Omega \rightarrow T$ inikası Luzinə görə, yalnız və yalnız, o halda μ -ölçülən inikasıdır ki, hər bir Borel çoxluğu $B \subset T$ üçün $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ şərti ödənilmiş olsun.

Əd.: [1] Schwartz L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

ÖLÇÜLƏRİN QOVUŞMASI «сращение мер; splicing of measures» – ölçü nəzəriyyəsinin anlayışı olub, σ -cəbrlərin «sanki asılı olmamazlığı» xassəsilə bağlı yaranmışdır. $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$, Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş iki σ -cəbr, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ -ni özündə saxlayan minimal σ -cəbr olsun. Əgər bütün $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ üçün

$$\eta(A \cap B) = \mu(A) \nu(B)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $(\Omega, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ fəzasında η ehtimal ölçüsünə $(\Omega, \mathcal{A})$ -da μ və $(\Omega, \mathcal{B})$ -də ν ölçülərinin qovuşması deyilir. μ və ν ölçülərinin qovuşması üçün zəruri və kafi

şərtlər ki, əgər $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \dots$ və $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \Omega$ olarsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \nu(B_n) \geq 1$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Əd.: [1] Marczewski E., «Fund. math.», 1951, t. 38, p. 217–29; [2] Ramachandran D., Perfect measures, I-II, New Delhi, 1979, (ISI Lecture Notes, 5,7); [3] Storock D., «Colloq. Math.», 1976, v. 35, p. 7–13; [4] Kallianpur G., Ramachandran D., «Ann. Probab.», 1983, v. 11, p. 819–22.

ÖLÇÜLMƏYƏN ÇOXLUQ «неизмеримое множество; nonmeasurable set» – baxılan ölçünün təyin olunma oblastına daxil olmayan çoxluqdur. Məs., vahid uzunluqlu $(0, 1)$ intervalının bütün rəşional nöqtələrinin çoxluğu həqiqi

oxda verilən klassik Jordan ölçüsünə nəzərən ölçülməyən çoxluqdur. «Ö. ç.» termini riyaziyyatda, tarixən, 1905-də isbat olunmuş Vitali teoremi ilə bağlı olaraq təsdiq olunmuşdur. Bu teoremdə hökm olunur ki, ciddi müsbət ölçülü, Lebeq mənadı ixtiyari ölçülən çoxluğun Lebeq mənadı ölçülməyən kontinual altçoxluğu vardır. Vitali teoreminin isbatı Evklid fəzasının paralel köçülmələrə nəzərən Lebeq ölçüsünün invariantlıq xassəsinə əsaslandırılmışdır (bax, [2]). Sonralar Lebeq mənadı Ö. ç.-lərin varlığına gətirən digər konstruksiyaların təklif olunmasına baxmayaraq, bunlar arasında Vitali konstruksiyasından asılı olmayanları yalnız F. Bernşteyn (F. Bernstein, 1908) və S. Ullamın (S. Ulam, 1930) təklif etdikləri metodlardır. Bütün bu metodlarda əsas etibarilə seçim aksiomunun qeyri – hesabi formalan istifadə olunmuşdur və bunlar Ö. ç.-un təbiəti haqqında riyaziyyatçıların uzun müddətli müzakirələrinə səbəb olmuşdur. 1970-də R. Sollovey (R. Solovay) isbat edə bilmişdir ki, seçim aksiomunun qeyri – hesabi formasından istifadə etmədən Lebeq mənadı Ö. ç.-lərin varlığını müəyyənləşdirmək qeyri – mümkündür.

Yuxarıda qeyd olunmuş klassik Vitali teoreminin müxtəlif ümumləşmələri məlumdur. Məs., X – əsas bazis çoxluq, G , X -də sərbəst təsirli qeyri – hesabi altqrupa malik olan X çoxluqlarının hər hansı çevirmələr qrupu olsun. Onda X çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş ixtiyari G – invariant σ – halqada verilən ixtiyari σ – sonlu G – kvaziinvariant μ ölçüsü aşağıdakı xassəyə malikdir: $\mu(Y) > 0$ şərtini ödəyən, ixtiyari μ – ölçülən Y çoxluğunun $Y' \subset Y$ altçoxluğu var ki, bu çoxluq μ ölçüsünə nəzərən ölçülməyendir (bax, [4]).

Invariant və kvaziinvariant ölçülər üçün müxtəlif mütləq Ö. ç.-lər anlayışları vardır (bax, [3], [4]). Sonsuzölçülü fəzalarda bu və ya digər konkret ölçülərə nəzərən Ö. ç.-lara aid misallar, sonluölçülü çoxluqlarla müqayisədə, olduqca sadə şəkildə qurulur. Mütləq Ö. ç.-un qurulmasında da analoji vəziyyət müşahidə olunur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., 1966; [4] Харашивили А. Б., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

ÖLÇÜLÜ FƏZA «пространство с мерой; measure space» – (X, S, μ) şəkilli nizamlanmış üçlükdür, burada X – əsas bazis çoxluq, S – bu çoxluğun hissələrinin hər hansı σ – halqası və μ , S -in σ – halqasında verilmiş ölçüdür. (S, μ) cütü əsas bazis çoxluğu X -də müəyyən növ strukturdur. (X, S) cütü, adətən, ölçülən fəza adlandırılır. Burada əksər hallarda tələb olunur ki, S -in σ – halqasının bütün elementlərinin birləşməsi X çoxluğu ilə üst-üstə düşsün. (X, S, μ) və (X', S', μ') – ölçüləri uyğun olaraq μ və μ' olan iki fəza olsun.

1) ixtiyari Y üçün $Y \in S' \Rightarrow f^{-1}(Y) \in S$;

2) ixtiyari Y üçün $Y \in S' \Rightarrow \mu(f^{-1}(Y)) = \mu'(Y)$

şərtlərini ödəyən $f: X \rightarrow X'$ inikasına (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına morfizmi (homomorfizmi) deyilir. Əgər $f: X \rightarrow X'$ inikası üçün yalnız 1) xassəsi ödənilirsə, onda bu inikasa ölçülən (X, S) fəzasının ölçülən (X', S') fəzasına ölçülən inikası deyilir. Əgər (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına homomorfizmi f ixtiyari Y üçün əlavə

$$Y \in S' \Leftrightarrow f^{-1}(Y) \in S$$

münasibətini də ödəyərse, bu inikas (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına güclü homomorfizmi adlanır. Bu halda deyilir ki, μ' ölçüsü μ ölçüsünün f inikasında obrazıdır. Əgər heç olmasa bir biyektiv güclü $f: X \rightarrow X'$ homomorfizmi varsa, ölçülülük (X, S, μ) və (X', S', μ') fəzaları izomorf fəzalar adlanır. Məhz belə güclü homomorfizm (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına izomorfizmi adlanır.

G – əsas bazis çoxluğu X -in hər hansı çevirmələr qrupu olsun. Əgər $Y \in S$ və $g \in G$ münasibətlərindən $g(Y) \in S$ münasibəti alınarsa, S -in σ – halqası G qrupuna nəzərən invariantdır, deyilir (G – invariant σ – halqa). Əgər ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu və ixtiyari $g \in G$ çevirməsi üçün $\mu(Y) = 0$ münasibəti $\mu(g(Y)) = 0$ münasibətinə ekvivalent olarsa, S -in G – invariant σ – halqasında verilən μ ölçüsü G – kvaziinvariant ölçü adlanır. Əgər ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu və ixtiyari $g \in G$ çevirməsi üçün $\mu(g(Y)) = \mu(Y)$ olarsa, S -in G – invariant σ – halqasında verilən μ ölçüsü G – invariant ölçüdür, deyilir.

(X, G, S, μ) nizamlanmış dörtlüyü, μ ölçüsü G çevirmələr qrupuna nəzərən kvaziinvariant (uyğun olaraq, invariant) olarsa, kvaziinvariant ölçülülük (uyğun olaraq, invariant ölçülülük) fəza adlanır. Hər iki halda (G, S, μ) üçlüyü əsas bazis çoxluğu X -də müəyyən növ strukturdur. G qrupu trivial (yeganə vahidi elementə gətirilən) olduğu halda, (X, G, S, μ) fəzasını (X, S, μ) fəzası ilə eyniləşdirmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsində ölçülülük fəzalara tipik misallar müxtəlif ehtimal fəzalarıdır, yəni (X, S, μ) fəzalarıdır ki, bu fəzalarda S σ – cəbrdir və $\mu(X) = 1$. Bu hallarda deyilir ki, X elementar hadisələr cəbri, S – hadisələr σ – cəbri, μ isə S -in hadisələr σ – cəbrində ehtimal ölçüsüdür (və ya sadəcə ehtimaldır).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

dim. – **ÖLÇÜLÜK / DİMENSİONLUQ** « **размерность; dimensionality** » – örtüklər vasitəsilə təyin olunmuş X kompaktının dim. – ölçüsü $\dim X$ ε ilə ən kiçik n ədədinə deyilir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün X kompaktı $\leq \varepsilon$ diametrlili qapalı çoxluqlardan ibarət, $n+1$ -ə bölünən örtüyə malikdir. Bu tərifin məzmununu dəyişməyərək, burada «qapalı çoxluqlar» terminini açıq çoxluqlar termini ilə əvəz etmək olar.

Əd.: [1] МЭ, т. 4, səh. 822, səh. 819.

dim. – **ÖLÇÜNÜN AZALDILMASI** « **понижение размерности; reduction of dimensionality** » – bax, *Reduksiyası verilənlərin (əlamətlərin)*.

ÖLƏZİLƏNMƏSİ Markov prosesinin « **убивание марковского процесса; killing of a Markov process** » – verilmiş Markov prosesinin hər hansı altprosesə keçməsidir.

ÖNGÖRÜL ÇOXLUQ « **предсказуемое множество; predictable set** » – bax, *Martinqal*.

***ÖNGÖRÜL DAYANMA ANI** « **предсказуемый момент останова; predictable stopping moment** » – bax, *Dayanma anı* axına görə.

ÖNGÖRÜL XARAKTERİSTİKA(sı) martinqalın « **предсказуемая характеристика мартингала; predictable characteristic of a martingale** » – bax, *Martinqal*.

ÖNGÖRÜL KVADRATİK VARIASIYA(sı) martinqalın « **предсказуемая квадратическая вариация мартингала; predictable quadratic variation of a martingale** » – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

ÖNGÖRÜL MARKOV ANI « **предсказуемый марковский момент; predictable stopping time** » – tam σ – cəbrlər axını sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axını ilə verilsə, tam ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də təyin olunmuş $\text{ele Markov momenti}$ τ -dur ki, Markov momentlərinin azalmayan $(\tau_n)_{n \geq 1}$ ardıcılığı vardır və bu momentlər $\{\omega: \tau(\omega) > 0\}$ çoxluğunda $\tau_n < \tau$ və bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ şərtlərini ödəyirlər.

$(\tau_n)_{n \geq 1}$ ardıcılığı belə təyin olunduqda, bu ardıcılıq τ anını öncədən xəbər verən ardıcılıq adlanır. Öngörül dayanma anları vasitəsilə $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlərinin soldan kvazikesilməz axını anlayışı da daxil olunur. İxtiyari Ö. M. a. τ üçün $\mathcal{A}_{\tau-} = \mathcal{A}_{\tau}$ şərtini ödəyən axın belə adlanır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

ÖNGÖRÜL PROSES « **предсказуемый процесс; predictable process** » – bax, *Martinqal*.

ÖNGÖRÜL PROYEKSİYASI, PROSESİN « **предсказуемая проекция процесса; predictable projection of a process** », tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axını ilə verilən $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında verilmiş, həqiqi $\zeta(t)$ prosesinin öngörül proyeksiyası – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən $\text{ele } P\zeta(t)$ öngörül prosesidir ki, ixtiyari öngörül Markov anı τ üçün

$$\mathbf{M}\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbf{M}P\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}}$$

bərabərliyi ödənilir.

Məhdud (və ya məni olmayan) prosesin Ö. p. vardır və o, birqiyəmətlili təyin olunur. Bu halda ixtiyari öngörül Markov anı τ üçün

$$P\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbf{M}\{\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} | \mathcal{A}_{\tau-}\}.$$

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

ÖNGÖRÜL TƏSADÜFİ PROSES « **предсказуемый случайный процесс; predictable stochastic process** » – öngörül çoxluqların σ – cəbrinə nəzərən ölçülənlik xassəsinə malik olan *tesadüfi prosesdir*. Bu proses belə təyin olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – tam ehtimal fəzası və $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz axını olsun. $0 \leq s < t$, $A \in \mathcal{A}_s$ olduqda $(s, t] \times A$ tipli və $A \in \mathcal{A}_0$ olduqda $\{0\} \times A$ tipli bütün çoxluqları özündə saxlayan $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə öngörül çoxluqlar σ – cəbri deyilir və bu σ – cəbr $\mathcal{P}$ kimi işarə olunur. $\mathcal{P}$ σ – cəbri tamamilə ölçülən çoxluqlar σ – cəbrinin tərkibindədir və: 1) $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə nəzərən uzlaşmış və kəsilməz (və ya yalnız soldan kəsilməz) bütün proseslər ölçülən olduqda $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ilə üst-üstə düşür; 2) $[[\sigma; \tau]]$ şəklində stoxastik inteqralları doğrurduğu, $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -nin altçoxluqlarının minimal σ – cəbri ilə üst-üstə düşür, burada σ, τ – ixtiyari *öngörül Markov anlarıdır*. Əgər $\zeta(\cdot, \cdot)$ $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P})$ ölçülən fəzasını $(\zeta(t))_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinin faza fəzası $(M, \mathcal{L})$ -ə inikas eldirən ölçülən inikas olarsa, $(\zeta(t))_{t \geq 0}$ *öngörül təsadüfi proses* adlanır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости в случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

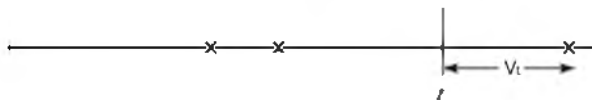
ÖRTÜM EHTİMALI / ETİBARLI EHTİMAL « **вероятность накрытия; covering probability** » – bax, *Etibarlı interval. Etibarlı qiymətləndirmə*.

ÖTÜM / EKSSƏS ANI « **перескока момент; first passage time / hitting time** » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımları*.

ÖTÜM / EKSSƏS KƏMİYYƏTİ « **перескока величина; value of overjump** » – bax, *Semi – Markov prosesi, Təsadüfi proses asılı olmayan artımları*.

ÖTÜM MÜDDƏTİ / EKSSƏS « **эксцесс / перескок / прямое время возвращения; excess / overchoot** » $\gamma(t)$ – verilmiş t anından sonra $\zeta(t)$ semi – Markov prosesinin ən yaxın bərpə anına qədər qalan müddətdir (bax, *şəkil*), yeni

$$\gamma(t) = \inf_{s \geq t} \{s : \zeta(s) \neq \zeta(t)\} - t,$$



(şəkil)

burada $\times$ – bərpə anıdır

Ö. m. semi – Markov prosesi ilə birlikdə $(\zeta(t), \gamma; t \geq 0)$ xəttvari Markov prosesi eməle getirir.

Xüsusi halda, $G(t) = P\{\theta_k \leq t\}$ paylanma funksiyası və sonlu $M\theta_k = m$ riyazi gözləməsi ilə təyin olunan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$$

bərpə prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s)) ds / m$$

olan γ^* stasionar Ö. m. vardır və γ^* , $-\gamma(t) = \tau_{v(t)+1} - t$ üçün limit Ö. m.-dir, burada $v(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ÖTÜRMƏ ƏMSALI « **передачи коэффициент; transfer coefficient** » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*.

ÖTÜRÜCÜ FUNKSİYA « **передаточная функция; transfer function** », $\mathcal{L}$ xətti sisteminin (və ya xətti filtrin) Ö. f. – aşağıdakı şərtlə təyin olunan dairəvi ω tezlikli $H(\omega)$ kompleks funksiyasıdır; sistemin girişinə ötürülən $e^{i\omega t}$ funksiyası $\mathcal{L}$ sistemi ilə $\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = H(\omega)e^{i\omega t}$ funksiyasına çevrilir. Ö. f.-nin mütləq qiyməti $A(\omega) = |H(\omega)|$ $\mathcal{L}$ sisteminin güclənmə əmsalı (və ya amplitud – tezlik xarakteristikası) adlanır, $\Psi(\omega) = \arg H(\omega)$ isə $[H(\omega) = A(\omega)e^{i\Psi(\omega)}$ olduqda] sistemin faza yerindəyişməsi [və ya sadəcə faza, ya da faza – tezlik xarakteristikası] adlanır. Əgər $x(t)$ funksiyası sistemin girişində Furiye inteqralı (və ya Furiye – Stilyes inteqralı) şəklində ifadə oluna bilinsə, onda $\mathcal{L}$ sistemi ilə $x(t)$ funksiyasını bu fərziyyəyə əsaslanaraq,

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) x(t-u) du$$

funksiyası şəklində göstərmək olar, burada $h(u)$ Ö. f. ilə

$$h(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} H(\omega) d\omega$$

münasibətlə bağlı, $\mathcal{L}$ sisteminin adı və ya ümumiləşmiş impuls – keçid funksiyasıdır, yeni $H(\omega)$ funksiyasının Furiye çevirməsidir.

Bax, *Xətti filtr*.

ÖTÜRÜCÜLÜK QABİLİYYƏTİ, KANALIN « **пропускная способность канала; channel capacity** » – informasiyanın rabitə *kanalı* ilə ötürülməsinin nəzəri-informasiya imkanları ölçüsüdür. K. ö. q. rabitə kanallarının əsas xassələrindən biridir, informasiya nəzəriyyəsinin əsas teoremi (*Şennon teoremi*) doğru olduğu halda maksimal məqbul ötürmə sürəti ilə (bax, *İnformasiya ötürmə sürəti*) üst-üstə düşən və bu halda məlumatların verilən dəqiqliklə bərpası mümkündür.

Əgər Y və $\tilde{Y}$ rabitə kanalı (Q, V) ilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda K. ö. q. $C = \sup I(Y; \tilde{Y})$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $I(Y; \tilde{Y})$, $-\tilde{Y}$ -də Y üzrə informasiya miqdarıdır, yuxarı serhed isə (Q, V) kanalı ilə bağlı bütün $(Y, \tilde{Y})$ təsadüfi kəmiyyətlər cütü üzrə götürülür. Kanalın giriş və çıxışdakı $Y = \{Y(t), -\infty < t < \infty\}$ və $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t), -\infty < t < \infty\}$ signalı kəsilməz və ya diskret zamanlı təsadüfi proseslər olduğu halda, K. ö. q. vahid zaman ərzindəki orta K. ö. q. və ya ötürülən signalın bir simvolu üçün orta K. ö. q. kimi anlaşılır, odur ki,

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} (T - t)^{-1} \sup \mathbf{I}(Y_t^T; \tilde{Y}_t^T) \quad (*)$$

olduğu fərz olunur, əgər (*)-nın sağ tərəfindəki limit varsa, burada yuxarı sərhəd

$$Y_t^T = \{Y(s), t < s \leq T\}, \quad \tilde{Y}_t^T = \{\tilde{Y}(s), t < s \leq T\}$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün cütləri üzrə götürülür və bu təsadüfi kəmiyyətlərin verilmiş kanalın uyğun parçası ilə bağlı olduğu nəzərdə tutulur. (*) limitinin varlığı kanalların kifayət qədər geniş bir sinfi üçün isbat olunmuşdur, məs., keçid ehtimalları sıfırdan fərqli və sonlu yaddaşlı bircins kanallar üçün. Bundan başqa, bir çox hallarda (məs., sonlu yaddaşlı kanallar üçün) (*) ifadəsində sup və lim işarələrinin yerini dəyişmək olar ki, bu halda K. ö. q. verilmiş kanal üzrə informasiyanın maksimal mümkün ötürülmə sürəti kimi interpretasiya olunur. K. ö. q. aşkar olaraq bir sıra xüsusi hallarda hesablanır; məs., yaddaşsız simmetrik kanallar və Gauss kanalları bu qəbildəndir.

K. ö. q.-nin tərfi kimi, bəzən məlumatları verilən dəqiqliklə bərpa etməyə imkan verəcək informasiyanın maksimal məqbul ötürülməsi sürəti qəbul olunur.

Çoxkomponentli kanallar halında K. ö. q. kimi, adətən, çoxölçülü fəzada ələ bir oblast anlaşılır ki (bu oblast kanalın ötürücülük qabiliyyəti oblastı adlanır), bu oblast məlumatları verilən dəqiqliklə bərpa etməyə imkan verəcək ötürülmə mümkün olan sürətlər toplusunu təsvir edir. Çoxötürücü kanalların yalnız bezi növləri üçün K. ö. q. oblastının sadə təsviri məlumdur, ümumi halda isə K. ö. q. oblastının sadə xarakterizasiyası məlum deyildir.

Informasiya ötürmə nəzəriyyəsində bəzən sıfır xətalı K. ö. q.-a da baxılır; K. ö. q. bu halda məlumatların bərpasının dəqiqliklə şərtləri ötürülən və bərpalanan məlumatların tamamilə üst-üstə düşməsindən ibarətdir. Yaddaşsız diskret kanallar üçün sıfır xətalı K. ö. q.-nin tapılması məsələsi çətin və həllolunmaz kombinator məsələdir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнштейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория свя-

зи, пер. с англ., М., 1965; [7] Чисар И., Кернер Я., Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, пер. с англ., М., 1985.

ÖYRƏDİCİ SEÇİM «обучающая выборка; training sample» – diskriminant analizdə və obrazların məsələlərində ələ *seçimdir* ki, bu seçimin bütün elementlərinin məlum alternativ siniflərdən eyni birinə aid olması və bu sinfin nömrəsi də məlumdur. Adətən, Ö. s.-in miqdarı bölünə bilən siniflərin sayı ilə üst-üstə düşür, lakin ola bilər ki, Ö. s.-lər bütün siniflər üçün olmasın. Regressiya məsələlərində regressiya tənliyinin parametrləri Ö. s.-lə bu seçimlə qiymətləndirilir.

ÖZÜ-ÖZÜNƏ AYRILAN PAYLANMA «саморазложимое распределение; self-decomposable distribution» – $\overline{a_n}$ və b_n sabitləri ilə normalanmış $\xi_{nk} = \xi_k / b_n$,

$n \geq 1, k = \overline{1, n}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər dəfə artan $\xi_{n1} + \dots + \xi_{nm} - a_n$ cəmləri üçün mümkün ola bilən limit qanunları sinfi – $\mathcal{L}$ sinfinə (Levi sinfinə) məxsus paylanmadır. Fərz olunur ki, ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətləri *sonsuz kiçiklik şərtinə* tabedir (bax, *Sonsuz kiçiklik şərti*).

Paylanma funksiyası $F(x)$, yalnız və yalnız, $F(x) = F(\lambda x) * F_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^1, \lambda > 1$ funksional tənliyini ödəyərsə, onda $\mathcal{L}$ sinfindəndir, burada $F_\lambda(x)$ – hər hansı paylanma funksiyasıdır.

Sonsuz bölünən paylanmalar sinfinin altsinfi $\mathcal{L}$ Levi *kanonik ifadəsinin* spektral H funksiyasının xüsusi bir xassəyə malik olması ilə seçilir: $H'(x)$ hesabi saydan çox olmayan nöqtələr istisna edilməklə bütün $x \neq 0$ nöqtələrində təyin olunmuşdur və $xH'(x)$ funksiyası $x < 0, x > 0$ yarımxollarında artmayan funksiyadır. Ö. - ö. p.-lar mütləq kəsilməz və təkzirvəli paylanmalardır (bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Золотарев В. М., «Литов. матем. сб.», т. 3, № 1, с. 123–40, 1963; [3] Yamazato M., «Ann Probab.», 1978, v. 6, № 4, p. 523–31.

τ – PAÇKA « τ – пачка; τ – pack / τ – batch » – bax, *Təsədüfi proses*; kəsilmələr.

PALM AXINI « Пальма поток; Palm flow » – məhdud keçmişlərsiz stasionar ordinar giriş axınıdır (bax, *Ordinarlığı, axının; Stasionarlığı, axının*). P. a. – rekurrent axındır, bu axın üçün ixtiyari t_0 anından bu andan sonra ilk axın hadisəsinin baş verdiyi ana qədər keçən müddətin paylanma funksiyası $F_0(t)$ ilə ardıcıl baş verən hadisələr arasında zaman intervallının paylanma funksiyası $F(t)$ bir-birilə

$$F_0(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t [1 - F(x)] dx$$

münasibəti ilə bağlıdır, burada $\tau < \infty$ – ardıcıl axın hadisələrinin baş verdiyi anlar arasında interval uzunluğunun riyazi gözləməsidir. t uzunluqlu intervalda P. a. hadisələrinin sayının orta qiyməti t/τ -ya bərabərdir. P. a.-nın tərifini A. Ya. Xinqin [2]-də vermişdir. P. a. tipli axınlar ilk dəfə K. Palm tərəfindən [1]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Palm C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189; [2] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963.

PALM DÜSTURLARI « Пальма формулы; Palm formulas » – ordinar stasionar axın üçün düsturlardır (bax, *Ordinarlığı, axının; Stasionarlığı, axının*), axın parametri λ sonlu olduqda, bu düsturlar Palm funksiyaları $\varphi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ və t müddəti ərzində k tələbin daxil olması ehtimalları $P_k(t)$ arasındakı əlaqəni müəyyən edir. P. d. differential formada

$$v'_k(t) = -\lambda \varphi_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

burada $v_k(t) = \sum_{i=0}^k P_i(t)$.

integral formasında isə

$$P_0(t) = 1 - \lambda \int_0^t \varphi_0(z) dz,$$

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t [\varphi_{k-1}(z) - \varphi_k(z)] dz, \quad k = 1, 2, \dots$$

münasibətlərlə ifadə olunur.

P. d. $k=0$ halında [1]-də K. Palm tərəfindən, $k \geq 1$ halında isə [2]-də A. Ya. Xinqin tərəfindən çıxarılmışdır.

Əd.: [1] Palm C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189; [2] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963.

710 PALM

PALM FUNKSIYALARI « Пальма функции; Palm functions » – sonlu parametrlili ixtiyari stasionar axın üçün (bax, *Stasionarlığı, axının*) birqiytməli təyin olunmuş

$$\varphi_k(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h_k(\tau, t)}{\omega(\tau)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şəklində funksiyalardır, burada $h_k(\tau, t) = 1$ τ intervalı ərzində daxil olan tələblər sayının birdən az olmaması, 2) bilavasitə τ -dan sonrakı t intervalında daxil olan tələblərin sayının k -ya bərabər olmasının ehtimalıdır; $\omega(\tau) = 1$ hadisəsinin ehtimalıdır.

P. f.-nin tərifini A. Ya. Xinqin vermişdir və K. Palm (C. Palm) tərəfindən daxil olunmuş $\varphi_0(t)$ funksiyası anlayışını müəyyən mənada genişləndirmiş və dəqiqləşdirmişdir. P. f. stasionar axınların tədqiqində elverişli aparatdır. Xüsusilə də, *Palm axını* $\varphi_0(t)$ funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin olunur. Bax, *Palm düsturları* və bu məqalədəki əd.-ta.

PALM PAYLANMASI « Пальма распределение; Palm distribution » – bax, *Nöqtəvi proses, Nöqtəvi proses qrupu*.

PALM – XİNGİN TEOREMİ « Пальма – Хинчина теорема; Palm – Khinchin theorem » – kiçik intensivlikli stasionar ordinar axınlar cəminin ən sadə axınla yaxınlaşma mümkünlüyünü əsaslandıran *limit teoremidir* (bax, *Ordinarlığı, axının; Stasionarlığı, axının*). P. – X. t.-ində hökm olunur ki: $x_{nr}(t)$ uyğun λ_{nr} parametrlili asılı olmayan stasionar ordinar axınlarının sonlu cəmləri olan

$$x_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} x_{nr}(t)$$

proseslər ardıcılığının λ parametrlili *Puasson prosesinə* yığılması üçün hər bir qeyd olunmuş t qiymətində

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(0, u) du = \lambda t,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(1, u) du = 0$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruri və kifidir, burada $\varphi_{nr}(k, t)$, $k = 0, 1, \dots$ $x_{nr}(t)$ axını üçün *Palm funksiyaları* $\varphi_k(t)$ -lərdir.

P. – X. t. A. Ya. Xinqin tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur. K. Palm [3]-də bu teoremi ilk dəfə isbat etməyə səy göstərmişdir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [2] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [3] Palm C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189.

PALM – XİNÇİN TƏNLİKLƏRİ « Пальма – Хинчин уравнения; Palm – Khinchin equations » – bax. Nöqtəvi proses.

PARABOLİK İNTERPOLYASIYA « параболическая интерполяция; parabolic interpolation » – regression analizin ələ modelidir ki, regressiya funksiyalarının hamısı çoxhədlilərdir. $X = (X_1, \dots, X_m)$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ – təsadüfi vektorlar olsun və Y -in X üzrə regressiya tənliyinin

$$M\{Y_i | X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m\} = \sum_{j=1}^m a_j(t_i) x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

şəklində olduğunu fərz etmək üçün əsas olduğu nəzərdə tutulur, burada $a_1(t), \dots, a_m(t)$ – hər hansı t parametridən asılı verilmiş regressiya funksiyalarıdır. Əgər $a_1(t), \dots, a_m(t)$ çoxhədlilərdirsə, onda deyilir ki, P. i. vardır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., Наименьших квадратов метод, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982; [2] П р о х о р о в А. В., Регрессионный анализ, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984.

PARABOLİK REQRESSIYA « параболическая регрессия; parabolic regression », polynomial regression – ələ regressiya modelidir ki, bu modeldə bütün regressiya funksiyaları çoxhədlilərdir. Daha dəqiq, $X = (X_1, \dots, X_m)^T$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ və $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ qiymətlərini alan təsadüfi vektorlar olsun və fərz olunur ki,

$$M\{Y|X\} = f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$$

vardır (yəni $M\{Y_1|X\} = f_1(X), \dots, M\{Y_n|X\} = f_n(X)$ riyazi gözləmələri vardır). Əgər $M\{Y|X\} = f(X)$ vektorunun komponentləri məhz X vektorunun komponentlərinin çoxhədliləridirsə, onda regressiya parabolik regressiya adlanır. Məs., ən sadə halda, Y və X adi təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, P. r. tənliyi $y = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_p X^p$ şəklində olur, burada $\beta_0, \dots, \beta_p$ – regressiya əmsallarıdır. P. r.-nin xüsusi halı xətti regressiya dır. X vektoruna yeni komponentlər əlavə etməklə P. r.-ni həmişə xətti regressiya modelinə gətirmək mümkündür.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] С е б е р Д. Ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

PARAMETRİK MODEL; spektral sıxlığın identifikasiyası « параметрическая модель; идентификация спектральной плотности; parametric model spectral density identification » – verilən zaman sırasına uyğun spektral sıxlıq modelinin təyin olunması üçün aşağıdakı dörd mərhələdən ibarət prosedurdur: parametrik modelin tərtibinin seçilməsi və x_t , $t = 1, \dots, n$ müşahidələrinin məlum verilənləri üzrə bu modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi, spektral sıxlığın statistik qiymətinin hesablanması və bu statistik qiymət üçün etibarlı intervalların qurulması modeli kimi əksər hallarda spektral sıxlığı

$$f_{pq}(\lambda) = \frac{2\sigma_a^2 \left| 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-i2\pi\lambda_j} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j e^{-i2\pi\lambda_j} \right|^2}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2 \quad (*)$$

tipli uyğun qarışıq avtoregressiv – sürüşən orta prosesi (ARSO – proses) istifadə olunur, burada σ_a^2 , (p, q) tərtib ARSO modelinə uyğun yeniləşdirici ardıcılığın (bəyaz küyün) dispersiyası, φ_j , θ_j – uyğun olaraq avtoregressiya və sürüşən orta əmsallarıdır. λ – ölçüsüz tsiklik tezlikdir. Lakin, bəzən, daha ümumi – avtoregressiv – integrallanan sürüşən orta proses (ARISO – proses) modelindən də istifadə olunur, bu halda (*) spektral sıxlığı ilkin x_t sırasının d tərtibli bir sıra fərqlərinə uyğun olur (d – hər hansı müsbət ədəddir). Modelin tərtibinin seçilməsi p və q -nün və ya p , d , q kəmiyyətlərinin optimal qiymətlərinin seçilməsinə gətirilir (bax, Parametrik model; tərtibin seçilməsi). φ_j , θ_j və σ_a^2 parametrləri, adətən, ən kiçik kvadratlər metodu və ya maksimal doğruxaoxşarlıq metodlarının variantlarından biri əsasında qiymətləndirilir. (*)-da naməlum parametrlərin əsl qiymətləri əvəzinə onların statistik qiymətlərini yazdıqda, $f_{pq}(\lambda)$ spektral sıxlığı üçün $\hat{f}_{pq}(\lambda)$ statistik qiymətini almaq olur.

$q \neq 0$ olduqda $\hat{f}_{pq}(\lambda)$ statistik qiymətinin paylanması məlum deyildir, buna görə də, bu statistik qiymət üçün etibarlı intervalın qurulması məsələsi hələ də həll olunmamışdır. $q = 0$, n və p -nin böyük qiymətlərində $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ statistik qiyməti asimptotik olaraq normal qanunla paylanır, meyilsiz statistik qiymətdir və dispersiyası $(2/\nu)\hat{f}_{p0}^2(\lambda)$ -ya bərabərdir, burada $\nu = n/p$ (bax, məs., [1], [2]). Buna görə də, $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ üçün etibarlı interval birinci yaxınlaşmada spektral sıxlığın qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin qurulduğu kimi qurulur (bax, məs., [3]). $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ üçün dəqiq etibarlı sərhədlər (*)-nın sağ tərəfində məxrəcin statistik qiyməti üçün etibarlı sərhədlərin dəqiq qiymətləri üzrə hesablanır (bax, [4] – [6]). Spektral sıxlığın çox şiş maksimumları olduğu halda $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ statistik qiyməti üçün etibarlı intervalın eni sonsuz ola bilər.

Çoxölçülü zaman sırasının spektral sıxlığının parametrik statistik qiymətlərinin ehtimal paylanması məlum deyildir, lakin hesab etməyə əsas vardır ki, koherentlik funksiyalarının və tezlik xarakteristikalarının parametrik qiymətləndirilmə dəqiqliyi uyğun qeyri – parametrik statistik qiymətlərin dəqiqliyindən az deyildir (bax, [7] – [9]).

Əd.: [1] У и р ч е в Т., Bishop T., «Rev. Geophys. Space Phys.», 1975, v. 13, № 1, p. 183–200; [2] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [3] Б е н - д а т Д. Ж., П и р с о л А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [4] К о с л о в J., Jones R., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 3, p. 141–51; [5] Т о м а с е к L., «J. Time Series Analysis», 1987, v. 8, № 4, p. 469–77; [6] B u r s h t e i n D., W e i n s t e i n E., «IEEE Trans. on Acoustics», «Speech and

Signal Processing», 1987, v. 35, № 4, p. 504–10; 1988; v. 36, № 5, p. 826; [7] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1969, v. 21, № 1, p. 225–46; [8] Privalsky V., Protzenko I., Fogel G., «Proc. First World Congress of the Bernoulli Soc.», v. 2, Utrecht, 1987, p. 651–54; [9] Приваловский В. Е., «Водные ресурсы», 1989, № 4, с. 14–25.

PARAMETRİK MODEL; tərtibin seçilməsi « параметрическая модель; выбор порядка; order determination for a parametric model » – ARISO (p, d, q) parametrik modelinin $x_t, t = 1, \dots, n$ zaman sırasına uyğunlaşdırılmasında p, d, q parametrlərinin təyin edilməsidir; bu halda fərz olunur ki, baxılan sıra avtoregressiv-inteqrallanan sürüşən orta prosesi-nin (ARISO – proses; rus. АРПС – процесс – авторегрессион-проинтегрированного скользящего среднего процесс) realizasiyalarıdır və bu proses $(1-B)^d \varphi(B)(x_t - Mx_t) = \theta(B)a_t$ şəklində tənliklə təsvir olunur, burada a_t – orta qiymətləri sıfıra bərabər və dispersiyaları isə σ_a^2 olan asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ – avtoregressiya operatoru, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ – sürüşən orta operatoru, $Bx_1 = x_{t-1}$, $Mx_t, - x_t$ sırasının orta qiymətidir, p, d, q – ARISO – prosesin tərtibini (və ya tipini) təyin edən tam ədədlərdir və bunlar, adətən, müşahidələrin nəticələri üzrə təyin olunur (bax, ARISO – proses).

P. m.-də tərtibin seçilməsi üçün iki yanaşma vardır: cərimə funksiyasına malik kriterilərin köməyi ilə – modelin tərtibi üçün seçiləcək qiyməti cərimə funksiyasının minimumu təyin edir, ikinci yanaşma diaqnostik yoxlama metodlarına əsaslanır (Diaqnostik yoxlama Boks və Cenkinse görə).

Bu və ya digər kriterial funksiyaya istinad edən yanaşma, x_t -nin avtoregressiya prosesi olduğunu fərz edən sadə AR – modellərinin tərtibinin seçilməsi üçün daha çox istifadə olunur.

Proqnozun son qərar xətasının Akaike kriterisi –

$$FPE(p) = \frac{n+p+1}{n-p-1} \sigma_a^2(p)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\sigma_a^2(p)$ – Yul – Uoker tənlikləri-nin həllindən və ya digər üsulla alınan, AP(p) modeli üçün σ_a^2 dispersiyasının statistik qiymətidir (bax, Boks – Cenkins metodu). Əgər bu sıra mərkəzlənmirsə, onda kəsrin surətindəki və məxrəcindəki 1, Parzen CAT kriterisində olduğu kimi götürülməməlidir (bax, aşağı). Kriteri x_t ardıcılığının biraddımlı xətti eks-trapolyasiyası xətasının kvadratının orta qiymətinin minimizasiyasına əsaslanır. FPE kəmiyyəti asimptotik olaraq spektral sıxlığın inteqral nisbi kvadratik orta qiymətləndirmə xətası ilə xətti bağlıdır. Kriteri avtoregressiya tərtibini asimptotik olaraq yüksəldir, lakin n -in kiçik qiymətlərində və mürəkkəb spektrdə tərtibin kiçilməsi ehtimalının çox olmamasına baxmayaraq, tərtibin kiçilməsi mümkündür.

FPE kriterilərindən biri də Şibata kriterisidir (bax, [2], burada ikiölçülülük və üçölçülülük sıralar üçün bir sıra kriterilərə baxılmışdır):

$$S_n(p) = (N + 2p) \hat{\sigma}_p^2, \quad p = 1, \dots, P,$$

burada

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=p}^{n+1} (x_{t+1} - \hat{\varphi}_1 x_t - \dots - \hat{\varphi}_p x_{t-p+1}),$$

$N = n - P$, $\hat{\varphi}_j$ – avtoregression əmsallarının statistik qiymətləridir. $S_n(p)$ -nin ifadəsində N -i n ilə əvəz etmək olar.

Ümumiləşmiş Şibata kriterisi (bax, [3]) aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$FPE_\alpha(p) = n \hat{\sigma}_p^2 + \alpha p \tilde{\sigma}_p^2$$

və ya

$$GFPE_\alpha(p) = n \hat{\sigma}_p^2 + \tilde{\sigma}_p^2 \sum_{j=1}^p \alpha_j,$$

burada $\tilde{\sigma}_p = [n/(n-P)] \hat{\sigma}_p^2$, α və α_j -nin qiymətləri xüsusi yolla seçilir.

Parzen avtoregression ötürücü funksiyaya kriterisi (bax, [4]) –

$$CAT(p) = \sum_{j=0}^p \frac{n-j-1}{n} \sigma_a^{-2}(j) - \frac{n-p-1}{n} \sigma_a^{-2}(p)$$

tutarlı kriteri deyildir, tərtibin statistik qiymətinin paylanması namə-lumdur. Kriteri inteqral nisbi kvadratik orta xətanın minimizasiya şərtlərindən alınmışdır.

p və q tərtiblərinin seçilməsi üçün də kriterilər qrupu istifadə edilir; bu kriterilər aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$AIC_\alpha(p, q) = \ln \sigma_a^2(p, q) + \alpha(p+q)/n,$$

burada α n -dən asılı ola bilər (bax, [2]). Bu qrupa AIC Akaike kriterisi ($\alpha=2$), BIC Şvarts–Ris-sanen kriterisi ($\alpha = \ln n$) və Hennen–Kuinn Φ kriterisi ($\alpha = c \ln n, c > 2$) daxildir. Ümumi halda, bu kriterilərdən heç biri tutarlı kriteri deyildir, lakin $d=0$ olduqda $\Phi(p, 0)$ və $BIC(p, 0)$ tutarlı kriterilərdir və $d \neq 0$ olduqda isə zəif tutarlı kriterilərdir (bax, [5]).

Qeyd olunan kriterilər bir sıra münasibətlərlə bir-birilə əlaqə-lidirlər (bax, [2], [4]):

$$FPE(p) = S_n(p) + o(n^{-1}),$$

$$\ln FPE(p) = AIC(p, 0) + 2/n + o(n^{-2}),$$

$$CAT(p) \leq \exp \{-AIC(p, 0)\},$$

$$\hat{p}(BIC) \leq \hat{p}(AIC), \quad n \geq 8,$$

$$\hat{p}(BIC) \leq \hat{p}(\Phi),$$

$$\hat{p}(\Phi) \leq \hat{p}(AIC), \quad n \geq 16,$$

burada $\hat{p}(\cdot)$ – uyğun kriterinin $(p+q)$ cəm tərtibinin sta-tistik qiymətidir. $(p+q) > n/10$ şərti ödənilən model məsləhət bilinmir. $p \neq 0$, $q \neq 0$ və xüsusilə də, z kompleks müstəvi-sində $\varphi(z) = 0$ tənliyinin vahid radiuslu daireyə yaxın kökləri-nin olduğu halda səhv model seçilməsindən ehtiyatlanmaq lazımdır (bax, məs., [6]); belə hallarda Boks və Cenkins diaq-nostik yoxlamasına müraciət etmək məsləhətdir. ARISO(p, q)

P. m.-nin tertibinin seçilmesi üçün AIC_α tip kriterilerin zaman-dan asılı dispersiya halında istifadəsinə [7]-də baxılmışdır. $\alpha \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\alpha/n \rightarrow 0$ olarsa, tertibin statistik qiyməti tutarlı statistik qiymət olur. Bu kriterilər, həmçinin, avtoregression əmsallarının hamısının sıfırdan fərqli olmadığı natamam $p < P$ tertib $AP(p)$ avtoregression prosesinin (AP – proses) P. m.-nin tertibinin seçilməsi üçün də tətbiq oluna bilər (bax, [8]).

$q \neq 0$ olduqda P. m.-nin tertibinin seçilməsi problemi olduqca müəkkəbleşir və ümumi halda, xüsusilə də, çoxölçülü halda tertibin seçilməsini [o cümlədən, fərq operatoru $(1-B)^d$ -nin], maksimal doğrulaoxşarlıq metodu ilə parametrlərin qiymətləndirilməsini və diaqnostik yoxlamaları daxil olan iterativ prosedura müraciət etmək məqsəduyğundur (bax, [9]).

Sürüşən orta prosesi (SO – prosesi) halında P. m.-nin tertibinin seçilməsi üçün aşağıdakı qayda təklif olunmuşdur (bax, [10]): hər bir $q = 1, \dots, Q$ qiyməti üçün $AP(p)$, $p \geq Q$ modelinə uyğun $f_{p,0}(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiyməti (bax, *Parametrik model*; spektral sıxlığının identifikasiyası) və $r_{ip}(k) = Ri_p(k)/Ri_p(0)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm p$ tərs korrelyasion funksiyası qurulur, burada $Ri_p(k)$, $-f_{p,0}^{-1}(\lambda)$ funksiyasının tərs Furiye çevirməsidir.

$$FPER_\alpha(q) = \sigma_p^2(q)(1 + \alpha q/n), \alpha > 1$$

kriterisini minimallaşdıran model seçilir, burada

$$\sigma_p^2(q) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} I^{(n)}(\lambda_j) \left| \sum_{k=0}^q \beta_{pq}(k) e^{-i2\pi\lambda_j k} \right|^2,$$

$$I^{(n)}(\lambda_j) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-i2\pi\lambda_j t} \right|^2,$$

$\beta_{pq}(j)$ isə

$$\sum_{j=0}^q \beta_{pq}(j) r_{ip}(k-j) = 0, \quad k = 1, \dots, q$$

tenliklər sisteminin həllidir.

$\alpha = \ln n$ olduqda $n = 50, 100$ və 200 qiymətlərində SO(2) halında ən yaxşı nəticələr alınır. Bu yanaşma halında SO – prosesi modeli sırasına uyğunlaşdırma zəruri deyildir, belə ki, bu böyük hesablama xərcləri ilə bağlıdır, identifikasiya olunmuş proses isə hökmən ilk vəziyyətinə qayıdan proses olacaqdır.

P. m.-nin tertibinin seçilməsi və onun parametrlərinin (xüsusən də, bucaq metodu və ümumiləşmiş seçimi korrelyasiyanın; bax, [11], [12]) əvvəlcədən qiymətləndirilməsində kriterilər qrupu, $k = p + q + 1$ olduqda $r(k)$ korrelyasion funksiyasının statistik qiyməti ilə ARSO(p, q) modeli: $y_{pq} = r(p + q + 1) -$

$$- \sum_{j=1}^p \phi_j r(p + q + 1 - j)$$

arasındakı fərğin sıfıra bərabər olması hipotezinin yoxlanılmasına əsaslanır, burada ϕ_j – avtoregression əmsallardır.

Ən kiçik kanonik korrelyasiya metodu (bax, [12]) fərq operatorunun seçilməsinə, (P, Q)-nün maksimal tertibinin seçilməsinə və avtoregression əmsallarının tutarlı statistik qiymətlərini almağa imkan verir.

$p \neq 0$, $q \neq 0$ halında P. m.-nin tertibini qəti surətdə seçmək üçün Boks və Cenkins diaqnostik yoxlamasına da müxtəlif modelləri yoxlamaqla müraciət etmək məsləhət görülür.

Əd.: [1] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1971, v. 23, № 2, p. 163–80; [2] Lutkepohl H., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 1, p. 35–52; [3] Shibata R., «Biometrika», 1984, v. 71, № 1, p. 43–49; [4] Parzen E., в кн.: Multivariate Analysis IV, Amst., 1977, p. 283–95; [5] Tsay R., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 4, p. 1425–33; [6] Приваловский В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), 1985; [7] Jostheim D., Paulsen J., «J. Time Series Analysis», 1982, v. 3, № 4, p. 265–82; [8] Haggan V., Oyetunji O., «J. Time Series Analysis», 1984, v. 5, № 2, p. 103–13; [9] Tiao G., Box G., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1981, v. 76, № 376, p. 802–16; [10] Bhansali R., «J. Time Series Analysis», 1983, v. 4, № 3, p. 137–61; [11] Glasbey C., «Technometrics», 1982, v. 24, № 3, p. 223–28; [12] Tsay R., Tiao C., «Biometrika», 1985, v. 72, № 2, p. 299–315.

***PARAMETRİK ÖLÇÜSÜ, AXININ «параметрическая мера потока; parametric measure of flow» – bax, Təsadüfi axın.**

PARAMETRİK SPEKTRAL STATİSTİK QIYMƏT

«параметрическая спектральная оценка; parametric spectral estimator» – hər hansı qeyd olunmuş $f(\lambda)$ parametrik modelinə uyğun [yeni $f(\lambda)$ funksiyasının sonlu sayda parametrlərlə təyin olunan müəyyən spektral sıxlıqlar ailəsinə aid olması hipotezində] stasionar təsadüfi prosesin *spektral sıxlığı* $f(\lambda)$ -nın statistik qiymətidir. P. s. s. q. tapılarkən proses üzərində aparılan müşahidənin verilənləri yalnız modelin naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur, yeni spektral sıxlığın qiymətləndirilməsi statistik məsələsinə gətirilir. Diskret zamanlı $\zeta(t)$ prosesləri halında praktikiada ən geniş surətdə istifadə olunan P. s. s. q. maksimal entropiyanın ele spektral statistik qiymətidir ki, bu statistik qiymət

üçün fərz olunur ki, $[f(\lambda)]^{-1}$ funksiyası müəyyən triqonometrik çoxhədlinin kvadratıdır və bu çoxhədlinin tertibi, adətən, əvvəlcədən müşahidələrin verilənlərinə görə qiymətləndirilir. Diskret zamanlı proseslərin P. s. s. q.-nin daha ümumi sinfi, tətbiqi məsələlərdə nisbətən tez-tez tətbiq olunan ARSO – statistik qiymətləri (avtoregressiv – sürüşən orta statistik qiymətləri) sinfidir, bu da o fərziyyəyə əsaslanır ki, araşdırılan stasionar proses qarışıq avtoregressiv – sürüşən orta proseslərindəndir (ARSO – prosesləridən), odur ki, $f(\lambda)$ iki triqonometrik çoxhədlinin modullarının kvadratlının nisbətidir. $f(\lambda)$ spektral sıxlığının optimal ARSO – statistik qiymətlərinin tapılması məsələsi təbii olaraq iki hissəyə ayrılır: – əvvəlcə müşahidələrin verilənləri $f(\lambda)$ -nın ifadəsində surət və məxrəcdəki çoxhədlilərin tertibləri p və q -nün münasib qiymətlərinin seçilməsində istifadə olunur (bax, *Parametrik model*; tertibin seçilməsi), sonra isə bu çoxhədlilərin əmsalların qiymətləndirilir, lakin bu zaman fərz olunur ki, bunların tertibləri məlumdur.

Əd.: [1] Non-linear methods of spectral analysis, 2 ed., B. – [a. o.], 1983; [2] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51; [3] Методы спектрального оценивания, «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9.

***PARÇALANMA METODU «расщепления метод; method of splitting» – bax, Boyskaut bıçağı metodu.**

PARÇALAYICI AN « расщепляющий момент; splitting time »

– aşağıdaki əsas xassəyə malik olan təsadüfi τ anlarının müxtəlif siniflərinin işarə olunmasında istifadə olunan termindir: hər hansı verilmiş ζ_t , $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin «gələcəyi» τ anından sonra, prosesin τ anındakı «indiki» vəziyyəti məlum olduğu halda, onun τ anına qədərki «keçmişindən» asılı deyildir (bax, *Markov xassəsi*). Prosesin «indiki» vəziyyəti, adətən, τ və ζ_τ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrlə təsvir olunur: lakin digər təsvirlər (tərflər) də vardır (məs., bu σ cəbr τ -nun infinitezimal ətrafında prosesin nə cür cərəyan etməsi haqqında əlavə informasiya ilə də tamamlana bilər). Əgər ζ_t , $t \geq 0$ ciddi Markov prosesi olarsa, onda bu prosese uyğun P. a. -lar sinfi Markov anları sinfini öz daxilinə alır və ümumiyyətlə, bu sinifdən (sonuncudan) genişdir. Məs., birölçülü Viner prosesinin $[0, 1]$ -də minimum qiymətini aldığı an Markov anı deyil, məhz parçalayıcıdır.

[1]-də ilk dəfə baxılmış P. a. hərərəfli öyrənilmək üçün obyekt olmuşdur (bax, [2]). Bunların bezi analoqları təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində tətbiq olunmağa başlanmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Jacobsen M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1974, Bd 30, H. 1, S. 27–44; [2] Gettoor R. K., Sharpe M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 55, H. 3, S. 313–304; [3] Евстигнев И. В., Овсеич А. Н., Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, в. 2, с. 433–38.

PARETO PAYLANMASI « Парето распределение; Pareto distribution »

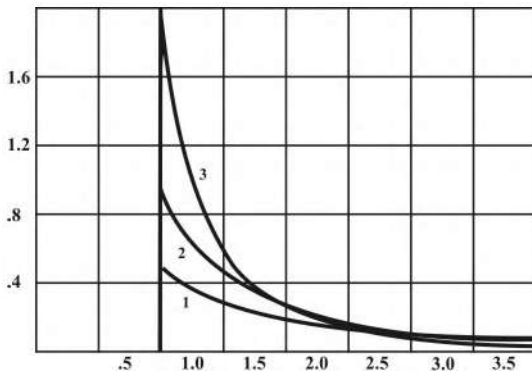
– paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = (\alpha/x_0)(x_0/x)^{\alpha+1}$$

olan, (x_0, ∞) -də toplanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır* (bax, şəkil), burada $x_0 > 0$ və $\alpha > 0$ parametrlərdir. Paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^\alpha, \quad x \in (x_0, \infty)$$

düsturu ilə təyin olunur.



Pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası: $x_0 = 1$ və (1) $\alpha = 0.5$;

(2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha = 2$.

Bu «kəsilmiş» anlamda P. p. $\mu = 1$ halı üçün paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\frac{1}{B(\mu, \alpha)} \frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{\mu+\alpha}}, \quad \mu, \alpha > 0, \quad 0 < x < \infty$$

714 PARETO

olan 2-ci növ *beta – paylanmalar* ailəsində asılı olmayan bir paylanma kimi seçilir. İxtiyari qeyd olunmuş x_0 qiymətində P. p. $x = x_0/y$ çevirməsi vasitəsilə 1-ci növ *beta – paylanmasına* gətirilir. *Pirson paylanmaları* sisteminde P. p. VI və XI tip paylanmalara aiddir. P. p.-nin riyazi gözləməsi $\alpha > 1$ olduqda sonludur və $\alpha x_0/(\alpha - 1)$ -ə bərabərdir; $\alpha > 2$ olduqda dispersiya sonludur və $\alpha x_0^2/((\alpha - 1)(\alpha - 2))$ -yə, median isə $2^{1/\alpha} x_0$ -a bərabərdir.

P. p. iqtisadi statistikanın müxtəlif məsələlərində V. Paretonun (W. Pareto, 1987) gəlirlərin paylanması məsələləri ilə bağlı işlərindən başlanmaqla yayılmışdır. Hesab olunurdu ki, P. p. müəyyən həddi aşan gəlirlərin paylanmasını olduqca yaxşı təsvir edir, bu isə o hal üçün anlaşılır ki, bu paylanmanın kəsik paylanmasının tertibi $x \rightarrow \infty$ olduqda $1/x^\alpha$ olsun.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

PARETO PLANLAR ÇOXLUĞU « Парето множество планов; Pareto set of designs »

– *regression eksperiment* üçün $\{\Phi_\alpha\}$ sistemi üzrə optimallik kriterilərinin ele planlar çoxluğuudur ki, bunlar üçün $\{\Phi_\alpha\}$ – dominar kriterilər yoxdur. Əgər bütün α -lar üçün $\Phi_\alpha(\xi) \leq \Phi_\alpha(\xi')$ olarsa, bərabərsizlik eynilik deyilsə, $\xi \in \{\Phi_\alpha\}$ planı ξ' planı üçün *dominardır*, deyilir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

PARZEN KORRELYASION PƏNCƏRƏSİ « Парзена корреляционное окно; Parzen lag window »

– bax, *Korrelyasion pəncərə*.

PARZEN KRİTERİSİ

avtoregressiv ötürücü funksiyanın « *Парзена критерий* авторегрессионной передаточной функции; *Parzen criterion of autoregressive transfer function*; CAT » – bax, *Parametrik model*; tertibin seçilməsi.

PARZEN STATİSTİK QIYMƏTİ « Парзена оценка; Parzen estimator »

– bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri-parametrik statistik qiymət.

PASKAL PAYLANMASI « Паскаля распределение; Pascal distribution »

– tamqiymətli $k = 0, 1, \dots$ qiymətlərini

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1-p)^k,$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır; $0 < p < 1$, $r > 0$ – tam ədəddir. P. p. *mənfii binomial paylanmadır*.

PASSİV EKSPERİMENT « пассивный эксперимент; passive experiment »

– əvvəlcədən nəzərdə tutulmayan ele ölçmələr toplusudur ki, bu ölçmələr, adətən, analizi çətinləşdirir və alınacaq informasiyanın azlığı ilə seçiyəvidir (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*).

PATNAYK ÇEVİRMƏSİ « Патнайк преобразование; Patnaik transformation »

– mərkəzi olmayan χ^2 və F – paylanmalarının uyğun mərkəzi paylanmalarla approksimasiyasıdır. $\chi_n^2(a)$ – mərkəzi olmayan və sərbəstlik dərəcəsi sayı

n -ə bərabər χ^2 paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsun; a qeyri – mərkəzlilik parametridir və $\chi_n^2 = \chi_n^2(0)$.

Əgər $k = (n+a)^2/(n+2a)$ olarsa, onda

$$\chi_n^2(a) \approx [(n+2a)/(n+a)]\chi_k^2$$

təqribi bərabərliyi doğrudur və bu təqribi bərabərlik sağ və sol tərəflərin riyazi gözləmə və dispersiyalarının bərabərliyi mənasında anlaşılır. Onda $a \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\chi_n^2(a) < x\} = P\{\chi_k^2 < x\} + O(a^{-1/2}),$$

$a \rightarrow 0$ olduqda isə

$$P\{\chi_n^2(a) < x\} = P\{\chi_k^2 < x\} + O(a^2).$$

Əgər $\chi_n^2(a)$ və χ_m^2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə və

$$F_{n,m}(a) = ((\chi_n^2(a)/n)/(\chi_m^2/m))$$

olarsa, onda

$$F_{n,m}(a) \approx [(n+a)/n]F_{k,m}(0).$$

Əd.: [1] Patnaik P. B., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 202–32.

PAYERLS ŞƏRTİ «Пайерлса условие; Peierls condition» – bax, Pirogov – Sinai teoremi.

PAYERLS TƏNLİYİ «Пайерлса уравнение; Peierls equation» – stasionar xətti $Af = g$ kinetik köçürmə tənliyindən keçirilən hissəciklərin trayektoriyalarının kəsilməzlik hissələri üzrə inteqrallama yolu ilə alınan inteqral tənlikdir. $A = D + \Lambda - K$, D – A operatorunun köçürmə tənliyində kəsilməz hərəkətin differensial operatoru D -yə, köçürmə prosesinin stoxastik differensial təsvirini verən $\lambda(x)$ mühiti ilə hissəciklərin toqquşma tezliyinə hasilinin zərbə operatoru Λ -ya və nüvəsi $\mathcal{H}(x', x)$ olan sıçrayışın inteqral operatoru K -ya ayrılışı olsun (bax, [4]). Əgər $\mathfrak{G}(x', x)$ funksiyası $D + \Lambda$ operatorunun Qrin funksiyasıdırsa, yəni

$$[(D + \Lambda)^{-1}h](x) = \int h(x') \mathfrak{G}(x', x) dx'$$

olarsa, onda $h = Kf$ sıxlığı üçün P. t. (ümumiləşmiş) $B = K(D + \Lambda)^{-1}$ inteqral operatoru ilə

$$\mathfrak{B}(x', x) = \int \mathfrak{G}(x', x) \mathcal{H}(y, x) dy$$

nüvəsi ilə $h = B(h + g)$ şəklində yazılır. Bu zaman $f = (D + \Lambda)^{-1}(h + g)$, $0 < t < \tau$, $x(t)$ köçürməsinin trayektoriyasının, ümumiyyətlə, təsadüfi olan kəsilməzlik intervalı olsun. P. t. $x(+0)$ və $x(\tau+0)$ vəziyyətlərini əlaqələndirir. $\mathcal{H}(y, x)$ nüvəsi $x \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ nöqtəsinin bəzi əyrixətli koordinatları yalnız $\xi^1, \dots, \xi^k$ hissəsindən asılı olduqda $h(x) = h(\xi^1, \dots, \xi^k)$ üçün P. t.-ne keçid məsələsinin dim. – ölçüsünü azaldır. P. t. ilk dəfə [1]-də bircins mühitdə və izotrop səpəlmədə v sürətilə bərabərsürətli köçürmə halında alınmışdır; yalnız fəza koordinatları r -dən asılı $\mathfrak{B}$ nüvəsi

$$|r' - r|^{-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{v} |r' - r|\right)$$

kəmiyyətinə mütənəsbidir.

P. t.-ndə operatorun daha yaxşı ayrılışına və qeyri – stasionar köçürmə konstruksiyaya ümumiləşməsinə də baxmaq olar.

Əd.: [1] Peierls R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1939, v. 35, p. 610–15; [2] Дэвисон Р., Теория переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1960; [3] Владимиров В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61, с. 1–158; [4] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме излучений, М., 1967, с. 25–52.

PAYLANMA «распределение; distribution» – ehtimal ölçüsüdür; bax, Paylanma(sı) ehtimalın.

PAYLANMA, bircins fəzada ehtimal paylanması «распределение вероятностей на однородном пространстве; probability distribution on a homogeneous space» – topoloji M fəzasında ehtimal ölçüsüdür; bu fəzada kəsilməz və tranzitiv hər hansı topoloji G qrupunun təsir etdiyi fərz olunur.

Əgər H hər hansı qeyd olunmuş $x_0 \in M$ nöqtəsinin stabilizatorudursa, yəni $H = \{g \in G : gx_0 = x_0\}$ olarsa, onda M fəzası qapalı H altqrupu üzrə G qrupunun sol birləşik siniflərinin fəzası G/H -a izomorfdur. Burada yalnız o hala baxılacaqdır ki, G Li qrupudur, H onun kompakt altqrupudur; onda $M \approx G/H$ bircins fəzası təbii olaraq analitik çoxobrazlının strukturuna malik olur. M fəzasında Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{M}^1(M)$ -dən hər bir ölçüyə H qrupunun sağ təsirinə nəzərən invariant və G qrupunda bütün Borel ehtimal ölçülərinin $\mathcal{M}^1(G/H)$ çoxluğundan olan ehtimal ölçüsünü qarşılıqlı birqiyəmətlilik olaraq qarşı qoymaq olar. $\mathcal{M}^1(M)$ -dən M -də (və ya, ekvivalent olaraq, G -də) H qrupunun sol təsirinə nəzərən invariant olan M -dəki bütün ehtimal ölçülərinin $\mathcal{M}_0^1(M)$ altsinfini ayırmaq olur. İxtiyari $x \in M$ nöqtəsi və ixtiyari $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ üçün $\mu_x(E) = \mu(g^{-1}E)$ qaydası üzrə μ_x ölçüsü təyin etmək olar. g , x_0 nöqtəsini x -ə keçirən, G qrupunun elementidir. μ ölçüsünün sol invariantlığı xassəsinə görə μ_x ölçüsü g elementinin konkret seçilməsindən asılı olmur. İki μ və $\nu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ ölçüləri üçün

$$\mu * \nu(E) = \int_M \nu_x(E) \mu(dx)$$

qaydası üzrə $\mu * \nu$ kompozisiyasını təyin etmək olar, $E \subset M$. Bu qayda ilə təyin olunmuş $\mu * \nu$ ölçüsü yenə də $\mathcal{M}_0^1(M)$ -in elementi olacaqdır. Kompozisiya əməlinə nəzərən $\mathcal{M}_0^1(M)$ çoxluğu δ_{x_0} vahidli və zəif yığılma topologiyalı topoloji semi – qrup olacaqdır (bax, [1]).

Burada, artıq G -nin sonlu mərkəzli, qeyri – kompakt əlaqəli semisadə Li qrupu olduğu fərz olunur, $H = K$ G -nin maksimal

kompakt altqrupudur. Əgər $g \in G$, $k \in K$ üçün $\varphi(gk) = \varphi(kg) = \varphi(g)$ olarsa, G qrupunda φ funksiyası K – sferik (və ya sadəcə sferik) funksiya adlanır. Beləliklə, φ faktiki olaraq M –də təyin olunmuşdur. Əgər ω_k K qrupunda normalmış Haar ölçüsü və $\varphi(e) = 1$ olduqda

$$\int_K \varphi(xky) \omega_K(dk) = \varphi(x)\varphi(y)$$

bərabərliyi ödənilərsə, sferik φ funksiyası elementar sferik funksiya adlanır. $\{\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ müsbət müəyyən, elementar sferik funksiyaların çoxluğu olsun (ətraflı, bax, [2]). Her bir belə funksiya $\varphi_\lambda(e) = 1$, $\varphi_\lambda(g^{-1}) = \overline{\varphi_\lambda(g)}$, $|\varphi_\lambda(g)| \leq 1$ xassələrinə malikdir. $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ ölçüsü n – nün Furrye çevirməsi

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_M \varphi_\lambda(x) \mu(dx), \quad \lambda \in \Lambda$$

integralına deyilir. $\hat{\mu}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ funksiyası $\mathbb{R}^d$ –də adi xarakteristik funksiyanın bütün xassələrini ödəyir. Doğrudan da:

1) $\mu^* \nu(\lambda) = \hat{\mu}(\lambda) \hat{\nu}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$; 2) əgər $\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\nu}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ olarsa, onda $\mu = \nu$; 3) μ_n μ –yə zəif yığılır (μ_n , $n \geq 1$) və $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$, yalnız və yalnız, $\hat{\mu}_n(\lambda) \rightarrow \hat{\mu}(\lambda)$, $n \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Lambda$ münasibəti ödənildikdə doğrudur.

$\mathcal{M}_0^1(M)$ çoxluğundan ölçülər üçün kompozisiya əməli təyin olunduğundan, sonsuz bölünən paylanma anlayışı qrupda verildiyinə analoji adı qayda ilə təyin olunur (bax, *Sonsuz bölünən paylanma* qrupda). Əgər $\mu \in \mathcal{M}_0^1$ sonsuz bölünən ölçüdürsə, onda bütün $\lambda \in \Lambda$ üçün $\hat{\mu}(\lambda) \neq 0$. $\mathcal{M}_0^1(M)$ –dən olan bütün sonsuz bölünən paylanmaların çoxluğu zəif qapalıdır. Sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyası üçün *Levi – Xinqin kanonik ifadəsinin* tam analoqu vardır. Əgər $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ sonsuz bölünəndirsə, onda onun xarakteristik funksiyası aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\hat{\mu}(\lambda) = \exp \left\{ p_D(\lambda) - \int_{|x|>0} [1 - \varphi_\lambda(x)] L(dx) \right\},$$

$p_D(\lambda)$, M –də hər hansı 2-ci tərtib elliptik differensial operator, həm də K altqrupunun təsirinə nəzərən invariant olan və konstantları sıfıra çevirən D operatorunun məxsusi funksiyası φ_λ –nin uyğun məxsusi qiymətidir, L , M –də sferik ölçüdür:

$$\int_M |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} L(dx) < \infty,$$

$|x|$, M –də x_0 –dan x –ə qədər məsafə – G –də Karton – Killing formasının köməyiylə doğrurulmuş ölçüdür.

Bax, *Hiperqrup*.

Əd.: [1] Hunt G. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 81, № 2, p. 264–93; [2] Gangoli R., «Acta math.», 1964, t. 111, p. 213–46.

716 PAYLANMA

PAYLANMA(sı) еhtimalın «**распределение вероятностей / вероятностное распределение**»

probability **distribution** – ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın əsas anlayışlarından biridir. Müasir yanaşmada araşdırılan stoxastik eksperimentin riyazi modeli kimi uyğun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası götürülür; Ω – elementar hadisələr

fəzası, $\mathcal{A}$, – Ω –nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr.

P , – $\mathcal{A}$ –də təyin olunmuş $P(\Omega) = 1$ şərtini ödəyən ölçüdür (ehtimal ölçüsü). $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında ixtiyari belə ölçü

ehtimal paylanması adlanır (bax, [1]). Bu tərifin A. N. Kolmoqorov aksiomatikasının əsası olmasına baxmayaraq (1933), ehtimal nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafında olduqca ümumi olduğundan, bezi «patoloji» halları istisna etmək məqsədilə daha məhdud digər təriflə əvəz olunmuşdur: yeni tərif ehtimal ölçüsü P –nin «tam ölçü» olması tələbi ilə verilir (bax, [2]). Funksional fəzalarda ehtimal P –indən, adətən, onun üçün müəyyən reqlulyarlıq xassəsinin ödənilməsi tələb olunur; bu xassə separabellik kimi və digər formalarda da ifadə oluna bilər (bax, *Separabel proses* və [4]).

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın konkret məsələlərində təsadüf olunan ehtimal P –ları o qədər də çox deyildir. Belə paylanmalar çoxdan məlum olub, əsas ehtimal sxemləri ilə əlaqədardır (bax, [5]). Bu paylanmalar ya təsadüfi kəmiyyətin aldığı ayrı-ayrı qiymətlərinin ehtimalları ilə (bax, *Diskret paylanma*) və ya paylanmanın sıxlıq funksiyaları (bax, *Kəsilməz paylanma*) ilə təyin olunur.

Zeruri olduqda bunlar üçün cədvəllər tərtib olunmuşdur (bax, [6]).

Bu əsas ehtimal P –larından bəziləri təkrarlanan asılı olmayan sınaqlarla əlaqədardır (bax, *Binomial paylanma*, *Həndəsi paylanma*, *Polinomial paylanma*), bəziləri isə bu ehtimal sxemində uyğun sınaqlar sayını sonsuz olaraq artırıdığında limit yaxınlaşmalarla alınmış ehtimal P –larıdır (bax, *Normal paylanma*, *Puasson paylanma*, *Arksinus paylanması*). Lakin bu limit paylanmalar deqiq paylanmalar kimi, məs., təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində (bax, *Viner prosesi*, *Puasson prosesi*), bezi xarakterizasiya teoremlərindəki tənliklərin həlləri kimi də (bax, *Normal paylanma*, *Üstlü paylanma*) yaranır.

Müntəzəm paylanma, adətən, eksperimentin nəticələrinin bərabərlikliyinin riyazi ifadəsi kimi qəbul edilərək, limit yaxınlaşması kimi də alınır. Yuxarıda qeyd olunan əsas ehtimal P –larından baxılan təsadüfi kəmiyyətlərin funksional çevirmələri vasitəsilə digər ehtimal P –ları alınır. Məs., riyazi statistikada normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən x_i – *kvadrat paylanma*, qeyri – *mərkəzi x_i – kvadrat paylanma*, *Styudent paylanması*, *Fişer F – paylanması* kimi paylanmalar alınmışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın asimptotik metodlarının inkişafı ilə əlaqədar mühüm P –sinifləri yaranmışdır (bax, *Limit teoremləri*, *Dayanıqlı paylanma*, *Sonsuz bölünən paylanma*, *Omeqa – kvadrat paylanma*, ω^2 – *paylanma*).

Nəzəri və tətbiqi nöqtəyi – nəzərdən paylanmaların yaxınlığı anlayışı mühüm əhəmiyyətə malikdir. $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında bütün ehtimal P –lannın çoxluğu müxtəlif üsullarla topoloji fəzaya çevrilə bilər. Bu zaman ehtimal P –lannın zəif yığılması əsas rol oynayır (bax, *Yığılma(sı)* paylanmaların). Birölcülülük və sonluölcülülük hallarda ehtimal P –lannın yığılmasını öyrənmək üçün əsas vasitə kimi *xarakteristik funksiyalar* aparatı tətbiq edilir. Bir çox hallarda ehtimal P –ni *ehtimal sıxlığı* və ya *paylanma funksiyası* vasitəsilə tam menada təyin etmək əvəzinə onu təsadüfi kəmiyyətin bezi ədədi xarakteristikalarının verilməsi ilə təyin etmək olur. Bunlardan, ən çox istifadə olunanlar – *riyazi gözləmə* (orta qiymət), *dispersiya*, *moda*, *median*, birölcülülük halda moment kimi ədədi xarakteristikalardır. Çoxölcülülük paylanmalarının

ededi karakteristikaları ilə *Korrelasiya, Reqrressiya* məqalələrində tanış olmaq olar.

Ehtimal P.-nin statistik analoqu *Empirik paylanmadır*. Empirik P. və bu paylanmanın karakteristikalarından nəzəri P. və onun karakteristikaları haqqında təxmini təsəvvür üçün istifadə olunur (bax, *Statistik qiymet*). Empirik P. ilə hipotetik P.-nin uzlaşma dərəcəsini ölçmək məqsədilə mövcud üsullarla tanış olmaq üçün *Statistik yoxlanılması hipotezlerin* məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949; [3] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Limit distributions for sums of independent random variables, Camb. (Mass.), 1954; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Proc. fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, v. 2, Berk. - Los Ang., 1961, p. 403-19; [5] Феллер В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1-2, М., 1984; [6] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [7] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [8] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [9] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., Мир, 1969; [10] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, 1979.

PAYLANMA(sı) empirik kovariasion matrisin məxsusi ədədlərinin və məxsusi vektorlarının «*распределение собственных чисел и собственных векторов эмпирической ковариационной матрицы; distribution of eigenvalues and eigenvectors of empirical covariance matrix*» - $N(a, \Xi)$ normal qanunu ilə paylanmış, m -ölçülü təsadüfi vektor üzərində aparılan asılı olmayan x_i , $i = 1, \dots, n$, $n > m$ müşahidələri üzrə alınmış empirik kovariasion

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})^T, \quad \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

matrisinin məxsusi ədədləri $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ və bunlara uyğun $\theta_1, \dots, \theta_m$, θ_{1i} məxsusi vektorlarının birgə *paylanma funksiyasıdır*. Bu birgə paylanma funksiyaları ortoqonal m tertib U matrislər qrupunda verilmiş şərti Haar ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir və bu şərtlə ki. $U_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, m$ və $y_1 > \dots > y_n > 0$ çoxluğunda verilən Lebeq ölçülərinin sıxlığı

$$\gamma_m \prod_{i=1}^m y_i^{(n-m-2)/2} \exp\left(-\text{tr} \sum_m^{(n-1)/2} U_m Y U_m^T / 2\right) \prod_{i < j} (y_i - y_j)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\gamma_m = \pi^{m/2} 2^{-(n-1)m/2} \det \sum_m^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^m \left(\Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \right)^{-1}.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

PAYLANMA kvazisimmetrik «*распределение квазисимметричное; quasi-symmetric distribution*» - bax, *Kvazisimmetrik paylanma*.

PAYLANMA(sı) təsadüfi çoxluğun «*распределение случайного множества; distribution of a random set*» - bax, *Müşayiətedici funksional*.

PAYLANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətin «*распределение случайной величины; distribution of random variable*», $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanması* və ya *ehtimal paylanması* - $\mathbb{R}$ -də $\mathcal{B}$ σ -meydanında təyin olunmuş mənfii olmayan

$$P_\xi(\mathbb{B}) = P\{\omega: \xi(\omega) \in \mathbb{B}\}, \quad \mathbb{B} \in \mathcal{B}$$

çoxluq funksiyasıdır. $\mathcal{B}$, - $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^1: a < x \leq b\}$ tipli bütün mümkün ola bilən intervallarından təşkil olunmuş ədədi çoxluqlar (Borel çoxluqları) sinfidir. $\mathcal{B}$, - σ -cəbrdir. ξ sonlu olduğundan $\mathbb{R}^1$ -in ξ proobrazı Ω olduğundan, yeni $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, digər tərəfdən Borel çoxluqlarının birləşməsinin proobrazı bu çoxluqların proobrazlarının birləşməsinə bərabər olduğundan, yeni

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_i \mathbb{B}_i\right) = \bigcup_i \xi^{-1}(\mathbb{B}_i), \quad \mathbb{B}_i \in \mathcal{B} \text{ olduğundan,}$$

$$P_\xi(\mathbb{R}^1) = 1, \quad P_\xi\left(\bigcup_i \mathbb{B}_i\right) = \sum_i P_\xi \mathbb{B}_i.$$

Deməli, P_ξ $\mathcal{B}$ -də təyin olunmuş ehtimaldır. Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyəti qiymətlər aldığı fəzada *yeni* - $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}, P_\xi)$ ehtimal fəzasını doğurur. Bu fəzaya bəzən ξ təsadüfi kəmiyyətinin *seçimi ehtimal fəzası* da deyilir.

$g(x)$ $\mathbb{R}$ -də sonlu Borel funksiyası olarsa, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması P_ξ bütün $g(\xi)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarını təyin edir.

Əd.: [1] Лозв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

PAYLANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyasının «*распределение функции от случайных величин; distribution of function of random variables*» - $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi funksiyasının (təsadüfi kəmiyyətinin) *paylanmasıdır*. $X_1, \dots, X_n$, - $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş, qiymətləri $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ fəza fəzalarından olan təsadüfi kəmiyyətlər, $g: \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}$ σ -cəbrlərinin hasilinə nəzərən ölçülən funksiyadır, əgər g funksiyası Ψ fəzasından qiymətlər alırsa və $\mathcal{A}_\Psi$ bu fəzanın altçoxluqlarının hər hansı σ -cəbrdirsə, onda $A \in \mathcal{A}_\Psi$ olduqda $\{(x_1, \dots, x_n): g(x_1, \dots, x_n) \in A\}$ çoxluğu $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ σ -cəbrinə daxildir. Bu şərtlərlə Y qiymətləri $(\Psi, \mathcal{A}_\Psi)$ -dən olan, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təsadüfi kəmiyyətdir.

$Y = g(X)$ yalnız X təsadüfi kəmiyyətinin funksiyası, $g(u)$ monoton və kəsilməz funksiya olarsa, Y təsadüfi kəmiyyətinin P funksiyası $F_Y(x) = P\{Y < x\}$, X təsadüfi kəmiyyətinin

P. funksiyası $F_Y(x) = P\{X < x\}$ ilə aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$F_Y(x) = P\{g(Y) < x\} = F_Y(g^{-1}(x)).$$

Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin P. funksiyası $F_Y(x)$ kəsilməz monoton funksiya olarsa, onda $Y = F_X(x)$ təsadüfi kəmiyyəti $(0, 1)$ parçasında müntəzəm qanunla paylanır. Əgər X $(0, 1)$ -də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa və monoton kəsilməz P. funksiyası verilmiş $F_Y(x)$ olan, Y təsadüfi kəmiyyətini qurmaq tələb olunarsa, onda $Y = F_Y^{-1}(x)$ götürmək kifayətdir.

PAYLANMA(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun «**распределение случайного замкнутого множества**; **distribution of a random closed set**» – bax, *Təsadüfi çoxluq*.

PAYLANMA(sı) təsadüfi matrisin «**распределение случайной матрицы**; **distribution of a random matrix**» – bax, *Təsadüfi matris*.

B – PAYLANMA «**B – распределение**; **B – distribution**» – bax, *Beta – paylanma*.

F – PAYLANMA «**F – распределение**; **F – distribution**» – bax, *Fişer F – paylanması*.

Г – PAYLANMA «**Г – распределение**; **Г – distribution**» – bax, *Qamma – paylanma*.

χ – PAYLANMA «**χ – распределение**; **χ – distribution**» – bax, *Xi – paylanma*.

χ² – PAYLANMA «**χ² – распределение**; **χ² – distribution**» – bax, *Xi – kvadrat paylanma*.

ω² – PAYLANMA «**ω² – распределение**; **ω² – distribution**» – bax, *Omega – kvadrat paylanma*.

t – PAYLANMA «**t – распределение**; **t – distribution**» – bax, *Styudent paylanması*.

T² – PAYLANMA «**T² – распределение**; **T² – distribution**» – bax, *Hotelling T² – paylanması*.

U – PAYLANMA «**U – распределение**; **U – distribution**» – bax, *Uilks paylanması*.

W – PAYLANMA «**W – распределение**; **W – distribution**» – bax, *Uişart paylanması*.

z – PAYLANMA «**z – распределение**; **z – distribution**» – bax, *Fişer z – paylanması*.

PAYLANMA FUNKSİYASI; asimptotik düsturlar «**распределения функция**; асимптотические формулы; asymptotic formulae for a distribution function» – təsadüfi kəmiyyətin *paylanma funksiyasının* (paylanma sıxlığının) kiçik parametrlərin qüvvət üstləri üzrə asimptotik ayrılışlardır və bu ayrılışlarda baş hədlər uyğun limit qanununun paylanma funksiyasıdır (sıxlıq funksiyasıdır). $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan,

$M\left|\xi_1^2\right| < \infty$ şərtini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdir, ξ_1 -in xarakteristik funksiyası $f(t)$ mütləq kəsilməz olsun. Onda

$$S_n = \sum_{i=1}^n (\xi_i - M\xi_1) / (\sqrt{n}\sigma)$$

normalanmış cəminin paylanmasının sıxlığı p_n üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm

$$p_n(x) = \varphi(x) + \varphi(x) \sum_{k=3}^r n^{-(1/2)k+1} P_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

düsturu ilə ifadə olunan ayrılış doğrudur. Əgər, hətta

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$$

şerti də ödənilərsə, onda S_n kəmiyyətinin P. f. $F_n(x)$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=3}^r n^{-(1/2)k+1} Q_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

ayrılış doğrudur, burada $m = M\xi_1$, $\sigma^2 = D\xi_1$, $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, $P_k(x)$ və $Q_k(x)$, $-\mu_1, \dots, \mu_k$ -dan asılı çoxhədlilər,

$$\mu_l = M(\xi_1 - m)^l, \quad \varphi(x) P_k(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) Q_k(x).$$

Məs.,

$$Q_3(x) = \frac{\mu^3}{6\sigma^3} (1 - x^2),$$

$$Q_4(x) = \frac{(\mu_4 - 3\sigma^4)}{24\sigma^4} (3x - x^3) +$$

$$+ \frac{\mu_3^2}{72\sigma^6} (-x^5 + 10x^3 - 15x).$$

Asimptotik Pirsan paylanmaları üçün [2]-də asimptotik düsturlar qurulmuşdur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

PAYLANMA FUNKSİYASI təsadüfi kəmiyyətin «**распределения функция** случайной величины; **distribution function** of a random variable/cumulative **distribution function**, **d. f.**, **c. d. f.**», ξ təsadüfi kəmiyyətinin, – ixtiyari həqiqi $x \in (-\infty, \infty)$ qiymətində $\xi < x$ bərabərsizliyinin ehtimalına bərabər qiymət alan, x dəyişəninin funksiyasıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, $\xi = \xi(\omega)$ bu fəzada təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət olsun.

$$P\{\omega: \xi(\omega) < x\}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

ehtimalına $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin P. f. deyilir və bu ehtimal $F(x)$ kimi işarə olunur.

Her bir P. f. $F(x)$ aşağıdakı əsas xassələrə malikdir:

1) $F(x)$ monoton azalmayan funksiya: $x_1 < x_2$ olduqda $F(x_1) \leq F(x_2)$;

2) $F(x)$ hər bir x qiymətində soldan kəsilməzdir;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

[bəzən P. f. $\xi \leq x$ bərabərsizliyinin ehtimalı kimi də təyin olunur, bu halda 2) xassəsi sağdan kəsilməzlik kimi ifadə olunur].

Riyazi analizdə 1) – 3) xassələrini ödəyən ixtiyari funksiya P. f. adlandırılır. P. f. ilə $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun Borel altçoxluqlarının $\mathcal{B}$ σ – cəbrində təyin olunmuş ehtimal paylanmaları P_F arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Bu uyğunluq aşağıdakı düsturla ifadə olunur: ixtiyari $[a, b]$ intervalı üçün

$$P_F([a, b]) = F(b) - F(a).$$

1) – 3) xassələrini ödəyən hər bir F funksiyası hər hansı ξ təsadüfi kəmiyyətinin P. f.-dir [məs., $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}, P_F)$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi(x) = x$ təsadüfi kəmiyyətinin].

Hər bir P. f. birqiymətli olaraq,

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$$

cəmi şəklində ifadə oluna bilər (məs., Lebeq ayrılığı haqqında, bax. [1]), burada a_1, a_2, a_3 – cəmləri 1-ə bərabər mənfi olmayan ədədlər, F_1, F_2, F_3 ələ funksiyalardır ki, $F_1(x)$ mütləq kəsilməzdir, yəni

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz.$$

$F_2(x)$ – «pillevari funksiya», yəni

$$F_2(x) = \sum_{x_k < x} p_k,$$

x_k , – $F(x)$ funksiyasının sıçrayış nöqtələri, $p_k > 0$ bu sıçrayışların ölçüləridir, $F_3(x)$ isə «sinqulyar» komponentdir (törəməsi sanki hər yerdə sıfır bərabər kəsilməz funksiya).

M i s a l. $X_k, k = 1, 2, 3, \dots$ – 1 və 0 qiymətlərini $0 < p_k \leq 1/2$ və $q_k = 1 - p_k$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sonsuz ardıcılığı.

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$$

olsun. Onda

1) əgər bütün k qiymətlərində $p_k = q_k = 1/2$ olarsa, onda X $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir, yəni X -in P. f. mütləq kəsilməz funksiya ($0 \leq x \leq 1$ olduqda $p(x) = 1$);

2) əgər $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ olarsa, X -in P. f. «pillevaridir» (onun sıçrayışları $[0, 1]$ parçasının bütün ikilik – rəşional nöqtələrində baş verir);

3) əgər $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty, k \rightarrow \infty$ olduqda $p_k \rightarrow 0$ olarsa, onda X -in P. f. sinqulyar funksiya.

Bu misal P. Levinin (P. Lévy) bir teoreminin illüstrasiyasıdır; bu teoremdə isbat olunur ki, diskret P. f.-lannın sonsuz kompozisiyasının limiti P. f.-nin yuxarıdakı ayrılışındakı komponentlərdən yalnız birinə bərabərdir.

Ədəd oxunda P və Q paylanmaları arasında «məsafə» əksər hallarda, bunların uyğun P. f.-lər F_1 və F_2 terminlərində təyin olunur, məs., fərz edərək ki,

$$\rho_1(P, Q) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$$

və ya

$$\rho_2(P, Q) = \text{var}(F_1(x) - F_2(x))$$

(bax, *Yığılma(sı) paylanmalarının, Levi metriksi, Xarakteristik funksiya*).

Ən çox istifadə olunan ehtimal paylanmalarının (məs., normal, binomial, Puasson paylanmalarının) P. f.-ləri üçün cədvəllər tərtib olunmuşdur.

Asılı olmayan müşahidələr üzrə P. f. F haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün F -in empirik P. f.-dan bu və ya başqa cür ölçülmüş yayınmasından istifadə olunur (bax, *Kolmoqorov kriterisi, Kolmoqorov – Smirnov kriterisi, Kramer – Mizes kriterisi*).

P. f. anlayışı təbii olaraq çoxölçülü hal üçün də təyin olunur, lakin çoxölçülü P. f.-lər birölçülü P. f.-lər ilə müqayisədə az tətbiq olunur.

P. f.-nin təqribi ifadəsi haqqında *Qram – Şarliye sırası, Edcvort – Kramer ayrılığı, Limit teoremləri* məqalələrinə bax.

Əd.: [1] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1979; [2] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [5] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

PAYLANMA İNDEKSİ «распределения индекс; index of a distribution» – bax, *İndeks(i)* təsadüfi kəmiyyətin; paylanmanın.

PAYLANMA QANUNU «распределения закон; distribution law» – kontekstdən asılı olaraq *ehtimal paylanması* (məs., hər hansı təsadüfi kəmiyyətin) və ya uyğun *paylanma funksiyası* və ya *ehtimal sıxlığı* kimi anlaşılan münasib təsvir terminidir.

PAYLANMA SIXLIĞI; асимптотик дүстүр «распределения плотность; асимптотическая формула; asymptotic formulae for a distribution density» – bax, *Paylanma funksiyası*; асимптотик дүстүрләр.

* **PAYLANMA SIXLIĞI** çoxölçülü «плотность распределения многомерная; density of the multivariate distribution» – bax, *Çoxölçülü paylanma, Sıxlıq, ehtimal sıxlığı*.

* **PAYLANMALAR** еynitipli «распределения однотипные; distribution of the same type» – bax, *Paylanmalar tipi*.

* **PAYLANMALAR SEMİ – QRUPU** «распределения полуруппа; semi – group of distribution» –

$$Q_{s+t} = Q_s * Q_t, \quad s, t > 0 \quad (*)$$

münasibətini ödəyən Q_i birparametrik ehtimal paylanmalar ailəsinə deyilir. Hər bir sonsuz bölünən paylanma belə semi – qrupun elementi Q_i kimi götürülə bilər ($r > 0$ ixtiyaridir).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

PAYLANMALAR TİPİ «распределений тип; distribution type» – biri digərindən hər hansı bir xətti çevirmə vasitəsilə alınan, təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimal paylanmaları toplusudur. Birölcülü halda P. t.-nin tərfi belədir: əgər a sabit A və $B > 0$ varsa ki, ξ_2 və $B\xi_1 + A$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları eynidir, onda ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanmaları eynitipli paylanmalar adlanır. Bu halda ξ_2 və ξ_1 -in uyğun paylanma funksiyaları aşağıdakı münasibətlə bir-birilə ifadə olunur:

$$F_2(x) = F_1((x - A)/B) = F_1(bx + a),$$

burada $b = 1/B$, $a = -A/B$.

Beləliklə, paylanma funksiyaları çoxluğu cüt-cüt kəsişməyən tiplərə bölünür. Məs., bütün normal paylanmalar bir tip, bütün müntəzəm paylanmalar digər bir tip təşkil edir. Tip anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində geniş istifadə olunur. n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri S_n -lərin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanmasına (məs., normal paylanmaya) o vaxt yığılır ki, S_n -lər xətti «normalanmış» təsadüfi kəmiyyətlər kimi ifadə olunsun (yeni $(S_n - a_n)/b_n$ kəmiyyətlərinin limit paylanması), bu halda a_n və $b_n > 0$ müəyyən sabitlərdir və $n \rightarrow \infty$ olduqda $b_n \rightarrow \infty$. Bu halda əgər hər hansı ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri üçün $(\xi_n - a_n)/b_n$ və $(\xi_n - a'_n)/b'_n$ kəmiyyətlərinin paylanmalar cırlaşmayan limit paylanmalarına yığılarsa, onda bu sonuncu paylanmalar hökmən eynitiplidirlər. Buna görə də, tiplərin yığılması tərfini aşağıdakı kimi vermək olar (A. Ya. Xinqin, 1938).

$T(F)$, – F paylanma funksiyasının aid olduğu tip olsun (aşağıdakı şərhde cırlaşan paylanmalar tipinə baxılır). Əgər $F_n \in T_n$ paylanma funksiyaları ardıcılığı F , $F \in T$ paylanma funksiyasına yığılarsa (zəif yığılarsa), onda T_n tiplər ardıcılığı T tipinə yığılır, deyilir. Belə surətdə topologiya təyin olunmuş tiplər çoxluğu Hausdorf qeyri – rəqulyar fəzadır və deməli, bu çoxluqda metrika təyin olunmur (V. Döblin, W. Doeblin, 1939).

S_n – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri, F_n – uyğun paylanma funksiyaları olsun. Onda $T(F_n)$ -lər üçün limit tipləri sinfi bütün dayanıqlı tiplər sinfi ilə üst-üstə düşür, yeni ele tiplər sinfi ilə ki, $F_1 \in T$ və $F_2 \in T$ olduqda F_1 və F_2 -nin kompozisiyası $F_1 * F_2 \in T$ münasibətini ödəyir (başqa sözlə, eyni T tipli paylanmaya malik, asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyət cəminin paylanması da T tipli paylanmadır; bax, *Dayanıqlı paylanma*).

P. t. anlayışı çoxölcülü hal üçün də təyin olunur. Lakin bu birqimətli olmur. Matrislərin tam qrupunun hər hansı altqrupu G -ni seçərək, P. t.-nin müvafiq anlayışını almaq olur. Əgər ele

$g \in G$ çevirməsi varsa ki, ξ_2 və $g\xi_1$ eyni bir paylanmaya malik olsunlar, onda qiymətləri $\mathbb{R}^n$ -dən olan ξ_1 və ξ_2 vektorları G – eynitip vektorlar adlanır. P. t.-nin G – dayanıqlılığı anlayışını da müvafiq surətdə daxil etmək olar. Matrislərin tam qrupu halında yalnız normal paylanmalar dayanıqlı paylanmalardır (Q. N. Sakoviç, 1960).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949.

PAYLANMALARIN KOMPOZİSİYASI «распределений композиция; composition of distributions» – bax, *Kompozisiya*.

PAYLANMALARIN KONVOLYUSİYASI «распределений свертка; convolution of distributions» – bax, *Kompozisiya*.

PAYLANMALARIN QARIŞIĞI «распределений смесь; mixture of distributions» –

$$P(A) = \int P_n(A) \nu(du) \quad (*)$$

şəklində $\mathbb{R}^1$ -də ehtimal paylanmasıdır, burada ν və P_n , – $\mathbb{R}^1$ -də hər hansı paylanmalardır və $P_n(A)$ ixtiyari Borel çoxluğu A üçün ölçülən funksiyadır. P -yə uyğun sıxlıq funksiyası və xarakteristik funksiya analoji ifadə olunur (bax, [1], [2]). Əgər ν diskret ölçü olarsa, P. q. diskret adlanır. (*) tərfi, P_n ölçüləri və n parametrlərinin qiymətləri verilən ümumi şəkilli fəzalar üçün də ümumiləşdirilir. P. q. təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənilməsi modellərində (bax, *Köçürmə teoremi*) və randomizasiya modellərində meydana çıxır.

Əd.: [1] Лунач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Robbins H., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 360–69.

PAYLANMALARIN YİĞİLMƏSİ «распределений сходимость; convergence of distributions» – bax, *Yığılma(sı)* paylanmaların.

PAYLANMANIN ATOMU «распределения атом; atom of distribution» – bax, *Атомик компоненті, paylanma funksiyasının*.

PAYLANMANIN QALIĞI «распределения хвост; tail of a distribution» – bax, *Qalıqı, paylanmanın*.

PAYLANMANIN MƏRKƏZİ «распределения центр; centre of distribution» – bax, *Mərkəz(i) təsadüfi kəmiyyətin*.

PAYLANMANIN SƏPƏLƏNMƏSİ «распределения разброс; dispersion of a distribution» – bax, *Səpələnmə(sı)* təsadüfi kəmiyyətin.

PAYLANMIŞ GECİKMƏLƏR MODELİ «распределенных запаздываний модель; distributed lags model», paylanmış laqlar metodu, –

$$Z(n) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j) y(n-j) + x(n) \quad (*)$$

zaman sıralarını əlaqələndirən, xüsusilə də, iqtisadiyyatda geniş yayılmış ele xətti modeldir ki, $b(j)$ əmsalları müəyyən sürətlə «sıfıra yığılır», $x(n)$ demək olar ki, $y(n)$ -dən asılı olmayan stasionar ardıcılıqdır. $x(n)$, adətən, qalıq proses, $y(n)$

regressor ardıcılığı (müşahidə olunmayan), $Z(n)$ müşahidə olunan ardıcılığı adlanır. Çox vaxt fərz olunur ki, $M\{y(n)x(n)\} \equiv 0$. (*) modelinin parametrlərinin statistik qiymətlərinin qurulması haqqında bax, [1], [2].

Əd.: [1] Хеннан Э. Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [2] Time series in the frequency domain, Amst. – [a. o.], 1983.

PERİODİK KORRELYAR TƏSADÜFİ PROSES

« периодически коррелированный случайный процесс; periodically correlated random process », periodik qeyri-stasionar (geniş mənada) təsadüfi proses, tsikli stasionar (geniş mənada) təsadüfi proses, – birinci və ikinci momentləri sonlu və verilmiş T_0 perioduna mütenasib zaman ərzində t oxu üzrə yerindəyişməyə görə invariant təsadüfi prosesdir (t kəsilməz və ya diskret zamandır və t yalnız tam qiymətlər alarsa, T_0 tam-qiymətlidir). Əgər $\zeta(t)$ P. k. t. p. olarsa, onda $M\zeta(t) = m(t)$ və $M\zeta(t)\overline{\zeta(s)} = B(t, s)$ məhdud funksiyalardır və $m(t+T_0) = m(t)$, $B(t+T_0, s+T_0) = B(t, s)$ münasibətlərini ödəyirlər. P. k. t. p.-lər nəzəriyyəsinə $B(t, s)$ funksiyası əvəzinə t -yə görə periodik $\mathcal{B}(t, \tau) = B(t+\tau, t)$ funksiyasından istifadə etmək olar.

P. k. t. p. meteorologiya və okeanologiyada mühüm rol oynayır (bax, [1], [8]), burada təbiət hadisələrinin birgünlük (həm də birillik) gedişatının bilgisi, əksər hallarda müşahidə olunan zaman sıralarında aydın nəzərdən çarpan periodun yaranmasına gətirir. Birillik periodluluq, əksər hallarda, iqtisadi və bioloji təbiətli zaman sıralarında yaranır. Radiofizikada giriş signalları P. k. t. p.-lə yaxşı təsvir olunan parametrləri dəyişən parametrləri sistemlərə və

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t - nT_0) \zeta_n$$

şəklində modulyar impulsu P. k. t. p.-ə baxılır, burada $\Gamma(t)$ – verilmiş (determinə olunmuş) funksiya, $\{\zeta_n\}$ – amplitudun nizamlanmamış variasiyalarını və (və ya) impulsların formalarını təsvir edən stasionar təsadüfi ardıcılıqdır (ümumiyyətlə, çox-ölçülü) (bax, [2], [3], [9]). P. k. t. p. həm də amplitud – modulyar $\zeta(t) = A(t)P(t)$ şəklində periodik rəqsdir, burada $A(t)$ – stasionar təsadüfi proses, $P(t)$ – verilmiş periodik funksiyadır. Bir çox digər tətbiqədə təsadüf olunan təsadüfi proseslərin tipləri də P. k. t. p.-lərdir.

P. k. t. p. $\zeta(t)$ -nin $M\zeta(t) = m(t)$ orta qiymətləri sinfi T_0 periodlu bütün periodik funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür; $m(t) = 0$ olduğunu da hesab etmək olar, lakin bu hal üçün ilkin P. k. t. p.-i əvəzinə $\zeta(t) - m(t)$ prosesinə baxılmalıdır. Diskret t zamanlı P. k. t. p. həmişə harmoniklənən təsadüfi prosesdir, yeni $B(t, s)$ funksiyası

$$B(t, s) = \int_{\Lambda} e^{i(\lambda t - \omega s)} d^2 F(\lambda, \omega) \quad (*)$$

şəklində ifadə olunur (bax, [4]), burada Λ , – $\{-\pi \leq \lambda$, $\omega \leq \pi\}$ kvadratı, $F(\lambda, \omega)$ – məhdud variasiyalı funksiyadır.

Korrelyasion funksiyası olan $\zeta(t)$ prosesinin P. k. t. p. olması, yalnız və yalnız, $d^2 F(\lambda, \omega) = F(d\lambda, d\omega)$ spektral ölçüsünün

tamamilə Λ kvadratı daxilində, $2T+1$ sayda $\lambda - \omega = 2\pi k/T$ düzətt parçalarında toplanmış halda mümkündür; $k = -T_0, -T_0+1, \dots, T_0$. Kəsilməz zamanlı P. k. t. p., ümumiyyətlə, harmoniklənən olmaya da bilər (bax, [5]); belə proseslərin $B(t, s)$ korrelyasion funksiyaları sinfini təyin edən ümumi şərt tapılmışdır (bax, [5], [10]). Lakin geniş rəqulyarlıq şərtlərində [məs., əgər ikinci tərtib kəsilməz $\partial^2 B(t, s)/\partial t^2$ törəməsi vardırsa və t -nin funksiyası kimi $\mathcal{B}(t, \tau)$ Furiye sırası ilə ifadə olunarsa] P. k. t. p. $\zeta(t)$ harmoniklənən proses hesab oluna bilər, yeni (*) düsturunu istifadə etmək olar; lakin bu halda Λ artıq bütün $-\infty < \lambda, \omega < \infty$ müstəvisi olur. Bu halda (*) korrelyasion funksiyasına malik $\zeta(t)$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda P. k. t. p. olar ki, $d^2 F(\lambda, \omega) = F(d\lambda, d\omega)$ ölçüsü tamamilə $\lambda - \omega = 2\pi k/T$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ailəsində toplanmış olsun, odur ki, burada $B(t, s)$ funksiyası

$$B(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s / T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF_k(\lambda)$$

şəklində ifadə olunur, burada $F_0(\lambda)$ – məhdud monoton azalmayan funksiyadır, $F_k(\lambda)$, $k \neq 0$ isə elə məhdud variasiyalı kompleks funksiyalardır ki,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |dF_k(\lambda)| < \infty.$$

Praktiki mühüm halda, $\mathcal{B}(t, \tau)$ funksiyası $|\tau|$ -nin artması ilə sürətlə azaldığı halda (məs., bütün t -lər üçün əgər $\int_{-\infty}^{\infty} |B(t, \tau)| d\tau < \infty$ olarsa), bütün $F_k(\lambda)$ funksiyaların mütləq kəsilməzdir, odur ki,

$$B(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s / T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f_k(\lambda) d\lambda,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(\lambda)| d\lambda < \infty$$

və P. k. t. p. həqiqi olduğu halda $f_k(\lambda)$ funksiyaları

$$f_0(\lambda) \geq 0, f_0(-\lambda) = f(\lambda),$$

$$f_k(\lambda) = \overline{f_{-k}(\lambda)} = f_{-k}(\lambda - 2\pi k/T_0)$$

şərtlərini ödəyirlər.

$F_k(\lambda)$ və $f_k(\lambda)$ funksiyaları bəzən uyğun olaraq P. k. t. p. $\zeta(t)$ -nin k -cı spektral funksiyası və k -cı spektral sıxlıq funksiyası (və ya k -cı spektral komponenti) adlandırılır; bu halda $F_0(\lambda)$ və $f_0(\lambda)$ funksiyaları $\zeta(t)$ -nin ortalanmış spektral sıxlıq funksiyası ilə üst-üstə düşür.

P. k. t. p.-in konkret modellərində $f_k(\lambda)$ funksiyasının tapılmasına aid misallar, məs., [2]-də verilmişdir (bax, §59). $\mathbf{B}(t, s)$ və $f_k(\lambda)$ funksiyalarının qiymətlərini, adətən, P. k. t. p. $\zeta(t)$ -nin uzun müddətli bir müşahidəsi nəticəsindəki realizasiyasına görə nisbətən dəqiqliklə qiymətləndirmək olur (bax, [6], [7]).

Əd.: [1] Драган Я. П., Яворский И. Н., Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы, К., 1982; [2] Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976; [3] Френкс Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974; [4] Гладышев Е. Г., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 5, с. 1026–29; [5] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 184–89; [6] Яворский И. Н., в сб.: Отбор и передача информации, в. 67, К., 1983, с. 22–28; [7] Драган Я. П., Мезенцев В. П., Яворский И. Н., в сб.: Отбор и передача информации, в. 69, К., 1984, с. 29–35; [8] Молин А. С., в кн.: Proceedings of the symposium on time series analysis, 1962, N. Y. – L., 1963, p. 144–51; [9] Gardner W. A., Franks L. E., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1975, v. 21, № 1, p. 4–14; [10] Нурд Н. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 834–38.

PERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ «периодическая цепь Маркова; cyclic / periodic Markov chain» – bax, *Tsiklik Markov zənciri*.

PERİODİK PAYLANMIŞ TƏSADÜFİ PROSES «периодически распределенный случайный процесс; periodically distributed random process» – periodik qeyri-stasionar (dar mənada) təsadüfi proses, tsikli stasionar (dar mənada) təsadüfi proses, – bütün ehtimal paylanmaları verilmiş T_0 perioduna mütenasib zaman ərzində t -nin qiymətləri oxunun yerindəyişmələrinə nəzərən invariant olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir. Beləliklə, əgər $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyadırsa, onda P. p. t. p. halında ixtiyari tam qiymətli k üçün

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1 + kT_0, \dots, t_n + kT_0}(x_1, \dots, x_n)$$

bərabərliyi doğrudur. P. p. t. p. anlayışı dar mənada anlaşılır. Bu anlayışa uyğun geniş mənada anlayış *periodik korrelyar təsadüfi proses* anlayışdır.

Praktikada təsadüf olunan periodik korrelyar təsadüfi proseslər demək olar ki, həmişə həm də P. p. t. p.-lərdir; lakin, adətən, yalnız P. p. t. p.-in korrelyasion nəzəriyyəsinin periodik korrelyar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi ilə üst-üstə düşən halları araşdırılır.

PERİODİK VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin «периодическое состояние цепи Маркова; periodic state of a Markov chain» – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*.

PERİODOQRAM «периодограмма; periodogram» – $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ stasionar təsadüfi prosesinin N həcmli $\zeta(1), \dots, \zeta(N)$ seçimi üzrə

$$I_N(\lambda) = (2\pi N)^{-1} \left| d_N^{(\zeta)}(\lambda) \right|^2$$

düsturu ilə təyin olunan $I_N(\lambda)$ funksiyasıdır; burada N – tam müsbət ədəddir, $-\infty < \lambda < \infty$,

722 PERİODOQRAM

$$d_N^{(\zeta)}(\lambda) = \sum_{t=1}^N \exp\{-it\lambda\} \zeta(t).$$

P. periodu 2π -yə bərabər λ -ya görə periodik funksiyadır. Orta qiyməti $c = M\zeta(t)$ -yə bərabər $\zeta(t)$ stasionar prosesinin differensiallanan spektral sıxlığı $f(\lambda)$, $\lambda \neq (\text{mod } 2\pi)$ olduqda π -nin vasitəsilə qiymətləndirilə bilər:

$$MI_N(\lambda) = f(\lambda) + (2\pi N)^{-1} \frac{\sin^2 N\lambda/2}{\sin^2 \lambda/2} c^2 + O(N^{-1}).$$

$DI_N(\lambda) \sim f^2(\lambda)$ olduğundan P. $f(\lambda)$ -nin tutarlı statistik qiyməti deyildir (bax, *Spektral sıxlıq; qeyri-parametrik statistik qiymət*). Spektral sıxlığın tutarlı statistik qiymətlərini müxtəlif tezlikli P.-ların asimptotik qeyri-korrelyarlığından istifadə edən bəzi sonrakı quruluşları əsasında almaq olur: məs., $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_1 - \lambda_2| = 2\pi k/N$, $0 < k < N$,

$\text{cov}\{I_N(\lambda_1), I_N(\lambda_2)\} = O(N^{-1})$, odur ki, λ -ya yaxın tezliklər üzrə $I_N(\lambda)$ -nin orta qiymətinin təyin edilməsi asimptotik olaraq tutarlı statistik qiymətə gətirir. n – ölçülü $\zeta(t) = \{\zeta_k(t)\}$, $k = 1, \dots, n$ təsadüfi prosesi halında P.-in matrisi (kross-periodogram) $I_N(\lambda)$ özünün

$$I_N^{(i,j)}(\lambda) = (2\pi N)^{-1} d_N^{(x_i)}(\lambda) d_N^{(x_j)}(\lambda)$$

elementləri ilə təyin olunur və birölçülü halda olduğu kimi, çoxölçülü təsadüfi proseslərin müxtəlif xarakteristikalarının statistik qiymətlərinin qurulmasının əsası təşkil edir. Bəzən ikinci tərtib periodogram da adlandırılan $I_N(\lambda)$ ilə yanaşı m -ci tərtib P.-a da baxılır:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \equiv 0 (\text{mod } 2\pi)$$

olduqda

$$I_N^{(k_1, \dots, k_m)}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (2\pi)^{1-m} N^{-1} \prod_{j=1}^m d_N^{(\xi_{k_j})} x^{k_j} \lambda_j$$

m -ci tərtib P.-indən m -ci tərtib spektral sıxlığın statistik qiymətinin qurulması üçün istifadə olunur (bax, *Spektral semi-invariant*).

Əksər hallarda

$$\left| \sum_{t=1}^N \exp\{-it\lambda\} a(t) \zeta(t) \right|^2$$

ifadəsilə təyin olunan və hamırlanmış qiymətlərli sıraya uyğun olan modifikasiya olunmuş P. anlayışından istifadə olunur, burada $a(t)$ – spektral xarakteristikası

$$\varphi_N(\lambda) = \sum_{t=1}^N a(t) e^{-it\lambda}$$

olan hər hansı zaman pəncərəsidir. Olduqca geniş şərtlərlə modifikasiya olunmuş P.-in niyəzi gözləməsi

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(\alpha - \lambda)|^2 f(\alpha) d\alpha$$

ifadəsinə bərabərdir, burada $f(\alpha)$ – riyazi gözləməsi sıfıra bərabər ($M\zeta(t) = 0$) $\zeta(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır.

Əd.: [1] Б р и л л и н д ж е р Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

PERİODOGRAM STATİSTİKASI *s p e k t r a l* sıxlığın « *периодограммная статистика* спектральной плотности; *periodogram / Grenander – Rozenblatt statistic* » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri-parametrik statistik qiymət.

PERİODU, YAŞAMA MÜDDƏTİNİN « *период жизни; life period* » – bax, *Şaxələnen proses* immiqrasiyalı.

PERKOLYASIYA « *перколяция; percolation* » – sızma, axmadır (bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*).

PERKOLYASIYA NƏZƏRİYYƏSİ « *перколяция теория; percolation theory* », sızma nəzəriyyəsi, axma nəzəriyyəsi, – $\mathbb{Z}^d$ -də (diskret modeller) və ya $\mathbb{R}^d$ -də (kesilməz modeller), bircins təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsidir, $d \geq 2$. Bu çoxluqların global topoloji xassələri, ilk növbədə əlaqəli komponentlərin strukturu öyrənilir. Daha mürəkkəb rəqulyar qraflar və fəzalara ümumiləşmələr mümkündür. P. n. bir sıra problemlərində statistik mexanikaya yaxındır və bir sıra anlayışlar (faza keçidi, kritik indeks və s.) və metodlar (məs., Payerls kontur metodu) buradan götürülmüşdür. Nəzəriyyənin ən maraqlı effekti – S təsadüfi çoxluğunun ehtimal paylanmasını təyin edən ρ parametri üzrə perkolyasion faza keçididir. Bu keçid S təsadüfi çoxluğunun keyfiyyətə topoloji yenidən qurulmasından ibarətdir: $\rho < \rho_{cq}$ olduqda S -in bütün əlaqəli komponentləri sanki yəqin kompaktdırlar, $\rho > \rho_{cq}$ olduqda isə sanki yəqin sonsuz əlaqəli komponent üzə çıxır (sonsuzluğa sızma və ya perkolyasiya baş verir).

Perkolyasiyanın ən sadə «baza» modelləri [1]-də təklif olunmuşdur. Bunlar $d \geq 2$ olduqda $\mathbb{Z}^d$ -nin şəbəkələrində əlaqələr və qovşaqlar modelləridir. Düyünlər modelində hər bir $x \in \mathbb{Z}^d$ nöqtəsi digərlərindən asılı olmayaraq p ehtimalı ilə qeyd olunur (yəni S -ə daxil olunur), əlaqələr şəbəkəsində analoji mülahizə şəbəkənin tiliyinə aiddir. Əlaqəlilik qonşuluq münasibəti ilə verilir. $w(x) \subset S$ – qeyd olunmuş $x \in \mathbb{Z}^d$ tapə nöqtəsini özündə saxlayan əlaqə komponenti (klaster), $|w(x)|$ – klasterdəki tapələrin sayı olsun. $m_1(p) = M|w(x)|$ (klasterin orta həcmi) və $\theta(p) = P\{|w(x)| = \infty\}$ (sonsuz klasterin sıxlığı) funksiyaları – termodinamik funksiyaların təbii analoqlarıdır. [1]-də isbat olunmuşdur ki, $e_1(p)$ və $p_2(d)$, $0 < p_1(d) < p_2(d) < 1$ vardır ki, $p < p_1(d)$ olduqda $\theta(p) \equiv 0$ və $p > p_2(d)$ olduqda $\theta(p) > 0$ olur və bununla da faza keçidinin varlığı faktı müəyyən olunur. Perkolyasiya səddi ρ_{cq} müxtəlif cür təyin olunur:

Perkolyasiyanın ən sadə «baza» modelləri [1]-də təklif olunmuşdur.

Bunlar $d \geq 2$ olduqda $\mathbb{Z}^d$ -nin şəbəkələrində əlaqələr və qovşaqlar modelləridir. Düyünlər modelində hər bir $x \in \mathbb{Z}^d$ nöqtəsi digərlərindən asılı olmayaraq p ehtimalı ilə qeyd olunur (yəni S -ə daxil olunur), əlaqələr şəbəkəsində analoji mülahizə şəbəkənin tiliyinə aiddir. Əlaqəlilik qonşuluq münasibəti ilə verilir. $w(x) \subset S$ – qeyd olunmuş $x \in \mathbb{Z}^d$ tapə nöqtəsini özündə saxlayan əlaqə komponenti (klaster), $|w(x)|$ – klasterdəki tapələrin sayı olsun. $m_1(p) = M|w(x)|$ (klasterin orta həcmi) və $\theta(p) = P\{|w(x)| = \infty\}$ (sonsuz klasterin sıxlığı) funksiyaları – termodinamik funksiyaların təbii analoqlarıdır. [1]-də isbat olunmuşdur ki, $e_1(p)$ və $p_2(d)$, $0 < p_1(d) < p_2(d) < 1$ vardır ki, $p < p_1(d)$ olduqda $\theta(p) \equiv 0$ və $p > p_2(d)$ olduqda $\theta(p) > 0$ olur və bununla da faza keçidinin varlığı faktı müəyyən olunur. Perkolyasiya səddi ρ_{cq} müxtəlif cür təyin olunur:

$$p_H = \sup \{p : \theta(p) = 0\}; p_T = \sup \{p : m_1(p) < \infty\}.$$

Müxtəlif teriflərin üst-üstə düşməsi, o cümlədən, $p_H = p_T$ bərabərliyi ilk dəfə ikiölçülü mozaik şəbəkələr halında göstərilmişdir (bax, [2]). Burada da əvvəllər «fiziki ciddilik səviyyəsində» alınmış, bir sıra ikiölçülü modeller üçün ρ_{cq} -in dəqiq qiymətləri

təsdiqlənmişdir, məs., göstərilmişdir ki, kvadrat şəbəkədə əlaqələr məsələsində $p_{cq} = 1/2$. [3]-də $p_H = p_T$ bərabərliyi ümumi bircins qraflar üçün isbat olunmuşdur və ixtiyari ölçülü şəbəkələr halında $p < p_{cq}$ olduqda $|z| < c(p)$ dairəsində

$F(\exp\{z|w|\})$ doğuran funksiyasının analitik olduğu müəyyən olunmuşdur.

P. n.-nin növbəti mühüm məsələsi $p > p_{cq}$ olduqda sonsuz klasterlərin strukturuna aiddir. [4]-də, ixtiyari $d \geq 2$ dim. – ölçü halında, $p > p_{cq}$ olduqda sonsuz klasterin yeganəliyi göstərilmiş və bu halda $\theta(p)$ funksiyasının kəsilməzliyi isbat olunmuşdur.

P. n.-də kritik indekslər $p \rightarrow p_{cq}$ olduqda S çoxluğunun müxtəlif xarakteristikalarının asimptotikasının təsviri məqsədilə daxil olunur. Fərz olunur ki,

$$\theta(p) \sim C_1(p - p_{cq})^\beta, \quad \beta > 0, \quad p \downarrow p_{cq},$$

$$m_1(p) \sim C_2(p_{cq} - p)^{-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad p \uparrow p_{cq}.$$

[2]-də ikiölçülü mozaik şəbəkələr üçün $p \rightarrow p_{cq}$ olduqda $\theta(p)$ və $m_1(p)$ üçün yuxarı və aşağıdan qüvvət üstü qiymətlər isbat olunmuşdur. [5]-də bu şəbəkələr üçün isbat olunmuşdur ki, $p \rightarrow p_{cq}$ olduqda $\theta(p)$ və $m_1(p)$ üçün qüvvət üstü asimptotikalarn varlığından W klasterinin digər bir sıra təbii xarakteristikaları üçün analoji asimptotikalarn varlığı alınır. Bu zaman uyğun qüvvət üstləri (kritik indekslər) β və γ vasitəsilə rəşional, oxşarlıq hipotezi adlanan hipotezə uyğun olaraq ifadə olunur.

Yuxarıda qeyd olunan əsas nəticələr kəsilməz Puasson modellərinin geniş sinfi üçün də doğrudur. Bunlardan ən sadəsində – $\mathbb{R}^d$ -də kürələr modelində, $d \geq 2$, S çoxluğu – mərkəzləri intensivliyi λ -ya bərabər Puasson nöqtələr ansamblı əmələ gətirən (Evklid əlaqəliliyi), R qeyd olunmuş radiuslu kürələrin birləşməsidir. S -in perkolyasiya məsələsi ölçüsüz koordinasiya ədədi $B = C_d(2R)^d$ terminlərində həll olunur, burada C_d – $\mathbb{R}^d$ -də vahid radiuslu kürənin həcmidir. Elə B_{cq} konstantı vardır ki, $B \leq B_{cq}$ olduqda S -in bütün əlaqəli komponentləri sanki yəqin kompaktdırlar, $B > B_{cq}$ olduqda yalnız bir sonsuz kompakt üzə çıxır. $B < B_{cq}$ olduqda qeyd olunmuş $x_0 \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsini özündə saxlayan S -in əlaqəli komponentinin həcmnin sonlu eksponensial momenti vardır (bax, [3]).

Kəsilməz perkolyasion məsələlərin daha ümumi qoyuluşları kəsilməz bircins təsadüfi $X(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ meydanlarının sədləri çoxluğunun öyrənilməsi ilə bağlıdır. $h = h_{cq}$ kəmiyyəti p e r - k o l y a s i y a s ə d d i adlanır, $h > h_{cq}$ olduqda $A_h^+ = \{x : X(x) \geq h\}$ çoxluğu kompakt əlaqə komponentlərinə ayrılır, $h < h_{cq}$ olduqda isə, A_h^+ -də (heç olmazsa bir) sonsuz komponent vardır. h_{cq} perkolyasiyasının sonlu səddinin varlığı meydanların geniş sinfi üçün isbat olunmuşdur, $h_{cq} = \infty$ olduğu halda məzmunlu misallar vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Broadbent S., Hammersley J., Percolation processes, «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1957, v. 53, p. 629–45; [2] Кестен Х., Теория просачивания для математиков, пер. с англ., М., 1986; [3] Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 53–110; [4] Aizenman M., Kesten H., Newman C., «Comment. Math. Phys.», 1987, v. 111, № 4, p. 505–31; [5] Kesten H., «Comment. Math. Phys.», 1989, v. 107, № 1, p. 109–56.

PERKOLYASIYA / SIZMA PROSESİ « перколяция (просачивания, протекания) процесс; percolation process » – sonsuz G qrafının tilləri və ya zirvələri üzrə abstrakt mayenin yayılmasının riyazi modelidir. Məs., tillər üzrə P . p.-ndə G -nin hər bir tili digərlərindən asılı olmayaraq p ehtimalı ilə ötürücüdür. G qrafının U zirvəsinin komponenti U ilə ötürücü yolla, yəni ötürücü tillər ardıcılığı ilə əlaqələnməmiş bütün V zirvələrinin çoxluğu adlanır. G -də sonsuz komponentin varlığı sızmanın olması kimi interpretasiya olunur. P . p. ilə bağlı məsələlərdən biri kritik ehtimal adlanan $p(G)$ ədədinin tapılmasından ibarətdir ki, $p < p(G)$ olduqda G -də sanki yəqin sonsuz komponent yoxdur, $p > p(G)$ olduqda isə sonsuz komponent müsbət ehtimalla vardır. Məs., kvadrat şəbəkənin tilləri üzrə P . p.-ndə $p(G) = 1/2$. P . p. elektrik dövrləri nəzəriyyəsində də tətbiq olunur.

Əd.: [1] Кестен Х., Теория просачивания для математиков, пер. с англ., М., 1986.

PERRON KÖKÜ « перронов корень; principal root » – bax, *Kritikaltı şaxələnen proses, Kritiküstü şaxələnen proses.*

PERSENTİL « перцентиль; persentile » – *kvantilin* xüsusi halıdır; $p = m/100$ tərtib K_p kvantildir, burada $m = 1, \dots, 99$. P . paylanma funksiyasının növü haqqında (yeganəlik halında) olduqca yaxşı təsəvvür verir. P . bəzən *prosentil* və ya *sentil* də adlandırılır.

PETTİS İNTEQRALI « Петтиса интеграл; Pettis integral » – Lebeq integralının Banax fəzasında qiymətlər alan funksiyalara ümumiləşmələrindən biridir. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ – ölçülü fəza, $\mathcal{B}$, – Ω -nin altcoxluqlarının σ -cəbri, μ , – $\mathcal{B}$ -də sonlu ölçü olsun. X , – Ω -dan $\mathcal{E}$ -yə zəif ölçülən inikas olsun; əgər bütün $x^* \in \mathcal{E}^*$ üçün $x_A \in \mathcal{E}$ elementi varsa ki,

$$x^*(x_A) = \int_A x^*(X) d\mu$$

bərabərliyi ödənilsin, onda X funksiyası $A \in \mathcal{B}$ çoxluğunda Pettis mənadə integral adlanır. Əgər $\mathcal{E}$ refleksiv fəzadırsa, onda X -in Pettis mənadə integrallanan olması üçün bütün $x^* \in \mathcal{E}^*$ üçün $x^*(X)$ -in integrallanan olması zəruri və kafidir. P . i.-nin əsas xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər T $\mathcal{E}$ fəzasından Banax fəzası F -ə məhdud xətti operatorpursə və əgər X $\mathcal{E}$ – qiymətli Pettis mənadə integrallanan funksiyadırsa, onda TX Pettis mənadə integrallananıdır və

$$\int_A TX d\mu = T(x_A).$$

Əd.: [1] Pettis B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1938, v. 44, № 2, p. 277–304; [2] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

PETTİS TEOREMİ « Петтиса теорема; Pettis theorem » – bax, *Güclü ölçülən inikas.*

PİLLƏ ANI « лестничный момент; ladder time / index / epoch » – $\mathbb{R}$ -də *təsadüfi dolaşmanın* öz əvvəlki evolyusiyasında rekord qiymət aldığı momentdir. $\{S_n\}$, $S_0 = 0$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğrduğu təsadüfi dolaşma olsun, k -cı P . a. $S_n > S_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ bərabərsizliklərinin k -cı dəfə ödənildiyi an kimi təyin olunur. k -cı P . a.-da S_n trayektoriyasının qiymətini $X_1 + \dots + X_k$ cəmi kimi ifadə etmək olar ki, X_i asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X_i -lər birinci P . a.-nda dolaşmanın qiymətinin paylandığı və ya, başqa sözlə, $S_1, S_2, \dots$ ardıcılığında ilk müsbət cəmin paylandığı qanunla paylanmışlar.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

PİLLƏ ANI BİRİNCİ (k-cı) « лестничный момент первый (k-ый); first (k-th) ladder time » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ ANI PAYLANMASI « распределение лестничного момента; distribution of ladder moment » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ BOYU « лестничная высота; ladder point / height » – bax, *Eksses(i) dolaşmanın.*

* **PİLLƏ BOYU BİRİNCİ (k-cı)** « лестничная высота первая (k-ая); first (k-th) ladder height » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

* **PİLLƏ BOYU PAYLANMASI BİRİNCİ** « распределение первой лестничной высоты; distribution of first ladder height » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ CÜTÜ « лестничная пара; ladder pair » – bax, *Eksses(i) dolaşmanın.*

* **PİLLƏ İNDEKSİ BİRİNCİ (k-cı)** « лестничный индекс первый (k-ый); first (k-th) ladder index » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

* **PİLLƏ NÖQTƏSİ, BİRİNCİ (k-cı) CİDDİ ÜST** « лестничная точка первая (k-ая) верхняя строгая; first (k-th) strong upper ladder point » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

* **PİLLƏ NÖQTƏSİ, BİRİNCİ (k-cı) ÜST** « лестничная точка первая (k-ая) верхняя; first (k-th) upper ladder point » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏVARI MARKOV PROSESİ « ступенчатый марковский процесс; step / jump Markov process » – bax, *Sıçrayışvari Markov prosesi.*

* **PİLLƏVARI TƏSADÜFİ PROSES** « ступенчатый случайный процесс; step – wise random process » – $0 < s < t$ şərtini ödəyən ixtiyari s və t qiymətlərində $\zeta(t) - \zeta(s)$ artımları yalnız mənfi olmayan tam qiymətlər alan

$\zeta(t)$ *tesadüfi prosesinə* deyilir. $\zeta(0) = 0$ olması prosesin yalnız $t = 0$ anında başlanması kimi anlaşılır. Prosesin t anındakı qiyməti $\zeta(t)$ 0 və t arasındakı zaman ərzində baş verən bəzi hadisələrin sayı kimi interpretasiya oluna bilər. Məs., telefon stansiyasına daxil olan abonent çağırışlarının sayı, radioelektron cihazın sıradan çıxması sayı və s. belə hadisələrdendir. Qeyd etmək lazımdır ki, P. t. p. yalnız ayrı-ayrı nöqtələrdə birdən-birə bir neçə vahid dəyişə bilər; bu hal, xidmət olunma üçün eyni zamanda bir neçə tələb daxil olmasına uyğun olur.

$\zeta_{nr}(t)$, $r = \overline{1, k_n}$ bir-birilə asılı olmayan pilləvari proseslər.

$\zeta_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} \zeta_{nr}(t)$ olsun. Aydındır ki, $\zeta_n(t)$ de P. t. p.-dir.

Əgər $\zeta_n(t_1), \zeta_n(t_2), \dots, \zeta_n(t_k)$ vektorlarının paylanma funksiyaları $n, t_1, \dots, t_k$ qiymətlərinin ixtiyari seçimdə hər bir kəsilməzlik nöqtəsində

$$\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n)$$

vektorunun paylanma funksiyasının qiymətinə yığılarsa, $\{\zeta_n(t)\}$ *tesadüfi proseslər ardıcılığı* $\zeta(t)$ prosesinə *zəif yığılır*, deyilir.

Əgər $\zeta(t)$ prosesi: 1) kəsişməyən intervallarda asılı olmayan artımlı proses olarsa; 2) bütün $s < t$ qiymətləri və ixtiyari mənfi olmayan tam k -lər üçün $\zeta(t) - \zeta(s)$ artımları

$$P\{\zeta(t) - \zeta(s) = k\} = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} e^{-[\Lambda(t) - \Lambda(s)]}$$

qanunu ilə paylansa, $\zeta(t)$ prosesinə $\Lambda(t)$ *apancı funksiyalı* Puasson prosesi deyilir. Apancı funksiya $\Lambda(t)$ mənfi olmayan, soldan kəsilməz, hər bir t qiymətində sonlu və $t \leq 0$ olduqda $\Lambda(t) = 0$ şərtini ödəyən funksiyadır. Ən sadə axın üçün $\Lambda(t) = \lambda t$ (bax, *Puasson prosesi*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд., 5-ое, М., 1969.

PİLLƏVARI TƏSADÜFİ PROSES « ступенчатый случайный процесс; step random process » – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

PİLLƏVARI TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlı « ступенчатый случайный процесс с независимыми приращениями; step / jump random process with independent increments » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımlı*.

PİROQOV – SİNAY TEOREMİ « Пирогова – Синная теорема; Pirogov – Sinai theorem » – temperaturun kiçik qiymətlərində *Gibbs təsadüfi meydanlarının* qurulması mümkünlüyü haqqında ümumi nəticədir. $U = \{U_A(x_A)\}$,

$A \in \mathbb{Z}^d$ – Gibbs meydanının translyasion invariant finit potensialı, $x^1, \dots, x^n$ – bu meydanın əsas konfigurasiyalarının sonlu toplusu olsun (bax, *Əsas vəziyyət*); bu konfigurasiyalar periodik olub, ümumi $d \in \mathbb{Z}^d$ perioduna malikdirlər. Əgər bütün $l^i = (k_1 l^1, \dots, k_d l^d)$, $k_i \in \mathbb{Z}^d$, $l^i > 0$ üçün $x_l = x_i + l$ olarsa,

$x = (x_l, l \in \mathbb{Z}^d)$ konfigurasiyası $l = (l^1, \dots, l^d)$ periodlu periodik konfigurasiya adlanır. Fərz olunur ki, aşağıdakı Payerls şərti (və ya Hertsik – Piroqov – Sinay şərti) ödənilir: x – əsas konfigurasiyalar olan x^{j^0} , $j^0 = 1, \dots, n$ konfigurasiyalarından biridir. Bu konfigurasıyanın sərhədi ∂x ilə bütün $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$ nöqtələrinin toplusuna deyilir ki, x -in

$$W_t = \{s = (s_1, \dots, s_d) : t_i \leq s_i < t_i + l^i, i = 1, \dots, d\}$$

paralelepipedinə daralması əsas x^{j^0} , $j = 1, \dots, n$ konfigurasiyalarının heç birinin bu paralelepipedə daralması ilə üst-üstə düşmür. Onda Payerls şərti ilə $\rho > 0$ sabitinin varlığından ibarətdir ki, bütün x -lər üçün

$$\sum_{A \subset \mathbb{Z}^d} (U_A(x_A) - U_A(x_A^j)) \geq \rho |\partial x|,$$

burada x_A və x_A^j – x və x^j konfigurasiyalarının A -ya daralmasıdır, $|\partial x|$ – ∂x sərhədindəki nöqtələrin sayıdır. Fərz olunur ki,

$$U_\mu = U + \mu_1 U_1 + \dots + \mu_{n-1} U_{n-1},$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

potensiallarının ailəsi verilmişdir. $U_1, \dots, U_{n-1}$ – hər hansı translyasion invariant potensiallardır və

$$h_\mu^j = \lim_{|A| \rightarrow \infty} \frac{1}{|A|} \sum_{A \subset A} U_{A\mu}(x_A^j, t \in A)$$

– U_μ potensialları üçün hesablanmış əsas konfigurasiya x^j -nin orta enerjisidir. Və fərz olunur ki, bu ilə ailedir ki, $\hat{h}_\mu^j = h_\mu^j - \min_i h_\mu^i$, $i = 1, \dots, n$ olduqda $\mu \rightarrow (\hat{h}_\mu^1, \dots, \hat{h}_\mu^n) \in \mathbb{R}^n$ inikası parametrlər fəzasını n – ölçülü müsbət oktantın bütün sərhədinə köçürür. Bu şərt «ümumi vəziyyətli» potensiallar ailəsi üçün ödənilir. P. – S. t. (bax, [1] – [3]) öz dəyişməsi ilə (bax, [4]) hökm edir ki, ələ β_0 konstantları, $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki, bütün $\beta \geq \beta_0$ üçün μ parametrlərinin fəzasında n – ölçülü müsbət σ^n oktantının sərhədinin sıfır nöqtəsinin ətrafının homeomorfizmi $\mathcal{B}_\beta$ mövcuddur və əgər $x \in \partial \sigma^n$ sərhəd nöqtəsinin q sayda sıfır koordinatları varsa, onda U_μ potensialı üçün $\mu = \mathcal{B}_\beta(x)$ olduğu halda yalnız q sayda müxtəlif requlyar periodik vəziyyətlər vardır və bu vəziyyətlər β ters temperaturuna malikdirlər.

U potensialı bəzi simmetriyalara malik olduğu halda, potensialları U_μ olan Gibbs vəziyyətləri də analoji simmetriyaya malikdirlər. Belə vəziyyətlər üçün P. – S. t.-nin nəticəsi əvvəlcədən də məlum idi (bax, [5], [6]). P. – S. t.-nin daha ümumi vəziyyətlərə ümumiləşmələri də məlumdur (bax, [7], [9]).

Əd.: [1] Пирогов С. А., Синная Я. Г., «Функц. анализ и его продолж.», 1974, т. 8, № 1, с. 25–31; [2] Пирогов С. А., Синная Я. Г., «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 25, № 3,

с. 358–69; [3] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [4] Забрадник М., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 93, p. 559–81; [5] Герцник В. М., Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и его продолж.», 1974, т. 8, № 3, с. 12–25; [6] Герцник В. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, с. 448–62; [7] Динабург Е. И., Синай Я. Г., «Тр. конф. по матем. физике», Дубна, 1984; [8] Imbric J. Z., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 82, p. 261–304; [9] Dobrushin R. L., Zabradnik M., Mathematical problems of statistical mechanics and dynamics, Dordrecht – Boston, 1986, p. 1–123.

PIRSON ÇEVİRMƏSİ « Пирсона преобразование; **Pearson transformation** » – sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər, qeyri – mərkəzlik parametri λ ($\lambda > 0$) olan, qeyri – mərkəzi χ^2 – kvadrat paylanmasına tabe $\chi_n^2(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin

$$T = \frac{n+2\lambda}{n+3\lambda} \left(\chi_n^2(\lambda) + \frac{\lambda^2}{n+3\lambda} \right)$$

düsturu ilə ifadə olunan $T = T(\chi_n^2(\lambda))$ çevirməsidir. T statistikasının riyazi gözləməsi $MT = \frac{(n+2\lambda)^3}{(n+3\lambda)^2}$, dispersiyası DT və üçüncü mərkəzi momenti $M(T - MT)^3$ bir-birilə 1:2:8 nisbətə ifadə olunurlar; sərbəstlik dərəcəsi f -ə bərabər χ^2 paylanmasına tabe ixtiyari $\chi_f^2 = \chi_f^2(0)$ təsadüfi kəmiyyətinin uyğun momentləri də bu nisbətə ifadə olunurlar. Bunu nəzərə alaraq, $M\chi_f^2 = f$ olduğuna da əsaslanaraq, E. Pirson [1]-də $\chi_n^2(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanmasını sərbəstlik dərəcəsi sayı $f = MT = \frac{(n+2\lambda)^3}{(n+3\lambda)^2}$ olan mərkəzi χ^2 – paylanmasının köməyi ilə approksimasiya etməyi təklif etmişdir.

Sərbəstlik dərəcəsi sayı kəsr olan χ^2 – paylanmanın cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Pearson E. S., «Biometrika», 1959, v. 46, p. 364; [2] Мардина К., Земрош П., Таблицы F – распределений и распределений связанных с ними, пер. с англ., М., 1984; [3] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to chi-squared testing, N.Y., 1996.

PIRSON ƏYRİLƏRİ « Пирсона кривые; **Pearson curves** » – *Pirson paylanmalarının* qrafiklərinin adıdır.

PIRSON PAYLANMALARI « Пирсона распределения; **Pearson distributions** » – paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $p(x)$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2} p \quad (*)$$

differensial tənliyini ödəyən, kəsilməz ehtimal *paylanmalar* ailəsinin adıdır. K. Pirson (K. Pearson, 1894) tərəfindən daxil olunmuşdur. $p(x)$ -in x -dən asılılığı qrafikləri *Pirson əyriləri* adlanır. (*) tənliyinin həlləri olan paylanmalar məhz *hiperhəndəsi*

paylanmanın limit formasıdır. $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ tənliyinin xarakterindən asılı olaraq, P. p. təsnif olunur.

P. p. ailəsi 12 tip və normal paylanmadan ibarətdir. Riyazi statistikanın bir çox mühüm paylanmaları (*) tənliyinin həllərinin bir şəkildən başqa şəkə dəyişdirilməsi vasitəsilə alına bilər.

P. p. tiplərinin sistematik təsviri U. Elderton (W. Elderton, 1938) tərəfindən verilmişdir. Tipler üzrə bu təsnifat sadələşdirilmiş halda aşağıdakı kimidir.

I tip:

$$p(x) = k(1+x/a_1)^{m_1}(1-x/a_2)^{m_2}, \quad -a_1 \leq x \leq a_2, \\ m_1, m_2 \geq -1,$$

xüsusi halı – 1-ci növ *beta – paylanma*dır.

II tip:

$$p(x) = k(1-x^2/a^2)^m, \quad -a \leq x \leq a, \quad m \geq -1$$

(I tipin P. p. variantı); xüsusi halı – *müntəzəm paylanma*dır.

III tip:

$$p(x) = k(1+x/a)^{\mu a} e^{-\mu x}, \quad -a \leq x < \infty, \quad \mu > 0, \quad a > 0;$$

xüsusi halı – *gamma – paylanma* və *xi – kvadrat paylanma*dır.

IV tip:

$$p(x) = k(1+x^2/a^2)^{-m} e^{-\mu \arctg(x/a)}, \\ -\infty \leq x \leq \infty, \quad \mu > 0, \quad a > 0.$$

V tip:

$$p(x) = kx^{-q} e^{-\alpha/x}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad q > 1$$

(III tipə çevirmələrlə gətirilə bilər).

VI tip:

$$p(x) = kx^{-q_1}(x-a)^{q_2}, \quad a \leq x < \infty, \quad q_1 > q_2 - 1;$$

xüsusi halı – 1-ci növ *beta – paylanma*, *Pareto paylanması*, *Fisher F – paylanması*dır.

VII tip:

$$p(x) = k(1+x^2/a^2)^{-m}, \quad -\infty < x < \infty, \quad m > 1/2;$$

xüsusi halı – *Styudent paylanması*dır.

VIII tip:

$$p(x) = k(1+x/a)^{-m}, \quad -a \leq x < 0, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

IX tip:

$$p(x) = k(1+x/a)^m, \quad -a \leq x \leq 0, \quad m > -1.$$

X tip:

$$p(x) = k e^{-(x-m)/\sigma}, \quad m \leq x < \infty, \quad \sigma > 0;$$

məhz *üstlü paylanma*dır.

XI tip:

$$p(x) = kx^{-m}, \quad b \leq x < \infty, \quad m > 0;$$

xüsusi halı – *Pareto paylanması*dır

XII tip:

$$p(x) = \left(\frac{1+x/a_1}{1-x/a_2} \right)^m, \quad -a_1 \leq x \leq a_2, \quad |m| > 1$$

(I tipin variantı).

I, III, VI, VII tipler tətbiqdə olduqca mühüm yer tutur. P. p. hər biri özünün ilk dörd tərtib momentləri ($k = 1, 2, 3, 4$)

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

ile, onların sonlu olduqları halda birqiymətli təyin olunur. Bu xassə empirik *paylanmanın* təqribi təsviri üçün istifadə olunur.

P. p.-nin hər hansı empirik paylanmaya gətirilməsi aşağıdakı qaydada aparılır: müşahidələrin asılı olmayan nəticələri üzrə ilk dörd seçimi moment hesablanır, sonra uyğun olan P. p.-nin tipi təyin olunur və axtarılan P. p.-nin naməlum parametrlərinin qiymətləri tapılır. Ümumi halda, momentlər metodu P. p.-nin statistik qiymətlərinin alınması üçün effektiv metod deyildir. P. p. vasitəsilə asimptotik çevirmələr üzrə paylanmanın daha dəqiq approximasıyası L. N. Bolşevin işlərində (1963) alınmışdır.

Əd.: [1] E l d e r t o n W., Frequency curves and correlation, 4 ed., Camb., 1953; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятности и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55.

PIRSON RANQ KORRELYASIYA ƏMSALI «Пирсона коэффициент ранговой корреляции; Pearson rank correlation coefficient» – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

PIRSON TEOREMİ «Пирсона теорема; Pearson theorem» – bax, *Xi-kvadrat kriteri*.

PISARENKO SPEKTRAL STATİSTİK QIYMƏTİ «Писаренко спектральная оценка; Pisarenko spectral estimator», harmonik ayrılış metodu, – diskret zamanlı, kompleks stasionar ζ_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$ prosesinin *spektral ölçüsü* $dF_s(\omega)$ -nin statistik qiymətidir, bu statistik qiymət onunla əsaslandırılır ki, prosesin sonlu sayda qeyri – korrelyar harmoniklər və bəyaz küyden ibarət olduğu fərz olunur, yəni

$$dF_s(\omega)/d\omega = \frac{m_0}{2\pi} + \sum_{1 \leq k \leq s} \rho_k \delta(\omega - \omega_k), \quad (*)$$

$$-\pi < \omega_k \leq \pi, \quad m_0 > 0.$$

Bu statistik qiymət geofiziki praktikaya V. F. Pisarenko tərəfindən [1]-də siqnalların zirvə tezliklərinin gizli periodikliyi və lokalizasiyasını aşkar etmək üçün daxil olunmuşdur.

P. s. s. q. aşağıdakı Karateodori – Sege nəticəsinə əsaslanır (bax, [2]): ixtiyari R_k , $|k| \leq p$ korrelyasion funksiyası spektral ölçüsü (*) şəklində olan korrelyasion funksiyalar sinfində bütün tam qiymətli ədəd oxuna həmişə davam oluna bilər. Əgər $s \leq p$ olarsa, ölçü yeganədir, bu halda m_0 , – $R_p = [R(k-l)]$, $k, l = 0, \dots, p$ matrisinin minimal məxsusi qiymətidir, $s = \text{rank}(R_p - m_0 I)$, $\omega_k = \arg z_k$; burada z_k , – $\alpha_0 z^s + \alpha_1 z^{s-1} + \dots + \alpha_s$ çoxhədlisinin kökləridir, bu çoxhədlinin əmsalları $(\alpha_0, \dots, \alpha_s)^T = \alpha$ məxsusi qiyməti m_0 olan R_s matrisinin məxsusi vektoruna müvafiqdir. Modelin digər parametrləri

$$\sum_{1 \leq k \leq s} \rho_k \exp(i\omega_k t) = R(t) - m_0 \delta_t^0, \quad t = 0, \dots, s-1$$

spektral ifadəsindən təyin olunurlar. p artdıqca $dF_s(\omega)$ ölçüləri, $s(p) \leq p$, $R(t)$ korrelyasion funksiyasının spektral ölçüsünə

zəif yığılırlar. Empirik P. s. s. q. qeyd olunan yolla R_p -nin $\hat{R}_p$ tutarlı statistik qiyməti ilə əvəz edilməsi qurulur, bu statistik qiymət isə Töplits xassəsini (O. Toeplitz, 1910, bax, [2]) və müsbət müəyyənlik xassəsini saxlayır. s modelinin tərtibi p -nin birinci qiyməti kimi təyin olunur, bundan sonra $\hat{m}_0$ statistik qiyməti azacıq dəyişir. Çox vaxt, asimptotik ekvivalent qeyri – Töplits R_s statistik qiymətindən istifadə olunur, bu statistik qiymət aşağıdakı şəkildədir:

$$N^{-1} \sum_n X_n X_n^*, \quad X_n = (\zeta_{n+s}, \dots, \zeta_n)^T.$$

Bu halda P. s. s. q. ortoqonal regressiya metodu ilə sıx əlaqədardır: α vektorunun statistik qiyməti L müstəvisini təyin edir, C^{s+1} -də $X^* \alpha = 0$, bu statistik qiymət X_n nöqtələrinin L -ə qədər məsafələrinin kvadratları cəmini minimallaşdırır.

Əgər ζ_n (*) modelinə müvafiqdirsə və s ədədi məlumdursa, Pisarenko metodu $N \rightarrow \infty$ olduqda $\{\omega_k\}$ zirvə tezliklərinin $\sqrt{N}$ – tutarlı statistik qiymətlərinə gətirir, ω_k tezliklərinin statistik qiymətlərinin standart yayınmaları σ_k -lar bütün tezliklərin həndesəsindən olduqca asılıdır (bax, [3]):

$$\sigma_k \propto N^{-1/2} m_0 / |A_k|^2 \prod_{p \neq k} |e^{i\omega_k} - e^{i\omega_p}|^{-1},$$

burada $\sqrt{m_0}/|A_k|$, – ω_k tezliyində küy (siqnal) nisbəti, ∞ simvolu isə mütenasiblik işarəsidir. Analoji vəziyyətdə ən kiçik kvadrlar metodu $\sigma_k \propto N^{-3/2} \sqrt{m_0}/|A_k|$ kəmiyyətlərinə gətirir. P. s. s. q.-nin effektivliyinin artması üçün $\{\zeta_n\}$ -in əvvəlcədən darzolaqlı filtrasiyanması zəruridir.

Pisarenko metodu yalnız $\sqrt[3]{N} |\omega_1 - \omega_2| \gg 1$ olduğu halda ω_1, ω_2 yaxın tezliklərini ayırd edir. Başqa sözlə, qeyd olunan şərtlərdə $\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 = o_p(|\omega_1 - \omega_2|)$ (bax, [3]). Bununla belə, zirvə harmoniklərinin fazalarının başlanğıc fərqlərini itirən metodlar üçün ayırdetmə qabiliyyəti $N^{1/6} |\omega_1 - \omega_2| \gg 1$ münasibəti ilə təyin olunur (bax, [4]).

Əd.: [1] P i s a r e n k o V. F., «Geophys. J. Roy. Astr. Soc.», 1973, v. 33, p. 347–66; [2] Г р е н а н д е р У., С е г е Г., Теплицевы формы и их приложения, пер. с англ., М., 1961; [3] М о л ч а н Г., Н ь ю м а н У., в кн.: Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных, в. 22, М., 1989, с. 179–93; [4] М о л ч а н Г., в кн.: Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных, в. 22, М., 1989, с. 160–79; [5] К е й С. М., М а р п л С. Л., «Тр ин.-та инж. электротехн. радиозлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51.

PİTMƏN STATİSTİK QIYMƏTİ «Питмена оценка; Pitman estimator» – kvadratik itki funksiyası halında minimal riskə malik həqiqi yerindəyişmələr qrupuna nəzərən yerindəyişmə parametrlərinin ekvivalent statistik qiymətidir. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun komponentləri

$X_1, \dots, X_n$ – asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası $\{f(x-\theta), |x| < \infty, \theta \in \Theta = (-\infty, +\infty)\}$ ailəsindən olan və ixtiyari $\theta \in \Theta$ üçün

$$M_{\theta} X_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x-\theta) dx < \infty$$

şərtlə verilən təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $G = \{g: gX_i = X_i + g, |g| < \infty\}$, $G = \{g\}$ isə X_i ($i = 1, \dots, n$) təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları fəzası $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$ -da təsir edən həqiqi yerindəyişmələr qrupu olsun. Bu halda, əgər $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ kimi ekvariant statistik qiymət götürülsə, onda θ parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən invariant məsələ olacaqdır. E. Pitmen [1]-də göstəmişdir ki, kvadratik itki funksiyası halında minimal riskə malik olan, G qrupuna nəzərən yerindəyişmə parametri θ -nın ekvariant statistik qiyməti $\hat{\theta}(X)$ –

$$\hat{\theta}(X) = X_{(n)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \prod_{i=2}^n f(x + Y_i) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \prod_{i=2}^n f(x + Y_i) dx}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $Y_i = X_{(n)} - X_{(n-1)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(1)}$ müşahidələr vektoru üzrə qurulmuş i -ci qaydalı statistikadır. P. s. q. meylsiz statistik qiymətdir və əgər θ parametrinin bütün ekvariant statistik qiymətləri sonlu risk funksiyalarına malikdirsə, onda bu statistik qiymət kvadratik itki funksiyası halında θ yerindəyişmə parametrinin bütün statistik qiymətləri sinfində minimaks qiymətdir (bax, [2]).

M i s a l 1. Əgər X_i , $i = 1, \dots, n$ təsadüfi kəmiyyətləri yerindəyişmə parametri naməlum θ olan üstlü qanunla paylanmışlarsa, yəni

$$f(x-\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$$

olarsa, onda θ üçün $\hat{\theta}(X)$ P. s. q. $\hat{\theta}(X) = X_{(n)} - 1/n$ düsturu ilə ifadə olunur və onun dispersiyası $1/n^2$ -na bərabərdir.

M i s a l 2. Əgər

$$f(x-\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2}, \quad |x| < \infty$$

olarsa, yeni X_i , $i = 1, \dots, n$ – naməlum θ riyazi gözləməli $N(\theta, 1)$ normal qanununa tabe olarsa, onda $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$ aritmetik ortası P. s. q.-dir.

Əd. [1] Pitman E., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391–421; [2] Зак Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Ибрагимов И. А., Хасьянский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Каган А. М., Клебанов Л. Б., Финтушал С. М., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1974, т. 43, с. 30–39; [5] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки и их приложения, М., 1989.

728 PLANLAŞDIRILMA

PLAN « план; design » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*.

Φ – PLAN « Φ – план; Φ – design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLAN MATRİSİ « план матрица; design matrix » – bax, *Өn kiçik kvadratlar metodu*.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN « планирование эксперимента; design of experiment » – təsadüfi xətalara məruz qalan ölçmələri rəşional idarəetməni öyrənən riyazi statistika bölməsidir. Eksperimentlər üçün sərf olunan xərclər eyni olduqda E. p.-ndan istifadə olunduqda, ölçmələrin analizi və onun interpretasiyası olduqca sadələşir, nəticələrin dəqiqliyi və etibarlılığı olduqca artır. İstifadə olunan statistik modellər mürəkkəbləşdikcə ölçmələrin müqayisəli informativliyinin öyrənilməsi məzmunlu məsələ olur. Bu tip ilkin tədqiqlərə genetikada qarışıq modellərin *dispersion analizinin* tətbiqi üzrə R. Fişerin işlərini və s. (təsir) dispersiyasının intervalı üzrə maksimumu minimallaşdıran polinomial rəqressiya planları haqqında K. Smitin işlərini aid etmək olar (bax, [3], [5]). Aqrobioloji proqramlar çərçivəsində aparılmış blok, faktor və randomlanmış planlaşdırmanın R. Fişere aid araşdırmaları E. p. nəzəriyyəsinin inkişafında əhəmiyyətli impuls oldu (bax, [4]). Məs., R. Fişer eksperimentdə alınan informasiya haqqında anlayış daxil etmişdir və müəyyən etmişdir ki, faktorları növbə ilə dəyişdikdə (o zamanlar eksperimental rəhbərlikdə tövsiyyə olunan) onun təklif etdiyi tam faktor planla müqayisədə (bax, aşağı, misal 2), k – faktor xətti modelin əsas effektlərinin k dəfə pis olan dispersiyasından alınır. bundan başqa tam faktor plan faktorların qarşılıqlı təsirini effektiv qiymətləndirməyə də imkan verir.

Daha sonra aşkar olundu ki, orta qiymətin qiymətləndirilməsində (dispersiya naməlum olduqda) və ya sadə hipotezlərin diskriminasiyasının ən sadə məsələlərində seçimlə təyin olunan təsadüfi anda ölçmələrin dayandırılması (bax, *Ardıcıl analiz*) qeyd olunmuş anda ölçmələrin başa çatmasından daha effektivdir. Qeyd olunan bu tədqiqlər *statistik həllər nəzəriyyəsinin* zəminində 20-ci əsrin 2-ci yarısında formalaşmış, aşağıda ümumi halda baxılan E. p.-nin riyazi əsası olmuşdur (bu zaman E. p.-nin bir çox tətbiqi aspektləri kənarda qalır; bax, [2]).

$x \in X$ idarəetməsi qeyd olunduğu halda y ölçməsinin paylanması $P_{\theta}^x(\cdot)$ olsun. $(x_1, \dots, x_N) = \xi$ ardıcılığı p l a n adlanır. Bu plana $y_1^N = (y_1, \dots, y_N)$ ardıcılığının ehtimal ölçülərinin ailəsi $P_{\theta}^{\xi}(\cdot)$ uyğundur. Alınmış informasiya nəticəsində qiyməti Λ çoxluğundan olan naməlum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında $\delta(y_1^N)$ qərar qəbul olunur. $\Theta \times \Lambda$ -də itki funksiyası $\omega(\theta, \lambda)$ verilir. $R_{\theta}^{\xi} = M_{\theta}^{\xi} \omega(\theta, \delta(y_1^N))$ orta itkiləri (ξ, δ) strategiyasının riski adlanır. Riski minimallaşdıran (və ya riskin hər hansı funksionalını) minimalaşdıran strategiya optimal strategiya adlanır.

M i s a l 1. a) Əgər $i \neq j$, $\Theta_i \cap \Theta_j = \emptyset$, $\Theta = \bigcup_{i=1}^m \Theta_i$,

$\Lambda = \{1, \dots, m\}$, $\omega_{\theta}(\theta, \lambda)$, – $\{\theta \in \Theta_{\lambda}\}$ hadisəsinin indikatoru, $\omega(\cdot, \cdot) = \omega_{\theta}(\cdot, \cdot) + cN$ olarsa, onda strategiyanın riski hipotezlərin diskriminasiya xətasının ehtimalı və ölçmələrin orta sayının $c > 0$ ədədinə hasilinin cəminə bərabərdir.

b) Əgər $\Theta = \Lambda = \mathbb{R}^m$ və $\omega(\theta, \lambda) = (\theta - \lambda)(\theta - \lambda)^T$ olarsa, onda kvadratik riskli qiymətləndirmə məsələsi alınır.

E. p. statik və ardıcıl planlaşdırmaya ayrılır. Əgər N və x_n , $n = 1, \dots, N$ ölçmə başlayana qədər qeyd olunmuş sabitlər olarsa, ξ statik plan adlanır. Asılı olmayan ölçmələrin statistik planı üçün $P_0^E(\cdot) = \prod_{i=1}^N P_0^{\eta_i}(\cdot)$ bərabərliyi ödənilir.

Ekspəriməntin ardıcıl planlaşdırılması aşağıdakı kimi təyin olunur. Hər bir y_n ölçməsindən sonra müşahidələrin sona çatdırılması haqqında qərar qəbul etmək olar, bu halda y_1^n -in əsasında θ parametri haqqında qərar qəbul edilir. Əgər ölçmələri davam etdirmək qərara alınarsa, onda $x_{n+1}(y_1^n)$ təyin edilir. Müşahidələr sona çatana qədər bu proses davam olunur.

E. p.-nda mühüm obyekt *regression eksperimentlərdir*, bu eksperimentlərdə

$$y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

kəmiyyətlərini ölçərək regressiya funksiyası [*sədə (təsir) funksiyası*] $\eta(\cdot, \cdot)$ öyrənilir.

P_0^x ölçüsünü vermək əvəzinə, ε_i xətalara üzərində bunların ilk iki tərtib momentləri terminlərində, tətbiqə asan yoxlanılan şərtlər qoyulur və bununla da, nəzəriyyə müəyyən mənada qeyri – parametrik olur. $\eta(x, \theta) = \theta^T \varphi(x)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$, $M\varepsilon_i^n = 0$, $\text{cov}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \sigma^2 W^{-1}$ şərtlərini ödəyən xətti regression eksperimentlərin statik planı ən sadə statik plandır. Bu halda risk əvəzinə θ üçün ən yaxşı xətti meylsiz $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin kovariasiyalar matrisi $\sigma^2 (\Phi^T W \Phi)^{-1}$ -in funksiyası götürülür, burada $\Phi^T = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ [bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*, burada $\eta(\cdot, \cdot)$ hipotezlərinin yoxlanılması təsvir olunmuşdur; həm də [1], [6] fəsil].

Bir qədər sonralar qeyri – parametrik məsələlərdə – $\eta(\cdot, \cdot)$ -nin informasiya həcmi məlum olan sonsuz ölçülü kompakt (tutarlı statistik qiymət üçün) $\mathcal{F}$ sinfindən olduğu məlum olan məsələlərdə E. p. öyrənilməyə başlandı.

E. p. metodları əməllər fəzası X -dən asılıdırlar. Adətən, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ və optimal plan axtarışı $\mathbb{R}^n$ -də optimizasiyaya (ola bilsin ki, iterasion) gətirilir. Təbiiqi məsələlərin eksperimenti sonsuz ölçülü (adətən, Banax) X fəzasına gətirir (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin riyazi fizikanın tərs məsələləri* üçün, həmçinin [1], [7], [9]-cu fəsillər). Digər hal $x(i)$ faktorunun i səviyyələri çoxluğu X_i olduqda diskret əməllər fəzası $X = X_1 \times \dots \times X_n$ halındır.

M i s a l 2. İkiqözlü tərəzidə üç ağır eşyanın θ_1 , θ_2 , θ_3 çəkirlərini aşağıdakı hallarda təyin etmək tələb olunur: əgər m -ci eksperimentin nəticəsi tərəzinin ikinci və birinci gözələrindəki yüklərin çəkirlərinin fərqi ilə dispersiyası σ^2 və orta qiyməti sıfıra bərabər təsadüfi ε_m xətasının cəmi olarsa; əgər i -ci yük k -ci gözədə olarsa, $x_m(i) = (-1)^k$, $\text{cov } \varepsilon_i^N = \sigma^2 I$, $y_m = \sum_{i=1}^3 x_m(i) \theta_i + \varepsilon_m$ və əgər i -ci yük m -ci eksperimentdə çəkilməmişdirsə, $x_m(i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$). Hər bir

eşyanı ayrı-ayrılıqda n dəfə çəkərək ($N = 3n$) onun çəkisi üçün dispersiyası σ^2/n -ə bərabər ən yaxşı xətti meylsiz

$$\hat{\theta}_i = n^{-1} \sum_{m=1}^{3n} y_m x_m(i)$$

statistik qiymətlərini almaq olur. $N = 8r$ olduqda eyni dəqiqlik yüklərin bütün 8 müxtəlif kombinasiyalarının hər birinin r dəfə çəkilməsindən sonra da alınır; bu kombinasiyaların hər birində hər bir yük ya tərəzinin bir gözündə, ya da digər gözündə olur və bu halda ən yaxşı meylsiz statistik qiymət –

$$\hat{\theta}_i = N^{-1} \sum_{m=1}^N y_m x_m(i), \quad i = 1, 2, 3$$

düsturu ilə ifadə olunur. R. Fişer belə planı *t a m f a k t o r p l a n* adlandırmışdır. Bu plan həndəsi olaraq $K = \{x: \max |x_i| = 1\}$ üçölçülü kubunun təpələrində yerləşir və faktorların qarşılıqlı təsirini də təsvir edən daha ümumi

$$y_m = \sum_{i=1}^3 x_m(i) \theta_i + \sum_{i < j} x_m(i) x_m(j) \theta_{ij} + \theta_{123} x_m(1) + x_m(2) x_m(3) + \varepsilon_m$$

modelinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətini almağa imkan verir; bütün θ_i , θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) və θ_{123} parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətləri qeyri – korrelyadrlar və dispersiyaları σ^2/N -ə bərabərdir. $N = 4$ olduqda K -nin düzgün tetraedr eməle gətirən dörd təpəsi *k ə s r i f a k t o r p l a n* təşkil edir, bu plan üçün θ_1 , θ_2 , θ_3 parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlər qeyri – korrelyadrlar və dispersiyaları $\sigma^2/4$ -ə bərabərdir (bax, *Faktor eksperiment, Blok plan*).

Xüsusiylə də, faktor planların xüsusi halına – itki funksiyası yalnız bir faktorun qiymətinin dəqiqliyindən asılı olduğu hala baxılır. Ekspəriməntin faktor planlaşdırılması üçün seçiyyəvi cəhət onun bir çox məsələlərinin statistik deyil, kombinator terminlərdə qoyuluşudur. Burada toplanılmış nəticələrin statistik anlaşılması E. p.-nın aktiv inkişafda olan oblastıdır.

Regression eksperimentlərin çərçivəsində iki mühüm bölmə qeyd olunmalıdır: itki funksiyası regressiya funksiyasının ekstremumunun tapılmasının dəqiqliyini nəzərə alan *ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması* (bax, [1] fəsil 14) və $\eta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{F}$ modelinin seçilməsinə eksperimentin robust planlaşdırılması (bax, *Robastlıq*). İkinci istiqamətin araşdırılmasının eksperimenti seçilmiş $\eta(\cdot, \cdot)$ statistik qiymətinin kvadratik riskini nəzərə alır, bu statistik qiymət, adətən, xətti

$$B(\xi) = \sup_{\eta \in \mathcal{F}} \int (\eta(x) - M\hat{\eta}(x))^2 \nu(dx)$$

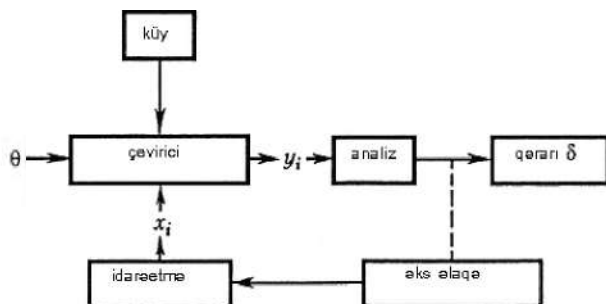
meyli və

$$D\xi = M \int (M\hat{\eta}(x) - \hat{\eta}(x))^2 \nu(dx)$$

təsadüfi xətasının cəmindən ibarət olur, burada ν – hər hansı ölçüdür. Bu bölmədə əsas diqqət $B(\xi)$ meylini minimallaşdırın

planların qurulmasına verilir, bu işə təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsinin bölməsi olduğundan ξ planının daşıyıcısı üzərinə müəyyən şərtlər qoyur. Belə planlar arasında standart metodlarla (regression eksperimentləri planlaşdırılması üçün) düyünlər və ölçmələrin bölünənliyi (çəkilər) seçilir ki, bunlar $D\xi$ -nin müəyyən bir funksiyasını minimallaşdırmış olsun (bax, [1] fə. 6).

E. p.-nin strukturu və əlaqələrinin aydın olması üçün aşağıdakı nəzəri-informasiya sxem faydalıdır:



«Təbiət məlumatı» θ «çevirici» blokda paylanması $P_\theta^{x_i}$ olan y_i ölçməsinə x_i idarəetməsinin iştirakı ilə kodlaşdırılır. $y_1, \dots, y_N$ ölçmələrinin analizi eksperimentlərin ardıcıl planlaşdırılmasında, növbəti y_{n+1} ölçməsinin idarə olunmasında və s. N anına qədər θ parametri haqqında δ qərarının qəbul olunmasında istifadə olunur. E. p. sxemlərinin və informasiya nəzəriyyəsinə analogiya E. p. nəzəriyyəsinə informasiya nəzəriyyəsi ideyaları və aparatının məhsuldarlığı ilə izah olunur. Bu əlaqə çox sayda hipotezin yoxlanılmasında daha aydın görünür (bax, *Süzgəçləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*). Süzgəçləyici eksperimentlərin planlaşdırılmasını çoxgirişli kanal üzrə məlumatların ötürülməsi nəzəriyyəsinin bir qolu kimi hesab etmək olar (bax, [1], fə. 15).

Strategiyanın riski R verildikdə ölçmələrin ən kiçik orta qiyməti $\bar{N}_0 = M_0^\xi N$ kəmiyyətini təyin etmək üçün informasiya nəzəriyyəsinin üsullarından biri, ölçmələr əlavə olunduqda additivdən çox olmayaraq artan informasiya miqdarı $\mathcal{F}$ -nin təyin olunmasından ibarətdir. R riski və $\max \mathcal{F} = I_1$ bir ölçülmədə verildikdə $\min \mathcal{F} = I(R)$ kəmiyyətini qiymətləndirən R riski ixtiyari s strategiyası üçün

$$\bar{N}_0 \geq I(R) / I_1$$

şəklində statistik qiymət almaq olur. Əgər (2) bərabərsizliyini bərabərliyə çevirən (heç olmasa $R \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq), riski R olan strategiyanın varlığını isbat etmək olarsa, onda (2) qiymətləndirməsinin dəqiqliyi və qeyd olunan mənada s -in optimallığı aydındır (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentlərin, Süzgəçləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*, [1], fə. 15-də misallar)

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Н а л и м о в В. В., Ч е р н о в а Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, М., 1965; [3] F i s h e r R. A., «Trans. Roy. Soc. Edinb.», 1918–19, v. 52, p. 399–433; [4] F i s h e r R. A., Design of experiments, Edinb. – L., 1935; [5] S m i t h K., «Biometrika», 1918, v. 12, p. 1–85.

730 PLANLAŞDIRILMA

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN ardıcıl « планирование эксперимента последовательное; sequential design of experiments » – bax, *Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentlərin*.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN hipotezlərin yoxlanılması üçün « планирование эксперимента для проверки гипотез; design of experiment for hypotheses testing » – bax, *Diskriminasiya eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün « планирование эксперимента для обратных задач математической физики; design of experiment for inverse problems of mathematical physics » – eksperimentin informativliyini artırmaq məqsədilə fiziki xarakteristikaların ölçmələrini aparmaq üçün şərtlərin seçilməsidir. Ölçmə üçün tipik tərs məsələ əksər hallarda, təbii şəkildə münasib olan F funksional fəzasında *regression eksperiment* kimi ölçülən obyektin vəziyyətinə müəyyən $f \in F$ elementini qarşı qoymaq yolu ilə ifadə olunur. Eksperiment

$$y_t = x_t(f) + \varepsilon_t, \quad t \in T \quad (1)$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətlərini müşahidə etməkdən ibarətdir, burada t – müşahidəni nömrələyici indeks, $x_t(f)$, – $f \in F$ elementinin xətti funksionalı, yəni F^* funksionallarının qoşma fəzasının elementi, $\{\varepsilon_t\}$ – cüt-cüt qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər, $M\varepsilon_t = 0$, $M\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 > 0$.

Konkret məsələlərdə $f \in F$ elementləri riyazi fizikanın bu və ya digər tənliyinin (düz məsələsinin) həlləri ola bilər. $\{x_t\}$ funksionalları mümkün məqbul funksionalların hər hansı $X \subset F^*$ çoxluğundan seçilir (t ə s i r f ə z a s ı adlandırılan) ki, bu çoxluq bilavasitə ya fiziki eksperimentin şərtlərilə verilir, ya da ki, uyğun qoşma tənliyin həlləri çoxluğu olur (bax, [1]). (1) eksperimentinin məqsədi f vəziyyətini qiymətləndirməkdən və ya statistikaların (yəni qeyd olunmuş hər hansı statistikalar sinfindən olan müşahidə olunan $\{y_t : t \in T\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin funksiyalarının) köməyiylə hər hansı $\theta(f)$ – vəziyyət funksiyasının qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bir qayda olaraq verilən sinifdən müəyyən mənada ən yaxşı sayılan statistiklardan istifadə olunur. Bu zaman naməlum f vəziyyəti haqqında bu və ya digər aprior informasiyanın olması əksər hallarda zəruri olur, əks halda ən yaxşı statistik qiymətin riski məhdud olmaya bilər (bax, [2]). Tərs məsələlərdə *aprior informasiyanın nəzərə alınması* üsulları, prinsip etibarilə, *regression analizdə* qəbul olunmuş, standart üsullara analojiçdir.

(1) eksperimentinin optimizasiya kriteriləri, bir qayda olaraq, aprior informasiya verildiyi halda $\{x_t, \sigma_t^2, t \in T\}$ toplusu ilə birqiymətli təyin olunan ən yaxşı statistik qiymətlərin dəqiqlik xarakteristikalarıdır. Müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər ailəsinin requlyarlığının təmin olunması üçün (bax, [2]) $\{\sigma_t^2\}$ dispersiyalar toplusunun, adətən, $\sum_t \sigma_t^{-2} = \text{const}$ şərtinə tabe

olduğunu nəzərə alaraq, həm də regression analizdə təkrarlanan müşahidələrin tərs dispersiyalarının additivliyinə görə, (1) eksperimentinin təsvirində dispersiyalar müşahidələrin çəkili

$w_i = \sigma_i^{-2}$, $\sum_i w_i = \text{const}$ ilə əvəz olunur. Bundan sonra, (1)

eksperimentinin planı, yeni $\zeta = \{x_i, w_i\}$ toplusu təsir fəzası X -də diskret ölçü, w_i çəkisini $x_i \in X$, $i \in T$ elementinə aid edən ölçü olur.

E. p. məsələsi, yeni məqbul planlar çoxluğundan ζ^* optimal planının seçilmiş optimizasiya kriterisinə uyğun olaraq seçilməsi, əgər təsir fəzası X qoşma F^* fəzasında məhdud olarsa, qeyri – trivial məsələ olur.

Fərz olunur ki,

$$f = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i \quad (2)$$

xətli parametrisasiya məsələsinə baxılır, burada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ – naməlum parametrlər vektoru, $e_i \in F$, $i = 1, \dots, p$ – məlum olan bazis elementləridir. β parametrlərinin qiymətləndirilməsi nöqtəyi – nəzərdən (1) – (2) eksperimenti ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlər kimi ən kiçik kvadratlar statistik qiymətləri xətti regressiya eksperimentə ekvivalentdir. (1) – (2) eksperimentinin informasiya matrisi $M(\zeta)$ -nın elementləri

$$M_{ik}(\zeta) = \sum_{t \in T} w_t x_t(e_i) x_t(e_k), \quad i, k = 1, \dots, p$$

düsturu ilə təyin olunur.

Eksperimentin planlaşdırılması məsələsi (1) – (2) hər bir $x \in F^*$ funksionalına bu funksionalın $z = (x(e_1), \dots, x(e_p))^T$ bazis elementlərində qiymətlər vektorunu qarşı qoyan kəsilməz xətti $\varphi: F^* \rightarrow \mathbb{R}^p$ inikası ilə aşağıdakı uyğun xətti regressiya eksperimentin planlaşdırılması məsələsinə gətirilir (bax, *Regressiya eksperimentlərinin planlaşdırılması*);

$$y_t = \beta' z_t + \varepsilon_t, \quad z_t = \varphi(x_t), \quad t \in T,$$

bu eksperimentin təsir zonası $Z = \varphi(X) \subset \mathbb{R}^p$ çoxluğudur. Əgər X fəzası F^* -da məhdud və qapalı olarsa, onda Z kompaktdır və ehtimal ζ^* optimal planı vardır ki, o, Z fəzasının sərhədində sonlu sayda $z_1^*, \dots, z_N^*$ nöqtələrində toplanmışdır. Optimal planın z_j^* , $j = 1, \dots, N$ nöqtələrinə uyğun x_j^* funksionalının bərpası problemi F^* fəzasında

$$x_j^*(e_i) = z_{ji}^*, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

tənliklər sisteminin həllindən ibarətdir. D – optimal plan üçün $(\det M(\zeta^*) = \sup_{\zeta} \det M(\zeta))$ (3) sistemi

$$x_j^*(f_j) = \sup_{x \in X} x(f_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (4)$$

xətli ekstremal məsələlər toplusuna ekvivalentdir, burada $f_j \in F$ elementi z_j^* nöqtəsi ilə

$$f_j = \sum_{i,k} (M^{*-1})_{ik} z_{ji}^* e_k$$

düsturu ilə birqiymətli təyin olunur, $M^* = M(\zeta^*)$, – D – optimal planın informasiya matrisidir (bax, [3]). ζ^* planından $\{z_j^*\}$ nöqtələrinə $\{x_j^*\}$ funksionallarına uyğun çəkilər qarşı qoyaraq, funksionallar fəzası F^* -da X təsir oblası üçün D – optimal ζ^* planını almaq olur.

Qoşma funksionallar fəzalının müxtəlif cütələrinin seçilməsi fizikanın müxtəlif oblaslarında real ölçmə məsələlərinə uyğun E. p. məsələlərinin geniş sinfinin alınmasına səbəb olur.

Kəsilməz regressiya funksiyasını müşahidə etdikdə hesablanıb ayrılan nöqtələrin optimal seçiminin klassik halına (bax, *Regressiya eksperimentlərinin planlaşdırılması*) F fəzası kimi $f(s)$ funksiyalarının fəzası $C(s)$ -i seçmək uyğun olur və bu funksiyalar S kompaktında kəsilməzdir, $X \subset C(S)^*$ çoxluğu kimi isə $x_{s_0}(f) = f(s_0)$, $s_0 \in S$ şəklində funksionallar çoxluğu götürülür. $F = F^* = L^2(S)$ halı da araşdırılmışdır (bax, [4]). Baxılan hallarda funksionalların bərpası çətinlik törətmir.

Additiv fiziki kəmiyyətlərin (məs., müxtəlif mənbələrdən şüalanma axınlarının) paylanması üzrə tərs məsələlər üçün F fəzası kimi S -də qeyd olunmuş λ ölçüsünə, daha yaxşısı Lebeq ölçüsünə nəzərən araşdırılan paylanmaların sıxlıqlarını özündə saxlayan $L^1(S, \lambda)$ fəzasını götürmək məqsədəuyğundur. Təsir fəzası $X \subset L^2(S)^* = L_\infty(S)$ kimi bu halda,

$$x(f) = \int a(s) f(s) d\lambda(s), \quad 0 \leq a(s) \leq 1 \pmod{\lambda}$$

şəklində funksionallardan ibarət vahid radiuslu kürenin müsbət hissəsinə baxmaq təbii. Onda (4) ekstremumu sıxlığı

$$f_j(s) = \sum_{i,k} (M^{*-1})_{ik} z_{ji}^* e_k(s)$$

düsturu ilə ifadə olunan paylanmanın Jordan – Han ayrılışının müsbət olduğu çoxluğun indikatoru $a_j^*(s)$ -də alınır, burada $\{e_k(s)\}$ – bazis sıxlıqlarıdır. Bu tip məsələlər olduqca ətraflı araşdırılmışdır (bax, [3]), distansion zondlama sistemlərinin spektral kanallarının optimal seçimdə bunların tətbiqləri də öyrənilmişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [3] Козлов В. П., в кн.: Математические методы планирования эксперимента, Новосибир., 1981, с. 74–101; [4] Мажутов М. Б., в кн.: Планирование оптимальных экспериментов, в. 48, М., 1975, с. 164–66; [5] Козлов В. П., Тимофеев Ю. М., «Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана», т. 15, № 12, с. 1253–61.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN « планирование экстремальных экспериментов; design of extremal experiments » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANLAŞDIRILMASI, İMITASİON EKSPERİMENTİN « планирование имитационного эксперимента; design of simulation experiment » – imitasiya eksperiment vasitəsilə öyrənilən təsadüfi hadisə və ya prosesin modelinin (parametrlərinin) xüsusi olaraq seçilməsidir. Bu model

ele seçilməlidir ki, aparılan imitasiya üçün hesablama və ya sərflənən işin minimal olmasını təmin etmiş olsun. I. e. p.-nda statistik eksperimentin planlaşdırılması üçün işlənmiş metodlar və paylanmaların dəyişməsi ilə əlaqədar uyğun statistik çəkirlərin daxil olunması mümkünlüyünə əsaslanan xüsusi metodlardan (mühüm seçim metodu) istifadə olunur. Bax, *Monte – Karlo metodu*; zəruri işin həcmi.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Мелас В. Б., Математический эксперимент с моделями сложных систем, СПб., 1993; [2] Математическая теория эксперимента, М., 1983.

PLANLAŞDIRILMASI, MULTİEKSSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN « планирование многоэкстремальных экспериментов; design of multiextremal experiments » – bax, *Multiextremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANLAŞDIRILMASI, SÜZGƏCLƏYİCİ EKSPERİMENTLƏRİN « планирование отсеивающих экспериментов; design of screening experiments » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANŞEREL EYNİLİYİ « Планшереля тождество; Plancherel identity » – bax, *Sıxlıq, ehtimal sıxlığı*.

POLİNOMİAL BİRCİNS XAOS « полиномиальный однородный хаос; polynomial homogeneous chaos » – bax, *Bircins chaos*.

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL ƏMSAL « полиномиальный коэффициент; multinomial coefficient » – bax, *Binomial əmsal*.

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL PAYLANMA « полиномиальное распределение; multinomial distribution » – $n_1 + \dots + n_k = n$ şərtini ödəyən, tam mənfi olmayan $n_1, \dots, n_k$ qiymətlərini uyğun olaraq, $p_1, \dots, p_k$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ ehtimalları ilə alan $X_1, \dots, X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmasıdır və

$$P\{X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}. \quad (*)$$

P. p. komponentləri $X_1 + \dots + X_k = n$ şərtini ödəyən $(X_1, \dots, X_k)$ təsadüfi vektorunun çoxölçülü diskret paylanmasıdır [bu paylanma mahiyyətə $(k-1)$ -ölçülü paylanmadır, belə ki, $\mathbb{R}^k$ fazasında o, cırlaşmış paylanmadır]. P. p. təbii olaraq, *binomial paylanmanın* ümumiləşməsidir və $k=2$ olduqda bu sonuncu ilə üst-üstə düşür. «P. p.» adı onunla izah olunur ki, (*) ehtimalı $(p_1 + \dots + p_k)^n$ çoxhədlisinin (polinomunun) ayrılışının ümumi həddidir. P. p. aşağıdakı ehtimal sxemində alınır. n sayda təkrarlanan asılı olmayan sınaqlarda bir-birini inkar edən A_i , $i = 1, \dots, k$ hadisələrindən biri A_i -nin baş verməsi sayı X_i olsun (yeni A_i -lər tam qrup əmələ gətirən hadisələrdir). $p_i = P(A_i)$ hər bir sınaqda A_i hadisəsinin baş vermə ehtimalı olarsa, (*) ehtimalı n sınaqda $A_1, \dots, A_k$ hadisələrinin uyğun olaraq, $n_1, \dots, n_k$ dəfə baş verməsi hadisəsinin ehtimalıdır. X_i

təsadüfi kəmiyyətlərindən hər biri riyazi gözləməsi np_i , dispersiyası $np_i(1-p_i)$ -yə bərabər binomial paylanma ilə paylanır.

$(X_1, \dots, X_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi $(np_1, \dots, np_k)$, kovariasion matrisi $B = \|b_{ij}\|$ olur, burada

$$b_{ij} = \begin{cases} np_i(1-p_i), & i=j, \\ -np_i p_j, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, k$$

(B matrisinin rangı $(k-1)$ -ə bərabərdir, çünki, $\sum_{i=1}^k n_i = n$).

P. p.-nin xarakteristik funksiyası $f(t_1, \dots, t_n) = (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^n$ düsturu ilə ifadə olunur. $n \rightarrow \infty$ olduqda $(y_1, \dots, y_k)$ vektorunun paylanması normalanmış $y_i = (X_i - np_i) / \sqrt{np_i(1-p_i)}$ komponentləri ilə hər hansı çoxölçülü normal paylanmaya yaxınlaşır, $\sum_{i=1}^k (1-p_i) y_i^2$ cəminin pay-

lanması isə (bu cəmdən riyazi statistikada χ^2 kriterisinin qurulmasında istifadə olunur) sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$ -ə bərabər χ^2 – paylanmasına yaxınlaşır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

POLİNOMİAL REQRESSİYA « полиномиальная регрессия; polynomial regression » – bax, *Parabolik reqressiya*.

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL SXEM « полиномиальная схема; multinomial scheme » – ele asılı olmayan sınaqlar sxemidir ki, hər bir sınaqda (təkrarlana bilən) k sayda bir-birilə uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_k$ nəticələrindən yalnız biri baş verə bilər və bu nəticələrin ehtimalları $p_i = P(A_i)$ sınağın nömrəsindən asılı deyildir. Əgər n P. s.-də sınaqların sayı olarsa, onda A_i , $i = 1, \dots, k$ nəticələrinin baş verməsi tezliyi X_i polinomial paylanma ilə paylanır və bu paylanma qanunu aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$P\{X_i = n_i, i = 1, \dots, k\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

burada n_i – tam ədədlərdir və $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$,

$$p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982.

POLİNOMİAL YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « полиномиальное размещение частиц; multinomial allocation of particles » – hissəciklərin oyuqlarda bir-birindən asılı olmadan yerləşməsinin ehtimalı sxemidir və bu sxemdə qeyd olunmuş hissəciyin i -ci oyuğa düşməsi ehtimalı bütün hissəciklər üçün eynidir. p_i – hissəciyin i -ci oyuğa düş-

məsi ehtimalı olsun. $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Hissəcik-

lərin P. y.-nin xüsusi halı $p_i = 1/N$ olduğu hal hissəciklərin bərabər ehtimalılı yerləşməsi adlanır. Hissəciklərin P. y. ilə yalnız r sayda hissəciklər olan oyuqlar sayı $\mu_r = \mu_r(n, p_1, \dots, p_N)$; k sayda oyuqdan hər birində ən azı m sayda hissəcik olmaqla yerləşmədə hissəciklərin minimal sayı $\nu_m(k)$ kimi təsadüfi kəmiyyətləri təyin etmək olar.

μ_r təsadüfi kəmiyyətlərinin momentləri üçün sadə düsturlar vardır, məs.,

$$\mathbf{M}\mu_r = \sum_{k=1}^N C_n^r p_k^r (1-p_k)^{n-r}$$

Bərabərehtimalılı yerləşmə sxeminə μ_0 kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq,

$$\mathbf{M}\mu_0 = N(1 - 1/N)^n,$$

$$\mathbf{D}\mu_0 = N(N+1)(1 - 2/N)^n + \mathbf{M}\mu_0 - (\mathbf{M}\mu_0)^2$$

düsturları ilə təyin olunur və bu kəmiyyətlər boş qutular kriterisində istifadə olunurlar.

μ_r kəmiyyətləri üçün $n, N \rightarrow \infty$ və $n, N, p_1, \dots, p_N$ parametrləri arasında müəyyən münasibətlər olduqda limit paylanmalar normal və ya Puasson paylanmalar olur. Məs., bərabərehtimalılı sxemdə $n, N \rightarrow \infty$ olduqda μ_0 kəmiyyəti

$(\mathbf{M}\mu_0, \sqrt{\mathbf{D}\mu_0})$ parametrləri normal qanunla asimptotik olaraq paylanır, bu şərtlə ki, $\mathbf{M}\mu_0 \rightarrow \infty$, $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \infty$ olsun; əgər $\mathbf{M}\mu_0 \rightarrow \lambda$ və $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \lambda$ münasibətləri $n, N \rightarrow \infty$ olduqda ödənilsə, μ_0 təsadüfi kəmiyyəti limitdə λ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır; $\mu_0 - (N - n)$ kəmiyyəti, $n, N \rightarrow \infty$ olduqda $\mathbf{M}\mu_0 \rightarrow \infty$, $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \lambda$ olarsa, limitdə λ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanır.

$\nu_m(k)$ -nin limit paylanmalarının araşdırılması μ_r -in limit paylanmalarının araşdırılmasına gətirilir, məs., $\mathbf{P}\{\nu_1(k) < n\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) \leq N - k\}$. $\mu_r(n, p_1, \dots, p_N)$ üçün limit paylanmaları normal və Puasson paylanmasından fərqli paylanmalar ola bilər. Məs., $\mu_0(n, p_1, \dots, p_N)$ üçün Puasson və binomial paylanmaların kompozisiyası olan limit paylanması alınmışdır (bax, [2]).

μ_r üçün limit paylanmalar $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ kəmiyyətlərinə əsaslanan müxtəlif statistik kriterilərin güclərinin təqribi statistik qiymətləri üçün istifadə olunur, məs., boş qutular kriterisinin gücünün statistik qiyməti üçün. Hissəciklərin P. y. sxemi hissəciklərin bir neçə tip olduğu sxem üçün və $p_i, i = 1, \dots, N$ ehtimalları hissəciyin nömrəsindən asılı olduğu sxem üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3] və [4]).

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Чистяков В. П., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 1, с. 9–16; [3] Попова Т. Ю., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 542–48; [4] Болотников Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 534–42.

POLİSPEKTR « полиспектр; polyspectrum » – bax, *Spektral semi-invariant*.

POLİSPEKTRAL FUNKSİYA « полиспектральная функция; polyspectral function » – bax, *Spektral semi-invariant*.

POLİSPEKTRAL SIXLIQ « полиспектральная плотность; polyspectral density » – bax, *Spektral semi-invariant*.

POLLAÇEK – SPİTŞER EYNİLİYİ « Поллачека – Спитцера тождество; Pollaczek – Spitzer identity » – bax, *FaktORIZASION eynilikler*.

POLSKİ FƏZASI « польское пространство; Polish space » – tam separabel metrik fəzadır və ya belə fəzaya homeomorf, topoloji fəzadır. Doğurulmuş topologiyalı tam separabel metrik fəzaların açıq altçoxluqları (və ya bundan əlavə, G_δ – altçoxluqlar) belə fəzalardandır və bunlar bütün P. f.-lərinin sinfini tamamilə əhatə edir.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975.

POLYAR ÇOXLUQ « полярное множество; polar set » – ehtimal bir çoxluqdur ki, *Markov prosesinin* heç bir vəziyyətindən bu çoxluğa keçid yoxdur. Daha dəqiq, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{F}_t, P_x)$, $t \geq 0$ bircins qırıqlı *Markov prosesi*

$(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəza fəzasında verilmiş olsun, $A \subset \mathcal{E}$ sanki Borel çoxluğu (bax, *Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün*) ehtimal çoxluq olsun ki, onun üçün $t = 0$ anından sonra ilk çatım anı ixtiyari $x \in \mathcal{E}$ üçün ξ anı ilə $(P_x -$ sanki yeqin) üst-üstə düşür, onda A *polyar çoxluq* adlanır; belə A çoxluğunun ixtiyari altçoxluğu da belə adlanır. Hər bir P. ç. avtomatik olaraq *semi-polyar* və *zərif çoxluq*dur.

Markov prosesi üçün P. ç. anlayışının proobrazı klassik potensial nəzəriyyəsinin eyniadlı anlayışı ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – [a. o.], 1984.

POLYAR KORRELYASİON FUNKSİYA « полярная корреляционная функция; polar / signed correlation function », işarəvi korrelyasion funksiya stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin $-\zeta_s(t) = \text{sgn} \zeta(t)$ təsadüfi prosesinin

$$B^{(s)}(\tau) = \mathbf{M} \text{sgn} \zeta(t + \tau) \text{sgn} \zeta(t)$$

ifadəsilə təyin olunan *korrelyasion funksiyasıdır*, burada $\text{sgn} x$, $-x \geq 0$ olduqda $\text{sgn} x = 1$, $x < 0$ olduqda $\text{sgn} x = -1$ münasibətlərlə təyin olunur.

İki stasionar və stasionar əlaqəli $\zeta(t)$ və $\zeta^*(t)$ təsadüfi proseslərinin qarşılıqlı P. k. f. analogi olaraq, $\zeta_s(t) = \text{sgn} \zeta(t)$ və $\zeta_s^*(t) = \text{sgn} \zeta^*(t)$ təsadüfi proseslərinin

$$B_{\zeta_s \zeta_s^*}^{(s)}(\tau) = \mathbf{M} \text{sgn} \zeta(t + \tau) \text{sgn} \zeta^*(t)$$

qarşılıqlı P. k. f.-na deyilir. $\zeta_s(t)$ yalnız 1 və ya -1 qiymətlərini aldığından, $B^{(s)}(\tau)$ və $B_{\zeta_s \zeta_s^*}^{(s)}(\tau)$ P. k. f.-nin təqribi qiymətləndirilməsində t üzrə $\zeta_s(t + \tau) \zeta_s(t)$ və $\zeta_s(t + \tau) \zeta_s^*(t)$

hasillərinin orta qiymətlərini hesablamaq sadə və asan olur. Digər tərəfdən, əgər $\zeta(t)$ orta qiyməti sıfır bərabər Gauss prosesi [və ya ikiölçülü $\zeta(t) = \{\zeta(t), \zeta^*(t)\}$ prosesi].

$$M\zeta(t+\tau)\zeta(t) = B(\tau),$$

$$M\zeta^*(t+\tau)\zeta^*(t) = B_{\zeta^*}(\tau)$$

olursa, $M\zeta = M\zeta^* = 0$, $M\zeta\zeta^*/[M\zeta^2 M\zeta^{*2}]^{1/2} = \rho$ və $M \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn} \zeta^* = 2\pi^{-1} \arcsin \rho$ şərtlərilə verilən normal paylanmaya malik ikiölçülü (ζ, ζ^*) təsadüfi vektoru üçün

$$B^{(s)}(\tau) = 2\pi^{-1} \arcsin[\rho(\tau)],$$

$$B_{\zeta^*}^{(s)}(\tau) = 2\pi^{-1} \arcsin[\rho_{\zeta^*}(\tau)]$$

olur; burada $\rho(\tau) = B(\tau)/B(0)$ və $\rho_{\zeta^*}(\tau) = B_{\zeta^*}(\tau)/[M\zeta^2(t)M\zeta^{*2}(t)]^{1/2}$, $\zeta(t)$ və $\zeta^*(t) = \{\zeta(t), \zeta^*(t)\}$ proseslərinin normalanmış korrelyasion funksiyalarıdır. $B^{(s)}(\tau)$ və $B_{\zeta^*}^{(s)}(\tau)$ P. k. f.-larından $\rho(\tau)$ və $\rho_{\zeta^*}(\tau)$ -nın təqribi qiymətlərini təyin etmək məqsədilə istifadə etmək olar. P. k. f.-nın təqribi qiymətlərinə əsasən normalanmış korrelyasion funksiyaların qiymətlərini qiymətləndirmə metodları korrelyasion analizinin polyar (və ya işarəvi) metodları adlanır (bax, [1]–[10]). Əgər $\zeta(t)$ [və ya $\{\zeta(t), \zeta^*(t)\}$] orta qiyməti naməlum $0 \leq t \leq T$ müddətində müşahidə olunan Gauss stasionar prosesidirsə, onda korrelyasion funksiyasının polyar qiymətləndirmə metodunu $\zeta(t) - \bar{\zeta}_T$ [və ya $\zeta^*(t) - \bar{\zeta}_T^*$] prosesinə tətbiq etmək olar; burada $\bar{\zeta}_T$ və $\bar{\zeta}_T^*$ kəmiyyətləri $0 \leq t \leq T$ zaman intervalı

üzrə $\zeta(t)$ və $\zeta^*(t)$ -nin orta qiymətləridir. Polyar metod və onun bezi modifikasiyalardan bir çox qeyri – Gauss təsadüfi proseslərinin normalanmış korrelyasion funksiyalarının təqribi qiymətlərini almaq məqsədilə istifadə olunur.

Əd.: [1] K e d e m B., Binary time series, N. Y. – Basel, 1980; [2] Г е р ш м а н С. Г., Ф е й н б е р г Е. Л., «Акуст. ж.» 1955, т. 1, № 4, с. 326–38; [3] М с Н е й л D. R., «J. Roy. Statist. Soc. Ser. B», 1967, v. 29, № 1, p. 180–95; [4] Б а л л Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [5] Г р и б а н о в Ю. И., В е с е л о в а Г. П., А н д р е е в В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [6] М и р с к и й Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [7] Ж о в и н с к и й В. Н., А р х о в с к и й В. Ф., Корреляционные устройства, М., 1974; [8] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [9] К о р н Г., Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, пер. с англ., М., 1968; [10] О т н е с Р., Э н о к с о н Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [11] V e l t m a n B. P. T., K w a k e r - n a a k H., «Regelungstechnik», 1961, Bd 9, S. 337–64; [12] V e l t m a n B. P. T., v a n d e n B o s A., в кн: Automatic and remote control. Proceeding of 2-nd Congress of the International federation of automatic control (IFAC), v. 1, L. – Munich, 1964, p. 620–27; [13] B e r n d t H., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1968, v. 14, № 6, p. 796–801.

POLYAR METODU, KORRELYASION ANALİZİN
« полярный метод корреляционного анализа; polarity coincidence method of correlation analysis » – bax, Polyar korrelyasion funksiya.

734 POPULYASION

POPULYASION GENETİKANIN EHTİMAL PAYLANMALARI « популяционной генетики распределения вероятностей; probability distribution of population genetics » – populyasiyaların genetik tərkibinin genetik quruluşunu və dinamikasını öyrənmək məqsədilə istifadə olunan ehtimal paylanmalarıdır.

Klassik genetikanın əsas konsepsiyası – g e n – G. Mendel (G. Mendel) tərəfindən («konstant əlamət» adı ilə) müşahidə olunan varislik statistikasını izah etmək məqsədilə daxil olunmuşdur. Noxud bitkiləri ilə təcrübələrdə G. Mendel, məsələn, sarı (s.) və yaşıl (y.) rəngli noxudları çalışdırdı. Birinci nəslin bütün varisləri sarı rəngli olmuşdu, lakin onların sonradan bir-birilə çalaşmasından əlamətin parçalanması – s.y. ≈ 3:1 nisbətə yeni nəsil yaranırdı. İkinci sarı noxudlar bir-birilə çalaşdıqda parçalanmırdılar, yaşillər isə heç vaxt parçalanmırdılar (t e m i z x e t l e r). G. Mendel fərz edirdi ki, iki qohum – A, a geni (allel) mövcuddur və hər bir bitki ya Aa (heteroziqot) cütünün, ya AA və ya da aa (homoziqotlar) cütünün daşıyıcısıdır. Heç olmasa bir A-nın olması sarı rəngi verir, A-nın olmaması yaşıl rəngi verir (A – dominant allel, a – r e s s e s s i v a l l e l adlanır). Valideynlər çalaşdıqda varisə onların iki genindən biri 1/2 ehtimalı ilə verilir. Müşahidə olunan menzərə kommutativ cəbrə uyğun olur ki, burada vurma cədvəli aşağıdakı prinsiplə qurulur:

$$AA \times AA = AA, AA \times aa = Aa,$$

$$AA \times Aa = AA/2 + Aa/2, aa \times aa = aa,$$

$$aa \times Aa = aa/2 + Aa/2,$$

$$Aa \times Aa = AA/4 + aa/4 + Aa/2.$$

Araşdırmalarda statistik qanunauyğunluqlar bir-birilə çarpazlaşması mümkün olan orqanizmlərin olduqca böyük çoxluqlarında (təbii ki, eyni bioloji növ orqanizmlər nəzərdə tutulur) aşkar olunur. Belə çoxluqlar populyasiyalar adlanır. Populyasiyada çarpazlaşmanın müxtəlif sistemləri mümkündür. Bunlardan ən sadəsi p a n m i k s i y a dır, bu sistem tərəf – müqabilərin statistik asılı olmamalılığı ilə xarakterizə olunur. Panmiksiasdan tipik yayınmalar: i n b r i d i n q (qohumların üstünlüyü), a s - s o r t i v ç a r p a z l a ş m a (bu və ya digər fərdi əlamətlərə üstünlük) kimi yayınmalardır. Aşağıda əgər əksi söylənilməsə, fərz olunur ki, populyasiya panmiks və sonsuz populyasiyadır. Əgər populyasiyada hər hansı əlamət (f e n o t i p) A, a allel genlər cütü ilə nəzarət olunursa və hər hansı nəsildə AA, aa, Aa genotipləri uyğun olaraq x_1, x_2, x_3 ehtimalları ilə ifadə olunurlarsa, onda sonrakı nəsildə bu genotiplərin ehtimalları uyğun olaraq $x'_1 = p^2, x'_2 = q^2, x'_3 = 2pq$ olacaqdır (b u r a d a $p = x_1 + x_3/2, q = x_2 + x_3/2$) və bu ehtimallar valideyn nəsində genlərin ehtimallarıdır (H a r d i - V a y n b e r q q a n u n u). Genlərin qorunma qanunu: $p' = p, q' = q$ – qanununa əsasən, ($p^2, q^2, 2pq$) paylanması sonrakı nəsillərdə dəyişməz qalır (s t a s i o n a r l ı q p r i n s i p i). Fərz olunur ki, genlər məhv olmur və yaranmır, bir-birinə mutasiyalanmır və verilən əlamətə görə seçmə baş vermir. $p = x_1 + ax_3, q = x_2 + bx_3$ və $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ parametrləri mənfi olmayan və $a + b = 1, \alpha + a\gamma = \beta + b\gamma = 1/2$ münasibətləri ilə təyin olunduqda,

$$x'_1 = p^2 + 2\alpha pq, x'_2 = q^2 + 2\beta pq, x'_3 = 2\gamma pq \quad (1)$$

- stasionarlıq prinsipi doğru olan paylanma ailələrinə Hardy - Vaynberq qanunu tətbiq olunur.

(1) düsturları üçün genetik model vardır. Panmiksiyada bəzi pozulmalar da bu modellərə gətirir. Məs., $a = b = 1/2$, $\alpha = \beta = 1/2f$, $\gamma = 1 - f$ olduqda, əmsali f -ə bərabər inbriding üçün Rayt düsturları alınır.

Təbii seçmə, mutasiya və tədqiqat, populyasiya genetikası darvinizmlə birləşdirən klassik sintetik nəzəriyyəyə əsasən, evolyusiyanın əsas faktorlarıdır.

AA , aa , Aa genotipləri arasında selektiv fərqlər uyğunlaşma əmsalları λ_1 , λ_2 , λ_3 ilə xarakterizə olunurlar. Seçmə formal olaraq Beyes proseduru kimi təsvir olunur ki, burada «hipotez»lər varislərin genotiplərinə uyğundur. Bu hipotezlərin aprior ehtimalları p^2 , q^2 , $2pq$, aposterior ehtimalları isə

$$x'_1 = \lambda_1 p^2 / W, \quad x'_2 = \lambda_2 q^2 / W, \quad x'_3 = 2\lambda_3 pq / W$$

bərabərlikləri ilə verilir, burada $W = \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + 2\lambda_3 pq$ - populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyətidir. Sonrakı nəsildə genlərin ehtimalları aşağıdakı Fişer tənlikləri ilə təsvir olunur:

$$p' = p(\lambda_1 p + \lambda_3 q) / W, \quad q' = q(\lambda_3 p + \lambda_2 q) / W \quad (2)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ - selektiv neytral hal istisna olunduğu halda və $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ olduğu fərz olunduqda üç bərabərçəkili ($p' = p$, $q' = q$) paylanma alınır: $(0, 1)$, $(1, 0)$ - homoziqot və (p^*, q^*) :

$$p^* = (\lambda_2 - \lambda_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3);$$

$$q^* = (\lambda_1 - \lambda_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)$$

-heteroziqot və ya polimorf paylanma, bu paylanma heteroziqotun hər iki homoziqotdan yaxşı uyğunlaşdığı, yəni $\lambda_3 > \max(\lambda_1, \lambda_2)$ (heterozis) şərtində və ya daha pis, yəni $\lambda_3 < \max(\lambda_1, \lambda_2)$ (dizrupsiya) şərtində mövcuddur.

(p^*, q^*) bərabərçəkili polimorfizmi heterozis halında (və yalnız bu halda) (2) dinamik sistemi üçün dayanıqlıdır və onun trayektoriyaları [(2)-nin inikasının iterasiyaları] (p^*, q^*) polimorfizminə yığılır (stabilizasiya seçimi), bu şərtlə ki, əvvəldə $p > 0$, $q > 0$ olsun. Dizrupsiya halında hər bir trayektoriya $[(p^*, q^*)$ bərabərçəkiliyindən fərqli] əvvəlki paylanmaya yaxın, homoziqot paylanmalardan birinə yığılır. Başqa hallarda daha çox uyğunlaşmış homoziqot paylanmaya yığılma olur (istiqamətlənmiş seçim, nəticəsi - allelin fiksasiyasıdır).

Seçim prosesində populyasiyanın orta uyğunlaşması artır (Fişer fundamental teoremi).

Əgər A geni a -da τ ehtimalı ilə mutasiya edirsə, ters mutasiya isə hər bir nəsildə σ ehtimalı ilə baş verərsə və τ , σ olduqca kiçikdirsə (adətən, $\sigma \ll \tau \ll 1$), onda populyasiyada genotiplərin paylanması bərabərçəkili paylanmaya yaxınlaşır. Məs., $\sigma = 0$, $0 < \tau \ll 1$ və $\lambda_1 = \lambda_3 > \lambda_2$ olduqda (dominləşmə uyğunlaşmış A allelinə yaxındır) limitdə resessiv allel ehtimalı $q^* \approx \sqrt{\tau(1-\sigma)^{-1}}$ olan polimorfizm yaranır, burada $s = \lambda_2 \lambda_1^{-1}$ (Holdeyn düsturu).

Genetikanın inkişafı prosesində genin fenomonoloji konsepsiyası real məzmunla tədricən dolğunlaşdı. Müasir təsəvvürlərə əsasən, gen - punktuasiya surətdə ayrılır və buna görə də, funksional ayrılma nukleotid turşusunun xətti molekulunun bir sahəsidir DNK və RNK). Genin olması müəyyən zülalın (orqanizmə biokimyəvi reaksiyaların bu və ya digər zəncirini kataliz edən fermentin) sintezini təyin edir; bu isə orqanizmdəki əlamətlər çoxluğunun (tam fenotip) xarici mühitin qeyd olunmuş şərtlərində onun genlərinin toplusu (tam genotip) ilə təyin olunmaya xidmət edir. Tam genotip orqanizmin hər bir somatik (qeyri - cinsi) hüceyrəsinin nüvəsində ifadə olunur, bu zaman genlər xromosomlarda lokallaşır. Xromosomları formal olaraq, düz xətt parçaları kimi təsvir etmək olar ki, bu parçalar lokuslara - hissələrə bölünür ki, bunların hər biri qohum (allel) genlərin (bunların sayı ikidən çox ola bilər) ailəsindən biri ilə dolur. Verilən bioloji növ üçün morfoloji müxtəlif (qeyri-homoloji) xromosomların müəyyən haploid toplusu vardır. Homoloji xromosomlarda lokuslar müvafiq surətdə eyniləşdirilir, bundan sonra allel genlər bir lokusa aid hesab olunurlar. Ən sadə halda hər bir somatik hüceyrə (ziqot) diploid hüceyrə olur, yeni xromosomların iki haploid toplusunu özündə saxlayır, amma bu zaman cinsi hüceyrələr (qametlər) haploid hüceyrələrdir. Bu təbiidir, belə ki, bunlar ziqotlardan ele bölünmə yolu (meyoz) ilə alınır ki, bu halda iki homoloji xromosom digərindən asılı olmadan qız qamətlər üzrə ayrılırlar.

Bir xromosomda lokallaşmış genlər ilişkili genlər (rus. сцепленные) adlanır. Meyozda krossinqover baş verdikdə, yəni identik yerlərdə homoloji xromosomların parçalanması və sonra uyğun sahələrlə əvəzlənmə baş verdikdə ilişkili pozula bilər. Məs., əgər bir xromosomda A , B genləri bir-birilə ilişkili idirlərsə, bu xromosoma homoloji xromosomda isə onların allelləri a , b ilişkili idirlərsə, onda verilən lokuslar arasında krossinqover baş verdikdə yeni bağlılıq, yəni Ab , aB yaranır, yəni rekombinasiya baş verir. Bu sadə krossinqoverdir. i yerdə eyni zamanda parçalanma baş verdikdə i -qat krossinqover baş vermişdir, deyilir. Əgər iki verilən lokuslar arasında i - qat krossinqover ehtimalı r_i -yə

bərabərdirsə, onda rekombinasiya ehtimalı $r = \sum_{k=0}^{\infty} r_{2k+1}$

düsturu ilə təyin olunur. Əgər $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots$ (r_0 heç bir krossinqoverin baş verməməsi ehtimalıdır), onda $r \leq 1/2$.

Lokuslar arasında genetik məsafə $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} i r_i$ niyə

gözləməsi ilə ölçülür. Puasson paylanması üçün $r = (1 - e^{-2\lambda})/2$ (Holdeyn düsturu). $r = \ln 2 \lambda / 2$ - Kosambi düsturu eksperimental verilənlərlə daha yaxşı uzlaşır. Bu düsturlardan genlərin xromosomlarda yerləşməsi təsvir olunan genetik kartların qurulmasında istifadə olunur.

Allel genlərdə təyin olunan əlamət sadə əlamət adlanır. Məs., noxudun rəngləri sadə diallel əlamətdir; I-IV qan qrupları sadə üçallel əlamətdir; rezus - faktor sadə səkkizallel əlamətdir. Poliallel situasiyada Hardy - Vaynberq qanunu $x'_{ii} = p_i^2$, $x'_{ik} = 2p_i p_k$, $i < k$ şəklində olur, burada p_i - A_i geninin ehtimalıdır, x_{ik} , x'_{ik} - uyğun olaraq valideynlərin və nəsilərin

$A_i A_k$ genotiplərinin ehtimallarıdır, $i \leq k$: $p_i = x_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} x_{ik}$,

$x_{ki} = x_{ik}$. Stasionarlıq prinsipi Hardi – Vaynberq qanunu üçün ödənilməyi kimi, hər hansı böyük hecmli paylanmalar ailəsi üçün də ödənilir. Bütün poliallel stasionar paylanmalar təsvir və genetik interpretasiya olunmuşlar. Bunlardan B e r n ş t e y n i n k a d r i l q a n u n u n u: $x'_1 = p_1 q_1$, $x'_2 = p_1 q_2$, $x'_3 = p_2 q_1$, $x'_4 = p_2 q_2$ bərabərliklərlə verilən qanunu qeyd etmək olar, burada $p_1 = x_1 + x_2$, $p_2 = x_3 + x_4$, $q_1 = x_1 + x_3$, $q_2 = x_2 + x_4$. Bu qanunun təbii interpretasiyası belədir: iki kişi geni A_1 , A_2 və iki qadın geni B_1 , B_2 vardır, hər bir ziqotun genotipi iki müxtəlif cinsli genlər ibarətdir.

F i ş e r t e n l i k l e r i – m sayda $A_1, \dots, A_m$ allelləri olduğu halda – gen ehtimalları üçün

$$p'_i = p_i W_i / W, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3)$$

münasibətlə verilir, burada $W_i = \sum_k \lambda_{ik} p_k$, λ_{ik} –

$A_i A_k = A_k A_i$ genotipinin uyğunlaşma əmsali, $W = \sum_i p_i W_i =$

$= \sum_{i,k} \lambda_{ik} p_i p_k$ – populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyətidir

(W_i – bu altmövzuda A_i allelinin orta uyğunlaşma kəmiyyətidir).

$p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $\sum_i p_i = 1$ simpleksində bərabərçəkili ehti-

malların çoxluğu E simpleksin bəzi müstəvilərlə kəsişmələrinin birləşməsidir. Bu çoxluq simpleksin bütün tepələrini özündə saxlayır (homoziqot paylanmaları). Əgər E sonlu çoxluq olarsa,

onda $|E| \leq 2^m - 1$ olur. Buna görə $\Lambda = \|\lambda_{ik}\|_{i,k=1}^m$ matrisində bütün baş minorların sıfırdan fərqli olması kafi şərtədir. Əgər bütün $p_i^* > 0$ olarsa, bərabərçəkili $(p_i^*)_1^m$ paylanması tam polimorfizm adlanır. Λ_i , $1 \leq i \leq m$, – Λ -dan i -ci sütunun vahidlərlə əvəz olunmasından alınan matris olsun. Əgər $\det \Lambda \neq 0$ olarsa,

$$p_i^* = \det \Lambda_i / \sum_k \det \Lambda_k, \quad 1 \leq i \leq m$$

düsturları ilə ifadə olunan paylanmalar, həqiqətən də, bərabərçəkili tam polimorfizmi, yalnız və yalnız, o halda təyin edirlər ki,

$$\text{sign}(\det \Lambda_i) = \text{sign}(\det \Lambda), \quad 1 \leq i \leq m \quad (4)$$

münasibəti ödənilsin.

(3) inikası üçün

$$W' \geq W + \frac{3}{4\mu} \sigma^2$$

bərabərliyi ödənilir, burada $\mu = \max_{i,k} \lambda_{ik}$, σ^2 – allellərin orta uyğunlaşma kəmiyyətinin dispersiyasıdır, yeni

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m p_i (W_i - W)^2.$$

$W' > W$ bərabərsizliyi bərabərçəkili olmayan paylanmalar üçün ödənilir (fundamental teorem). (3) dinamik sisteminin

her bir trayektoriyası hər hansı bərabərçəkili paylanmaya ümumi halda $O(n^{-1/2})$ qiyməti ilə (n – nesillərin sayıdır) və bəzi əlavə fərziyyələrlə eksponensial olaraq sürətlə yığılır. Əgər (4) şərti ödənilərsə, $\det \Lambda \neq 0$ və W kvadratik forması müsbət $v_i = 1$ indeksinə malikdirsə, onda simpleksin daxilindən başlayan bütün trayektoriyalar bərabərçəkili tam polimorfizmə eksponensial olaraq sürətlə yığılırlar.

Polilokus halda (yeni mürekkəb əlamətlər üçün) yuxarıda təsvir olunan mexanizmlərə rekombinasiyalar əlavə olunur. $L = \{1, \dots, l\}$ lokuslar çoxluğunda krossinqoverlərin statistikası ilgisizlik paylanması ilə, yeni L çoxluğunun bütün mümkün ola bilən $U|V$ bölgülərinin çoxluğunda $r(U|V)$ ehtimal paylanması ilə formalaşır. Cüt-cüt asılı olmayan lokuslar halında bütün $U|V$ üçün $r(U|V) = (1/2)^{|L|-1}$ olur. Aşağıda fərz olunur ki, hər bir i, j lokuslar cütü üçün onları bir-birindən ayıran $U|V$ bölgüsü vardır ki, $r(U|V) > 0$ (sərt ilgisizlik lokuslarının yoxluğu).

Fərz olunur ki, i -ci lokusun alleli $a_1^i, \dots, a_{m_i}^i$ ($m_i \geq 2$) ilə işarə olunmuşdur. Onda $m_1 \dots m_l$, $g = \prod_{1 \leq i \leq l} a_{j_i}^i$, $1 \leq j_i \leq m_i$ qamətləri vardır. Bütün qamətlər çoxluğu üzərinə

$$\Delta(\Gamma) =$$

$$= \left\{ G \mid \sum_{g \in \Gamma} p(g) g(p(g) \geq 0, g \in \Gamma), \sum_{g \in \Gamma} p(g) = 1 \right\}$$

formal qabarıq kombinasiyaların simpleksi çəkilir, yeni Γ -də bütün ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\Delta(\Gamma)$. Hər bir g qaməti və hər bir $U|V$ bölgüsü üçün $g_U = \prod_{i \in U} a_{j_i}^i$, $g_V = \prod_{i \in V} a_{j_i}^i$ sub-qamətləri təyin olunmuşdur. $g \mapsto g_U$, $g \mapsto g_V$ inikası $\Delta(\Gamma)$ -yə xəttiliyə görə davam olunurlar. Bu teoremlərlə rekombinasion proses

$$G' = r(L)G + \sum_{U|V \neq L} r(U|V) G_U \cdot G_V$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada $L \equiv L|\emptyset$.

Bərabərçəkili paylanmalar lokusların statistik asılı olmamaları ilə (onların fiziki ilişkili olduğuna baxmayaraq), yeni

$$p(g) = \prod_{i=1}^m p(a_{j_i}^i), \quad g \in \Gamma$$

münasibətlərlə xarakterizə olunurlar ($a_{j_i}^i$ allelinin ehtimalı onu özündə saxlayan bütün qamətlərin ehtimallarının cəmi kimi təyin olunur). Rekombinasion prosesin hər bir trayektoriyası uyğun bərabərçəkili vəziyyətə yığılır. Bu vəziyyət ilkin gen ehtimalları ilə təyin olunur, belə ki, bu ehtimallar prosesin gedində dəyişməz qalır. Rekombinasion prosesdə paylanmanın entropiyası ciddi artır (H -teorem). Prosesin yığılma sürəti eksponensialdır.

Polilokus sistemində seçim əməli uyğunlaşma əmsalları $\lambda(g, h) = \lambda(h, g)$, $g, h \in \Gamma$ ilə təyin olunur. g qamətinin orta uyğunlaşma kəmiyyəti

$$W_g(p) = \sum_h \lambda(g, h) p(h)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bütün populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyəti:

$$W(p) = \sum_p p(g) W_g(p) = \sum_{g,h} \lambda(g, h) p(g) p(h),$$

dinamik tənliyin orta uyğunlaşma kəmiyyəti:

$$p'(g) = \frac{1}{W(p)} \left\{ p(g) W_g(p) + \sum_{U|V \neq L} r(U|V) D_{U|V,g}(p) \right\} \quad (5)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$\begin{aligned} D_{U|V,g}(p) &= \\ &= \sum_h \{ \lambda(g_U h_V, h_U g_V) p(g_U h_V) p(h_U g_V) - \\ &\quad - \lambda(g, h) p(g) p(h) \}. \end{aligned}$$

Əgər uyğunlaşma əmsalları

$$\lambda(k, g_U h_V) + \lambda(k, h_U g_V) = \lambda(k, g) + \lambda(k, h) \quad (6)$$

tənliyini ödəyərlərsə, onda fundamental teorem doğrudur. $W(p') \geq W(p)$ bərabərsizliyi doğrudur və bu bərabərsizlikdə bərabərlik yalnız (5)-ə daxil olan $p \mapsto p(g) \times \times W_g(p) / W(p)$ Fişer çevirməsinə nəzərən bərabərçəkili paylanmalar üçün ödənilir. (6) tənliyini additiv seçim ödəyir: $\lambda(g, h) = \sum_i \lambda_i(g_i, h_i)$, burada $g_i, h_i, - g, h$ qamətləri

lərində i -ci lokusun genleridir. Bu (6) tənliyinin rekombinasion invariantlıq tələbinə tabe, yeni $\lambda(g_U h_V, h_U g_V) = \lambda(g, h)$ şərtini ödəyən həllərinin ümumi şəklidir. Additiv seçimə bütün trayektoriyalar fundamental teorem və H - teoreme əsasən Fişer bərabərçəkili paylanmalarının çoxluğunda yığılır.

Olduqca çox sayda asılı olmayan lokusların additiv emeli uyğunlaşma əmsalının normal paylanmasının formalaşmasına (limitdə) gətirir. Bu kəmiyyət əlamətinə misaldır (diger misallar: boy, çəki).

Yuxarıda fərz olunmuşdur ki, baxılan genlər cinsi differensiasiya ilə bağlı deyildirlər (autosom durlar). Həqiqətən də, ziqotdakı xromosomlar arasında iki cinsi xromosom vardır, məhz dişi - iki X - xromosomu və erkəklərdə X - xromosomu Y - xromosomu ilə kombinasiyada. Cinsi lokuslarda rekombinasion prosesin dinamikası autosom haldakı kimi olur, keyfiyyətə seçim emeli yalnız bir cə diallel X - lokus üçün araşdırılmışdır.

Real populyasiyalar sonlu və çox da böyük olurlar. Bunların evolyusiyasını öyrəndikdə gen tezliklərinin təsadüfi fluktuasiyalarını (gendreyfini) nəzərə almaq, yəni təsadüfi proseslər nəzəriyyəsini istifadə etmək zəruridir. Autosom lokusun ən sadə iki A, a alleli modelində fərz olunur ki: 1) populyasiya haploid populyasiyadır: onun obyektlərinin sayı bütün nəsillərdə N -ə bərabərdir; 2) hər bir individin genofondu sonsuzdur və bu genofond tərkibində ehtimalları verilmiş nəsildəki allellərin sayına mütenasib olan allelləri saxlayır. Onda növbəti nəsildə a geninin k ekzemplar olması ehtimalı evvelki nəsildə onların j sayda olduğu şərtile

$$P_{kj} = C_N^k (j/N)^k (1-j/N)^{N-k}, \quad 0 \leq k, j \leq N$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bu Markov zənciridir və onun yalnız iki uducu: $k=0$ və $k=N$ vəziyyətləri vardır. Bu halda j ilkin vəziyyəti məlum olduqda, $k=0$ və $k=N$ vəziyyətləri üçün populyasiya limit ehtimalları $1-j/N$ və j/N ilə homozitliyə (daha dəqiq homogenliyə) yaxınlaşır. Yığılma sürəti eksponensialdır və $\|p_{kj}\|_{k,j=1}^{N-1}$ matrisinin spektral radiusu ilə təyin olunur. Bu radius $1-1/N$ -ə bərabərdir, ümumiyyətlə isə, bu matrisin spektri $\lambda_{N,k} = N^{-k} A_N^k$, $2 \leq k \leq N$ Feller düsturu ilə təyin olunur. $N \rightarrow \infty$ olduqda limit diffuzion modeldə j/N diskret təsadüfi kəmiyyəti qiymətləri $[0, 1]$ -dən olan kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlə əvəz olunur və alınmış bu model ehtimal sıxlığı $\varphi(x, t)$ üçün Kolmoqorov (Fokker - Plank) tənliyi ilə təsvir olunur:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{x(1-x) \varphi(x, t)\} \quad (7)$$

(zaman vahidi - bir nəslin orta yaşama müddətidir - doğumundan reproduksiya qədər). (7)-dən $\varphi(x, t; y)$ sıxlıq funksiyası üçün ilkin paylanmanın $\delta(x-y)$ olduğu halında Kimura düsturu adlandırılan aşağıdakı düstur alınır:

$$\varphi(x, t; y) = y(1-y) \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(2m+1) \times$$

$$\times F(1-m, m+2, 2, y) F(1-m, m+2, 2, x) \exp(-m(m+1)t/2N)$$

burada F - hiperhəndəsi funksiyadır.

Gen dreyfi sonlu populyasiyalarda bərabərçəkili ehtimalların təsadüfi variasiyalarına gətirir. a allelinin bərabərçəkili ehtimalının paylanma sıxlığı üçün ümumi Rayt düsturu aşağıdakı şəkildədir.

$$\theta(q) = \frac{C}{q(1-q)} \exp\left(2N \int \frac{\Delta q}{q(1-q)} dq\right), \quad C = \text{const}, \quad (8)$$

burada Δq - sistematik meyli ehtimaldır (seçim emeli, mutasiya və s. nəticəsində yaranan). N - haploid populyasiyasında obyektlərin sayıdır. Məs., yalnız seçim apanılmışdırsa, onda

$$\Delta q = \frac{q(1-q)}{2W} \frac{dW}{dq}$$

olur və (8)-dən

$$\theta(q) = C W^N / q(1-q)$$

düsturu alınır. $[0, 1]$ parçasında θ funksiyasının inteqrallandırıldığı - (8) düsturunun $q_k = k/N$, $1 \leq k \leq N-1$ ehtimalları faktiki diskret paylanmanın $N \rightarrow \infty$ olduqda kontinual approksimasiyası olduğu səbəbindən. $q=0; 1$ kənar qiymətləri istisnadır, belə ki, burada heterogen vəziyyətlər üçün şərti paylanmalara baxılır.

Xalis mutasiya posesi üçün $\Delta q = \tau(1-q) - \sigma q$ və

$$\theta(q) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}$$

olur, burada $\alpha = 2N\tau$, $\beta = 2N\sigma$, $B(\alpha, \beta)$ – beta – funksiyadır.

Mutasiya və seçimin birlikdə təsiri halında hesab etmək olar ki, bu faktorların sistematik təsirləri toplanır və uyğun olaraq,

$$\theta(q) = CW^N q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}$$

olur (dağılma effekti homogenliyə yaxınlaşmanın qarşısını alan mutasion proseslə aradan qaldırılır).

20-ci əsrin 60-cı illərində M. Kimura tərəfindən irəli sürülmüş evolyusiyanın neytralist nəzəriyyəsi (molekulyar səviyyədə) gen dreyfinin təyinedici roluna əsaslanmışdır, nəticədə populyasiyada çoxsaylı selektiv neytral mutasiyaların fiksasiyası baş verir: bir dəfə yaranmış selektiv neytral mutant allel bütün populyasiya üzrə $1/N$ ehtimalı ilə yayılır. Əgər bu allel vəhşi allel üzərində selektiv üstünlüyə malik olarsa, onda onun fiksasiya ehtimalı $1/N$ -dən böyük olur. M. Kimuranın təklif etdiyi bu növ modellərdən birində fiksasiya ehtimalı aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{1}{N} \left\{ \int_0^1 \exp(-B_1 x + B_2 x(1-x)) dx \right\}^{-1}$$

burada $B_1 = 2N\beta_1$, $B_2 = 2N\beta_2$ konstantlardır, β_1 , β_2 seçimin intensivliyindən asılıdır.

Yeganə bir mutantın talei *şaxələnen proseslər* nəzəriyyəsi metodları ilə öyrənilə bilər. Məs., klassik *Qalton – Watson prosesini* sonsuz haploid populyasiyasında mutantların yayılma prosesi kimi interpretasiya etmək olar. Əgər $\{p_k\}_0^\infty$ mutant individin

varisleri sayının paylanması, $P(z) = \sum_{k=0}^\infty p_k z^k$ bu paylanmanın

doğuran funksiyası olarsa, onda n -ci nəsildə varisler sayının paylanması $P(z)$ -in n -ci iterasiyası $P_n(z) = P(P_{n-1}(z))$ düsturu ilə təyin olunur. Əgər varisler sayının riyazi gözləməsi $\bar{k} = P'(1) \leq 1$ olarsa, onda mutant ayrısı öləyir, yeni şaxələnen proses cırlaşır. Əgər $\bar{k} > 1$ olarsa, onda cırlaşma ehtimalı $\zeta = P(\zeta)$ tənliyinin $(0, 1)$ -dən olan yeganə kökünə bərabərdir. ζ_n – n -ci nəsildən gec olmayaraq cırlaşma ehtimalı $\zeta_n = P(\zeta_{n-1})$, $\zeta_0 = 0$ iterasiyalar ilə təyin olunur və bu ehtimallar ζ -ya yığılırlar ($\bar{k} < 1$ olduqda eksponensial, $\bar{k} = 1$ olduqda isə üstlü sürətlə). Çox da böyük olmayan selektiv üstünlüyə malik mutant üçün varisler sayının paylanması $\bar{k} > 1$ parametrlili Puasson paylanması ilə yaxşı aproksimasiya olunur, bu halda $\zeta = \exp(\bar{k}(\zeta - 1))$.

Əd.: [1] К и м у р а М., Молекулярная эволюция: теория нейтральности, пер. с англ., М., 1985; [2] Л и Ч., Введение в популяционную генетику; [3] Л ю б и ч Ю. И., Математические структуры в популяционной генетике, К., 1983; [4] М о р а н П., Статистические процессы эволюционной теории, пер. с англ., М., 1973.

738 POTENSİAL

POTENSİAL « потенциал; potential » – bax, *Markov semi-grupu*, *Potensial nəzəriyyəsi* *Markov zənciri* üçün.

α – **POTENSİAL** « α – потенциал; α – potential » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* *Markov prosesi* üçün.

POTENSİAL(1) Gibbs meydanının « потенциал гиббсовского поля; Gibbsian field potential » – *Gibbs paylanması* və *Gibbs təsadüfi meydanının* keçid ehtimallarını vermək üçün istifadə olunan parametrlər toplusudur. Bu zaman fərz olunarsa ki, meydanın qiymətlərinin ölçülən fəzası (X, D) və hesabı T çoxluğu (əksər hallarda $T = \mathbb{Z}^d$, d – ölçülü tamqiymətli şəbəkədir) verilmişdir, bu halda şəbəkəvari sistemin P -i x_A -nın ($x_A \in X^{(A)}$) ölçülən həqiqi qiymətli funksiyalarının $U = \{U_A(x_A), A \subset T, |A| < \infty\}$ sistemi kimi təyin olunur. Bəzən $U_A(x_A)$ P -nin ∞ qiyməti alması da mümkün sayılır. Adətən, baxılan P -lar sinfinin üzərinə qoyulan tələb P -in hər hansı Banax fəzasına mənsub olmasından ibarət olur. Məs., $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, $\|U\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A: t \in A} \sup_{x_A} |U_A(x_A)|$ norması və

ya $\alpha > 0$ olduqda $\|U\|_\alpha = \sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A: t \in A} e^{\alpha|A|} \sup_{x_A} |U_A(x_A)|$ nor-

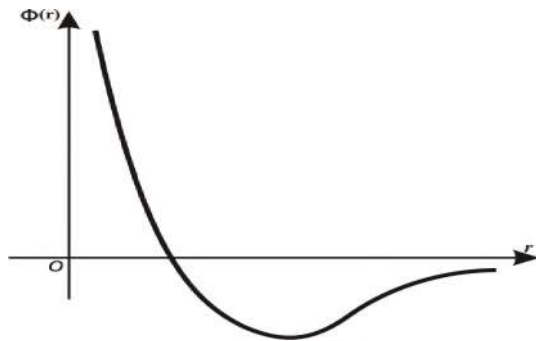
ması daxil olunur, burada $|A|$ – A çoxluğunun gücüdür. Bir çox hallarda $\mathbb{Z}^d$ -də yerindəyişmələr qrupuna nəzərən P -in invariant olması tələbi də daxil olunur. Əgər $\text{diam} A > r$ olduqda $U_A \equiv 0$ olarsa, P qarşılıqlı təsir radiusu $r < \infty$ olan *finit potensialı* adlanır.

Verilən P -a uyğun Gibbs təsadüfi meydanları sinfini DLR – şərti ilə fərqləndirmək qəbul edilmişdir. Bu halda P -in statistik mexanikaya tətbiqi çərçivəsində P potensial enerji fiziki mənasını daşıyır. Kvant meydan nəzəriyyəsində P sistemin loqranjandır.

Bir çox hallarda U P -nin doğurduğu, həqiqi $\beta > 0$ parametrlindən asılı $U_\beta = \{\beta U_A, A \subset T\}$ P -lar ailəsinə baxılır. Statistik mexanikaya tətbiqlərdə β parametri temperatura tərs kəmiyyətdir. Əgər X fəzası sonlu olarsa və bu fəzada $\theta \in X$ xüsusi elementi seçilsə ki, hər hansı $t \in A$ qiymətində $x_A = (x_t, t \in A)$ və $x_t = \theta$ olarsa, $U_A(x_A) = 0$ olsun, onda mühüm P -lar ailəsi yaranır. $\mu_x, x \in X \setminus \{\theta\}$ həqiqi parametrlər olarsa, burada təbii olaraq $U_{\{\theta\}}(x) = -\mu_x$ götürərək, yeni əmələ gəlmiş U_μ P -lar ailəsinə baxılmalıdır, bu ailə isə $\mu = (\mu_x, x \in X \setminus \{\theta\})$ vektor parametrlindən asılıdır. Fiziki interpretasiyada bu şəbəkəvari qaza uyğundur, $x_t = \theta$ hadisəsi isə t nöqtəsində hissəciyin olmaması kimi interpretasiya olunur. μ_x -in qiyməti x tipli hissəciyin kimyəvi potensialı adlanır.

Nöqtəvi Gibbs meydanına $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında baxdıqda P – bütün sonlu $A \subset \mathbb{R}^d$ altçoxluqlarında təyin olunmuş $U = \{U(A)\}$ ölçülən funksiyası kimi təyin olunur. Bu halda, yenə də $U_\beta = \{\beta U(A)\}$ və U_μ şəklində P -lar ailəsinə baxılır ki, burada $\text{eğer } |A| \geq 2$ olarsa, $U_\mu = U(A)$, $|A| = 1$ olduqda isə $U_\mu(A) = -\mu$; bu P -lar β tərs temperaturundan və kimyəvi μ (skalyar) potensialından asılı olur. Bəzən cüt P -dan istifadə

olunur, yeni $U(A)$ potensialı ele olur ki, $|A| \neq 2$ olduqda $U(A) = 0$ olur. Bu P.-in eyni zamanda translyasion invariant və izotrop olduğu fərz olunarsa, onda bu P. $r \in (0, \infty)$ funksiyası olan ele $\Phi(r)$ funksiyası ilə verilir ki, $U(\{t_1, t_2\}) = \Phi(|t_1 - t_2|)$. Bu halda misal $\Phi(r) = k_1 r^{-12} - k_2 r^{-6}$, $k_1, k_2 > 0$ şəklində Lenard-Conson potensialıdır ki, bu P.-dan biratomlu qazların model təsvirində istifadə olunur ($d = 3$). Şəkildə belə P.-ın qrafiki təsvir olunmuşdur və o, P.-ın qarşılıqlı təsirinin tipik cəhətlərini əks etdirir. Əyrinin azalmağa olan hissiyəti kiçik məsafələrdə hissəciklərin itələnməsinə, artmağa olan hissiyəti isə böyük məsafələrdə cazibəyə uyğundur.



İtələmə qüvvəsi $r \rightarrow 0$ olduqda ∞ -a, cazibə qüvvəsi $r \rightarrow \infty$ olduqda 0-a yaxınlaşır.

Əd.: [1] Д о б р у ш и н Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 201-29; 1970, т. 15, в. 3, с. 469-97; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., «Функц. анализ и ее прилож.», 1968, т. 2, № 4, с. 31-43; [3] М а л ы ш е в В. А., М и н и л о с Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М., 1985; [4] П р е с т о н К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [5] С и н а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] P r e s t o n Ch., Random fields, B. - [a. o.], 1976; [7] R u e l l e D., Thermodynamic formalism, Reading (Mass.), 1978.

POTENSİAL martinqallar nəzəriyyəsində «**потенциал** в теории мартиггалов; **potential** in martingale theory» - $t \rightarrow \infty$ olduqda $MX_t \rightarrow 0$ (həm də sanki yaqin $X_t \rightarrow 0$) şərtini ödəyən, mənfə olmayan $(X_t)_{t \geq 0}$ supermartinqaldır. $(A_t)_{t \geq 0}$, $-MA_\infty < \infty$ şərtini ödəyən artan proses, $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ - ilkin ehtimal fəzasında σ - cəbrlərin azalmayan ailəsi olsun. $Z_t = M[A_\infty - A_t | \mathcal{A}_t]$ olan $(Z_t)_{t \geq 0}$ prosesi A prosesinin doğrduğu potensial (uyğun olaraq, $Z_t = M[A_\infty - A_t | \mathcal{A}_t]$ olan $(Z_t)_{t \geq 0}$ A prosesinin doğrduğu sol potensial) adlanır. Hər bir P. üçün onu doğuran yeganə artan öngörül proses vardır (bax, Dub - Meyer ayrılığı). Martinqallar nəzəriyyəsi və harmonik funksiyalar nəzəriyyəsi arasında müəyyən bir analogiya mövcuddur. Belə ki, supermartinqallara superharmonik funksiyalar, martinqallara harmonik funksiyalar uyğun olur (məs., əgər f Laplas operatoruna cavab verən harmonik funksiya, $(w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesidirsə, onda $(f(w_t))_{t \geq 0}$ martinqaldır), potensiallara müsbət ölçülər üçün Qrin potensialları uyğundur (bax, Riss ayrılığı).

Əd.: [1] D e l l a c h e r i e C., M e y e r P.-A., Probabilites et potentiel. Theorie des martingales, t. 1-2, P., 1975-80.

POTENSİAL ƏNGƏLƏDAYANLIQLILIQ «**потенциальная помехоустойчивость; potential noise immunity**» - rabitə kanalı ilə küylərlə ötürülən məlumatın qəbulunda minimal mümkün ola bilən təhriflərdir. Məs., asılı olmayan additiv $n(t)$ bəyaz küyü olan kanal üzrə $a(t)$ məlumatı ötürüldükdə, qəbul olunmuş siqnal $r(t) = S(t, a(t)) + n(t)$, $t \in [0, T]$ şəklində olur, burada $S(t, a)$, $-t$ və a argumentlərinin məlum funksiyasıdır. Qəbuledicinin P. ə.-nin tapılması $r(s)$, $s \in [0, T]$ müşahidələri üzrə $a(t)$ üçün ən yaxşı statistik qiymət $\hat{a}(t)$ -nin riskinin hesablanmasına ekvivalentdir. İtki funksiyasının seçilməsi ötürülmənin konkret şərtlərdən olduqca asılı ola bilər. Hər hansı sonlu çoxluğun elementləri olan məlumatların ötürülməsində statistik qiymətin riski, bir qayda olaraq, xətanın maksimal və ya orta ehtimalı ilə ölçülür. Digər hallarda, məs., $a(t)$ məlumatı stasionar proses olduğu halda risk, adətən, kvadratik itki funksiyası halında hesablanır.

Əd.: [1] К о т е л ь н и к о в В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, М. - Л., 1956.

POTENSİAL FUNKSİYASI «**потенциальная функция; potential function**» - əlamət fəzası $\mathbb{R}^n$ -də nöqtələrlə verilən obyektlər arasında oxşarlığı ölçmək üçün, təsnifat məsələlərində istifadə olunan funksiyadır. P. f. iki nöqtənin müsbət funksiyası $K(x, z)$ -dir və bu iki nöqtə arasındakı məsafə $\rho(x, z)$ sonsuzluğa yaxınlaşdıqda, o, sıfıra yaxınlaşır.

Təsnif metodu P. f.-dan istifadəyə əsaslanır və metod potensial funksiyalar metodu adlandırılmışdır. Bu metodun meğzi aşağıdakı fiziki analogiyaya əsaslanır. x_k -nin

seçimi obrazları ilə ifadə olunan iki A və B siniflərini ayırmaq tələb olunur. Əgər seçimi obrazlar enerji mənbələri kimi təsəvvür olunarsa, onda x_k nöqtələrinin ixtiyari birində potensial maksimal qiymətinə çatır və sonra x_k -dan aralı ixtiyari nöqtəyə keçiddə azalır. Bu analogiyaya əsaslanaraq, P. f. $K(x, x_k)$ -ni təsvir edən ekvipotensial konturların varlığını qəbul etmək olar. Hesab etmək olar ki, A sinfine daxil olan seçimi obrazların əmələ gətirdiyi klaster zirvələrində A sinfine aid olan x_k seçimi obrazları yerləşən «dağ yaylası» əmələ gətirir. B sinfinin seçimi obrazları üçün analogi mülahizələr aparmaq olar. Bu iki «yayla» «dərə (vadi)» ilə ələ bölünür ki, burada potensial sıfıra yaxındır. Bu intuitiv səbəblərə əsaslanan həlledici qayda aşağıdakı kimidir. Əgər

$$\sum_{x_k \in A} K(x, x_k) > \sum_{x_k \in B} K(x, x_k)$$

olarsa, $x \in A$ hipotezi, əks halda $x \in B$ hipotezi qəbul olunur.

Əd.: [1] А й з е р м а н М. А., Б р а в е р м а н Э. М., Р о з о н о в Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., 1970.

POTENSİAL NƏZƏRİYYƏSİ Markov prosesi üçün «**потенциала теория** для марковского процесса; **potential theory** for a Markov process» - klassik potensial nəzəriyyəsinin və onun kəsilməz zamanlı Markov prosesləri nəzəriyyəsinin çərçivəsində inkişaf etmiş müasir variantının ehtimalı analoqudur (müqayisə et, Potensial nəzəriyyəsi Markov zənciri üçün). Təsədüfi proseslər nəzəriyyəsi və potensial nəzəriyyəsinin kəsişməsi

ile bağlı məsələlərin sistematik müzakirəsi C. Dubun [1]-dəki məqaləsi ilə təməli qoyularaq, bu sahədə bir seriya işlərə başlanmışdır və qeyd olunan məqalə Braun hərəkəti və onun fəza – zaman analoqu ilə əlaqədar bir sıra problemlərə həsr olunmuşdur (bax, [2]). C. Hant [3]-də Markov proseslərinin geniş bir ailəsini seçib ayırmışdır; bu proseslər sonradan *Hant prosesləri* adlandırılmışdır və bunların hər biri *eksessiv funksiyalar* sinfi ilə bağlıdır ki, bunlar özünü bir çox cəhətlərinə görə superharmonik funksiyalara oxşar surətdə aparır. Məhz buna görə də, ümumi ehtimal P. n.-ni yaratmaq mümkün olmuşdur. Bu nəzəriyyə əsasında maksimumun tam prinsipilə əlaqəli analitik nəzəriyyənin anlayış və problemləri kompleksinə yeni anlam verilmişdir (bax, aşağı).

[3]-də istifadə olunan texniki vasitələr arasında bu və ya digər çoxluqlara ilk çatım anlarının açıq çoxluqlar və kompaktlara çatım anları ilə approksimasiyası haqqında teoremlər mühüm yer tutur. K. Şi (C. Shih, 1970) bu teoremlərin müasir əvəzləmələrini tapdıqdan sonra, C. Hantın bir çox nəticələrini Markov proseslərinin olduqca daha geniş sinflərinə keçirmək mümkün olmuşdur (bax, [9]). Digər tərəfdən, nəzəriyyənin yeni mühüm aspektlərini inkişaf etdirmək mümkün olmuşdur (bax, [5], [7], [15], [16]), bir sıra hallarda isə ümumi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində faydalı analoqları tapmaq müvəffəq olmuşdur. P. n. bununla hiss olunacaq tərzdə uduşdur, belə ki, ehtimali yanaşma bu nəzəriyyənin əsas atributlarından çoxuna yeni nöqtəyi – nəzərə səbəb olaraq, nəzəri – potensial xarakterli yeni konsepsiyaların yenidən işlənilməsinə gətirmişdir (bax, [4]).

P. n.-nin müxtəlif istiqamətləri arasında eksessiv funksiyalar və ölçülər nəzəriyyəsinə, sərhəd nəzəriyyəsi məsələlərindən Dirixle məsələsi və Martin sərhədi kimi məsələlərə, tutum enerji və bəzi digər anlayışların ehtimali izahına, nəhayət, bu və ya digər Markov proseslərinin potensial nüvəsinin təsvirinə həsr olunmuş istiqamətləri qeyd etmək olar. Markov prosesləri nəzəriyyəsi ilə Dirixle klassik integralı nəzəriyyəsini əlaqələndirən Dirixle formaları nəzəriyyəsini də bu istiqamətə aid etmək olar (bax, *Markov prosesi Dirixle forması*). Ehtimali P. n. ilə Markov proseslərinin additiv funksionallar nəzəriyyəsinin bir sıra aspektləri qovuşur (bax, *Markov prosesi; additiv funksional*). Qeyri – biricins Markov prosesləri ilə uzlaşan P. n. üzrə tədqiqatlar vardır (bax, [12]).

Eksessiv funksiyalar. Müzakirə olunan nəzəriyyədə eksessiv funksiya anlayışı mərkəzi yer tutur. E – hər hansı metriklənə bilinen kompakt Borel çoxluğu, $\mathcal{B}(\mathcal{B}^*)$ – onun Borel altçoxluqlarının çoxluğu (uyğun olaraq, universal ölçülən altçoxluqların, yeni $\mathcal{B}$ -də hər bir sonlu ölçü üzrə $\mathcal{B}$ -nin tamamlayıcısına daxil olan) olsun. $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, dy)$ olan, qınlı sağ $X = (X_t, \zeta, A_t, P_x)$, $t \geq 0$ Markov prosesi qeyd oluna bilər. Əgər $f: E \rightarrow [0, \infty]$ funksiyası universal ölçülən və bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $e^{-\alpha t} P_t f \leq f$ və $\lim_{t \downarrow 0} P_t f = f$ şərtlərini ödəyirsə, $\alpha \geq 0$, f funksiyası X prosesi üçün α – eksessiv funksiya adlanır, burada

$$P_t f(\cdot) = \int_E f(y) p(t, \cdot, dy)$$

[$\alpha = 0$ olduqda, « α – eksessiv funksiya », « α – potensial » əvəzinə « eksessiv funksiya », « potensial » terminləri istifadə olunur (bax, aşağı)]. α – eksessiv funksiyalar çoxluğu S_α ilə işarə olunur.

740 POTENSİAL

Misallər. 1) Eksessiv funksiya mühüm misallardan biri $\Gamma \in \mathcal{B}$ çoxluğunun bərabərçəkili potensialı $\pi_\Gamma(x)$, $x \in E$ ilə, ya da, nadir olmayan hallarda, daha ümumi çoxluğun $t=0$ anından sonra Γ çoxluğuna haçansa çatım ehtimalı P_x – ehtimalına bərabər götürülən bərabər potensialla alındığı haldır.

2) İxtiyari $\Gamma \in \mathcal{B}^*$ çoxluğu üçün

$$r_\alpha(\cdot, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, \cdot, \Gamma) dt$$

Funksiyası α – eksessiv funksiyadır, $r_0(x, \Gamma)$, $x \in E$, $X_0 = x$ olduqda prosesin Γ çoxluğunda olduğu müddətin orta qiyməti ilə üst-üstə düşür. $r_\alpha(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}^*$ funksiyası potensialların α – nüvəsi və ya Qrin α – ölçüsü adlanır. Hər bir B^* – ölçülən $g \geq 0$ funksiyasının α – potensialı –

$$R_\alpha g(\cdot) = \int_E g(y) r_\alpha(\cdot, dy)$$

S_α -ya daxildir. Bu faktı ümumiləşdirərək, qeyd etmək olar ki, X -in ixtiyari $A = A(t) \geq 0$ additiv funksionalının α – p o –

tensialı $M_x \int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t$ de α – eksessiv funksiyadır.

3) Elə hallar olur ki, ixtiyari $x \in E$ üçün $r_\alpha(x, \cdot)$ ölçüsü $\mathcal{B}$ -də hər hansı σ – sonlu m ölçüsünə nəzərən elə $\rho_\alpha(x, \cdot)$ sıxlığına malik olur ki: a) $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$ funksiyası $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$ fəzasına nəzərən ölçülən olur, b) bütün $y \in E$ üçün $\rho_\alpha(\cdot, y) \in S_\alpha$ və c) ixtiyari $x \in E$ qiymətində $(E, \mathcal{B})$ -də hər hansı sağ Markov prosesi $\hat{X}$ üçün $\rho_\alpha(x, \cdot)$ α – eksessiv funksiyadır (bu şərt haqqında *Dual Markov prosesi* məqaləsinə bax). Onda $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$ funksiyası Qrin α – funksiyası adlanır. Bu halda $\mathcal{B}$ -də verilmiş ixtiyari σ – sonlu μ ölçüsünün α – p o –

$$R_\alpha \mu(\cdot) = \int_E \rho_\alpha(\cdot, y) \mu(dy)$$

S_α -ya daxildir.

4) Yuxarıda daxil olunmuş anlayışların yaxşı məlum olan problemləri vardır. Məs., əgər X standart n – ölçülü Braun hərəkəti olarsa ($n \geq 3$) və bu proses E -nin hər hansı n – ölçülü oblastından ilk çıxış anında qınlı proses olarsa, onda eksessiv funksiyalar sinfi $f \equiv \infty$ funksiyası ilə tamamlanmış, E -də superharmonik funksiyalar sinfine identik olur və E -də sanki yəqin sonlu ölçü potensialları məhz adi Qrin potensialları olur (bax, [2]).

Eksessiv funksiyalar (yalnız qısalıq üçün $\alpha = 0$ halı götürülür) bir çox faydalı xüsusiyyətlərə malikdirlər, bunlardan ekseriyəti ilk dəfə [3]-də Hant prosesi halı üçün isbat olunmuşdur (bax, [5] – [7]), sonradan bu xassələr sağ Markov prosesləri üçün də isbat edilmişdir (bax, [9]). Belə ki, a) iki eksessiv funksiyanın minimumu eksessiv funksiyadır, b) S_0 sinfi özünün

elementlərinin azalmayan ardıcılıqları üzrə limite keçidə nəzərən qapalı sinifdir, c) əgər bütün $x \in E$ üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda $p(t, x, E) \rightarrow 0$ olarsa, onda hər bir $f \in S_0$ funksiyası bezi mənfi olmayan funksiyaların potensiallarının azalmayan ardıcılığı-nın limiti kimi ifadə olunur. Ekssessiv funksiyanın tərifindəki $\mathcal{B}^*$ – ölçülənlik xassəsinin faydalı dəyişməsinə almaq olur: ixtiyari $f \in S_0$ funksiyası sanki Borel funksiyası, yeni prosesin ixtiyari ilkin paylanması verilərsə və f_1 və f_2 Borel funksiyalarının münasib seçildiyi halda $f_1 \leq f \leq f_2$ olur və $0 \leq t \leq \zeta$ olduqda $f_1(X_t) \equiv f_2(X_t)$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

X prosesinin trayektoriyaları boyunca ekssessiv funksiyaların özlərini aparmalarında ümumi cəhətlər aşağıdakı kimi təsvir olunur. Prosesin başlanğıc paylanması ixtiyari və $f \in S_0$ olarsa, $\zeta \leq t < \infty$ olduqda, 0 qiymətilə tamamlanmış $f(X_t)$ təsadüfi funksiyası hər hansı σ – cəbrlər axınına nəzərən sağdan kəsilməz (sanki yəqin) supermartinqaldır. Buradan, xüsusi halda, verilmiş prosesin doğurduğu və H. Kartan (H. Cartan, bax, [2]) incə topologiyasının analoqu olan incə və ya təbii $\mathcal{T}$ topologiyasında ixtiyari ekssessiv funksiyaların kəsilməzliyi alınır. Bu halda $A \subset E$ çoxluğu $\mathcal{T}$ topologiyasına o halda və hər dəfə elə aid olunur ki, hər bir $x \in A$ -ya elə $\Gamma \in \mathcal{B}$ qarşı qoymaq mümkün olsun ki, $x \in \Gamma \subset A$ və $\tau_{E \setminus \Gamma} > 0$ münasibətləri P_x – sanki yəqin ödənilsin; burada

$$\tau_{E \setminus \Gamma} = \inf \{t > 0 : X_t \in E \setminus \Gamma\}$$

– Γ -dən ilk çıxış anı və $E \setminus \Gamma$ çoxluğuna başlanğıc anından sonra ilk çatım anıdır (burada $\inf \emptyset = \zeta$).

S_0 konusunun strukturunun öyrənilməsi istiqamətində mühüm səylər göstərilmişdir, məsələn, S_0 -ın elementlərinin onun کنار elementləri üzrə integral ayrılışlarının varlığı və yeganəliyinin müəyyənəşdirilməsi istiqamətində (əgər $f_1, f_2 \in S_0$ üçün $f_1 + f_2 = f$ münasibəti yalnız $f_i = c_i f$ halında $c_i, i = 1, 2$ sabitlər olduqda ödənilərsə, f – ekssessiv funksiyası کنار və ya minimal ekssessiv funksiya adlanır). Oxşar problematika bir tərəfdən Martin sərhədləri nəzəriyyəsinə, digər tərəfdən qabarıq konular nəzəriyyəsinə qovuşur. Ən tamamlanmış nəticələr [8]-də şərh olunmuşdur.

α – ekssessiv funksiyalarla yanaşı α – ekssessiv ölçü lərdən ($\alpha \geq 0$) də çox istifadə olunur. α – ekssessiv ölçülər adı $\mathcal{B}$ -də və $\mathcal{B}^*$ -də verilən ixtiyari σ – sonlu μ ölçüsünə də aid edilir, lakin bu o halda edilir ki, əgər $t \geq 0$ olduqda $e^{-\alpha t} \mu P_t \leq \mu$ və $t \downarrow 0$ olduqda $\mu P_t \rightarrow \mu$ münasibətləri ödənilsin, burada

$$\mu P_t(\cdot) = \int_E p(t, x, \cdot) \mu(dx)$$

($\alpha = 0$ olduqda terminologiya ekssessiv funksiyalar halındakı kimi sadələşir). $\alpha > 0$ və $x \in E$ qeyd olunduqda, $r_\alpha(x, \cdot)$ Qrin α – ölçüləri α – ekssessiv olur, eynilə də, bunu $\mathcal{B}$ və $\mathcal{B}^*$ -da ixtiyari

$$\nu R_\alpha(\cdot) = \int_E r_\alpha(x, \cdot) \nu(dx)$$

ölçüsünün α – potensialı haqqında da hökm etmək olar, əgər νR_α ölçüsü σ – sonlu olarsa. Ekssessiv ölçülər nəzəriyyəsi bəzi cəhətlərinə görə ekssessiv funksiyalar nəzəriyyəsinə sadədir və bəzi hallarda hətta daha faydalıdır (bax, [3], [6]).

Harmonik ortalama operatorları. Analitik potensial nəzəriyyəsinə harmonik ölçülərə görkəmli yer ayrılır (bax, [2]), belə ki, Markov prosesləri ilə əlaqədar işlərdə bu ölçülərin rolu bu prosesin τ anında paylanması

$$\pi_U(x, dy) = P_x(X_\tau \in dy), \quad x \in E$$

üzərinə düşür, burada $\tau = \tau_{E \setminus U}$ – prosesin $U \subset E$ çoxluğundan ilk çıxış anıdır. Bu zaman U hər hansı olduqca zəngin çoxluqlar ailəsindən seçilir, qeyd olunan paylanmalar ya $\mathcal{B}$ – cəbrində və ya onun hər hansı genişlənməsi formasında verilir.

Sadəlik üçün bundan sonra X -in separabel lokal kompakt E Hausdorff fəzasında standart Markov prosesi olduğu, $\mathcal{B}$ -nin E fəzasının Borel çoxluqlarının sinfi olduğu fərz olunur. E -nin bütün açıq altçoxluqları və onların kompakt qapalıların ailəsi $\mathfrak{A}$ ilə işarə olunur. Sanki Borel lokal aşağıdan məhdud f funksiyaların sinfində harmonik ortalama operatorları Π_U aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\Pi_U f(x) = M_x\{f(X_\tau); \tau < \zeta\} = \int_E f(y) \pi_U(x, dy), \quad (1)$$

burada $U \in \mathfrak{A}$, $x \in E$. Bu operatorlar vasitəsilə ekssessivlik və klassik superharmoniklik anlayışları arasındakı ideya bağlılığı daha aydın nəzərə çarpır: qeyd olunan tip $f \geq 0$ funksiyası, yalnız və yalnız, o halda ekssessiv funksiyadır ki, o, incə kəsilməz olsun (yeni incə topologiyada kəsilməz olsun) və bütün $U \in \mathfrak{A}$ üçün $\Pi_U f \leq f$ bərabərsizliyi ödənilsin (bax, [5]). Burada $\mathfrak{A}$ sinfi bütün mümkün olan kompaktların tamamlayıcılarının çoxluğu ilə əvəz oluna bilər (bax, [5]). Oxşar nəticələrin lokal variantları və bəzi modifikasiyaları vardır (bax, [3]).

Əgər $V \subset E$ açıq çoxluğunda sanki Borel lokal məhdud f funksiyası incə kəsilməz olarsa və bu çoxluğun bütün $U \in \mathfrak{A}$ altçoxluqları üçün V -də $\Pi_U f = f$ ödənilərsə, f – V çoxluğunda X üçün harmonik funksiya adlanır (əgər X kəsilməz prosesdirsə, f -in V -dən کنارda verilməsi məcbur deyildir; onu da nəzərə almaq lazımdır ki, Markov zənciri və $V = E$ olduğu halda analoji tərif başqa cürdür) (bax, *Harmonik funksiya*). Harmonik funksiyalar üçün bir qədər zəif məhdudiyyətlərdə Hamak bərabərsizliyi tipli nəticələr və klassik harmonik funksiyaların kompaktlıq xassələri haqqında teoremlərin nəticələri dəyişmir (bax, [11]). Əgər X hər hansı şərtləri ödəyirsə, məs., Qrin funksiyasının varlığını təmin edən şərti ödəyirsə, onda ekssessiv funksiyaların geniş sinfindən olan hər bir funksiyanın yeganə Riss ayrılığı vardır, yeni harmonik funksiyanın və hər hansı ölçünün potensialının cəmi şəklində ayrılığı vardır (bax, [6]).

Stoxastik Dirixle məsələsi. 1923-də H. Fillips (H. Phillips) və N. Vinerin (N. Wiener) işləri klassik Dirixle məsələsi və onun ümumiləşmələrinin həllinə ehtimali yanaşmaları tətbiqi başlandı. Qeyd etmək lazımdır ki, C. Dubun işlərinə qədər yalnız S. Kakutaninin (S. Kakutani) işləri istisna olunmaqla, 1944–45-ci illərdə Dirixle məsələsinin həlli məsələnin diskret variantlarının

hellerinin limiti kimi ifadə olunurdu və bunlara baxılarkən münasib Markov zəncirləri istifadə olunurdu.

Dirixle məsələsinin müasir ehtimali izahı [1]-də verilmişdir (bax. həmçinin [2], [5]-ə). Fərz olunur ki, X – kəsilməz standart Markov prosesi, $U \subset E$ sərhədi ∂U olan açıq çoxluqdur və bu çoxluqda hər hansı φ funksiyası verilmişdir. Əgər $f(x)$, $x \in U$ funksiyası U çoxluğunda X üçün harmonikdirsə və əgər ixtiyari $x \in U$ üçün

$$\lim_{t \uparrow \tau} f(X_t) = \varphi(X_\tau) \quad (2)$$

münasibəti $\{\tau < \zeta\}$ çoxluğunda P_x – sanki yəqin ödənilərsə, tarife görə $f(x)$ funksiyası sərhəd funksiyası φ olan stoxastik Dirixle məsələsinin həllidir, burada $\tau = \tau_{E \setminus U}$. Əgər φ məhdud və Borel funksiyası olarsa, onda qoyulan məsələnin yeganə məhdud həlli $f = \Pi_U \varphi$ funksiyası olacaqdır, burada (1)-ə analoji olaraq,

$$\Pi_U \varphi(x) = \int_{\partial U} f(y) \pi_U(x, dy), \quad x \in U$$

götürülmüşdür.

Bele bir sual qoymaq olar: hansı şərtlər ödənilməlidir ki, göstərilən f həlli (2) şərtinin klassik variantını ödəsin:

$$\lim_{x \in U, x \rightarrow y} f(x) = \varphi(y), \quad y \in \partial U \quad (3)$$

Aydın olmuşdur ki, güclü Feller proseslərinin geniş sinfi üçün (3) şərti hər dəfə φ funksiyası y nöqtəsində kəsilməz olduğu halda reallaşır, bu nöqtənin özü isə $E \setminus U$ çoxluğunun reqlulyar nöqtəsidir (yeni $P_y\{\tau = 0\} = 1$).

Bu kontekstdə «Dirixle məsələsi» ifadəsinin işlədilməsi ona əsaslanır ki, diffuzion proseslərin geniş sinfi üçün $U \subset E = \mathbb{R}^n$ çoxluğunda baxılan $f = \Pi_U \varphi$ həlli $Lf = 0$ tənliyini ödəyir, burada L – prosesin doğuran differensial operatorudur, baxmayaraq ki, (3) şərti klassik nəzəriyyədə verildiyi kimidir (bax. *Ehtimali həlli, differensial tənliklərin*). Qeyd etmək lazımdır ki, sərhəd nöqtəsinin reqlulyar olması tələbi əksər hallarda onun klassik oxşarı ilə eynigüclü olur (bax, [5]).

Stoxastik Dirixle məsələsinin hellerinin qurulması üçün çox yayılmış metodların, məs., təmizləmə metodunun (rus. метод выметания) münasib modifikasiyalardan istifadə oluna bilər (bax. [2]). Bu halda təmizləmə hali haqqında Hant teoremindən istifadə etmək məqsəduyğundur (bax, [3], [6]), ən yeni variant isə [9]-də şərh olunmuşdur.

Stoxastik Dirixle məsələsinin uyğun variantına Martin sərhəd nəzəriyyəsi çərçivəsində baxılır.

Potensialın ehtimali nəzəriyyəsinin ters məsələləri. Ehtimali P. n.-nin tətbiqi sərhədləri ilə maraqlanan analitik aşağıdakı sualları qoya bilər.

($E, \mathcal{B}$) ölçülən fəzasının standart Markov prosesinin ödədiyi şərtlərin ödənilməsi fərz olunur və fərz olunur ki, ($E, \mathcal{B}$)-də hər hansı $r(x, dy)$ nüvəsi verilmişdir [$r(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ funksiyası birinci arqumentinə görə $\mathcal{B}$ – ölçülən, ikinci arqumentinə görə isə $\mathcal{B}$ -də σ – sonlu ölçü olarsa, $r(x, \Gamma)$ ($E, \mathcal{B}$)-də nüvə adlanır]. $r(x, dy)$ funksiyası hansı

şərtlərlə hər hansı Markov prosesinin potensiallarının nüvəsi ola bilər? İkinci sual: həmin E fəzasında təyin olunmuş mənfi olmayan funksiyaların hər hansı γ ailəsi hər hansı Markov prosesinin eksessiv funksiyalarının çoxluğu ola bilərmi? Aydın ki, burada fərz olunur ki, $f \equiv 1$, γ -ya daxildir.

Birinci suala cavab aşağıdakı kimi verilmişdir (bax, [3]). $C_0, -\infty$ -da sıfıra çevrilən, E -də kəsilməz funksiyaların Banach fəzası, $f \in C_0$ funksiyasının norması $\|f\| = \sup_E |f|$, C_K – bele funksiyaların kompakt daşıyıcılarla birlikdə çoxluğu olsun. Fərz olunur ki, R operatoru hər bir $f \in C_K$ funksiyasına

$$Rf(\cdot) = \int_E f(y) r(\cdot, dy) \in C_0$$

funksiyasını qarşı qoyur və $R(C_K) \subset C_0$ -da sıxdır. Fərz olunur ki, maksimumun tam prinsipi ödənilir, yəni: əgər $a \geq 0$ həmişə ödənilərsə, $f, g \in C_K$ mənfi olmayan funksiyaladırsa və g daşıyıcısında $a + Rf \geq Rg$ olarsa, onda bu sonuncu bərabərlik E -də hər yerdə doğrudur. Onda $r(x, dy)$ nüvəsi hər hansı Hant prosesinin potensiallarının nüvəsidir. Bu nəticənin ümumiləşmələri vardır (bax, [14]).

İkinci məsələ ilə P.-A. Meyer-dən (P.-A. Meyer, 1963) başlayaraq bir sıra alimlər də məşğul olmuşlar. Harmonik fəzalar nəzəriyyəsi dilində bu məsələnin cavabını bele ifadə etmək olar: əgər E olduqca yaxşı harmonik fəza strukturuna malik olarsa, γ ailəsi isə bu fəzada hiperharmonik mənfi olmayan funksiyaların konusu olarsa, onda γ hər hansı standart prosesin eksessiv funksiyaların toplusu ilə üst-üstə düşür (bax, [17]).

Bax. Markov prosesi; enerji.
Əd.: [1] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 77, p. 86–121; [2] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – Hdlb. – B., 1984; [3] Hunt G. A., «Ill. J. Math.», 1957, v. 1, № 1, p. 44–93; № 3, p. 316–69; 1958, v. 2, № 2, p. 151–213, рус. пер. – Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, М., 1962; [4] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilities et potentiel. Theorie discrete du potentiel, P., 1983; [5] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [6] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [7] Meyer P.-A., Processus de Markov, N. Y., 1967; [8] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с.37–178; [9] Gettoor R. K., Markov processes. Ray processes and right processes, B., 1975; [10] Fukushima M., Dirichlet forms and Markov processes, Amst. – Oxf. – N. Y., 1980; [11] Шур М. Г., «Матем. заметки», 1973, т. 13, в. 4, с. 587–96; [12] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 267–91; [13] Watanabe T., «Proc. Japan. Acad.», 1962, v. 38, № 8, p. 397–407; [14] Taylor J. C., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 2, p. 355–57; [15] Chung K. L., Rao M., «Ann. Inst. Fourier», 1980, t. 30, № 3, p. 167–98; [16] Pop-Stojanovic Z. R., Rao M., «Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus univ.», 1983–84, № 29; [17] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B. – Hdlb. – N. Y., 1972.

POTENSIAL NƏZƏRİYYƏSİ Markov zənciri üçün «потенциала теория для цепи Маркова: potential theory for a Markov chain» – aksiomatik və klassik potensial nəzəriyyəsinin ehtimali analogudur. Başlanğıcı J. Deninin əsas etibarilə analitik xarakterli işləri seriyası (bax. məs., [1]) və C. Dubun bir ehtimali araşdırması ilə qoyulmuşdur (bax, [2]). Ehtimali P. n.-nin əsas anlayışları və nəticələrinin çox yaxşı məlum klassik proobrazları vardır

(bax. *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün). Her hansı $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında n addıma keçid ehtimalı $p(n, x, \Gamma)$ olan $X = (X_n, P_x)$ biricins Markov zənciri verilir (burada və hər yerdə x və Γ uyğun olaraq, $\mathcal{E}$ və $\mathcal{B}$ -dəndirilər, «funksiya» isə $\mathcal{E}$ -nin $(-\infty, \infty]$ -ə $\mathcal{B}$ - ölçülən inikası anlaşılır). Bu Markov zəncirinin potensiallarının nüvəsi

$$R(x, \Gamma) = 1_\Gamma(x) + \sum_{n \geq 1} p(n, x, \Gamma) \quad (*)$$

berabərliyi ilə ifadə olunur, burada 1_Γ - Γ çoxluğunun funksiyası - indikatorudur. 1_Γ -nin məxsusi funksiya olduğu fərz olunur, bu isə onu ifadə edir ki, $R(\cdot, E_n)$ funksiyalarının məhdud olduqlarını təmin edən və birləşməsi $\mathcal{E}$ -ni verən $E_1, E_2, \dots$ çoxluqları vardır.

Bununla da, bu nəzəriyyənin əsas obyektlərinin və elementlərinin aparatı *eksessiv funksiyaların* olduqca zəngin ailəsi müəyyən edilir. İxtiyari $f \geq 0$ funksiyasının potensialı

$$Rf(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} f(y) R(\cdot, dy)$$

eksessiv funksiyasıdır və hər bir eksessiv funksiya mənfi olmayan funksiyaların məhdud potensiallarının hər hansı azalmayan ardıcılığının limitidir.

Xüsusi maraq doğuran bu və ya digər Γ çoxluğunun bərabərçəkili potensialı adlanan π_Γ potensialıdır, burada $\pi_\Gamma(x)$, $x \in E$ - bu çoxluğa nə vaxtsa çatılacağına P_x - ehtimalına bərabər götürülür (terminologiya mükəmməl deyildir: π_Γ - hər hansı bir funksiyanın potensialı olmaya da bilər).

Klassik potensial nəzəriyyəsinin çoxsaylı prinsiplərinin modifikasiyanı doğrudur (bax, [4], [5]). Məs., ixtiyari $f \geq 0$ funksiyaların, $h \geq 0$ və $a \geq 0$ konstantı üçün $A = \{x: f(x) > 0\}$ çoxluğunda $a + Rh \geq Rf$ bərabərsizliyinin ödənilməsindən bu bərabərsizliyin hər yerdə ödənilməsi alınır (maksimumun tam prinsipi). Əgər f ixtiyari işarəli olarsa, lakin $R[\min(f, 0)] > -\infty$ və $\{x: Rf(x) > 0\}$ boş olmayan çoxluq olarsa, onda $\sup \{Rf(x): x \in \mathcal{E}\} = \sup \{Rf(x): x \in A\}$ olur (müsbət maksimum prinsipi).

Tədqiqatların əsas istiqamətləri eksessiv ölçülərin öyrənilməsi, qayıdışlı, məs., Harris qayıdışlı zəncirlər üçün bu nəzəriyyənin variantının qurulması ilə bağlıdır (bax, [5]). Müəyyən Markov zənciri üçün (*) şəklində ifadə oluna bilən nüvələrin təsvirləri vardır (bax, [5]). Hesabi Markov zəncirləri üçün nəzəriyyə daha sadə olur (bax, [6]).

Markov zəncirləri üçün P. n. diskret P. n.-nin xüsusi bir fəsidir (bax, [4]), burada yalnız ümumi şəkili nüvələrə deyil, daha mürəkkəb strukturlu obyektlərə («qumar evləri» kimi) baxılır.

Əd.: [1] Deny J., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 73-101; [2] Doob J. L., «J. Math. Mech.», 1959, v. 8, № 3, p. 433-58; [3] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [4] Delachèrie C., Meyer P.-А., Probabilités et potentiel. Théorie discrète du potentiel, des martingales, t. 1-2, P., 1975-80; [5] Певзю Д., Цели Маркова, пер. с англ., М., 1997; [6] Ханнекен П. Л., Тортра А., Теория вероятностей и некоторые ее приложения, пер. с франц., М., 1974.

POYA HESABLAMA NƏZƏRİYYƏSİ «Поля теория перечислений; Polya theory of enumeration» - bax, *Kombinator analiz*.

POYA PAYLANMASI «Поля распределение; Polya distribution» - tam $k = 0, 1, \dots, n$ qiymətlərini uyğun

$$p_k = P\{X_n = k\} = C_n^k \times \frac{b(b+c) \dots (b+(k-1)c) r(r+c) \dots (r+(n-k-1)c)}{(b+r)(b+r+c) \dots (b+r+(n-1)c)} \quad (1)$$

ehtimalları ilə alan X_n təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır, burada $n > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $c \geq -1$ tam ədədlərdir; $n > 0$ tam ədəd, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\gamma > 0$ olduqda aşağıdakı düstur (1)-ə ekvivalentdir:

$$\begin{aligned} p_k &= P\{X_n = k\} = \\ &= C_n^k \frac{p(p+\gamma) \dots (p+(k-1)\gamma) q(q+\gamma) \dots (q+(n-k-1)\gamma)}{(1+\gamma) \dots (1+(n-1)\gamma)} = \\ &= C_{(p/\gamma)+k-1}^k C_{(q/\gamma)+n-k-1}^{n-k} / C_{(p/\gamma)+n-1}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

(1) və (2) arasında əlaqə $p = b/(b+r)$, $q = r/(b+r)$ bərabərlikləri ilə alınır. P. p.-nin riyazi gözləməsi np , dispersiyası

$npq \frac{1+\gamma n}{1+\gamma}$ -dir. P. p.-nin xüsusi halları - X_n $c=0$ olduqda

p və n parametrləri binomial paylanma qanununa, $c=-1$ olduqda, $M=b$, $N=b+r$ və n parametrləri hiperhəndəsi paylanma qanununa tabedir. $p = b/(b+r)$ sabit olduqda, $\gamma = c/(b+r) \rightarrow 0$ münasibəti ödənildikdə $b, r \rightarrow \infty$ olduğu halda P. p. parametrləri n və p olan binomial paylanmaya yaxınlaşır.

P. p.-na urn sxemi adlanan sxemlə bağlı C. Poya (G. Polya, 1923) tərəfindən baxılmışdır. İçərisində b sayda qara və r sayda qırmızı kürecik olan urdan (qutudan) çıxarılmış ixtiyari kürecik qaytarmaq şərtlə sxemi üzrə yenidən urna, lakin çıxarılmış kürecik rəngli, c sayda küreciklə bilikdə qaytarılır. Əgər n həcmli seçimdə bütün qara küreciklərin sayı X_n olarsa, onda X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması (1) və ya (2) düsturları ilə verilir. X_n , $n=1, 2, \dots$ ardıcılığı diskret Markov zənciridir, bu prosesin vəziyyətləri n anında seçimdəki qara küreciklərin sayı ilə, n anında k vəziyyətdən $n+1$ anında $k+1$ vəziyyətinə şərti keçid ehtimalı isə n -dən asılı olub,

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = k+1 | X_n = k\} &= (b+kc)/(b+r+nc) = \\ &= (p+k\gamma)/(1+n\gamma) \end{aligned}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Poya urn sxemindən limitə keçid ilə Poya prosesini - kəsilməz zamanlı «xalis artım» (rus. процесс «чистого размножения») prosesləri sinifindən olan qeyri - biricins Markov prosesini almaq olur. Sonsuz kiçik Δt müddəti ərzində yalnız bir kürecik çıxarılması mümkünlüyü şərtlə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $np \rightarrow t$, $n\gamma \rightarrow \alpha t$ olarsa, Δt müddəti ərzində k vəziyyətdən $k+1$ vəziyyətinə keçidin limit şərti keçid ehtimalı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$P\{X(t + \Delta t) = k + 1 | X(t) = k\} = \frac{1 + \alpha k}{1 + \alpha t} \Delta t + o(\Delta t).$$

Poya urn sxemindən Poya prosesinə keçdikdə P. p.-nın mühüm limit forması alınır. Bu halda k vəziyyətində t anında olma ehtimalı $p_k(t)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$p_k = C_{(1/\alpha)+n-1}^n \left(\frac{\alpha t}{1 + \alpha t} \right)^n \left(\frac{1}{1 + \alpha t} \right)^{1/\alpha}, \quad p_0(0) = 1.$$

Alınan limit paylanması parametrləri $1/\alpha$ və $1/(1 + \alpha t)$ olan [uyğun riyazi gözləməsi t -yə bərabər, dispersiyası isə $t(1 + \alpha t)$ olan] *mənfi binomial paylanmadır*.

Urn modeli və Poya prosesindən uyğun olaraq P. p. və onun limit forması alınır və bunlar keçmişin təsirlilik effektivə malik modellərdir (müəyyən rəngli kürəciyin çıxarılması sonrakı sınaqda bu rəngli kürəciyin çıxması ehtimalını çoxaldır).

α parametri sıfıra yaxınlaşdıqda Poya prosesi Puasson prosesinə çevrilir və P. p.-nin limiti t parametrlili Puasson paylanması olur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

POYA TEOREMİ « **Пойа теорема; Polya theorem** » – bax, *Kombinator analiz*.

POYA TEOREMİ qeyri-məhdud təsadüfi dolaşmalar üçün « **Пойа теорема для неограниченных случайных блужданий; Polya theorem for unbounded random walks** » – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*.

POZULMA ANI « **разладки момент; change point** » – bax, *Aşkarlanma məsələsi, pozulmanın*.

PREDİKTANT « **предиктант; predictant** » – statistik proqnozda (xüsusi halda, hava haqqında proqnozda) öngörül kəmiyyətdir. Prediktant miqdar dəyişəni, yəni skalyar meteoroloji kəmiyyət (məs., havanın temperaturu, atmosferin təzyiqi), bir çox halda miqdar kəmiyyətlərinin qradiasiyası kimi ortaya çıxan qaydalı dəyişən (məs., havanın buludluluq balı, Bofort meteoroloji şkalası üzrə külək sürətinin balı və ya havanın orta aylıq temperaturunun *iqlim normalarından* yayınması) və ya təsnifləyici dəyişən (məs., hava ilə əlaqədar hər hansı bir əlamətin olması və ya olmaması, havanın bu və ya digər təsnifata görə növü və s.) ola bilər. P. kimi qaydalı və ya iki mümkün qiymətdən birini alan təsnifat kəmiyyəti götürülərsə, uyğun proqnoz havanın *alternativ meteoroloji proqnozu* adlanır.

PREDİKTOR « **предиктор; predictor** » – statistik proqnoz (xüsusi halda, hava haqqında statistik proqnoz) üçün istifadə olunan məlum kəmiyyətdir. Meteorologiyada P. komponentləri bir sıra meteoroloji kəmiyyətlər olan çoxölçülü vektor kimi anlaşılar (məs., meteoroloji zaman sıralarının qiymətləri və ya müxtəlif fəza – zaman nöqtələrində meteoroloji sahələrin qiymətləri). P. olan vektorun komponentləri havanın dəyişəcəyinə səbəb olan faktorlar haqqında fiziki mülahizələrə əsasən seçilir (bu komponentlər arasında qaydalı, miqdar və təsnifat kəmiyyətləri də ola bilər; bax, *Prediktant*). Bu vektorun dim. – ölçüsü verilənlərin statistik analizi prosesində *mühüm prediktorların seçilməsi* yolu ilə kiçildilə bilər.

PREDİKTORLARIN ƏN YAXŞI ALTÇOXLUĞUNUN SEÇİLMƏSİ « **наилучшего подмножества предикторов выбор; best predictor subset selection** » – regressiya funksiyasının proqnozunu yaxşılaşdırmaq məqsədilə

ölçmə nəticələri üzrə xətti *regression eksperimentin* regressiya funksiyasının dim. – ölçüsünün azaldılması üçün evristik qaydalar toplusudur. Prediktorların sayının artıq olması proqnozun dispersiyasının artmasına prediktorların sayının az olması proqnozun dəyişməsinə səbəb olur.

Bütün regressiyalar metodu – xüsusi qaydalardan istifadə edərək kompüter yaddaşının qənaətlə istifadəsini təmin edən, kvadratların ən kiçik qalıq cəmi ilə verilmiş gücə malik prediktorlar altçoxluğunun sürətləndirilmiş axtarışdır. Altçoxluqların hissəvi axtarışı metodları arasında ardıcıl daxiletmə və xaricetmə metodları və həmçinin bunların bəzi kombinasiyaları ayırd olunur. Misallar vardır ki, bu metodlardan hər biri ən yaxşı altçoxluğu seçə bilmir.

Prediktorların nizamlanmış çoxluğu halında P. ə. y. a. s. üçün bir sıra metodlar mövcuddur (məs., polinomial regressiyada). Seçmə yalnız {1}, {1,2}, {1,2,3},... prediktorların nömrələrinin çoxluqları arasında həyata keçirilir, belə ki, hissəvi araşdırılan altçoxluqların sayı 2^N -dən N -ə qədər azalır (N – altçoxluğun maksimal mümkün olabilən həcmidir, $N \leq n$, n – seçmənin həcmidir). {1, 2, ..., p_n } nömrəli prediktorlar çoxluğu seçilir, burada $p_n = \arg \min_{p=1,2,\dots,N} J_p$ (J_p – hər hansı kriteridir). Əsas

etibarilə aşağıdakı kriterilərdən istifadə olunur:

$$J_p = \frac{RSS_p}{\hat{\sigma}^2} + 2p \quad (C_p - \text{Mellous kriterisi})$$

$$J_p = RSS_p(n+p)/(n-p) \quad (\text{FPE-kriteri})$$

$$J_p = RSS_p \exp(2p/n) \quad (\text{Akaike informasiya kriterisi, AIC}).$$

Burada RSS_p – ilk p prediktorları model üçün kvadratların qalıq

cəmi, $\hat{\sigma}^2$ – xətalara dispersiyasının statistik qiymətidir.

Müəyyən şərtlər ödənildikdə $J_p = RSS_p(1 + v(p/n))$ şəklində kriteriləri P. ə. y. a. s. metodları üçün proqnozun kvadratik orta xətalalarının asimptotik ekvivalentliyi ödənilir, burada $v(t)$, $t > 0$ elə funksiyalardır ki, $t \rightarrow 0$ olduqda $v(t)/2t \rightarrow 1$ münasibəti ödənilir (bax, [2]). Bu metodlar C_p – Mellous kriterisinə əsaslanan metodu və öncədən söylənilmiş (fərz olunan) kvadratlar cəminin p üzrə minimizasiyasından ibarət olan kross – yoxlama metoduna asimptotik ekvivalentdirlər.

Əd.: [1] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б., « Докл. АН СССР », 1989, т. 304, № 2, с. 297 – 301.

PREFİKS ÇOXLUQ « **префиксное множество; prefix set** » – bax, *Qeyri – müntəzəm kod*.

PRİNSİPİAL TAY « **главный двойник; principal alias** » – bax, *Tezliklərin üst-üstə yüklənməsi / tezliklərin dəyişdirilməsi / elayzing*.

PRİORİTET « **приоритет; priority** » – bax, *Xidmət sistemi*.

PRİORİTETLİ SİSTEM « **приоритетная система; priority queue** » – bax, *Xidmət sistemi*.

PRODAKT – VƏZİYYƏT « **продукт – состояние; product – state** » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*.

PROXOROV KRİTERİSİ « **Прохорова критерий; Prokhorov criterion** » – nisbi kompaktlıq kriterisidir, tamamilə requlyar topoloji fəzada verilən *Radon ölçüləri*

ailesinin Proxorov teoremidir (dar topologiyada). Bu nəticənin ehtimal nəzəriyyəsində və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində çoxsaylı tətbiqləri vardır. X – ixtiyari tamamilə requlyar topoloji fəza, $C_b(X)$, – X -də təyin olunmuş, həqiqi məhdud kəsilməz bütün mümkün olan funksiyalar çoxluğu, $M_b(X)$ – sonlu tam variasiyaya malik, X -də verilmiş, həqiqi, dəyişənşəreli bütün mümkün olan Radon ölçüləri çoxluğu olsun.

$$(f, \mu) \rightarrow \int f(x) d\mu(x), \quad f \in C_b(X), \quad \mu \in M_b(X)$$

standart bixətti forması $C_b(X)$ və $M_b(X)$ vektor fəzaları arasında ikilik xassəsi təyin edir. $M_b(X)$ fəzasında qeyd olunan ikilik xassəsi ilə uzlaşan zəif topologiya $M_b(X)$ -də dar yığılma topologiyası (və ya dar topologiya) adlanır. $M_b^+(X)$ simvolu ilə $M_b(X)$ -dən olan müsbət ölçülərin qapalı qabarıq konusu işarə olunur.

H , – $M_b(X)$ -in hər hansı altçoxluğu olsun. Əgər:

a) $\sup_{\mu \in H} |\mu|(X) < +\infty$,

b) ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün ələ $K_\varepsilon \subset X$ kompakt tapılar ki, ixtiyari $\mu \in H$ ölçüsü üçün $|\mu|(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir, – münasibətləri ödənilərsə, H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir, deyilir.

P. k. aşağıdakı üç müddəanın konyuksiyasıdır:

1) əgər X tamamilə requlyar topoloji fəza, H isə $M_b(X)$ -in Proxorov şərtini ödəyən altçoxluğudursa, onda H dar topologiyada nisbi kompakt çoxluqdur;

2) əgər X lokal kompakt topoloji fəza, H isə $M_b^+(X)$ -in dar topologiyada nisbi kompakt altçoxluğudursa, onda H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir;

3) əgər X tam separabel metrik fəzadırsa, H isə $M_b^+(X)$ -in dar topologiyada nisbi kompakt altçoxluğudursa, onda H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir.

Bax, *Yığılma(sı) paylanmaların*.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Бурбак Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах..., пер. с франц., М., 1977.

PROXOROV METRİKASI «Прохорова метрика; Prokhorov metric» – bax, *Levi – Proxorov metriksi*.

PROXOROV ŞƏRTİ «Прохорова условие; Prokhorov condition» – bax, *Proxorov kriterisi, Proyektiv sistemləri, ölçülərin*.

PROXOROV TEOREMİ təsadüfi proseslər üçün «Прохорова теорема для случайных процессов; Prokhorov theorem for stochastic processes» – təsadüfi proseslərin doğurduğu paylanmalar üçün *ehtimal ölçüləri* ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının Proxorov kriterisidir. Kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ -də və ikinci növ kəsilmə nöqtələri olmayan funksiyalar fəzası $D[0, 1]$ -də (bax, [1]) 2-ci növ kəsilmə nöqtələri olmayan, qiymətləri metrik fəzada verilən proseslər üçün (bax, [2]) paylanmaların yığılmasının zəruri və kafi şərtləri alınmışdır. Bax, *Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün, Proxorov kriterisi*.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–237; [2] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

PROQNOZLAMININ BRAUN METODU «прогнозирования метод Брауна; Brown's method of forecasting / prediction» – bax, *Braun proqnozlanma metodu*.

PROQNOZLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESLƏRİN «прогнозирование случайных процессов; forecasting / prediction of random processes» – bax, *Təsadüfi proses; proqnozla(n)ma, ekstrapolyasiya*.

PROQNOZU, HAVANIN ehtimali «прогноз погоды вероятностный; probabilistic weather forecast» – bax, *Ehtimali proqnozu, havanın; keyfiyyət statistik qiyməti*.

PROQNOZU, HAVANIN kateqorik «прогноз погоды категорический; categorical weather forecast» – bax, *Kateqorik hava proqnozu*.

PROQNOZU, HAVANIN; keyfiyyətin statistik qiyməti «прогноз погоды; оценка качества; weather forecast evaluation; skille score» – hər

hansı Y prediktantının öngörül qiyməti $\hat{Y}$ -in təyin olunması üçün müşahidələrin alınmış qiymətlərindən istifadə edən hava proqnozunun praktiki dəyərliyiinin keyfiyyət statistik qiymətidir (ölçüsüdür). Keyfiyyət statistik qiymətinin hər bir forması Y prediktantının y qiymətinə və $\hat{Y}$ proqnozunun $\hat{y}$ qiymətinə hər

hansı $U(y, \hat{y})$ ədədini qarşı qoyan U funksiyasıdır. Adətən, fərz olunur ki, Y və $\hat{Y}$ təsadüfi vektorlardır və tətbiq olunan proqnoz metodunun toplam keyfiyyət statistik qiyməti kimi (seçimi orta kimi qiymətləndirilən) $\bar{U} = M(U(y, \hat{y}))$ riyazi göz-

ləməsindən istifadə olunur. Bir dəfə üçün olunmuş $U(y, \hat{y})$ proqnozunun keyfiyyət statistik qiyməti prediktantın qiymətləri və onun proqnoz qiymətlərinin oxşarlığını xarakterizə edir, H. p.-nın keyfiyyət statistik qiymətinin orta qiyməti isə müşahidə olunan prediktantların və uyğun proqnozların statistik asılılığının yaxınlıq ölçüsünü ifadə edir. *Havanın statistik proqnozları* üçün keyfiyyətin orta statistik qiymətlərinin mühüm əhəmiyyəti vardır, çünki, proqnoz metodunun optimizasiyası bu qiymətlərdən asılıdır.

H. p.-nın keyfiyyət statistik qiymətinin konkret forması seçildiyi zaman müəyyən istehlakçıların tələbləri nəzərə alınmalı və proqnozların istifadəsindəki effekt (məs., iqtisadi effekt) hesaba alınmalıdır, lakin proqnozların informasiya dəyərliyiinin ümumi mülahizələrinə də əsaslanmaq olar. $U(y, \hat{y})$ qiyməti $\hat{y}$ -in y -ə yaxınlaşması ilə artarsa (yəni proqnoz yaxşılaşdıqda), U statistik qiyməti müsbətə meyli olub, proqnozun faydalılığını xarakterizə edir, əgər $U(y, \hat{y})$ qiyməti $\hat{y}$, y -dən uzaqlaşdıqda artarsa, onda U statistik qiyməti mənfiyə meyli olur (bu halda U xəta ölçüsü və ya itki ölçüsüdür). Y çoxölçülü prediktant olduğu hallarda Y vektorunun komponentlərinin proqnoz xətalının kvadratlari cəminə mütənəsis itki ölçüləri və bunlarla bağlı, statistik analizdəki əlaqə göstəricilərindən (nisbi xəta, toplam korrelyasiya əmsali və s.) istifadə olunur. Digər xəta şkalalarına

əsaslanan itki ölçüləri (məs., sədd, S – obrazlı itki ölçüləri) də təklif olunmuşdur. Diskret prediktantlar (havanın fazaları) üçün faydalı (xətalı) matrisləri $U_{ij} = U(\Phi_i, \Phi_j)$ daxil olunur ki,

bunların vasitəsilə havanın fazaları Φ_i və Φ_j proqnozunun

təkrarlanmasını nəzərə alan orta statistik qiymət $\bar{U}$ hesablanır.

H. p.-nın hər hansı metodunun effektivliyi haqqında mülahizələr üçün, adətən, o, standart (trivial) metodlardan biri ilə müqayisə olunur: *inersion proqnoz* (Y kəmiyyətinin gələcək qiyməti onun sonuncu müşahidə olunan qiymətinə bərabər götürüldükdə), *iqlim proqnozu* (Y -in qiymətinin öncədən onun iqlim normasına bərabər olacağı halında) və ya *təsədüfi proqnozlaşdırma* kimi proqnozlardan. Bu halda $S = (\bar{U}GU_{st})/(U_{\max} - U_{st})$ nisbət ilə ifadə olunan və *ustalıq göstəricisi* (rus. показатель мастерства) adlandırılan kəmiyyət daxil olunur, burada $U_{\max}$ – maksimal mümkün olan statistik qiymət, U_{st} – standart metodun orta statistik qiyməti olub, hesablama üçün başlanğıc götürülür. $\bar{U}$ – verilən metodun H. p. keyfiyyətinin orta statistik qiymətidir. S kəmiyyəti 0-dan 1-ə qədər dəyişir, S hərdən faizlə ifadə olunur.

Statistik H. p.-nın ixtiyari metodu verilənlərin analizi əsasında qurulur, bu verilənlər isə müşahidələr nəticələrinin müəyyən seçiminə əsaslanır və *təcrübə üçün seçim* və ya *asılı seçim* (rus. тренировочная выборка) adlanır. Asılı seçimin verilənləri üzrə hesablanmış ustalıq göstəricisi metodun təminliliyi adlanır. Nəzarət (asılı olmayan) üçün seçim məlumatı əsasında H. p. metodunun sonradan yoxlanılmasında (və ya ondan istifadə olunduqda), keyfiyyət statistik qiyməti, bir qayda olaraq, təminliliyin hesablanılmasında istifadə olunan statistik qiymətdən aşağı olur. Asılı seçim üzrə təyin olunan proqnozun keyfiyyətinin statistik qiymətinin artıq götürülməsi dərəcəsi H. p.-nın bəzi metodları üçün nəzəri olaraq qiymətləndirilə bilər (məs., [1]), lakin ümumi halda, bunu etmək mümkün deyildir və buna görə də, asılı olmayan statistik məlumatda metodu həkmən yoxlamaq tələb olunur. Məsələn, mühüm prediktorları seçdikdə, təcrübə üçün seçimlərdən asılı olmayan verilənlər üzrə tapılan keyfiyyət statistik qiymətindən istifadə olunmalıdır. Bu məqsəd üçün «sürüşən nəzarət» algoritmi təklif edilmişdir, bu alqoritmde asılı olmayan alqoritmlər kimi seçimin bütün elementləri növbə ilə istifadə olunur (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Ж. геофизики», 1933, в. 1, с. 78–62 (Теория вероятностей в математическая статистика, М., 1986, с. 161–67); [2] Груза Г. В., «Тр. Среднеазнатского научно-исследовательского гидрометеорологического института», 1967, в. 29(44), с. 3–41; [3] Груза Г. В., Раныкова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983.

PROQNOZU HAVANIN statistik «прогноз погоды» статистический; statistical weather forecast» – bax, *Statistik hava proqnozu*.

PROGRESSİV ÖLÇÜLƏN PROSES «прогрессивно измеримый процесс; progressively measurable process» – σ – cəbr axını $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ olan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş, $(M, \mathfrak{B})$ fəza fəzasında $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ təsadüfi prosesidir ki, ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $([0, t] \times \Omega, \mathfrak{B}_{[0, t]} \times \mathcal{A}_t)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikası $\zeta(\cdot, \cdot)$ – ölçülən inikasıdır (burada $\mathfrak{B}_{[0, t]} =$

$[0, t]$ parçasının Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir). Əgər $\zeta(t) = \{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ axınına nəzərən progressiv ölçülən proses və τ bu axına nəzərən sonlu Markov anıdır, onda $\zeta(t)$ təsadüfi elementi $(\Omega, \mathcal{A}_t)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına ölçülən inikasıdır. Bütün P. ö. p.-lərin çoxluğu $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ qeyd olunmuş axınına nəzərən $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -da $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -nın progressiv ölçülən altçoxluqlarının σ – cəbrini – bütün mümkün $\Gamma \in \mathfrak{B}$ çoxluqları və P. ö. p.-lər üçün $\{(t, \omega): \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$ şəklində çoxluqların doğurduğu σ – cəbri doğurur. Progressiv ölçülən çoxluğun indikatoru P. ö. p.-dir.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

PROSENTİL «процентиль; persentile» – bax, *Persentil*.

(E, h) – **PROSES** « (E, h) – процесс; (E, h) – process» – Qalton – Vaitson prosesidir; bax, *Şaxələnen proses*.

(G, h) – **PROSES** « (G, h) – процесс; (G, h) – process» – Bellman – Harris prosesidir; bax, *Şaxələnen proses*.

(G, h_u) – **PROSES** « (G, h_u) – процесс; (G, h_u) – process» – yaşama müddətindən asılı *şaxələnen proses*dir.

h – **PROSES** « h – процесс; h – process» – bax, *Martin sərhədi Markov prosesinin*.

(M_λ, h) – **PROSES** « (M_λ, h) – процесс; (M_λ, h) – process» – kəsilməz zamanlı *şaxələnen proses*dir.

PROTOMİNİMAL METRİKA «протоминимальная метрика; protominimal metric» – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanmaları fəzasında müəkkəbi *ehtimali metrikaçı*, bu metrika üçün *minimal metrika* verilən sadə metrika ilə üst-üstə düşür. Elə sadə metrikalar vardır ki (məs., medianlar arasında fərqin mütləq qiyməti), bunlar üçün müəkkəb P. m.-lər çoxluğu boşdur.

Misallar: ρ müntəzəm metrikaçı üçün P. m. $\mu(X, Y) = \sup_x [P\{X < x \leq Y\} + P\{Y < x \leq X\}]$ metrikaçıdır. *Levi – Proxorov metrikaçı* π üçün Kl – *Fan metrikaçı* P. m.-dir.

PROYEKSİYA(sı) rəng statistikasının «проекция ранговой статистики; rank statistic projection» – bax, *Rəng statistikasi*.

PROYEKSİYA(sı) təsadüfi çoxluğun «проекция случайного множества; projection of a random set», X təsadüfi çoxluğunun proyeksiyası, $-B = \text{Proj } X$ qeyri – *səlis çoxluğudur*, mənsubiyyət funksiyası μ_B , X çoxluğu ilə $\mu_B(y) = P\{y \in X\}$, $y \in Y$ münasibətilə bağlıdır. Təsadüfi çoxluğun P. anlayışı təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi ilə qeyri – *səlis çoxluqlar* arasında əlaqələrin öyrənilməsi üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980.

PROYEKTİV LİMİT ölçülərin projektiv sisteminin «проективный предел проективной системы мер; projective limit of a projective system of measure» – bax, *Projektiv sistemləri, ölçülərin*.

PROYEKTİV SİSTEMLƏRİ, ÖLÇÜLƏRİN « проективные системы мер; projective systems of measures » – müəyyən mənada bir-birilə uzlaşmış çoxluqlar, inikaslər və ölçülər ailəsidir. I – hər hansı əvvəlcədən nizamlanmış (ekser hallarda nizamlanmış), sağdan filtrlənən indekslər çoxluğu olsun. Fərz olunur ki, hər bir $\alpha \in I$ indeksi üçün ölçülü $(X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)$ fəzası, $\alpha \leq \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari iki $\alpha \in I$ və $\beta \in I$ indeksləri üçün X_β çoxluğunun X_α çoxluğuna $g_{\alpha\beta}$ inikası verilmişdir. Eyni zamanda aşağıdakı uzlaşma şərtlərinin də ödənilməsi fərz olunur:

1) İxtiyari $\alpha \in I$ indeksi üçün $g_{\alpha\alpha}$ inikası X_α çoxluğunun eynilik inikasıdır;
 2) $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $\gamma \in I$ indeksləri üçün

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma}$$

berabərliyi ödənilir:

3) $\alpha \leq \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in I$ və $\beta \in I$ indeksləri üçün $g_{\alpha\beta}$ inikası S_α və S_β σ – cəbrlərinə nəzərən ölçülən inikasıdır; bu halda $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ g_{\alpha\beta}^{-1}$ berabərliyi də ödənilir.

$((X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}, (g_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta})$ cütü ölçülərin proyektiv sistemi adlanır. Əgər $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \leq \beta$ inikası üzrə heç bir anlaşılmazlıq yaranmazsa, onda $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ailəsinin özü də Ö. p. s. adlanır. Əgər hər bir əsas bazis çoxluğu X_α , $\alpha \in I$ topoloji fəza, S_α ya X_α -da Borel σ – cəbri, ya da ki, X_α -da Borel σ – cəbri olarsa, onda, adətən, fərz olunur ki, bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \leq \beta$ inikası kəsilməz inikaslərdir. $\prod_{i \in I} X_i$ dekart hasilində

$x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $\alpha \leq \beta$ berabərliklərini ödəyən $x = (x_i)_{i \in I}$ elementlərindən təşkil olunmuş X çoxluğuna baxılır. İxtiyari $\alpha \in I$ indeksi üçün g_α simvolu ilə $pr_\alpha: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_\alpha$ kanonik proyeksiyasının X çoxluğuna daralması işarə olunur. Onda $\alpha \leq \beta$ olduqda $g_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ g_\beta$ berabərlikləri ödənilir. S_α – $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ inikası ailəsinin doğurduğu, X çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. Başqa sözlə, S_α – X -də daxilolma əməlinə görə minimal σ – cəbrdir və bu σ – cəbrə nəzərən bütün g_α , $\alpha \in I$ inikası ölçüləndirir. Əgər S -də ixtiyari $\alpha \in I$ üçün $\mu_\alpha = \mu \circ g_\alpha^{-1}$ xassəsinə malik olan μ ölçüsünü təyin etmək olarsa, onda ölçülü (X, S, μ) fəzası Ö. p. s. $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ailəsinin proyektiv limiti adlanır. Bu zaman aşağıdakı işarələmələr istifadə olunur:

$$(X, S, \mu) = \lim_{\leftarrow} (X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}, \quad \mu = \lim_{\leftarrow} (\mu_\alpha)_{\alpha \in I}.$$

Əgər hər bir g_α , $\alpha \in I$ inikası syuryektiv olarsa, onda $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ehtimal ölçülərinin proyektiv sistemi üçün iki müxtəlif proyektiv limit ola bilməz. Əgər $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ele Ö. p. s. olarsa ki, indekslər çoxluğu I boş olmayan çoxluq, hər bir X_α , $\alpha \in I$ çoxluğu kompakt topoloji çoxluq, bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \leq \beta$ inikası kəsilməz

və syuryektiv, hər bir μ_α , $\alpha \in I$ ölçüsü isə X_α fəzasının Borel σ – cəbri S_α -da Radon ehtimal ölçüsüdür, onda hökm etmək olar ki, $\lim_{\leftarrow} (\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ proyektiv limiti vardır. Bu sonuncu hökm Yu. V. Proxorovun [1] ümumi nəticəsindən bilavasitə alınır.

Fərz olunur ki, I – indekslərin boş olmayan çoxluğu, $(X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ – $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \leq \beta$ inikası olan Ö. p. s., X – hər hansı çoxluq, hər bir $\alpha \in I$ üçün isə $g_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ inikası verilmişdir. Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

- 1) İxtiyari $\alpha \in I$ indeksi üçün X_α çoxluğu ayrılabilir topoloji fəza, μ_α isə bu fəzada Radon ehtimal ölçüsüdür;
- 2) bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \leq \beta$ inikası kəsilməzdir;
- 3) X çoxluğu da ayrılabilir topoloji fəzadır və bütün g_α , $\alpha \in I$ inikası kəsilməzdir;
- 4) $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ inikası ailəsi X -də nöqtələri ayrılır;
- 5) $\alpha \leq \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in I$ və $\beta \in I$ indeksləri üçün $g_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ g_\beta$ berabərliyi ödənilir.

Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir:

a) X fəzasında hər bir $\alpha \in I$ indeksi üçün $\mu_\alpha = \mu \circ g_\alpha^{-1}$ xassəsinə malik yeganə Radon ehtimal ölçüsü μ vardır;

b) ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ele $K_\varepsilon \subset X$ kompakt çoxluğu vardır ki, ixtiyari $\alpha \in I$ indeksi üçün $\mu_\alpha(X_\alpha \setminus g_\alpha(K_\varepsilon)) < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. b) münasibəti Proxorov şərti adlanır.

Əgər indekslər çoxluğu I hesabı konfinal altı çoxluğa malik olarsa, onda Radon ehtimal ölçülərinin ixtiyari proyektiv $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ sisteminin proyektiv ölçüsü vardır. Bax, Kolmogorov teoremi sonlu ölçülü paylanmalar haqqında.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятностей и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах, пер. с франц., М., 1977.

PROYEKTİV STATİSTİK QIYMƏT « проекционная оценка; orthogonal series estimator » – bax, Qeyri – parametrik regression analiz, Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.

PSEVDİNTEQRAL « псевдонинтеграл; pseudo-integral » – ele J inikasıdır ki, bu inikası lokal kompakt ayrılabilir (Hausdorff görə) separabel T fəzasında hər bir kəsilməz mənfə olmayan kompakt daşıyıcıya malik u funksiyasına $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının sıfır özündə saxlayan $J(u)$ kompaktını qarşı qoyur və aşağıdakı şərtləri ödəyir: 1) ixtiyari $p \geq 0$ üçün $J(pu) = pJ(u)$ berabərliyi ödənilir; 2) ixtiyari u, v üçün $J(u), J(u+v), J(u) \oplus J(v), \overline{J(u) \oplus J(v)}, \overline{J(u+v)}$ kompaktları daxil olma əməli üzrə artırılır (burada $\oplus, -$ $\mathbb{R}^n$ -in altı çoxluqlarının vektor cəmi, kompakt üzərindəki xətt $\mathbb{R}^n$ -də qapalı qapanmadır).

Ehtimal nəzəriyyəsində P. (daha dəqiq, onun psevd – inteqrallanan funksiyalara təbii davamı) təsadüfi çoxluqların qurulması və onların riyazi gözləmələrinin hesablanması üçün tətbiq olunur: əgər $U(t)$ T -də mənfə olmayan təsadüfi proses, $u(t)$

ise onun riyazi gözləməsidir. onda müəyyən requlyarlıq şərtlərində $J(U)$ təsadüfi çoxluğunun riyazi gözləməsi $J(u)$ -ya bərabərdir.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

PSEVDOMOMENT « псевдомомент; pseudomoment » – istifadəsi *paylanmanın momenti* anlayışına analoji olan ədədi xarakteristikadır. P. momentdən fərqli olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları (P_ξ, P_η) cütü çoxluğunda təyin olunur. Ən çox yayılmış və ehtimal nəzəriyyəsində (heqiqi təsadüfi kəmiyyətlər hali nəzərdə tutulur) istifadə olunan psevdomentlər aşağıdakılardır:

1. Natural psevdomentlər:

$$q_k(\xi, \eta) = \int x^k d(F_\xi - F_\eta)(x); \quad k=0, 1, 2, \dots$$

burada F_ξ, F_η – uyğun olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarıdır. f_ξ, f_η uyğun olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyalarıdırsa, q_n -nın Lebeq – Stilyes integralı kimi varlığı halında

$$f_\xi(t) - f_\eta(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} q_k(\xi, \eta) + o(t^n), \quad t \rightarrow 0$$

aynıqı doğrudur.

2. Mütləq psevdomentlər:

$$m_r(\xi, \eta) = \int |x|^r d(F_\xi - F_\eta)(x), \quad r \geq 0.$$

3. Fərq psevdomentləri:

$$\kappa_r(\xi, \eta) = r \int |x|^{r-1} |F_\xi(x) - F_\eta(x)| dx, \quad r > 0.$$

Bu P.-lər

$$|q_k| \leq \kappa_k, \quad k=0, 1, \dots; \quad \kappa_r \leq m_r,$$

bərabərsizlikləri ilə bir-birilə əlaqelidir. Bundan başqa m_{r+s}/m_s və $[\kappa_{r+s}/(r+s)]/[\kappa_r/r]$ nisbətləri vardırsa, bu nisbətlərə hər hansı ehtimal paylanmasının s tertib mütləq momenti kimi baxmaq olar. $|q_k|$, m_r və κ_r ehtimal metrikləndir. P.-in tətbiqinə aid misallar *Berti – Esseen teoremi* məq.-də verilir. P. anlayışı sonluölçülü və sonsuzölçülü fəzalar hali üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94.

PSEVDOMOMENTİ, FƏRQ « псевдомомент разностный; difference pseudomoment » – bax, *Pseudomoment*.

PSEVDOTƏSADÜFİ ƏDƏD « псевдослучайное число; pseudo – random number » – bax, *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər*.

PUANKARE TEOREMİ qayıdış haqqında « Пуанкаре теорема о возвращении; Poincare recurrence theorem » sonlu ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fəzasının ixtiyari T endomorfizmi üçün müsbət ölçülü ixtiyari $A \in \mathcal{A}$

çoxluğunun sanki hər bir ω nöqtəsi $(P$ ölçüsü üzrə) üçün n tapılar ki, $T^n \omega \in A$; belə n -lərin sayı sonsuzdur. Qayıdış haqqında P. t. ehtimal nəzəriyyəsində və differensial tənliklərin keyfiyyət nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1890, t. 13, p. 1–270; [2] Корнфельд Н. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

PUASSON AXINI « пуассоновский поток; Poisson stream / flow / input » – *Puasson prosesidir*. Bu termindən bir qayda olaraq, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində istifadə olunur.

PUASSON AXINI; апарисі функсија « пуассоновский поток; ведущая функция leading function of a Poisson process » – $[0, t)$ parçasında axın hadisələrinin sayının riyazi gözləməsini təyin edən $\Lambda(t)$ funksiyasıdır. $[a, b)$ yarımintervalında hadisələr sayı $\Lambda(b) - \Lambda(a)$ parametrlili Puasson təsadüfi kəmiyyətidir. XİN-çİN teoreminə əsasən, P. a.-nın ehtimali strukturu onun aparıcı funksiyası ilə tam mənası ilə təyin olunur. Xüsusi halda, P. a.-nın ordinarilığı üçün onun aparıcı funksiyasının kəsilməzliyi zəruri və kifayətdir. Yalnız ən sadə axın üçün $\Lambda(t) = \lambda t$ olur, burada λ – axın parametridir. Ölçülən fəzada (məs., çoxölçülü Evklid fəzasında) P. a. üçün aparıcı funksiya anlayışının ümumiləşməsi $\Lambda(A)$ Puasson ölçüsüdür – ölçülən A çoxluğunda axın hadisələrinin sayının riyazi gözləməsidir.

PUASSON BUL MODELİ « пуассоновская Булева модель; Poisson Boolean model » – bax, *Bul modeli*.

PUASSON CƏMLƏMƏ DÜSTURU « Пуассона формула суммирования; Poisson summation formula » – S. Puassonun [1]-də 1827-də

$$\sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) = \sqrt{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(bn) \quad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə etdiyi düsturdur, burada $a > 0$, $b > 0$, $ab = 2\pi$ və f və g funksiyaları isə

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ity} dy$$

Furye çevirməsi ilə əlaqelidir.

P. c. d. ehtimal nəzəriyyəsində çoxsaylı tətbiqi ilə seçilir və bu düstur vasitəsilə bir çox ehtimal paylanmalarının müntəzəm paylanmaya yaxınlıq dərəcəsini qiymətləndirmək mümkündür (bax, [2], XIX fəsil və [4]).

(1) düsturunda $a = 1$, $b = 2\pi$ qəbul edərək, $f(y)$ funksiyasını $f(x+y)$ -lə əvəz etdikdə

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) \quad (2)$$

düsturu alınır, burada x – qeyd olunmuş heqiqi ədəddir.

P. c. d.-nin bu forması ehtimal nəzəriyyəsində daha çox istifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, (2)-nin sol tərəfi 1 periodlu x -ə görə periodik funksiyadır, sağ tərəfdə onun formal Furye sırasıdır. P. c. d.-nin çoxölçülü analogları oxşar şəkildə ifadə olunur (bax, [5] və [6]); bu işlərdə və [3]-də (2) düsturunun doğruluğu üçün şərtlər verilmişdir.

Əgər X paylanması sıklıq funksiyası $f(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda (2)-nin sol tərəfi X təsadüfi kəmiyyətinin kəsi hissəsi $Y = \{X\}$, $0 \leq Y < 1$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıklıq funksiyasıdır. Bu halda (2) düsturu

$$p_Y(x) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{2\pi i n x} M e^{-2\pi n X}, \quad 0 \leq x < 1 \quad (3)$$

bərabərliyi şəklində verilir.

Məs., X riyazi gözləməsi m və dispersiyası σ^2 olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda

$$p_Y(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2 \pi^2 \sigma^2} \cos 2\pi n(x-m), \quad 0 \leq x < 1$$

olur.

Buradan isə, məs., $\sigma \geq 1$ olduqda

$$|p_Y(x) - 1| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2 \pi^2} < 5,36 \cdot 10^{-9}$$

olduğu alınır.

σ -nın kiçik qiymətlərində məqbul sayılan dəqiqlik üçün (3) sırasının bir neçə həddini götürmək lazımdır. Məs., $\sigma \geq 0$ olduqda (3)-ün sağ tərəfindəki sıranın ilk altı həddinin cəmi $p_Y(x)$ -i 10^{-4} dəqiqliyi ilə aproksimə edir.

P. c. d.-nin sonrakı geniş ümumiləşmələri [7]-də göstərilmişdir.

P. c. d. bir sıra hallarda Benford qanununu əsaslandırmağa imkan verir (bax, *İlk mühüm rəqəm qanunu*).

Əd.: [1] Poisson S.-D., «Mem. Acad. sci. Inst. France», 1827, t. 6, p. 571–602; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Good I. J., «Statist. Sci.», 1986, v. 1, № 2, p. 157–70; [5] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [6] Bochner S., Harmonic analysis and the theory of probability, Berk. – Los Angeles, 1955; [7] Diaconis P., Engle E., «Statist. Sci.», 1986, v. 1, № 2, p. 171–74.

PUASSON HƏNDƏSİ PROSESİ « пуассоновский геометрический процесс; Poisson geometric process » – bax, *Həndəsi proses*.

PUASSON KÜYÜ « пуассоновский шум; Poisson noise » – bax, *İmpulsal küy*.

PUASSON NÖQTƏVİ PROSESİ « пуассоновский точечный процесс; Poisson point process » – faza fəzasının kəsişməyən ölçülən çoxluqlarının ixtiyari toplusunda nöqtələr sayı (onların bölünmə əlaməti nəzərə alınmaqla) Puasson qanununa tabe qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi *nöqtəvi prosesdir*. $N(t)$ $\mathbb{R}^1$ ədəd oxu üzərində P. n. p.-inə uyğun sayıcı prosesdirsə (bax, *Nöqtəvi proses*), onda $N(t)$ asılı olmayan artımlı Puasson paylanmasına tabe təsadüfi prosesdir (bax, *Puasson prosesi*). Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində ekser hallarda fərz olunur ki, tələblərin giriş axını P. n. p.-dir. Moment ölçüsü Λ Lebeq ölçüsünə mütenasib olan, ədəd oxu üzərində P. n. p. ən sadə Puasson nöqtəvi prosesi adlanır; mütenasiblik əmsalı λ ən sadə nöqtəvi prosesin parametri adlanır. Ən sadə nöqtəvi proses: 1) stasionarlığı, 2) keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik olmaması (kəsişməyən intervallara aid olan nöqtələr

sayının qarşılıqlı asılı olmamazlığı), 3) ordinarlığı (bax, *Ordinar nöqtəvi proses*) kimi üç xassə ilə xarakterizə olunur.

($A, \mathfrak{A}$) faza fəzasında verilən P. n. p. Φ -in ehtimal paylanması onun moment ölçüsü $\Lambda(B) = M\Phi(B)$, $B \in \mathfrak{A}$ ilə tam mənası ilə təyin olunur.

Əgər Λ $\mathfrak{A}$ -da səpələnmiş ölçüdürsə, yəni ixtiyari $a \in A$ üçün $\Lambda(\{a\}) = 0$ şərti və ixtiyari $B \in \mathfrak{A}_0$ üçün

$$P\{\Phi(B) = k\} = ((\Lambda(B))^k / k!) \exp\{-\Lambda(B)\} \quad (*)$$

olarsa, onda Φ P. n. p.-dir.

P. n. p.-nin $B \in \mathfrak{A}_0$ çoxluğunda realizasiyasını iki mərhələyə ayırmaq olar. Əvvəlcə, (*) Puasson paylanmasına malik, riyazi gözləməsi $\Lambda(B)$ olan ν təsadüfi kəmiyyətini modeləşdirmək lazımdır. Əgər $\nu = k$ olarsa, onda P. n. p.-nin ehtimal paylanmasının $\Phi(\{a_i\}) > 0$ münasibətini ödəyən a_i , $i = 1, \dots, k$ nöqtələri, bu nöqtələrin B çoxluğuna bir-birindən asılı olmayaraq k dəfə atılması ilə alınır və ixtiyari $C \subseteq B$, $C \in \mathfrak{A}_0$ çoxluğuna bu nöqtələrin düşməsi ehtimalı $Q(C) = \Lambda(C)/\Lambda(B)$ münasibətilə təyin olunur; nöqtənin k_a dəfə atılması nəticəsi α nöqtəsi olarsa, onda $\Phi(\{a\}) = k_a$ qəbul edilir.

Səpələnmiş moment ölçülü P. n. p.-ni $\mathfrak{A}$ -nu doğuran, kifayət qədər geniş olan altı çoxluqlar sinfində nöqtələrin olmaması ehtimalı ilə xarakterizə etmək olar. Məs., əgər $A = \mathbb{R}^1$ və $\{I_1, \dots, I_m\}$ kəsişməyən intervalların ixtiyari toplusu üçün

$$P\left\{\Phi\left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right) = 0\right\} = \exp\left\{-\Lambda\left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right)\right\}$$

olarsa, onda Φ – moment ölçüsü Λ olan $\mathbb{R}^1$ -də P. n. p.-dir.

P. n. p.-ləri sinfinə mensubluq xassəsi təsadüfi nöqtəvi proseslər üzərində bəzi əməllərdən sonra da itmir (asılı olmayan proseslərin superpozisiyası, asılı olmayan yerindəyişmələr, asılı olmayan seyrəklənmə).

Φ_1 və Φ_2 – uyğun olaraq, moment ölçüləri Λ_1 və Λ_2 olan, ($A, \mathfrak{A}$)-da qarşılıqlı asılı olmayan P. n. p.-ləri olsun. Onda, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ superpozisiyası $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ moment ölçülü P. n. p.-dir.

Əgər Φ moment ölçüsü Λ olan P. n. p., Φ_G isə Φ -in nöqtələrinin asılı olmayan yerindəyişmələrindən alınan və yerindəyişmələrinin paylanması G olan təsadüfi nöqtəvi prosesdirsə, onda Φ_G moment ölçüsü $\Lambda_G = \Lambda * G$ (* – ölçülərin kompozisiyası operatorudur) olan P. n. p.-dir.

Əgər Φ_C təsadüfi nöqtəvi prosesi Φ P. n. p.-ndən seyrəklənmə ehtimalı $\mathfrak{A}$ – ölçülən $C(a)$, $0 \leq C(a) \leq 1$ funksiyası ilə verilən asılı olmayan seyrəklənmə yolu ilə alınmışdırsa, onda Φ_C P. n. p.-dir və

$$\Lambda_C(B) = \int_B [1 - C(a)] \Lambda(da), \quad B \in \mathfrak{A}$$

onun moment ölçüsüdür.

Əgər birkanallı kütləvi xidmət sistemində tələblər axını daxil olarsa və bu axın xidmət müddətləri asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olan stasionar P. n. p.-dirsə, onda xidmət olunmuş tələblərin çıxışı axını da stasionar P. n. p.-dir. Xidmət prosesi qeyri – məhdud bölgülü birkanallı sistem də bu xassəyə malikdir (bax, [6]).

Λ – moment ölçüsü, P_A , – $(M, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında, $(A, \mathfrak{A})$ -da lokal məhdud ölçülərin uyğun ehtimal paylanması (P. n. p.-ni təyin edən) olsun. Əgər Λ_1 moment ölçüsü Λ_2 -yə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü ($\Lambda_1 \ll \Lambda_2$), $\Lambda_1(B) < \infty$, $\Lambda_2(B) < \infty$ olarsa, onda $P_{\Lambda_1} \ll P_{\Lambda_2}$ olur və uyğun ehtimal sıxlığı

$$\frac{dP_{\Lambda_1}}{dP_{\Lambda_2}}(\Phi_B(\cdot)) = \exp\{\Lambda_2(B) - \Lambda_1(B)\} \prod_{a: \Phi_B(a) > 0} f(a) \Phi_B(\{a\})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\Phi_B(C) = \Phi(CB)$, $f(a) = \frac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}(a)$, – Λ_1 ölçüsünün Λ_2 ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyasıdır.

Əgər $\|V_1 - V_2\|$ $V_1 - V_2$ ölçülər fərqi üçün variasiyasıdır, onda $\|P_{\Lambda_1} - P_{\Lambda_2}\| \leq 2\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$ doğrudur.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работа по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Кокс Д., Смит В., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [3] Калленберг О., Random measures, В. – [а. о.], 1983; [4] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., К., 1984; [5] Яшков С. Ф., Анализ очередей в ЭВМ, М., 1989.

PUASSON ÖLÇÜSÜ « пуассоновская мера; Poisson measure » – $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ fəzasında tamqiymətli $\mu(\omega, A)$ təsadüfi ölçüsüdür, $(E, \mathcal{E})$ $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinə nəzərən aşağıdakı xassələri ödəyən *PolSKI fəzasıdır*:

- 1) $m(A) = \mathbf{M}\mu(\omega, A)$ ölçüsü $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür;
- 2) ixtiyari $t \geq 0$ üçün $m(\{t\} \times E) = 0$;
- 3) ixtiyari $t \geq 0$ və $A \subseteq (t, \infty) \times E$, $m(A) < \infty$ şərtlərini ödəyən ixtiyari $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ üçün $\mu(\cdot, A)$ təsadüfi kəmiyyəti $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrindən asılı deyildir.

m ölçüsü P. ö. μ -nün intensivlik ölçüsü adlanır. Əgər m ölçüsü $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$ şəklində ifadə olunarsa, onda P. ö. μ bircins ölçü adlanır, burada F , – $(E, \mathcal{E})$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür.

Əgər μ P. ö., $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}$ fəzasının cüt-cüt kəsişməyən çoxluqlarıdır, $m(A_i) < \infty$, $1 \leq i \leq n$ olarsa, onda $\mu(\cdot, A_1), \dots, \mu(\cdot, A_n)$ küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və onların riyazi gözləmələri uyğun olaraq $m(A_1), \dots, m(A_n)$ olub, Puasson paylanmasına tabedirlər. Xüsusi

si halda, əgər bütün $t \geq 0$ və $B \in \mathcal{E}$ üçün $m([0, t] \times B) < \infty$ olarsa, $\pi_t = \mu(\omega, [0, t] \times B)$ Puasson prosesidir (əgər μ bircins P. ö. olarsa, bircins Puasson prosesidir) və:

$$\mathbf{P}\{\pi_t - \pi_s = k\} = \frac{[m(s, t) \times B]^k}{k!} e^{-m(s, t) \times B}, \quad 0 \leq s < t, \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

$\{\zeta(t), t \geq 0\}$ – separabel stoxastik kəsilməz, asılı olmayan artımlı, qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan təsadüfi proses olsun. Onda $\zeta(t)$ proseslərinin sıçrayışlarının

$$\mu(\omega, dt, dx) = \sum_{s > 0} \mathbf{I}(\Delta \zeta(s, \omega) \neq 0) \varepsilon_{(\delta, \Delta \zeta(s, \omega))}(dt, dx)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan ölçüsü P. ö.-dür, burada

$$\Delta \zeta(s, \omega) = \zeta(s + 0, \omega) - \zeta(s - 0, \omega), \quad \varepsilon_{(s, a)}(dt, dx)$$

Dirak ölçüsüdür, $E = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Tamqiymətli μ təsadüfi ölçüsü, yalnız və yalnız, onun kompensatoru $\mu^p(\omega, \cdot)$ xassəsini ödədikdə, $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ fəzasında σ – sonlu $m(\cdot)$ ölçüsü ilə sanki yəqin üst-üstə düşdükdə, P. ö. olur; bu halda m intensivlik ölçüsüdür.

Əd.: [1] Жакот Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1997; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

PUASSON PAYLANMASI « Пуассона распределение; Poisson distribution » – tam mənfi olmayan $k = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərini

$$p_k = \mathbf{P}\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0$$

ehtimalları ilə alan X təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır. P. p.-nin doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq

$$\Psi(z) = e^{\lambda(z-1)} \text{ və } f(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

düsturları ilə ifadə olunur.

P. p.-nin riyazi gözləməsi, dispersiyası və daha yüksək rəqli semi – invariantları λ -ya bərabərdir.

P. p.-nin paylanma funksiyası

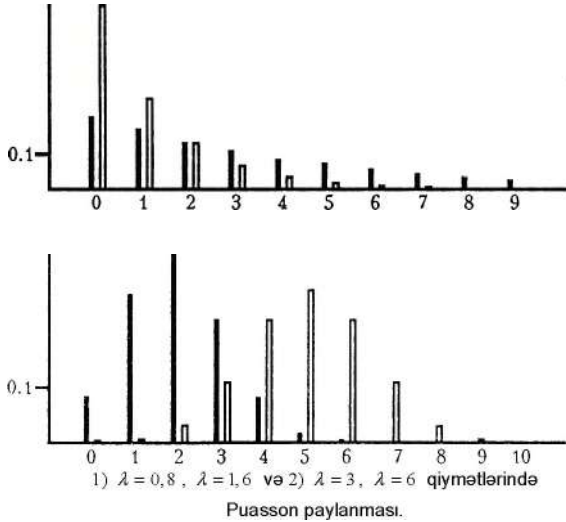
$$F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad x \in [0, \infty)$$

$k = 0, 1, \dots$ nöqtələrində

$$F(k) = \frac{1}{k!} \int_{\lambda}^{\infty} y^k e^{-y} dy = 1 - S_{k+1}(\lambda)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $S_{k+1}(\lambda)$, – $(k+1)$ parametrlı gamma – paylanma funksiyasının λ nöqtəsində qiymətidir [və ya $F(k) = 1 - H_{2k+2}(2\lambda)$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $H_{2k+2}(\lambda)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı $2k+2$ olan xi – kvadrat

paylanma funksiyasının 2λ nöqtəsindəki qiymətidir], buradan da, xüsusi halda, $P\{X=k\} = S_k(\lambda) - S_{k+1}(\lambda)$ münasibəti alınır. Asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ parametrləri Puasson paylanmaları ilə paylanmışlarsa, onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ parametrləri Puasson paylanması ilə paylanır.



Əksinə, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi P. p.-na malikdirsə, onda X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin hər biri P. p. qanununa tabedir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmasının P. p.-na yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər vardır. $\lambda \rightarrow \infty$ olduqda $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

P. p. ilk dəfə [1]-də S. Puasson tərəfindən binomial paylanma üçün sınaqlar sayı n -in böyük, bir sınaqda müvəffəqiyyətin ehtimalı p -nin kiçik olduğu hal üçün təqribi düstur kimi alınmışdır (Puasson teoremi). P. p. bir sıra çox fiziki prosesləri yaxşı təsvir edə bilər (bax, [2]). P. p. bir çox diskret paylanmalar, məs., *hiperhəndəsi paylanma*, *mənfi binomial paylanma*, *Poya paylanması*, hissəciklərin oyuqlarda yerləşdirilməsi məsələləri ilə əlaqədar yaranan paylanmalar üçün limit paylanması kimi alınır. Ehtimal modellərində P. p. dəqiq ehtimal paylanması kimi böyük rol oynayır. P. p.-nin dəqiq ehtimal paylanması kimi meğzi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində tamamilə aydın olur (bax, *Puasson prosesi*), burada P. p. qeyd olunmuş t müddəti ərzində baş verən müəyyən təsadüfi hadisələrin sayı $X(t)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması kimi interpretasiya olunur:

$$P\{X(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,\dots$$

(λ parametri vahid zaman ərzində baş verən hadisələr sayının orta qiymətidir); P. p. fəzanın hər hansı qeyd olunmuş oblastında nöqtələr sayının (təsadüfi kəmiyyət) paylanması kimi də interpretasiya olunur (paylanmanın parametri oblastın həcminə mütənasib olur).

Yuxarıdakı kimi təyin olunmuş P. p. ilə yanaşı, ümumiləşmiş və ya mürəkkəb adlandırılan P. p.-na da baxılır. Eyni qanunla paylanmış, təsadüfi ν sayda asılı olmayan $X_1, \dots, X_\nu$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $X_1 + \dots + X_\nu$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması belə adlandırılır (bu halda ν və

$X_1, X_2, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, ν -nün isə λ parametrləri P. p.-na tabe olduğu fərz olunur).

Ümumiləşmiş P. p.-nin karakteristik funksiyası

$$f(t) = \exp\{\lambda(g(t) - 1)\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $g(t)$, – X_ν təsadüfi kəmiyyətinin karakteristik funksiyasıdır. Məs., mənfi binomial paylanma ümumiləşmiş P. p.-dir, n və p bu paylanmanın parametrləridirsə, onda bu paylanma üçün

$$g(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1 - qe^{it}}, \quad \lambda = \ln \frac{1}{p}, \quad q = 1 - p$$

götürülür.

Ümumiləşmiş P. p.-ları sonsuz bölünən paylanmalardır və hər bir sonsuz bölünən paylanma ümumiləşmiş P. p.-nin limitidir (ola bilsin ki, «yerindəyişmiş», yeni karakteristik funksiyaları $\exp\{\lambda_n(g_n(t) - 1 - it\alpha_n)\}$ şəkilli). Bununla yanaşı, bütün sonsuz bölünən paylanmalar (və yalnız onlar) $h_{n1}X_{n1} + \dots + h_{nk_n}X_{nk_n} - A_n$ şəkilli cəmlərin paylanmasının limiti kimi alınır, burada $X_{n1}, \dots, X_{nk_n}$ P. p.-na malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər seriyası sxemini təşkil edir, $h_{nk_n} > 0$ və A_n – heqiqi ədədlərdir.

Əd.: [1] Poisson S., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Ливник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972.

PUASSON PAYLANMASI lokal kompakt Abel qrupunda «Пуассона распределение на локально компактной абелевой группе; Poisson distribution on a locally compact Abelian group» –

$$\pi = \exp\{-\alpha\} \left(E_0 + \alpha E_g + \frac{\alpha^2}{2!} E_{2g} + \dots + \frac{\alpha_n}{n!} E_{ng} + \dots \right)$$

şəkilli π paylanmasının G qrupunda yerindəyişmədir, burada $\alpha \geq 0$, E_g , – $g \in G$ nöqtəsində toplanmış cırlaşmış paylanmadır. π paylanmasının karakteristik funksiyası

$$\hat{\pi}(t) = \exp\{\alpha[(g, t) - 1]\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

PUASSON PAYLANMASI mürəkkəb / ümumiləşmiş «Пуассона распределение сложное / обобщенное; Poisson compound / composite distribution» – bax, *Puasson paylanması*.

PUASSON PAYLANMASI ümumiləşmiş «Пуассона распределение обобщенное; Poisson compound distribution» sonlu F ölçüsü ilə uzlaşdırılmış lokal kompakt Abel qrupunda –

$$e(F) = \exp\{-F(X)\} \left(E_0 + F + \frac{F^{*2}}{2!} + \dots + \frac{F^{*n}}{n!} + \dots \right)$$

düsturu ilə ifadə olunan $e(F)$ paylanması X qrupunda yerindəyşmədir, burada $E_0, - X$ qrupunun sıfırında toplanmış, cırlaşmış *paylanmadır*. $e(F)$ paylanması xarakteristik funksiyası

$$\widehat{e(F)}(y) = \exp \left\{ \int [X(x, y) - 1] dF(x) \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

***PUASSON PROSESİ « пуассоновский процесс; Poisson process »** – tam və mənfi olmayan qiymətlər alan, aşağıdakı şərtlərlə $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\zeta_t = \zeta(\omega, t)$, $t \in [0; \infty)$ təsadüfi prosesidir:

1°. İxtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\zeta_0 = \zeta(\omega, 0) = 0$;

2°. ζ_t – asılı olmayan artımlı prosesdir;

3°. $t_1 < t_2$ şərtini ödəyən ixtiyari t_1, t_2 və ixtiyari $s > 0$ qiymətlərində $\zeta_{t_2} - \zeta_{t_1}$ və $\zeta_{t_2+s} - \zeta_{t_1+s}$ artımları eyni qaynunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir (zamana görə bircinslik)

4°. $h \rightarrow 0$ olduqda

$$P\{\zeta_h = 0\} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P\{\zeta_h = 1\} = \lambda h + o(h), \quad 0 < \lambda < \infty$$

(ordinarlıq şərti). Asılı olmayan artımlı $\{\zeta_t : t \in [0; \infty)\}$ prosesinin trayektoriyaları vahid ehtimalla pillevari olub, t -nin azalmayan funksiyalandırsa və $t \geq 0$, $s \geq 0$ olduqda

$$\zeta_t\{\omega; 0\} = 0$$

və

$$P\{\zeta\{\omega; t+s\} - \zeta\{\omega; t\} = k\} = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

olarsa, $(\zeta_t : t \geq 0)$ Puasson prosesidir, burada λ – qeyd olunmuş müsbət qiymətli parametrlərlə, vahid zaman ərzində baş verən sıçrayışların orta sayıdır.

$\{\zeta_t : t \in [0; \infty)\}$ Puasson prosesidirsə, onda

$$P\{\zeta_t = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots; \lambda > 0 \quad (1)$$

Bu düsturla verilmiş Puasson paylanması doğuran funksiyası

$$\Psi_t(z) = e^{-\lambda t(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} z^k$$

düsturu ilə təyin olunur.

(1)-dən istifadə edərək Puasson prosesinin n – ölçülü paylanma funksiyalarını təyin etmək olur. $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ şərtini ödəyən t_i -lərin $(t_i \in [0, +\infty), i = 1, 2, \dots, n)$ ixtiyari qiymətlərində $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ olduqda $\{\zeta_{t_1} = k_1; \zeta_{t_2} = k_2; \dots \zeta_{t_n} = k_n\} = \{\zeta_{t_1} = k_1; \zeta_{t_2} - \zeta_{t_1} = k_2 - k_1, \dots\}$ və P. p. artımları eyni qaynunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan

752 PUASSON

$$P\{\zeta_{t_1} = k_1, \dots, \zeta_{t_n} = k_n\} = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda t_1} \times$$

$$\times \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \times \dots \times$$

$$\times \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!} \cdot e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \quad (2)$$

$\{\zeta_t; t \in T\}$ Puasson prosesi olarsa, onda onun trayektoriyalar çoxluğu yalnız vahid sıçrayışlarla dəyişən pillevari funksiyalar çoxluğu olacaqdır.

Beləliklə, (1) düsturu ilə verilmiş ehtimallar Puasson prosesinin t anındakı qiymətinin k -ya bərabər olması ($k = 0, 1, 2, \dots$) ehtimallarıdır. Prosesin ordinarlıq xassəsinə əsasən, ζ_t təsadüfi prosesinin ixtiyari qeyd olunmuş t anında aldığı qiymət $[0; t]$ parçasında prosesin trayektoriyasının vahid uzunluqlu sıçrayışlarının sayına bərabərdir. (2) düsturu ilə verilmiş ehtimallar da analogi olaraq təyin edilir: $P\{\zeta_{t_1} = k_1, \dots, \zeta_{t_n} = k_n\}$ prosesin trayektoriyasının $[0; t_1]$ parçasında vahid uzunluqlu sıçrayışları sayının k_1 -ə, $\dots$ $(t_n - t_{n-1})$ -də sıçrayışları sayının $(k_n - k_{n-1})$ -ə bərabər olması ehtimalıdır ($t_1 < t_2 < \dots < t_n$; $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$).

$\Theta_k = \{\zeta_t; t \geq T\}$ Puasson prosesinin trayektoriyasının k -cı sıçrayış anı olsun, $k = 1, 2, \dots$; $\Theta_0 = 0$. $\tau_k = \Theta_k - \Theta_{k-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ fərqlə təyin olunan qonşu sıçrayış anları arasındakı zaman intervallının təsadüfi kəmiyyətlər olduğu aydındır. τ_k -nin paylanma qanunu haqqındakı aşağıdakı müddəə doğrudur:

n -in ixtiyari qiymətlərində $\tau_1, \dots, \tau_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bu təsadüfi kəmiyyətlərdən hər biri λ parametrlə üstlü qaynunla paylanmışdır.

Puasson prosesinin trayektoriyaları sıçrayış anları ilə təyin olduğundan və qonşu sıçrayış anları arasındakı zaman intervalları asılı olmayan və eyni üstlü qaynunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan Puasson prosesi üçün onun tərifinə ekvivalent tərif vermək olar.

Puasson prosesi kütləvi xidmət nəzəriyyəsində təsadüf edilən bəzi məsələlərin riyazi modeli kimi mühüm əhəmiyyətə malikdir. «Telefon stansiyasında iş prosesi» məsələsi üçün Puasson prosesi əvəzlənməz riyazi modeldir. Bu halda ζ_t təsadüfi prosesi stansiyaya t müddəti ərzində daxil olmuş çağırışlar sayını ifadə edir: ζ_t funksiyası vahid uzunluqlu sıçrayışlarla artır; bu prosesin artımlarının (kiçik effektlərin nəzərə alınmaması şərtlə) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu qəbul etmək olar.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

PUASSON PROSESİ impulsal « пуассоновский процесс импульсный; impulse Poisson process », filtrlənmiş Puasson prosesi – impulslarının baş verənləri Puasson ardıcılığı olan impulsal təsadüfi prosesdir.

Bax, *Impulsal təsadüfi proses*.

PUASSON PROSESİ ümumiləşmiş « пуассоновский процесс обобщенный; compound Poisson process » – bax, *Ümumiləşmiş Puasson proses*.

PUASSON ŞƏBƏKƏSİ « пуассоновская сеть; Poisson net » – qapalı təsadüfi çoxluqdur, aşağıdakı kimi təyin olunur. S – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında vahid radiuslu sfera, λ – S -də müsbət ölçü, mes – mənfəi olmayan yarımxəndə Lebeq ölçüsü, Π – $\lambda \otimes \text{mes}$ ölçüsünə uyğun Puasson nöqtəvi prosesi (burada $\otimes$ – ölçülərin hasilə işarəsidir), $H(u, r) = \{x : (u, x) = r\}$, – $\mathbb{R}^n$ -də hipermüstəvi, (u, x) isə u və x -in skalyar hasilidir.

$$A = \bigcup_{(u,r) \in \Pi} H(u, r)$$

təsadüfi çoxluğuna Puasson şəbəkəsi deyilir. Əgər $\mathcal{F}$ $\mathbb{R}^n$ -in qapalı altçoxluqlarının çoxluğu, K $\mathbb{R}^n$ -də kompakt, $\mathcal{F}_K = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap K \neq \emptyset\}$, $\psi(K) = (\lambda \otimes \text{mes}) \times (H^{-1}(\mathcal{F}_K))$ olarsa, onda P. ş. A -nın müşayiətəddici funksionalı T_A

$$T_A = 1 - \exp(-\psi)$$

şəklində yazıla bilər.

Əd.: [1] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Санта́ло Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983.

PUASSON TEOREMİ « Пуассона теорема; Poisson theorem » – Bernulli sxeminə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının Puasson paylanmasına yığılması haqqında müddəadır. Seriyalar sxemi üçün P. t. aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\{X_{nj}\}_{j=1}^n$, $n=1, 2, \dots$ hər bir seriyada asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər seriyalarının ardıcılığı.

$$p_{nj} \equiv \mathbf{P}\{X_{nj} = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X_{nj} = 0\}$$

olsun. Əgər

$$S_n = X_{n1} + \dots + X_{nm},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} p_{nj} = 0, \quad 0 < \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n p_{nj} < \infty$$

olarsa, onda hər bir $k=0, 1, 2, \dots$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

münasibəti doğrudur. Xüsusi halda, əgər $p_{n1} = \dots = p_{nm} = p_n$ olarsa, P. t.-nə görə n və p_n parametrləri binomial paylanmalar $np \rightarrow \lambda > 0$, $n \rightarrow \infty$ olduqda λ parametrlı Puasson paylanmasına yığılır. Belə şəkildə ilk müddəanı S. Puasson [1]-də ifadə etmişdir.

Əgər X_{nj} təsadüfi kəmiyyətləri Puasson sınaqları seriyaları sxeminə A_{nj} hadisələrinin indikatorları kimi interpretasiya olunarlarsa, onda P. t.-nə əsasən sınaqların sayı böyük, hər bir hadisənin bir sınaqda baş vermə ehtimalı kiçik olarsa, baş verən hadisələr sayı təqribən Puasson qanunu ilə paylanır. Bununla əlaqədar olaraq P. t. bəzən kiçik ədədlər qanunu və ya nadir hadisələr haqqında teoremlər də adlandırılır.

P. t.-ndə yığılma sürəti aşağıdakı kimi qiymətləndirilmişdir:

$$\left| \mathbf{P}\{S_n = k\} - e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \right| \leq 2 \sum_{j=1}^n p_{nj}^2, \quad (*)$$

burada $\lambda_n = \sum_{j=1}^n p_{nj}$. Xüsusi halda, əgər $p_{n1} = \dots = p_{nm} = \lambda/n$

olarsa, onda $\lambda_n = \lambda$ və (*)-nın sağ tərəfi $2\lambda^2/n$ olur.

P. t. sonsuz bölünən paylanmaların təsviri haqqında məsələlər çərçivəsində Puasson paylanmasına yaxınlaşmanın öyrənilməsinin və hər hansı A_n sabitləri ilə mərkəzləndirilmiş, asılı olmayan müntəzəm sonsuz kiçik təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri

$$S_n = X_{n1} + \dots + X_{nm} - A_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarını F_n -lərin Puasson paylanmasına yığılma şərtlərinin tapılmasının əsasını qoymuşdur. Zəif yığılmanın uyğun kriterisini ümumi kriteridən almaq çətin olmur (bax, Limit teoremləri).

Qeyri – klassik qoyuluşda limit teoremləri nəzəriyyəsində F_n paylanmalarının Puasson qanununa yığılması üçün daha ümumi kriteri də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] P o i s s o n S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Л о з в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

PUASSON TƏSADÜFİ MEYDANI « пуассоновское случайное поле; Poisson random field » – ixtiyari məhdud çoxluğa aid olan nöqtələrinin sayı Puasson paylanmasına malik olan nöqtəvi təsadüfi meydandır, kəsişməyən çoxluqlara aid olan nöqtələrin sayları qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Керста́н Й., Матте́с К., Мекке́ Й., Безгранично делимое точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

RABİTƏ KANALI « связи канал; communication channel » – bax, *Kanal*; *rabitə kanalı*.

RADEMAXER ARDICILLIĞI « Радемахера последовательность; Rademacher sequence » – $[0, 1]$ parçasında təyin olunmuş

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t, \quad n \in \mathbb{N}$$

funksionallannın ardıcılığıdır. H. Rademacher tərəfindən $[1]$ -də daxil olunmuşdur. R. a. asılı olmayan, sanki yaqın iki $+1$ və -1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır ($[0, 1]$ -də altçoxluqların Borel σ – cəbri və Lebeq ölçüsü götürülür). Əksər hallarda, ixtiyari ehtimal fəzasında təyin olunmuş ixtiyari belə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı da R. a. kimi anlaşılar (bəzən bu ardıcılıq asılı olmayan Bernulli təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı kimi də adlandırılır). R. a. Bernulli sınaqları sxemində «müvəffəqiyyətlər» sayı ardıcılığı ilə sıx əlaqədardır, bu sxem üçün ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox mühüm qanunları ilkin olaraq müəyyən olunmuşdu və bu qanunlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinə aid idi.

Ehtimal nəzəriyyəsində və funksiyalar nəzəriyyəsində əmsalları skalyar və ya vektor a_n olan ($n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \quad (*)$$

sirasının sanki yaqın yığılma şərtləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Əgər $a_n \in \mathbb{R}^1$ və $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ olarsa, onda (*) sırası sanki

yaqın yığılır (Rademacher teoremi): əgər, əksinə $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ olarsa, onda (*) sırası sanki yaqın dağılır (Xinçin

– Kolmoqorov teoremi). a_n əmsalları ümumi Banax fəzasından götürüldükdə, (*) sırasının yığılması üçün effektiv zəruri və kafi şərtlər yoxdur. Sonlu kotip Banax şəbəkələri üçün bu məsələ tamamilə həll olunmuşdur (bax, [3]). Belə fəzalara tipik misal $L^p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ fəzalarıdır. $\sum_k a_k r_k(t)$,

$a_k \in L^p$ sırası L^p -də, demək olar ki, bütün $t \in [0, 1]$ qiymətlərində, yalnız və yalnız, o halda yığılır ki,

$$\int_S \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(s) \right)^{p/2} d\mu(s) < \infty$$

şerti ödənilsin. Məsələn, əgər B Hilbert fəzasıdırsa, onda (*) sırası $a_n \in B$ olduğu halda sanki yaqın, yalnız və yalnız, o halda

yığılır ki, $\sum \|a_n\|^2 < \infty$ olsun.

(*) sırasının yığılma şərtləri Banax fəzalarının mühüm siniflərinin təriflərinin əsasını təşkil edir (*Banax fəzası p tip*).

R. a. $L_2[0, 1]$ -də tam ortonormalanmış sistem deyildir. R. a.-ni özündə saxlayan ən çox yayılmış tam ortonormalanmış sistem Uolş funksiyalar sistemidir.

Əd.: [1] Rademacher H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112–38; [2] Кашин Б. С. и др., Ортогональные ряды, М., 1984; [3] Maurey B., в кн.: Séminaire Maurey – Schwartz, 1973–1974, Exp. № 24–25, P., 1974; [4] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

RADEMAXER TEOREMİ « Радемахера теорема; Rademacher theorem » – bax, *Rademacher ardıcılığı*.

RADON FƏZASI « радоново пространство; Radon space » – bax, *Ölçü*.

RADON ÖLÇÜSÜ « Радона / радонова мера; Radon measure » – T topoloji Hausdorf fəzasının Borel σ – cəbri $\mathcal{B}(T)$ -də ele sonlu μ ölçüsüdür ki, hər bir $B \in \mathcal{B}(T)$ çoxluğu üçün

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : K \subset B, K \text{ – kompakt çoxluqdur} \}$$

münasibəti doğrudur.

Hər bir R. ö. τ – hamar, requlyar və sıx ölçüdür. Polski fəzasında hər bir sonlu Borel ölçüsü (tam separabel metrik fəzada da) R. ö.-dür.

$\mathcal{B}(T)$ -də sonsuz ölçü üçün (*) münasibəti ödənilərsə və bu ölçü lokal sonlu olarsa (yəni hər bir $x \in T$ nöqtəsinin sonlu ölçüyə malik ətrafı olarsa), belə ölçü də R. ö. adlanır.

$\mathcal{B}(T)$ -də dəyişənşərhəli (hem də kompleks) ölçünün variyasiyası yuxarıdakı tərif mənasında radon variyasiyası olarsa, belə ölçü də R. ö. adlanır.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977; [2] Schwartz L., Radon measure on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

RADON – NİKODİM XASSƏSİ Banax fəzasında « Радона – Никодима свойство банахова пространства; Radon – Nikodym property of a Banach space » – qiymətləri bu fəzadan olan vektor ölçüləri üçün Radon – Nikodim teoreminin doğruluğu ilə əlaqədar olan fəza xassəsidir. Əgər ixtiyari $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası üçün sonlu variyasiyalı, $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ixtiyari vektor ölçüsü $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbf{B}$

$$\varphi(A) = \int_A X d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{A}$$

integralı şəklində göstərilərsə, Banax fəzası $\mathbf{B}$ R. – N. x.-ne malikdir, deyilir, burada $X: \Omega \rightarrow \mathbf{B}$ güclü 1-ci tərtiblə separabel qiymətli təsadüfi elementdir. Həqiqi ədədlərin fəzası $\mathbb{R}$ və

kompleks ədədlərin fəzası $\mathbb{C}$ Radon – Nikodim teoreminə əsasən $R. - N. x$ -nə malikdir. Əgər B fəzası Lebeq ölçülü $[0, 1]$ ehtimal fəzasına nəzərən $R. - N. x$ -nə malikdirsə, onda bu fəza $R. - N. x$ -sine malikdir. Banax fəzalarından refleksiv fəzalar, qoşma olan separabel fəzalar $R. - N. x$ -nə malik fəzalardır. c_0

və $L^1[0, 1]$ fəzaları $R. - N. x$ -nə malik deyildirlər. $R. - N. x$ -ni təmin edən müxtəlif həndəsi şərtlər məlumdur.

B fəzası $R. - N. x$ -nə malik olduğu halda (və yalnız bu halda), B fəzasında martinqal üçün martinqalın yığılması haqqında klassik Dub teoreminin analoqu vardır. $R. - N. x$ anlayışı *radonlayıcı operatorlara* aid nəticələr baxımından maraqlıdır.

Əd.: [1] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977.

RADON – NIKODİM TEOREMİ « Радона – Никодима теорема; Radon – Nikodym theorem » – ölçü nəzəriyyəsinin əsas teoremlərindən biridir. yüklərin (ümumiləşmiş ölçülərin) ölçülər vasitəsilə integral ifadələrinə aiddir; bu yüklərin bu ölçülərə nəzərən mütləq kəsilməz olduğu fərz olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, σ – sonlu ölçülü fəza, $\lambda, - \mathcal{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ixtiyari σ – sonlu yük olsun [sonuncu şərt onu ifadə edir ki, ixtiyari $Y \in \mathcal{A}$ üçün $\mu(Y) = 0$ münasibəti $\lambda(Y) = 0$ münasibətini doğurur]. Onda Ω -da ələ ədədi sonlu μ – ölçülən f funksiyası vardır ki, ixtiyari $Z \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(Z) = \int_Z f d\mu$$

bərabərliyi doğrudur (Radon – Nikodim teoremi).

f funksiyası o mənada yeganədir ki, əgər $g \in \Omega$ -da hər hansı digər $e \mu$ – ölçülən ədədi funksiya olarsa ki, bu funksiya üçün

$$\lambda(Z) = \int_Z g d\mu, \quad Z \in \mathcal{A}$$

bərabərliyi doğrudur, onda μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə $g(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ münasibəti ödənilir.

f funksiyası μ ölçüsünə nəzərən λ yükünün Radon – Nikodim törəməsi (sıxlığı) adlanır və $\frac{d\lambda}{d\mu}$

simvolu ilə işarə olunur. Əgər λ yükü ölçü (müsbət) olarsa, onda onun Radon – Nikodim törəməsi sanki hər yerdə müsbətdir. λ yükünün tam variasiyası $|\lambda|$ üçün

$$|\lambda|(Z) = \int_Z |f| d\mu, \quad Z \in \mathcal{A}$$

münasibəti doğrudur.

Məsələn, λ yükünün Radon – Nikodim törəməsi μ ölçüsünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda integrallanırsa ki, λ yükünün sonlu tam variasiyası olmuş olsun.

$R. - N. t.$ Hilbert fəzasında verilmiş ixtiyari kəsilməz xətti funksionalın ifadəsi haqqında Riss teoremi ilə sıx əlaqəlidir (bu teoremlərdən ixtiyari biri digərindən alınır). Ehtimal nəzəriyyəsində şərti ehtimal və şərti niyəzi gözləmə anlayışları $R. - N. t.$ vasitəsilə korrekt şəkildə daxil olunur (bax, [2]). $R. - N. t.$ -nin bezi ümumiləşmələri funksional analizdə istifadə olunur (bax, məs., [3]).

Bax, *Mütləq kəsilməz paylanma*.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей.

Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. 3 изд., М., 1987; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [4] Гнхман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

RADON – NIKODİM TÖRƏMƏSİ « Радона – Никодима производная; Radon – Nikodym derivative » – bax, *Sıxlıq, ehtimal sıxlığı*.

RADONLAYICI OPERATOR « радонизирующий / радонифицирующий оператор; Radonifying operator » – B_1 -də kəsilməz xarakteristik funksionalı olan hər bir silindrik ölçünü Radon ölçüsünə qədər davam olunmuş silindrik ölçüyə çevirən, B_1 Banax fəzasından B_2 Banax fəzasına kəsilməz xətti u operatorudur. Ekvivalent tərif: əgər hər hansı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası və hər bir kəsilməz xətti $T: B_1^* \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ operatoru üçün $Tu^*: B_2^* \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hər hansı $Y: \Omega \rightarrow B_2$ separabelqismətli təsadüfi element ilə doğrulursa, $u: B_1 \rightarrow B_2$ R. o.-dur.

Sazonov teoreminə əsasən, əgər H_1 və H_2 Hilbert fəzaları olarsa, onda $u: H_1 \rightarrow H_2$ kəsilməz xətti operatoru, yalnız və yalnız, o halda R. o.-dur ki, u Hilbert – Şmidt operatoru olsun. Bu hökmün Banax fəzalarının daha ümumi cütleri üçün ümumiləşdirilməsi ilə əlaqədar olaraq L. Şvarts (L. Schwartz) «R. o.» anlayışını daxil etmişdir.

R. o. anlayışı ilə (p, q) -radonlayıcı və p -radonlayıcı operatorlar anlayışları da sıx əlaqədardır. $0 \leq q \leq p \leq \infty$. Əgər B_1 -də hər bir p -tip μ silindrik ölçüsü

üçün onun obrazı $\mu_u = \mu \circ u^{-1}$ B_2 -də güclü q -tərtib Radon ölçüsünə qədər davam olunarsa və ya buna ekvivalent olaraq: hər bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası və hər bir $T: B_1^* \rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ kəsilməz xətti operatoru üçün $T \circ u^*$

operatoru güclü q tərtib (yeni $M \|Y\|^q < \infty$) hər hansı $Y: \Omega \rightarrow B_2$ separabelqismətli təsadüfi elementi ilə doğrulursa, $u: B_1 \rightarrow B_2$ kəsilməz xətti operatoru (q, p) -radonlayıcı operator adlanır. (p, p) -radonlayıcı operator p -radonlayıcı operator adlanır. 0 -radonlayıcı operator anlayışı R. o. anlayışı ilə eynidir. $1 < p < \infty$ olduqda $u: B_1 \rightarrow B_2$ kəsilməz xətti operatoru, yalnız və yalnız, o halda p -radonlayıcı olur ki, o, p -cəmləyici operator, yəni hər hansı $\beta > 0$ və bütün $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_n \in B_1$ üçün

$$\sum \|u b_k\|^p \leq \beta \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |b^*(b_k)|^p : b^* \in B_1^* \|b^*\| \leq 1 \right\}$$

xassəsini ödəyən operator olsun (Kvaпен – Şvarts teoremi). p -cəmləyici operatorunun tərifinin $0 < p \leq 1$ olduqda da mənası vardır. $p=1$ olduqda, əgər B_2 Radon – Nikodim xassəli Banax fəzası olarsa, yuxarıdakı müddəanın analoqu qeyd olunduğu kimi ifadə olunur. Əgər B_1^* məhdud

aproximasiya xassəsinə malik olarsa, B_2 Radon – Nikodim xassəli Banax fəzası olarsa, analoji hökm $0 < p < 1$ olduqda doğrudur.

Sonuncu müddədə məhdud approximasialıq xassəsinə atmaq olmaz, hətta B_2 Hilbert fəzası olsa belə (bax, [5]).

Əd.: [1] Schwartz L., «C. r. Acad. sci.» Ser. A, 1967, t. 265, № 25, p. 832–34; [2] Seminaire L., Schwartz L., Applications radonifiantes, P., 1969–70; [3] Kwapień S., «C. r. Acad. sci.», Ser. A, 1969, t. 269, № 14, p. 590–92; [4] Пич А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [5] Pisier G., «Asterisque», 1985, t. 131, № 1, p. 163–74.

RANDOMİZASIYA « рандомизация; randomization » – 1) statistik nəticənin alınması üçün istifadə olunan və randomlanmış statistik prosedurlarda qərarların çıxarılması üçün əlavə asılı olmayan eksperimentlərin aparılmasından ibarət olan prosedurlardan biridir. Bu prosedur araşdırılan obyekt haqqında son qərar qəbul edilməsi üçün statistik eksperimentin növbəti təkrarında müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin seçilməsindən ötrü statistik eksperimentin dayandırılmasını münasib surətdə təyin etməyə xidmət edir. R. prosedurunda təsadüfiliq mexanizmi olaraq vergəc (rus. датчик) və ya təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə edilir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*); 2) eksperimentlərin statistik planlaşdırılmasında təkmilləşdirilmə üsullarının təsirlərinin effektivliyinin araşdırılmasına əsaslandırılaraq statistik nəticələrin alınması üçün mövcud prosedurlardan biridir və təkmilləşdirmə üsullarının eksperimental vahidlərlə «ixtiyari» (təsadüfi) qaydada tutuşdurulmasından (müqayisəsindən) ibarətdir. Bax, məs., *Dispersion analiz*.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез., пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984; [3] Fisher R. A., The design of experiments, Edin. – L., 1935.

RANDOMİZASIYA(sı) kriterilərin, kriterilərin yerdəyişmələrinin « рандомизация критерий, перестановок критерий; randomization / permutation test » – müşahidə olunan təsadüfi vektorun bu vektorun argumentlərinin yerdəyişməsinə nəzərən ehtimal sıxlığının simmetriyaliy haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyası $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ üzrə $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun naməlum ehtimal sıxlığı $p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_n)$ -in öz argumentlərinin yerdəyişməsinə nəzərən simmetrik olması, yəni $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n})$ [$(r_1, \dots, r_n)$, $-\quad (1, 2, \dots, n)$] vektorunun koordinatlarının yerdəyişməsindən alınan vektordur] bərabərliyinin ödənilməsi haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq

tələb olunur. Daha sonra fərz olunur ki, $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ və $\mathbf{R}$ – uyğun olaraq, qaydalı statistikalar vektoru və rənglər vektorudur, bu vektorlar isə $\mathbf{X}$ -in müşahidələri vektoru üzrə qurulmuşdur; $\Psi = \Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R})$ elə statistika olsun ki,

$$\mathbf{M} \{ \Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R}) | \mathbf{X}^{(\cdot)} \} = \alpha$$

bərabərliyi hər hansı $\alpha \in (0; 1)$ üçün sanki hər yerdə ödənilsin.

Bu halda Ψ statistikasını ilə $\varphi(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R})$ münasibətilə əlaqəli olan, kritik funksiyası φ olan statistik kriteri *randomizasiya kriterisi* adlanır. $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ tam *kafi statistika*

olduğundan, H_0 hipotezinin doğruluğu halında *oxşar kriterilər* ailəsi yerdəyişmələr kriteriləri ailəsi ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Гаяек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

RANDOMİZASIYA(sı) oyunun « рандомизация игры; randomization of a game » – bax, *Oyunu, iki şəxs*.

RANDOMLANMAMIŞ HƏLL « нерандомизированное решение; nonrandomized decision » – randomlanmış həlledici funksiyaya görə seçilmiş həldir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*).

RANDOMLANMAMIŞ HƏLLEDİCİ FUNKSIYA « нерандомизированная решающая функция; non-randomized decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

RANDOMLANMAMIŞ KRİTERİ « нерандомизированный критерий; nonrandomized test » – kritik funksiyası φ yalnız 0 və 1 qiymətlərini alan *statistik kriteridir*.

R. k. kritik oblast $S = \{x : \varphi(x) = 1\}$ ilə verilir ki, müşahidə nəticəsi bu oblastdan olduqda ilkin hipotez qəbul edilmir. Praktikada yalnız R. k. istifadə olunur. R. k.-nin ölçüsü verilən mühümlük ölçüsünə çatmaya da bilər (diskret paylanmalar üçün). Bu halda belə kriterinin faktiki ölçüsünü göstərmək qəbul olunmuşdur.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

RANDOMLANMAMIŞ STRATEGİYA « нерандомизированная стратегия; nonrandomized strategy / policy » – bax, *Strategiya, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

RANDOMLANMIŞ BLOKLAR PLANI « рандомизированных блоков план; randomized block design » – blokda nümunələr üzərində ölçmələrin aparılma qaydası təsadüfi olan *blok planıdır*.

RANDOMLANMIŞ HƏLLEDİCİ FUNKSIYA « рандомизированная решающая функция; randomized decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

RANDOMLANMIŞ HƏLLEDİCİ QAYDA « рандомизированное решающее правило; randomized decision rule » – bax, *Statistik oyun*.

RANDOMLANMIŞ KRİTERİ « рандомизированный критерий; randomized test » – kritik funksiyası seçimi fəzanın heç olmasa bəzi nöqtələrində 0 və 1-dən fərqli qiymətlər alan *statistik kriteridir*. R. k. ilə hipotezlərin yoxlanılması prosedurunda *randomizasiya* aparılır, yəni əlavə təsadüfi sınaq aparılır və bu sınağın nəticəsindən asılı olaraq hipotezin qəbul edilib-edilməməsi haqqında qərar verilir.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

RANDOMLANMIŞ OYUN « рандомизированная игра; randomized game » – bax, *Statistik oyun*.

RANDOMLANMIŞ PLAN « рандомизированный план; randomized design » – bax, *Dispersion analiz*.

RANDOMLANMIŞ STATİSTİK QİYMƏT « рандомизированная оценка; randomized estimator » – qiymətləndirmənin statistik probleminə randomlanmış *həlledici funksiyadır*. R. s. q., x – statistik eksperimentin nəticəsidirsə, qiymətləndirilən θ parametrinin ölçülən fəzasında $\varphi(\cdot|x)$ paylanmasını verməklə təyin olunur və bu halda paylanması $\varphi(\cdot|x)$

olan təsadüfi kəmiyyəti ayrıca müşahidə etmək tələb olunur; bu müşahidənin nəticəsi θ üçün statistik qiymət götürülür. Qiymətləndirmənin statistik probleminə hipotezlərin yoxlanılması məsələlərindən fərqli olaraq, optimal statistik qiymətlər bir qayda olaraq, randomlaşmayan həlledici funksiyalardır.

Əd.: [1] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] H o d g e s J., L e h m a n E., «Ann. Math. Statist.», 1950, v. 21, № 2, p. 182–97.

RANDOMLANMIŞ STRATEGİYA, qarışıq strategiya «рандомизированная стратегия, смешанная стратегия; **randomized (mixed) strategy**» – iki şəxsin oyununda (və ya strategiya oyunda) strategiyalardan birinin təsadüfi seçilmə qaydasıdır (verilmiş paylanma ilə). Təsadüfi seçilmiş strategiya bütün mümkün «təmiz strategiya»lar çoxluğundan seçilir. Seçilmiş paylanma R. s. kimi qəbul edilir.

RANQ KORRELYASIYA ƏMSALI «ранговой корреляции коэффициент; **rank correlation coefficient**» – nominal təsadüfi dəyişənlər arasında statistik əlaqənin sıxlığı dərəcəsini ölçən kəmiyyətdir. Aşağıda cütütün R. k. ə.-nin qurulması üsullarından biri verilmişdir. Fərz olunur ki, ümumiləşmiş korrelyasiya əmsalı Γ ([4]-dəki kimi) aşağıdakı şəkildə verilir:

$$\Gamma = \sum a_{ij} b_{ij} / \sqrt{\sum a_{ij}^2 \sum b_{ij}^2},$$

burada $a_{ij} = a(X_i, X_j)$, $b_{ij} = b(Y_i, Y_j)$ – uyğun olaraq, X və Y müşahidələr cütlerinin bəzi funksiyalarıdır. $a_{ij} = X_j - X_i$, $b_{ij} = Y_j - Y_i$ olduqda cütütün Pirson korrelyasiyasının adi əmsalı alınır.

(R_i, S_i) , – seçimdaxili rəqlənmədə (X_i, Y_i) təsadüfi kəmiyyətlərinin rəqləni olsun, $i = 1, \dots, n$. $a_{ij} = R_j - R_i$, $b_{ij} = S_j - S_i$ götürdükdə, Spirmen rəqlə korrelyasiya əmsalı ρ alınır, burada R_i , – X müşahidələrinin, S_i , – Y müşahidələrinin rəqləndir, $i = 1, \dots, n$. Beləliklə, ρ – cütütün korrelyasiya əmsalı kimi, müşahidələrin onların rəqləni ilə əvəz olunması ilə hesablanır. $R_i < R_j$ olduqda $a_{ij} = 1$, $R_i > R_j$ olduqda $a_{ij} = -1$ götürdükdə Kendall rəqlə korrelyasiya əmsalı τ alınır.

Nominal təsadüfi dəyişənlərin sayı ikidən çox olduqda (m , $m > 2$) bunlar arasında statistik əlaqənin sıxlığı dərəcəsini ölçmək üçün, adətən, R. k. ə.-nin toplam variantı – Kendall konkordasiya (uzlaşma) əmsalı adlandırılan $W(m)$ əmsalından istifadə olunur. Bu əmsalın seçimi versiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\hat{W}_m = \frac{12}{m^2(n^3 - n)} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m R_i(j) - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2,$$

burada $R_i(j)$, – j -ci təsadüfi dəyişənin i -ci müşahidəsinin rəqləndir.

Əd.: [1] К е н д э л М. Д ж., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [2] Х о л л е н д е р М., В у л ь ф Д. А., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Л и к е ш И., Л я г а Й., Основные таблицы математической статистики, пер. с чеш., М., 1985; [4] D a n i e l s H. E., «Biometrika», 1948, v. 35, p. 416–17.

RANQ KORRELYASIYASI «ранговая корреляция; **rank correlation**» – nominal təsadüfi dəyişənlər arasında statistik əlaqədir, bu dəyişənlər statistik olaraq araşdırılmış obyektləri bunlarda analiz olunan xassənin aşkar olunma cəhəti üzrə nizamlamağa imkan yaradır. Statistik praktikada bu əlaqə statistik araşdırılmış obyektlərin müxtəlif xassələr üzrə nizamlanmış sonuncu verilənləri (r a n q l a n m a l a r ı) əsasında analiz olunur. Beləliklə, eyni bir obyektlər çoxluğunun iki və ya bir neçə rəqlənmələri arasında statistik əlaqəni ölçməyə və analize imkan yaradan anlayış və metodlar sistemə baxılır.

Belə rəqlənmələrin generasiyalanma mexanizmini təsvir edən ən çox yayılmış riyazi model (iki bir-birindən asılı dəyişən halında) aşağıdakı sxemlə ifadə olunur.

(X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ – ikiölçülü $F(x, y)$ paylanmasına tabe, marginal paylanma funksiyaları F_1 və F_2 olan təsadüfi kəmiyyətlər, $X_1 \leq \dots \leq X_n$, – X -in müşahidələri üzrə qurulmuş variation sıra olsun. Asılılığın rəqlə ölçüləri bir qayda olaraq Y -in müşahidələrinin qaydası ilə bu artmaqda olan qaydanın uzlaşmasını ölçür. Belə ölçülər X və Y müşahidələrinin monoton çevirmələrinə həssas olmayıb, bu mənada qeyri – parametrik ölçülərdir. Belə ölçülərin əksənliyyətinin seçimi versiyaları asılı olmamazlıq hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş kriterilərin paylanmasından asılı olmayan statistikalar olur.

Asılılıq ölçülərinin qurulmasının ümumi ideyası aşağıdakı kimidir. Əvvəlcə F -in $F_1 \cdot F_2$ hasilindən fərqi xarakterizə edən hər hansı funksional daxil olunur. Sonra bu funksionalın statistik qiyməti olan rəqlə statistikası qurulur. Asılı olmamazlıq hipotezi ödənildikdə bu statistikanın paylanması F -dən asılı olmur.

R. k.-nin ən yayılmış əmsallarından Spirmen əmsalı ρ və Kendall əmsalı τ -dur. Spirmen əmsalı

$$\rho_{sp} = 3 \iint [2F_1(x) - 1] [2F_2(y) - 1] dF(x, y)$$

şəklində asılılığı ölçür. Kendall əmsalı isə

$$\tau_K = 2P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1$$

funksionalının statistik qiymətidir. ρ və τ əmsallarının xətti kombinasiyası olduqca ümumi

$$r_m = \iint [F(x, y) - F_1(x)F_2(y)] dF(x, y)$$

funksionalının statistik qiymətidir (bax, [4]).

Asılılıq ölçülərindən ən məşhur olanlardan biri də

$$\Delta F = \iint [F(x, y) - F_1(x)F_2(y)]^2 dF(x, y)$$

H ö f d i n q ö l ç ü s ü d ü r (bax, [5]). Bu ölçüyə əsaslanan Höfdinq asılı olmamazlıq kriterisi yalnız asılı olmamazlığı müəyyən etməyə üçün tətbiq olunur.

Bütün qeyd olunmuş və digər asılılıq ölçülərinin statistik qiymətləri olan statistikalar U statistikalarıdır.

Asılılıq ölçülərinin qurulmasına digər yanaşma xətti rəqlə statistikaları nəzəriyyəsinin metodlarının tətbiqindən ibarətdir (bax, [1]). Uyğun statistikalar

$$T = \sum_{i=1}^n a(R_i) b(S_i)$$

şəklindədir, burada (R_i, S_i) , $i = 1, \dots, n$, – X və Y müşahidələrinin rəqləndir; $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ – rəqlənin bəzi funksiyaları olub,

nişanlar (rus. метка) adlanır. Bu statistikaların asimptotik normallığı isbat olunmuşdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Bhattacharya S., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, p. 138-49; [4] Grosse C. F., «Biometrika», 1966, v. 53, № 1, p. 293-325; [5] Hoeffding W., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 293-325; [6] Joag-Dev K., Handbook of Statistics, v. 4, Amst., 1984, p. 79-88.

RANQ KRİTERİSİ « ранговый критерий; rank test »

– ranq statistikasına əsaslanan statistik kriteridir. Məs., Uilkokson və Mann – Uitni kriteriləri ranq kriteriləridir. R. k.-ləri kəsilməz ciddi artan funksiyalarla verilən bütün çevrilmələrin qrupu G -yə nəzərən invariantdır; deməli, R. k.-ləri yerindəyişmə parametrləri və miqyasın dəyişmələrinə nəzərən invariantdır. Bundan əlavə, hipotezlərin statistik yoxlanılması məsələlərinin çoxunda ən güclü invariant kriterilər R. k.-ləri ilə yaxşı approksimə olunur.

Bax, Qeyri – parametrik kriteri.

Əd.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

RANQ STATİSTİKASI « ранговая статистика; rank statistics »

– ranqlar metodu üzrə qurulmuş statistikadır. Əgər $R = (R_1, \dots, R_n)$ – müşahidələrin təsadüfi vektoru $X = (X_1, \dots, X_n)$ üzrə qurulmuş ranqlar vektorudursa, onda R -in funksiyası olan ixtiyari $T = T(R)$ statistikası ranq statistikası adlanır. R və $1 = (1, 1, \dots, 1)$ vektorları arasında Kendall ranq korrelyasiya əmsalı τ R. s.-na klassik bir misaldır; bu əmsal

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \text{sign}(i-j) \text{sign}(R_i - R_j)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bütün R. s.-ları sinfində xətti R. s. adlanan R. s. xüsusi yer tutur. Bu statistikalar aşağıdakı kimi təyin olunur. $A = \|a(i, j)\|$ ixtiyari n tərtib kvadrat matris olsun. Onda

$$T = \sum_{i=1}^n a(i, R_i)$$

statistikası xətti ranq statistikası adlanır. Məs., R və 1 vektorları arasında Spirmen ranq korrelyasiya əmsalı ρ –

$$\rho = \frac{12}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} \right) \left(R_i - \frac{n+1}{2} \right)$$

düsturu ilə təyin olunur və ρ xətti R. s.-dır.

Xətti R. s.-ları bir qayda olaraq hesablamada üçün sadə şəkildədir və onların ehtimal paylanmalarını tapmaq çətin olmur. Məhz buna görə də, R. s. nəzəriyyəsində R. s.-nın xətti R. s.-ları ailəsinə proyeksiyası anlayışı böyük rol oynayır. Əgər T təsadüfi X vektoru üzrə qurulmuş hər hansı R. s.-dırsa və onun ehtimal paylanmaları haqqında H_0 hipotezi irəli sürülmüşdürsə, H_0 hipotezi doğru olduğu halda xətti R. s.-lar ailəsində $M(T - \hat{T})$ -nin minimallığını təmin edən $\hat{T} = \hat{T}(R)$ -ə R. s.

T -nin proyeksiyası deyilir. Bir qayda olaraq, $\hat{T}$ proyeksiyası R. s. T -ni olduqca yaxşı approksimasiya edir və $n \rightarrow \infty$ olduqda $T - \hat{T}$ fərqi əhəmiyyətsiz qədər kiçikdir. H_0 hipotezi doğru olduqda və bu hipotezə görə X təsadüfi vektorunun komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunursa, onda R. s. T -nin proyeksiyası $\hat{T}$

$$\hat{T} = \frac{n-1}{n} \sum_{i=r}^n \hat{a}(i - R_i) - (n-2)MT \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\hat{a}(i, j) = M\{T | R_i = j\}$, $1 \leq i, j \leq n$ (bax, [1]).

R. s.-ları τ və ρ arasında daxili əlaqə vardır. [1]-də göstərilmişdir ki, H_0 hipotezi doğru olduğu halda, Kendall korrelyasiya əmsalı τ -nın xətti R. s.-lar ailəsinə proyeksiyası $\hat{\tau}$ Spirmen ranq korrelyasiya əmsalı ρ ilə sabit vuruq dəqiqliyi ilə üst-üstə düşür, yəni $\tau = (2/3)(1 + 1/n)\rho$. Bu bərabərlikdən alınır ki, ρ və τ arasında korrelyasiya əmsalı $\text{corr}(\rho, \tau)$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\text{corr}(\rho, \tau) = \sqrt{D\hat{\tau}/D\tau} = 2(n+1)/\sqrt{2n(2n+5)}$$

yeni n -in böyük qiymətlərində ρ və τ asimptotik ekvivalentdirlər (bax, [2]).

Əd.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Kendall M. G., Rank correlation methods, 4 ed., L., 1970.

RANQLANMA « ранжировка; ranking » – bax, Binar münasibətlər statistikası, Ranq korrelyasiyası.

RANQLAR CƏMİ KRİTERİSİ « суммы рангов критерий; rank sum test »

– X_i və Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ümumi variasion sırasında Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ranqları cəmi $R_1 + \dots + R_m$ ranq statistikasına əsaslanan, iki $X_1, X_2, \dots, X_n$ və $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ seçimlərinin birincisliyi üçün statistik kriteridir (seçimlərin elementləri qarşılıqlı asılı olmayan və kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir). Uilkokson kriterisinin variantıdır.

RANQLAR VEKTORU « рангов вектор; vector of ranks »

– müşahidələrin $X = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektoru üzrə qurulmuş $R = (R_1, \dots, R_n)$ vektor statistikasıdır və onun i -ci komponenti $R_i = R_i(X)$, $i = 1, \dots, n$

$$R_i = \sum_{j=1}^n I_{[0, \infty)}(X_i - X_j)$$

qaydası ilə qurulur, burada $I_{[0, \infty)}(x)$, $- [0, \infty)$ çoxluğunun indikatorudur, yəni

$$I_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x \geq 0, \\ 0, & \text{əgər } x < 0. \end{cases}$$

R_i , $i = 1, \dots, n$ statistikası X təsadüfi vektorunun i -ci komponenti X_i -nin ranqı adlanır. R. v.-nın tərifinə aşağıdakı şərt ödənildikdə korrekt olur: X təsadüfi vektorunun ehtimal paylanması $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$ sıxlığı ilə verildikdə,

$P\{R_i = R_j\} = 0, i \neq j$ şərti ödənilir. Bu şərtlər ödənildikdə R. v.-nın tərifindən belə nəticə alınır: R statistikası $1, 2, \dots, n$ ədədlərinin bütün yerdəyişmələri $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ -lərin $\mathfrak{R} = \{r\}$ fəzasından qiymətlər alır və bu zaman R_i rəqəminin realizasiyası r_i ($r_i = 1, 2, \dots, n$) ədədi qiymətcə X vektorunun müşahidə olunmuş i -ci qiymətləri $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ komponentinin realizasiyalarını aşmayan komponentlərinin sayına bərabərdir.

$X^{(i)} = (X_{(n1)}, \dots, X_{(nn)})$, — X müşahidələr vektoru üzrə qurulmuş qaydalı statistikalar vektoru olsun. Onda $(R, X^{(i)})$ cütü X vektorunun paylanması üçün kafi statistikadır. X vektorunun özü isə $(R, X^{(i)})$ kafi statistikası üzrə birqiymətli bərpə olunur. Bundan başqa, əgər əlavə olaraq fərz olunarsa ki, X təsadüfi vektorunun ehtimal sıxlığı $p(x)$ arqumentlərin yerdəyişməsinə nəzərən simmetrikdir, onda $(R, X^{(i)})$ kafi statistikasının komponentləri R və $X^{(i)}$ asılı deyildir və

$$P\{R = r\} = 1/n!, \quad r \in \mathfrak{R}.$$

Məsələn, əgər

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (1)$$

olarsa, yəni X təsadüfi vektorunun komponentləri asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa ($f(\cdot)$, — X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal sıxlığıdır), onda ixtiyari $k = 1, 2, \dots, n$ üçün

$$\left. \begin{aligned} P\{R_i = k\} &= 1/n, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ P\{R_i = k, R_j = m\} &= 1/n(n-1), \quad i \neq j, k \neq m, \\ &\quad i, j, k, m = 1, 2, \dots, n, \\ MR_i &= (n+1)/2, \quad DR_i = (n^2-1)/12, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1) şərti ödəniləndiyi halda X_i və R_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü ehtimal sıxlığı $q(x_i, k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ vardır və o,

$$\begin{aligned} q(x_i, k) &= \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x_i)]^{k-1} [1-F(x_i)]^{n-k} f(x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $F(\cdot)$, — X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyasıdır. (2) və (3)-dən alınır ki, X_i təsadüfi kəmiyyətinin $R_i = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) şərtinə nəzərən şərti ehtimal sıxlığı $q(x|R_i = k)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\begin{aligned} q(x|R_i = k) &= \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x_i)]^{k-1} [1-F(x_i)]^{n-k} f(x_i) \end{aligned} \quad (4)$$

(4) düsturu $X_{(n,k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, — k -cı qaydalı statistikasının ehtimal sıxlığının ifadəsi olduğundan, bu düstur müşahidələr vektoru X , R. v. R və qaydalı statistikalar vektoru $X^{(i)}$

arasında olan daxili əlaqəni izləməyə imkan yaradır. Bundan əlavə, (3)-dən aydındır ki, R_i rəqəminin şərti paylanması

$$P\{R_i = k | X_i\} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x_i)]^{k-1} [1-F(x_i)]^{n-k}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Nəhayət, MX_i və DX_i momentlərin varlığı qəbul edilərsə və (1) ödənilərsə, (2) və (3)-dən alınır ki, X və R_i arasındakı korrelyasiya əmsalı $\rho(X_i, R_i)$

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{\frac{12(n-1)}{(n+1)DX_i}} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \left[F(x_i) - \frac{1}{2} \right] dF(x_i)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Məsələn, əgər $X_i \sim N(a, \sigma^2)$ normal qanununa tabedirsə, onda

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{3(n-1)/\pi(n+1)}$$

olur və $\rho(X_i, R_i)$ normal qanununun parametrlərindən asılı olur. X_i $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanma qanununa tabe olarsa, onda

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{(n-1)/(n+1)}.$$

Əd.: [1] H e o f f d i n g W., в кн.: Proceedings of the 2-d Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berk. — Los Ang., 1951, p. 83–92; [2] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Т а р а с е н к о Ф. П., Непараметрическая статистика, Томск, 1976; [4] V o i n o v V. G., N i k u l i n M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 2 — Multivariate case, Dordrecht, 1996.

RAO KRİTERİSİ « Rao критерий; Rao test » — mürekkeblə statistik hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələsində statistik kriteridir. $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, — $\omega \in \Omega$ parametridən asılı, hər hansı σ — sonlu ölçüyə nəzərən sıxlığı $p(x, \omega)$ olan, P_ω paylanmalar ailəsindən təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1: \omega \in \Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \omega \in \Omega_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Ω_0 və Ω_1 , — Ω -nın kəsişməyən boş olmayan alt çoxluqlarıdır. R. k.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(X_i; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\omega}_n} \right)' \times \\ \times \Sigma^{-1}(\bar{\omega}_n) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(X_i; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\omega}_n} \right) \quad (*)$$

statistikasına əsaslanır və (*) statistikasının böyük qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etmir, burada $\bar{\omega}_n$ — ilkin hipotez şərtlərində (yeni $\omega \in \Omega_0$), $X^{(n)}$ seçimi üzrə hesablanmış, maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətidir, $\Sigma(\omega)$, — P_ω ailəsinin Fişer informasiya matrisidir, R. k. *doğruxaoxşarlıq nisbəti kriterisinə*, *Vald kriterisinə*, *C(α) statistik kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, deməli, uyğun asimptotik xassələrə də malikdir.

Əd.: [1] R a o C. R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1948, v. 44, p. 50–57; [2] P a o C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

RAO – BLEKUELL TEOREMİ « Pao – Блэкуэлла теорема; Rao – Blackwell theorem » – bax, *Kafi statistika*.

RAO – BLEKUELL – KOLMOGOROV TEOREMİ « Pao – Блэкуэлла – Колмогорова теорема; Rao – Blackwell – Kolmogorov theorem » – *statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*ndən bir hökmdür, bu hökm əsasında meylsiz statistik qiymətlərin yaxşılaşdırılması metodu qurulmuşdur. X , – $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyət olsun. Fərz olunur ki, ehtimal paylanmaları ailəsi $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ kafi $T = T(X)$ statistikasına malikdir və $\varphi = \varphi(X)$ ikinci momentlərin sonlu matrisi olan hər hansı vektor statistikadır. Bu halda φ statistikasının riyazi gözləməsi $M_\theta\{\varphi\}$ mövcuddur və hətta $\varphi^* = M_\theta\{\varphi|T\}$ şərti riyazi gözləməsi $M_\theta\{\varphi\}$ üçün meylsiz statistik qiymətdir, yəni $M_\theta\{\varphi^*\} = M_\theta\{M_\theta\{\varphi|T\}\} = M_\theta\{\varphi\}$. Bu şərtlərlə R. – B. – K. t.-ində hökm olunur ki, φ^* statistikasının kvadratik riski bütün $\theta \in \Theta$ üzrə φ statistikasının kvadratik riskini müntəzəm aşmır, yəni ixtiyari φ statistikasi ilə eyni ölçüyə malik z vektoru üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$\begin{aligned} z M_\theta\{(\varphi - M_\theta\{\varphi\})^T (\varphi - M_\theta\{\varphi\})\} z^T &\geq \\ &\geq z M_\theta\{(\varphi^* - M_\theta\{\varphi^*\})^T (\varphi^* - M_\theta\{\varphi^*\})\} z^T \end{aligned}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Məs., φ birölçülü statistika olduğu halda ixtiyari $\theta \in \Theta$ qiymətində φ^* statistikasının dispersiyası $D_\theta\{\varphi^*\}$, φ statistikasının dispersiyası $D_\theta\{\varphi\}$ -ni aşmır.

Ən ümumi halda R. – B. – K. t.-ində hökm olunur ki, kafi statistika üzrə ortalama əməliyyatı ixtiyari qabarıq itki funksiyasına nəzərən riskin artmasına səbəb olmur. Deməli, yaxşı statistik qiymətləri kafi statistikalər terminlərində, yəni zəruri statistikalər sinfində axtarmaq lazımdır.

$\{P_\theta\}$ tam ailə olarsa, yəni sıfırın yeganə meylsiz statistik qiyməti sanki hər yerdə sıfır bərabər funksiya olarsa, onda R. – B. – K. t. vasitəsilə alınan müntəzəm minimal riskə malik meylsiz statistik qiymət yeganə olur. Beləliklə, R. – B. – K. t. ən yaxşı meylsiz statistik qiymətlərin qurulması üçün bir qayda verir: əvvəlcə ixtiyari meylsiz statistik qiymət götürmək, sonra isə bu statistik qiyməti kafi statistika ilə ortalamaq lazımdır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303–26; [2] P a o C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] B l a c k w e l l D., «Ann. Math. Statist.», 1947, v. 18, p. 105–10; [5] V o i n o v V. G., N i k u l i n M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1–2, Dordrecht, 1993–96.

RAO – KRAMER BƏRABƏRSİZLİYİ « Pao – Крамера неравенство; Rao – Cramer inequality » – Fərqə bərabərsizliyi, informasiya bərabərsizliyi, – kvadratik itki funksiyasına nəzərən naməlum parametri *statistik qiymətləndirmə* məsələsində riskin aşağı sərhədini müəyyənləşdirən bərabərsizlikdir. Bax, *Kramer – Rao bərabərsizliyi*.

760 RAO

RAO – KRAMER – VOLFOVİTS BƏRABƏRSİZLİYİ « Pao – Крамера – Вольфовица неравенство; Rao – Kramer – Wolfowitz inequation » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

RAYKOV TEOREMİ « Райкова теорема; Raikov theorem »: sabit olmayan iki *təsadüfi kəmiyyətin* cəmi Puasson qanunu ilə paylanmışdırsa, onda toplananların hər biri də Puasson qanunu ilə paylanmışdır (bax, [1]). R. t.-dən Puasson paylanmasının I_0 sinfindən olduğu alınır (bax, *Sonsuz bölünən paylanma; ayrılış*). Lokal kompakt Abel qruplarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün R. t.-nin ümumiləşmələri məlumdur (bax, [2]). R. t. ilə təsvir olunan xassələr dayanıqlıdır: əgər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması Puasson paylanmasına yaxın paylanmadırsa, onda toplananların paylanması da Puasson qanununa yaxın paylanmaya malikdir; dayanıqlılığın keyfiyyət statistik qiymətləri məlumdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Р а й к о в Д. А., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 1, с. 9–12; [2] Р у х и н А. Л., «Тр. Матем. Ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 52–109; [3] Ч и с т я к о в Г. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50.

REALİZASIYA « реализация; realisation » – bax, *Seçimi funksiya*.

REALİZASIYA(sı) *təsadüfi funksiyanın «реализация случайной функции; realization of a random function/sample function»* – bax, *Təsadüfi funksiya*.

REDUKSIYASI, VERİLƏNLƏRİN (ƏLAMƏTLƏRİN) « выделение признаков; reduction of data » – özündə az miqdarda əhəmiyyət kəsb edən informasiya saxlayan, lakin olduqca çoxsaylı verilənləri olan ölçmə nəticələri çoxluğunun nisbətən azsayda verilənləri (əlamətləri) özündə saxlayan çoxluğa gətirilməsidir.

Bu istiqamətdə klassik məsələlərdən biri p – dim. – ölçüsünü

$x = (x_1, \dots, x_p)^T$ ölçmələr vektorunun m – dim. – ölçüsünə gətirməkdən (azaltmaqdan) ibarətdir, $m < p$.

Məs., baş komponentlər metodu bu məqsəddə xidmət edir; bu metodun əsas ideyası özündə çoxsaylı qarşılıqlı asılı kəmiyyətləri olan verilənlər çoxluğunun dim. – ölçüsünü azaltmaqdır ki, bu da imkan daxilində, dispersiyaya malik olan ilkin verilənləri ayırd edərək, onları saxlamaqdan ibarət olur. Bu isə verilənlərin yeni çoxluğuna (baş komponentlərinə) çevirmələr tətbiq olunmaqla həyata keçirilir və burada qeyd olunmalıdır ki, bu baş komponentlər qeyri – korrelyardırlar və bunlar ehtimal nəzəriyyəsi ilə ilk komponentlərin bir neçəsi ilkin verilənlərlə müqayisədə ən böyük dispersiyaya malik olsun. Baş komponentlərin məlum tərifi və onların tapılması (ayırd olunması) hələ K. Pirson (K. Pearson) tərəfindən daxil olunmuşdu və bu tərifdə çoxölçülü x vektorunun riyazi gözləməsi $Mx = a$ -nın və kovariasion matrisi $\Xi = M(x - a) \times$

$\times (x - a)^T$ -nin varlığı fərz olunur. Baş komponentlər xüsusi xassələrlə dispersiyaları olan, ilkin kəmiyyətlərin xətti kombinasiyaları kimi təyin olunur (bax, *Baş komponentlər analizi*). Məs., birinci baş komponent ən böyük dispersiyalı xətti kombinasiyaya deyilir. Digər komponentlərin dispersiyaları azalan qaydada, yəni $D(z_1) \geq D(z_2) \geq \dots \geq D(z_p)$ münasibətini ödəmək şərtlə nizamlanır, burada z_i – baş komponentlərdir, $i = 1, \dots, p$, p isə vektorun dim. – ölçüsüdür. Praktikada kiçik dispersiyalı xətti kombinasiyalar (komponentlər) nəzərə alınmır (atılır) və yalnız böyük dispersiyalı xətti kombinasiyalara baxılır. Baş komponentlər metodu Ξ matrisinin məxsusi $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$

edədlərinə uyğun h_k məxsusi vektorlarının tapılmasından ibarətdir. Bu halda λ_i baş komponentlərin dispersiyalarıdır. $(h_i, \mathbf{X})$ xətti kombinasiyaları baş komponentlər adlanır. Əgər $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)^T$ olarsa, onda $\mathbf{z} = H^T \mathbf{X}$ yazmaq olar, burada H – ortoqonal matrisdir, bu matrisin k -cı sütunu $h_k \in \Xi$ matrisinin k -cı məxsusi vektorudur.

Əgər $x_1, \dots, x_p$ dəyişənləri çoxölçülü birgə normal qanunla paylanmış olarlarsa, onda baş komponentlər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

İxtiyari iki bərabər olmayan $\mathbf{D}(z_i)$ və $\mathbf{D}(z_j)$ məxsusi qiymətlərinin uyğun məxsusi vektorları düz bucaq əmələ getirir. Bu xassə vektorların ortoqonallıq xassəsi

adlanır və $\sum_{k=1}^p h_{ik} h_{jk} = 0, i \neq j$ münasibətilə ifadə olunur.

Əgər iki məxsusi qiymət bərabər olarsa, onda onlara uyğun məxsusi vektorları ehtiva etmək olar ki, onlar ortoqonal olsunlar. Deməli, hesab etmək olar ki, p sayda baş komponent qarşılıqlı ortoqonaldırlar.

Baş komponentləri təyin etmək üçün kovariasion matris əvəzinə korrelyasion matrisdən istifadə etmək olar. Ümumi halda, korrelyasion matris üzrə alınmış baş komponentlər kovariasion matrislə alınan baş komponentlərdən fərqli olur.

Əd.: [1] Патрик Э., Основы теории распознавания образов, пер. с англ., М., 1980; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Jolliffe I., Principal Component Analysis, N. Y., 1986; [4] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

REDÜSLƏNMİŞ (STANDART NÖV) LATIN KVADRATI « редуцированный (стандартный) латинский квадрат; reduced (standart tipe) Latin square » – bax, *Latin kvadratı*.

REDÜSLƏNMİŞ SXEMİ, EKSPERİMENTİN « редуцированная схема эксперимента; reduced experimental scheme » – bax, *Aprior informasiyadan istifadə*.

REDÜSLƏNMİŞ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « редуцированный ветвящийся процесс; reduced branching process » – ilkin şaxələnen prosesin bu və ya digər hissəciklərindən yaranan, bu hissəciklərin isə nəslə (varisləri) verilən $T < \infty$ anında mövcud olan şaxələnen prosesdir. İlkin prosesin kritikaltı, kritik və ya kritiküstü olmasından asılı olaraq R.ş.p. kritikaltı, kritik və ya kritiküstü R.ş.p. adlanır (bax, *Şaxələnen proses*; kritiklik).

R.ş.p. [1]-də daxil olunmuşdur və şaxələnen proseslərdə ən yaxın ümumi əcdad anlayışının ümumiləşməsidir. Hər iki anlayış şaxələnen təsadüfi meydan nəzəriyyəsində istifadə olunur.

Markov prosesi üzrə qurulmuş R.ş.p. də Markov prosesidir, lakin, ümumiyyətlə, zamana görə bircins deyildir (bax, [7]).

R.ş.p.-in xassələri ilkin prosesin uyğun xassələrindən seçilir.

Misallər. 1) R.ş.p. kritikliyindən asılı olmayaraq cırlaşmayandır.

2) $\zeta_T(t)$, $0 \leq t \leq T$ – R.ş.p.-in hissəciklərinin sayıdır [yeni ilkin şaxələnen $\zeta(t)$ prosesinin ehtiva hissəcikləri sayıdır ki, onlar t anında mövcuddurlar və onların T anındakı varisləri çoxluğu boş olmayan çoxluqdur] və $\zeta_T(0) = 1$.

a) Əgər R.ş.p. kritikaltı prosesdirsə, onda ixtiyari $\sigma < \infty$ qiymətində və $T \rightarrow \infty$ olduqda $\zeta_T(t) = \zeta_T(T - \sigma + t)$,

$0 \leq t \leq \sigma$ ardıcılığı zaman üzrə qeyri – bircins şaxələnen limit prosesinə yığılır (bax, [6]).

b) Əgər R.ş.p. kritik proses olarsa, onda $v_T(t) = \zeta_T(tT)$, $0 \leq t < 1$ prosesləri $T \rightarrow \infty$ olduqda t anında hissəciyin bölünmə intensivliyi $1/(1-t)$ -yə mütənasib olan, zaman üzrə qeyri – bircins Yul prosesinə yığılır (bax, [2], [4]). Hissəcikləri tipi birdən çox olan kritik R.ş.p. üçün limit prosesində ixtiyari $t_1, t_2 \in (0, 1)$ anlarındakı hissəciklərin tipləri asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış tiplərdir (bax, [5]).

c) Kritiküstü halda $T \rightarrow \infty$ olduqda $\zeta_T(t)$ ardıcılığının limiti vardır (bax, [6]).

Markov R.ş.p.-ləri əsasən araşdırılmış proseslərdəndir. Məsələn, *Skoroxod topologiyasında* yığılma haqqında limit teoremləri isbat olunmuşdur, Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipinin analoqu alınmışdır (bax, *Invariantlıq prinsipi təsadüfi proseslər üçün*), R.ş.p.-in seçərə ağacının struktur xarakteristikalarının bəziləri öyrənilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Fleischmann K., Sigmund-Schultze R., «Math. Nachr», 1977, Bd 79, S. 233–41; [2] Fleischmann K., Sigmund-Schultze R., «Serdica Bulgarical math. publ.», 1978, v. 4, p. 111–34; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [4] Сагитов С. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 4, с. 737–49; [5] Яковлев А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 593–96; [6] Яковлев А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 30, в. 1, с. 183–88; [7] Яковлев А. Л., в сб.: вероятностные процессы и их приложения, М., 1984, с. 24–31.

REGENERASIYA « регенерация; regeneration » – bax, *Yeniləşdirici hadisə*.

REGENERASIYA ANI « регенерации момент; regeneration time » – bax, *Regenerativ proses*.

REGENERASIYA MÜDDƏTİ « регенерации период; regeneration period » – bax, *Regenerativ proses*.

REGENERATİV PROSES « регенерирующий процесс; regenerative process » – $(X, \mathcal{B})$ faza fəzasından qiymətlər alan ehtiva $Y(t)$ ölçülən təsadüfi prosesidir ki,

bu proses üçün ehtiva daxil edilmiş $(X_n, n \geq 0)$ bərpə prosesi vardır ki: $n \geq 1$ olduqda, regenerasiya müddətləri

$\tau_n = X_n - X_{n-1}$ və $Y(t)$ prosesinin bu müddətlərdəki trayektoriyaları ilə yaranmış $(\tau_n, X(t + X_{n-1}), 0 \leq t \leq \tau_n)$ tipli təsadüfi elementlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlərdir. X_n anları $Y(t)$ prosesinin bərpə anları

və ya regenerasiya anları adlanır. $Y(t)$ R.p.-nin paylanması $t \geq 0$ olduqda τ_1 təsadüfi kəmiyyəti və t -nin

$0 \leq t \leq \tau_1$ qiymətləri üçün $Y(t)$ -nin paylanmaları ilə birqiymətli olaraq verilir, belə ki,

$$x(t) = \mathbf{P}\{Y(t) \in A\}, A \in \mathcal{B}$$

tipli funksiyalar

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s) dF(s)$$

berpa tənliyin həlləridir, burada $F(t)$ – regenerasiya müddəti τ_1 -in paylanma funksiyasıdır və $y(t) = P\{Y(t) \in A, \tau_1 > t\}$. $P\{Y(t + \tau_i) \in A_i, 1 \leq i \leq k\}$ sonluölçülülük paylanmaları da analogi tənliyi ödəyir.

$Y(t)$ R. p.-nin əsas mühüm xassələrindən biri final ehtimalının varlığından ibarətdir: əgər $F(t)$ şəbəkəvari olmayan paylanma funksiyasıdırsa, $M\tau_1 < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Mf(Y(t)) = \frac{1}{M\tau_1} M \int_0^{\tau_1} f(Y(s)) ds \quad (*)$$

münasibəti ilə məhdud $\mathcal{B}$ – ölçülən funksiyalar üçün ödənilir ki, bu funksiyalar üçün $f(Y(t))$ təsadüfi prosesi sanki bütün mənfi olmayan t -lər üçün Lebeq ölçüsünə görə stoxastik kəsilməz prosesdir, əgər bundan əlavə hər hansı bir $F^{n*}(t)$ kompozisiyası Lebeq ölçüsü ilə qeyri – singulyar olarsa, onda (*) münasibəti bütün məhdud ölçülən f funksiyaları üçün ödənilir, xüsusi halda bütün $A \in \mathcal{B}$ olan A -lar üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) \in A\} = \frac{1}{M\tau_1} \int_0^{\infty} P\{Y(t) \in A, \tau_1 < t\} dt$$

olur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы, К., 1983.

REGENERATİV PROSES; dayanıqlılıq « **pere-npriyushiy proses;** устойчивость; stability of a **regenerativ process** » – bax, *Dayanıqlılıq (ğ)* re-generativ proseslərin.

REKORD QIYMƏT « **рекордное значение; record value** » – *təsadüfi dolaşma* hərəkətində olan hissəciyin $n > 0$ anındakı vəziyyətini ifadə edən $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətinin

$$S_n > S_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

münasibətilə təyin olunan qiymətdir, burada $\xi_1, \xi_2, \dots$ – paylanma funksiyaları eyni F olan, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, n isə zaman parametridir və $S_0 = 0$. (1) münasibəti ödənilirdiyi halda, təsadüfi dolaşma rekord qiymətini alır, deyilir. Təsadüfi dolaşmanın bütün trayektoriyaları üçün belə n indeksləri olmaya da bilər, lakin R. q.-ləri varsa, onda onlara çatma anları təsadüfi kəmiyyətlər olub (yəqin ki, qeyri – məxsusi təsadüfi kəmiyyətlər), sonlu və ya sonsuz nizamlanmış ardıcılıq təşkil edir. Buna görə də, (1) münasibətinin birinci, ikinci və s. anda baş verməsi kimi anlayışlar daxil edilmişdir.

Təsadüfi dolaşmaların bezi xüsusiyyətləri ardıcıl R. q.-lər terminologiyasında verilir (bax, [1], § 8).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

REKURRENT AXIN « **рекуррентный поток; recurrent input** » – bax, *Giriş axını* keçmişsi məhdud təsirli.

REKURRENT ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU SONLU YADDAŞLI « **рекуррентный метод наименьших квадратов с конечной памятью; recursive least squares method with finite memory** » – *ən kiçik kvadratlar metodu* əsasında nöqtəvi statistik qiymətin alınması üçün hesablama alqoritmidir, istifadə olunan maşın yaddaşına minimal tələblərlə verilənlərin istifadə edilən həcmine operativ nəzarət etməyə imkan yaradır.

Fərz olunur ki, ümumi xətti modeldə ən kiçik kvadratlar metodu ilə regression eksperimentlər matrisi X -in $(n+1)$ -ci $(n+r)$ -ciyə qədər sətirlərindən istifadə etməklə, $y_{n+1}, \dots, y_{n+r}$

ölçüləri əsasında $\hat{\theta}(n, n+r)$ statistik qiyməti alınmışdır. Uyğun massivləri $Y(n, n+r)$, $X(n, n+r)$ ilə işarə edərək,

$$\Sigma(n, n+r) = [X^T(n, n+r)X(n, n+r)]^{-1}$$

matrisi daxil edilir. Onda

$$\hat{\theta}(n, n+r) = \Sigma(n, n+r)X^T(n, n+r)Y(n, n+r), \quad (1)$$

$$\text{cov } \hat{\theta}(n, n+r) = \sigma^2 \Sigma(n, n+r)$$

olur. Yeni ölçmə operatoru təşkil edib, onu daxil etməklə bu statistik qiyməti rekurrent etmək qaydası yaxşı məlumdur (bax, [1] – [3]), onda

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(n, n+r+1) &= \hat{\theta}(n, n+r) + \\ &+ K^{(1)}(n, n+r)[y_{n+r+1} - x_{n+r+1}^T \hat{\theta}(n, n+r)] \end{aligned} \quad (2)$$

alınır, burada x_{n+r+1}^T – X matrisinin $(n+r+1)$ -ci sətiridir,

$K^{(1)}$ – aşağıdakı düsturla hesablanan ötürmə əmsəlidir:

$$\begin{aligned} K^{(1)}(n, n+r) &= \int \Sigma(n, n+r)x_{n+r+1} \times \\ &\times [I + x_{n+r+1}^T \Sigma(n, n+r)x_{n+r+1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Bu halda

$$\begin{aligned} \Sigma(n, n+r+1) &= \Sigma(n, n+r) - \\ &- K^{(1)}(n, n+r)x_{n+r+1}^T \Sigma(n, n+r) \end{aligned} \quad (4)$$

(2) – (4) düsturlarının çıxarılışlarında tətbiq olunan metodlardan istifadə edərək (1) statistik qiyməti üçün

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(n+1, n+r+1) &= \hat{\theta}(n, n+r+1) - \\ &- K^{(2)}(n, n+r+1)[y_{n+1} - x_{n+1}^T \hat{\theta}(n, n+r+1)] \end{aligned}$$

– unutma operatoru təşkil etmək olar, burada

$$\begin{aligned} K^{(2)}(n, n+r+1) &= \\ &= \Sigma(n, n+r+1)x_{n+1}[I + x_{n+1}^T \Sigma(n, n+r+1)x_{n+1}]^{-1}, \end{aligned}$$

bu halda

$$\begin{aligned} \Sigma(n+1, n+r+1) &= \Sigma(n, n+r+1) + \\ &+ K^{(2)}(n, n+r+1)x_{n+1}^T \Sigma(n, n+r+1). \end{aligned} \quad (5)$$

(5) düsturu əvvəl daxil edilmiş ölçmə və unutmanın yeni ölçmə və unutma daxil etmə tsikllərini istənilən dəfə təkrarlamağa imkan

verir. Mühüm praktiki məsələlərin həllində oxşar prosedurların tətbiqinə aid misallar, məs., [4] – [6]-da şərh olunmuşdur.

Misal. Fərz olunur ki, $[\tau - l, \tau + l]$ parçasında verilən $y(s)$ empirik asılılığı lokal olaraq

$$y(s) = P_m(s) + \xi(s), \quad s = \tau - l, \tau - l + 1, \dots, \tau + l \quad (6)$$

modelini ödəyir, burada $P_m(s)$, m dərəcəli çoxhəddidir:

$$P_m(s) = \sum_{j=0}^m a_j s^j, \quad t = s - \tau,$$

$\xi(t)$ stasionar erqodik diskret təsadüfi prosesi isə məlum olan p ($p \geq l$) tərtib avtoregressiya sxemində təbədir: $\xi(t) = \rho_1 \xi(t-1) + \dots + \rho_p \xi(t-p) + \eta(t)$, burada $\eta(t)$ – intensivliyi σ^2 olan diskret bəyaz küydür və

$$M\eta(t) = 0, \quad M[\eta(t_1) \eta(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2).$$

Naməlum $a_0, \dots, a_m, \rho_1, \dots, \rho_p$ parametrlərini qiymətləndirmək üçün Mann və Vald metodu istifadə olunur (bax, [7] – [8]).

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \xi(t) - \rho_1 \xi(t-1) - \dots - \rho_p \xi(t-p) = \\ &= y(t) - P_m(t) - \rho_1 [y(t-1) - P_m(t-1)] - \dots \\ &\quad - \rho_p [y(t-p) - P_m(t-p)] = \\ &= y(t) - \sum_{j=1}^p \rho_j y(t-j) - \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j \end{aligned}$$

çevirmələrini apardıqdan sonra $\rho_1, \dots, \rho_p, \gamma_0, \dots, \gamma_m$ əmsallarını $Y = X\theta + H$ xətti modelindən ən kiçik kvadratlara metodunun standart proseduru əsasında tapmaq olar, burada

$$\begin{aligned} Y &= \{y(\tau-l), y(\tau-l+1), \dots, y(\tau+l)\}^T; \\ \theta &= (\rho_1, \dots, \rho_p, \gamma_0, \dots, \gamma_m)^T; \\ H &= \{\eta(\tau-l), \eta(\tau-l+1), \dots, \eta(\tau+l)\}^T \\ X &= (X_1, X_2)^T; \\ X_1 &= \{y(k-j)\}, \quad \tau-l \leq k \leq \tau+l, \quad 1 \leq j \leq p \\ X_2 &= \{k^j\}, \quad \tau-l \leq k \leq \tau+l, \quad 0 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

$\gamma_0, \dots, \gamma_m$ kəmiyyətləri axtarılan $a_0, \dots, a_m$ parametrləri ilə

$$\gamma_s = a_s \delta_0 + \sum_{k=1}^{m-s} (-1)^{k+1} C_{s+k}^k a_{s+k} \delta_k, \quad s = 0, \dots, m$$

münasibətlər sistemi ilə əlaqədardır, burada $\delta_0 = 1 - \rho_1 - \dots - \rho_p$, $\delta_j = \rho_1 + 2^j \rho_2 + \dots + p^j \rho_p$, $0 \leq j \leq m$. Statistik qiymətlərin alınmış vektorunun kovariasion matrisinin qurulması qaydası [8]-də təklif olunmuşdur. Avtoregressiya əmsalları $\rho_1, \dots, \rho_p$ $[\tau-l, \tau+l]$ parçasından $[\tau-l+1, \tau+l+1]$ parçasına keçdikdə sabit qalır və bu halda $\rho_1, \dots, \rho_p$ -dən asılı çəkirlə sürüşən polinomial hamarlaşma klassik proseduruna gəlinir (bax, [9]).

Bununla belə, bu halda da hesablamaları, adətən, baxılan sonlu yaddaşlı rekurrent sxem üzrə aparmaq sərfəlidir. Daha mürəkkəb vəziyyətlərdə ölçmələrin hamarlanması dəyişən və ya təsadüfi

korrelyasion strukturlu küy fonunda aparıldığı halda sonlu yaddaşlı sxemin praktik olaraq alternativini yoxdur.

Əd.: [1] Современные методы идентификации систем, пер. с англ., М., 1983; [2] Алберт А., Регрессия, псевдонверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [3] Адаптивные фильтры, пер. с англ., М., 1983; [4] Монзинго Р. А., Миллер Т. У., Адаптивные антенные решетки, пер. с англ., М., 1986; [5] Кузьмин С. З., Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации, М., 1974; [6] Kalath T., Lectures on Wiener and Kalman filtering, W. – N. Y., 1981; [7] Mann H. B., Wald A., «Econometric», 1943, v. 11, p. 173–220; [8] Rao C. R., в кн.: Proceeding of the 5-th Berkeley Symposium on mathematical statistics, v. 1, Berk. – Los Ang., 1967, p. 355–72; [9] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [10] Nicholls D. F., Quinn B. G., Random coefficient autoregressive models, B. – Hdlb. – N. Y., 1982; [11] Ledolter J., в кн.: Applied time series analysis II, N. Y., – [a. o.], 1981, p. 449–71.

РЕКУРРЕНТ HADİSƏ « рекуррентное событие; recurrent event », qayıdışlı hadisə, – bax, *Bərpə prosesi*.

РЕКУРРЕНТ KOD « рекуррентный код; recurrent code » – bax, *Konvolusion kod*.

РЕКУРРЕНТ QİYMƏTLƏNDİRMƏ « рекуррентное оценивание; recursive estimation » – statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin rekurrent statistik qiymətləri, yəni θ_n statistik qiymətinin $\theta_{n+1} = f_n(\theta_n, X_{n+1})$ münasibətilə bağlı statistik qiymətlərini öyrənən bölməsidir, burada $X_1, \dots, X_{n+1}$ – müşahidələr ardıcılığıdır. R. q. bəzi hallarda naməlum parametrlərin asimptotik effektiv statistik qiymətlərinə gətirir.

Robbins – Monro və Kifer – Volfovits stoxastik approksimasiya prosedurlarına (bax, *Kifer – Volfovits proseduru*, *Robbins – Monro proseduru*) uyğun olaraq regressiya funksiyasının, sıfırının və ya maksimumunun tapılması üçün R. q.-nin qeyri – parametrik prosedurları kimi baxmaq olar. Lakin, adətən, R. q. parametrik məsələlərin həllinin rekurrent metodları kimi anlaşılır. Məs., $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – asılı olmayan müşahidələr, $f(x, \theta)$ – bunların σ – sonlu v ölçüsünə nəzərən paylanma sıxlığı olsun və $f(x, \theta)$ statistika məlum olmayan $\theta \in \mathbb{R}$ parametrindən asılıdır. Fərz olunur ki,

$$m_1(\theta) = \int x f(x, \theta) v(dx),$$

$$m_2(\theta) = \int (x - m_1(\theta))^2 f(x, \theta) v(dx)$$

momentləri sonludur və $m_1(\theta)$ – ciddi artan funksiyadır. Onda

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{a}{k+1} (X_{k+1} - m_1(\theta_k)), \quad (\theta_0 \text{ ixtiyaridir}) \quad (1)$$

proseduru $2 a m'_1(\theta) > 1$ şərti ödənilərsə, θ üçün asimptotik meyilsiz və asimptotik normal statistik qiymət verir. Bəzi əlavə şərtlərlə $I(\theta)$, – f sıxlığının Fişer informasiya miqdarı, θ_0 isə ixtiyari olduqda

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{1}{(k+1) I(\theta_k)} \frac{f'_\theta(X_{k+1}, \theta_k)}{f(X_{k+1}, \theta_k)}, \quad (\theta_0 \text{ ixtiyaridir}) \quad (2)$$

proseduru asimptotik effektiv olur.

(1) və (2) prosedurları $\theta \in \mathbb{R}^k$ parametrinin qiymətləndirilməsi halı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [1]). (2) prosedurunun və onun çoxölçülü ümumiləşməsinin bir sıra modifikasiyaları məlumdur, bunlar üçün daha zəif məhdudiyyətlərlə asimptotik effektivliyi isbat etmək olur. Bu modifikasiyaların mənası ondan ibarətdir ki, (2) proseduru müəyyən bir köməkçi tutarlı statistik qiymət ətrafında «kəsilir».

R. q. asılı küylər halında xətti regressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün, zaman üzrə kəsilməz proseslər üçün tətbiq olunur. R. q. *Kalman filtri* tipli rekurrent filtrlərlə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Невельсон М. Б., Хасмьинский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [2] Невельсон М. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 577–87.

REKURRENT STATİSTİK QIYMƏT « рекуррентная оценка; recursive estimator » – bax, *Rekurrent qiymətləndirmə*.

REQRESSION ANALİZ « регрессионный анализ; regression analysis » – riyazi statistikanın statistik kəmiyyətlər arasındakı reqression asılılığını verilənlər əsasında araşdırmaq üçün, praktikada tətbiq edilən metodları özündə cəmləşdirən bir bölməsidir (bax, *Regressiya*). Riyazi statistikada reqressiya problemi onunla seçiyəvidir ki, araşdırılan kəmiyyətlərin paylanmalarına haqqında kifayət qədər informasiya olmur. Məs., X təsadüfi kəmiyyətinin qeyd olunmuş $X = x$ qiymətində Y təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən bir ehtimal paylanmasının varlığına əsaslanaraq olduğu fərz edilir, odur ki, $M(Y|x) = g(x, \beta)$, burada

β , – $g(x)$ funksiyasını təyin edən naməlum parametrlər çoxluğudur və müşahidələrin nəticələrinə görə parametrlərin qiymətlərini təyin etmək tələb olunur. Məsələnin mahiyyəti və analizin məqsədindən asılı olaraq, eksperimentin nəticələri – $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – x dəyişəninə görə müxtəlif cür interpretasiya olunur. Eksperimentdə kəmiyyətlər arasında asılılığı təyin etmək üçün sadələşdirilmiş fərziyyələrə əsaslanan model istifadə olunur: eksperimenti planlaşdırarkən x -in nəzarət oluna bilən kəmiyyət olduğu və onun qiymətlərinin əvvəlcədən verildiyi, y -in müşahidə olunan qiymətlərinin isə $y_i = g(x_i, \beta) + \varepsilon_i$,

$i = 1, \dots, n$ şəklində ifadə olunduğu fərz olunur, burada ε_i – xətalara xarakterizə edən, müxtəlif ölçülər apanlıqda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış, dispersiyaları sabit, riyazi gözləmələri sıfır olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. x nəzarət oluna bilinməyən dəyişən olduğu halda, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – müşahidələrin nəticələri olub, müəyyən bir ikiölçülü çoxluqdan olan seçimdir. Hər iki halda R. a. metodları eyni, nəticələrin interpretasiyası isə müxtəlifdir (sonuncu halda analiz *korrelyasiya* nəzəriyyəsi metodları ilə xüsusilə zənginləşdirilir).

Eksperimental verilənlər üzrə regressiyanın tədqiqi kvadratik orta regressiya prinsiplərinə əsaslanır. R. a.-də aşağıdakı əsas məsələlərin həllinə baxılır: 1) regressiya funksiyasının x və β -dan asılılığı fərziyyəsinə əsaslanan regressiya modelinin seçilməsi; 2) seçilmiş modeldə β parametrlərinin ən kiçik kvadratlara metodu ilə qiymətləndirilməsi; 3) regressiya üçün irəli sürülmüş statistik hipotezlərin yoxlanılması.

Naməlum parametrlərin qiymətləndirilməsinin yeganə metod nöqtəyi – nəzərdən en təbisi bu parametrlərə görə xətti regressiya modeli

$$g(x, \beta) = \beta_0 g_0(x) + \dots + \beta_m g_m(x)$$

qoxhədlisidir. $g_i(x)$ funksiyaları bəzən (x, y) eksperimental qiymətlərinin səpələnmə diaqramında yerləşməsinə görə bir çox hallarda – nəzəri mülahizələrə əsaslandırılaraq təyin olunur. Eyni zamanda müşahidə nəticələrinin dispersiyası σ^2 -nin sabit olduğu (və ya x -dən asılı məlum funksiya ilə mütənəsis olduğu) fərz olunur. Regressiyanın qiymətləndirilməsi üçün standart metod: $1 \leq m < n$ şərtini ödəyən hər hansı m dərəcəli

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m$$

qoxhədlisindən və ya ən sadə halda

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x$$

xətti funksiyasından (*xətti regressiyadan*) istifadəyə əsaslanır.

Əpproksiməedici qoxhədlinin dərəcəsinin seçilməsi üçün xətlilik kriteriləri və tövsiyələr məlumdur.

Kvadratik orta regressiya prinsipinə uyğun olaraq naməlum regressiya əmsalları – $\beta_0, \dots, \beta_m$ və dispersiya – σ^2 -nin qiymətləndirilməsi ən kiçik kvadratlara metodu ilə aparılır. Bu metoda görə, $\beta_0, \dots, \beta_m$ parametrlərinin statistik qiymətləri olaraq $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_m$ qiymətləri götürülür ki, bu qiymətlər

$$\sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2$$

ifadəsinin minimum qiymət almasını təmin etsin. Ən kiçik kvadratlara metodu ilə qurulmuş $\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \dots + \hat{\beta}_m x^m$ qoxhədli *empirik regressiya xətti* adlanır və naməlum əsl regressiya xətti üçün statistik qiymətdir. Regressiyanın xətti regressiya olduğu hipotezi qəbul olunarsa, empirik regressiya düzxətti

$$\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

şəklində olur, burada

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i.$$

$\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_m$ təsadüfi kəmiyyətləri seçimi regressiya əmsalları adlanır.

σ^2 parametri üçün meylsiz statistik qiymət

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}(x_i))^2 / (n - m)$$

düsturu ilə verilir. Əgər dispersiya x -dən asılı olarsa, ən kiçik kvadratlara metodu müəyyən dəyişikliklərlə tətbiq olunur.

Əgər Y təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, \dots, x_n$ dəyişənlərindən asılılığı araşdırılırsa, onda bu halda ümumi xətti regressiya modelini matris formada yazmaq daha məqsəduyğun olur: komponentləri asılı olmayan $y_1, \dots, y_n$ olan müşahidələr vektoru y -in orta qiyməti və kovariasion matrisi vardır və

$$M(Y | x_1, \dots, x_k) = X\beta, \quad D(Y | x_1, \dots, x_k) = \sigma^2 I, \quad (*)$$

burada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ – regressiya əmsalları matrisi, $X = [x_{ij}]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ – ümumiyyətlə, bir-birilə ixtiyari qaydada əlaqədar olan məlum kəmiyyətlər matrisi, I , – n tərtib vahidi matrisdir; $n > k$ və $|X^T X| \neq 0$. Daha ümumi halda müşahidələrin nəticələri y_i -lər arasında korrelyasiya ola bilər:

$$M(Y | x_1, \dots, x_k) = X\beta, \quad D(Y | x_1, \dots, x_k) = \sigma^2 A,$$

burada A matrisi məlumdur, lakin bu sxem (*) modelinə getirilir. β üçün meylsiz statistik qiymət ən kiçik kvadratlar metoduna görə

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət isə

$$s^2 = \frac{1}{n-k} (y^T y - \hat{\beta}^T X^T y)$$

olur.

(*) modeli ən ümumi xətti regressiya modelidir, belə ki, bu model müxtəlif regression situasiyalarda tətbiq olunur və Y -in $x_1, \dots, x_k$ -lərə görə parabolik regressiyasının bütün növlərini əhatə edir (məsələn, yuxarıda baxılmış Y -in x -ə görə m tərtib parabolik regressiyası (*) modelinə getirilir ki, bu modeldə m sayda regressiya dəyişənləri funksional asılıdır). R. a. bu xətti anlamında β -nin qiymətləndirilməsi məsələsi və $D\hat{\beta} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$ kovariasion statistik qiymətlər matrisinin hesablanması $X^T X$ matrisini çevirmə məsələsinə gətirilir.

Müşahidələrin nəticələrinin normal qanunla paylanmış olduğunu fərz etməklə, empirik regressiyanın qurulması üçün yuxarıda göstərilən metodu tətbiq etdikdə, β və σ^2 üçün tapılan statistik qiymətlər maksimal doğruluq şərtləri ilə hesablanmış qiymətlər ilə üst-üstə düşür. Lakin bu metodla hesablanan statistik qiymətlər nəticələrin normal qanunla paylanmadığı halda müəyyən mənada daha yaxşıdır, bu şərtlə ki, seçimin həcmi kifayət qədər böyük olsun.

Ümumi xətti regressiya modeli (*) verilmiş matris formasında müşahidə olunan y_i kəmiyyətləri vektor təsadüfi kəmiyyətlər olduğu hal üçün sadə şəkildə ümumiləşdirilə bilər. Bu halda yeni statistik məsələ alınır (bax, *Regressiya matrisi*). R. a. məsələləri (*) ümumi xətti modelinin β və σ^2 parametrlərinin nöqtəvi statistik qiymətlərinin tapılması ilə məhdudlaşmır.

Müşahidələr vektoru Y normal qanunla paylanarsa, qurulmuş empirik asılılığın dəqiqlik problemi daha effektiv həll olunur. Əgər ixtiyari β statistik qiyməti Y -in xətti funksiyası olarsa və Y vektoru isə normal qanunla paylanmış olarsa, belə nəticə çıxarmaq olar ki, $\hat{\beta}_i$ təsadüfi kəmiyyəti də riyazi gözləməsi β_i , dispersiyası $D\hat{\beta}_i = \sigma^2 b_{ii}$ olan normal qanunla paylanmışdır.

Burada $b_{ii} = (X^T X)^{-1}$ matrisinin diaqonal elementidir. Digər tərəfdən, σ^2 üçün s^2 statistik qiyməti $\hat{\beta}$ vektorunun ixtiyari komponentindən asılı olmayan paylanmaya malikdir və $(n-k)s^2/\sigma^2$ kəmiyyəti isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-k)$ olan χ^2 – kvadrat paylanması ilə paylanır. Deməli,

$t = (\hat{\beta}_i - \beta_i)/[s^2 b_{ii}]^{1/2}$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-k)$ -ya bərabər Student paylanmasına tabedir. Bu fakt β_i parametrləri üçün etibarlı intervallın qurulması və β_i kəmiyyətinin aldığı qiymətlər üçün hipotezin yoxlanılmasında istifadə olunur.

Bundan başqa, bütün regressiya dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində $M(Y | x_1, \dots, x_k)$ üçün etibarlı intervalları və y -in sonrakı $(n+1)$ -ci qiymətini özündə saxlayan (öncəgörmə intervalı adlanan) etibarlı intervalları tapmaq mümkün olur.

Nəhayət, seçimi regressiya əmsalları vektoru $\hat{\beta}$ əsasında β vektoru üçün və ya məlum regressiya əmsallarının ixtiyari toplusu üçün etibarlı ellipsoid; həmçinin bütün regressiya xətti və regressiya düz xətti üçün etibarlı oblast qurmaq olar.

R. a. fizika, biologiya, iqtisadiyyat, texnika və digər sahələrdə asılılığı tədqiq etdikdə eksperimental verilənlər üzərində yenidən işləmək üçün ən çox yayılmış metodlardan biridir. Riyazi statistikanın dispersion analiz, eksperimentin planlaşdırılması kimi bölmələri R. a. modellərinə əsaslanır. Bu modeller çoxölçülü statistik analizdə geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [4] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн. 1–2, М., 1986.

REGRESSION DƏYİŞƏN, регрессор «**перспекционная переменная**, регрессор; **regressor**» – regressiya modelində asılı olmayan dəyişən rolunu oynayan *təsadüfi kəmiyyətdir*. X və Y təsadüfi kəmiyyətlər olsun; x -in hər bir qiyməti üçün $y = y(x) = M(Y | X = x)$ riyazi gözləməsi Y -in X -ə görə regressiyasıdır. Bu halda X təsadüfi kəmiyyəti *regression dəyişən* adlanır.

REGRESSION EKSPERİMENT «**перспекционный эксперимент**; **regression experiment**» – təsadüfi xətlərlə *regressiya funksiyasını* ölçmələrin ardıcılığıdır. R. e.-in ən ümumi sxemi ondan ibarətdir ki, hər hansı X çoxluğunun x_j ,

$j = 1, \dots, N$ nöqtələrində y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətləri müşahidə olunur:

$$y_j = g(x_j) + \varepsilon_j,$$

burada $g(\cdot)$, – X -də təyin olunmuş *regressiya funksiyası* (və ya *sadə funksiyası*) kimi adlanan müəyyən funksiyalar çoxluğu $\mathcal{F}$ -ə daxil olan funksiyadır; ölçmələrin təsadüfi xətləri vektoru $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ üçün

$$M\varepsilon = 0, \quad \text{cov} \varepsilon = \sigma^2 W$$

şərtləri ödənilir, burada W – məlum, müsbət – müəyyən $(N \times N)$ – tərtib matrisdir, σ^2 kəmiyyəti isə məlum da ola bilər. X ətti R. e. onunla seçiyəvidir ki, $\mathcal{F}$ – funksiyaların sonluölçülü xətti fəzasıdır. Bu fəzada $\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_p(\cdot)$ bazis funksiyaları seçərək, regressiya funksiyasını

$$g(x) = \sum_{i=1}^p \beta_i \varphi_i(x) = \beta^T \varphi(x)$$

şəkilində yazmaq olar, burada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ – naməlum parametrlər vektoru, $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_p(\cdot))^T$. Xətti R. e.-in sxemi matris şəkilində aşağıdakı kimi yazılır:

$$Y = \Phi\beta + \varepsilon,$$

burada $M\varepsilon = 0$, $\text{cov}\varepsilon = \sigma^2 W$, $Y = (y_1, \dots, y_N)^T$,

$\Phi = \left\| \varphi_i(x_j) \right\|_{j,i=1}^{N,p}$ – R. e. matrisidir. Bəzən xətti R. e.

$\mathcal{R}(Y, \Phi\beta, \sigma^2 W)$ nizamlı üçlüyü şəkilində də yazılır. β -nin naməlum parametrlərinin xətti qiymətləndirilməsində onların statistik qiymətlərinin kovariasion matrisi ε təsadüfi vektorunun paylanması yalnız birinci və ikinci momentlərindən aslıdır.

$\mathcal{R}(Y, \eta(x, \beta), i = 1, \dots, N, \sigma^2 W)$ qeyri – xətti R. e.-ində regressiya funksiyası β naməlum parametrlərindən qeyri – xətti aslıdır. β parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün, adətən, ən kiçik kvadratlar metodundan istifadə olunur. Xətti R. e.-də ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymət $\hat{\beta} = M^{-1}\Phi^T W Y$, $M\hat{\beta} = \beta$, $\text{cov}\hat{\beta} = \sigma^2 M^{-1}$ münasibətlərlə təyin olunur, $M = \Phi^T W \Phi$ – R. e.-in informasiya matrisi adlanır və onun cırlaşmayan olduğu fərz olunur.

Qeyri – xətti R. e. anlayışından daha ümumi, ümumiləşmiş R. e. anlayışı və ya F – modellərdir (bax, [1], [2]) ki, bu eksperimentlərdə $\text{cov}\varepsilon$ -nin β -dan asılılığı nəzərdə tutulur və β parametri $(\eta(x_1, \beta), \dots, \eta(x_N, \beta))$ toplusu ilə eyniləşdirilir. F – modelində β üçün statistik qiymətlər Qauss – Nyuton iterasiya metodu ilə dəqiqləşdirici çəkirlərlə tapılır (bax, [1], [2]).

Çoxölçülü xətti R. e. halında β naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi asanlıqla xətti R. e.-lərindəki analogi qiymətləndirilməyə gətirilir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] М а л ю т о в М. Б., «Изд. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41; [3] Е р м а к о в С. М., Ж и г л я в с к и й А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [4] К о р х и н А. С., Г и н з б у р г М. Н., «Экономика и математическая методы», 1987, т. 23, № 3, с. 496–506.

REGRESSION EKSPERİMENT MATRİSİ « персепсионного эксперимента матрица; matrix of a regression experiment » – regression eksperimentin plan nöqtələrində prediktor funksiyalarının qiymətləri yazılmış sütunlardan təşkil olunmuş matrisdir.

REGRESSION EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « персепсионных экспериментов планирование; design of regression experiment » – regressiya funksiyası haqqında qərarın optimizasiyası üçün regression eksperiment sxemində ölçmələrin seçilməsidir (bax, Diskrimineedici eksperimentlərin planlaşdırılması). Ən çox araşdırılan – xətti regression eksperimentlərin regressiya funksiyalarının qiymətləndirilməsi üçün ölçmələrin planlaşdırılması aşağıda şərh olunmuşdur.

Ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətin $\text{cov}\hat{\beta}$ kovariasiyaları matrisi $\sigma^2 M^{-1}$ -dir, burada $M = \Phi^T W \Phi$ informasiya matrisi adlanır. Xətalərin paylanması haqqında informasiya

olduğu halda və nəticələrin robastlığı üçün statistik qiymətlərin geniş bir T sinfindən (məs., minimal kontrast sinif) istifadə olunur. Bunlar üçün limit normal paylanmanın kovariasiyalar matrisi $\alpha(T)M^{-1}$ şəkilindədir, burada α – $\xi = \{x_1, \dots, x_N\}$ planından asılı olmayan skalyardır, odur ki, böyük həcmli seçimlər üçün real (dəqiq) planları approksiməedici optimal ümumiləşmiş planlar (kəsilməz də adlandırılan; bax, aşağı) nəzəriyyəsi belə statistik qiymətlərə də aiddir. $z = W^{1/2}y$, $f(\cdot) = W^{1/2}\varphi(\cdot)$ çevirməsindən sonra regression eksperiment matrisi $F = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ olan $R(z, F\theta, I)$ regression eksperimenti alınır. Aşağıda mehz bu modelə baxılır. Bu model üçün informasiya matrisi aşağıdakı kimidir:

$$M(\xi) = F^T F = \sum_{i=1}^N m(x_i), \quad m(x) = f(x)f^T(x) \quad (1)$$

(1)-dən aydındır ki, informasiya matrislər vuruc dəqiqliylə plan daşıyıcısını – (bəzən plan spektri, planın dayaq nöqtələri, planın ən mühüm nöqtələri də adlanan)

$$\text{supp } \xi = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}, \quad x^{(i)} \in X,$$

əgər $i \neq j$ olarsa, $x^{(i)} \neq x^{(j)}$ kəmiyyətini və n_j $x^{(j)}$ ilə üst-üstə düşən x_i -lərin sayı olduqda $p_j = n_j/N$ – planın çəkirlərini təyin edir, $p_j \geq 0$, $\sum_j p_j = 1$. $\hat{\theta}$ -nin birinci və

ikinci momentləri axtarılan parametrlərdən asılı deyildir. Buna görə də, (aşağıda baxılan) optimal planı statistik seçmək olar, çünki kvadratik riski eksperimentin aparılmasına qədər tapmaq olar (bax, Planlaşdırılması, eksperimentin, Ardıcıl planlaşdırılması eksperimentlərin).

Əgər ξ diskret plandırsa, yəni n sayda p_i çəkili və $x^{(i)}$ nöqtələrində daşıyıcıya malik olan ixtiyari ehtimal ölçüsüdürsə, onda $x^{(i)}$ nöqtələrində ölçmələri $[Np_i]$ və $[N\bar{p}_i]$ olan ξ və $\bar{\xi}$ planları $N - n$ -dən az olmayan (uyğun olaraq $N + n$ -dən çox olmayan) nöqtəyə malikdir; burada $\lfloor x \rfloor$ və $\lceil x \rceil$ simvolları uyğun olaraq $\leq x$ olan ən böyük və $\geq x$ olan ən kiçik tam ədəddir. Aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$M(\xi) \leq \int m(x)\xi(dx) \leq M(\bar{\xi});$$

burada $M(\xi)$ və $M(\bar{\xi})$ matrislərinin elementləri $n \rightarrow \infty$ olduqda $O(N)$ tərtibdən kəmiyyətlər olub, $O(n)$ tərtib kəmiyyətlə bir-birindən fərqlənir və bu dəqiqliklə də $m(\xi) = \int m(x)\xi(dx)$ matrisi ilə xarakterizə olunur. Əgər $\xi_0 = \xi(x_0)$ planı x_0 nöqtəsində toplanmışdırsa, onda $m(\xi_0)$ və $m(x_0)$ üst-üstə düşür.

Aşağıda şərh olunan asimptotik nəzəriyyədə plan əməllər fəzası X -də ixtiyari ehtimal ölçüsünə deyilir; bu halda N sayda ölçmələr ardıcılığının dəqiq plan (əvvəllərdə verilmiş ad) adlandırılması, $m^{-1}(\xi)$ və $m(\xi)$ matrislərinin uyğun olaraq dispersiya və informasiya matrisi adlandırılması nəzərdə tutulmalıdır.

Planlar çoxluğu X^* qabarıq və qapalıdır. Qabarıq çoxluqlar haqqında məşhur Karateodori teoreminin nəticəsinə əsasən; əgər $\mathfrak{M} = \{m(\xi), \xi \in X^*\}$ kompakt çoxluqdursa (bundan ötrü kifayətdir ki, X kompakt çoxluq, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$ kəsilməz olsun), onda ixtiyari ξ planı üçün informasiya matrisi

$$m(\xi) = \sum_{i=1}^r p_i m(x_i),$$

$$p_i \geq 0, \quad r \leq p(p+1)/2+1, \quad x_i \in X$$

münasibətlərlə ifadə etmək olar.

Bir çox konkret hallarda r üçün bu qiymətləndirməni gücləndirmək olar. Məs., bu nəticənin isbatında $\mathfrak{M}$ çoxluğunun $\mathbb{R}^r$ fəzasından olan $\{m(x), x \in X\}$ çoxluğunun qabarıq örtüyü kimi həndəsi interpretasiyası mühüm rol oynayır.

Ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlərin optimallığına (bax, *Regression eksperiment*) analoji olaraq, *universal optimal plan* – ξ^* -nu, yəni bütün $\xi \in X^*$ olan ξ -lər üçün $m(\xi^*) \geq m(\xi)$ bərabərsizliyini təmin edən ξ_m^* planını təyin etmək məsələsinə də baxmaq olar. Lakin məzmunlu məsələlərdə belə plan mövcud deyildir (bax, aşağı). Simmetrik hallarda, hər hansı daha zəif mənada müntəzəm optimal planlar, məs., Şuru planı, təyin etmək olur.

$\mathbb{R}^{m \times p}$, $S_p \subseteq \mathbb{R}^{p \times p}$, $S_p^+ \subset S_p$, $\lambda_i(A)$ – uyğun olaraq həqiqi $(m \times p)$ – matrislərinin çoxluğu, p tərtib simmetrik matrisləri çoxluğu, müsbət – müəyyən matrislər çoxluğu və $A, A \in S_p$ matrisinin i -ci məxsusi qiymətidir.

$A, B \in S_p$ və bütün $r \leq p$ şərtini ödəyən r və p -lər üçün

$$\sum_{i=1}^r (\lambda_i(A) - \lambda_i(B)) \geq 0$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $A \geq B$ ($A \geq B$, Şuruya görə) deyilir.

$m(\xi) \geq m(\eta)$ bərabərsizliyindən $\text{tr } m^{-\alpha}(\xi) \leq \text{tr } m^{-\alpha}(\eta)$ bərabərsizliyi $\alpha > 0$ və $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən bütün

α -lar üçün ödənilir ($\left(\frac{1}{p} \text{tr } m^{-\alpha} \right)^{1/\alpha}$ funksiyası Φ_α – kriteri adlanır). $\alpha \rightarrow \infty$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – kriteri E – kriteri $\lambda(m^{-1})$ -ə çevrilir. $\alpha \rightarrow 0$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – kriteri D – kriterisinə gətirilir:

$$(\det m^{-1})^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^p \ln \lambda_i(m) \right)^{1/p}.$$

$\alpha = 1$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – kriteri A – kriteridir. $C \in \mathbb{R}^{k \times p}$; C -lər üçün xətti L_C – kriterisi $\|C(\theta - \hat{\theta})\|^2 = \text{tr } C^T m^{-1} C$ -nin xüsusi halıdır.

$\xi \in X^*$ planı və onun uyğun informasiya matrisi $m(\xi)$ üçün $\tilde{\xi} \in X^*$, $m(\tilde{\xi}) \geq m(\xi)$ şərti ödəniləndə $m(\tilde{\xi}) = m(\xi)$ olar-

sa. ξ planı və $m(\xi)$ matrisi uyğun olaraq məqbul plan və məqbul matris adlanır.

Məqbul planlar $\mathfrak{M}$ çoxluğunun nisbi sərhədi $\partial \mathfrak{M}$ -ə aiddirlər.

Məqbulluq plan daşıyıcısının xassəsidir: daşıyıcısı hər hansı diskret məqbul planın daşıyıcısının tərkibində olan plan məqbul plandır. Əgər hər hansı $T \in S_p^+$ matrisi üçün $\xi_0 \{A_T\} = 1$ bərabərliyi ödənilərsə, onda ξ_0 məqbul plandır, burada

$$A_T = \arg \max_x \varphi_T(x), \quad \varphi_T(x) = f^T(x) T f(x).$$

Əksinə, ξ_0 məqbul plandrsa, onda $\text{ele } T \geq 0$ matrisi vardır ki, $\xi_0 \{A_T\} = 1$. $[-1, 1]$ -də təyin olunmuş birölçülü polinomial reqressiya funksiyası $(1, x, \dots, x^p)\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{p+1}$ üçün əgər $\text{supp } \xi \cap (-1, 1)$ çoxluğunun gücü p -dən kiçik olarsa, ξ məqbul plandır.

Əgər X^* -dan olan məqbul planların informasiya matrisi yeganə deyildirsə, onda universal optimal plan mövcud deyildir. Məs., $[-1, 1]$ -də təyin olunmuş reqressiya funksiyası $(1, x)\theta$ üçün hər iki $-m(\pm 1)$ matrisləri məqbul matrislərdir və müxtəlifdir.

Adətən, $m(\xi)$ -nin hər hansı funksiyası Φ -i minimallaşdıran plan (Φ – plan adlanan) axtarılır. Fərz olunur ki, $\mathfrak{M}$ çoxluğu kompaktdır və Φ aşağıdakı şərtlərin ya hamısını və ya bəzilərini ödəyir.

1) Monotonluq: $A \leq B$ olduqda, $\Phi(A) \geq \Phi(B)$.

2) Bircinslik: $\Phi(\alpha A) = \gamma(\alpha)\Phi(A)$, burada $\alpha > 0$, $\gamma^{-1}(\alpha)$, $-\alpha$ artdıqca ciddi artır.

3) Qabarıqlıq: $\Phi(m_\alpha) \leq (1-\alpha)\Phi(m_0) + \alpha\Phi(m_1)$,

$m_\alpha = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

4) A -da ($A \in \mathfrak{M}$) differensiallananlıq: $\text{ele } \dot{\Phi}(A) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ matrisi vardır ki, $\|B\| \rightarrow 0$ olduqda

$$\Phi(A+B) - \Phi(A) = \text{tr}(\dot{\Phi}(A)B) + o(B)$$

olur, burada $\|B\|^2 = \text{tr } B^T B = \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta}^2$, isə $\|B\| \rightarrow 0$ olduqda

bütün elementləri yalnız $o(\|B\|)$ olan matrisdir.

3) şərtini ödəyən, $\mathfrak{M}^+ = S_p^+ \cap \mathfrak{M}$ çoxluğunda sonlu və $m_n \in \mathfrak{M}^+$, $m_n \rightarrow m \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^+$ olduqda ∞ -a yaxınlaşan – global kriterilər sinfi geniş bir sinif olub, mühüm əhəmiyyətə malikdir. Belə kriterilər (məs., Φ_α , $\alpha \in [0, \infty]$ kimi) $\mathfrak{M}$ -da kəsilməz olub, minimum qiymət alır. Ümumi Φ kriteriləri üçün

$$\xi^* \in \arg \min_{\mathfrak{M}} \Phi(m)$$

Φ – planının varlığının kafi şərti Φ -in aşağıdan semikəsilməz olması, yəni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(m_n) \geq \Phi(\lim_{n \rightarrow \infty} m_n)$$

şərtidir. Qabarıq Φ kriterisinin aşağıdan semikəsilməzliyi

$$\Phi(m) = \sup \{ a_\alpha + \text{tr}(B_\alpha m), a_\alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha \in S_p, \alpha \in A \}$$

şərtinə, yeni $\Phi(m)$ -in m -in xətti funksiyaları ailəsinin yuxarı qurşayarı olması şərtinə ekvivalentdir.

$$D(I^T \hat{\theta}) = I^T m^{-1} I \text{ funksiyaları}$$

$$I^T m^{-1} I = \max_{a \in \mathbb{R}^p} \{ 2I^T a - x^T m x \}$$

bərabərliyinə əsasən aşağıdan semikəsilməzdir. $A \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $r \leq p$ olan A -lar üçün $\sum_{i=1}^r D(I_i^T \hat{\theta})$ cəminə gətirilən L_C -

kriterisi $M \|A(\hat{\theta} - \theta)\|^2$ və $s \leq p$ rəngli $A \in \mathbb{R}^{s \times p}$ olan A -lar üçün ümumiləşmiş D_A - optimallıq kriterisi $\det(A^T m^{-1} A)$ belə kriterilərdir.

Φ - optimallıq və Φ - planların ədədi metodlarının qurulması üçün analitik nəticələr ekvivalentlik teoreminə əsaslanır; bu teoremə görə $m(\xi^*)$ -da qəbənq və differensiallanan Φ funksiyası üçün ξ^* planının Φ - optimallığı

$$\max_X \varphi_T(x, \xi^*) = \text{tr} T m, \text{ supp } \xi^* \subseteq A_T$$

şərtlərdən hər birinə ekvivalentdir, burada $T = \ddot{\Phi}(m(\xi^*))$. Bu teoremin xüsusi halı da populyardır.

ξ^* planının D - optimallığı (D - kriteri üzrə optimallıq) onun minimallığına ekvivalentdir:

$$\max_{x \in X} d(x, \xi^*) = p = \min_{\xi \in X^*} \max_{x \in X} d(x, \xi),$$

burada $d(x, \xi) = f^T(x) m^{-1}(\xi) f(x)$ reqressiya funksiyasının x nöqtəsində statistik qiyməti $\hat{\theta} f(x)$ -in normalanmış dispersiyasıdır. Bərabərçəkili planların D - optimallığı ekvivalentlik teoreminin köməyi ilə isbat edilmişdir: a) $[-1, 1]$ -də təyin olunmuş p tərtib polinomial reqressiya üçün $(1-x^2) L'_p(x)$ çoxhədlisinin köklərində;

$$b) \theta_0 + \sum_{j=1}^m (\theta_{2j} \cos jx + \theta_{2j+1} \sin jx) \text{ reqressiyası üçün}$$

$[0, 2\pi]$ intervalının $N \geq 2m+1$ olan N sayda bir-birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrində və s. hallarda.

Diskret planın dayanıqlılığı araşdırlarkən, aşağıdakı hökmləri bilmək məsləhətdir: diskret ξ_0 planının çəkiliəri qeyd olunduqda $\Phi(m)$ -in $m(\xi_0)$ nöqtəsində xüsusi törəməsi

$$\sum_{x^i \in \text{supp } \xi} \varphi'_T(x^i) dx^i \text{ cəminə, } \text{supp } \xi \text{ qeyd olunduqda,}$$

$$\sum \varphi_T(x^i) dp_i \text{ cəminə bərabərdir; burada } T = \ddot{\Phi}(m(\xi)).$$

Əgər $\text{rank } m(\xi^*) = k < p$, Φ funksiyası $\mathfrak{M}^+$ -da differensiallanan olarsa, onda ξ^* planının Φ - optimallığı $m + HH^T \in S_p^+$ şərtini ödəyən $H \in \mathbb{R}^{(p-k) \times p}$ matrisinin varlığı

və 1) - 3) şərtlərindən ixtiyari birinə ekvivalentdir, burada

$$T = \ddot{\Phi}(m(\xi^*)) + HH^T.$$

Differensiallama olmayan hal üçün ekvivalentlik teoremi subqradientlər terminlərində daha az effektiv ümumiləşməyə malik olur. Bu halda bu teorem ikilik kriteriləri nəzəriyyəsinin xüsusi halıdır və onun vasitəsilə $\xi m(\xi) \in \mathfrak{M}^+$ cırlaşmayan Φ - planlar haqqında olduqca dərin bir sıra nəticələr alınmışdır.

L_A - kriterisi üçün ümumiləşmiş Elfving ekvivalentlik teoremi alınmışdır: $\mathcal{R}_k = f(x) a^T$, $k \leq p$, $a \in \mathbb{R}^k$, $\|a\| = 1$, $x \in X$ şəklində $(p \times k)$ - matrislər çoxluğunun qəbənq örtüyü olsun; onda

$$\xi^* \in \arg \min_{X^*} \text{tr}(m^{-1}(\xi) A^T A), A \in \mathbb{R}^{k \times p}$$

şərti ilə $\varepsilon: X \rightarrow \{\pm 1\}$ ölçülən funksiyasının varlığına ekvivalentdir ki:

$$1) \int f^T(x) \varepsilon(x) \xi^*(dx) = \beta A \text{ hər hansı } \beta \geq 0 \text{ üçün;}$$

$$2) \beta A = \partial \mathcal{R} \text{-dəndir; bu halda}$$

$$\beta^{-2} = \text{tr } m^{-1}(\xi^*) A^T A.$$

$\Phi(m)$ -in çəkili və plan daşıyıcısı üzrə birbaşa minimizasiyası məsələnin böyüklüyü cəhətdən, adətən, az effektiv olur. Φ - planların ədədi qurulması üçün ekvivalentlik teoreminə əsaslanan iterasion alqoritmlər mövcuddur. Bunlardan ən sadəsi $\Phi(\cdot)$ -in qəbənq differensiallananlığına uyğun alqoritm aşağıda şərh olunur.

$$\xi^s, s = 1, 2, \dots \text{ və}$$

$$\xi_\alpha(1-\alpha)\xi^s + \alpha\xi, 0 \leq \alpha \leq 1$$

planlarının olduğu fərz olunur.

α -nın kifayət qədər kiçik qiymətlərində Teylor düsturuna əsasən

$$r(\alpha) = \Phi(m(\xi_\alpha)) - \Phi(m(\xi^s)) \sim \alpha r'(0)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$r'(0) = \int \varphi_T(x, \xi^s) \xi(dx) - \text{tr}(T m),$$

$$T = \ddot{\Phi}(m(\xi^s)).$$

ξ planı ilə seçilir ki, $r'(0)$ kəmiyyəti minimal olsun; buna görə isə $\xi^s(x) = 1(x^{(s)})$ planını $x^{(s)} \in \arg \min_X \varphi_T(x, \xi^s)$ olan $x^{(s)}$ nöqtəsində vahidi ölçülü plan və

$$\xi^{s+1} = (1 - \alpha_s) \xi^s + \alpha_s 1(x^{(s)}) \quad (2)$$

alqoritmni götürmək kifayətdir, burada α_s - klassik qradiyent metodundakı { bax, [1], [2] } kimi seçilən ədədi ardıcılıqdır. Bu alqoritm daha yüksək sürətlə yığılan modifikasiyalara məlumdur. N nöqtədən ibarət optimal dəqiq planların approksimasiyası üçün Φ - planların yuvarlaqlaşdırılması ilə yanaşı (2) tipli alqoritmlər də istifadə olunur, bu halda hər bir iterasiyada eyni sayda nöqtələr əlavə və xaric olunur.

Aşağıdakı ümumiləşmələr də mühümdür.

768 REQRESSION

Əməllər fəzası X -in Banax fəzasının sonsuzölçülü altçoxlğu olduğu hala baxılmışdır (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin riyazi fizikanın tərs məsələləri* üçün, [2] fəsilər 7, 9).

Minimal kontrast statistik qiymətlərdən fərqli olan reqressiya parametrlərinin statistik qiymətlərdən istifadə etdikdə, R. e. p. metodları əksər hallarda yuxarıda baxılanlara yaxın olur. Məs., yalvarı statistik qiymətdən istifadə etdikdə (bax, *Aprior informasiyadan istifadə*) əsas fərq onunla bağlı olur ki, (1) informasiyon matrisi əvəzinə onun analoqları $m(\xi) + B$ istifadə olunur, burada B – müsbət müəyyən ($p \times p$) – matrisdir (bax, [1], [6]).

Reqression eksperiment sxeminə, xüsusi halda avtoreqression xətlər sxeminə, asılı xətlər halı da tədqiq olunmuşdur.

$$\sum_{i=0}^k a_i \varepsilon_{n-i} = \gamma_n, \quad a_0 = 1; \quad \gamma_n - \text{paylanması } P_n \text{ olan asılı olma-}$$

yan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $u_n = (x_1, \dots, x_{n-k})$,

$$F(u_n, \theta) = \sum_{i=0}^k f(x_{n-i}, \theta) a_i, \quad Y_n = \sum_{i=0}^k a_i y_{n-i},$$

olsun, burada $(x_j, \varphi(x_j, \theta), y_j) = 0, \quad j < 0$ fərz olunur.

$Y_n - F(u_n, \theta), \quad n = 1, \dots, N$ toplusunun paylanması

$\prod_{n=1}^N P_n(\cdot)$ -dir, burada y_1^N üçün $P_\theta^E(\cdot)$ paylanmasını bərpə

etmək mümkündür. *Asimptotik planlar* çoxluğu, yəni u_n -in nöqtələrinin $N \rightarrow \infty$ olduqda bu və ya digər $B \subset X^{k+1}$ altçoxlğundan olması tezliklərinin limitlərinin çoxluğu X^{k+1} -də ehtimalın Π çoxluğu ilə üst-üstə düşür ki, bu paylanmaların martinqalları X^{k+1} -in ilk k və son k sayda komponentləri ilə üst-üstə düşür.

Bundan başqa orta kəmiyyəti $\theta^T \varphi(x)$ olan və korrelyasion funksiyası məlum $y(x)$ təsadüfi meydanının kəsilməz ölçmələrinin kvantlanması da tədqiq olunmuşdur; bu kvantlamada kvantlanmış və tam seçim üzrə $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətləri kovariasiyaların mümkün qədər yaxın matrislərinə malik olur.

R. e. p. məsələlərinin mühüm altsinfini informasiyon matrisi naməlum parametrlərdən asılı olduğu halda, qeyri – xətti (ümumiləşmiş) reqression modellərin naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün eksperimentin planlaşdırılması məsələləri təşkil edir.

Naməlum parametrlər üçün alınmış informasiyanı maksimizasiyaedici planlar da işlənilmişdir (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentlərin*).

Əd.: [1] Ермаков С. М., Жигляевский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [3] Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, М., 1971; [4] Маликов М. Б., Заиграев А. Ю., Современные задачи оптимального планирования регрессионного эксперимента, К., 1989; [5] Pukelsheim F., Titterton D. M., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 4, p. 1060–68; [6] Pazman A., Foundations of optimum experimental design, Dordrecht – [a. o.], 1986.

REQRESSION ƏMSALLAR MATRİSİ « перцепсионных коэффициентов матрица; matrix of regression coefficients / regression matrix » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*.

REQRESSION MODEL « регрессионная модель; regression model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

REQRESSION PROQNOZ « регрессионный прогноз; regression prediction » – bax, *Xətti interpolyasiya(sı) reqressiya funksiyasının*.

REQRESSION PROQNOZ XƏTASI « перцепсионного прогноза ошибка; error of regression prediction » – bax, *Reqressiya tənliyi*.

REQRESSION STATİSTİK QİYMƏT « перцепсионная оценка; regression estimator » – ən kiçik kvadratlar metodunun – reqressiya funksiyasının ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış qiymətidir; reqressiya funksiyasının ifadəsində parametrlərin əsl qiyməti əvəzinə onun ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiyməti götürülür və reqressiya funksiyasının statistik qiyməti hesablanır.

REQRESSİYA « перцепция; regression » – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin (orta qiymətinin) bir və ya bir neçə kəmiyyətdən asılılığını ifadə edir. Əgər, məs., X təsadüfi kəmiyyətinin hər bir $x = x_i$ qiymətində Y təsadüfi kəmiyyətinin n_i sayda $y_1, \dots, y_{n_i}$ qiyməti müşahidə olunarsa, onda bu qiymətlərin ədədi ortaları – $\bar{y}_i = (y_1 + \dots + y_{n_i}) / n_i$ kəmiyyətlərinin x_i -dən asılılığı reqressiya adlanır; bu termin statistik mənada anlaşılır. x -in dəyişməsi ilə $\bar{y}$ -in dəyişməsində bir qanunauyğunluq müşahidə olunarsa, onda bu qanunauyğunluğun ehtimalı asılılığa əsaslandığı fərz olunur: x -in hər bir qeyd olunmuş qiymətində Y təsadüfi kəmiyyəti müəyyən bir ehtimal paylanmasına malikdir və bu paylanmanın riyazi gözləməsi $M(Y|x) = a(x)$ x -in funksiyasıdır. $y = a(x)$ asılılığında, x asılı olmayan dəyişən rolunu ifadə edir; $y = a(x)$ reqressiya və ya reqressiya funksiyası adlanır. $a(x)$ funksiyasının qrafiki Y təsadüfi kəmiyyətinin x -ə görə reqressiya xətti və ya reqressiya əyrisi adlanır. x dəyişəninə reqressiya dəyişəni və ya reqressor deyilir. Y -in x -ə görə reqressiya əyrisinin x -in dəyişməsi ilə Y -in orta qiymətinin dəyişməsi dəqiqliyi Y təsadüfi kəmiyyətinin hər bir x üçün hesablanan $D(Y|x) = \sigma^2(x)$ dispersiyası ilə ölçülür.

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = D(Y|x = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-i yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $M(Y|x)$ riyazi gözləməsi və $D(Y|x)$

dispersiyası uyğun olaraq Y təsadüfi kəmiyyətinin X -in $X = x$ qeyd olunmuş qiymətinə nəzərən şərti riyazi gözleməsi və şərti dispersiyası olacaqdır.] bu halda iki R. təyin olunur: x -ə görə Y -in və y -ə görə X -in regressiyası; R. anlayışı həm də X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin qarşılıqlı bağlılığının bəzi ölçülərini, regressiya ayrıları ətrafında paylanmanın toplanma dərəcəsinin xarakteristikaları kimi təyin olunan ölçülərini təyin etmək üçün istifadə oluna bilər. R. funksiyalarının belə bir xassəsi vardır ki, $M(Y - f(x))^2$ riyazi gözleməsi mümkün qiymətini bütün heqiqi $f(x)$ funksiyalarından $f(x) = a(x)$ olduğu halda alır, yeni Y -in x -ə görə R.-sı qeyd olunan mənada Y təsadüfi kəmiyyətini ən yaxşı surətdə təsvir edir. Y -in x -ə görə R.-sı xətti olduğu, yeni

$$M(Y|x) = \beta_0 + \beta_1(x)$$

olduğu hal, ən mühüm haldır.

β_0 və β_1 regressiya əmsalları adlanır və

$$\beta_0 = a_Y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} a_X, \quad \beta_1 = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

düsturları ilə hesablanır, burada ρ_{XY} , X və Y -in korrelyasiya əmsalı, $\sigma_X^2 = D_X$, $\sigma_Y^2 = D_Y$, $a_X = M_X$, $a_Y = M_Y$.

Y -in x -ə görə R. düzxətli isə

$$y = a_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - a_X)$$

düsturu ilə ifadə olunur. X -in y -ə görə R. düzxətli analogi qaydada tapılır. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanması normal paylanma olduğu halda dəqiq xətti R. vardır.

Statistik tətbiq məsələlərində, təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanması haqqında kifayət qədər məlumat olmadığı hallarda, R.-ni dəqiq təyin etmək üçün, onun təqribi tapılması məsələsi qoyulur.

Bu məsələnin həlli verilmiş sinifdən olan bütün $g(x)$ funksiyalarından $M(Y - g(X))^2$ riyazi gözleməsinin minimum qiymət almasını təmin edən bir funksiyanın seçilməsi məsələsinin həllinə gətirilir. Tapılmış funksiya kvadratik orta regressiya deyil. Xətti kvadratik orta regressiya Y təsadüfi kəmiyyətinin X kəmiyyəti vasitəsilə ən yaxşı xətti təqribatının tapılmasıdır, yeni $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ xətti funksiyası axtarılmalıdır ki, $M(Y - g(x))^2$ mümkün ola bilən ən kiçik qiymət alsın. Bu ekstremal məsələnin yeganə həlli vardır və

$$\beta_0 = a_Y - \beta_1 a_X, \quad \beta_1 = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

deməli, təqribi xətti R.-nin hesablanması dəqiq xətti R. üçün alınmış

$$y = a_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - a_X)$$

R.-nin alınması ilə nəticələnir. $M(Y - g(X))^2$ -in minimal qiyməti parametrlərin hesablanmış qiymətlərində $\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$ -ə

bərabərdir. Əgər $a(x)$ R.-sı varsa, onda ixtiyari β_0 və β_1 qiymətlərində

$$M[Y - \beta_0 - \beta_1 X]^2 = M[Y - a(X)]^2 + M[a(X) - \beta_0 - \beta_1 X]^2$$

münasibəti doğrudur. Deməli, $y = \beta_0 + \beta_1 x$ kvadratik orta R. düzxətli $a(x)$ R. əyrisinə ən yaxşı təqribatıdır, bu şərtlə ki, məsafə y oxu boyunca ölçülsün. Ona görə də, əgər $a(x)$ xətti düzxətli olarsa, onda o, kvadratik orta R. düzxətli ilə üst-üstə düşür.

Ümumi halda R. xətti regressiyadan çox fərqlənərsə, m dərəcəli $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m$ çoxhədlisinin tapılması məsələsini qoymaq olar ki, bu funksiya ($g(x)$)

$M(Y - g(X))^2$ riyazi gözleməsinin mümkün ola bilən ən kiçik qiymət almasını təmin etsin.

Məsələnin bu qaydada həlli m -tərtib parabolik və ya polinomial kvadratik orta R.-nin tapılmasına uyğundur (bax, *Parabolik regressiya*). $y = g(x)$ əyrisi m -tərtib parabolikdir və o, heqiqi R. əyrisinə ən yaxşı surətdə təqribatıdır. Parabolik R.-nin ümumiləşmiş halı, bu və ya digər verilmiş $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ funksiyalarının xətti kombinasiyası şəklində ifadə olunan aşağıdakı R. funksiyası olacaqdır:

$$g(x) = \beta_0 \varphi_0(x) + \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + \beta_m \varphi_m(x).$$

$\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ X -in paylanması əsasında qurulmuş uyğun olaraq, $0, \dots, m$ tərtib ortoqonal çoxhədlilər olduğu hal ən mühüm əhəmiyyət kəsb edən haldır. Qeyri-xətti və ya əyrili regressiyaya triqonometrik R., üstlü R. və s. misal göstərmək olar. Regressiya anlayışı təbii olaraq, bir R. dəyişənə deyil, R. dəyişənləri çoxluğuna baxıldığı hal üçün də ümumiləşdirilir. Əgər $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanması varsa, onda toplam regressiya, məs., X_1 -in $x_2, x_3, \dots, x_n$ -ə görə R.-sı təyin olunur:

$$M(X_1 | X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = a_1(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Uyğun tənlik X_1 -in $x_2, x_3, \dots, x_n$ -ə görə regressiya səthini təyin edir. X_1 -in $x_2, x_3, \dots, x_n$ -ə görə xətti R.-sı

$$M(X_1 | x_2, \dots, x_n) = \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\beta_2, \dots, \beta_n$ - R. əmsallarıdır ($MX_k = 0$ olduqda). X_1 kəmiyyətinin $x_2, x_3, \dots, x_n$ üzrə xətti kvadratik orta R.-sı X_1 kəmiyyətinin $X_2, X_3, \dots, X_n$ kəmiyyətləri ilə ən yaxşı xətti qiymətləndirilməsi kimi təyin olunur və bu qiymətləndirilmə $M(X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_n X_n)^2$ ifadəsinin minimum qiymət alması mənada anlaşılır. Uyğun regressiya müstəvisi, əgər $x_1 = a(x_2, \dots, x_n)$ R. səthi varsa, bu regressiya səthinin ən yaxşı təqribatıdır. Əgər R. səthi müstəvi olarsa, onda bu səth kvadratik orta R. müstəvisi ilə hökmən üst-üstə düşür (bu o halda olur ki, $X_1, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin birgə paylanması normal paylanma olsun).

Y -in X -ə görə R.-na sadə misal Y və X arasında $Y = u(x) + \delta$, $u(x) = M(Y | X = x)$ münasibətilə ifadə olunan

asılılıq olduğu, lakin X və δ -nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda. y və x qeyri – təsadüfi kəmiyyətləri arasındakı funksional asılılığı təyin etmək üçün eksperimenti planlaşdırarkən, Y -in yuxarıda qeyd olunan şəkildə ifadə olunması yaxşıdır. R.-nin bu modeli Y təsadüfi kəmiyyətinin təsadüfi olmayan x kəmiyyətindən asılılıq xüsusiyyətlərinin araşdırılmasında istifadə olunur.

Praktikada $y = u(x)$ funksiyasının və R.-nin naməlum əmsallarının eksperimental məlumatlara əsasən seçilməsi *regression analiz* metodları ilə aparılır.

Əd.: [1] Крамер Г. Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

REQRESSİYA DÜZXƏTTİ « *регрессии прямая; regression line* » – bax. *Regressiya xətti / əyrisi, Regressiya müstəvisi.*

REQRESSİYA ƏMSALI « *регрессии коэффициент; regression coefficient* » – *regressiya tənliyindəki asılı olmayan dəyişənin əmsalidir.*

Məs., $M(Y|X=x) = \beta_0 + \beta_1 x$ xətti regressiya tənliyində Y və X təsadüfi kəmiyyətlərini əlaqələndirən R. ə.-lan β_0 və β_1 aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\beta_0 = a_2 - \rho_{XY} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_1, \quad \beta_1 = \rho_{XY} \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

burada ρ_{XY} , – X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalidir. $a_1 = MX$, $a_2 = MY$, $\sigma_1^2 = DX$, $\sigma_2^2 = DY$. R. ə.-lərinin (seçimi R. ə.) hesablanması *regression analiz*in əsas məsələsidir.

REQRESSİYA ƏYRİSİ « *регрессии кривая; regression curve* » – bax. *Regressiya xətti / əyrisi.*

REQRESSİYA FUNKSİYASI « *регрессии функция; regression function* » – Y təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinin hər hansı digər müşahidə olunan (determinik) X təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş $X = x$ qiymətindən asılılığıdır: $M(Y|x) = f(x)$ regressiya funksiyasıdır.

Bax, *Regressiya.*

REQRESSİYA FUNKSİYASI; xətti interpolasiya « *регрессии функция; линейная интерполяция; linear interpolation of regression function* » – bax. *Xətti interpolasiya(sı) regressiya funksiyasının.*

REQRESSİYA FUNKSİYASI; müşahidələr üzrə statistik qiymət « *регрессии функция; оценка по наблюдениям; regression function; estimation from observations* » – *regressiya funksiyasının statistik qiyməti kimi istifadə olunan, müşahidələr nəticələrinin funksiyasıdır.* (X, Y) – ehtimal sıxlığı $f(x, y)$ olan ikiölçülü təsadüfi vektor, $r(x) = M(Y|X=x)$, – Y -in X -də regressiya funksiyası olsun. $r(x)$ R. f.-nin statistik qiyməti kimi

$$r_n(\tilde{x}) = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j K(a_n(x - X_j))}{\sum_{j=1}^n K(a_n(x - X_j))} \quad (1)$$

statistikalar sinfi istifadə olunur, burada (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, – (X, Y) vektorunun asılı olmayan müşahidələridir, K funksiyası mütləq inteqrallandır və onun inteqralı x -in bütün qiymətləri üzrə vahidə bərabərdir, a_n ardıcılığı isə eledir ki, $a_n \rightarrow \infty$ olduqda $a_n/n \rightarrow 0$. R. f.-nin (1) statistik qiymətləri [1], [2]-də eyni zamanda daxil olunmuşdur və nüvə tip statistik qiymətlər adlanır.

R. f.-nin (1) statistik qiymətləri f üzərinə olduqca zəif məhdudiyyətlərlə və K nüvələrinin geniş sinfi üçün asimptotik normal, tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiymətlərdir və

$$Mr_n(x) = r(x) + O(a_n^{-2}),$$

$$Dr_n(x) \sim \frac{D(Y|X=x)}{g(x)} \frac{a_n}{n} \int K^2(u) du$$

münasibətləri də doğrudur, burada $g(x)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sıxlığıdır. Bundan başqa, R. f.-nin statistik qiyməti, K məhdud dəyişən funksiya, Y sanki yəqin məhdud, $\min_{a \leq x \leq b} g(x) > 0$ və $n^{-1} a_n^2 \ln n \rightarrow 0$ olduqda,

$-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ şərtini ödəyən x -lər üzrə $r(x)$ -ə sanki yəqin müntəzəm yığılır. R. f.-nin (1) statistik qiymətlərinin xətalərinin müxtəlif kvadratik ölçülərinin asimptotikası yaxşı öyrənilmişdir (bax, [3], [4]).

$$g_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{j=1}^n K(a_n(x - X_j)),$$

$$V_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{j=1}^n Y_j^2 K(a_n(x - X_j)) (g_n(x))^{-1} - r_n^2(x)$$

olduqda

$$\xi_n = \sup_{-\infty < a \leq x \leq b < \infty} \left| r_n(x) - r(x) \right| \left(\frac{g_n(x)}{V_n(x)} \right)^{1/2}$$

kəmiyyətini $r_n(x)$ -in $r(x)$ -dən yayınma ölçüsü kimi götürmək olar. Bəzi olduqca ümumi şərtlərlə

$$P\{\sigma_n \xi_n - d_n < \lambda\} \rightarrow e^{-2e^{-\lambda}} \quad (2)$$

münasibəti ödənilir, burada σ_n və d_n aşkar yazılan məlum parametrlərdir (bax, [3], [5]). (2) münasibətinin tətbiqi iki məsələ: a) R. f. üçün asimptotik etibarlı zonanın qurulması və b) $v = r_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün testlərin qurulması məsələlərinin həllindən ibarətdir.

$r_n(x)$ -in $r(x)$ -dən yayınmasının digər ölçüsü kimi

$$W_n = \int (r_n(x) - r(x))^2 g_n^2(x) h(x) dx$$

inteqralı ilə təyin olunan W_n kəmiyyətindən istifadə olunur, burada h – hər hansı çəki funksiyasıdır. Bəzi şərtlər ödənildikdə W_n -in limit paylanması normal paylanmadır. Bu nəticəyə əsasən H_0 -a yaxınlaşan H_n alternativlərinə qarşı $H_0: r = r_0$ hipote-

zinin yoxlanılması üçün W_n statistikasına əsaslanan kriteri qurmaq olur, yeni

$$\bar{r}_n(x) = r_0(x) + n^{-1/2 + \delta/4} \bar{r}(x), \quad 1/4 < \delta < 1/2.$$

Əd.: [1] Надарая Э. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 1, с. 157–59; [2] Watson G., «Sankhya, ser. A.», 1964, v. 26, p. 359–72; [3] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тбилиси, 1983; [4] Collomb G., «Ann. Sci. Univ. de Clermont», 1977, № 65, Math, fasc. 15, p. 24–46; [5] Liego H., «Math. Operat. und Statist.», 1982, Bd 13, № 2, S. 171–82; [6] Конаков В. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 4, с. 879–88.

REQRESSIYA XƏTTİ / ƏYRİSİ « регрессион линия / кривая; regression line / curve » – bir təsadüfi kəmiyyətin digər təsadüfi kəmiyyətə görə *reqressiya* funksiyasının qrafikidir. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin və hər bir x qiyməti üçün $M(Y|X=x)$ şərti riyazi gözləməsinin varlığı fərz olunur. $y = y(x) = M(Y|X=x)$ funksiyası Y -in X -ə görə *reqressiya əyrisi* və ya *reqressiya xətti* adlanır. R. ə. *reqressiya səthinin* xüsusi bir halıdır. $y(x)$ xətti funksiya olduğu halda (bu texniki tətbiq üçün ən mühüm bir haldır) $y = y(x)$ *reqressiya düz xətti* adlanır.

REQRESSIYA MATRİSİ « регрессион матрица; regression matrix » –

$$X = BZ + E \quad (*)$$

çoxölçülü xətti *reqressiya* modelində *reqressiya* əmsalları β_j , $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, m$ olan B matrisidir. X – elementləri ilkin m – ölçülü təsadüfi kəmiyyətin j -ci komponenti üçün müşahidələrin nəticələri X_{jk} , $k = 1, \dots, n$ olan matris; Z – elementləri məlum *reqressiya* dəyişənləri z_{jk} , $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, n$ olan matris; E – elementləri ε_{jk} , $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ xətalara və $ME_{jk} = 0$ olan matrisdir. R. m.-nin elementləri β_{jk} naməlumdur və onların qiymətləndirilməsi tələb olunur. (*) modeli *regression analiz*in ümumi xətti modelinin m – ölçülü model halına ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Кендалл М. Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

REQRESSIYA MÜSTƏVİSİ « регрессион плоскость; regression plane » – *reqressiya funksiyası* xətti olduqda onun qrafikidir. Y , $X_1, \dots, X_n$ – təsadüfi kəmiyyətlər. $y = f(x_1, \dots, x_n) = M(Y|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$, – Y -in $X_1, \dots, X_n$ -lərə görə *reqressiyası* olsun. Əgər f funksiyası xətti olarsa, yeni $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ olarsa, bu tənliyin $\mathbb{R}^{n+1}$ -də təyin etdiyi müstəvi – Y -in $X_1, \dots, X_n$ -lərə görə *reqressiya müstəvisi* adlanır. $n=1$ olduqda, R. m. *reqressiya xətti* adlanır.

REQRESSIYA SƏTHİ « регрессион поверхность; regression surface » – *reqressiya funksiyasının* qrafikidir. Y , $X_1, \dots, X_n$ – təsadüfi kəmiyyətlər və $y = f(x_1, \dots, x_n) = M(Y|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$, – Y -in $X_1, \dots, X_n$ -lərə görə

reqressiyası olsun. Bu tənlik $\mathbb{R}^{n+1}$ fazasında *reqressiya səthi* adlanan səthi təyin edir. $n=1$ olduqda, R. s. *reqressiya əyrisi* (xətti) adlanır. Əgər f bütün argumentlərinə görə xətti funksiya olarsa, R. s. *reqressiya müstəvisi* adlanır.

REQRESSIYA SPEKTRİ « регрессион спектр; regression spectrum » – stasionar zaman sıraları üçün *reqression sxemə* daxil olan *təsadüfi prosesin* spektridir.

$t = 1, \dots, n$ qiymətlərində müşahidə olunan Y_t təsadüfi prosesi

$$Y_t = a_t + X_t \quad (1)$$

kimə ifadə olunsun, burada X_t – riyazi gözləməsi $MX_t \equiv 0$ olan təsadüfi prosesdir, prosesin orta qiyməti $MY_t = a_t$ isə

$$a_t = \sum_{k=1}^s \beta_k \varphi_t^{(k)} \quad (2)$$

xətti *reqressiya* formasında ifadə olunur, burada $\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, s$ – məlum *reqression* vektorları, $\beta_1, \dots, \beta_s$ – məlum *reqressiya* əmsallarıdır. $M(\lambda)$, – $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(s)}$ *reqression* vektorlarının spektral paylanma funksiyası olsun. $M(\lambda)$ -nin *reqressiya* spektri bütün λ -ların ehtimalı çoxluğuna deyilir ki, λ -nı özündə saxlayan $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ ixtiyari (λ_1, λ_2) intervalı üçün $M(\lambda_2) - M(\lambda_1) > 0$ münasibəti ödənilsin.

(1) – (2) sxemlərində *reqressiya* əmsallarının qiymətləndirilməsi məsələlərində R. s. mühüm rol oynayır. Məs., R. s.-nin elementlərinin terminlərində ən kiçik kvadratlara metodu üzrə tapılmış β statistik qiymətlərinin asimptotik effektivliyinin zəruri şərtləri ifadə olunur.

Əd.: [1] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956.

REQRESSIYA TƏNLİYİ « регрессион уравнение; regression equation » – bir təsadüfi vektorun müşahidə olunmuş qiymətlərinə görə digər təsadüfi vektorun qiymətlərinin proqnozu üçün *şərti riyazi gözləmə* terminlərində funksiya təyin edən tənlikdir.

$X = (X_1, \dots, X_m)^T$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ uyğun olaraq, $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ və $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ qiymətlərini alan, birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x, y)$ ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Əgər

$$M(Y|X) = f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$$

riyazi gözləməsi varsa, onda $y = f(x)$ bərabərliyi Y -in X -ə görə *reqressiya tənliyi*, $f(\cdot)$ funksiyası *reqressiya* və ya *reqressiya funksiyası* adlanır.

*Regression analiz*də R. t.-dən Y təsadüfi vektoru üçün X təsadüfi vektorunun müşahidə olunmuş qiymətinə görə $f(\cdot)$ *reqressiya funksiyası* vasitəsilə *regression proqnoz* adlanan $\hat{Y}$ -nin qurulmasında istifadə olunur: $\hat{Y} = f(X)$ qəbul olunur. $\delta = Y - \hat{Y}$ fərqi *regression proqnoz xətası* deyilir və $M\delta = 0$ ($\mathbb{R}^n$ -də sıfır vektoru), yeni *regression proqnoz*

meylsiz xarakteristikadır. Əgər $M(F|X) = f(X)$ vektorunun komponentləri $f_1(X), \dots, f_n(X)$ məhz müşahidə olunan X vektorunun $X_1, \dots, X_m$ komponentlərinin çoxhədliləri olarsa, reqressiya parabolik reqressiya adlanır (bax, *Xətti reqressiya, Xətti interpolasiya*(sı) reqressiya funksiyasının, *Regression analiz*).

Əd.: [1] Себер Д. А. Ф., Линейный регрессионный анализ., пер. с англ., М., 1980.

REQRESSOGRAM « регрессограмма; regressogram » – bax, *Qeyri-parametrik reqression analiz*.

REQRESSOR « регрессор; regressor » – bax, *Reqression dəyişən, regressor*.

REQULYAR BİRÖLÇÜLÜ DIFFUZIYA « регулярная одномерная диффузия; regular one-dimensional diffusion » – bax, *Birölçülü diffuziya*.

REQULYAR ÇOXLUQ « регулярное множество; regular set » – bax, *Böyük uyğunmalar təsadüfi proses üçün*.

REQULYAR DİRİXLE FORMASI « регулярная форма Дирихле; regular Dirichlet form » – bax, *Markov prosesi; Dirixle forması*.

REQULYAR MARKOV ZƏNCİRİ « регулярная цепь Маркова; regular Markov chain » – vəziyyətlərinin təşkil etdiyi yeganə mühüm sinfi tsiklik altsiniflərə bölünməyən, vəziyyətləri sayı sonlu bir cins *Markov zənciridir*. Markov zənciri, yalnız və yalnız, o halda *requlyar zəncirdir* ki, hər hansı t (ola bilər ki, ixtiyari böyük t) qiymətində t addıma $p_j(t)$ keçid ehtimallının hamısı sıfırdan fərqlidir. R. M. Z.-ində bütün final ehtimallar $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$ mövcuddur, sıfırdan fərqlidir və yeganə stasionar paylanma emələ gətirirlər.

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

REQULYAR NÖQTƏ çoxluq üçün « регулярная точка для множества; regular point for a set » – bir cins *Markov prosesinin* vəziyyətləri fəzasının ele nöqtəsidir ki, $t=0$ anında prosesin bu nöqtədən başlayan trayektoriyaları verilən çoxluğa ixtiyari $[0, \delta)$, $\delta > 0$ zaman müddətində sonsuz dəfə sanki yəqin daxil ola bilər. Əgər $\zeta = (\zeta_t, \xi_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $-(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəza fəzasında standart prosesdirsə, onda $x \in \mathcal{E}$ və $\Gamma \subset \mathcal{E}$ Borel çoxluqlarının nə cür olmasından asılı olmayaraq: ya x nöqtəsi Γ çoxluğu üçün *requlyardır* və ya qeyd olunan hadisənin $\mathbf{P}_x$ – ehtimalı sıfıra bərabərdir, – alternatividir doğrudur. Sonuncu halda Γ çoxluğu x nöqtəsində incə və ya səyrək çoxluq, x nöqtəsi isə Γ çoxluğu üçün *irrequlyar nöqtə* adlanır. ζ prosesinin Qrın funksiyası üçün müəyyən fərziyyələrlə (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) klassik Viner kriterisini ümumiləşdirən, Borel çoxluğu üçün nöqtənin *requlyarlığının* zəruri və kafi şərtləri doğrudur (bax, [5], [6]).

Açıq $U \subset \mathcal{E}$ çoxluğunda Dirixle stoxastik məsələsinə baxdıqda (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) *requlyar sərhəd nöqtəsi* $\mathcal{E} \setminus U$ üçün *requlyar nöqtə* anlaşıdır. Olduqca zəif əlavə şərtlərlə belə nöqtədə Dirixle məsələsinə uyğun sərhəd şərti reallaşır (bax, [1]). Klassik halda olduğu kimi sərhəd nöqtəsinin *requlyarlıq* kriterisi b a r -

yərin (çəpərin) (belə adlandırılan) varlığı terminlərində ifadə oluna bilinir (bax, [1]).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getto R. K., Markov processes and potential theory, N. Y., 1968; [3] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [4] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – [a. o.], 1984; [5] Kanda M., «J. Math. Soc. Japan», 1967, v. 19, p. 46–69; [6] Stoica L., «Stud. si cerc. mat.», 1986, t. 38, p. 389–91.

REQULYAR ÖLÇÜ « регулярная мера; regular measure » – topoloji T fəzasının Borel σ – cəbri $\mathcal{B}(T)$ – də aşağıdakı xassəni ödəyən ölçüdür: hər bir $B \in \mathcal{B}(T)$

çoxluğu üçün $\mu(B) = \sup\{\mu(F): F \subset B, F \text{ qapalı çoxluğudur}\}$ münasibəti doğrudur. Metrik fəzada hər bir sonlu Borel ölçüsü *requlyar ölçüdür*. Ele kompakt Hausdorff fəzası vardır ki, ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü bu fəzada *requlyar* olmaya bilər.

Bax, *Təsadüfi ölçü*.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

REQULYAR SƏRHƏD NÖQTƏSİ « регулярная граничная точка; regular boundary point » – bax, *Requlyar nöqtə çoxluq üçün*.

REQULYAR ŞƏRTİ EHTİMAL « регулярная условная вероятность; regular conditional probability » – bax, *Şərti ehtimal*.

REQULYAR TƏSADÜFİ MEYDAN « регулярное случайное поле; regular random field » – $X_t, t \in T$ *təsadüfi kəmiyyətlərinin* çoxluğudur, burada T ele hesabı çoxluqdur ki, $\bigcap_V \mathcal{B}(T \setminus V)$ σ – cəbri trivial cəbrdir (yeni ehtimalları ya 0 və ya 1 olan hadisələrdən ibarətdir). Burada $\mathcal{B}(T \setminus V)$, $-X_t, t \in T$ *təsadüfi kəmiyyətlərinin* doğruduğu σ – cəbri, kəsişmə isə bütün sonlu $V \subset T$ üzrə götürülür.

REQULYARLANMA SƏRHƏDİ « регулирования граница; regulation limit / boundary » – bax, *Statistik nəzarət, keyfiyyət*.

REQULYARLIĞI, ÖLÇÜNÜN « регулярность меры; regularity of a measure » – bax, *Ölçü*.

REQULYARLIQ(ĞI) təsadüfi prosesin траекториясынын « регулярность траектории случайного процесса; regularity of trajectory of a random process » – bax, *Təsadüfi proses; траекториянын requlyarlığı*.

RELEY FEYDİNGİ / DONMASI « рлеевское затухание; Rayleigh fading » – bax, *Feydinglər / donmalar* kanalda.

RELEY – KORRELYASION FUNKSIYA « релейная корреляционная функция; relay correlation function », stasionar təsadüfi $X(t)$ prosesi nin $-\operatorname{sgn} X(t)$ və $X(t)$ proseslərinin qarşılıqlı *korrelyasion funksiyası* $B^{(r)}(\tau) = M X(t) \operatorname{sgn} X(t + \tau)$ funksiyasıdır, burada

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Əgər $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ ikiölçülü stasionar təsadüfi proses olarsa, onda birölçülü hala uyğun olaraq, $B_{XY}^{(r)}(\tau) = \mathbf{M}Y(t) \operatorname{sgn} X(t + \tau) X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı R. - k. f. adlanır.

Əgər (X, Y) normal qanunla paylanmış ikiölçülü təsadüfi vektor, $\mathbf{M}X = \mathbf{M}Y = 0$, $g(x)$ isə $\mathbf{M}X g(X) < \infty$ şərtini ödəyən funksiya olarsa, onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\mathbf{M}Y g(X) = cXY, \quad c = \mathbf{M}X g(X) / \mathbf{M}X^2. \quad (1)$$

Baxılan halda

$$\mathbf{M}X \operatorname{sgn} X = \mathbf{M}|X| = \{2\mathbf{M}X^2/\pi\}^{1/2}$$

olduğundan, riyazi gözləmələri sıfıra bərabər olan $X(t)$ və $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ Gauss təsadüfi proseslərinin $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. - k. f.-nin təqribən təyin olunmasından $X(t)$ və $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ proseslərinin aşağıdakı korrelyasion funksiyalarının statistik qiymətləri üçün istifadə oluna bilər:

$$\mathbf{M}X(t + \tau)X(t) = B(\tau) = \pi B^{(r)}(\tau) B^{(r)}(0) / 2 \quad (2)$$

$$[\text{və ya } R(\tau) = B(\tau) / B(0) = B^{(r)}(\tau) / B^{(r)}(0)]$$

və

$$\mathbf{M}X(t + \tau)Y(t) = B_{XY}(\tau) = \pi B_{XY}^{(r)}(\tau) B_{XX}^{(r)}(0) / 2 \quad (3)$$

$$[\text{və ya } R_{XY}(\tau) = B_{XY}(\tau) / [B_{XX}(0) / B_{YY}(0)]^{1/2}].$$

Eyni zamanda $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. - k. f.-lannın seçimi qiymətlərinin təyin olunması üçün $\sum_k x(k\Delta) \operatorname{sgn} x(k\Delta + \tau)$ və

$\sum_k y(k\Delta) \operatorname{sgn} x(k\Delta + \tau)$ şəklində cəmləri tapmaq tələb olunur

[burada $x(t)$ və $y(t)$, - $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin realizasiyalardır], əgər t yalnız tam qiymətlər alırsa, onda bu cəmlərdə vurma əməli olmadığından, onlar asanlıqla hesablanır [seçimi $B_{XX}^*(\tau)$ və $B_{XY}^*(\tau)$ korrelyasion funksiyalarının ifadələrindəki $\sum_k x(k\Delta)x(k\Delta + \tau)$ və $\sum_k y(k\Delta)x(k\Delta + \tau)$ cəmləri ilə müqayisədə]. Buna görə də, reley metodu Gauss təsadüfi proseslərinin korrelyasion funksiyalarının təyin olunmasında, $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. - k. f.-nin əvvəlcədən hesablanmış statistik qiymətlərinə və (2), (3) düsturlarına əsaslandığından praktikada olduqca tez-tez istifadə olunur (bax, məs., [1] - [6]).

Korrelyasion funksiyaların təyin olunması üçün reley metodunun xətasının kvadratik ortasının hesablanması hətta adi metoddan -

$x(t)x(t + \tau)$ və ya $y(t)x(t + \tau)$ hasilərinin zaman üzrə orta qiymətinin tapılmasına əsaslanan metoddan daha dəqiqdir.

Korrelyasion funksiyaların qiymətlərinin tapılmasının reley metodu və onun bezi modifikasiyaları qeyri - Gauss təsadüfi proseslərinin korrelyasion funksiyalarının qiymətləndirilməsi üçün də istifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Балл Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [2] Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [3] Жовинский В. Н., Арховский В. Ф., Корреляционные устройства, М., 1974; [4] Курочкин С. С., Многоканальные счетные системы и коррелометры, М., 1972; [5] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [6] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [7] Хавкин В. П., Гринберг А. И., «Заводская лаборатория», 1970, т. 36, № 10, с. 1236-38; [8] Косякин А. А., Филаретов Г. Ф., в кн.: Труды к 5-му Всесоюз. симпоз. «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей», Секц. 3, Л., 1972, с. 144-50; [9] Iwase K., «Repts Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. and Eng.», 1973, v. 20, № 4, p. 113-17; [10] Bognier R. E., «Electronics Letters IEE», 1965, v. 1, № 3, p. 53-54; [11] Knowles J. B., Tsui H. T., «J. Appl. Phys.», 1967, v. 38, № 2, p. 607-12.

RELEY METODU korrelyasion funksiyaların təyin olunmasının «релейный метод определения корреляционных функций: relay method of correlation analysis» - bax, Reley - korrelyasion funksiya.

RELEY PAYLANMASI «Рэлей распределение; Rayleigh distribution» - kəsilməz, $(0, \infty)$ -da toplanmış, sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

olan ehtimal paylanmasıdır, $\sigma > 0$, σ - parametrdır. R. p. funksiyası

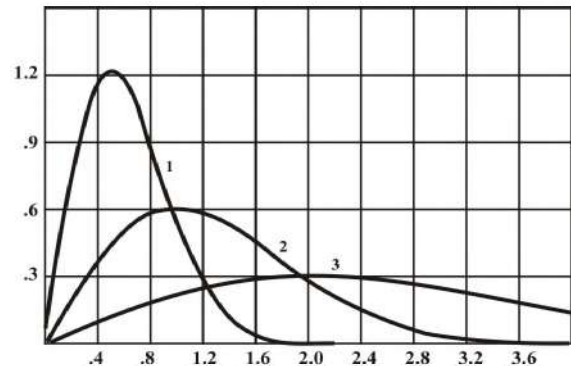
$$F(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$$

düsturu ilə ifadə olunur. R. p. paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{2}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

olan paylanmanın $n = 2$, $\sigma = 1$ qiymətlərində xüsusi halıdır.

R. p. sərbəstlik dərəcəsi sayı ikiyə bərabər χ^2 - paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin arifmetik kvadrat kökünün paylanması ilə üst-üstə düşür.



Reley paylanmasının sıxlıqları. (1) $\sigma = 0,5$, (2) $\sigma = 1$, (3) $\sigma = 2$.

R. p. müsbət asimetriyaya malikdir, onun yeganə modası $x = \sigma$ nöqtəsindədir. R. p.-nin bütün momentləri sonludur, riyazi

gözləməsi $\sqrt{n/2} \sigma$, dispersiyası $2\sigma^2(1 - \pi/4)$ -ə bərabərdir. R. p.-ni müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sisteminə komponentləri asılı olmayan 0 və σ^2 parametrləri normal paylanma qanununa tabe vektorun uzunluğunun paylanması kimi interpretasiya etmək olar. R. p.-nin üçölçülü fəzədə analoqu *Maksvell paylanmasıdır*.

R. p. əsas etibarilə atəş nəzəriyyəsi və statistik rabitə nəzəriyyəsinə tətbiq olunur. R. p.-na ilk dəfə (1880) Reley tərəfindən harmonik rəqslərin toplanılmasında yekun amplitudun paylanması kimi baxılmışdır.

Əd.: [1] Стрелт Дж. (лорд Рэлей), Волновая теория света, пер. с англ., М. – Л., 1940.

RELEY PROSESİ « Рэля процесс; Rayleigh process » – bax, *Bessel prosesi*.

RENORMALİZASİON ÇEVİRMƏ « ренормализационное преобразование; renormalization transformation » – bax, *Renormalization qrup*.

RENORMALİZASİON QRP « ренормализационная группа; renormalization group » – təsadüfi meydanın realizasiyaları fəzasının miqyas çevirmələrinin qrupuna (semi – qrupuna) qoşma olan, *təsadüfi meydanlar* fəzasının çevirmələrinin birparametrik qrupudur (bəzi hallarda semi – qrupudur). R. q. diskret və kəsilməz arqumentləri təsadüfi meydanlar üçün təyin olunur.

$\{X(j) \in T, j \in \mathbb{Z}^d\}$ – qiymətləri topoloji vektor fəzası T -də, d – ölçülü tamqiymətli şəbəkədə diskret arqumentli təsadüfi meydan olsun. Bu təsadüfi meydanın ehtimal fəzası $\mathbf{P} = \{T^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}, \mu\}$ üçlüyüdür, burada μ – təsadüfi meydanın realizasiyalarının fəzası $T^{\mathbb{Z}^d}$ -də silindrik Borel çoxluqları ilə doğrulmuş çoxluqlar σ – cəbri $\mathcal{B}$ -də ehtimal paylanmasıdır. $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ olduqda

$$X(j) \rightarrow X_n^{(\alpha)}(j) = (n^d)^{-\alpha} \sum_{k_1=j_1+1}^{n(j_1+1)} \dots \sum_{k_d=j_d+1}^{n(j_d+1)} X(k_1, \dots, k_d)$$

xətti çevirməsinə $T^{\mathbb{Z}^d}$ fəzasının miqyası və ya tərtibi $n=1, 2, \dots$ olan α üstlü ($\alpha > 0$) miqyas çevirməsi deyilir. $\{X_n^{(\alpha)}(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanı $\{X(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının renormalizasion çevirməsi adlanır. $\{X_n^{(\alpha)}(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının ehtimal paylanması $\mu_n^{(\alpha)}$ $\{X(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının μ ehtimal paylanmasının renormalizasion çevirməsi adlanır. Renormalizasion $\{R_n^{(\alpha)}: \mu \rightarrow \mu_n^{(\alpha)}, n=1, 2, \dots\}$ çevirmələri $\mathcal{B}$ σ – cəbrində ehtimal paylanmaları fəzasının çevirmələrinin kommutativ multiplikativ semi – qrupunu təşkil edir; bu semi – qrup α üstlü diskret renormalizasion qrup adlanır. Diskret R. q. anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinə XX əsrin 70-ci illərində Ya. Q. Sinay (bax, [1]) və ondan asılı olmadan Q. Gallovotti (G. Gallovotti) və Q. İona – Lasinio (G. Jona – Lasinio) kimi alimlərin işlənilməsi daxil olmuşdur, bunlar Kadanovun fiziki R. q.-un evristik tərifinə ciddi mənə verə bilmişlər.

Diskret R. q. $X(j)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri üçün limit teoremləri ilə sıx bağlıdır. Əgər $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(\alpha)}(j), j \in \mathbb{Z}^d$ limiti zəif

yığılma mənasında vardırsa və bir realizasiyada toplanmamışdırsa, bu limit μ paylanmasının avtomodel limiti adlanır. μ_* ehtimal paylanması ilə təyin olunan

$$\{X_*(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(\alpha)}(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$$

təsadüfi meydanı uyğun olaraq, $\{X(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının avtomodel limiti adlanır. Bununla da avtomodel limit, əgər

mövcuddursa, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\{X_n^{(\alpha)}(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ normalanmış cəmlərinin birgə paylanmasının limit qanununu təyin edir.

Əgər bütün $n=1, 2, \dots$ qiymətlərində $R_n^{(\alpha)}\mu_* = \mu_*$ bərabərliyi ödənilərsə, $\mathcal{B}$ σ – cəbrində μ_* ehtimal paylanması α üstlü avtomodel ehtimal paylanması adlanır. Bu

halda μ_* -ya uyğun $\{X_*(j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanı avtomodel təsadüfi meydan adlanır. Əgər

avtomodel $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(\alpha)}\mu = \mu_*$ limiti vardırsa, onda bu limit α

üstlü avtomodel ehtimal paylanmasıdır. $R_n^{(\alpha)}\mu_* = \mu_*$.

$n=1, 2, \dots$ tənlikləri avtomodellik tənlikləri

adlanır. Avtomodel limitləri μ_* ilə üst-üstə düşən μ paylanma-

larının çoxluğuna μ_* avtomodel ehtimal paylanmalarının cəzibə oblastı deyilir. Avtomodel limitlərin varlığının isbatının R. q. metodu avtomodel ehtimal paylanmalarının qurulması, avtomodellik tənliklərinin həlli, onların cazibə oblastlarının araşdırılmasından ibarətdir.

Riyazi gözlemləri sıfır bərabər və eyni dispersiyaya malik asılı olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin meydanları avtomodel təsadüfi meydanların xüsusi halıdır. Bu meydanların avtomodellik göstəricisi $\alpha = 1/2$ -dir. Avtomodel limitlərin bu meydanlara yığılması mərkəzi limit teoreminin məzmununu təşkil edir.

Avtomodel təsadüfi meydanlara daha ümumi misal dayanıqlı paylanmalara tabe, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər meydanlarıdır. Asılı avtomodel təsadüfi meydanlar sinfi olduqca genişdir və hal-hazırda bu sinif tam təsvir olunmamışdır. Qauss avtomodel təsadüfi meydanları və bu meydanların avtomodel funksionalları sinifləri təsvir olunmuşdur (bax, [1], [2]).

Bu avtomodel meydanların cazibə oblastında yerləşən təsadüfi meydanların bəzi sinifləri də araşdırılmışdır.

$\{X(x) \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^d\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ Evklid fəzasından olan, d – ölçülü Evklid fəzasında kəsilməz arqumentli, ümumiləşmiş təsadüfi meydan olsun. Bu meydana uyğun ehtimal fəzası $\{S'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu\}$ üçlüyüdür, burada $S'(\mathbb{R}^d)$ – təcridən artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzası, $\mu, - S'(\mathbb{R}^d)$ -nin Borel silindrik çoxluqlarının doğruduğu $\mathcal{B}, - \sigma$ – cəbrində ehtimal ölçüsüdür. $X(x) \in S'(\mathbb{R}^d)$ ümumiləşmiş funksiyası üçün $\alpha > 0$

üstlü $\lambda > 0$ miqyaslı və ya λ tərtib miqyas çevirməsi –

$$X(x) \rightarrow X_\lambda^{(\alpha)}(x) = \lambda^{(\alpha-1)d} X(x/\lambda)$$

düsturu vasitəsilə təyin olunur, burada tərifi görə, $(X(x/\lambda), \varphi(x)) =$

$$= \lambda^d (X(x), \varphi(\lambda x)). \{X_\lambda^{(\alpha)}, x \in \mathbb{R}^d\}$$

təsadüfi meydanına

$\{Y(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ təsadüfi meydanının renormalizasiya çevirməsi deyilir. $\{Y_\lambda^{(\alpha)}(x), x \in \mathbb{R}^d\}$

təsadüfi meydanının ehtimal paylanması $\mu_\lambda^{(\alpha)}$ -ya μ ehtimal paylanmasının renormalizasiya çevirməsi deyilir. Daha etraflı, əgər μ sonluölçülü

$p_k(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ paylanmaları ilə verilərsə, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in S(\mathbb{R}^d)$, $k=1, 2, \dots$ olduğu halda, $p_k(\lambda^{\alpha d} \varphi_1(\lambda x), \dots, \lambda^{\alpha d} \varphi_k(\lambda x))$,

$\mu_n^{(\alpha)}$ üçün sonluölçülü paylanmadır. $\{R_n^{(\alpha)}: \mu \rightarrow \mu_n^{(\alpha)}, \lambda > 0\}$ renormalizasiya çevirmələri $\mathcal{B}$ σ – cəbrində ehtimal paylanmaları fəzasının birparametrlili multiplikativ çevirmələr qrupunu yaradır. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda^{(\alpha)} \mu$ və $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_\lambda^{(\alpha)} \mu$ limitləri sonluölçülü

paylanmaların zəif yığılması mənasında mövcuddurlarsa və bir realizasiyada toplanmamışlarsa, bu limitlər uyğun olaraq, μ paylanmasının böyük miqyaslı və kiçik miqyaslı avtomodel limitləri adlanırlar. Əgər bütün $\lambda > 0$ üçün $R_\lambda^{(\alpha)} \mu_* = \mu_*$ şərti ödənilərsə, $\{X_*(x), x \in \mathbb{R}^d\}$

təsadüfi meydanı və onun ehtimal paylanması μ , $\alpha > 0$ üstü avtomodel təsadüfi meydan və avtomodel paylanma adlanır. Əgər təsadüfi meydanların böyükmiqyaslı və kiçikmiqyaslı avtomodel limitləri varsa, onda bunlar avtomodel təsadüfi meydanlardır. Kesilməz zamanlı avtomodel təsadüfi proseslərə ilk dəfə XX əsrin 40-cı illərinin əvvəllərində A. N. Kolmogorovun işlərində baxılmışdır (bax, [3]). Sonradan kəsilməz argumentli avtomodel təsadüfi meydanların müxtəlif sinifləri tədqiq olunmuşdur (bax, bibliograf. [2] və [4]-də). Asılı olmayan qiymətli meydanlar və avtomodel təsadüfi proseslər, Gauss avtomodel təsadüfi meydanları, Gauss təsadüfi meydanlarının avtomodel funksionalları, dayanıqlı və Puasson təsadüfi meydanların avtomodel funksionalları və s. belələrindəndir.

Kesilməz və diskret R. q.-lar arasında təbii əlaqə vardır. $\chi(x)$ – vahid ölçülü $\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_k \leq 1, k=1, \dots, d\}$ kubunun xarakteristik funksiyası və $\chi_j(x) = \chi(x-j)$ olsun. $\{Y(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ isə ele ümumiləşmiş meydan olsun ki, $X(j) = Y(\chi_j) = (X(x), \chi_j(x))$, $j \in \mathbb{Z}^d$ təsadüfi kəmiyyətləri təyin olunsunlar. Belə ümumiləşmiş təsadüfi meydan *diskretlənən*, $\{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ diskret təsadüfi meydanı isə onun *diskretizasiyası* adlanır. Onda $DR_n^{(\alpha)} = R_n^{(\alpha)} D$ bərabərliyi doğrudur.

burada $n \in \mathbb{Z}_+$, D , $R_n^{(\alpha)}$ kəsilməz və $R_n^{(\alpha)}$ diskret uyğun olaraq diskretizasiya, kəsilməz və diskret renormalizasiya çevirmə operatorlarıdır. Aydın ki, onda belə nəticə alınır ki, avtomodel təsadüfi meydanın diskretizasiyası avtomodeldir. Bu isə diskret argumentli avtomodel təsadüfi meydanların qurulması üçün ümumi metod almağa imkan verir.

Diskret və kəsilməz R. q.-lar statistik fizikada və konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur, məs., kritik nöqtələrin və faza keçidlərinin nöqtələrinin araşdırılmasında, hidrodinamikada turbulent axınların təsvirində, avtomat şəbəkələr nəzəriyyəsində və s.

Əd.: [1] С и в а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [2] М а j о r Р., Multiple Wiener - Ito integrals, В. - [а. о], 1981, р. 1-127; [3] К о л м о г о р о в А. Н., Математика и механика, М., 1985, с. 274-77; [4] Б л е х е р П. М., С у р г а й л и с Д., в кн:

Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 20, М., 1983, с. 3-51; [5] Д о б р у ш и н Р. Л., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 179-213.

RENYİ ENTROPIYASI « Реньи энтропия; Rényi entropy » – bax, *Informasiya ölçü*.

RENYİ KRITERİSİ « Реньи критерий; Rényi test » – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası $F(x)$ -in kəsilməz olması haqqında aşağıdakı şəkildə verilən:

$$H_1^+ : \sup_{|x| < \infty} \psi[F(x)] (MF_n(x) - F(x)) > 0,$$

$$H_1^- : \inf_{|x| < \infty} \psi[F(x)] (MF_n(x) - F(x)) < 0,$$

$$H_1 : \sup_{|x| < \infty} \psi[F(x)] |MF_n(x) - F(x)| > 0$$

alternativlərinə qarşı, sadə qeyri – parametrik H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunan *statistik kriteridir*, burada $F_n(x)$, – $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $\psi \geq 0$ – çəki funksiyasıdır. Əgər

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} 1/F(x), & F(x) \geq a \text{ olduqda}, \\ 0, & F(x) < a \text{ olduqda} \end{cases}$$

və a , – $[0, 1]$ parçasından ixtiyari qeyd olunmuş ədəd olarsa, onda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunacaq R. k.

H_1^+ , H_1^- , H_1 alternativlərinə uyğun aşağıdakı Rənyi statistikalarına əsaslanır:

$$R_n^+(a, 1) = \sup_{F(x) \geq a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} = \max_{F(X_{(m)}) \geq a} \frac{m/n - F(X_{(m)})}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n^-(a, 1) = - \inf_{F(x) \geq a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} = \max_{F(X_{(m)}) \geq a} \frac{F(X_{(m)}) - (m-1)/n}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n(a, 1) = \sup_{F(x) \geq a} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)} = \max \{ R_n^+(a, 1), R_n^-(a, 1) \},$$

burada $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, – $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ variasiya sırasının hədləridir və bu variasiya sıra isə $X_1, \dots, X_n$ müşahidələri üzrə qurulmuş sıradır.

$R_n^+(a, 1)$ və $R_n^-(a, 1)$ statistikaları eyni ehtimal qanununa tabedirlər və əgər $0 < a \leq 1$ olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{na}{1-a}} R_n^+(a, 1) < x \right\} = 2\Phi(x) - 1, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{na}{1-a}} R_n^-(a, 1) < x \right\} = L(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

burada $\Phi(x)$ standart normal qanunun paylanma funksiyası, $L(x)$ Renyi paylanma funksiyası olub,

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp \left\{ -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2} \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. $a=0$ olduğu halda

$$P\{R_n^+(0, 1) \geq x\} = 1 - \frac{x}{1+x}, \quad x > 0$$

olur. (1) və (2)-dən aydındır ki, n -in böyük qiymətlərində $R_n^+(a, 1)$ və $R_n^-(a, 1)$ statistikalarının Q – faizli kritik qiymətlərini ($0\% < Q < 50\%$) hesablamaq üçün

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}} \Phi^{-1}(1-0,005Q) \text{ və } \sqrt{\frac{1-a}{na}} L^{-1}(1-0,01Q)$$

təqribi qiymətlərdən istifadə etmək olar, burada $\Phi^{-1}(x)$ və $L^{-1}(x)$ – uyğun olaraq, $\Phi(x)$ və $L(x)$ -in ters funksiyalarıdır, bu zaman həm də nəzərə alınır ki, $0\% < Q < 10\%$ olarsa, onda $\Phi^{-1}(1-0,005Q) \approx L^{-1}(1-0,02Q)$ olur.

Bundan başqa, əgər $x > 2,99$ olarsa, onda Renyi paylanma funksiyası $L(x)$ -in qiymətlərini hesablamaq üçün

$$L(x) \approx 4\Phi(x) - 3$$

təqribi bərabərliyindən istifadə olunur və bu halda xəta $5 \cdot 10^{-7}$ -dən artıq olmur.

Baxılan R. k.-lərindən başqa

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} \frac{1}{1-F(x)}, & \text{əgər } F(x) \leq a \\ 0, & \text{əgər } F(x) > a \end{cases}$$

münasibətilə verilən çəki funksiyasına müvafiq analogi kriterilər də mövcuddur, burada a , $- [0, 1]$ parçasından ixtiyari qeyd olunmuş ədəddir.

Əd.: [1] Renyi A., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1953, v. 4, p. 191–231; [2] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

RENYİ PAYLANMA FUNKSIYASI « Реньи функция распределения; Renyi distribution function » – bax, *Renyi kriterisi*.

RENYİ STATİSTİKASI « Реньи статистика; Renyi statistic » – bax, *Renyi kriterisi*.

REPREZENTATİV XƏTA « репрезентативная ошибка; representative error » – ümumi çoxluğun elementlərindən ibarət hər hansı bir seçimə əsaslanan hər bir nəticənin hesablanmasında buraxılan xəta dır. R. x. seçimlər üzrə tədqiqatın məlumat göstəriciləri ilə bütün ümumi çoxluğun uyğun göstəriciləri arasındakı fərqi kəmiyyətcə ifadə edir.

Böyük ədədlər qanununa əsaslanaraq, seçimin həcmi artırmaqla, mümkün ola bilən R. x.-nin sərhədlərini tənzimləmək və əksinə, R. x.-nin mümkün ola bilən verilmiş sərhədinə əsasən seçimin zəruri olan həcmi (elementlərinin sayını) təyin etmək olur.

Seçimlər əsasında alınan nəticələrin tətbiqində R. x. mühüm əhəmiyyətə malikdir. Orta qiyməti hesabladıqda, R. x. seçimi orta ilə ümumi (çoxluğun elementlərinin) ortanın (ədədi orta) arasındakı fərq kimi təyin olunur.

Ü m u m i o r t a araşdırılan kəmiyyətin ümumi çoxluqda əks olunmuş bütün qiymətlərinin orta qiymətidir: yeni

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}, \quad \left(\sum n_i = N \right)$$

$\bar{X}$ – seçimi qiymətlər arasında təkrarlanan olduğu halda çəkili ortadır, burada n_i , $- x_i$ seçimi qiymətinin müşahidə olduğu halların sayıdır.

Təkrarlanan seçimi qiymətlər olmadığı halda ədədi orta düsturu:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

tətbiq olunur.

Seçimi çoxluqdakı seçimi qiymətlər əsasında hesablanan orta qiymət:

$$\tilde{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad n = \sum n_i$$

s e ç i m i o r t a adlanır, n – ümumi çoxluğun seçimi elementlərindən ibarət seçim çoxluğunun həcmidir.

R. x. $\Delta = \tilde{x} - \bar{X}$ düsturu ilə hesablanır.

REPREZENTATİV SEÇİM « репрезентативная выборка; representative sample » – ümumi çoxluğun əsas xüsusiyyətlərini özündə təmsil edən $F(x)$ paylanması ilə verilən ümumi çoxluqdan seçimdir. Buna görə ümumi çoxluğun hər bir elementinin seçimə daxil olunması hallarının eyniimkanlı olması zəruri şərtidir. Bu halda seçimi paylanma funksiyası $\hat{F}(x)$ seçimin həcmi böyük olduğu hallarda ümumi çoxluğun paylanma funksiyası $F(x)$ haqqında kifayət qədər yaxşı təsvir yaradır.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

RESTRİKTİV STATİSTİK QIYMƏT « рестриктивная оценка; restrictive / constrained estimator » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu məhdudiyyətli*.

REVUZ ÖLÇÜSÜ « Ревуза мера; Revuz measure » – bax, *Markov proses; additiv funksional*.

REY PROSESİ « Рэя процесс; Ray process » – ikinci növ kəsilməyə malik olmayan, sağdan kəsilməz, qiymətlərini metrik fəzadan alan, rezolventi *Rey rezolventi* olan *Markov prosesidir*. R. p. ciddi Markov prosesidir və tədrici (rus. умеренное) Markov xassəsini ödəyir. R. p.-nin qurulması üsullarından biri *Rey – Nait kompaktifikasiyasıdır* (bax, *Markov proses; fəza fəzasının kompaktifikasiyası*).

Əd.: [1] R a y D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–72; [2] G e t o r R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440; [3] E n g e l h e r t H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 235–66.

REY REZOLVENTİ « Рэя резольвента; Ray resolvent » – rezolvent eyniliyini ödəyən ele $r_\lambda(x, \Gamma)$, $\lambda > 0$ nüvələr ailesidir ki, r_λ nüvələrinə uyğun R_λ operatorları kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirir. E – metrik fəza, $r_\lambda(x, \Gamma)$

– hər bir $\lambda > 0$ addımında nüvə, yeni x üzrə ölçülən funksiya və Γ üzrə ölçü olsun. Əgər $\lambda r_\lambda(x, E) \leq 1$ və

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu, \quad \lambda, \mu > 0$$

rezolvent eyniliyi ödənilsə, r_λ nüvələri ailəsi rezolvent adlanır, burada R_λ operatoru

$$R_\lambda f(x) = \int_E r_\lambda(x, dy) f(y)$$

düsturu ilə təyin olunur.

E – metrik kompakt olsun. D. Reyin [1]-dəki işinə uyğun olaraq, R. r. $r_\lambda(x, \Gamma)$ hər hansı bir cins Markov prosesinin rezolventidir (bax. *Markov prosesi*; *rezolvent*), yeni $r_\lambda(x, \Gamma)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$r_\lambda(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, \Gamma) dt,$$

burada $p(t, x, \Gamma)$ – keçid funksiyasıdır (bu şəkildə ifadə heç də trivial deyildir). Bundan başqa, uyğun prosesi ikinci növ kəsilməsi olmayan sağdan kəsilməz, ciddi Markov xassəsini və bəsit Markov xassəsini ödəyən proses hesab etmək olar.

Əd.: [1] Ray D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–75; [2] Getto R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

REY – NAYT KOMPAKTİFİKASIYASI «Рэя – Найта компактификация; Ray – Knight compactification» – bax. *Markov prosesi*; *faza fəzasının kompaktifikasiyası*.

REZOLVENT «резольвента; resolvent» – bax. *Rey rezolventi*.

REZOLVENT(i) ASILI OLMAYAN ARTIMLARLI TƏSADÜFİ PROSESİN «резольвента случайного процесса с независимыми приращениями; resolvent of a process with independent increments» – bax. *Təsadüfi proses asılı olmayan artımlarla; rezolvent*.

REZOLVENT EYNİLİYİ «резольвентное тождество; resolvent identity» – bax. *Rey rezolventi*.

REZOLVENT TƏNLİYİ «резольвентное уравнение; resolvent equation» – bax. *Markov semi-grupu*.

RƏQƏMSAL MODULYASIYA «цифровая модуляция; digital modulation» – bax. *Modulyasiya və demodulyasiya*.

RIC STATİSTİK QIYMƏT «ридж – оценка; ridge estimator» – bax. *Yalvari rəqressiya*.

RİÇARDSON ÜÇDƏ DÖRD QANUNU «Ричардсона закон четырех третей; four thirds Richardson law» turbulentiyyət nəzəriyyəsinə – nisbi turbulentiyyət diffuziya (yeni maye ilə qarışmış iki hissəciyin bir-birindən qarşılıqlı uzaqlaşma prosesinin və ya çoxsaylı hissəciklərin qarışıq buludunun səpələnməsinin) sürətinin hadisənin miqyasından (yeni baxılan iki hissəcik arasındakı l məsafəsindən və ya diffuziyaədən buludun tipik l ölçüsündən) asılılığını təsvir edən münasibətdir. Güclənən turbulentiyyə müxtəlif miqyaslı kükrəntilər (qasırga, burulğanlar) olduğundan,

nisbi diffuziya prosesi l artdıqca sürətlənir, belə ki, l -in kiçik qiymətlərində kükrəntilər bütün hissəcikləri bir tam şəkildə köçürərək, artıq l -in böyük qiymətlərində onların qarşılıqlı vəziyyətlərini dəyişməyə başlayırlar.

L. Riçardson [1]-də nisbi diffuziya sürətini

$$K = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} [Ml^2(t)]$$

düsturu ilə təyin olunan diffuziya əmsalı K ilə xarakterizə etməyi təklif etmişdir, burada $l(t)$ – hissəciklərin diffuziyaədən qrupunun t anında uzunluğu miqyasıdır; bundan sonra, o, atmosferdə qarışıqların səpələnməsi haqqında geniş empirik məlumat üzərində işləyərək, R. ü. d. q.-nu almışdır; bu qanuna görə

$$K(l_*) = \alpha l_*^{4/3},$$

burada $l_* = [Ml^2]^{1/2}$, α – ölçü əmsalıdır. A. M. Obuxov [2]-də göstərmişdir ki, empirik Riçardson qanunu, onun və A. N. Kolmogorovun inkişaf etdirdikləri lokal izotrop turbulentiyyət nəzəriyyəsinə əsaslanır, bu nəzəriyyəyə görə l_* -nin inersion miqyaslar intervalından olan qiymətləri üçün

$$K(l_*) = a \varepsilon^{1/3} l_*^{4/3}$$

münasibəti ödənilməlidir, burada ε – turbulentiyyət enerjisinin dissipasiyası, a – ölçüsüz universal sabitdir (indiki məlumatlara görə 0,1-ə yaxın sabitdir).

Əd.: [1] Richardson L. F., «Proc. Roy. Soc. London A», 1926, v. 110, № 756, p. 709–37; [2] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.», 1941, № 4–5, с. 453–66; [3] Монон А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, § 24.3, М., 1967.

RİMAN İNFORMASİON METRİKASI «риманова информационная метрика; Riemann information metric» – ehtimal paylanmaları çoxluqlarında statistik həllər qaydaları kateqoriyasına nəzərən invariant olan, vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə Riman metriki. Elementar nəticələrin eyni bir ölçülən fəzası $(\Omega, \mathfrak{A})$ -da iki ehtimal paylanması üçün R. i. m.

$$s(P, Q) = 2 \arccos \int_{\Omega} \sqrt{P(d\omega) Q(d\omega)} \quad (1)$$

Bhattacharya–Rao sferik məsafəsi ilə verilir. R. i. m. lokal olaraq informasiya miqdarı (Fişer informasiya miqdarı) ilə təyin olunur; hamar ailə üçün

$$\{P_t, t \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\} \subset \text{cap} \{\Omega, \mathfrak{A}\} \quad P_\theta \text{ «nöqtəsində»}$$

$$ds^2 = \sum_{i,j} dt^i dt^j I_{ij}(\theta), \quad (2)$$

burada $(I_{ij}(\theta))$ – Fişer informasiya matrisidir.

Tam variasiya metriki da statistik həllər qaydaları kateqoriyasına nəzərən invariant sinfə aiddir və bu sinfdə bu metrika vuruq dəqiqliyinə qədər minorantdır (bax, [5]).

(2) fundamental xassəsinə baxmayaraq, (1) metriki statistik həllər qaydaları kateqoriyalarına nəzərən invariant digər metriklər kimi nəzəriyyədə mühüm rol oynamır. Riyazi statistikada «oxşamamazlıq» xarakteristikası, adətən, *nisbi entropiya* hesab olunur, bu da bir çox cəhətdən, Pifaqor teoremi də

daxil olmaqla, Evklid məsafəsinin kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqudur.

Əd.: [1] Bhattacharyya A., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1943, v. 35, p. 99–109; [2] Rao C. R., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1945, v. 37, p. 81–91; [3] Козлов В. П., «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 4, с. 779–82; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Ченцов Н. Н., Дополнение I, в кн.: Девро́й Л., Дьёрфи Л., Непараметрическое оценивание плотности, пер. с англ., М., 1988; [6] Amari S., Differential-geometrical methods in statistics, B. – [a. o.], 1985.

RİSK «**риск; risk**» – statistik eksperimentin qoyuluşu və qərarın qəbulu ilə bağlı orta itkiləri ifadə edən, *statistik prosedurun* keyfiyyətinin ədədi xarakteristikasıdır. *Risk funksiyası*, *aprior risk*, *Bayes riski*, *minimaks risk* (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*) belə ədədi xarakteristikalardır. Bu xarakteristikalar və orta itki kəmiyyətinin digər bir sıra ədədi xarakteristikalarının minimallaşdırılma şərtindən optimal statistik prosedurlar adlanan qaydalar təyin olunur. Bəzən, baxılan keyfiyyət xarakteristikasında statistik eksperimentin aparılması üçün sərf olunan xərdər nəzərə alındıqda, R. termini əvəzinə «*am risk*» termini istifadə olunur; bu halda R. dedikdə, yalnız *həllədiçi funksiyanın* keyfiyyətinin ədədi xarakteristikası anlaşılır (*həllədiçi funksiyanın riski*).

RISK minimaks «**риск минимаксный; minimax risk**» – bax, *Minimaks risk*.

RISK(i) strategiyanın «**риск стратегии; risk of a strategy**» – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*.

RISK FUNKSİYASI «**риска функция; risk function**» – δ həllədiçi funksiyasının keyfiyyət xarakteristikasıdır və δ -nın tətbiqi nəticəsində statistik orta itkisini kəmiyyətə ifadə edir. $L(\theta, d)$ – itki funksiyası, $\delta = \delta(x)$ hər hansı həllədiçi funksiya olsun. Onda X təsadüfi elementinin P_θ paylanmasının $\theta \in \Theta$ parametrinin funksiyası kimi baxılan $R(\theta, \delta) = M_\theta L(\theta, \delta(X))$ kəmiyyətinə *risk funksiyası* deyilir. Bax, *Statistik oyun, Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

RİSS AYRILIŞI «**Рисса разложение; Riesz decomposition**» $X = (X_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ supermartinqalının $X_n = m_n + \pi_n$ şəklində ayrılışıdır, burada $M = (m_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ – martinqaldır, $\Pi = (\pi_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ – potensialdır, yəni ələ mənfəi olmayan supermartinqaldır ki, $M\pi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. R. a.-nin doğruluğu hər hansı $Y = (Y_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ supermartinqalının majorantlanması xassəsinə (yəni $X_n \geq Y_n$, $n \geq 1$ qiymətlərində sanki yəqin ödənilir) malik X supermartinqalları üçün isbat olunur. Supermartinqalın R. a. differensial tənliklər nəzəriyyəsində superharmonik funksiyanın harmonik funksiya və hər hansı müsbət modal Qrin potensialının cəmi şəklində ifadə olunması haqqında Riss teoreminin analoqudur.

Bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün. Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Theorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. И., Статистика случайных процессов, М., 1974.

RIYAZİ GÖZLƏMƏ «**математическое ожидание; expectation / mean value / expected value**» orta qiymət, təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözleməsi – təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanmasının

ədədi xarakteristikasıdır. $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyətinin R. g. ümumi halda ilkin $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında P ehtimal ölçüsünə görə Lebeq inteqralı kimi:

$$M\xi(\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) \quad (*)$$

təyin olunur [$M\xi(\omega)$ bəzən $E\xi(\omega)$ kimi işarə olunur]. R. g. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması P_ξ üzrə x -in Lebeq inteqralı kimi, yəni

$$M\xi(\omega) = \int_{\mathcal{X}} x P_\xi(dx)$$

inteqralı kimi hesablanı bilər, burada $\mathcal{X}$ – ξ -nin bütün mümkün qiymətləri çoxluğudur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin funksiyalarının R. g. P_ξ paylanması vasitəsilə ifadə olunur: məs.,

ξ aldığı qiymətlər çoxluğu $\mathbb{R}^1$ olan təsadüfi kəmiyyət, $f(x)$ – x -in birqiymətli Borel funksiyası olarsa, onda

$$Mf(\xi) = \int_{\Omega} f(\xi(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x) P_\xi(dx)$$

münasibəti doğrudur. Əgər $F(x)$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdırsa, onda R. g. Lebeq – Stilyes (və ya Riman – Stilyes) inteqralı ilə ifadə olunur:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

bu halda ξ -nin (*) mənada inteqrallananlığı

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

inteqralının sonluluğu ilə eynigüclüdür. Xüsusi hallarda, əgər $\xi = x_k$, $k = 1, 2, \dots$ mümkün qiymətlərini uyğun $p_k = P\{\omega: \xi(\omega) = x_k\}$ ehtimalları ilə alan diskret paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda ξ -nin riyazi gözleməsi

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

düsturu ilə ifadə olunur, əgər ξ paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

düsturu bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözleməsini ifadə edir; bu halda R. g.-nin varlığı uyğun sıra və ya inteqralın mütləq yığılması ilə eynigüclüdür.

R. g.-nin əsas xassələri aşağıdakılardır:

a) əgər $\xi_1(\omega) \leq \xi_2(\omega)$, $\omega \in \Omega$ olarsa, $M\xi_1 \leq M\xi_2$;

b) $MC = C$ bərabərliyi ixtiyari həqiqi C üçün doğrudur;

c) ixtiyari həqiqi α və β üçün $M(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha M\xi_1 + \beta M\xi_2$ bərabərliyi doğrudur;

ç) əgər $\sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n|$ sırası yığılarsa, $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n$

doğrudur;

d) qəbənq $g(x)$ funksiyası üçün $g(M\xi) \leq M g(\xi)$ bərabərsizliyi doğrudur;

e) ixtiyari məhdud təsadüfi kəmiyyətin sonlu riyazi gözləməsi vardır.

ə) $\xi_1, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$M\left(\prod_{k=1}^n \xi_k\right) = \prod_{k=1}^n M\xi_k$ bərabərliyi doğrudur.

R. g.-si sonsuzluq olan təsadüfi kəmiyyət anlayışını təbii surətdə təyin etmək olar. Tipik misal bəzi təsadüfi dolaşmalarda (məs., bax, *Bernulli dolaşması*) qayıdış müddətləridir.

R. g.-nin köməyiylə paylanmanın bir çox ədədi və funksional xarakteristikaları (məs., təsadüfi kəmiyyətin uyğun funksiyalarının R. g. kimi) təyin olunur, məs., *doğuran funksiya*, *xarakteristik funksiya*, ixtiyari tərtib *momentlər*, xüsusi halda *dispersiya*.

R. g. təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin yerləşmə xarakteristikasıdır (onun paylanmasının orta qiymətidir). R. g. bu anlamda paylanmanın hər hansı «tipik» parametrlərini ifadə edir və onun rolu statik moment, mexanikada kütlənin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarına analogidir. Paylanmanın yerləşmə xarakteristikalarından *median* və *modadan* (paylanma bu xarakteristikalarla ümumi cəhətdən təsvir olunur) R. g. özünün ele qiyməti ilə fərqlənir ki, bu qiymət və bu qiymətə uyğun səpələnmə xarakteristikası – *dispersiya* ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində böyük əhəmiyyətə malikdir. R. g.-nin mahiyyəti, xüsusilə də, böyük ədədlər qanunu (bax, həm də *Çebişev bərabərsizliyi*) və böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu ilə aydın olur. Xüsusi halda, riyazi gözləmələri sonlu $a = M\xi_k$ olan, eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığı üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P\left\{\left|\left(\xi_1 + \dots + \xi_n\right)/n - a\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur və hətta

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow a$$

münasibəti də sanki yəqin ödənilir.

R. g. anlayışı təsadüfi kəmiyyətin gözlənilən qiyməti kimi qumar oyunun nəzəriyyəsi ilə bağlı 18-ci əsrdə ilk dəfə qeyd olunmuşdu. «R. g.» termini ilk əvvəl, oyunçunun gözlənilən uduşu – mümkün olan $x_1, \dots, x_n$ uduşları və uyğun $p_1, \dots, p_n$ ehtimalları

üçün $\sum_{k=1}^n x_k p_k$ cəminə bərabər uduş qiyməti kimi daxil

olunmuşdur. R. g. anlayışının müasir anlamda ümumiləşməsi və istifadəsində P. L. Çebişevin xüsusi xidməti olmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М.,

1984; [3] Лоев М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

RIYAZİ GÖZLƏMƏ(si) empirik paylanmanın «математическое ожидание эмпирического распределения; expectation of empirical distribution» – bax. *Seçimi orta*.

RIYAZİ GÖZLƏMƏ(si) təsadüfi çoxluğun «математическое ожидание случайного множества; expectation of a random set», A təsadüfi çoxluğunun riyazi gözləməsi –

$$MA = \{M\alpha : \alpha \in \text{Sel}(A)\}$$

çoxluğudur, burada A – vektor fəzasının sanki yəqin kompaktı və boş olmayan altçoxluğudur, $\text{Sel}(A)$, – A -nin selektorlarının (yeni ele α təsadüfi kəmiyyətlərinin ki, $P\{\alpha \in A\} = 1$ olsun) ölçülən ailesidir (bu aile zərurilikdən boş olmayandır).

ρ metriklə vektor metrik fəzasında təsadüfi çoxluğun R. g., yalnız və yalnız, o mənada kompaktdır ki, $M \sup_{x \in A} \rho(x, 0) < +\infty$

şerti ödənilmiş olsun. Əgər A sanki yəqin qəbənq çoxluq olarsa, onda MA qəbənqdır; əgər A -nin verildiyi ehtimal fəzası ele olarsa ki, P -nin atomları olmasın (yeni ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\{\omega\}$ hadisəsinin ehtimalı sıfır bərabər olsun), onda MA , – A -nin qəbənq olması haqqında fərziyyəsi – qəbənqdır.

Təsadüfi çoxluğun R. g. təsadüfi çoxluğun paylanmasının orta qiyməti ilə yanaşı onun paylanmasının ən mühüm xarakteristikalarındandır və o, *Stilyes – Minkovski inteqralı* və *pseudointeqral* vasitəsilə ifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Аркин В. И., Евстигнеев И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979.

RIYAZİ GÖZLƏMƏ(si) təsadüfi elementin «математическое ожидание случайного элемента; expectation of a random element»,

təsadüfi elementin orta qiyməti – $\int_{\Omega} X dP$

inteqralıdır və bu inteqral, əgər varsa, bu və ya digər şəkildə təyin olunur [Burada təsadüfi element $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ehtimal fəzasının xətti topoloji T fəzasına ölçülən X inikası anlaşılır].

Məs., əgər E Banax fəzasıdırsa, onda $\int_{\Omega} X dP$, adətən, *Pettis*

inteqralı və ya *Boxner inteqralı* kimi anlaşılır. Təsadüfi elementin R. g.-nin mənası və qiyməti təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin klassik anlayışı anlamını daşıyır. R. g. təsadüfi kəmiyyətin «tipik» qiyməti olduğundan təsadüfi elementin qiymətlərinin yerləşmə xarakteristikasıdır. O, ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində təsadüfi elementlər üçün normalaşma məqsədilə geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Araujo A., Gine E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980.

RIYAZİ STATİSTİKA «математическая статистика; mathematical statistics» – statistik məlumatları (verilənləri) riyazi metodlarla toplamağa, sistemləşdirməyə, üzərində yenidən işləməyə və interpretasiya etməyə, bunlardan həm elmi, həm də praktiki nəticələr çıxarmağa həsr olunmuş riyaziyyat bölməsidir. Riyazi statistikanın qayda və prosedurları hər bir

məsələdə əldə olunan statistik məlumatlar əsasında çıxarılan nəticələrin dəqiqliyi və etibarlılığını qiymətləndirməyə imkanlar verən *ehtimal nəzəriyyəsinə* əsaslanır.

Statistik verilənlər kimi, ənənəvi olaraq, ilk əvvəl ölkə miqyasında bu və ya digər göstəricilərinə və ya əlamətlərinə görə (məs., insanların cinsi və yaşlarına görə, gəlirin tərkibi və miqdarına görə, sahə və dəyərinə görə, istehsal həcmi və işçi qüvvənin sayına görə) hər hansı içtimai – iqtisadi və demoqrafik obyektlərin (məs., vətəndaşların, ailələrin, torpaq paylarının, fabriklərin) paylanması haqqında məlumatlar, bundan başqa əhəlinin siyahıya alınması nəticələrinin, torpaq payı və digər xəzinə uçotunun qeydiyyatı və s. haqqında alınan nəticələrin sistemləşdirilməsi ilə alınan belə paylanmanın dinamika haqqında məlumatlar anlaşıqlı (bax, *Demografik statistika*). «Dövlətin vəziyyətinin ədədlərlə təsviri», bu şəkildə, 18-ci əsrdə ilk dəfə *Statistik* sözünün istifadə edilməsinə yaxın olmuşdur (almanca dövlət – bilik, orta əsrlərə aid latın dilində status – dövlət sözündən). 19-cu əsrdə bu termin ixtiyari böyük kollektivlərin hər hansı əlamətlər üzrə laylaşması haqqında verilənlərə də yayılmış oldu (ulduz statistikasi, yol – nəqliyyat hadisələri statistikasi və s.). Bu halda kollektivin yaranan statistik təsviri ona xas olan mühüm xüsusiyyətləri təmin öz hissələri vasitəsilə səciyyələnməsinə və kollektiv haqqında ətraflı mühüm informasiyanın aşkar olunmasına geniş imkanlar yaradır; bu isə ümumi cəm şəklində və ya orta xarakteristikalarla təsvirlə müqayisədə yaxşı nəticələr çıxarmaq üçün daha məqsədəuyğun sayılır. Hal-hazırda seçimi tədqiqatların nəticələri, ixtiyari ümumi çoxluqlardan seçimlər, qeyri – dəqiq ölçmə seriyalarının nəticələri, ümumiyyətlə, empirik paylanma ilə qarşılıqlı birqiyəmli təsvir olunan ixtiyari verilənlər sistemindən alınan ədədi informasiya da statistik verilənlər adlanır.

R. s.-nin müasir riyazi modellərində statistik verilənlər sınaqların və ya ölçmələrin müşahidələr nəticələri olmasından asılı olmayaraq, uyğun kütləvi təsadüfi hadisə və ya proses məsələsinin – $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzasının uyğun hadisə və ya proseslərinin realizasiyaları kimi interpretasiya olunur, məs., nəticələrinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ -nin tam mənada məlum olmadığı halda, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ olduqda skalyar təsadüfi kəmiyyətin, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ olduqda isə çoxölçülülük (vektor) təsadüfi kəmiyyətin realizasiyaları kimi interpretasiya olunur. R. s.-da statistik verilənlərin interpretasiya məsələlərinə bu anlamda ehtimal nəzəriyyəsinin tərs məsələləri kimi baxılır. Məs., ehtimal nəzəriyyəsinin ilk məsələlərindən birində – metal pulu bir dəfə atma stoxastik eksperimentində pulun «gerb» üzü ilə yuxarı düşməsi ehtimalı p məlum olduqda, pulun n dəfə atılmasına uyğun stoxastik eksperimentdə (n sayda asılı olmayan sınağa uyğun) «gerb» üzünün m dəfə düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur. R. s.-da isə uyğun məsələdə pulun n dəfə atılması eksperimentində «gerb» üzünün m dəfə düşməsi məlum olduqda, nəmən p ehtimalını qiymətləndirmək tələb olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, R. s. üçün yuxarıdakı tipdə təsvir olunan səciyyəvi ehtimal modeli ehtimali təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan kütləvi hadisə və ya proseslərin statistik öyrənilməsində də yarana bilər, bu şərtlə ki, bunların araşdırılma qaydaları ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsun (bax, *Seçimi metod, Xətlər nəzəriyyəsi*).

Statistik verilənlərin araşdırılmasında zəruri mərhələ bunlardakı statistik qanunauyğunluqların, həmçinin anomalyaların aşkar olunması məqsədilə onların əvvəlcədən analiz olunmasıdır. Bir sıra təbii məsələlərdə verilənlərin konkret toplusunun öyrənilməsi müstəqil mənə daşıya bilər. Bu halda məsələ verilənlər çoxluğunun xassələri haqqında yığcam şəkildə və mümkün olduqca aşkar təsəvvür almağa imkan verən, verilənlərin strukturunu tədqiq etməyə imkan yaranan (xüsusilə də, çoxölçülülük verilənlərin ki, hər bir obyekt müşahidəolunan əlamətlərin çoxsaylılığı

ilə səciyyəvi olduqda) təsvirdən (verilənlərin təsvirindən) ibarət olur.

Verilənlərin təsvirində əsas qaydalar verilənləri ifadə etmək üçün vasitələr sayılan histqramın, səpələnmə diaqramının və digər qrafik vasitələrin qurulması, seçimi orta, median, dispersiya, asimmetriya və s. kimi xarakteristikaların hesablanmasıdan ibarətdir. Verilənlərin analizi asılılığın aşkar olunmasına, təsnifatına xidmət edir. Verilənlərin üzərində yenidən işlənilmənin daha gec mərhələlərində, bəzən, müəyyən xüsusiyyətləri ilə seçilən müşahidələrin analizi aparılır, bu isə bunları nəzərə almamaq məqsədini güdür. Çoxölçülülük massiv verilənlərin işlənilməsində hesablamə texnikası mühüm rol oynayır.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi R. s.-nin metodları statistik verilənlərin məhz ehtimal xarakteri haqqında fərziyyələrə əsaslanır. Statistik modelin qurulması $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ seçimi fəzasının təsviri üçün verilənlərin təsviri mərhələsində onların araşdırılması və öyrənilən hadisə və ya prosesin təbiəti haqqında nəzəri biliklərlə birlikdə onların analiz olunması mərhələsində statistik verilənlərin yaranma mexanizmi haqqında məlumatlar və analogi verilənlər üzərində əvvəlki sınaqlarda işlənilmə qaydaları da nəzərə alınmaqla araşdırmalardan istifadə olunur. Statistik modelin qurulması $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ seçimi fəzasının təsvirindən, yeni müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün mümkün nəticələri $\mathcal{X}$ -in təsvirindən, bu nəticələrin verilən statistik məsələdə nəzəri nöqtəyi – nəzərdən mümkün olan ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}$ -lərin $\mathcal{P}$ ailəsinin seçilməsindən, bu ailə haqqında digər lazımlı aprior informasiyanın təyin olunmasından ibarətdir. Əksər hallarda seçilmiş $\mathcal{P}$ ailəsi, təbii olaraq, parametrlə, diskret və ya kəsilməz hər hansı $\theta \in \Theta$ parametri ilə götürülür; bu halda

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}.$$

R. s. məsələlərinin ən mühüm və geniş yayılmış sinifləri sonlu n həcmli bircins asılı olmayan $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ seçimlərinin üzərində işlənilmələrlə bağlıdır. Belə seçim hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin eyni şərtlər ödənilməklə (yeni dəyişilməyən şəraitdə) asılı olmayan təkrarlanan sınaqlarda müşahidəsi ilə bağlı olub, bu haqda təsəvvürü reallaşdırır; bu halda X təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı nəzəri ehtimal paylanması $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ ilə verildiyi, $\mathbf{P}$ -nin isə $\mathbf{X}$ realizasiyalarının fəzası $\mathcal{X}$ -in uyğun $\mathcal{A}$ hadisələr cəbrində təyin olunduğu fərz olunur. Belə sxemdə statistik model təbii olaraq, $(\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^n)$ seçimi fəzası və $\mathcal{P}^n = \{\mathbf{P}^n : \mathbf{P} \in \mathcal{P}\}$ ailəsi ilə təsvir olunur, məsələn, $\mathcal{P}^n = \{\mathbf{P}_\theta^n, \theta \in \Theta\}$, $\mathbf{X}$ seçiminin özü isə onun uyğun empirik paylanması ilə təsvir olunur. Bununla yanaşı müasir R. s.-da olduqca tez-tez, hər hansı təsadüfi prosesin: Markov, stasionar (statistik analizdə zaman sıralarının) və s. proseslərin realizasiyaları olan stoxastik asılı müşahidələrin ardıcılıqlarına təsadüf olunur. $\mathbf{X}$ -in verilənləri kəsilməz zamanlı təsadüfi prosesin realizasiyası da ola bilər; məs., yararlı S signalı və ε küynün cəmi $S(t) + \varepsilon(t)$ kimi.

Aşağıda statistik verilənlərə aid sadə misallar və mümkün statistik modellər verilir.

M i s a l 1. Geodeziya çəkilişlərində azimutun eyni bir istiqamətdə təkrar ölçülmələrində: $62^\circ 01' 11'', 46; 11'', 01; 12'', 29; 13'', 47; 14'', 07; 10'', 60; 10'', 76; 14'', 13; 12'', 99; 10'', 46; 11'', 25; 12'', 02$ nəticələri alınmışdır (dərəcə və dəqiqələrin sayı ümumdür).

Statistik model: verilənlər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ($n=12$)

$$X_i = a + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

şəklində realizasiyaları kimi anlaşılır, burada a – bucağın əsl qiyməti, $e_1, \dots, e_n$ – təsadüfi ölçmə xətalardır və e_i -lər orta qiymətləri $\mu = 0$, dispersiyaları σ^2 olan, eyni normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Deməli, müşahidələrin bütün toplusu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyasıdır; bu təsadüfi vektor – orta qiymətləri vektoru $a\mathbf{1}$, kovariasion matrisi $\sigma^2\mathbf{I}$ [$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{I}$ – vahidi matrisidir] olan $\mathbb{R}^n$ -də çoxölçümlü normal paylanmaya malikdir [yeni $N(a\mathbf{1}, \sigma^2\mathbf{I})$ qanunu].

M i s a l 2. Təcrübədə alınmışdır ki, suyun 100 hissələrində uyğun temperaturlarda azot turşusunun natrium duzu aşağıdakı şərti hissələr miqdarında həll olunur:

0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	50°	68°
66.7	71.0	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.6	125.1

Statistik model: nəzəri şərait əsasında maddənin həllolunma xüsusiyyəti suyun temperaturundan xətti asılıdır, verilənlər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin

$$X_i = a + bt_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 9 \quad (2)$$

şəklində realizasiyaları kimi anlaşılır, burada a və b – xətti asılılıq əmsalları, t_i – suyun temperaturunun qiymətləri, e_i – misal 1-də olduğu kimi eyni xassələri ölçmə xətalardır. Verilənlər çoxluğu paylanma qanunu $N(a\mathbf{1} + b\mathbf{t}, \sigma^2\mathbf{I})$ olan $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyasıdır, burada $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$.

M i s a l 3. Podşipniklərin işləmə müddətlərini (fasiləsiz) təyin etmək üçün aparılan sınaqlarda imtinaya qədər işləmə müddətləri üçün aşağıdakı qiymətlər alınmışdır (saatlarla):

375	377	438	472	480	580	638	690	728	786
1016	1078	1215	1276	1399	1647	1726	2734	3096	3767

Statistik model: baxılan eksperimentin verilənlərinin xarakteri ilə, həm də baxılan tip podşipniklər üzərində əvvəllər aparılan eksperimentlərin verilənlərinin xarakteri ilə təsdiq olunan nəzəri mülahizələrə əsasən qəbul etmək olar ki, alınan qiymətlər asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ ($n=20$) təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyalarının məhz artan qaydada yerləşmiş qiymətləridir; bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x|a, b) = \begin{cases} b^{-1} \exp[-(x-a)^2/b], & x > a, \\ 0, & x \leq a \end{cases} \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $a \geq 0$ və $b > 0$ – parametrlərdir, məsələn, a – zamanətli fasiləsiz işləmə müddətidir. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vektorunun $\mathbb{R}^n$ -də paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x_1, \dots, x_n | a, b) = \prod_{i=1}^n p(x_i | a, b) =$$

$$= \begin{cases} b^{-n} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 / b \right\}, & \min \{x_i\} > a, \\ 0, & \min \{x_i\} \leq a, \end{cases} \quad (4)$$

düsturu ilə təyin olunur.

M i s a l 4. N sayda məmulatdan ibarət partiya yoxlanılma məqsədilə təsadüfi qaydada n saydası seçilir və bunların arasında m saydasının qüsurlu olduğu məlum olur.

Statistik model: M – partiya defektli məmulatların sayı olsun. n həcmli bütün C_N^n sayda seçmələrin eyniməkanlı olduğu fərz edildikdə, m ədədi paylanma qanunu

$$P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

düsturu ilə ifadə olunan (hiperhəndəsi paylanma) X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyasıdır.

M i s a l 5. A və B nişanlı podşipniklər üçün sürtünmə anını ölçmə nəticələri aşağıdakı kimidir:

A nişanlı	1.94	1.63	1.60	1.95	1.78	1.64	1.92	1.88	1.67	1.98
B nişanlı	1.53	1.52	1.76	1.57	1.72	1.73	1.77	1.45	1.25	1.65

Statistik model: eksperimentin keçirilməsi şərtlərinin mülahizələrinə görə verilənlərə asılı olmayan $X_1, \dots, X_m$ ($m=10$, A nişanlı) təsadüfi kəmiyyətlərinin, $Y_1, \dots, Y_n$ ($n=10$, B nişanlı) təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları kimi baxmaq olar; X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni qanunla paylandığı və paylanma funksiyasının F olduğu (uyğun olaraq Y_i və G) fərz olunur. İnformasiyanın məlum olmasından asılı olaraq, F və G paylanma funksiyalarının paylanmalarının hər hansı parametrik ailəsindən olduğu, ya da ki, onların yalnız hər hansı ümumi şərtləri, məs., kəsilməzlik şərtini ödədiyi fərz oluna bilər.

Statistik məsələnin qoyuluşu əsasən, statistik qarşısında duran məqsədlərdən asılı olaraq təyin olunur və bunlar da məsələnin həlli metodlarını müəyyənləşdirir (verilənlərin toplanılması mərhələsindən başlayaraq eksperimentin planlaşdırılması da daxil olunmaqla). Məs, misal 1-də azimutun 12 ölçməsi α bucağının əsl qiymətinin daha dəqiq təyin olunması məqsədilə aparılmışdırsa, onda ən yaxşı, yəni effektiv statistik qiymət

$$a = (X_1 + \dots + X_n) / n \quad (6)$$

seçimi ortası olacaqdır.

Bucaqölçənin ölçmə keyfiyyətini yoxlamaq üçün, yeni hesabatlardakı təsadüfi xətalərin kvadratik orta kəmiyyəti σ -nı qiymətləndirmək üçün verilənlər üzərində işlədikdə istifadə olunan prosedurlar fərqli olur; bu, hətta həmin cihazda aparılan ardıcıl ölçmələrin asılı olmamazlığında şübhə olduğu halda da belədir (qeyd etmək lazımdır ki, son suallara etibarlı cavab verilməsi üçün eksperimentlər sayının çox olmasını tələb etmək təbiidir). Müvafiq olaraq, statistik məsələnin formal təsviri, onun həlli üçün müşahidələrin statistik modelindən başqa, Valda görə tələb olunur ki, (bax, [13]), bir də mümkün olan atılacaq addımlar (hərəkətlər) və ya nəticələr δ -ların, $\delta \in \mathfrak{D}$ hər hansı ölçülən fəzası ($\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$) göstərməli, həllərin keyfiyyətini yoxlamaq üçün

üsul təklif olunmalıdır. Yuxarıdakı misalda nəticə α bucağının statistik qiymətidir, yeni mümkün olan nəticələr fazası paylanma parametrinin dəyişmə oblası ilə üst-üstə düşür. Məmulatın keyfiyyətinə statistik nəzarət (kontrol) halında (misal 4) nəzarət zamanı hökmən sıradan çıxan (məs., kibrit, patron və s.) məmulat da ola bildiyi hallarda aşağıdakı üç alternativ addımı atmaq olar: 1) nəzarət olunmuş məmulat partiyasını adi qiymətlə satmaq, 2) qüsurlu məmulatları ikinci növ kimi (əgər bunların faizi çox olarsa) qəbul edərək partiyayı aşağı qiymətə satmaq, 3) zay məhsulun olduğu çox olduğunu nəzərə alaraq partiyayı satmamaq (bax, [12]). Tətbiqi statistikanın müxtəlif məsələlərində hər hansı tibbi dərmanların müqayisəli effektivliyi haqqında, xarici ticarətin dinamika haqqında nəticələr çıxarmaq, bu və ya digər faktorların statistik əlaqələrini, məs., siqaretçəkme və xərçəng xəstəlikləri arasında əlaqələri və onların empirik funksional asılılığını tapmaq tələb olunur.

İxtiyari $\delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ ölçülən funksiyası deterministik həlledici qayda təyin edir, yeni X verilənlərinin üzərində hər hansı işləmə proseduru və $\delta: \mathcal{D} = \delta(X)$ nəticəsini qumağı təyin edir. Ümumi halda, statistik həlledici qayda keçid funksiyası $\Pi(X, \cdot) = \Pi_X(\cdot)$ ilə $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ -də $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ -dan olan Markov keçid ehtimal paylanması ilə verilir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*). Keçid paylanması burada yalnız həllin qaydasını verir. Prosedur isə ondan ibarətdir ki, X -in nəticəsi müşahidə olunduqdan sonra $(\mathcal{D}, \mathcal{B}, \Pi_X)$ təsadüfi hadisə və ya prosesinin imitasiyası yolu ilə, əlavə asılı olmayan $\delta \in \mathcal{D}$ «nəticə»si çıxarılır. Xüsusi halda, əgər Π keçid paylanması cırlaşmış paylanma olarsa, onda bütün X -lər üçün ehtimal $\delta(\cdot)$ vardır ki, $\Pi(X; \delta(X)) = 1$ və o, deterministik olunmuş qaydaya – δ həlledici funksiyasına müvafiq olur. *Ardıcıl analizdə* həlledici qaydalar bir qədər mürəkkəb şəkildə olur, məs., hər növbəti müşahidədən sonra son nəticələrin qurulması və ya məlumatların toplanılmasını davam etdirmək haqqında qərar qəbul olunur; (bax, [3]) belə prosedurlar aparılacaq sınaqlar sayının zəruri olan orta qiymətini olduğuca azaltmağa imkan yaradır.

Bir qayda olaraq, statistik məsələdə dürüst cavab vermək və ya dürüst nəticə çıxarmaq yalnız $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -nin müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesi haqqında tam informasiya olduğu halda mümkündür, lakin məhz həmin bu informasiya yoxdur. Bəzi məlum aprior informasiya və ya müşahidə verilənləri (məlumatlar) dürüst cavab üçün, adətən, kifayət etmir. Əgər statistika məlum, lakin əsl seçim paylanması $\mathbf{P}_\theta \in \mathcal{P}$ qanunu ilə ifadə olunursa, onda Π həlledici qaydası üzrə çıxarılmış nəticələrin paylanmalarının hər hansı nəzəri ehtimal qanunu:

$$\mathbf{P}_\theta \Pi(\cdot) = \mathcal{Q}_\theta^{(\Pi)}(\cdot) = \int \mathbf{P}_\theta(d\mathbf{X}) \Pi(X; \cdot), \quad \theta \in \Theta \quad (7)$$

münasibətlə ifadə olunur.

İtki funksiyası $l(\theta, \delta)$ əsl $\mathbf{P}_\theta$ qanununda δ nəticəsinin əmələ gətirdiyi itkiləri təyin edir. Onda hər bir Π qaydasının keyfiyyətinin aprior xarakteristikası risk funksiyası, yeni itkilərin riyazi gözləməsi:

$$R(\theta, \Pi) = \int l(\theta, \delta) \mathcal{Q}_\theta^{(\Pi)}(d\delta) \quad (8)$$

olacaqdır, yeni itkilərin orta qiyməti $R(\theta, \Pi)$ nə qədər kiçik olsa, Π qaydası o qədər yaxşı sayılır. Lakin müşahidələrin aparıldığı «əsl» qiymət məlum olmadığından, riski «ümumiyyətlə»

minimallaşdırmaq lazım olur, məs., $\mathcal{R}_{\max}(\Pi) = \sup_{\theta} R(\theta, \Pi)$,

$\Pi_\theta = \arg \min_{\Pi} \{\mathcal{R}_{\max}(\Pi)\}$ qaydası – minimaks qayda adlanır (bax, *Minimakslik (qı) statistik proseduru*). Tətbiqi statistikanın kütləvi məsələlərində, eyni bir məsələni hər dəfə özünün nəzəri paylanması $\mathbf{P}_\theta \in \mathcal{P}$ ilə həll etmək tələb olunanda, θ -nın təsadüf olunan naməlum qiymətləri Θ -da hər hansı apriori verilmiş $G(d\theta)$ ehtimal paylanmasının təsadüfi realizasiyaları sayıla bilər. Onda, təbii ki, optimal Π qaydası ortalanmış risk funksiyası $\mathcal{R}_G = \int R(\theta, \Pi) G(d\theta)$ funksiyasını minimallaşdırmaqdır. [bax, *Beyes yanaşması statistik məsələlərə*, *Beyes yanaşması empirik*, burada $G(\cdot)$ əvvəlcədən məlum deyildir].

Risk funksiyasına görə həlledici qaydanın keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi statistik oyunlar nəzəriyyəsinin ideyaları ilə bağlıdır. Hələ P. Laplas [2]-də statistik qiymətlərin alınmasını, statistikin aldığı statistik qiymətlər yaxşı olmadıqda, onun məğlub olduğu təbii qumara oxşatmışdı. Lakin əgər tətbiqi statistikada itki funksiyasının ifadəsi, əksər hallarda, məsələnin şərtlərilə təyin olursa, interpretasiya və qiymətləndirmə problemlərində yanaşmanın riyazi sadəliyi mühüm rol oynaya bilər. Məs., n həcmli X seçimi üzrə $N(a, \sigma^2)$ normal qanununun məlum a parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsində (misal 1) P. Laplas statistik qiymət kimi (a parametrinin)

$$m = \arg \min_x \sum_k |X_k - x|$$

seçimi medianını təklif etmişdir. K. Gauss (bax, [4]) qeyd etmişdir ki, statistik qiymət kimi

$$\alpha = \arg \min_x \sum_k |X_k - x|^2$$

götürülərsə, alınan nəticələr olduğuca sadələşir (bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*) və o, hələ o zaman yaxşı məlum olan (6)

qaydasını almışdır. Bu qayda $|\alpha - a|^2$ itki funksiyasına nəzərən optimaldır. İxtiyari $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_t, t \in T\}$ hamar paylanmalar ailəsindən olan $\mathbf{P}_t$ qanununun statistik qiyməti $\mathbf{P}_t$ -nin müəyyən olunması üçün qoyulan ümumi məsələdə bu funksiyanın təbii, lakin qeyri – simmetrik ümumiləşməsi (bax, [15]) yayınmanın iki misli – $2\mathbf{I}(\mathbf{P}_t; \mathbf{P}_t)$ olacaqdır (bax, *Nisbi entropiya*), burada $\mathbf{I}(\mathbf{P}_t; \mathbf{P}_t)$ – aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$\frac{1}{2} l(t, \tau) = \mathbf{I}(\mathbf{P}_t; \mathbf{P}_\tau) = \int \ln [\mathbf{P}_t(dx) / \mathbf{P}_\tau(dx)] \mathbf{P}_t(dX). \quad (9)$$

Bu kəmiyyət $+\infty$ ola bilse də, ailənin parametri dəyişdikdə dəyişmir.

Ehtimal nəzəriyyəsində olduğu kimi, R. s.-da da seçimin həcmi qeyri – məhdud artındıqda, təsadüfi prosesin realizasiyalarının müşahidə edilmə müddətini çoxaltdıqda və ya küy səddinin məhdudiyyət qoyulmadan azalması və s. yaranan asimptotik qanunauyğunluqlar olduğuca mühüm rol oynayır. Məsələ budadır ki, optimal həlləri R. s. məsələlərinin yalnız olduğuca məhdud (bununla belə çox mühüm) dairəsi üçün aşkar şəkildə qumaq olur: fərz olunarsa ki, verilənlərin aprior paylanması olduğuca spesifik ailələrdəndir (Gauss – Laplas, Puasson paylanmaları və s.

ailelerinden). Asimptotik qanunauyğunluqlar isə daha universal xarakter daşıyır. Doğrudur, təbiiqde seçmənin həcmli hemişə sonlu hesab olunur və asimptotik metodlar isə yalnız optimal həllərə yaxın həlləri verir. Bir çox hallarda belə həlləri qurmaq olur, buna görə $\mathcal{P} = \{P_t, t \in T\}$ aprior ailesi üçün $\text{lik}(t, X) = (dP_t/dP_0)(X)$ -ə doğruxaoxşarlıq funksiyasına X -in eksperimentdən məlum olan qiymətində t -nin funksiyası kimi baxılmalıdır. Burada dP_t/dP_0 - t üzrə hamar Radon - Nikodim törəməsidir və hər hansı $\theta = t_0 \in T$ qeyd olunmuşdur. Məs., maksimal doğruxaoxşarlıq metodu t parametrinin statistik qiyməti τ üçün Π^M qaydasını tövsiyə edir:

$$\Pi^M : X \rightarrow \tau(X) = \arg \max_t \text{lik}(t, X). \quad (10)$$

R. s.-nin məsələlərinin ən mühüm siniflərindən biri - nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsidir və bu halda asılı olmayan sınaqların məlumatlarına əsasən «müşahidəolunan» $P \in \mathcal{P}$ qanununu və ya da ki, ekvivalent, bu $\mathcal{P} = \{P_t, t \in T\}$ qanununun parametri t -ni qiymətləndirmək tələb olunur. Nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin həlli P_t , bəzən, son nəticələrin qurulmasında aralıq mərhələdir, məs., məhsulun keyfiyyətinə statistik nəzarətdə və s. (doğrudur, məsələlərin bəzi siniflərində, məs., engelleyici parametrlili məsələlərdə bu heç də yaxşı olmur və ya ümumiyyətlə, mümkün olmur).

Nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin qoyuluşu və onun həlli metodları bu məsələlərdə təsadüf oluna bilən bütün mümkün nəticələr çoxluğu kimi təsadüf oluna bilən ehtimal paylanmalarının aprior ailesi $\mathcal{P}$ -nin ne dərəcədə geniş olmasından olduqca asılıdır. Əgər $\mathcal{P} = \{P_0, P_1\}$ olarsa, deməli, sadə hipotezlərin yoxlanılması məsələsinə baxılır (bax, [9]). Yoxlama prosesində ya düzgün qərar qəbul edilir, yaxud iki səhvden birinə yol verilir: birinci növ səhvə, yəni $H : P = P_0$ hipotezi doğru olduğu halda o qəbul olunmur, ikinci növ səhvə, yəni H hipotezi doğru olmadığı halda o qəbul olunur, bu halda $K : P = P_1$ alternativ hipotezi doğrudur. Bu səhvlərin nəticələri əksər hallarda müxtəlif olur. Sınaqların sayı verildiyi halda bu səhvlərin ehtimalları eyni zamanda olduqca kiçik ola bilməz. Adətən, birinci növ səhvin ehtimalı $P_0 \Pi\{K\}$ -nin sərhədi verilir və ikinci növ səhvin ehtimalı $P_1 \Pi\{H\}$ minimallaşdırılır. Neyman - Pirson lemmasına əsasən $\text{lik}(X) = (dP_1/dP_0)(X)$ doğruxaoxşarlıq nisbətinin qiymətlərinə görə ən güclü (yəni bu mənada optimal) kriteri qurulur. Yeni əgər $\text{lik}(X)$ statistikasının monoton paylanma funksiyası $F(z) = P_0\{\text{lik}(X) < z\}$ P_0 ölçüsünə görə kəsilməzdirsə, onda nəticələrin kritik oblastı $\mathcal{X}_K$ H hipotezinin qəbul edilməyib, K alternativinin qəbul olduğu halda, $\mathcal{X} = \{X : \text{lik}(X) > k\}$ şəklində olur, bu zaman kritik k qiyməti $F(k) = 1 - \alpha$ tənliyinin həllidir. Əgər $F(z)$ paylanma funksiyasının sıçrayışları varsa, onda k ele tapılır ki,

$$F(k) \leq 1 - \alpha, \quad P_0\{\text{lik}(X) > k\} \leq \alpha$$

münasibətləri ödənilsin. İlkin $X : \text{lik}(X) = k$ qiymətlərində son nəticələr çıxanılır (bax, [9]). Asılı olmayan sınaqlar sxeminde

seçimin həcmi $n \rightarrow \infty$ olduqda ikinci növ səhv ehtimalının loqarifmi üçün

$$\lim_n n^{-1} \ln P_1^n\{\mathcal{X}_H^n\} = I(P_0 : P_1) \quad [\text{bax, (9)}]$$

münasibəti doğrudur.

Əgər $T \subset \mathbb{R}^n$ -də oblast, $\mathcal{P} = \{P_t, t \in T\}$ olarsa, $t \rightarrow P_t$ inikası isə ehtimal paylanmaları çoxluğunda Riman informasiya metrikasında differensiallanan olarsa, onda belə nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi hamar parametrin qiymətləndirilmə məsələsi adlanır. Eyni bir $\tau(X)$ statistikası bəzi $t \in T$ qiymətlərində P_t ehtimalına görə t -yə yaxın, digər $t \in T$ qiymətlərində isə t -dən uzaq ola bilər. $\tau(X)$ -in *meylsiz statistik qiymətləri* üçün müəyyən dərəcədə bu çatışmazlıq yoxdur:

$$M_t \tau(X) = \int \tau(X) P_t(dx) = t, \quad t \in T$$

Meylsiz statistik qiymətlər dəqiq olmaya da bilər. n seçimin həcmi olduqda, *Kramer - Rao bərabərsizliklərindən*

$$M_t \|\tau(X) - t\|^2 \geq c(t)n^{-1}$$

kobud aşağı sərhədini almaq olur.

Əgər

$$\lim_n P_t^n \Pi_n \{\|\tau_n - t\| \geq \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in T$$

münasibəti ödənilərsə, $n = 1, 2, \dots$ həcmli seçimlər üzrə Π_n həlledici qaydalar ardıcılığı τ_n tutarlı statistik qiymətini (fərqi yoxdur, meylli və ya meylsiz) təyin edir. Hamar ailələr üçün Π_n^M maksimal doğruxaoxşarlıq qaydası üzrə alınmış (bax, [10]) statistik qiymət yalnız tutarlı deyil, həm də asimptotik effektiv statistik qiymət olur. $I(t, \tau) = \|\tau - t\|^2$ əvəzinə təbii, lakin parametrizasiyasından asılı olmayan

$$\lim_n n^{-1} \mathcal{R}(\Pi_n^M) = \dim T \quad (11)$$

itki funksiyaların ailesindən istifadə etdikdə, $R(t, \Pi)$ risk funksiyasının funksionalı kimi onun $t \in T$ üzrə yuxarı sərhədi $\mathcal{R}_{\max}(\Pi)$ -ni, həm də sıxlıq funksiyası $g(t)$ hamar olan $G(\cdot)$ paylanmaları halında $\mathcal{R}_G(\Pi)$ -nin orta qiymətini götürmək olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, P_t -nin t -dən differensial asılılığı olan $\mathcal{P} = \{P_t\}$ ailələri üçün statistik qiymət xətasının kvadratik ortası bir qədər zəif mənada n -dən tamamilə başqa şəkildə asılı ola bilər (bax, [20]).

Parametrin qiymətləndirilməsinin (seriya halında deyil) müxtəlif məsələlərinin həllində orta dəqiqlik və ya risk əvəzinə etibarlı sərhəddən istifadəyə üstünlük verilir (bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*). Məs.,

$$P_t^n \Pi_n \{\|\tau_n - t\| \leq Q_n(\varepsilon; t)\} = 1 - \varepsilon$$

olsun, burada $Q_n(\varepsilon; t)$ - τ_n nəticələrinin paylanması $P_t^n \Pi_n$ olduqda $\|\tau_n - t\|$ təsadüfi kəmiyyətinin nəzəri paylanmasının $1 - \varepsilon$ tertib kvantilidir, $\varepsilon = 0,05$ və ya $\varepsilon = 0,01$ və s. $\Theta_t = \{t : \|\tau_n - t\| < Q_n(\varepsilon; t)\}$ τ_n statistik qiymətinin alınmış qiym-

məti üzrə qurulmuş etibarlı oblast olacaqdır (bax, [14]). Qeyd etmək zəruridir ki, seçimin həcmi qeyd olunduğu halda $\max_{t \in \Theta} Q_n(\varepsilon; t) \sim Q_n(\varepsilon; \tau_n)$ münasibətinin dəqiqliyi və $1 - \varepsilon$ etibarlılığı bir-birilə bağlı olur: etibarlı sərhədi daha yaxşı almaq üçün Θ_ε etibarlı oblastını böyük götürmək məqsəduyğundur. Asimptotik (güclü) normal statistik qiymətlər üçün $Q_n(\varepsilon; t) = q(\varepsilon; t)n^{-1/2}$ kvantilinin asimptotikası $\|\tau - t\|^2$ itki funksiyasına nəzərən riskin asimptotikası vasitəsilə, $q(\varepsilon, t)$ -nin t -dən asılılığı isə Teylor sırası ilə ifadə oluna bilər.

Fərz olunur ki, apriori yalnız o məlumdur ki, müşahidə olunan məhdud skalyar X kəmiyyətinin paylanması C^2 funksional fəzasından olan sıxlıq funksiyası $p(x)$ vardır. Funksional $p(\cdot)$ parametri ilə verilmiş uyğun $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_p\}$ ailəsini də hesabi sayda skalyar a_k parametrləri ilə (məs., hər hansı ayrılışın əmsalları ilə) hamar şəkildə koordinatlandırmaq olar, bu şərtlə ki, bu parametrlərin dəyişmə oblastı k artıqca kiçilsin. Bu halda nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi paylanma sıxlığının *qeyri – parametrik* (daha dəqiq, hesabi parametrik) *qiymətləndirilməsi* adlandırılır. (11)-ə əsasən $\mathbf{P}$ qanununun lokalizasiyasının orta xətası seçimin həcmi n artıqca parametrik (sonlu) halda olduğundan daha yavaş azalır. $\pi(x)$ histqramları üçün, n ilə birgə bölgü intervalları sayı m -i $m \sim n^{1/3}$ qanunu ilə artıraraq, ən yaxşı halda

$$\mathbf{M}_p \int \left| \pi(x) - p(x) \right|^2 dx \sim n^{-2/3}$$

statistikasını, tezliklər poliqonu üçün isə $m \sim n^{1/5}$ halında $\sim n^{-4/5}$ almaq olur. Daha hamar sıxlıq funksiyaları üçün daha dəqiq qiymətlər mövcuddur (bax, [15]).

Əgər müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin mümkün ola bilən $\mathbf{P}$ qanunu haqqında heç bir apriori informasiya tamamilə məlum deyilsə, nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsində tutarlı statistik qiymətin olmayacağını hökm etmək olar. Yeni daha dəqiq, $(X_1, \dots, X_n)$ seçimi üzrə $\mathbf{P}$ qanunu üçün $\mathbf{P}^*$ statistik qiymətini qurmağa imkan verən həlledici qaydaların ehtimal Π_n ardıcılığı yoxdur ki, $\mathbf{P}(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ -də ixtiyari ilkin ehtimal paylanmaları üçün

$$\int \left| \mathbf{P}^* - \mathbf{P} \right| \mathbf{P}^n \Pi_n \{ d[\mathbf{P}^*(\cdot)] \} \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilsin, burada $\left| \mathbf{P}^* - \mathbf{P} \right|$ – tam variasiya metrika-sında məsafədir, belə ki, bu metrika qeyd olunan ifadədə ixtiyari digər invariant informasiya metrika və ya invariant (statistik həlledici qaydalar kateqoriyalarına nəzərən) itki funksiyası ilə əvəz oluna bilər, məs., (9). Bundan başqa, artan həcmli seçim üzrə $\mathbf{P}$ -nin $\mathbb{R}$ -in Lebeq altçıxluqlarının $\mathcal{L}$ cəbrində mütləq kəsilməz və ya sinqulyar paylanma olduğunu əsaslı surətdə təyin etmək olmaz. $\mathbf{P}$ -ni yalnız zəif metrikalarda – $\mathbf{P}$ -ni ehtimal ölçüsü kimi lokalizə etməyə imkan verməyən metrikalarda qiymətləndirmək olar. $\mathbf{P}^*(\cdot)$ statistik qiymətləri haqqında Proxorov – Çentsovun təsadüfi ölçülər nəzəriyyəsi çərçivəsində ciddi təsbit edilmiş nəticələr nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsində aprior informasiyanın istifadə üsullarını ehtimal nəzəriyyəsinin

qeyri – korrekt qoyulmuş tərs məsələsinin rəqulyarizasiya (tən-zimləmə) metodları kimi şərh etməyə imkan verir (bax, [15], əlavə 2).

R. s.-nin əsas bölmələrindən biri məsələlərin qoyuluşu və həll metodları ilə səciyyələnən *statistik hipotezlərin yoxlanması* bölməsidir. Bu məsələnin ən geniş surətdə qoyuluşunda bir-biri ilə kəsişməyən, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ -da verilmiş ehtimal paylanmalarının iki $\mathcal{H}$ və $\mathcal{K}$ aprior ailəsi verilir; $\mathbf{P} \in \mathcal{P} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ münasibəti ilə verilən hər hansı naməlum nəzəri $\mathbf{P}$ paylanması haqqında mülahizə yürütmək məqsədilə seçim götürülür və bu seçimin nəticələri əsasında qərar qəbul edilir: ya $\mathbf{P} \in \mathcal{H}$ (yəni $H \in \mathcal{H}$ statistik hipotezi qəbul edilir) və ya $\mathbf{P} \in \mathcal{K}$ (yəni $\mathcal{H}$ -ə alternativ $K \in \mathcal{K}$ hipotezi qəbul olunur). Əgər $\mathcal{H}$ və $\mathcal{K}$ ailələri informasiya metrikada ayrılmayırsa, nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi isə aprior $\mathcal{P}$ ailəsi üçün həll olunandırsa, onda bu hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik texnikası sadə hipotezlər üçün bunu ümumiləşdirir.

$H: \mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ sadə hipotezini ona alternativ $K: \mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ hipotezinə qarşı yoxladığda tamamilə başqa vəziyyət alınır. Bu halda $\mathbf{P}_0$ paylanmasını ona çox yaxın olan alternativ $\mathbf{P}$ -lərdən fərqləndirmək üçün statistik məlumatlar heç bir rol oynaya bilmir. Lakin statistik verilənlərə görə çıxarılan qərar H hipotezinin qəbul olunmamasına da səbəb ola bilər, bu o halda baş verə bilər ki, n həcmli X seçimini analiz etdikdə, onun $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ olduğda

olduqca az ehtimallı hər hansı bir sadə xassəsi $X \in \mathcal{X}_K^n$ aşkar olunsun, məs., $\mathbf{P}_0^n \{ \mathcal{X}_K^n \} < \varepsilon m^{-1}$. Belə nəticənin (belə ki, az ehtimallı hadisələr çox olur) etibarlılığı üçün zəruridir ki, belə hadisə əvvəlcədən verilmiş, m uzunluqlu sonlu bir siyahıdan olsun və ya təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlərin test üsulu ilə yoxlanılmasında qəbul olunduğu kimi, onun bitlərlə təsviri uzunluğu $\log_2 m$ -dən az olsun. Əksər hallarda bu yoxlama məsələsi bir qədər dar qoyuluşda həll edilir, lakin əvvəlcədən nəzərə alınmalıdır ki, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ olmalıdır, belə ki, $\mathcal{P}$ ailəsi üçün nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin müəyyən bir ρ metriksində (ola bilər ki, zəif və ya $\mathcal{P}$ ailəsinin parametrizasiyası ilə) tutarlı həlli ola bilər. Onda hər hansı yaxın bir hipotezə qarşı, məs., $\mathbf{P} \in \mathcal{H}_\delta = \{ \mathbf{P}: \mathbf{P} \in \mathcal{P}, \rho(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) \geq \delta \}$ alternativinə qarşı $H \in \mathcal{H}$ hipotezi yoxlanılır (bax, *Styudent kriterisi*). Oxşar vəziyyət iki asılı olmayan seçimin birincisliyini, yeni onların statistik modelləri $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P}_1)$ və $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P}_2)$ üçlüklerinin üst-üstə düşməsinə yoxladığda yaranır, buna görə də, məs., *Kolmoqorov kriterisi* istifadə olunur. Axırıncı məsələdə dar qoyuluşda başqa bir tip də mümkündür (bax, *Uilkokson kriterisi*).

Digər, yuxarıda qeyd olunmayan statistik məsələlərin qoyuluşu haqqında, *Dispersion analiz*, *Çoxölçülü statistik analiz*, *Ekspərimentin planlaşdırılması*, *Regressiya analiz*, *Statistik analiz(i)* təsadüfi proseslərin, *Faktor analiz* kimi məqalələrə bax. Hesablama texnikasının statistik praktikaya daxil olunması *statistik modeləşdirmə* metodlarını (Monte – Karlo metodu) R. s. məsələlərinin həllində istifadə etməyə imkan yaratmışdır. R. s.-nin metodları tətbiqdə geniş surətdə istifadə olunur, bunlar araşdırma və kütləvi istehsalata nəzarət üçün statistik metodların, fizika, biologiya, təbabət, meteorologiyada statistik metodların əsasını təşkil edir; bunlar həmçinin elm və texnikanın müxtəlif məsələlərində statistik modeləşdirmə nəticələrinin yenidən işlənilməsində tətbiq olunur.

Statistik nəzəriyyənin məqsədi «ən böyük və ya verilmiş etibarlılığa» malik, «ən dəqiq» hökmər çıxarmağa imkan verən, verilənlər üzərində işləmək üçün ən effektiv metodların tərtib olunmasıdır. Qeyd olunan bu ifadələrin dəqiq mənası məsələnin qoyuluşundan asılıdır və yuxarıda qeyd olunduğu kimi seçimin həcmi sonlu olduqda optimal prosedurlar axtarışı müəkkəb variation problemlərin yaranması ilə nəticələnir. Lakin asimptotik nəzəriyyədə bir çox məsələlər üçün statistik modellərin həndəsi strukturu ilə bağlı asimptotik dəqiq informasiya bərabərsizliklərini qurmaq mümkün olmuşdur, bəzi bir sıra məlum prosedurlar üçün asimptotik optimallığı da göstərməyə müəssər olunmuşdur. Bu istiqamətdə araşdırmalar son illərdə R. s.-nin özünün strukturlarına həndəsi yanaşma üçün bir stimol olmuşdur (bax, *Həndəsələşdirilməsi, statistik nəzəriyyənin*). Burada ehtimal paylanmaların ailəsi cəbri kateqoriya yaradan, hərəkətləri (7)-yə görə təsvir olunan statistik həlledici qaydalarla təyin olunan həndəsi fiqurlar kimi (o cümlədən, xətlər, ayrılar, səthlər) şərh olunur (bax, *Statistik həllər qaydaları kateqoriyası* və bu məqalədəki ədəbiyyat). Bu yanaşma çərçivəsində təbii olaraq, bəzi anlayışlar yaranır: statistik modellərin Blekuell ekvivalentliyi; faydalı informasiyanı itki olmadan, statistik verilənləri maksimal reduksiya etməyə imkan verən kafi statistikalar; Kramer – Rao informasiyon bərabərsizliklərinin yazılışındakı Fişer informasiyon matrisi (bu matris vuruc dəqiqliyi ilə yeganə invariant differensial kvadratik formanı, eksponensial paylanmalar ailəsini təyin edir). R. s.-da yaranan həndəsi ifadə tərz (dil) onun bir çox əsas asimptotik qanunauyğunluqlarını yığcam surətdə ifadə etməyə imkan verir.

T a r i x i a r a y ı ş . R. s. üzrə ilk araşdırmalar artıq D. Bernulli (D. Bernoulli) və L. Eyler (L. Euler) kimi alimlərin işlərində, 18-ci əsrin 70-ci illərində statistik qiymətlərin qurulması metodlarının müzakirələri kimi əks olunmuşdur. R. s.-nin bir sıra əsas anlayışları 19-cu əsrin əvvəllərində P. Laplasın məşhur «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi» işində və ən kiçik kvadratik metodunun və xətlər nəzəriyyəsinin inkişafı ilə bağlı A. Lejandr və ələlxüs K. Qaussun işlərində daxil olunmuşdur. 19-cu əsrin sonu – 20-ci əsrin əvvəllərində ingilis statistikləri F. Qalton (F. Galton) və K. Piron (K. Pearson) böyük əhəmiyyət kəsb edən nəticələr almışlar. Müasir qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin və hipotezlərin yoxlanılma nəzəriyyəsinin əsasları 20-ci əsrin 20–30-cu illərində R. Fişer (R. Fisher) və Yu. Neyman (J. Neyman) tərəfindən qoyulmuşdur. Statistik həllər nəzəriyyəsi terminlərində R. s. məsələlərinin formal birləşməsinə 20-ci əsrin 40-cı illərində A. Vald (A. Wald) həyata keçirmişdir. R. s.-nin müasir inkişafına Q. Kramerin monoqrafiyası böyük təsir göstərmişdir.

Rusiya R. s. üzrə ilk tədqiqatlar L. Eyler və bir az sonra M. V. Ostroqradskinin adları ilə bağlıdır. Ən kiçik kvadratlər metodunun fundamental inkişafında A. A. Markovun böyük rolu olmuşdur. Rusiyada 20-ci əsrin əvvəllərində R. s.-nin inkişafı haqqında təsəvvür A. A. Markov və A. A. Çuprovun yazışmalarından aydındır. V. İ. Romanovskinin işlərinin də R. s.-nin inkişafında böyük rolu olmuşdur.

20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov müasir qeyri – parametrik statistikanın əsasını qoydular. Təsədüfi proseslərin statistikasi üzrə ilk işlər Ye. Ye. Slutskiyyə məxsusdur (müşahidələrin stasionar sıralarının analizi). Yu. V. Linnikin işləri R. s.-ni yeni güclü analitik metodlarla zənginləşdirmiş oldu.

R. s. cədvəllərinin tərtib olunmasında Ye. Ye. Slutskinin, N. V. Smirnov və L. N. Bolşevin böyük xidmətləri olmuşdur.

Ə d . : Elmin klassikləri. [1] E u l e r i L., Opera omnia, v. 7, 1923 (angl. per. – «Biometrika», 1961, v. 48, pt 1–2); [2] L a p l a c e P. S. de, Theorie analytique des probabilites, 2 ed., P., 1820, 3 ed., P., 1886; [3] L e g e n d r e A., Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes, P., 1806; [4] G a u s s C. F., Werke Bd IV, G o t t i n g e n, 1980; [5] M a r k o v A. A., Исчисление вероятностей,

4 изд., М., 1924; [6] M a r k o v A. A., О теории вероятностей и математической статистике (переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова), М., 1977; [7] K o l m o g o r o v A. H., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986.

Dərsliklər və məlumat kitabları. [8] С м и р н о в Н. В., Д у н и н – Б а р к о в с к и й И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [9] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [10] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика. Дополнительные главы, М., 1984; [11] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

Monoqrafiyalar. [12] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с angl., М., 1960; [13] В а л ь д А., Основные идеи общей теории статистических решений, пер. с angl., дополн. к кн. [12]; [14] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [15] Д е в р о й Л., Д ь е р ф и Л., Непараметрическое оценивание плотности, пер. с angl., М., 1988; [16] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с angl., М., 1966; [17] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с angl., М., 1973; [18] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с angl., М., 1976; [19] К о к с Д., Х и н к л и Д., Теоретическая статистика, пер. с angl., М., 1978; [20] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с angl., 2 изд., М., 1975; [21] Л е С а м Л., Asymptotic methods in statistical decision theory, B., 1986; [22] У и л к е С., Математическая статистика, пер. с angl., М., 1967.

RIYAZI STATİSTİKA; asimptotik metodlar « математическая статистика асимптотические методы; asymptotic methods of mathematical statistics » – müşahidələr həcmi qeyri – məhdud artırıldıqda (bəzən statistik nəticənin alınan dəqiqliyini artırmaq üçün limit keçidlərində) statistik prosedurların dəyişikliklərinə əsaslanan metodlardır.

Asimptotik metodlar tətbiq olunan R. s. məsələlərini şərti olaraq iki kateqoriyaya ayırmaq olar:

- a) verilmiş statistik prosedurların xassələrinin araşdırılması;
- b) tələb olunan statistik xassələrə malik olan prosedurların axtarılması (məs., optimallıq, məqbulluq kimi xassələr).

Birinci tip məsələlər statistikaların verilmiş şəkili paylanmalarının öyrənilməsinə gətirilir. Asimptotik metodlarla paylanmalar üçün (və ya onların verilən məsələdə tələb olunan xarakteristikaları üçün) limit (asimptotik) ifadələri almaq olur, bu ifadələr müşahidələr sayı qeyd olunan konkret məsələlərdə tətbiq edildikdə təqribi düsturlar kimi istifadə olunur. Asimptotik metodların tətbiq olunmasına zərurət onunla əsaslandırılır ki, «dəqiq» həllin birbaşa alınması üçün tələb olunan hesablamaların müəkkəbliyi, bir qayda olaraq, müşahidələr həcmimin artırılması ilə sürətlə artır. Bu tipli məsələlərdə istifadə olunan asimptotik metodlar, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremlərinin* metodlarıdır.

İkinci tip məsələlərdə optimal prosedurların qurulmasının statistik metodları (bax, *Optimallıq (ğı)* statistik prosedurları) və ya *statistik həllər nəzəriyyəsinin* metodlarından istifadə olunur. Statistik modellərin ardıcılıqlarının asimptotik analizi güclü bir vasitə kimi verilən model üçün mühüm olan xassələr saxlanılan limit keçidinə – daha sadə limit modelinə keçidə imkan yaradır. Bir çox hallarda asimptotik metodlar vasitəsilə dəqiq mənada optimal prosedurlar olmadığı halda, məqbul sayılan asimptotik mənada, tələb olunan optimallıq xassələrinə malik olan (bax, *Asimptotik effektiv statistik qiymət və ya Asimptotik ən güclü kriteri*) prosedurları qurmaq mümkün olur. Müşahidələr sayı verilmiş konkret məsələlərdə asimptotik optimal prosedurlar təxmini optimal prosedurlar kimi istifadə olunur, yəni əgər bu prosedurlar özünün keyfiyyət xarakteristikalarına görə az da olsa

(məs., statistik qiymətlərin dispersiyası kimi, kriterilərin gücü kimi), hər hansı digər prosedurlardan yaxşı sayılmayan prosedurlar kimi istifadə olunur.

M i s a l. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanma sıxlıqları $p(x-\theta)$ olan təsadüfi kəmiyyətləri müşahidə olunur, $\theta \in \mathbb{R}$ – naməlum parametr, $p(x)$ – sıfır görə simmetrik [yəni $p(x) = p(-x)$], məlum ele sıxlıq funksiyasıdır ki, aşkar olaraq qeyd olunmayan rəqulyarlıq şərtlərini ödəyir (momentlərin varlığı, differensiallanıqlıq). Asimptotik metodların tətbiqi θ parametrinin qiymətləndirilməsi və $H_0: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması məsələlərində illüstrasiya ediləcəkdir.

Q i y m ə t l ə n d i r m ə. θ üçün statistik qiymətlər, məs.,

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ ədədi ortası və } \tilde{X} \text{ seçimi medianı ola bilər.}$$

Bu statistik qiymətlərin hər ikisi meylsiz statistik qiymətlərdir: $M_{\theta} \bar{X} = M_{\theta} \tilde{X} = \theta$. Mümkün statistik qiymətlərdən daha dəqiqini, yəni, məs., ən kiçik dispersiyası olanını seçmək məsləhətdir. Aydın ki, $D \bar{X} = \sigma^2/n$, burada $\sigma^2 = D X_1$, medianın dispersiyası üçün isə, ümumiyyətlə, yalnız $D \tilde{X} \sim (4p^2(0)n)^{-1}$ asimptotik münasibəti alınır. Bu münasibətlərdən, məs., müşahidələr paylanması normal qanuna tabe olduğu halda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D \bar{X} / D \tilde{X} = 2/\pi \approx 0,637,$$

$p(x) = e^{-|x|}/2$ (Laplas paylanması) olduğu halda isə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D \bar{X} / D \tilde{X} = 2$$

asimptotik qiymətləri alınır, yeni birinci halda $\bar{X}$ daha dəqiqdir, ikinci halda $\tilde{X}$ daha dəqiqdir, bu şərtlə ki, n çox böyük olsun. $\bar{X}$ və $\tilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları haqqında, ümumiyyətlə, asimptotik normal paylanma kimi yalnız asimptotik nəticələr vardır.

Müxtəlif statistik qiymətlər sinifləri də aşkar sürətdə tədqiq olunur. Məs., $\hat{\theta}_n$ M – statistik qiyməti

$$\sum_{i=1}^n h(X_i - \theta) = 0 \quad (1)$$

tənliyinin kökü kimi təyin olunur, burada h – cüt olmayan müəyyən rəqulyarlıq şərtlərini ödəyən funksiyadır. Onda $\hat{\theta}_n$ meylsiz, asimptotik olaraq normal qanuna tabe statistik qiymətlərdir və onun dispersiyası

$$D \hat{\theta}_n \sim n^{-1} D h(X_1) / J^2(h) \quad (2)$$

münasibətlə təyin olunur, burada

$$J(h) = M_0 h'(X_1) = - \int h(x) p'(x) dx \quad (3)$$

[məs., $\bar{X}$ və $\tilde{X}$, – M – statistik qiymətlərdir, bunlar üçün $h(x) = x$ və $h(x) = \text{sign } x$]. (2) düsturu vasitəsilə ilə müxtəlif M – statistik qiymətləri müqayisə etmək olur; (2)-nin sağ tərəfini $h(\cdot)$ üzrə minimallaşdıraraq, M – statistik qiymətlər sinfində asimptotik ən yaxşı statistik qiymət tapmaq olur. Bu statistik

qiymət $h(x) = \psi(x)$ halında θ_n^* maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətdir, burada

$$\psi(x) = -p'(x)/p(x).$$

Ayn-ayrı statistik qiymətlərin (və ya statistik qiymətlərin verilmiş siniflərinin) xassələrini ifadə edən qeyd olunmuş nəticələr, bütün statistik qiymətlər sinfində asimptotik olaraq ən yaxşı statistik qiyməti müəyyən etməyə imkan vermir. Belə məsələnin həlli üçün $\{p(x-\theta)\}$ paylanmalar ailəsinin xassələrinə əsasən statistik nəticələr tələb olunur. Belə bir nəticəyə misal **K r a m e r – R a o b ə r a b ə r s i z l i y i d i r**: müəyyən rəqulyarlıq şərtlərini ödəyən, ixtiyari meylsiz $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ statistik qiyməti üçün

$$D T_n \geq 1/(nI) \quad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada I – Fişer informasiya miqdarıdır:

$$I = M_0 \psi^2(X_1).$$

(2)–(4) ilə birlikdə bu bərabərsizlik əsasında hökm etmək olar ki, maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti asimptotik minimal dispersiyaya malikdir və bu həm də rəqulyar meylsiz statistik qiymətlər sinfində də belədir.

Bu misalda sadələşdirici şərtlər (paylanma sıxlığının simmetrikliliyi, yerindəyişmə parametrinin birölcülülüyü) qoyulmuşdur və bu şərtlər daxilində, xüsusilə, statistik qiymətlərin meylsiz olması təbii idi. Belə şərtlər qoyulmadığı və statistik qiymətlər sinfinə məhdudiyyətlər qoyulmadığı (rəqulyarlıq, meylsizlik) hallarda asimptotik optimalıq anlayışının dəqiqliyi və daha incə asimptotik metodların tətbiqi tələb olunur. Məs., maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinin lokal asimptotik minimum xassəli olması belə müəyyənleşir (bax, [2]).

Eyni asimptotik xarakteristikalarlı statistik qiymətlərin sonradan müqayisə olunması üçün, xarakteristikaların asimptotikaları dəqiqləşdirilməlidir, məs., asimptotik aynılıqların köməyiylə (bax, [3], [10]).

$H_0: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması. Bu və ya digər kriterilərin asimptotik tədqiqatı uyğun statistikaların paylanmalarının asimptotikasının öyrənilməsinə gətirilir. Məs., birtərəfli $H_1: \theta > \theta_0$ alternativlərində $\theta_n^* > c_n^*$ olduqda H_0 hipotezini qəbul etməyən, θ_n^* maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinə əsaslanan kriteridən istifadə etmək olar. Tələb olunur ki, kriterinin asimptotik ölçüsü $\alpha > 0$ olsun, yəni

$P_{\theta_0} \{\theta_n^* > c_n^*\} \rightarrow \alpha$ münasibəti ödənilsin. θ_n^* -nin asimptotik olaraq normal qanuna təbəliyi və (2) münasibətindən aydındır ki, $c_n^* = \theta_0 + (nI)^{-1/2} z_\alpha$ götürmək olar, burada $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, Φ – standart normal paylanma funksiyasıdır. «Yaxınlaşan alternativdə» $\beta_n^*(\theta) = P\{\theta_n^* > c_n^*\}$ güc funksiyası üçün

$$\beta_n^*(\theta_0 + t n^{-1/2}) \rightarrow \Phi(I^{1/2} t - z_\alpha) \quad (6)$$

yığılması ödənilir.

Müəyyən etmək olar ki, (6) münasibətinin sağ tərəfi onun hər bir $t > 0$ qiymətində ən güclü kriterinin gücü ilə müqayisə etmək yolu ilə ən böyük mümkün olan güc funksiyasını verir.

$$L_{n,t} = L_{n,t}(X_1, \dots, X_n) = \ln \prod_{i=1}^n \frac{(X_i - (\theta_0 + tn^{-1/2}))}{p(X_i - \theta_0)}$$

olsun. Neyman – Pirson lemmasına əsasən

$$L_{n,t} > c_{n,t} \quad (7)$$

kriterisi $\theta = \theta_0 + tn^{-1/2}$ hipotezinə qarşı $\theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün ən güclü kriteridir. Əgər $\beta_n(\theta_0 + tn^{-1/2}) \alpha_n \rightarrow \alpha$ ölçülü hər hansı kriterinin güc funksiyasıdırsa, onda $P_{\theta_0}\{L_{n,t} > c_{n,t}\} = \alpha_n$ münasibətini ödəyən $c_{n,t}$ -lər olduqda

$$\beta_n(\theta_0 + tn^{-1/2}) \leq \bar{\beta}_n(\theta_0 + tn^{-1/2}) \quad (8)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\bar{\beta}_n$ – (7) kriterisinin gücüdür. [Çünki, ümumiyyətlə, müntəzəm ən güclü kriteri yoxdur, yeni bütün $t > 0$ qiymətlərində eyni zamanda ən güclü kriteri, müxtəlif t qiymətlərində müxtəlif (7) kriterilərinin gücü $\bar{\beta}_n(\theta_0 + tn^{-1/2})$ yoxdur; bax, *Qurşayıcı funksiyası, gücün.*] $L_{n,t}$ -yə mərkəzi limit teoremini tətbiq edərək, isbat etmək olur ki,

$$\bar{\beta}_n(\theta_0 + tn^{-1/2}) \rightarrow \bar{\beta}(t) = \Phi(I^{1/2}t - z_\alpha). \quad (9)$$

(8) və (9)-dan aydındır ki, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ölçülü ixtiyari kriterilər üçün

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\theta_0 + tn^{-1/2}) \leq \bar{\beta}(t)$$

münasibəti ödənilir. Bununla da, əgər hər hansı kriterinin gücü $\bar{\beta}(t)$ -yə yığılırsa, onda bu kriteri *asimptotik müntəzəm ən güclü kriteridir*. Belə kriterilərə misal θ_n^* maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinə və

$$Y_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \psi(X_i - \theta_0) \quad (10)$$

statistikasına əsaslanan kriterilərdir.

Daha mürəkkəb hallarda (məs., $\theta \neq \theta_0$ ikitərəfli alternativlərdə, vektor parametr halında) ən güclü kriteri ilə müqayisəetmənin qeyd olunmuş qaydasını tətbiq etmək mümkün deyildir. Baxılan misalda $H_1: \theta \neq \theta_0$ alternativində statistik modelin sadələşdirilməsinə lokal asimptotik normallıq xassəsinə əsaslanaraq nail olunur və bu ödəniləndikdə isə Y_n (bax, [10]) asimptotik kafi statistika olur. Bu isə onu ifadə edir ki, yalnız Y_n -dən asılı kriterilərlə kifayətlənmək olar. Y_n statistikasının paylanması $\theta = \theta_0 + tn^{-1/2}$ qiymətində $N(I, I)$ paylanmasına (orta qiyməti I , dispersiyası I olan normal paylanmaya) yığıldığından, belə kriterilərin xassələri $Y \sim N(I, I)$ müşahidəsi üzrə (Limit modeli) $t = 0$ hipotezinin yoxlanılma kriterilərinin xassələrindən alınır bilinir. $Y > c_\alpha$, $c_\alpha = I^{1/2}z_\alpha$ kriterisi $t > 0$ alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü kriteridir. $t \neq 0$ alternativində $|Y| > c_{\alpha/2}$ kriterisi müntəzəm ən güclü meyilsiz kriteridir, $\{Y < -c_{\alpha/2}\} \cup \{Y > c_{\alpha/2}\}$,

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ kriteriləri isə tam sinif təşkil edir. Y əvəzinə Y_n əvəzləməsi apardıqda uyğun asimptotik xassələri kriterilər alınır.

Oxşar surətdə və daha ümumi sxemlərdə lokal asimptotik normallıq xassələri ödənilən statistik məsələlər yerindəyişmə parametrlərindən asılı olan, normal paylanmalar (çoxölçülü) ailələri ilə bağlı məsələlərə gətirilir. Bu metod qiymətləndirmə məsələlərində də, xüsusilə də, lokal asimptotik minimum xassələrinin müəyyənəşdirilməsində istifadə olunur.

Eyni limit gücünə malik kriterilərin müqayisəli öyrənilməsi bunların güclərinin asimptotik ayrılışının qurulması yolu və bunlarda yüksək tərtibdən kiçik hədlərin araşdırılması ilə aparılır (bax, [10]).

Statistik, əsas etibarilə, paylanmalarının asimptotik öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri metodlarından istifadə edilir. Bir sıra hallarda məsələ məlum teoremlərin tətbiqinə də (böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi kimi) gətirilə bilər. Lakin, bir qayda olaraq, R. s.-da ehtimal nəzəriyyəsi üçün müstəqil tədqiqat tələb edən, ənənəvi olmayan obyektlər yaranır. R. s. üçün seçiyyəvi istiqamətlərin qısa xülasəsi aşağıda verilir.

Statistikaların geniş sinfi üçün statistikanın təsadüfi kəmiyyətlər cəmiyyəti təqribi təsviri imkanını ilə şərtləndirilmiş asimptotik normallıq ödənilir. Seçimi momentlər, parametrlərin bir çox statistik qiymətləri (məs., *maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti*, *Beyes statistik qiyməti*, *M – statistik qiymət*), parametrik kriterilərin statistikaları (məs., $C(\alpha)$ kriterilərinin, *ranq statistikasi*, *U* – statistikaları, *qaydalı statistika* və onların xətti kombinasiyaları) belə statistikalarandır. Bu qəbildən olan statistikaların limit paylanmalarını tapmaq üçün effektiv metod «yaxınlaşan alternativlər» halında lokal asimptotik normallıq xassəsilə (kontingentlik, Le Kamın üçüncü lemması) bağlıdır. 20-ci əsrin 70 – 80-ci illərində statistikaların müxtəlif sinifləri üçün qeyd olunan statistikalar üçün yeni, özünəməxsus, asimptotik normallığı dəqiqləşdirmələrə imkan verən metodlar işləndi (yığılma sürəti, asimptotik ayrılışlar) (bax, [10], [11]).

20-ci əsrin 30-cu illərində V. İ. Qlivenkonun ([6]), A. N. Kolmoqorovun ([8]), N. V. Smimovun ([4], [5]) işlərində empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan *qeyri – parametrik kriterilərin* tədqiqatı 40-ci illərin sonundan başlayaraq təsadüfi proseslərin yığılma nəzəriyyəsinə əsaslanmaqla, həm də onun inkişafının stimullarından biri oldu. Təsadüfi proseslərin yığılma aparatı qeyri – parametrik yığılma, ardıcıl analiz məsələlərində də istifadə olunur (bax, [12]).

Statistik prosedurların asimptotik effektivliyinin tədqiqatında böyük yayınmalar nəzəriyyəsinin metodları tətbiq olunmaqla yanaşı, sonrakı inkişafa da səbəb oldu.

Seçimi tezliklərin funksiyalarının paylanmalarının, seçimin həcmi və bölgünün sinifləri sayının eyni zamanda artdığı halında, öyrənilməsi böyük bir bölməni əmələ gətirmiş oldu. Burada yanaşmaların eksəriyyəti o fakta əsaslanır ki, tezliklərin polinomial paylanması Puasson təsadüfi kəmiyyətləri toplusunun onların qeyd olunmuş cəmlərinə nəzərən şərti ehtimalı ilə üst-üstə düşür. Speysinqlərin funksiyaları üçün araşdırma metodlarına yaxın araşdırmalar aparılmışdır (bax, [11]).

Empirik paylanma funksiyalarının, tezlik funksiyalarının, speysinqlərin funksionalları üçün limit teoremlərinin alınmasında martinqallar nəzəriyyəsinin metodları müvəffəqiyyətlə tətbiq olunmağa başladı (bax, [12]).

Fəzanın dim. – ölçüsü müşahidələr sayının çoxalması ilə artdıqda (*diskriminant analiz*, təsnifat) «böyük dim. – ölçülü» asimptotikada *çoxölçülü statistik analiz*in prosedurları özünəməxsus xassələr aşkara çıxarır (təsnifat, diskriminant analiz).

Statistik modellərin dərin yığılma nəzəriyyəsi və asimptotik optimal prosedurların qurulması L. Le Kam tərəfindən inkişaf etdirilmişdir [9]. Onun ideyaları asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi və digər istiqamətlərin inkişafının əsasını qoymuşdur.

Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində maksimal doğruxa-oxşarlıq statistik qiymətlərinin (və digər asimptotik effektiv statistik qiymətlərin) lokal asimptotik minimaxlıq xassələrinin Ya. Qayek tərəfindən isbatı mühüm addım olmuşdur (bax, [7]). Optimallığın bu xassəsi və onun isbat metodu sonralar qeyri – parametrik və semiparametrik məsələlər də daxil olunmaqla (bax, [2], [3]), qiymətləndirmə məsələlərinin geniş sinfinə yayılmış oldu.

Parametrik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində maksimal doğruxa-oxşarlıq statistik qiymətlərinə əsaslanan kriterilərin asimptotik optimallığı haqqında ilk nəticələri A. Vald almışdır (bax, [13]). Asimptotik optimal kriterilərin qurulmasının ümumi metodları Le Kam nəzəriyyəsində verilir. Asimptotik müntəzəm ən güclü kriterilər mövcud olmayan məsələlərdə kriterilərin asimptotik tam siniflərinin təsviri Le Kam metodları və Vald statistik həllər nəzəriyyəsi metodları əsasında alınır (bax, [1]).

Parametrik təbiiqlər parametrik modellərin dəqiq məlum olmadığı hallar üçün statistik metodların işlənilib hazırlanmasına səbəb oldu. Belə hallarda qeyri – parametrik metodlar və robust metodlar təbiiqlərin Asimptotik optimal prosedurlar müşahidələrdən naməlum paylanma haqqında zəruri informasiyanın alınmasına əsaslanan adaptiv metodlar vasitəsilə qurulur.

Paylanmalar ailəsinin xassələrinin təsviri və onların statistik prosedurların xarakteristikaları ilə əlaqəsi üçün faydalı aparatı R. s.-da differensial həndəsə metodları verir.

Əd.: [1] Бернштейн А. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 3–18; [2] Ибрагимов И. А., Хасьяминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 309–38; [4] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973–93; [5] Смирнов Н. В., «Бюлл. Моск. гос. ун-та», 1939, т. 2, в. 2, с. 3–14; [6] Q l i v e n k o V., «G. Ist. Ital. attuari», 1933, v. 4, № 1, p. 92–99; [7] H a j e k J., «Proc. Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1972, v. 1, p. 175–94; [8] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [9] L e C a m L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [10] P f a n z a g l J., «Lect. Notes in Statist.», 1985, № 31; [11] S e r f l i n g R. J., Approximation theorems of mathematical statistics, N. Y., 1980; [12] S h o r a c k G. R., W e l l n e r J. A., Empirical processes with applications to statistics, N. Y., 1986; [13] W a l d A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 426–82.

RIYAZİ STATİSTİKA; qeyri-parametrik metodlar « математическая статистика; непараметрические методы; nonparametric methods of mathematical statistics » – ümumi çoxluğun paylanmalarının funksional növünün naməlum halı üçün nəzərdə tutulan metodlardır. Mümkün oluna bilən ehtimal paylanmaları ümumi, hər hansı xarakterli şərtlərlə, məs., kəsilməzlik, hamarlılıq, simmetriklilik, asılı olmamazlıq və s. şərtlərlə verilən məsələlərdə belə metodlardan istifadə olunur. «Qeyri – parametrik» metodlar termini onun ənənəvi «parametrik» metodlar terminindən fərqi adı ilə nəzərə çarpdırır, parametrik metodlarda fərz olunur ki, ümumi çoxluq sonlu sayda parametrlər dəqiqliyi ilə məlumdur və bu metodlar «standart» paylanmalar ailələri üçün, o cümlədən, normal, eksponensial, Пуассон və s. tipli paylanmalar ailələri üçün tefərrüatı ilə araşdırılmışdır.

Qeyri – parametrik metodlarla həll oluna bilən məsələlər şərti olaraq iki böyük hissəyə ayrılır: hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirmə məsələləri.

Hipotezlərin qeyri – parametrik yoxlanılması qeyri – parametrik metodların tətbiqinin ən inkişaf etmiş oblastıdır. Ən inkişaf etmiş və tətbiq olunan metodlar ranq metodları və modifikasiyalı və ümumiləşmələri də daxil olmaqla empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan metodlardır.

Ranq prosedurlarından istifadə aşağıdakı mülahizəyə əsaslanır. Ranqlar vektoru qaydalı statistikalar vektoru ilə birlikdə seçimdəki bütün informasiyanı özündə saxladığından, bu informasiyanın hər

hansı hissəsi yalnız ranq vektorunda olur. Buna görə də, statistik prosedurlar qurularkən yalnız ranqlar əsas götürülərək, seçimi qiymətlərin özlərindən istifadə olunmur. Belə prosedurların üstünlüyü ranqların tamqiymətli olmasından irəli gələn hesablamada alınan sadəlikdir. Ranq prosedurlarının digər mühüm cəhəti müşahidələrin kəmiyyət deyil, keyfiyyət xarakterli olduğu hallarda onların tətbiq oluna bilinməsindədir, lakin bu halda müşahidələrin nizamlanıla bilinməsi şərtidir ki, tətbiqdə bu xüsusilə mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Nəhayət, ranq statistikaları ümumi paylanmadan asılı olmur və bu da onu hesablamağa və sonra da cədvəlləşdirməyə imkan verir.

20-ci əsrin 40 – 50-ci illərində ranq metodları inkişaf etdikcə, ranqlar vektorundakı informasiya payı olduqca mühüm ola bilər ki, bu da ranq prosedurlarının yüksək asimptotik nisbi effektivliyini təmin edir. Ranq statistikalarının asimptotik nəzəriyyəsi incə analitik metodlardan və təsadüfi proseslərin və meydanların yığılma nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edir.

Ranq metodları ənənəvi surətdə istifadə olunan «parametrik» metodlarla, əsas etibarilə, paylanmaların normal qanuna tabeliyini fərzədən metodlarla həll olunan məsələlərin geniş sinfi üçün işlənilmişdir (bax, *Ranq korrelyasiyası*).

Qeyri – parametrik kriterilərin böyük qrupu empirik paylanma funksiyasından istifadəyə əsaslanır. F_n – ümumi çoxluğunun paylanma funksiyası F olan n həcmli seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun. Qlivenko – Kantelli teoreminə əsasən, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_t |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. Beləliklə, F_n və F -in yaxınlığına əsasən paylanma funksiyası haqqında hipotezlə uzlaşma kriterisini əsaslandırmaq olar. Belə tip kriterilər ilk dəfə 20-ci əsrin 30-cu illərində təklif olunmuş *Kolmoqorov kriterisi* və *Kramer – Mizes kriterisidir*. Uyğun statistikaların paylanmaları, ümumi çoxluğun paylanma funksiyasından onun kəsilməz olduğu halında asılı olmur. Bunların limit paylanmaları 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov tərəfindən tapılmış və cədvəllər tərtib olunmuşdur ki, bu da mühümlük ölçüsünün verildiyi halda uyğun kritik oblastın sərhədini təqribi təyin etməyə imkan verir. Bu statistikaların müxtəlif modifikasiyaları vardır və bunlardan parametrik ailəyə mənsubluq hipotezi üçün, çoxölçülü halda uzlaşma hipotezinin yoxlanılması üçün, simmetriya, bircinslik və asılı olmamazlıq hipotezləri üçün istifadə olunur. Bunların araşdırmalarında kombinator metodlar, zəif yığılma nəzəriyyəsi metodları və martinqallar nəzəriyyəsi metodları tətbiq olunur.

Empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan *qeyri – parametrik kriterilərin* əksəriyyətinin ümumi xassəsi ondan ibarətdir ki, bunlar bütün alternativlərə qarşı tutarlı kriterilərdir. Böyük həcmli seçimlər hallarında bu və ya digər statistikanın seçilməsini ən yaxşı istifadə oluna bilən statistikalar üçün hesablanılan asimptotik nisbi effektivlik qiymətlərinə əsaslandırmaq olar.

Qeyri – parametrik qiymətləndirmə riyazi statistikanın sonsuzölçülü xarakterli qiymətləndirmə məsələləri ilə bağlı olan bir bölməsidir. Paylanma sıxlıqlarının, spektral sıxlıqların, rəqressiya əyrilərinin, təsadüfi xətlərlə («küy fonunda signal») müşahidə olunan funksiyaların və bunların funksionallarının – «əyrilərin» qiymətləndirilməsi mühüm məsələdir.

Qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərinin korrekt qoyulması üçün qiymətləndirilən «əyrinin» aid olduğu funksional sinif haqqında əlavə aprior informasiya olması zəruridir. Bu halda, qiymətləndirmənin dəqiqliyi bu sinfin «kütləviliyinin» həndəsi xarakteristikalarından olduqca asılıdır. Buna görə də, qeyri – parametrik

qiymətləndirmə məsələlərində funksional – analitik metodlar mühüm rol oynayır.

Bax, Qeyri – parametrik yoxlanılması hipotezlərin, Qeyri – parametrik qiymətləndirmə, Qaydalı statistika, Robastlıq, Tolerant interval, Adaptiv statistik qiymət.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [3] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Х е т т м а н с п е р г е р Т., Статистические выводы, основанные на рангах, пер. с англ., М., 1987; [7] W a l s h J. E., Handbook of nonparametric statistics, v. 1–3, Princeton, 1962–68; [8] L e h m a n n E., Nonparametrics: Statistical methods on ranks, S. F., 1975; [9] Handbook of statistics, v. 4. Nonparametric methods, ed. by P. R. Krishnaiah, P. K. Sen, Amst. – [a. o.], 1984.

RIYAZİ STATİSTİKANIN CƏDVƏLLƏRİ « математической статистики таблицы; tables of mathematical statistics / statistical tables » – konkret verilənlərin analizində statistik nəticələrin alınması, həm də iş prosesində statistik hesablamalar üçün tətbiq olunan ədədi cədvəllərdir.

Statistik nəticələrin metodikası üçün xüsusi cədvəllərin zəruriliyi çoxdan yaranmışdır. 20-ci əsrin əvvəllərində «Biometrika» adlı ingilis jurnalının yaradıcıları, xüsusən də, K. Pirson (K. Pearson), «statistik hesab əməyini azaldan» ədədi cədvəllərin tərtib edilməsini öz məqsədlərindən biri kimi qarşılarına qoymuşdular. 1941-də bu jurnalın nömrələrində əvvəllər nəşr olunmuş cədvəllər nəşr olunmayanlarla birlikdə «Tables for statisticians and Biometricians» adlı toplusunun 1-ci tomda verilmişdir. 1931-də K. Pirson eyni adlı cədvəllər toplusunun ikinci tomunu nəşr etdirir ki, bu tomda 1914 – 30-cu illərdə «Biometrika» jurnalında nəşr olunmuş çoxlu cədvəllər birlikdə verilmişdir. Statistik nəticələr nəzəriyyəsinin sürətli inkişafı və yeni hesablama texnikasının yaranması çoxsaylı yeni, daha müasir cədvəllərin yaranmasına səbəb oldu. Beynəlxalq praktikada ən məşhur statistik cədvəllər məcmularından biri E. Pirson və H. Hartlinin [1] məcmusudur ki, burada R. Fişerin (R. Fisher) ingilis məktəbinin, digər tərəfdən Y. Neyman və E. Pirson (J. Neyman, E. Pearson) məktəbinin əsas nailiyyətləri əks olunmuşdur. SSRİ-də digər cədvəllərin klassik toplusu kimi sayılan, L. N. Bolşev və N. V. Smirnovun [2] kitabı da nəşr olunmuşdur.

R. s. c. mahiyyətəə olduqca müxtəlifdirlər, lakin əsas etibarilə bu cədvəllər müxtəlif paylanmalar üçün (məs., Kolmoqorov paylanması, χ^2 – paylanma, binomial paylanma, hiperhəndəsi paylanma), bunların tərs funksiyaları üçün qrafik və nomogramların faiz nöqtələri cədvəlləri adlanan cədvəllərdir.

Paylanmalar üçün cədvəllərin tərtib olunması əksər hallarda cədvəllərin tam toplusunun parametrlərinin müxtəlif qiymətlərindən asılı olaraq tərtib olunmasını zəruri edir, məs., χ^2 – paylanma cədvəlləri toplusu sərbəstlik dərəcəsi sayının müxtəlif qiymətlərinə uyğun tərtib olunmuşdur, binomial paylanma üçün cədvəllər müşahidələr sayı və «müvəffəqiyyət» ehtimalının qiymətləri üzrə tərtib edilmişdir və nəhayət, hiperhəndəsi paylanma cədvəlləri toplusu üç parametrdən asılı olması nəzərə alınmaqla tərtib olunmuşdur. Beləliklə, yaxşı cədvəllərin tərtibi rahat interpolasiya və ekstrapolyasiyanın yalnız əsas dəyişənə görə deyil, həm də parametrlərə görə qurulmasından asılı olur. Parametrlər üzrə ekstrapolyasiya məsələsi paylanmalar üçün limit teoremləri ilə birbaşa bağlıdır və buna görə də, paylanmalar üçün cədvəllərin

tərtib olunmasında limit teoremlərinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi və müxtəlif asimptotik düsturların qurulması zəruriliyi yaranır. Məs., Γ – paylanma funksiyası $\Gamma(m, x)$ üçün cədvəl tərtib olunduqda (xüsusi halda χ^2 – paylanma üçün) m -in böyük qiymətlərində $\Gamma(m, x) \cong \Phi((x-m)/\sqrt{2m})$ təqribi bərabərliyinə istiqad etmək olar ki, bu bərabərlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(m, y\sqrt{2m} + m) = \Phi(y)$$

münasibətə ilə ifadə olunan klassik limit teoreminə əsaslanır, burada $\Phi(y)$ – ətraflı cədvəlləşdirilmiş standart normal paylanma funksiyasıdır, lakin bu bərabərliyin daha dəqiq və yığcam şəklində

$$\Gamma(m, x) \cong \Phi(\sqrt{2x} - \sqrt{2m})$$

təqribi bərabərliyinə istiqad etmək və

$$\Gamma(m, (y + \sqrt{2m})^2/2) - \Phi(y)$$

fərqi cədvəlləşdirmək məsləhətdir.

[2] məcmusunda müəllif şərhində belə yaxşılaşdırılmış asimptotik ifadələrin müxtəlif ifadələrinin nümunələri əks olunmuşdur.

Praktikanın artan tələblərlə əlaqədar cədvəllərin daha dəqiq olması zəruriliyi yaranır. Bu iş prosesində hesablamalarda cədvəllərin rolunun artması, bunların nəzəri araşdırmalarda hesablamalar aparılmasında istifadəsi ilə əlaqədardır.

Məs., olduqca seçilən müşahidələr kriterisinin kritik qiymətlərinin hesablanması Student paylanmasının kvantillərinin bir neçə onluq işarələrlə verilməsi tələb olunur; beta – paylanmanın kvantillərini böyük dəqiqliklə hesablanmış gamma – paylanmasının kvantillərinə görə qiymətləndirmək mümkündür.

Riyazi statistikanın nisbətən yeni hesablama vasitəsi EHM üçün statistik proqramlar paketləridir. Bu paketlər əksər hallarda, müəyyən paylanmaların və bunların kvantillərinin hesablanması üçün proqramları da özündə saxlayır. Belə proqramlardan, adətən, tezizlik tələb olunur. Belə proqramlardan fərqli olaraq, cədvəllər tərtibi üçün tutulan proqramlar tezizlik olmaya da bilər, lakin böyük dəqiqliklə hesablanmalıdır; bunlar əksər hallarda xüsusi hesablama qaydaları əsasında aparılır. Bir sıra hallarda cədvəllərin özləri paketin bir hissəsi də ola bilər.

Elə hallar da mövcuddur ki, cədvəlləşdirmənin nə limit teoremindən alınan təqribi düstur şəklində, nə də ki, paketdə tezizlik sadə proqramlar şəklində alternativ yoxdur. Məs., empirik prosesin əyri xəttli sərhəddən çıxması ehtimalının hesablanması üçün müşahidələr sayı n -in $n \rightarrow \infty$ halında limit teoremləri vardır

(bax, [3]). Lakin n -in sonlu qiymətlərində bu ehtimallar üçün cədvəllərin tərtibində aydın olunmuşdur ki, bunlar limit ifadələrin yalnız n -in minlərlə tərtibli qiymətlərində yaxın ola bilər (bax, [4]). n -in kiçik qiymətləri üçün cədvəllərin tərtibi zəruridir. Digər tərəfdən, prosesin sərhəddən çıxması ehtimallarını hesablamaq üçün tutulan proqramı paketə daxil etmək məqsəduyğun deyildir, belə ki, hesablama n -in artması ilə olduqca çətinləşir və $n \sim 100 - 150$ halında artıq, maşın hesablaması (maşın müdətə) tələb olunur.

R. s. c. üzrə bibliografiya [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] P e a r s o n E. S., H a r t l e y H. O., [eds], Biometrika tables for statisticians, 3 ed., v. 1, Camb., 1966; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] J a e s c h k e D., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, № 1, p. 108–15; [4] К о т е л ь н и к о в а В. Ф., Х м а л а д з е Э. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 3, с. 599–607; [5] О у э н Д. В., Сборник статистических таблиц, пер. с англ., М., 1966; [6] J o h n s o n N. L., K o t z S., Continuous univariate

distributions, v. 1–2, N. Y., 1970; [7] Johnson N. L., Kotz S., Discrete distributions, Boston, 1969; [8] Johnson N. L., Kotz S., Continuous multivariate distributions, N. Y., 1972; [9] Хас-тингс Н., Пикок Д., Справочник по статистическим распределением, пер. с англ., М., 1980; [10] Мартынов Г. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. кибернетика, т. 26, М., 1988, с. 151–203.

RIYAZİ STEREOLOGIYA « математическая стереология; mathematical stereology » – *stoxastik hendesədə* fiqurların, çoxluqların təsadüfi kəsiklərini və ya təsadüfi *hendesi proseslərin* düzxətlərlə və ya müstəvilərlə kəsiklərini araşdıran istiqamətdir. R. s.-nin məsələsi yalnız kəsiklər haqqında informasiyaya əsaslanaraq, çoxölçülü obyektlərin hendesi xassələri haqqında nəticələr çıxarmaqdan ibarətdir. R. s.-nin nəticələri tətbiqi fənlərdə istifadə olunur (bax, [1], [2]).

R. s.-nin bir çox alqoritmləri *integral hendesənin* nəticələrinə əsaslanır. Bu hendesədə g düzxətinin hər hansı müstəvi əyrisi l ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı $N(g)$ və ya hər hansı D çoxluğunun $g \cap D$ «veterinin» uzunluğu $\chi(g)$ kimi kəmiyyətlərin inteqralları araşdırılır. Məs., düzxətlər fəzası üzrə inteqralları Evklid hərəkətləri qrupu M -ə nəzərən invariant dg ölçüsünə görə hesablamaq olar. Onda

$$\int N(g)dg = 2L, \quad \int \chi(g)dg = \pi S \quad (*)$$

düsturları doğrudur, burada L , $-l$ əyrisinin uzunluğu, S isə D çoxluğunun sahəsidir.

Belə nəticələrdən fiqurun hendesi parametrlərini onun təsadüfi düzxətlərlə (müstəvilərlə) kəsmə yolu ilə statistik qiymətləndirmə məqsədilə istifadə edilir. Adətən, r radiuslu K_r dairəsini kəsən düzxətlər çoxluğunda dg ölçüsünün daralmasına mütenasib olan eyni paylanmaya malik asılı olmayan $g_1, g_2, \dots, g_n$ təsadüfi xətlərinə baxılır (fiqur bütünlüklə K_r dairəsində yerləşir). (*)-dan

$$L = \frac{\pi r}{n} \sum_{i=1}^n N(g_i), \quad S = \frac{2r}{n} \sum_{i=1}^n \chi(g_i)$$

statistik qiymətləri alınır.

(*) düsturlarının analogları M – invariant təsadüfi çoxluqların qeyd olunmuş düzxətlərlə kəsikləri üçün də vardır. (*)-dan aydındır ki, təsadüfi çoxluğun vahid uzunluqlu parça ilə kəsinin orta birölçülü Lebeq ölçüsü vahid ölçülü sahəyə malik oblastda təsadüfi çoxluğun orta ikiölçülü Lebeq ölçüsünə bərabərdir.

R. s.-da realizasiyaları hamar əyrilərin hissələrindən ibarət təsadüfi çoxluqlara – lif proseslərinə də baxılır. M – invariant lif prosesini kəsən düzxətlər üzərində kəsiklərin birincis təsadüfi nöqtəvi prosesi alınır. Bu prosesin intensivliyi $\frac{2\lambda}{\pi}$ -yə bərabərdir, burada λ – vahid ölçülü sahəyə malik oblastda yerləşən bütün liflərin ümumi uzunluğuna bərabərdir (λ lif prosesinin intensivliyi adlanır). Kəsən düzxətlər lif arasındakı «tipik» bucağın paylanma sıxlığı $\frac{1}{2} \sin \alpha$ -ya bərabərdir.

Əgər təsadüfi lif prosesi birincis, lakin izotrop deyilsə, onda nöqtəvi prosesin kəsiklərinin intensivliyi $H(\varphi)$ kəsən düzxətin istiqaməti φ -dən asılıdır; $H(\varphi)$ intensivlik qızılqüllü adlanır. İntensivlik qızılqüllü məlum olduqda, λ intensivliyini və lif prosesi istiqamətlər qızılqüllünün sıxlığı m -i tapmaq olur və bu halda

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\pi H(\varphi) d\varphi, \quad m(\varphi) = \frac{1}{2\lambda} (H(\varphi) + H''(\varphi)).$$

Düzxətli liflər üçün ikinci moment ölçünün stereologiya üzrə nəticələri vardır (bax, [5]). Məs., fərz olunur ki, Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant, müstəvi üzərində parçaların təsadüfi meydanı $\{s_i\}$ verilir və $L(B)$ $\{s_i\}$ -də olan parçaların (və ya

onların hissələrinin) ümumi uzunluğudur və bu parçalar $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel çoxluğundadırlar. Tərifə görə, $m_1(B) = ML(B)$, $m_2(B_1 \times B_2) = M[L(B_1)L(B_2)]$ olduğu fərz olunur; m_1 və m_2 – uyğun olaraq, təsadüfi L ölçüsünün birinci və ikinci moment ölçüsü adlanır. m_1 və m_2 lokal sonlu ölçülər olsun. Onda $m_1(B) = \gamma \|B\|$, burada $\| \cdot \|$, $\mathbb{R}^2$ -də Lebeq ölçüsü, $\gamma > 0$ – hər hansı sabitdir. Əgər $\{s_i\}$ prosesinin qeyd olunmuş $g_0 \subset \mathbb{R}^2$ düzxətti ilə kəsiklərinin nöqtəvi prosesi $\{x_i\} = \{s_i \cap g_0\}$ -a baxılırsa, onda m_1 üçün stereologiya məsələsinin həlli $\gamma = \pi\lambda/2$ münasibətilə verilir, burada λ , $\{x_i\}$ -nin intensivliyidir; m_2 -ni yalnız $\{x_i\}$ nöqtəvi prosesinin terminlərində hesablamaq mümkün deyildir.

Əgər nişanlanmış $\{x_i, \psi_i\}$ nöqtəvi prosesinə baxılırsa, onda $\{s_i\}$ prosesi üzərinə ümumi xarakterli geniş şərtlərlə, $\{x_i, \psi_i\}$ prosesinin ikinci moment ölçüsü ν_2 , $\{s_i\}$ -dən olan tipik parçanın uzunluğunun paylanma funksiyası F ilə birlikdə bezi inteqral düsturlarla m_2 -ni birqiymətli təyin edirlər.

Kəsiklər prosesinin paylanması məlum olduğu halda, bir sıra mövcud nəticələr əsasında hendesi proseslərin yalnız orta kəmiyyətlərini deyil, onların «tipik» elementlərinin paylanmalarını da təyin etməyə imkan verən bir sıra nəticələr məlumdur. Parçaların təsadüfi prosesinin M – invariant «tipik» parçanın uzunluğunun paylanmasını parçaların düzxətlə kəsiklərinin nöqtəvi prosesi terminlərində hesablamaq olmur. Lakin prosesin parçaları 1 ehtimalla *təsadüfi mozaika* əmələ gətirdikdə bu məsələnin həlli vardır.

Bax, *Stoxastik hendesə, Təsadüfi kəsik(yi) çoxölçülü-nü*.

Əd.: [1] Салтыков С. А., Стереометрическая металлография, М., 1976; [2] Geometrical probability and biological structures, В. – [а. о.], 1978; [3] Санта́ло Л. А., Введение в интегральную геометрию, пер. с англ., М., 1956; [4] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [5] Меске J., «Probab. and Math. Statist.», 1981, v. 2, p. 31–35.

ROBAST STATİSTİK QIYMƏT « робастная оценка; robust estimator » – ilkin statistik modelin kiçik dəyişikliklərinə həssas olmayan *statistik qiymətdir*. Rus ədəbiyyatında R. s. q. termini ilə yanaşı *dayanıqlı, stabil, engələdayanıqlı* terminləri də istifadə olunur.

«Robast» termini C. Boks (G. Box) tərəfindən 1953-də verilmiş fərziyyələrdən kiçik yayınmalara dayanıqlı metodların işarə olunması üçün daxil edilmişdir. Bu termin geniş yayılmışdır və R. s. q. anlayışı onun xüsusi ifadəsidir. Statistik məlumatlar kobud xətalara malik olduğu halda R. s. q. istifadə olunur. Ənənəvi, robast olmayan metodlar, məs., ən kiçik kvadratlar metodu, hətta azsaylı kobud xətalara belə həssasdır. C. Tyuki, ilk dəfə olaraq robast qiymətləndirmə məsələsini araşdırmış və misallarla göstərmişdir ki, kobud xətalara statistik praktikada bir qayda olaraq

yol verilir. R. s. q. riyazi nəzəriyyəsinin əsasları [2]-də P. Hyuber tərəfindən qoyulmuşdur.

Robast qiymətləndirmə məsələsi funksionalların qeyri – parametrik qiymətləndirilmə məsələsinin xüsusi bir halı kimi formalaşır. Θ – parametrik fəza, $\Phi = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ – hər hansı bir funksiyalar ailəsi, U , – Φ ailəsinin hər hansı bir ətrafı və hər bir $\varphi \in U$ və hər bir natural n üçün $P_{n,\varphi}$ ehtimal ölçüsü təyin olunmuş olsun.

İlkin statistik model $\{P_{n,\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ ehtimal ölçüləri ailəsi ilə verilir. U ətrafı ilkin modelin kiçik dəyişikliklərini təsvir edir (məs., kobud xətalarn kiçik hissələrinin nəzərə çarpmasını). $Y^n = (y_1, \dots, y_n)$ seçiminin olduğu və bu seçimin $P_{n,\varphi}$ -yə uyğun paylandığı fərz olunur; φ , – U ətrafının naməlum elementidir. Məqsəd θ parametrinin φ -yə «ən müvafiq olan» statistik qiymətini qiymətləndirməkdir. Uyğunluq qiymətləri Θ -dan olan, U -da verilmiş və $T(F_\theta) = \theta$ şərtini ödəyən T funksionalı ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari $\varphi \in U$ üçün $T_n(Y^n)$ statistikası hər hansı bir kriteri mənasında $T(\varphi)$ üçün yaxşı statistikadırsa, onda $T_n(Y^n)$ θ parametrinin U -da *robast qiymətidir*, deyilir.

Bu sahədə qoyulmuş məsələlərdən ən çox araşdırılmış hal – $\Phi = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$, – $\mathbb{R}^1$ -də paylanma funksiyalar ailəsi, Θ – sonluölçülü Evklid fəzasının alt çoxluğu, y_i – eyni $\varphi = F$ paylanma funksiyasına malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu haldır. Məsələnin belə qoyuluşuna aid U ətrafı, T funksionalları, robastlıq kriteriləri və R. s. q. seçilməsinin müxtəlif hallarına dair aşağıda misallar şərh olunmuşdur.

Ətraflara aid misallar: 1) ε – kobud xətalı ailələr (rus. ε – засоренные семейства) (kobud xətalılar modeli)

$$U_\varepsilon = \{F: F = (1 - \varepsilon)F_\theta + \varepsilon H, \theta \in \Theta, H \in \mathcal{H}, 0 < \varepsilon < 1;$$

burada $\mathcal{H}$, – $\mathbb{R}^1$ -də verilmiş bütün paylanma funksiyalarının çoxluğudur ($\theta \in \mathbb{R}^1$ olduqda, bir çox hallarda $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\theta$ θ -ya görə simmetrik paylanma funksiyalarının çoxluğudur); 2) *metrik ətraflar*

$$U_{\varepsilon,d} = \{F: d(F, F_\theta) \leq \varepsilon, \theta \in \Theta\}, \varepsilon > 0;$$

burada d – paylanma funksiyaların fəzasında metrikadır.

Funksionallara aid misallar. a) $\theta \in \mathbb{R}^1$ olsun. Onda M – funksional $T(F)$ –

$$\int \psi(y - T(F)) F(dy) = 0$$

kimi təyin olunur, burada ψ – hər hansı monoton tək funksiyadır. $\psi(y) = y$ və $\psi(y) = \text{sign } y$ olduqda M – funksionallar uyğun olaraq F -in riyazi gözləmə (orta qiymət) və medianıdır. Əgər $F_\theta(y)$ – simmetrik paylanma funksiyası, ψ – məhdud funksiya və $F_\theta(y) = F_\theta(y - \theta)$ olarsa, onda $T(F_\theta) = \theta$ olur.

792 ROBAST

b) Minimal məsafə funksionalı (MD – funksional)

$$T(F) = \arg \min_{\theta \in \Theta} d(F, F_\theta)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Robastlıq kriterilərinə aid misallar.

1) Keyfiyyət robastlığı (bax, [3]). y_i -nin paylanma funksiyası F olduqda, $\mathcal{Z}_F(T_n)$ T_n statistik qiymətinin paylanma funksiyası olsun. Hər bir $\delta > 0$ üçün $\varepsilon > 0$ varsa ki, $d(F, F') \leq \varepsilon$ olduqda $\Delta = \lim_n d(\mathcal{Z}_F(T_n), \mathcal{Z}_{F'}(T_n)) \leq \delta$ olsun, onda $\{T_n\}$ F üçün *robast statistik qiymətlər* ardıcılığı adlanır. Bir çox statistik qiymətlər üçün ε^* vardır ki, $d(F, F') < \varepsilon^*$ olduqda Δ kiçik, $d(F, F') > \varepsilon^*$ olduqda Δ böyük olur. ε^* T_n statistik qiyməti üçün *sədd nöqtəsi* (rus. *пороговая точка*) adlanır. Bu nöqtə ε üçün ε limit ölçüsüdür ki, $U_{\varepsilon,d}$ -dən olan bütün paylanma funksiyaları üçün T_n statistik qiyməti məqbul olur.

2) Kəmiyyət robastlığı (M – funksional misalında). $\Theta = \mathbb{R}^1$, $\{F_\theta\}$, – $\mathbb{R}^1$ -də simmetrik yerindəyişmə ailəsi, T , – M – funksional və $T_n = T(F^n)$ olsun; F^n , – $(y_1, \dots, y_n)$ -in empirik paylanma funksiyasıdır. Onda T_n statistik qiyməti

$$\sum_{i=1}^n \psi(y_i - T_n) = 0$$

təyinin həllidir və bu halda T_n yerindəyişmə parametrinin M – statistik qiyməti adlanır. Müəyyən şərtlərlə $\sqrt{n}(T_n - T(F))$ kəmiyyəti orta qiyməti sıfır olan və müəyyən bir $V(\psi, F)$ dispersiyalı asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [2]). Əgər

$$\sup_{F \in U} V(\psi^*, F) = \min_{\psi} \sup_{F \in U} V(\psi, F)$$

bərabərliyi ödənilərsə, T_n -in $\psi = \psi^*$ funksiyasına uyğun M – statistik qiyməti U -da robast statistik qiymət adlanır. Əgər U normal paylanmanın simmetrik ε – kobud xətalı ətrafıdır, onda hər hansı bir $a = a(\varepsilon)$ üçün

$$\psi^*(y) = \min(a, \max(y, -a))$$

olacaqdır.

2) Robastlıq lokal asimptotik minimakslik kimi (bax, məs., [6]). Əgər

$$\lim_n \left(\inf_{T_n} \sup_{F \in U_n} \mathbf{M} w_n(P_{n,F}, P_{n,F_{T_n}}) - \sup_{F \in U_n} \mathbf{M} w_n(P_{n,F}, P_{n,F_{T_n}^*}) \right) = 0$$

olarsa, statistik qiymət *robast statistik qiymət* adlanır, burada $\inf$ – bütün statistik qiymətlər üzrə aşağı sərhəd, $w_n(\cdot, \cdot)$ – itki funksiyası, $\{U_n\}$, – $\{F_\theta\}$ ailəsinin ətraflarının daralan sistemidir, məs., $U_n = U_{1/\sqrt{n},d}$ (d – Hellinger metrikasıdır).

Yerinideyişmə parametri üçün R. s. q. kimi M – statistik qiymət L – statistik qiymət (qaydalı statistikaların xətti kombinasiyaları, məs., vinzor və kəsik orta qiymətlər), R – statistik qiymət (ranq statistik qiyməti) kimi statistik qiymətləri misal gətirmək olar. Bu statistik qiymətlərin kəmiyyət və keyfiyyət roblastlığı və eyni zamanda bunlara müvafiq miqyas statistik qiymətləri haqqında məlumat üçün [8]-ə bax. M – statistik qiymətlər üçün ədədi mənada sadə rekurrent analoqlar vardır (bax, [9]) və bu statistik qiymətləri regressiya, zaman sıralarının parametrlərinin qiymətləndirilməsi, filtrasiya və s. kimi məsələlərdə ümumiləşdirmək olur. Ümumi regressiya məsələsi üçün (eyni zamanda qeyri – xətti və qeyri – parametrik regressiya məsələləri) M – statistik qiymətlər

$$\sum_{i=1}^h \rho(y_i - \theta(x_i)) \rightarrow \min_{\theta \in \Theta} \text{ ekstremal məsələsinin (bax, [7])}$$

həlli kimi təyin olunur, burada ρ – mənfi olmayan qabarıq funksiya (məs., ψ -nin ibtidai funksiyası), Θ , $-\theta(\cdot)$ regressiya funksiyalarının verilmiş sinfi, x_i və y_i – uyğun olaraq, regression modelin asılı olmayan və asılı dəyişənləridir. $T_n = T(F^n)$ şəklində olan minimal məsafə statistik qiymətləri də T -nin MM – funksionalı olduğu halda R. s. q.-ə misaldır. d metrikaçı müəyyən bir qayda ilə seçilərsə, bu statistik qiymətlər (*) mənada MM – funksionalları üçün roblast qiymətlərdir (bax, [6]).

$T(F^n)$ tipli R. s. q. üçün əsas xarakteristika

$$IC_{F,T}(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T((1-t)F + t\delta_x) - T(F)}{t}$$

təsir funksiyasıdır, burada δ_x , x nöqtəsində toplanmış cırılmış paylanma funksiyasıdır. IC – bir müşahidə nəticəsində alınmış, x -ə bərabər olan və ən böyük həcmli seçimə əlavə olunan statistik qiymətə nisbi təsiri xarakterizə edən funksiyadır. Təsir funksiyasının qeyri – məhdud olması təktəktə kobud xətalərin statistik qiymətini olduqca təhrif edə bilər. $G(F) =$

$\sup_x |IC_{F,T}(x)|$ kəmiyyətinə *kobud xətalara həssaslıq kəmiyyəti* deyilir. Kiçik qiymətli ε -lar üçün ε – kobud xətalı

ailələrdə $T(F^n)$ statistik qiymətinin maksimal meyli təqribən $\varepsilon G(F_0)$ -ya bərabərdir; θ – qiymətləndirilən parametrin əsl qiymətidir. Əgər $T(F)$ F -in orta qiymətidirsə, onda $G(F) = \infty$ olur, bu isə seçimi ortanın roblast statistik qiymət olmadığı kimi interpretasiya olunur. Tipik hallarda $n^{-1} \int IC_{F,T}^2(x) F(dx)$

kəmiyyəti $T(F^n)$ statistik qiymətinin asimptotik dispersiyasına bərabərdir.

Əd.: [1] T u k e y J., Contributions to probability and statistics, Stanford, 1960, p. 448–85; [2] H u b e r P., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, № 1, p. 73–101; [3] H a m p e l F., «Ann. Math. Statist.», 1971, v. 42, № 6, p. 1887–96; [4] Е р ш о в А. А., «Автоматика и телемеханика», 1978, № 8, с. 66–100; [5] С м о л я к С. А., Т и т а р е н к о Б. П. Устойчивые методы оценивания, М., 1980; [6] M i l l a r P., «Z. Wahr. und Verw. Geb.», 1981, Bd 55, H. 1, s. 73–89; [7] Н е м и р о в с к и й А. С., П о л я к Б. Т., Ц ы б а к о в А. В., «Докл. АН СССР», 1983, т. 273, № 6, с. 1310–14; [8] Х ь ю - б е р П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984; [9] Ц ы п к и н Я. З., Основы информационной теории идентификации, М., 1984.

ROBASTLIQ(ғ) statistik prosedurun «робастность статистической процедуры; robustness of a statistical procedure» –

statistikanın parametrik modelinin olduqca «yaxşı» olmasını ifadə edən xassədir, bu halda bu statistik prosedura bu model çərçivəsində baxılır. R. nəzəriyyəsi statistikada özünün qeyri – formal təfərrüatında özünün yaranması ilə belə bir faktı əsaslanır ki, statistikada bir çox ümumi qəbul olunmuş fərziyyələrə (məs., normallıq, xəttilik, asılı olmamaqlıq) yalnız həqiqətə az və ya çox uğurlu yaxınlaşmalar kimi baxılır. Tətbiqi riyaziyyatın ixtiyari sahəsində olduğu kimi belə fərziyyələr olduqca faydalıdır; bunların tətbiqinin əsaslandırılmasının qiymətləndirilməsində kəsilməzlik və ya dayanıqlılıq prinsipinə müraciət olunur: riyazi modeldə kiçik xəta son nəticələrin mühüm xətasına səbəb olmamalıdır. Burada da klassik parametrik statistikanın nəzəriyyələri ilə bağlı, bu nəzəriyyələrlə dəqiq parametrik modellər üçün optimal prosedurların verilməsi kimi eyni problem yaranır, lakin real modellərə yalnız yaxın olan modellər üçün (məs., zəif metrikada) bu nəzəriyyələr cavab vermir.

R. problematikasının statistika tarixindən əvvəlki dövrə aid olmasına baxmayaraq, bir çox görkəmli statistiklər [S. Nyukom (S. Newcomb), K. Pirson (K. Pearson), U. Qosset (W. Gosset, təxəllüsü Student), H. Ceffris (H. Jeffreys), E. Pirson (E. Pearson) və b.] bu problematikanın olduğunu aydın dərk edirdilər, formal ciddi və olduqca ümumi yanaşmaların tapılması üçün səylər olduqca yaxın zamanda müvəffəqiyyətlə nəticələnmişdir. Bu yanaşmalar P. Hyuber ([1]) və F. Hampelin ([2]) adları ilə bağlıdır.

Robast qiymətləndirməyə minimaks yanaşma P. Hyubərə məxsusdur. O hesab edir ki, müşahidələrin paylanması $F(x - \theta) =$

$= (1 - \varepsilon) G(x - \theta) + \varepsilon H(x - \theta)$ düsturu ilə təyin olunur. Burada θ – yerinideyişmə parametri, G – parametrik modelə əlaqədar məlum paylanma, $\varepsilon > 0$ böyük xətalərin naməlum H paylanması ilə müəyyən hissəsini xarakterizə edən məlum ədəddir. θ parametrinin M – statistik qiymətindən, yeni $\sum \psi(x_i - T) = 0$ qiymətləndirmə tənliyinin köklərindən istifadə edildiyi fərz olunur. Qiymətləndirmə funksiyası ψ

$$\min_{\psi} \max_H \int \psi^2 dF / \left(\int \psi dF \right)^2$$

şərtindən seçilir. Qauss paylanma funksiyası halında qiymətləndirmə funksiyası $\psi(x) = \max(-k, \min(k, x))$ olan Hyuber statistik qiyməti alınır, burada k ε -dan asılıdır. $\varepsilon \rightarrow 0$ və ya $\varepsilon \rightarrow 1$ olduqda statistik qiymət kimi ədədi orta və ya median götürülür. Hyuber yanaşması [3]-də ətraflı şərh olunmuşdur.

F. Hampelin daxil etdiyi *infinitesimal yanaşma* aşağıdakı üç mərkəzi anlayışa əsaslanır: keyfiyyət roblastlığı, təsir funksiyası və sədd nöqtəsi (rus. пороговая точка). Bu anlayışlar birinci tertib törəmənin kəsilməzliyi və funksiyanın ən yaxın xüsusi nöqtəsinə qədər məsafəyə uyğundurlar.

$x_1, \dots, x_n$ – paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan çoxluqdan təkrar seçim olsun; $F_n(x)$ – bu seçimin uyğun empirik paylanma funksiyasıdır. İnfinitezimal yanaşmada $T_n(x_1, \dots, x_n) = T(F_n)$ şəklində statistik qiymətlərə baxılır, burada T – bütün empirik ölçüləri özündə saxlayan ehtimal ölçülərinin altfəzasında hər hansı funksionaldır. Əgər $F \rightarrow \mathcal{L}_F(T_n)$ inikaslar ardıcılığı F_0

$$a^2 \int_0^\infty e^{Av} A(\infty, x_0) e^{A^T v} dv$$

olan asimptotik normal vektordur.

Əd.: [1] Robbins H., Monro S., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, № 3, p. 400–07; [2] Галдышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 297–300; [3] Невельсон М. Б., Хасминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [4] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [5] Коростелев А. П., Стохастические рекуррентные процедуры, М., 1984.

ROSSBERG TEOREMİ « Россберга теорема;

Rossberg theorem » – Kolmoqorov hipotezinin müsbət həllini özündə ehtiva edən teoremdir; Kolmoqorov hipotezi: əgər sonsuz bölünən paylanma funksiyası və normal funksiya hər hansı

yanımda üst-üstə düşsə, onda bunlar eynidirlər (bax, [1]). R. t. paylanma funksiyalarını onların ədəd oxunun altçoxluqlarında qiymətlərinə görə birqiymətli təyin edilməsi problemi üzrə intensiv tədqiqatların başlanğıcını qoymuş oldu. Bu problem üzrə nəticələr [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Rossberg H. - J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 824–28; [2] Rossberg H. - J., Jesiak B., Siegel G., Analytic methods of probability theory, B., 1985.

ROZENBLATT – PARZEN STATİSTİK QİYMƏTİ

paylanma sıxlığının « Розенблатта – Парзена оценка плотности распределения; Rosenblatt – Parzen distribution density function estimator » – bax, *Sıxlığı, paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət.

SABİT KOD, ZAMAN ÜZRƏ « постоянный во времени код; time – constant code » – bax, *Konvolusion kod*.

SABİT TAKTLI İNTERVAL « постоянный тактовый интервал; constant interpulse interval » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

SADƏ HİPOTEZ « простая гипотеза; simple hypothesis » – bax, *Statistik hipotez, Statistik hipotezlerin yoxlanılması*.

SADƏ İNİKAS(1) В банаховом пространстве: « простое отображение банахова пространства: simple mapping of a Banach space » – bax, *Güclü ölçülən inikas*.

SADƏ KƏSİYİ, QRAFIN « простой разрез графа; ordinary cut of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu*.

SADƏ METRİKA « простая метрика; simple metric » – bax, *Ehtimal metrikası*.

SADƏ NÖQTƏVİ PROSES « простой точечный процесс; simple point process » – ehtimal təsadüfi nöqtəvi prosesdir ki, onun ixtiyari nöqtəsinin təkrarlıq sayı (kütləvi xidmət sistemində eyni zamanda daxil olan tələblər qrupunun ölçüsünə bərabər olan) vahidə bərabərdir. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində tələblərin daxilolma anları ilə yaranan nöqtəvi prosesin sadəliyi – tələblərin eyni zamanda qruplara daxil olmasının mümkünsüzlüyünə uyğundur. Kvadratik orta mənada differensiallanan stasionar Gauss prosesinin realizasiyası ilə səddin kəsilmə nöqtələri S. n. p. əmələ gətirir. Əgər Φ lokal məhdud moment ölçüsünə malik S. n. p.-dirsə, onda Φ – ordinar nöqtəvi prosesdir.

Bax, *Nöqtəvi proses*.

SADƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « простая случайная величина; simple random variable » – Ω elementar hadisələr fəzasının sonlu bölgüsünün atomları – A_i hadisələrinin indikatorlarının xətti kombinasiyaları –

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(\omega) \quad (1)$$

diskret təsadüfi kəmiyyətlərinə deyilir (x_i sonlu ədədlərdir);

$A_i \subset \Omega$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ və $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \emptyset$; əgər

hər hansı bir i üçün $x_i = 0$ olarsa, onda (1) xətti kombinasiyasında x_i -yə uyğun $x_i \cdot I_{A_i}(\omega) = 0$ həddi nəzərə alınmır.

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I_{A_i}(\omega) \text{ sadə təsadüfi kəmiyyətinin riyazi}$$

gözləməsi $M\xi$ –

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. İxtiyari c sabiti S. t. k.-dir və $M\xi = c$. $\xi(\omega)$ S. t. k.-i üçün: $M\xi(\omega) = cM\xi(\omega)$; əgər $\xi(\omega) \geq 0$, yəni bütün i -lər üçün $x_i \geq 0$ olarsa, onda $M\xi(\omega) \geq 0$; əgər $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ S. t. k.-lər və $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ olarsa, onda $M\xi(\omega) \leq M\eta(\omega)$ münasibəti doğrudur. İki S. t. k.-in cəmi və hasilı də S. t. k.-dir. Sonlu sayda S. t. k.-lərin cəminin riyazi gözləməsi toplanan S. t. k.-lərin riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir: $M \sum_{i=1}^m \xi_i(\omega) = \sum_{i=1}^m M\xi_i(\omega)$.

($\Omega, \mathcal{F}$) – ölçülən fəza və $A, \bar{A} \in \mathcal{F}$ – ölçülən ixtiyari çoxluq olarsa, $I_A(\omega)$ S. t. k.-dir və $MI_A = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A)$.

Əd.: [1] Л о в М., Теория вероятностей, М., 1962.

SADƏ ZƏNCİRİ, QRAFIN « простая цепь графа; ordinary path of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu*.

SAĞ MARKOV PROSESİ « правый марковский процесс; right Markov process » – sağ Meyer hipotezlerini ödəyən, yeni sağdan kəsilməz olan prosesin bütün α – ekssessiv funksiyaları prosesin bütün trayektoriyaları boyunca sanki yəqin sağdan kəsilməz, Markov prosesidir. $X = (X_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ – qiymətləri metrik kompaktın Borel E alt-çoxluğundan olan, bircins Markov prosesi və $P_x\{X_0 = x\} = 1$ olsun. Əgər X prosesinin: a) trayektoriyaları sağdan kəsilməz olarsa; b) σ – cəbrlər axını $\mathcal{A}_t$ sağdan kəsilməz olub,

$\mathcal{A}_t = \bigcap_{\mu \leq t} \mathcal{A}_\mu^{\mu}$ kimi təyin olunarsa (kəsişmə E -də təyin olun-

muş bütün ehtimal μ ölçüləri üzrədir), burada $\mathcal{A}_t^{\mu}$ – $\mathcal{A}_t$ -ni və μ ölçüsü üzrə $\mathcal{A}$ -nın tamamlayıcısından P_μ – ölçüsü 0 olan bütün çoxluqları özündə saxlayan minimal σ – cəbrdir; c) ixtiyari α – ekssessiv $f(x)$ funksiyası üçün (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) $f(X_t)$ təsadüfi prosesi E -də təyin olunmuş ixtiyari μ ölçüsü üçün P_μ – sanki yəqin sağdan kəsilməz olarsa, X prosesi sağ Markov prosesi adlanır. S. M. p. ciddi Markov prosesidir və hətta sağdan kəsilməz ciddi Markov prosesidir, $\mathcal{A}_t$ axını üçün qeyd olunan şərtləri ödəyən bu proses S. M. p.-dir. S. M. p.-ləri [1]-də standart Markov prosesinə əvəz kimi proseslərin ən geniş sinfi olaraq təklif olunmuşdur ki, bunlar üçün ehtimali potensial nəzəriyyəsinin konstruksiyalarını həyata keçirmək olur; bu ideyalar sonralar [2], [3]-də inkişaf etdirilmişdir.

Qeyri – bircins $X = (X_t, \mathcal{A}_t^s, P, P_{s,u}, P^{t,u})$ Markov prosesləri (bax, *Markov prosesi*) üçün S. M. p.-nin analoqu aşağıdakı şərtləri ödəyən proseslərdir: ixtiyari $s < u$, $A \in \mathcal{A}_s^u$, $B \in \mathcal{A}_u^\infty$ üçün $P_{t,X_t}(A)$ təsadüfi prosesi $[s, u]$ -da $P_{s,u}$ – sanki yaqın sağdan kəsilməzdir, $P^{t,X_t}(B)$ təsadüfi prosesi isə $[s, u]$ -da $P^{s,u}$ – sanki yaqın sağdan kəsilməzdir (bax, [4]).

Əd.: [1] Walsh J. B., Meyer P.-A., «Invent. Math.», 1971, t. 14, p. 143–66; [2] Gettoor R. K., Markov process. Ray processes and right process, B., 1975; [3] Engelbert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 84, S. 277–300; [4] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

SAĞ PALM PAYLANMASI «правое распределение Пальма; right Palm distribution» – bax, *Nöqtəvi proses qrupda*.

SAĞ TƏSADÜFİ DOLAŞMA «правое случайное блуждание; right random walk» – bax, *Markov zənciri*.

SANKİ BOREL FUNKSİYASI «почти борелевская функция; almost Borel function» – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

SANKİ INVARIANT KRİTERİ «почти инвариантный критерий; almost invariant test» – bax, *Invariant kriteri*.

SANKİ SEPARABELQİYMƏTLİ İNİKAS «почти сепарабельнозначное отображение; almost separably valued mapping» Banax fəzalarının – bax, *Güclü ölçülən inikas*.

SANKİ STASİYONAR TƏSADÜFİ PROSES «почти стационарный случайный процесс; almost stationary stochastic process» – müntəzəm məhdud xətti stasionar təsadüfi prosesdir; stasionarlığa yaxın xüsusi xassəyə malik təsadüfi prosesdir. Əgər ele sabit $K \geq 1$ olarsa ki, ixtiyari natural n , kompleks $c_1, \dots, c_n$ ədədləri və $s, t_1, \dots, t_n \in T$ qiymətlərində

$$M \left| \sum_{j=1}^n c_j X(t_j + s) \right|^2 \leq K M \left| \sum_{j=1}^n c_j X(t_j) \right|^2$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda kompleksqiymətli $X_t, t \in T$ təsadüfi prosesi geniş mənada sanki stasionar proses adlanır; $M|X(t)|^2 < \infty$ fərz olunur və $T = (-\infty, \infty)$ və ya $T = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Əgər ele sabit $K \geq 1$ olarsa ki, ixtiyari natural $n, s, t_1, \dots, t_n$ ədədləri və n – ölçülü kompleks fəzanın Borel çoxluğu Γ üçün

$$P\{(X(t_1 + s), \dots, X(t_n + s)) \in \Gamma\} \leq K P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in \Gamma\}$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda kompleksqiymətli $X(t), t \in T$ prosesi dar mənada sanki stasionar proses adlanır.

$MX(t) = 0$ şərtlərini ödəyən geniş mənada S. s. t. p. üçün H_X Hilbert fəzasında xətti bəkiləməz müsbət A operatoru vardır, bu operator $X(t), t \in T$ prosesinin qiymətlərinin kvadratik orta mənada qapalı xətti örtüyüdür (bax, *Korrelasyon nəzəriyyəsi*) təsadüfi funksiyaların) və geniş mənada ele $Y(t)$ prosesi və ele $H_Y = H_X$ vardır ki, $X(t) = AY(t), t \in T$ (bax, [1]) bərabərlikləri doğrudur. Əgər $X(t) (\Omega, \mathcal{B}_X, P)$ ehtimal fəzasında dar mənada S. s. t. p.-dirsə, onda $(\Omega, \mathcal{B}_X)$ ölçülən fəzasında P -yə ekvivalent ele P' ölçüsü vardır ki, $X(t)$ bu ölçüyə nəzərən dar mənada stasionar prosesdir və $1/K \leq dP'(\omega) \leq K$ münasibəti sanki yaqın ödənilir, burada $\mathcal{B}_X$ – $X(t), t \in T$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğruduğu σ – cəbrdir.

Əd.: [1] Tjøstheim D., Thomas J. B., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1975, v. 21, № 3, p. 257–62; [2] Tjøstheim D., «Adv. Appl. Probab.», 1976, v. 8, № 4, p. 820–30.

SAPOQOV TEOREMİ «Сапогова теорема; Sapogov theorem» – bax, *Dayanıqlılıq (ğı) paylanmalarının xarakterizasiyalarının*.

SAYICI ÖLÇÜ(sü) nöqtəvi prosesin «считающая мера точечного процесса; counting measure of a point process» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

SAYICI PROSES «считающий процесс; counting process» – $0 \leq t < \infty$ yarımxunda verilən ele $X(t)$ prosesidir ki, $X(0) = 0$, özünün iki ardıcıl ixtiyari kəsilmə nöqtələri t_{k-1} və t_k arasında $X(t) = \text{const}$ olub, $X(t)$ -nin qiyməti hər bir kəsilmə nöqtəsi t_k -da yalnız bir vahid artır [odur ki, $X(t)$ prosesi t -nin bütün qiymətlərində tam mənfə olmayan qiymətlər alır]. $X(t)$ prosesinin kəsilmə nöqtələrinin ardıcılığı $\{t_k\}$ $X(t)$ -nin özünü də birqiymətli təyin edən, $t \geq 0$ yarımxunda müəyyən bir *nöqtəvi təsadüfi proses* olur. Bütün S. p.-lər sinfinin mühüm xüsusi altsinifləri *Puasson prosesinin* altsinifidir və bunlar üçün $\{t_k\}$ nöqtələrin Puasson ardıcılığıdır (yəni $t = 0, k = 1, 2, \dots$ olduqda $t_k - t_{k-1}$ fərqləri eyni eksponensial qanunla paylanan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı təşkil edir) və daha ümumi altsinif *berpa proseslərinin* altsinifidir və bu proseslər üçün $t_k - t_{k-1}$ fərqləri eyni ehtimal paylanmasına malik (ümumiyyətlə isə, ixtiyari qanunla paylanmış) qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

S. p.-lərə ekser hallarda tətbiqi məsələlərdə təsadüf olunur, bu məsələlərdə təsadüfi t_k anlarında baş verən hadisələr, bu hadisələrin t anına qədər baş vermə sayı maraqlı doğrudur; məs., $X(t)$ berpa prosesi hər hansı aqreqatın t müddəti ərzində evəz olunmaları (və ya təmiri) sayını ekser hallarda yaxşı dəqiqliklə təsvir edir. Bezi hallarda S. p.-e bütün $-\infty < t < \infty$ ədəd oxunda baxılır və bu hallarda bu proses də tam mənfə olmayan qiymətlər alır, lakin $k = -1, -2, \dots, t_k$ ardıcıl təsadüfi kəsilmə nöqtələrinin hər birində bir vahid artır, bu halda da $X(t)$ ($-\infty < t < \infty$) prosesi S. p. adlanır.

Bax, *Nöqtəvi proses*.

SEÇİM; açım « **выборка; размах; sample range** » – bax, *Açım(1) seçimin.*

SEÇİM kəsik « **выборка усеченная; truncated sample** » – bax, *Kəsik seçim.*

SEÇİM laylanmış « **выборка расслоенная; stratified sample** » – bax, *Laylanmış seçim.*

SEÇİM rəprezentativ « **выборка репрезентативная; representative sample** » – bax, *Rəprezentativ seçim.*

SEÇİM senzurlanmış « **выборка цензурированная; censored sample** » – bax, *Senzurlanmış seçim.*

SEÇİM; səpələnmə « **выборка; рассеивание; sample dispersion / variation** » – bax, *Səpələnmə(s) seçim.*

SEÇİMİ ASİMMETRİYA ƏMSALI « **выборочный коэффициент асимметрии; sample coefficient of skewness** » – bax, *Asimmetriya əmsali.*

SEÇİMİ BAŞ KOMPONENTLƏR « **выборочные главные компоненты; sample principal components** » – adi baş komponentlərin analoqudur, lakin bunların tapılmasında kovariasion Ξ matrisi deyil, empirik kovariasion $\hat{\Xi}$ matrisindən istifadə olunur. Beləliklə, S. b. k. o halda tapılır ki, X vektoru məlum olmayıb, yalnız müşahidə olunan asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ müşahidələnləri məlum olsun. Bax, *Rəduksiya, verilənlərin (əlamətlərin).*

SEÇİMİ BLOKLAR « **выборочные блоки; sample blocks** » seçimi intervallların – F paylanmasına malik $X_1, \dots, X_N$ təkrarlanan seçiminin *qaydalı statistikaları* – $X_N(S)$ -lərdən təşkil olunmuş $(-\infty, X_N(1)], (X_N(1), X_N(2)], \dots, (X_N(N), +\infty)$ intervallandır. Bu intervallların uzunluqları *speysinqlər* (seçimi) adlanır. Əgər F $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanma funksiyasıdırsa, qeyd olunan intervallların uzunluqları *müntəzəm speysinqlər* adlanır. G paylanmasına müvafiq n həcmli təkrarlanan seçimin nöqtələrindən (əvvəlkindən asılı olmayan) S. b.-lərə daxil olan nöqtələrin sayları – uyğun olaraq $x_1, \dots, x_{N+1}$ ədədlərinə blok tezlikləri deyilir. Əgər F kəsilməz paylanma funksiyasıdırsa, onda $\Delta_N(s) = F(X_N(s)) - F(X_N(s-1))$ kəmiyyətləri müntəzəm speysinqlər təşkil edir; eger, bundan əlavə, $F = G$ olarsa, onda $((N+1)\Delta_N(s), x_s), s = 1, \dots, N+1$ vektorlarının birgə paylanması

$$\sum_{s=1}^{N+1} \eta_s = N+1, \quad \sum_{s=1}^{N+1} \zeta_s = n$$

şərtinə görə $(\eta_s, \zeta_s), s = 1, \dots, N+1$ vektorlarının birgə paylanması ilə üst-üstə düşür. Burada (η_s, ζ_s) – ikinci komponentinin marginal paylanması $n(N+n+1)^{-1}$ parametrlə həndəsi paylanma olan asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi vektorlar. η_s -in $\zeta_s = z$ şərtinə əsasən şərti paylanması $z+1$ şəkilli parametrləri və $(N+1)(N+n+1)^{-1}$ miqyaslı qamma – paylanmadır. $F(X_N(0)) = 1 - F(X_N(N+1)) = 0$ olduqda

$$\xi = \sum_{s=1}^{N+1} f_s((N+1)\Delta_N(s), x_s)$$

şəklində kəmiyyətlər ayrılan statistikalarla aid misaldır, burada f_s – Borelə görə heqiqi funksiyalardır. Əgər hər bir s üçün f_s funksiyaların ikinci argumentdən asılı olmazsa, onda ξ – uzlaşma kriterilərinin statistikaları, əgər f_s birinci argumentdən asılı olmayan funksiyalar olarsa, onda ξ iki seçimin biricinsliyi kriterilərinin statistikalarıdır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] К у д л а е в Э. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 170–74; [3] Р у к е R., «J. Roy. Statist. Soc. B.», 1965, v. 27, № 3, p. 395–436.

SEÇİMİ DISPERSİYA « **выборочная дисперсия; sample variance** » – *empirik ehtimal paylanmasının* dispersiyasıdır. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

statistikası *seçimi dispersiya* və ya $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanmanın *dispersiyası* adlanır, burada

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

$a_k = M X_1^k, m_k = M(X_1 - a_1)^k$ olsun. Onda $a_4 < \infty$ olduqda, S. d. S_n^2 asimptotik meyilsizlik xassəsinə malikdir, çünki

$$M S_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_2$$

və tutarlılıq xassəsinə də malikdir, çünki,

$$D S_n^2 = \frac{m_4 - m_2^2}{n} - 2 \frac{m_4 - 2m_2^2}{n^2} + \frac{m_4 - 3m_2^2}{n^3} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

statistikası da m_2 dispersiyasının meyilsiz statistik qiymətidir, yəni $M s_n^2 = m_2$.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] В о и н о в В. Г., Н и к у л и н М. С., Несмешенные оценки и их применения, М., 1989.

SEÇİMİ EHTİMAL FƏZASI « **выборочное вероятностное пространство; sample probability space** » – bax, *Paylanma(s) təsadüfi kəmiyyət.*

SEÇİMİ EKSSƏS ƏMSALI « **выборочный коэффициент эксцесса; sample coefficient of excess** » – bax, *Eksses əmsali.*

SEÇİMİ FUNKSİYA «выборочная функция; sample function»

$\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ təsadüfi prosesinin trayektoriyası, realizasiyası – ω qeyd olunduqda T çoxluğunun M çoxluğuna $\zeta(\cdot, \omega)$ inikasıdır, burada $\zeta(t)$ prosesi $t \in T$ olduqda (T hər hansı parametrik çoxluqdur) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuşdur və $(M, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır. Əgər təsadüfi prosesin sanki bütün $S. f.$ -ları (P ölçüsünə nəzərən) hər hansı bir xassəyə malik olarlarsa, onda prosesin özünün də bu xassəyə malik olduğu deyilir. Məs., T və M topoloji fəzalarsa və prosesin sanki bütün $S. f.$ -ları kəsilməzdirsə, onda proses kəsilməz proses adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

SEÇİMİ XARAKTERİSTİKA «выборочная характеристика; sample characteristic» – empirik ehtimal paylanmasının funksionalıdır. $S. x.$ -nin köməyiylə riyazi statistikanın ideyaları əsasında, təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilmələri texnikasından istifadə edərək statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin, hipotezlərin statistik yoxlanılması və s. məsələlərin həlli üçün statistik prosedurlar qurulur. Empirik paylanma funksiyası, seçimi orta və dispersiya, seçimi asimetriya və eksess əmsalları seçimi elementinin ehtimal paylanmasının uyğun xarakteristikalarının dəqiq nöqtəvi statistik qiymətləri olub, $S. x.$ -ya ən sadə misallardır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

SEÇİMİ İNTERVALLAR (ARALIQLAR) «выборочные промежутки; sample intervals» – bax, Seçimi bloklar.

SEÇİMİ KƏSİLMƏZLİK(yi) təsadüfi prosesin «выборочная непрерывность случайного процесса; sample continuity / continuity of sample paths of a stochastic / random process» – seçimi funksiyaların kəsilməzliyidir. $\{\zeta(t), t \in [a, b]\}$ prosesinə stoxastik ekvivalent kəsilməz seçimi funksiyalarlı prosesin varlığı üçün kafi şərtlərdən ən yayılmış hesab olunan Kolmoqorov şərtidir (bax, [1]):

$$M|\zeta'(s) - \zeta'(t)|^p \leq c|s - t|^{1+\gamma}, \quad p > 0, \gamma > 0, \quad s, t \in [a, b].$$

Kolmoqorov şərti kompakt metrik fəzanın metrik fəzaya təsadüfi inikasıları üçün ümumiləşdirilir (bax, [3]). $S. k.$ şərtləri ən çox Gauss prosesləri üçün öyrənilmişdir (bax, [2]). $\mathbb{R}^k$ -nin altçoxluqlarında təsadüfi meydanlar üçün $S. k.$ şərtləri daxil etmə teoremlərinin köməyiylə alına bilinir (bax, [4]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Белыев Ю. К., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, с. 775–776; [3] Boulicaut P., «Ann. Inst. Fourier», 1974, t. 24, № 2, p. 27–48; [4] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–49.

SEÇİMİ KORRELOQRAM «выборочная коррелограмма; sample correlogram» – bax, Korreloqram.

SEÇİMİ KORRELYASİON FUNKSİYA «выборочная корреляционная функция; sample correlation function», stasionar təsadüfi prosesin seçimi kova-

riasion funksiyası – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesi-nin

$$B(\tau) = M\zeta(t + \tau)\zeta(t)$$

və ya

$$b(\tau) = M[\zeta(t + \tau) - M\zeta(t + \tau)][\zeta(t) - M\zeta(t)]$$

korrelyasion funksiyasının $0 \leq t \leq T$ və ya $t = 1, 2, \dots, T$ qiymətlərində bu prosesin bir realizasiyası $x(t)$ -nin müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə hesablanan sadə statistik qiymətdir. $0 \leq |\tau| < T$ olarsa, onda seçimi korrelyasion

funksiya – $B_T^*(\tau)$ t kəsilməz olduğu halda

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t=1}^{T-|\tau|} x(t + |\tau|)x(t) dt$$

düsturu ilə, t diskret olduğu halda isə

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} x(t + |\tau|)x(t)$$

düsturu ilə verilir. Əgər $b(\tau)$ funksiyası qiymətləndirilirsə və prosesin orta qiyməti $M\zeta(t) = m$ naməlumdursa, onda $S. k. f.$

$b_T^*(\tau)$

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} [x(t + |\tau|) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}] dt,$$

$$\bar{x} = T^{-1} \int_0^T x(t) dt,$$

və uyğun olaraq,

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} [x(t + |\tau|) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}],$$

$$\bar{x} = T^{-1} \sum_{t=1}^T x(t)$$

düsturları ilə verilir.

$B_T^*(\tau)$ statistik qiyməti $B(\tau)$ üçün meylli, lakin tutarlı statistik qiymətdir, $b_T^*(\tau)$ statistik qiyməti də $b(\tau)$ funksiyası üçün eyni statistik qiymətdir. $|\tau| \geq T$ olduqda τ arqumentinin bütün həqiqi qiymətləri (uyğun olaraq tamqiymətli) üçün $B_T^*(\tau) = 0$ və $b_T^*(\tau) = 0$ şərtlərinin köməyiylə tamamilə təyin olunan $B_T^*(\tau)$ və $b_T^*(\tau)$ funksiyaları τ arqumentinin müsbət müəyyən funksiyalardır; bunların Furje çevirməsi $\zeta(t)$ prosesinin periodoqramı və ya $\zeta(t) - M\zeta(t)$ – spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində (yeni stasionar proseslərin spektral analizində) mühüm rol oynayır.

SEÇİMİ KORRELYASİYA ƏMSALI «выборочный коэффициент корреляции; sample correlation coefficient» – bax, Korrelyasiya.

SEÇİMİ KOVARIASİYON FUNKSIYA « выборочная ковариационная функция; sample covariance function » – bax, Seçimi korrelyasion funksiya.

SEÇİMİ KOVARIASIYA « выборочная ковариация; sample covariance » – bax, Kovariasiya.

SEÇİMİ KVANTİL « выборочная квантиль; sample quantile » λ tertib seçimi kvantil, $0 < \lambda < 1$, –

$[n\lambda] + 1$ nömrəli $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş *variation* sıranın elementidir, $[a]$, – a -nın tam hissəsidir. Paylanma funksiyası ümumi F və paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan asılı olmayan X_i , $1 \leq i \leq n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 1$ tertib S. k.-lər $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq k – ölçülü normal qanunla paylanır və bunların uyğun riyazi gözlemləri x_{λ_i} , $1 \leq i \leq k$, kovariasiyalan –

$$\lambda_i(1 - \lambda_j) / n f(x_{\lambda_i}) f(x_{\lambda_j}), \quad i \leq j$$

kəmiyyətlərdir, $F(x_{\lambda_i}) = \lambda_i$. S. k.-dən paylanma funksiyası F -in kvantillərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur.

Əd.: [1] Д э й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

SEÇİMİ MEDIAN « выборочная медиана; sample median » – *empirik paylanmanın medianıdır*,

$$\mu_n = X_{(k+1)}, \quad \text{əgər } n = 2k + 1,$$

$$\mu_n = (X_{(k)} + X_{(k+1)}) / 2, \quad \text{əgər } n = 2k \text{ olarsa, } k = 1, 2, \dots,$$

münasibətlərlə təyin olunan μ_n statistikasıdır, burada $(X_{(i)})_{i=1}^n$ – artan qaydada nizamlanmış $\{X_i\}_{i=1}^n$ təsadüfi kəmiyyətlərdir. X_i , $i = 1, 2, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x)$ isə X_i -lər üçün ümumi paylanma funksiyası olarsa, onda

$$P\{\mu_{2k+1} < x\} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \int_0^{F(x)} y^k (1-y)^k dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Əgər

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

və $F(m) = 1/2$, f isə m nöqtəsi ətrafında müsbət və differensiallanan olarsa, onda μ_n m və $1/4n f^2(m)$ parametrləri asimptotik normal qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyətdir.

Əd.: [1] Д э й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

SEÇİMİ METOD « выборочный метод; sampling method » – hər hansı obyektlər çoxluğunun ümumi xassələrinin araşdırılması üçün onun yalnız bir hissəsi olan *seçim* üçün götürülmüş obyektlərin xassələrinin öyrənilməsinə əsaslanan statistik metoddur. S. m.-un riyazi nəzəriyyəsi riyazi statistikanın iki mühüm bölməsinə – sonlu çoxluqdan seçmə nəzəriyyəsi və sonsuz çoxluqdan seçmə nəzəriyyəsi kimi bölmələrə əsaslanır. Sonlu və sonsuz çoxluqlar üçün S. m.-ların fərqi ondan ibarətdir ki, birinci halda S. m., bir qayda olaraq, təsadüfi olmayan, deterministik təbii obyektlərə (məs., hazır məhsulun verilmiş bir partiyasında qüsurlu məhsulların sayı təsadüfi kəmiyyət deyil: bu məlum

sabit bir ədəddir və o, seçimi verilənlər əsasında təyin olunur) tətbiq olunur. İkinci halda S. m., adətən, təsadüfi obyektlərin xassələrinin öyrənilməsi üçün tətbiq olunur (məs., kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi olan ölçmə xətalının xassələrinin araşdırılması üçün tətbiq oluna bilər; bu halda ölçmə xətalılarından hər biri, nəzəri olaraq, mümkün nəticələrin sonsuz çoxluğunun bir realizasiyası kimi interpretasiya oluna bilər).

Sonlu çoxluqdan seçim və onun nəzəriyyəsi keyfiyyət nəzarətin əsas statistik metodlarının əsası sayılır, sosioloji araşdırmalarda tez-tez tətbiq olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinə görə, seçim təsadüfi qayda ilə aparılırsa, yeni N həcmli ümumi çoxluqdan verilmiş n həcmli mümkün seçimlərin ixtiyari birinin seçilməsi ehtimalı faktiki seçilmiş seçim ehtimalı ilə eyni olur [bele seçimlərin sayı $N!n!(N-n)!$ -a bərabərdir].

Praktikada əksər hallarda qaytarmamaq şərti ilə seçim (təkrarsız seçim) istifadə olunur: bu halda, hər bir seçilmiş obyekt ondan sonra seçiləcək obyektlərin araşdırılan çoxluğuna qaytarılmır (bele seçimlər, məs., uduşlu lotereya biletlərinin təyin olunmasında, keyfiyyət statistik nəzarətdə, demografik araşdırmalarda və s. tətbiq olunur). Qaytarmamaq şərti ilə seçim (təkrarlı seçim), adətən, yalnız nəzəri araşdırmalarda istifadə olunur (məs., qapalı qabda Braun hərəkətində olan, verilmiş zaman ərzində qabın divarlarına toxunan hissəciklərin sayı qeyd olunduqda). Əgər $n \ll N$ olarsa, onda qaytarmaq şərti və qaytarmamaq şərti seçimlər praktik olaraq ekvivalent nəticələr verir.

S. m.-la çoxluğun araşdırılan xassələri keyfiyyət və kəmiyyət xarakterli ola bilər. Birinci halda seçimi araşdırma ümumi çoxluqdan hansısa əlamətlərə malik obyektlərin sayı M -i təyin etməkdən ibarətdir (məs., statistik nəzarətdə, əksər hallarda, N həcmli partiyada qüsurlu məmulatların sayı M -i təyin etmək tələb olunur). M üçün mN/n nisbəti onun statistik qiyməti kimi götürülür, burada m , – n həcmli seçimdəki verilən əlamətli obyektlərin sayıdır. Kəmiyyət əlamətli halda ümumi çoxluq üçün orta qiymət – $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N$ kəmiyyətindən istifadə olunur. $\bar{x}$ üçün statistik qiymət

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$$

seçimi ortası götürülür, burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ – araşdırılan $x_1, x_2, \dots, x_N$ çoxluğundan ele qiymətlərdir ki, onlar n həcmli seçimə daxildirlər. Riyazi nöqtəyi – nəzərdən vahidə bərabər olan x_i -lərin sayı M , digər sıfıra bərabər olan x_i -lərin sayı $(N - M)$ olarsa, birinci hal ikinci halın xüsusi bir halıdır, bu halda, $\bar{x} = M/N$, $\bar{X} = m/n$ olur.

S. m.-un riyazi nəzəriyyəsində orta qiymətin qiymətləndirilməsi mühüm əhəmiyyətə malikdir, çünki çoxluq daxilində əlamətin dəyişikliklərinin kəmiyyətə təsvir edilməsinin əsası orta qiymət üçün təyin edilən statistik qiymət təyin edir, belə ki, dəyişikliklər xarakteristikası kimi

$$\sigma^2 = [(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2] / N$$

dispersiyası götürülür ki, bu da x_i -lərin onların orta qiyməti $\bar{x}$ ilə yayınmalının kvadratlının orta qiymətidir. Keyfiyyət əlaməti yoxlanıldığı halda

$$\sigma^2 = M(N - M) / N^2$$

götürülür.

m/n və $\bar{X}$ statistik qiymətlərinin dəqiqliyi haqqında onların dispersiyaları –

$$\sigma_{m/n}^2 = \mathbf{M}(m/N - M/N)^2 \text{ və } \sigma_{\bar{X}}^2 = \mathbf{M}(\bar{X} - \bar{x})^2$$

kəmiyyətlərinə görə mülahizələr edilir, bunlar da sonlu çoxluq üçün dispersiyanın σ^2 terminlərində σ^2/n nisbəti (təkrarlanan elementli seçimlər halında) və $\sigma^2(N-n)/n(N-1)$ kimi ifadə olunurlar (təkrarsız elementli seçimlər halında). Praktiki cəhətdən bir çox maraqlı məsələlərdə $n \geq 30$ qiymətlərində m/n və $\bar{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri təqribi olaraq normal qanuna tabe olduqlarından, m/n -in M/N -dən və $\bar{X}$ -nin $\bar{x}$ -dən yayınmaları – uyğun olaraq, mütləq qiymətlə $2\sigma_{m/n}$ və $2\sigma_{\bar{X}}$ dispersiyalarından kiçik olmayan yayınmaları – $n \geq 30$ olduqda orta hesabla təqribən iyirmi haldan birində baş verə bilər.

Verilən ümumi çoxluğun kəmiyyət əlamətinin paylanması haqqında daha mükəmməl informasiyanı bu əlamətin seçim üzrə empirik paylanması əsasında almaq olar.

Sonsuz çoxluqdan seçim. Riyazi statistikada hər hansı bir cins olan müşahidələrin (əksər hallarda asılı olmayan) nəticələri seçim adlandırılır və bu termindən bu nəticələrin təkrarlanan və təkrarlanmayan elementləri seçim anlayışına uyğun gəlmədiyi halda belə istifadə edilir. Məs., ərazidəki küncələrin ölçülməsi nəticələri asılı olmayan kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi xətalara məruz olduğundan, bu nəticələr əksər hallarda sonsuz çoxluqdan seçim kimi adlandırılır. Fərz olunur ki, belə müşahidələri prinsip etibarilə ixtiyari sayda aparmaq olar. Faktiki alınmış nəticələrin çoxluğu mümkün olabilən nəticələrin sonsuz çoxluğundan – ümumi çoxluq adlandırılan çoxluqdan seçim hesab edilir. Ümumi çoxluq (rus. генеральная совокупность) anlayışı məntiqi nöqtəyi – nəzərdən qüsursuz və zəruri deyildir. Məsələlərin praktiki həlli üçün ümumi çoxluğun özündən deyil, bu çoxluğa uyğun götürülən bu və ya digər xarakteristikalardan istifadə olunur. Bu xarakteristikalar ehtimal nöqtəyi – nəzərdən hər hansı ehtimal paylanmasının ədədi və ya funksional xarakteristikalarıdır. seçimin elementləri isə təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunlar bu ehtimal paylanmasına tabedirlər. Belə yanaşma seçimi statistik qiymətlərə statistik qiymətlərin ümumi nəzəriyyəsinə təbiiq etməyə imkan verir. Buna görə də, məs., müşahidələr üzərində işlənilmənin ehtimali nəzəriyyəsinə sonsuz ümumi çoxluq anlayışı naməlum parametrləri ehtimal paylanması anlayışı ilə evez olunur. Müşahidələrin nəticələri bu paylanmaya tabe olan təsadüfi kəmiyyətlərin eksperimental müşahidə qiymətləri kimi interpretasiya olunur. Müşahidəolunanlar üzərində işlənilmənin məqsədi müşahidə nəticələri üzrə, bu və ya digər mənada, paylanmanın naməlum parametrləri üçün optimal statistik qiymətlər təyin etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda obyektlərin hər hansı bir çoxluğunun seçim üzrə araşdırılmasından bəhs olundu. Lakin S. m.-un praktiki tətbiqi əksər hallarda bir çox bir cins çoxluqların (məs., hazır məhsulun bir neçə partiyasında qüsurlu məmulatların hissəsinin qiymətləndirilməsində) üzərində aparılır. Bu halda araşdırılan obyekt bir M ədədi deyil, bir neçə naməlum $M_1, M_2, \dots$ ədədləri olur.

Məs., hazır məhsulun araşdırılan bütün partiyalarında N sayda məmulat vardır, belə ki, $M_1, M_2, \dots$ – bu partiyalardakı qüsurlu məmulatların sayları, $m_1, m_2, \dots$ – n həcmli seçmələrdə aşkar olunmuş qüsurlu məmulatların uyğun saylarıdır. Qüsursuz qəbul etmə adlandırılan şərtə görə r saylı partiya

istehlakçıya $m_i = 0$ olduğu halda ötürülür, əks halda bu partiya qüsurlu sayılır. Əgər məmulatlara nəzarət onların məhvinə səbəb olursa, onda istehlakçı ya $R_i = 0$ həcmli ($m_i > 0$ olduqda) partiya qəbul edir (yəni heç nə qəbul etmir) və ya qüsurlu məmulatlar sayı $D_i = M_i$ olan $R_i = N - n$ həcmli partiya qəbul edir ($m_i = 0$ olduqda), belə ki, $R_1, R_2, \dots$ məlum olur (deməli, onların cəmi də). $D_1 + D_2 + \dots$ cəmi isə məlum olmur.

$$(D_1 + D_2 + \dots) / (R_1 + R_2 + \dots)$$

nisbəti ötürülmüş brak (zay məmulat) payı, onun riyazi gözləməsi q ötürülmüş brakin orta payı adlanır. Bu halda riyazi statistikanın məsələsi S. m.-un tətbiqi nəticəsində qeyd olunan $R_1, R_2, \dots$ qiymətləri üzrə q -nün qiymətləndirilməsindən ibarət olur. Əgər $M_1, M_2, \dots$ qiymətləri paylanma qanunu məlum və $\mathbf{P}\{M_i = r\} = p_r$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyaları kimi interpretasiya olunarsa, onda Bayes düsturuna əsasən, qəbul olunmuş partiyalardakı qüsurlu məmulatların orta qiymətinin statistik qiyməti

$$\tilde{D} = \mathbf{M}\{M | m = 0\} = \left(\sum_{r=1}^{N-n} r \frac{C_{N-r}^n}{C_N^n} p_r \right) / \mathbf{P}\{m = 0\}$$

olur, belə ki,

$$\tilde{D} \leq [(N-n)\mathbf{P}\{m=1\}] / [n\mathbf{P}\{m=0\}],$$

burada

$$\mathbf{P}\{m=k\} = \sum_{r=0}^{N-n} \frac{C_r^k C_{N-r}^n}{C_N^n} p_r, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Buna görə də, qəbul olunmuş partiyalarda ötürülmüş brakin orta payının statistik qiyməti $\tilde{q} = \tilde{D} / (N-n)$

$$\tilde{q} \leq \mathbf{P}\{m=1\} / n\mathbf{P}\{m=0\} \approx s_1 / ns_0$$

bərabərsizliyini ödəyir, burada s_0 – qəbul olunmuş partiyaların sayı, s_1 – yalnız bir ədəd qüsurlu məmulat aşkar olunmuş seçimlərdə brak sayılmış partiyaların sayıdır.

Əd.: [1] Дунин - Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (Общая часть), М., 1955, гл. 5; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

SEÇİMİ MOMENT « ВЫБОРОЧНЫЙ МОМЕНТ; sample moment » – seçimin momenti – bax, *Empirik paylanma*.

SEÇİMİ NÖQTƏ « ВЫБОРОЧНАЯ ТОЧКА; sample point » – bax, *Statistik model*.

SEÇİMİ ORTA « ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ; sample mean » – empirik ehtimal paylanmasının seçim üzrə orta qiymətidir. $X_1, \dots, X_n$ – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda

$$\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n) / n$$

statistikasına seçimi orta və ya $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik ehtimal paylanmasının riyazi gözləməsi

deyilir. Əgər X_1 təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi – $a = M X_1$ varsa, onda $\bar{X}_n$ statistikasını $M \bar{X}_n = a$ üçün meylsiz statistik qiymətdir, belə ki, Xinqin teoreminə görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984.

SEÇİMİ PAYLANMA « выборочное распределение; sample distribution » – bax, *Empirik paylanma*.

SEÇİMİ REQRESSİYA ƏMSALI « выборочный коэффициент регрессии; sample regression coefficient » – bax, *Regression analiz*.

SEÇİMİ STATİSTİK ARAŞDIRMA « выборочное статистическое обследование; sample survey » – yalnız *seçim* obyektlərinə aid verilənlər əsasında, obyektlərin ümumi çoxluğunun xarakteristikalarını təyin etmək məqsədilə araşdırma. Araşdırılan xarakteristikalar kimi verilmiş xassələrə malik obyektlərin hissəsinə, orta qiymət və obyektlərin əsas kəmiyyət parametrlərinin səpələnmə göstəricilərinə (məs., dispersiya) baxılır.

Olduqca diqqətlə planlanmış S. s. a., bezi hallarda, öyrənilən hadisə və ya proseslər haqqında obyektiv kəmiyyət informasiyasının alınmasında yeganə vasitədir. Məs., fasiləsiz işləmə müddətinin öyrənilməsi (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*) məmullatların sıradan çıxmasına (imtinasına) qədər aparılan sınaqlarla bağlıdır. Belə sınaqların dağıdıcı xarakteri bütün sınaqların aparılması halını istisna edir. İstehsal prosesində pozuntuların (dayanmaların, gecikmələrin) aşkar olunması məqsədilə birbaşa araşdırma aparmaq faktiki vəziyyətin qiymətləndirilməsində mühüm təhriflərə səbəb ola bilər. S. s. a. sənayedə, kənd təsərrüfatında, təbiişə, sosiologiyada və s. geniş tətbiq olunur.

Uyğun statistik modellərin qurulmasının əsasını araşdırılan $\mathfrak{P} = (O_1, \dots, O_N)$ obyektlər toplusu anlayışı təşkil edir. Hər bir O_i obyektə ya hər hansı X_i parametrlərinin bir qiyməti ilə və ya $X_i, Y_i, i = 1, \dots, n$ parametrlərinin qiymətləri toplusu ilə xarakterizə olunur.

Ən sadə halda X_i iki qiymət alır; bu hal alternativ əlamət olduğu hal kimi interpretasiya olunur. Məhsulun keyfiyyətinə nəzərdə O_i obyektə yararlı məmulat olarsa, $X_i = 0$, əks halda $X_i = 1$ götürülür.

S. s. a.-nın planlaşdırılmasında $\mathfrak{P}$ çoxluğu *seçimi vahidləri* adlanan altçoxluqlara ayrılır. $M_j \subseteq \mathfrak{P}$, $M_j \cap M_k = \emptyset, j \neq k, j = 1, \dots, N$ şərtlərini ödəyən seçimi vahidlər çoxluğu $(M_1, \dots, M_M)$ S. s. a.-nın əsas adlanır. Əgər seçimi vahid M_i -də obyektlərin sayı birdən çox olarsa, onda belə M_i yuvalı seçimi vahid adlanır.

Şəhər əhalisinin S. s. a.-sında evlər, mənzillər, ailələr yuvalı seçimi vahidlərə misallardır. Kənd təsərrüfatı ilə bağlı S. s. a.-da, ziyanverici heşəratların sayının təyin olunmasında, seçimi vahid kimi tərfinin uzunluğu 1 m-ə bərabər kvadrat sahə götürmək olar.

Araşdırılan ümumi çoxluğun xarakteristikaları haqqında obyektiv nəticələr, obyektlərin və ya seçimi vahidlərin ehtimalı metodlarından istifadə olunaraq seçilməsi ilə alınır.

Fərz olunur ki, S. s. a.-nın statistik modelində seçimi vahidlər obyektlərdir ($M_i = O_i, M = N$). Bu halda n həcmli seçimi kimi araşdırma məqsədilə seçilmiş $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ obyektlər altçoxluğu anlaşıdır. Araşdırma nəticəsində seçimi təşkil edən bütün obyektlərin parametrlərinin qiymətləri qeyd olunur: X_{i_1}, Y_{i_1} – seçimi daxil edilmiş 1-ci obyektin parametrlərinin qiymətləri, X_{i_2}, Y_{i_2} – 2-ci obyekt üçün analogi qiymətlər və s.

S. s. a.-nın mühüm xarakteristikaları: $s = (i_1, \dots, i_n)$ seçiminə O_i obyektlərinin daxil olunma ehtimalları π_i -lər; O_i, O_j obyektlər cütünün s seçiminə daxil olunma ehtimalları π_{ij} -lərdir. n həcmli təsadüfi təkrarsız seçimi üçün i -nin bütün qiymətlərində $\pi_i = n/N$, bütün $i \neq j, i, j$ qiymətlərində isə $\pi_{ij} = n(n-1)/N(N-1)$ olur. Əgər seçimdəki obyektlər p ehtimalı ilə seçilsə, belə binomial seçimi üçün ixtiyari i qiymətində $\pi_i = p$ və ixtiyari $i \neq j, i, j$ qiymətlərində $\pi_{ij} = p^2$ olur. Əgər seçimi siyahı üzrə, sistemlik seçimi yolu ilə, hər h obyektə bir və ilk h sayda obyekt arasında O_h obyektinin eyni ehtimalla seçilməsi ilə təşkil olunarsa, onda bütün i qiymətlərində $\pi_i = 1/h, |i-j| \neq h, i \neq j$ olduqda $\pi_{ij} = 0$; $|i-j| = h$ olduqda isə $\pi_{ij} = 1/h$ olur.

X_i xarakteristikasının

$$\bar{X} = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i$$

düsturu ilə verilən orta qiymətinin statistik qiyməti üçün

$$\bar{X}^* = N^{-1} \sum_{i_k \in S} X_{i_k} / \pi_{i_k} \quad (*)$$

statistik qiymətdən istifadə etmək olar, burada cəmləmə seçimi təşkil edən obyektlərin nömrələri üzrə aparılır.

Əgər $i = 1, \dots, N$ qiymətlərinin hamısı üçün $\pi_i > 0$ olarsa, (*) statistik qiyməti meylsiz statistik qiymətdir. Bütün i, j qiymətlərində $\pi_{ij} > 0$ olarsa, (*) statistik qiymətinin dəqiqliyi onun dispersiyasının meylsiz statistik qiymətini –

$$N^{-2} \left\{ \sum_{i_k \in S} (X_{i_k}^2 / \pi_{i_k}) (1 / \pi_{i_k} - 1) + \sum_{\substack{i_k \neq i_l \\ i_k, i_l \in S}} (X_{i_k} X_{i_l} / \pi_{i_k i_l}) (\pi_{i_k i_l} / \pi_{i_k i_l} - 1) \right\}$$

ifadəsi ilə xarakterizə olunur.

Seçimə daxil olunma ehtimalları π_i -lərin bərabər olmadığından bezi məsələlərdə S. s. a.-nın istifadə olunması statistik qiymətlərin dəqiqliyini olduqca çoxaltmağa səbəb ola bilər.

Araşdırılan $\mathfrak{P}$ çoxluğu haqqında məlumatlar əsasında bu çoxluq $\mathfrak{P}$ -nin müəyyən bircinslik xassələrinə malik altçoxluqlara – l a y l a r a bölünür. Məs., demografiyada laylar cinsi əlamətə, yaş və s. görə təşkil olunur. Hər bir laydan olan seçimlərin həcmi layı təşkil edən obyektlərin sayından çox asılı ola bilər.

Əgər $A, B, \dots$ obyektlərinin əlamətlərinə görə $\mathfrak{P}$ -nin laylara bölgüsü aparılırsa, bu əlamətlərə təsiredici faktorlar kimi baxılır və bunların qiymətləri A_i, B_j -lərə faktorların səviyyəsi kimi baxılırsa, onda laylarda aparılan seçim bir çox xüsusiyyətlərinə görə dispersion analizinin sxemlərinə uyğun olur. Bu halda araşdırılan parametr, məs., O_i obyekti üçün Y_i parametri xətti statistik modelə müvafiq təsir nəticəsi kimi interpretasiya olunur. S. s. a. planlaşdırılarkən *latin düzbucaqlılırlarından* (natamam *latin kvadratlarından*) istifadə olunur.

Xarakteristikaları müşahidə müddətində asılı ümumi çoxluqların S. s. a. üçün xüsusi planlandırılmış c a r i n ə z a r ə t d ə n istifadə olunur. Cari nəzarətin aparıldığı anlar nöqtəvi təsadüfi prosesin realizasiyalına uyğun götürülür.

S. s. a. prosesində ilkin araşdırma planında bezi pozuntular, verilənlərin (məlumatların) bezi hissəsinin itməsi kimi hallar mümkündür. Məs., binanın sakinlərinin seçimi araşdırılmasında onların bir hissəsi mənzillərində olmaya bilər, suallara düzgün olmayan cavablar verilə bilər. Pozuntular statistik nəticələrin təhriflərinə səbəb olur. Əgər S. s. a. nəticəsində qəbul edilən düzgün olmayan qərarlar böyük itkilərə səbəb olarsa, bu hallarda S. s. a. üçün müxtəlif planların seçimi vahidlər və seçimlərin təşkili üçün müxtəlif əsaslar istifadə olunur.

S. s. a. metodlarından təsir effektivliyinin obyektiv qiymətləndirilməsində istifadə olunur. Məs., yağıntı miqdarını artırmaq məqsədilə havaya təsirin müşahidə olunduğu eksperimentin planlaşdırılmasında istifadə edilən randomizasiya metodu belələrindən dir.

Əd.: [1] Б е л я е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [2] Д ж е с с е н Р. Д., Методы статистических обследований, пер. с англ., М., 1985; [3] Й е й т с Ф., Выборочный метод в переписях и обследованиях, пер. с англ., М., 1965; [4] Физика облаков и активных воздействий, М., 1981 (Тр. ин.-та прикл. геофизики, в. 46).

SEÇİMİ TEZLİK « выборочная частота; sample frequency » – n sayda asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsinin baş vermə sayı X -in n -ə nisbətidir. A hadisəsinin hər bir sınaqda baş vermə ehtimalı eyni p ədədinə bərabər olarsa, onda Bernulli teoreminə əsasən, $X/n \sim p$ münasibəti n -in kifayət qədər böyük qiymətlərində ödənilir. $A_1, \dots, A_N$ – tam qrup əmələ gətirən uyuşmayan hadisələr, X_k , – n sayda asılı olmayan təkrarlanan sınaqlarda A_k hadisəsinin baş vermə sayı, $p_k > 0$ isə A_k hadisəsinin hər bir sınaqda baş vermə ehtimalı olsun. Onda $(X_1, \dots, X_N)$ vektorunun paylanması elə $(Y_1, \dots, Y_N)$ vektorunun şərti birgə paylanması ilə üst-üstə düşür ki, onun koordinatlarının cəmi n -ə bərabərdir və $Y_1, \dots, Y_N$ – uyğun olaraq, $n p_k$ parametrləri Пуассон qanunu ilə paylanmış

тəsadüfi кəmiyyətlərdir. Buna görə də, $Y = \sum_{k=1}^N f_k(X_k)$

кəmiyyəti, f_k ixtiyari Borel funksiyaları olduğu halda, ayrılışı olan statistika olur.

804 SEÇİMİ

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, М., 1980.

SEÇİMİ VAHİD « выборочная единица; sample unit » – bax, *Seçimi statistik araşdırma*.

SEÇİMİ VERİLƏNLƏRİN ÇƏKİLƏNDİRİLMƏSİ « выборочных данных взвешивание; sample data weighting » – statistik informasiyanın eynidəyərli olmamasını nəzərə alan metoddur. Məs., əgər stoxastik modelin (vektor halında) əmsalının qiyməti zamana görə dəyişirsə (proses qeyri – stasionardır), yeni müşahidələr köhnə müşahidələrdən dəyərli ola bilər. Kvadratik itki funksiyası məlum olduğu halda əmsal qiymətləndirmək üçün

$$Q = \sum_{i=1}^T \omega_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

funksionalının minimallığı tələb olunur, burada $y_i, \hat{y}_i$ – uyğun olaraq, müşahidə olunan və model qiymətləri, ω_i – müşahidələrdə olan, informasiya dəyərini xarakterizə edən və ç ə k i adlandırılan, məni olmayan konstantlardır (çəki böyük olduqda dəyər də çox olur). S. v. ç. müşahidələrin qeyri – bərabər dəqiqliyi halında regression analizdə də tətbiq olunur. Beləliklə, əgər y_i müşahidələri σ_i^2 dispersiyalarına malik olarsa, onda

$\omega_i = \sigma_i^{-2}$ olduqda Q funksionalının minimizasiyası regression modelin əmsalının ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlərinin alınmasını təmin edir.

Əd.: [1] В у ч к о в И., Б о я д ж и е в а Л., Солаков Е., Прикладной линейный регрессионный анализ, пер. с болг., М., 1987.

SEÇİMİN HƏCMİ « объем выборки; sample size » – bax, *Seçim*.

SEÇKİ MƏSƏLƏSİ « баллотировки задача; ballot problem » – seçki ərəfəsində namizəd A -nin namizəd B -dən həmişə irəlində olması ehtimalının təyin edilməsi haqqında məsələdir, bu şərtlə ki, A -nin topladığı səsərin ümumi sayı a ,

B -nin topladığı səsərin ümumi sayı b -yə bərabərdir, verilən səsərdə ardıcıl olaraq qeydə alınır və $a > b$. Bülletenlərin bütün mümkün ardıcılıqlarının bərabərehtimalı olduğu fərz olunur. S. m.-nin həlli J. Bertran tərəfindən tapılmışdır (bax, [1]): bu ehtimal $p = (a-b)/(a+b)$ nisbəti ilə təyin olunur. Bu nəticə əksər hallarda «seçki haqqında teoremlər» də adlandırılır və o, qumar oyunları ilə bağlı olaraq A. Muavrın (A. Moivre) 1708-də aldığı nəticə ilə ekvivalentdir. *Təsadüfi dolaşma* nəzəriyyəsi terminologiyasında S. m. – sıfır nöqtəsindən hərəkətini başlayan hissəciyin trayektoriyasının $a+b$ sayda sıçrayışdan sonra $a-b$ nöqtəsində olması, $1, 2, \dots, a+b$ anlarında bu trayektoriyanın yalnız müsbət koordinatlı nöqtələrdən keçməsi ehtimalının hesablanması məsələsinə ekvivalentdir (hissəciyin $1/2$ ehtimalı ilə hər addımda sağa və ya sola vahid uzunluqla sıçrayışla hərəkət etdiyi qəbul olunur).

Seçki haqqında teoremlərin müxtəlif ümumiləşmələri bir sıra hallarda cəmlər ardıcılıqlarının maksimumunun və digər sərhəd funksionalının paylanmalarının kombinatorika metodlarının köməyi ilə tapılmasına imkan yaradır (bax, [2]).

Əd.: [1] B e r t r a n d J., «C. r. Acad. sci. Paris», 1887, t. 105, p. 369; [2] Т а к а ч Л., Комбинаторные методы в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

SEÇMƏ METODU « отбора метод; rejection method » – bax, *Modeləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*.

SEHRLİ KVADRAT « магический квадрат; magic square » – bax, *Kombinator məsələlər klassik*.

SELEKTOR « селектор; selector » – bax, *Riyazi gözlemə (si) təsadüfi çoxluğun, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

SEMİ – ADDİTİVLİK « полуаддитивность; semi – additivity » – bax, *Ehtimal metrikası, rəqulyarlıq*.

SEMİ – AXIN « полупоток; semi – flow » – ölçülən X fəzasının ölçülən çevirmələrinin $\{T^t\}$, $t \geq 0$ ailesidir ki, bu çevirmələr μ ölçünü dəyişdirmir və

$$1) T^0 x = x;$$

2) $T^{t+s} x = T^t T^s x$ bərabərliyi bütün t, s, x -lər üçün ödənilir.

Əgər X -də ixtiyari ölçülən $f(x)$ funksiyası üçün $f(T^t x)$ funksiyası (t, x) -in funksiyası kimi ölçülən funksiya olarsa, onda belə S.-a. ölçülən semi – axın adlanır. Əgər $U^t: f(x) \rightarrow f(T^t x)$ çevirmələri $L^2(X, \mu)$ -də operatorların zəif kəsilməz semi – qrupunu təşkil edərsə, onda S.-a. kəsilməz semi – axın adlanır.

SEMİ – CƏBRİ, ÇOXLUQLARIN « полуалгебра множеств; semi – algebra of sets » – bax, *Ölçü*.

SEMİ – DAİRƏVİ QANUN « полукруговой закон; semi – circular law » – elementləri asılı olmayan ξ_{ij} , $i \geq j$

olan simmetrik təsadüfi $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ matrislərinin normalanmış spektral funksiyaları $\mu_n(x)$ üçün limit qanunudur. Fərz olunur ki, simmetrik heqiqi Ξ matrislərinin elementləri ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$, – n -in hər bir $n = 1, 2, \dots$ qiymətində asılı olmayan və eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi elementlərdir və

$$M\xi_{ij} = 0, D\xi_{ij} = \sigma^2 n^{-1}, 0 < \sigma^2 < \infty,$$

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(\lambda_k - x),$$

burada λ_k , – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləridir, əgər $y < 0$ olarsa, $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda isə $F(y) = 0$. Onda aşağıdakı kimi ifadə olunan semi – dairəvi qanun doğrudur: S.-d. q.-un paylanması –

$$\mu(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \int_D \sqrt{4\sigma^2 - y^2} dy,$$

$$D = \{(-\infty, x) \cap y: |y| < 2\sigma\}$$

olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \mu(x)$$

münasibətinin sanki yəqin ödənilməsi üçün, ixtiyari $\tau > 0$ qiymətində

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i,j=1}^n M|\xi_{ij}|^2 F(\tau - |\xi_{ij}|) = 0$$

Lindeberliq şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Əd.: [1] Гирко В. Л., Случайные матрицы, К., 1975.

SEMİDAYANIQLI PAYLANMA q r u p p a « полустойчивое распределение на группе; semistable distribution on a group » – bax, *Dayanıqlı paylanma qrupda*.

SEMİDAYANIQLI PROSES « полустойчивый процесс; semistable process » – bax, *Avtomodel proses*.

SEMİ – DETERMİNİSTİK KANAL « полудетерминированный канал; semi – deterministic channel » – informasiyanı bir ötürücüdən bir neçə qəbulediciyə ötürən və kanallardan biri determinik olan çoxkomponentli diskret kanaldır.

Bax, *Geniş yayımlı kanal*.

SEMİ – HALQASI, ÇOXLUQLARIN « полукольцо множеств; semi – ring of sets » – bax, *Ölçü*.

SEMİ – İNTERKVARTİL GENİŞLİK « семинтерквартильная широта; semi – interquartile range » – bax, *Kvantil, Kvantil*.

SEMİ – İNVARİANT « семинвариант; semi – invariant / cumulant », k u m u l y a n t, – təsadüfi kəmiyyətin və ya təsadüfi vektorun moment anlayışına yaxın və uyğun xarakteristik funksiyanın loqarifminin Taylor sırasına ayrılışı ilə bağlı olan ededi xarakteristikasıdır.

$X = (X_1, \dots, X_m)$, – m – ölçülü təsadüfi vektor, $f(t_1, \dots, t_m)$ – onun xarakteristik funksiyası olsun. Əgər $M|X_i|^n < \infty$, $i = 1, \dots, m$, $n \geq 1$ olarsa, onda $\ln f(t_1, \dots, t_m)$ loqarifminin (sıfır nöqtəsində sıfıra bərabər «hisə») $t_1 = \dots = t_m = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında $\leq n$ olan bütün tərtib kəsilməz törəmələri vardır.

$$s^{k_1, \dots, k_m} = (-i)^{k_1 + \dots + k_m} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_m^{k_m}} \ln f(t_1, \dots, t_m) \Big|_{t=0},$$

$$k_i \geq 0, k_1 + \dots + k_m \leq n$$

kəmiyyətlərinə ($\ln f(t_1, \dots, t_m)$ -in Taylor sırasına ayrılışı əmsalları) X təsadüfi vektorunun $k = k_1 + \dots + k_m$ tərtib semi – invariantları deyilir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin (vektorların) cəmlənməsində uyğun S.-lan cəmlənir:

$$s_{X+Y}^{k_1, \dots, k_m} = s_X^{k_1, \dots, k_m} + s_Y^{k_1, \dots, k_m}.$$

S. və təsadüfi vektorun momentləri sadə münasibətlərlə bir-birilə ifadə olunur. Məs., birölçülü halda ($m = 1$)

$$MX^n = \sum_{r=0}^n \sum \left(\frac{s_X^l}{l!} \right)^h \left(\frac{s_X^r}{r!} \right)^{n-r} \frac{n!}{j_1! \dots j_r!},$$

burada daxiləki cəm bütün mənfi olmayan h və l -lər üzrə aparılır ki, bunlar $l_1 j_1 + \dots + l_r j_r = m$ şərtini ödəsinlər.

S. momentlerle aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$s_X^n = n! \sum_{r=0}^n \sum \frac{(-1)^{j-1} (j-1)!}{j_1! \dots j_r!} \left[\frac{MX^{j_1}}{l_1!} \right] \dots \left[\frac{MX^{j_r}}{l_r!} \right],$$

burada daxilədəki cəmləmə bütün mənfi olmayan ele i və j -lər üzrə aparılır ki, bunlar

$$l_1 j_1 + \dots + l_r j_r = n, \quad j_1 + \dots + j_r = j,$$

şərtlərini ödəsinlər.

Əd.: [1] Прохоров Ю. Н., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

SEMİ – INVARIANT SPEKTRAL SIXLIQ « **seminvariantная спектральная плотность; semi-invariant spectral density** » – bax, *Spektral semi-invariant*.

SEMİ – KƏSİLMƏZ BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı « **полунепрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями; semicontinuous homogeneous random process with independent increments** » – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımlarlı*.

SEMİ – KƏSİLMƏZ YUXARIDAN MODEL « **полунепрерывная сверху модель; upper semi-continuous model** » – bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

SEMİ – KƏSİLMƏZ YUXARIDAN (AŞAĞIDAN) SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES « **полунепрерывный сверху (снизу) безгранично делимый процесс; upper (lower) semicontinuous infinitely divisible process** » – bax, *Sonsuz bölünən proses*.

* **SEMİ – QRUP** « **полугруппа; semi-group** » –

$$\Omega(s+t) = \Omega(s) \Omega(t) \quad (1)$$

şertini ödəyən operatorlar ailesidir ($\Omega(t)$ – ümumi halda ters operatora malik olmadığından, o, qrup deyildir).

Fərz olunur ki, Q_t

$$Q_s * Q_t = Q_{s+t} \quad (2)$$

şertini ödəyən $\mathbb{R}^1$ -də paylanmalar ailesidir, burada Q_t , $-t > 0$ parametrindən asılı ehtimal *paylanmasıdır*. $\Omega(t)$ isə uyğun operatorlardır, yəni

$$\Omega(t) u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y) Q_t \{dy\}. \quad (3)$$

Onda (2) kompozisiya tənliyi (1)-ə ekvivalentdir.

S. operatorları ixtiyari təbiətli ola bildiyindən $\Omega(t)$ ilə ehtimal paylanmalarının əlaqəsi ilə yaranmış «kompozisiyalı semi – qrup» termini aşağıdakı kimi təyin olunur.

(1) münasibətini ödəyən, ehtimal paylanmalar ilə bağlı $\{\Omega(t)\}$ $\{t > 0\}$ operatorlar ailesinə kompozisiyalı semi – qrup deyilir. Operatorların təyin olunma oblası kimi

$C_0[-\infty, \infty]$ götürmək olar. $\Omega(t)$ operatorları keçid operatorlarıdır, yəni $0 \leq u \leq 1$ olarsa, $0 \leq \Omega(t)u \leq 1$ olur və həmçinin, $\Omega(t)1 = 1$.

Əgər

$$\Omega(h) \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 0+$$

olarsa, kompozisiyalı $\{\Omega(h)\}$ semigrupu kəsilməz semigrup adlanır, burada 1 – eynilik operatorudur. Bu halda $\Omega(0) = 1$ olduğu fərz edilir.

(1) və $\|\Omega(t)u\| \leq \|u\|$ bərabərsizliyindən $h > 0$ olduqda

$$\|\Omega(t+h)u - \Omega(t)u\| \leq \|\Omega(h)u - u\| \quad (4)$$

olduğu alınır. h -in kifayət dərəcədə kiçik qiymətində (4)-ün sol tərəfi ixtiyari t üçün $< \varepsilon$ olur. Bu mənada kompozisiyalı semi – qrup müntəzəm kəsilməz semi – qrup adlanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1984.

SEMİ – MARKOV PROSESİ « **полумарковский процесс; semi-Markov process** », qiymətləri ölçülən $(X, \mathcal{X})$ vəziyyətlər fəzasından olan –

$$v(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$$

sayıcı prosesi vasitəsilə konstruktiv surətdə $\{\tau_n, \theta_n, n \geq 0\}$ Markov bərpə prosesi ilə verilən $\zeta''(t) = \tau_{v(t)}$ şəklində *təsadüfi prosesdir*, $\tau_n = x(\tau_n)$ – daxil olunmuş Markov zənciri, τ_n – bərpə anları (vəziyyətlərin dəyişmə anları), θ_n – S. – M. p.-nin vəziyyətlərdə qaldığı müddətlərdir.

Hər bir sonlu intervalda sonlu sayda bərpə anları olan qeyri-regular S. – M. p.-ləri konstruktiv verilir.

S. – M. p. analitik olaraq ikinci komponentinə görə bircins, ikiölçülü bircins $\{\tau_n, \theta_n, n \geq 0\}$ Markov zəncirinin keçid ehtimallarını təyin edən

$$Q(x, A, t) = P\{\tau_{n+1} \in A, \theta_{n+1} \leq t | \tau_n = x\}, \quad x \in X, A \in \mathcal{X}$$

semi – Markov nüvəsi ilə verilir. Məs.,

$$Q(x, A, +\infty) = P(x, A) = P\{\tau_{n+1} \in A | \tau_n = x\}$$

daxil olunmuş Markov zəncirinin keçid ehtimallarıdır.

$$Q(x, X, t) = G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t | \tau_n = x\}$$

vəziyyətlərdə qalma müddətlərinin paylanma funksiyalarıdır.

Əgər $Q(x, X, t) = P(x, A) G_x(t)$ olarsa, onda Markov bərpə prosesinin komponentləri τ_n və θ_n şərti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ümumi halda

$$Q(x, dy, t) = P(x, dy) G_{xy}(t),$$

$$G_{xy}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t | \tau_n = x, \tau_{n+1} = y\}.$$

Semi – Markov nüvəsi

$$Q(x, A, t) = P(x, A)(1 - e^{-q(x)t})$$

olan sıçrayışvari (pillevari) Markov prosesi S. – M. p.-dir. S. – M. p.-ni xəttivari Markov prosesi $(x(t), \gamma(t); t \geq 0)$ prosesinin komponenti $\gamma(t)$ vasitəsilə də vermək olar: $\gamma(t) = \inf \{s \geq t: x(s) \neq x(t)\} - t$ – çatım kəmiyyəti (rus. величина перескока) və ya vəziyyətdə olma üçün qalan müddətdir. S. – M. p. nəzəriyyəsinin analitik aparatı

$$u(t, x) - \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) u(t-s, y) = \varphi(t, x)$$

Markov bərpa tənliyinə əsaslanmışdır, bu tənliyin sağ hissəsindəki $\varphi(t, x)$ -in məlum olduğu fərz olunur. Məs., S. – M. p.-nin $F(t, x, A) = P\{x(t) \in A | x(0) = x\}$ keçid ehtimalları $\varphi(t, x) = I_A(x)(1 - G_x(t))$ ilə Markov bərpa prosesini ödəyirlər.

S. – M. p. nəzəriyyəsinin əsas problemləri: rəqulyarlıq şərtləri, ergodiklik, Markov bərpa tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi, semi – Markov nüvəsi seriyalar sxemində seriyaların parametrlərindən asılı olduğu halda, $t \rightarrow \infty$ olduqda həllin limit ifadəsinin müəyyənəşdirilməsidir. S. – M. p.-ləri diskret müdaxiləli proseslərin birindən digərinə keçən proseslər, təsadüfi evolyusiyalar halında istifadə olunur.

S. – M. p., bir çox təbii hallarda, vəziyyətləri sıçrayışlarla (ani olaraq) dəyişən stoxastik sistemlərin təbii riyazi modelləri rolunu oynayır, o cümlədən, xidmət sistemi nəzəriyyəsində, ehtiyatları idarəetmə, etibarlılıq nəzəriyyəsi və s.-də.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Корольук В. С., Турбин А. Ф., Полумарковские процессы и их приложения, К., 1976.

SEMI – MARKOV PROSESİ idarə olunan «полумарковский процесс управляемый; controlled semi – Markov process» – bax, idarə olunan semi – Markov prosesi.

SEMI – MARKOV PROSESİ; qeyd olunmuş vəziyyətdə qalma müddəti «полумарковский процесс; время пребывания в фиксированном состоянии; semi – Markov process; sojourn time» – paylanması verilən prosesin vəziyyətindən və ola bilər ki, bu vəziyyətdən sonrakı növbəti vəziyyətdən asılı, mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir. Sıçrayışvari Markov prosesləri üçün vəziyyətdə qalma (olma) müddətlərinin hamısı yalnız verilən vəziyyətdən asılı üstü qanunla paylanır. Stoxastik sistemlərin etibarlılığının analizində S. – M. p.-nin vəziyyətləri altçoxluluğunda vəziyyətdə qalma müddətləri fasiləsiz işləmə müddəti və ya bərpa müddəti və ya dayanma (işləmə) müddəti kimi interpretasiya olunur.

SEMI – MARKOV PROSESİ qərarların (həllərin) qəbul edilməsi «полумарковский процесс принятия решений; semi – Markov decision process» – bax, idarə olunan semi – Markov prosesi.

SEMI – MARKOV TƏSADÜFİ ÇOXLUĞU «полумарковское случайное множество; semi – Markov random set» – müşayiətedici (rus. сопровождающий) funksional T olan, $Q(KUK'UC)Q(C) = Q(KUC)Q(K'UC)$ xassəsinə malik təsadüfi qapalı A çoxluğu, burada $Q=1-T$; K, K', C – baza fəzasının ixtiyari ele kompaktlarıdır ki (bax, Təsadüfi çoxluq), C kompakt K və K' -i ayırır

(bu isə belə anlaşılmalıdır: ixtiyari $x \in K, x' \in K'$ nöqtələri üçün $[x, x']$ parçası C -ni kəsir).

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

SEMİMARTİNGAL «семимартингал; semimartingale» – lokal martinqal və məhdud variasiyalı prosesin cəmi kimi ifadə olunan təsadüfi prosesdir. Ciddi tərifdə fərz olunur ki, bütün anlayışlar (tam) stoxastik $\mathcal{B}_P = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, P)$ bazisində, yeni sağdan kəsilməz və P ölçüsü üzrə tamamlanmış $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}, s \leq t$ σ – cəbrlər ailəsi təyin olunmuş $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilir.

$X_0, - \mathcal{A}_0$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyət, $M = (M_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – lokal martinqal, $A = (A_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – lokal məhdud variasiyalı proses olsun; əgər $X = (X_t)_{t \geq 0}$ stoxastik $\mathcal{B}$ bazisində verilmiş, trayektoriyaları D fəzasından olan (sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan funksiyalar) proses və X_t -lər

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

bərabərliyi ilə təyin oluna bilən və hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\mathcal{A}_t$ – ölçülən olarlarsa, onda X prosesinə semimartinqal deyilir. İxtiyari $X = X_0 + M + A$ ayrılışı üçün hər bir X S. ilə $M^c = X^c$ şərtini ödəyən, kəsilməz lokal X^c martinqalı bir-qiymətli (stoxastik fərqlənməməzlik dəqiqliyi ilə) əlaqələndir. Bu X^c prosesi (cəmdəki toplananlardan biri) X semimartinqalının kəsilməz martinqal komponenti (rus. непрерывная мартингальная составляющая) adlanır.

Əgər X semimartinqalı $A = (A_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ öngörül prosesi ilə $X_t = X_0 + M_t + A_t$ şəklində ifadə oluna bilərsə, X xüsusi semimartinqal (rus. специальный семимартингал) adlanır. $A = (A_t)_{t \geq 0}$ öngörül proses olduqda $X_t = X_0 + M_t + A_t$ ifadəsi yeganədir və bu ifadə X prosesinin kanonik ayrılışı adlanır. $|\Delta X_t| = |X_{t-} - X_t| \leq c, t \geq 0$ şərtini ödəyən, məhdud ΔX_t sıçrayışları $X = (X_t)_{t \geq 0}$ prosesləri xüsusi S. sinfindəndirlər. X prosesi, yalnız və yalnız, o halda xüsusi S.-dir ki, $X - X_0$ fərqi iki lokal submartinqalların (supermartinqalların) fərqi olsun.

Determinik $X_t(\omega) = f(t), t \geq 0$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda S.-dir ki, $f = f(t), t \geq 0$ funksiyası D fəzasından olsun və hər bir sonlu zaman intervalında məhdud variasiyalı olsun. S. sinfi ölçünün mütləq kəsilməz əvəzlənməsinə nəzərən invariantdır (əgər $Q \ll P$ və $X \in \mathcal{B}_P$ -də S. olarsa, onda $X \in \mathcal{B}_Q$ -də də S.-dir); əgər $G = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{G}_t, t \geq 0$ σ – cəbrlərinin azalmayan sağdan kəsilməz ele ailəsi olarsa ki, $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{A}_t, X_t \in \mathcal{G}$ – ölçülən, $t \geq 0$ və $X \in \mathcal{B}_P$ -də S. olsun, onda X rəddəşlənmiş stoxastik $\mathcal{B}'_P = (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, P)$ bazisində də S.-dir. S. sinfi $\hat{T} = (\hat{T}_t)_{t \geq 0}$ zamanının təsadüfi əvəzlənməsinə

nəzərən dayanıqlıdır. Doğrudan da, əgər $\hat{t} = (\hat{t}_t)_{t \geq 0}$ ele artan təsadüfi prosesdirsə ki, hər bir t qiymətində $\hat{t}_t$ kəmiyyətləri Markov anladır, onda $\hat{X} = (X_{\hat{t}_t(\omega)}(\omega))_{t \geq 0}$ prosesi $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən S.-dır, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{\hat{t}_t}$, $t \geq 0$.

Diskret zaman halında – $n = 0, 1, \dots$ olduqda «diskret» stoxastik $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$ bazisində verilən $X = (X_n)_{n \geq 0}$ S.-nın təbii tərifində $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ ardıcılığındakı X_n -lərin $\mathcal{A}_n$ – ölçülən olduğu fərz olunur.

$Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ S., yalnız və yalnız, o halda xüsusi S.-dır ki, $X - X_0$ ardıcılığı lokal inteqrallanan olsun. Bu halda $X = X_0 + M + A$ kanonik ayrılışında

$$A_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{M}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{A}_{k-1}),$$

$$M_n = \sum_{1 \leq k \leq n} [(X_k - X_{k-1}) - \mathbf{M}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{A}_{k-1})].$$

Diskret zaman halında iki (lokal) kvadratik inteqrallanan X və Y martinqallarının öngörül kvadratik kovariasiyası $\langle X, Y \rangle$ aşağıdakı kimi ifadə olunur,

$$\langle X, Y \rangle_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{M}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}) | \mathcal{A}_{k-1}],$$

kvadratik kovariasiya – $[X, Y]$ isə

$$[X, Y]_n = \sum_{1 \leq k \leq n} [X_k - X_{k-1}][Y_k - Y_{k-1}] = \sum_{1 \leq k \leq n} \Delta X_k \Delta Y_k$$

düsturu ilə verilir: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-}$, $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle$ ardıcılığı kvadratik xarakteristika, $[M] = [M, M]$ isə kvadratik variasiya adlandırılır.

Diskret zaman halında İto dəyişənləri əvəzetmə düsturları (differensiallanan $f = f(x)$ funksiyaları üçün) aşağıdakı şəkildə alır:

$$f(X_n) = f(X_0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial x}(X_{k-1}) \Delta X_k + \sum_{1 \leq k \leq n} [f(X_k) - f(X_{k-1}) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_{k-1}) \Delta X_k].$$

Kəsilməz zaman halında – $t \geq 0$ olduqda iki – lokal kvadratik inteqrallanan M_1 və M_2 martinqallar üçün $\langle M_1, M_2 \rangle$ öngörül kvadratik kovariasiyası lokal inteqrallanan variasiyalı ele yeganə ($\mathbf{P}$ – əhəmiyyətsizlik dəyiqliyi ilə) öngörül proses kimi təyin olunur ki, $M_1 M_2 - \langle M_1, M_2 \rangle$ – lokal martinqaldır. $\langle M, M \rangle$ prosesi $\langle M \rangle$ kimi işarə olunur və M -in kvadratik xarakteristikası adlanır. Kvadratik kovariasiya $[M_1, M_2]$ isə

$$[M_1, M_2]_t = \langle M_1^c, M_2^c \rangle + \sum_{s \leq t} \Delta M_{1s} \Delta M_{2s}$$

808 SEMİMARTİNQAL

prosesi kimi təyin olunur, burada M_1^c və M_2^c (cəmdəki toplanarlardan biri) – M_1 və M_2 -nin kəsilməz martinqal komponentləridir.

Əgər $X = (X^1, \dots, X^d)$ d – ölçülü S.-dirsə (yəni X^k proseslərinin hər biri S.-dır), $f = f(x_1, \dots, x_d)$ – ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyadırsa, onda $f(X) = (f(X_t^1, \dots, X_t^d))_{t \geq 0}$ prosesi S.-dır və bu halda İto dəyişənləri əvəzetmə düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i \leq d} D_i f(X_-) \cdot X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq d} D_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle_t + \sum_{s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i \leq d} D_i f(X_{s-}) \cdot \Delta X_s^i],$$

burada $D_i f(x) = \partial f / \partial x_i$, $D_{ij} f(x) = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ və $H \cdot X^i$, $-X^i$ S.-i üzrə stoxastik inteqraldır. $H \cdot \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle$, $-\langle X^{ic}, X^{jc} \rangle$ prosesi üzrə Stilyes inteqralını ifadə edir.

d – ölçülü hər bir $X = (X^1, \dots, X^d)_{t \geq 0}$ S. ilə bu S.-in öngörül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \nu)$ əlaqələndir. Bu triplet aşağıdakı kimi təyin olunur. $h = h(x)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan, $\mathbb{R}^d$ -də məhdud, kompakt daşıyıcıya malik ele funksiya olsun ki, sıfır ətrafında $h(x) = x$ şərtini ödəsin; $x = (x^1, \dots, x^d)$.

$$X(h)_t = \sum_{s \leq t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)], \quad X(h)_t = X_t - X(h)_t$$

olsun. $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ olduğundan $|\Delta X(h)_t| \leq C$ və $X(h)$ S.-i xüsusi S.-dir.

$M(h)$ – lokal martinqal, $B(h)$ – lokal məhdud variasiyalı öngörül proses, $X(h) = X_0 + M(h) + B(h)$ olsun. $B = (B^i)_{i \leq d}$, $-B(h)$ öngörül proses, $C = (C^{ij})_{i, j \leq d}$, $-C^{ij} = \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle$ olan kəsilməz proses (X^{ic} , $-X^i$ S.-nin kəsilməz martinqal komponentidir); $\nu = \nu(dt, dx)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $-\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ -də öngörül təsadüfi ölçü olub, X prosesinin sıçrayışlarının ölçüsü μ -nün kompensatoru (yəni

$$\mu(dt, dx) = \sum_s I(\Delta Y_s \neq 0) \delta(s, \Delta Y_s)(dt, dx),$$

$\delta(a)$, $-a$ nöqtəsində Dirak ölçüsüdür) olsun. Onda hər bir qeyd olunmuş $h = h(x)$ funksiyası üçün X S.-nin $[h]$ kəsim funksiyasına nəzərən, rus. функция урезания) xarakteristikaları (öngörül) $T = (B, C, \nu)$ tripleti adlanır.

C və ν xarakteristikaları kəsim funksiyası $h = h(x)$ -in seçilməsindən asılı deyildir. $B(h)$ xarakteristikası isə, ümumiyyətlə, h -dan asılıdır və

$$B_t(h) - B_t(h') = (h - h') * \nu_t \\ \left(= \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d} (h(x) - h'(x)) \nu(ds, dx) \right).$$

$X(t)$ və $X(h)_t$ proseslərinin təriflərini nəzərə alaraq tapmaq olur ki,

$$X(t) = X(h)_t + X(h)_t = X_0 + M(h)_t + B(h)_t + \\ + \sum_{s \leq t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)],$$

$M(h) = X^c + M^d(h)$ ayrılışını nəzərə aldıqda isə

$$X_t = X_0 + B(h)_t + X_t^c + M^d(h) + \sum_{s \leq t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)]$$

ifadəsini almaq olur. Martinqal ölçüləri üzrə stoxastik integrallar üçün bu ifadəni aşağıdakı şəkildə yazmaq olur:

$$X_t = X_0 + B(h)_t + X_t^c + \\ + \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d} h(x) d(\mu - \nu) + \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d} (x - h(x)) d\mu.$$

Əgər $h(x) = xI(|x| \leq 1)$ olarsa, onda k a n o n i k adlandırılan aşağıdakı ifadə alınır:

$$X_t = X_0 + B_t + X_t^c + \\ + \int_{(0,t] \times \{|x| \leq 1\}} x d(\mu - \nu) + \int_{(0,t] \times \{|x| > 1\}} x d\mu,$$

burada $B_t = B_t(xI(|x| \leq 1))$.

S.-lara və onların xarakteristikalarına aid m i s a l l a r.

1) $w = (w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinin tripleti (kəsim funksiyası h -a nəzərən) $T = (0, t, 0)$ -dir.

2) asılı olmayan artımları d - ölçülü proses, yalnız və yalnız, o halda S.-dir ki, hər bir $\lambda \in \mathbb{R}^d$ üçün $\mathbf{M}e^{i\lambda \cdot X_t}$ funksiyası hər bir sonlu zaman intervalında sonlu variasiyaya malik olsun.

3) Əgər X d - ölçülü S., $X_0 = 0$ olarsa, X , yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan artımları prosesidir ki, (B, C, ν) xarakteristikalarının deterministik versiyası olsun.

4) d - ölçülü X prosesi, yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan artımları prosesidir ki, o. S. olsun və onun xarakteristikaları $(B, C, \nu) : B_t = b \cdot t, C_t = c \cdot t, \nu(dt, dx) = dt K(dx)$ şəklində ola bilsin, burada $b \in \mathbb{R}^d, c$ - simmetrik mənfi olmayan $(d \times d)$ - matris, $K, - \mathbb{R}^d$ -də ele müsbət ölçüdür ki, $\int (|x|^2 \wedge 1) K(dx) < \infty, K(\{0\}) = 0$. Bu halda

$$\mathbf{M}e^{i\lambda \cdot X_t} = \exp t \left[i\lambda \cdot b - \frac{1}{2} \lambda \cdot c \cdot \lambda + \right. \\ \left. + \int (e^{i\lambda \cdot x} - 1 - i\lambda \cdot h(x)) K(dx) \right]$$

– Levi – Xinqin düsturu doğrudur.

$$A(\lambda)_t = i\lambda \cdot B_t - \frac{1}{2} \lambda \cdot C_t \cdot \lambda + \\ + \int (e^{i\lambda \cdot x} - 1 - i\lambda \cdot h(x)) \nu([0, t] \times dx)$$

olsun. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

a) X - xarakteristikaları (B, C, ν) olan S.-dir;

b) hər bir $\lambda \in \mathbb{R}^d$ üçün $e^{i\lambda \cdot X} - (e^{i\lambda \cdot X_-})_t \cdot A(\lambda)$ - kompleks-qiyəmetli lokal martinqaldır;

c) hər bir məhdud ikiqat kəsilməz differensiallanan $f = f(x), x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası üçün

$$f(X) - f(X_0) - \sum_{j \leq d} D_j f(X_-) \cdot B^j - \\ - \frac{1}{2} \sum_{j, k \leq d} D_{jk} f(X_-) \cdot C^{jk} - \\ - \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{j \leq d} D_j f(X_-) \cdot h^j(x) \right\} * \nu$$

prosesi – lokal martinqaldır.

Hər bir kompleks $X = X' + iX''$ S.-i və

$$Y = 1 + Y_- \cdot X, \quad Y_0 = 1$$

tənliyinin (trayektoriyaları D -dən olan A uzlaşmış proseslər sinfində) yeganə həlli olan $\mathcal{E}(X)_t$ stoxastik eksponenti aşağıdakı ifadə ilə bir-birilə əlaqəlidir:

$$\mathcal{E}(X)_t = \left\{ \left(\exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2} \langle X'^c, X'^c \rangle_t + \frac{1}{2} \langle X''^c, X''^c \rangle_t - \right. \right. \\ \left. \left. - i \langle X'^c, X''^c \rangle_t \right) \right\} \prod_{s \leq t} [(1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}].$$

$\mathcal{E}(X)_t = (\mathcal{E}(X)_t)_{t \geq 0}$ prosesi də S.-dir. Bu halda X prosesinin lokal məhdud variasiyası olarsa, onda

$$\mathcal{E}(X)_t = e^{X_t - X_0} \prod_{s \leq t} (1 - \Delta X_s) e^{-\Delta X_s};$$

əgər S. həqiqi olarsa, onda

$$\mathcal{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

olur.

$G(\lambda) = \mathcal{E}(A(\lambda)), T(\lambda) = \inf \{t : \Delta A(\lambda) = -1\}$ olsun. Onda $T(\lambda)$ anı öngörülür andır, $T(\lambda) = \inf \{t : G(\lambda)_t = 0\}$ və $(e^{i\lambda \cdot X} / G(\lambda)) \cdot I_{[0, T(\lambda)]}, - [[0, T(\lambda)]] = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq T(\lambda)\}$ stoxastik intervalında lokal martinqaldır. Bu xassə S.-in zəif yığılması haqqında nəticələrin isbatlanı üçün stoxastik eksponentlər metodunda əsas rol oynayır (bax, [2], [4]).

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilite's et potentiel. Theorie des martingales, t. 1-2, P., 1975-80; [2] Л и п - е р Р. И., Ш и р я е в А. Н., Теория мартигалов, М., 1986;

[3] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. К., 1982; [4] Жакоб Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

SEMİMARTİNQAL; limit teoremləri « **семимартингал;** предельные теоремы; limit theorems for semimartingales » – bax, *Limit teoremləri martinqallar və semimartinqallar üçün.*

SEMİMARTİNQALIN FİLTRASIYASI « **семимартингала фильтрация;** filtering of a semimartingale » – müşahidə olunan müəyyən tip proses üzrə onun müşahidə olunmayan komponenti üçün kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətin axtarılması haqqında məsələdir.

$(X, Y) = (X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ – ikiölçülü semimartinqal olsun; Y – müşahidə olunmayan komponent, X – müşahidə olunacaq prosesdir. $\mathbb{A}^X = (\mathcal{A}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{A}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ σ – cəbrlərinin ailəsi və $\mathbb{A}_t^X = (\mathcal{A}_{t+e}^X)$, $\mathcal{A}_{t+e}^X = \bigcap_{e>0} \mathcal{A}_{t+e}^X$ σ – cəbrlərinin ailəsi olsun. $\mathbf{M}Y_t^2 < \infty$ və $\mathbb{A}_+^X = \mathbb{A}^X$ olduğu halda Y

prosesinin $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən opsional proyeksiyası $\pi(Y) = (\pi_t(Y))_{t \geq 0}$, X_s , $s \leq t$ müşahidələri üzrə Y_t -nin kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətini təyin edir. Y xüsusi semimartinqal olduqda, $\pi(Y)$ strukturu olduqca sadə müəyyən olunur. Burada Y -in xüsusi semimartinqal olması $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$ olması kimi anlaşılr, burada $A = (A_t)_{t \geq 0}$ – lokal məhdud variasiyalı [$\text{var}(A_t) < \infty$ $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilir. $t > 0$] öngörül proses, $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – lokal martinqaldır. X özünün kanonik ifadəsi ilə verilir ki, bu ifadəyə öngörül xarakteristikalar tripleti $T = (B, C, \nu)$ müvafiqdir (bax, *Semimartinqal*). X -in semimartinqallıq xassəsi $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən saxlanılır, $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən öngörül xarakteristikalar tripleti $T^X = (B^X, C^X, \nu^X)$ kimi işarə olunur. Məsələn,

$$1) \mathbf{M}(Y_0^2 + (\text{var}(A_t))^2 + M_t^2) < \infty, t > 0;$$

2) X_0 təsadüfi kəmiyyətinin paylanması və T^X tripleti X prosesinin paylanmasını birqiymətli təyin edirlər;

3)

$$\left(\int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(\nu - \nu^X)^c(ds, dx) \right)_{t \geq 0}$$

prosesinin lokal məhdud variasiyalı trayektoriyaları vardır, $(\nu - \nu^X)^c$ komponenti $\nu - \nu^X$ ölçüsünün ayrılışında kəsilməz (s üzrə) komponentdir;

4)

$$L_t = (B - B^X)_t^c - \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(\nu - \nu^X)^c(ds, dx)$$

olduqda $L = (L_t)_{t \geq 0}$ prosesi $C = (C_t)_{t \geq 0}$ xarakteristikasına nəzərən mütləq kəsilməzdir. $(B - B^X)^c$ komponenti $(B - B^X)$ funksiyasının ayrılışında kəsilməz komponentdir;

$$5) \mathbf{M} \int_0^t \left| Y_s \frac{dL_s}{dC_s} \right| dC_s < \infty, t > 0 \text{ şərtlərində } \mathbb{A}^X \text{ və}$$

$\mathbb{A}_+^X$ σ – cəbrlər ailələri üst-üstə düşür, $\pi(Y)$ prosesi xüsusi semimartinqal olur və o, aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\pi_t(Y) = \mathbf{M}(Y_0 | \mathcal{A}_0^X) + A_t^X + \int_0^t h(s) d\bar{X}_s^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} H(s, x)(\mu - \nu^X)(ds, dx), \quad (*)$$

burada $A^X = (A_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathbf{M}(\text{var}(A^X)_t)^2 < \infty, t > 0$ şərtini ödəyən $\mathbb{A}^X$ – öngörül prosesdir, $(*)$ -nın sağ tərəfindəki integrallər kəsilməz lokal $\bar{X}^c = (\bar{X}_t^c)_{t \geq 0}$ martinqalı (X semimartinqalının $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən martinqal toplananı olan) və martinqal ölçüsü $\mu - \nu^X$ [$\mu = \mu(dt, dx)$ X -in sıçrayışları ölçüsüdür] üzrə stoxastik integrallardır; $h = h(\omega, s)$ və $H = H(\omega, s, x)$ funksiyaları isə uyğun olaraq, T və T^X tripletləri üzrə hesablanır.

Əd.: [1] Григелюнис Б., «Литов. матем. сб.», 1972, т. 12, № 4, с. 37–51; [2] Ветров Л. Г., «Теория вероятностей и ее примен.», 1982, т. 27, в. 1, с. 24–35; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

SEMİ – POLYAR ÇOXLUQ « **полуполярное множество; semi – polar set** » – qeyd olunmuş sağ Markov prosesinə nəzərən incə çoxluqların hesabından çox olmayan toplusunun birləşməsidir. S. – p. ç. və prosesin başlanğıc vəziyyətinin nə cür olmasından asılı olmayaraq, prosesin trayektoriyaları hesabı saydan çox olmamaqla bu çoxluqda sanki yəqin olurlar (bax, [1]). Hər bir polyar çoxluq, həm də S. – p. ç.-dur.

Əd.: [1] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov process and potential theory, N. Y. – L., 1968.

SEMİ – VARIASIYA(sı) vektor ölçünün « **полыварнация векторной меры; semi – variation of a vector measure** » – bax, *Vektor ölçü.*

SENTİL « **центиль; centile** » – bax, *Persentil.*

SENZURLA(N)MA « **цензурирование; censoring** » – imtinaya qədər işləmə müddətinin natamam müşahidəsinə deyilir. Məs., 10 gün ərzində müşahidə olunan və imtinaya məruz qalmayan obyekt müşahidə olunan obyektlər çoxluğundan xaric olunur, bu obyektin imtinaya qədər işləmə müddəti 10 gündən artıq sayılır. Bu müşahidə senzurlamadır. Qeyd etmək lazımdır ki, senzurlama da imtina kimi nöqtəvi hadisədir, senzurlanan obyektlərin müşahidə olunduğu müddət qeyd olunmalıdır.

Fərz olunur ki, n həcmli seçimdə i -ci obyekt imtinaya qədər τ_i müddəti qədər işləmişdir və müşahidələr S.-süz apanılır (τ_i təsadüfi kəmiyyətdir). Bir də fərz olunur ki, ehtimal müşahidə müddəti c_i vardır ki, əgər obyekt bu müddət ərzində imtinaya məruz qalmazsa, onda c_i anında bu obyekt üzərindəki müşahidə dayandırılır. Bu halda, əslində $X_i = \min(\tau_i, C_i)$ kəmiyyətləri

indikator dəyişəni v_i ilə birgə müşahidə olunur; əgər $\tau_i \leq c_i$, olarsa, $v_i = 1$ götürülür və onda obyekt senzurlanmamışdır, $\tau_i > c_i$ olduqda isə $v_i = 0$ götürülür və bu halda obyekt senzurlanmışdır. İmtinaya, həqiqətən də, məruz qalmış obyektlər üçün c_i kəmiyyətləri realizə olunmuş senzurlanma anlarının əksinə olaraq, realizə olunmamış senzurlanma anları sayılır. «Potensial senzurlama anı» termini, adətən, senzurlama və ya imtina olub-olmamasından asılı olaraq, c_i kəmiyyətlərinə baxıldığı hallarda istifadə olunur.

Bəzi təbiiqə məsələlərdə c_i anlarının hamısı məlum olur, məs., əgər S.-nin yeganə məqsədi əvvəlcədən məlum olan müəyyən müddətdən sonra sınaqların planlı surətdə saxlanılmasından ibarət olarsa. Digər bir misal c_i -lərin hamısı bərabər olduğu, yəni $c_i = c$ olduğu hal (c kəmiyyəti tədqiqatçı tərəfindən verilir), bu – I tip senzurlama adlanır. II tip senzurlamada imtinaların sayı əvvəlcədən məlum olan d ədədinə çatdıqda müşahidə dayanır, bu halda c təsadüfi kəmiyyət olur. II tip S. texnikada etibarlılığı təyin etmək üçün aparılan sınaqlarda vəsaitlərin qənaətlə istifadə olunması üçün faydalı metoddur. S.-nin təsadüfi senzurlama adlanan digər formaları da mümkündür. c_i anı üçün fəaliyyətdə olan ixtiyari obyektin imtina edə biləcəyi proqnozuna (izahedici dəyişənlərin qiymətlərinin verilməsi şərtlə – bu həlledici şərt kimi qəbul edilir) bu obyektin c_i anında senzurlanmış olub-olmadığının təsiri yoxdur. Başqa sözlə, c anında senzurlanmış obyekt c anına qədər imtinaya məruz qalmayan obyektlər sinfindəndir, bu şərtlə ki, bu obyektlər də izahedici dəyişənlərin eyni qiymətlərlə müşahidə olunur. Bunun təmin olunmasının sadə yolu – c_i kəmiyyətlərinin prinsip etibarilə əvvəlcədən məlum konstantlar olduğunu fərz etməkdir. Lakin, bununla belə, qeyd olunmalıdır ki, c_i -lər əvvəlcədən müşahidəçiyə məlum olmur, hətta müşahidə olunan imtinalara uyğun realizə olunmamış c_i -lər ola bilsin ki, heç vaxt məlum olmasın. Yuxarıda qeyd olunmuş şərt o halda yerinə yetir ki, potensial senzurlama anları c_i -lər τ_i -lərdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

II tip S. daha ümumi sxemə misaldır və bu sxemdə S. bütün prosesin onun gələcəyindən deyil, keçmişindən asılı ola bilər. Belə senzurlama *evolyusion* S. adlanır.

Bax, *Kəsik seçim, Senzurlanmış seçim.*

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Оукс Д., Анализ данных типа времени жизни, М., 1988.

SENZURLAMA; təsadüfi «цензурирование случайное; censorization of random» – bax, *Senzurla(n)ma*.

SENZURLAMA ANI «цензурирования момент; time of censoration» – bax, *Senzurla(n)ma*.

SENZURLAMA ANI, POTENSİAL «момент цензурирования потенциальный; potential time of censoration» – bax, *Senzurla(n)ma*.

SENZURLANMA *evolyusion* «цензурирование эволюционное; evolutionary censored» – bax, *Senzurla(n)ma*.

SENZURLANMIŞ SEÇİM «цензурированная выборка; censored / trimmed sample», II tip senzurlanma – F paylanmasına malik $X_1, \dots, X_n$ təkrar seçimi üzrə qurulmuş *variasion sıranın* bir hissəsidir. Əgər *variasion sıranın* yalnız n_1 sayda ən kiçik (n_2 sayda ən böyük) həddi

seçimdə müşahidə olunursa, seçim sağdan (soldan) senzurlanmışdır. İkiqat senzurlanmış seçimlər (sağdan və soldan senzurlanmış), məs., paylanma funksiyası qalıqlarının dəyişmələrinə dayanıqlı statistik qiymətlərin və statistik kriterilərin alınması üçün istifadə olunur. Əgər F paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan mütləq kəsilməz paylanma funksiyası, $X_n(k_i)$, $1 < k_1 < \dots < k_l < n$, k_i -ci qaydalı statistikaldırsa, onda $X_n(k_i) = x_i$, $x_1 < \dots < x_l$ şərtində *variasion sıra şərti* asılı olmayan ($X_n(k_{i-1} + 1)$, $X_n(k_i - 1)$), $i = 1, \dots, l + 1$ parçalarına bölünür və bu parçalar $(k_i - k_{i-1} - 1)$ həcmli asılı olmayan təkrar seçimlərə görə uyğun olaraq qurulur; bu seçimlər isə uyğun olaraq, (x_{i-1}, x_i) intervallarında toplanmış paylanmalara malik olub, paylanmalarının sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq, $f / [F(x_i) - F(x_{i-1})]$, $F(x_i) \neq F(x_{i-1})$ münasibətlərlə təyin olunur; burada $k_0 = 0$, $k_{l+1} = n + 1$, $F(x_0) = 1 - F(x_{l+1}) = 0$.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Кудлаев Э. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 655–62; [3] Наперин М., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 226–38; [4] Sarhan A. E., Greenberg B. G. (eds.), Contributions to order statistics, N. Y. – L., 1962; [5] Dixon W. J., Vuen K. K., «Statist. Hefte», 1974, Bd 15, № 3, S. 157–70.

SEPARABEL σ – CƏBR «сепарабельная σ – алгебра; separable σ – algebra» – bax, σ – *Cəbri çoxluqların*.

SEPARABEL MÜNASİBƏT «сепарабельное отношение; separable relation» – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

SEPARABEL PROSES «сепарабельный процесс; separable process» – mahiyyət etibarilə, trayektoriyaların dağılımları onları hər hansı hesabı çoxluqda dəyişikliyi prosesi ilə təyin olunan *təsadüfi prosedir*. Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi $(M, \mathfrak{B})$

metrik fəza fəzasında verilmişdir. $\mathfrak{B}$ Borel çoxluqlarının σ – cəbridir, t isə hər hansı T metrik fəzasında dəyişir. Təsadüfi prosesin tərifindən belə nəticə alınır ki, G – açıq altçoxluq, Γ , – M -in qapalı altçoxluğu olduğu halda $\bigcap_{t \in G} \{\omega: \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$

hadisədir. Bununla belə, məs., həqiqi təsadüfi prosesin t_0 anından t_1 anına qədər keçən müddət ərzində $[a, b]$ parçasını tərk etməməsi ehtimalı haqqında məsələ olduqca təbiidir. Bununla əlaqədar C. Dub [1]-də S. p. anlayışını daxil etmişdir. Əgər T metrik fəzasında hər yerdə sıx ele S çoxluğu və ele $N \in \mathcal{A}$ çoxluğu varsa ki, $P(N) = 0$ və bundan əlavə hər bir $G \subset T$ çoxluğu və hər bir qapalı $\Gamma \subset M$ çoxluğu üçün

$$A = \bigcap_{t \in S \cap G} \{\omega: \zeta(t, \omega) \in \Gamma\} \quad \text{və}$$

$$B = \bigcap_{t \in G} \{\omega: \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$$

çoxluqlar bir-birindən yalnız N çoxluğunun altçoxluqları qədər

fərqlənsə, $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesi separabel təsadüfi proses adlanır. A çoxluğu hadisədir, yeni $A \in \mathcal{A}$. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzası tam fəza, $\zeta(t)$ prosesi separabel prosesdirsə, onda $B \in \mathcal{A}$ və $\mathbf{P}(B)$ təyin olunmuşdur. S çoxluğu tərifdə prosesin separabellik çoxluğu adlanır.

T – separabel fəza, M – kompakt çoxluq olsun; $A(G, \omega)$ – t dəyişəni $G \cap S$ çoxluğunda qiymətlər aldığıda $\zeta(t, \omega)$ funksiyasının qiymətləri çoxluğunun qapayıcısı, $A(t, \omega) = \bigcap A(G, \omega)$ olsun, burada kəsişmə G -nin t nöqtəsini özündə saxlayan bütün açıq çoxluqlar üzredir; bu çoxluqlar T fəzasının topologiyasının hesabi bazasındandır. $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin separabel proses olması üçün $\mathbf{P}(N) = 0$ şərtini təmin edən $N \in \mathcal{A}$ çoxluğunun varlığı və bütün $t \in T$ qiymətlərində $\omega \neq N$ üçün $\zeta(t, \omega) \in A(t, \omega)$ münasibətinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

Prosesin separabel olub-olmaması prosesin sonluölçülülüyə paylanmalarından asılı deyildir (T və M üzərinə qoyulan olduqca ümumi fərziyyələrlə). Belə bir teorem doğrudur (bax, [1]): T – separabel metrik fəza, M – kompakt çoxluq olsun. Onda M -dən qiymətlər alan və T -də verilmiş ixtiyari təsadüfi proses hər hansı separabel təsadüfi prosese stoxastik ekvivalentdir. Başqa sözlə, hər bir $t \in T$ qiymətində verilmiş prosesin qiymətini sıfırdövlü ω – çoxluğunda ehtimal dəyişmək mümkündür ki, alınan proses S p. olur.

Əgər M lokal kompakt və $\tilde{M}$ onun kompakt genişlənməsi olarsa, onda əvvəlki teoreme əsasən, M -də ixtiyari təsadüfi proses üçün qiymətləri $\tilde{M}$ -dən olan, bu prosese stoxastik ekvivalent separabel proses vardır. Burada ilkin prosesin separabel modifikasiyasına keçid onunla nəticələnir ki, yeni proses «qeyri – məxsusi» qiymətlər ala bilər (yeni M -dən olmayan qiymətlər). Bu hal hər bir $t \in T$ qiymətində sıfır ehtimalı ilə baş verir.

Əgər proses separabel və stoxastik kəsilməzdirsə, onda separabellik çoxluğu kimi T -də hər yerdə sıx hesabi çoxluq götürmək olar.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SERIAL KORRELYASIYA ƏMSALI «сериальный коэффициент корреляции; serial correlation coefficient / sample autocorrelation coefficient» – zaman sırasının avtokorrelasiyasının (avtokorrelasiya funksiyasının) statistik qiymətini təyin edən statistikadır. $x_1, \dots, x_N$ – zaman sırası olsun.

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} A_i B_i / \left[\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} A_i^2 B_i^2 \right]^{1/2} \quad (*)$$

düsturu ilə verilən r_k statistikasına k tərtib serial korrelyasiya əmsalı deyilir, burada

$$A_i = x_i - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i, \quad B_i = x_i + k - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i + k.$$

812 SERIAL

S. k. ə. kimi (*)-ya yaxın və bir qədər sadə şəkilli statistikalardan istifadə olunur. S. k. ə.-lərin toplusu korreloqram adlanır; bu termin r_k -nin qrafikinə k -nin funksiyası kimi işarə

olunması üçün də istifadə olunur. x_i -lərin (bunlar təsadüfi kəmiyyətlərdir) paylanması haqqında müxtəlif fərziyyələrlə S. k. ə.-lərin paylanması və onların momentləri üçün dəqiq və təqribi ifadələr vardır. S. k. ə.-ləri statistik məsələlərdə zaman sırasının hədləri arasında asılılığı aşkar etmək məqsədilə istifadə olunur.

S. k. ə. termini «seçimi avtokorrelasiya» termini ilə yanaşı istifadə olunur.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

SERİYALAR KRİTERİSİ «серий критерий; runs test / Wald – Wolfowitz twosample test» – iki təkrar seçim üzrə qurulmuş ümumi variasion sırada ümumi seriyalar sayı – $n = r_1 + r_2$ sayına əsaslanan statistik kriteridir. Burada

$$r_i = \sum_j r_{ij} \quad (i=1, 2), \quad r_{ij} - j \text{ uzunluqlu seriyalar sayıdır ki,}$$

bu seriyalar i -ci seçimin nöqtələrindən ibarətdir. S. k. [4]-də daxil olunmuşdur və iki seçimin birincisi və təsadüfiliyi haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün istifadə edilir. *Boş bloklar kriterisi* ilə sıx əlaqəlidir (bax, [5]). Eyni kəsilməz paylanma funksiyasına malik asılı olmayan təkrarlanan seçimlər halı üçün kritik qiymətlər cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, [1]). $k > 2$ tip elementlərdən təşkil olunmuş seriyalar üçün ümumiləşmələrə [3], [5]-də baxılır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Mood A. M., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 367–92; [4] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 147–62; [5] Кулаев Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988.

SERİYALAR SXEMİ, ÜÇBUCAQ SXEMİ «серий схема, треугольная схема; triangular array scheme» – $X_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots$, $n=1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin asimptotik xassələri öyrənilən modeldir. $U_n = (X_{n1}, X_{n2}, \dots)$ cəmlər toplusu təsadüfi kəmiyyətlərin seriyaları adlanır. Əksər U_n toplusunda elementlərin sayı sonsuz olarsa, onda S_n sırasının 1 ehtimalla yığıldığı fərz olunur.

S. s.-inin əsas tədqiqat obyektləri, ənənəvi olaraq $Z_n = S_n - A_n$ kəmiyyətlərinin mümkün olan limit ehtimal paylanmalarının $\mathcal{L}$ çoxluğudur, burada A_n – bəzi sabitlərdir və bu kəmiyyətlərin ehtimal paylanmalarının $\mathcal{L}$ çoxluğunun ayrı-ayrı limit ehtimal paylanmalarına yığılma şərtləridir. S. s.-inə ilk dəfə, belə ümumi şəkildə 1922-də S. N. Bernşteyn tərəfindən baxılmışdır (bax, [1]). 20-ci əsrin 30-cu illərinə qədər ehtimal nəzəriyyəsində əsasən S. s.-nin xüsusi halı – $X_{nj} = X_j / B_n$, $B_n > 0$ və

S_n -dəki toplananların cəmi ixtiyari n qiymətində sonlu olan hala baxılırdı. Həm asılı olmayan toplusu hallanna, həm də asılı təsadüfi kəmiyyətlər hallanna baxılırdı (bax, [2], [1]). Ən çox birinci hal öyrənilmişdir. X_{nj} toplananlar üçün əlavə – sonsuz kiçiklik şərti burada limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsini digərlərindən fərqləndirir (bax, [3]). Bu nəzəriyyənin yaran-

masında ən çox A. N. Kolmoqorov, P. Levi (P. Lévy) (sonsuz bölünən paylanmaların $\mathfrak{S}$ sinfinin təsviri); Q. M. Bavli, A. Ya. Xinqin ($\mathfrak{L} = \mathfrak{S}$ bərabərliyinin isbatı); C. Lindeberg (J. Lindeberg), V. Feller (W. Feller), A. Ya. Xinqin, B. V. Qnedenko ($\mathfrak{S}$ sinfinin qanunları zəif yığılma kriteriləri, o cümlədən, cırlaşan, normal və Puasson paylanmalarına) kimi alimlərin xidmətləri olmuşdur.

X_{nj} toplananlarının müntəzəm sonsuz kiçilənlik şərtinin nəzərə alınmaması (bu toplananların asılı olmamalılığı şərti saxlanılmaqla) limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsinə olduqca genişləndirilməsinə imkan yaratdı, belə ki, bu halda $\mathfrak{L}$ çoxluğu $\mathbb{R}^1$ -dəki bütün paylanmaların çoxluğu ilə üst-üstə düşür (bax, [4]).

S. s. X_{nj} toplananların cəmlənmə əməlinin heqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda digər binar əməllərlə əvəz olunması istiqamətində ümumiləşdirdiyi kimi (bax, *Maksimum sxemi, təsadüfi kəmiyyətlər; Vurulma sxemi, təsadüfi kəmiyyətlər; Urbanik cəbri*), X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin $\mathbb{R}^1$ fəzasının daha ümumi təbiətli fəzalarla əvəz olunması istiqamətində ümumiləşdirildi.

S. s. modeli ilə ümumi limit teoremlərinin xüsusi halları invariantlıq prinsipi baxılan, limit paylanmalarına yığılma sürəti araşdırılan, paylanmaların yığılması zəif topologiyadan fərqli topologiyalarla əlaqədar yığılmalara baxılan çoxsaylı işlər bağlıdır (bax, [5] – [7]).

Əd.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 66–70; [2] Марков А. А., Избр. труды, М., 1951, с. 339–398; [3] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1986; [6] Зингер А. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 672–92; 1971, т. 16, в. 4, с. 614–37; [7] Кругов В. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 723–32.

S. s. – $X_{k,n}$ ($k=1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$) *təsadüfi kəmiyyətlərin* ele iki qat ardıcılığıdır ki, n -ci sətirin (seriyanın) elementləri $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ qarşılıqlı asılı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlərdir*. İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün n -in kifayət qədər böyük qiymətlərində $X_{k,n}$ *asimptotik əhəmiyyətsiz* təsadüfi kəmiyyət olarsa, yeni $k=1,\dots,n$ qiymətlərində

$$P\{|X_{k,n}| > \varepsilon\} < \varepsilon \quad (*)$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, seriyalar sxemi *sıfıral* və ya *asimptotik əhəmiyyətsiz komponentlərli* seriyalar sxemi adlanır. Ehtimal nəzəriyyəsinin yığılma anlayışı terminologiyasında $\{X_{k,n}\}$ ikiqat təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının $k=1,\dots,n$ -ə görə müntəzəm olaraq ehtimala görə sıfırayığılması *asimptotik əhəmiyyətsizliklə* eynigüclüdür. Bu tipli təsadüfi kəmiyyət sistemi çox təsadüf olduğundan, onlara belə xüsusi ad verilmişdir.

M i s a l. $\{X_j\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ olsun. $a_n \neq 0$ və $X_{k,n} = X_k a_n^{-1}$ ardıcılığı seriyalar sxemidir və bu sxemin n -ci seriyasının (sətirinin) elementlərinin cəmi $S_n \cdot a_n^{-1}$ normalanmış cəmdir.

Əgər $a_n \rightarrow \infty$ olarsa, bu seriyalar ardıcılığı sıfıral seriyalar sxemidir. [1]-də isbat olunmuşdur ki (bax, IX, XVII fəsillər), sıfıral seriyalar sxeminin n -ci seriyasının komponentlərinin cəmləri S_n -lərin limit paylanması (əgər bu limit varsa) *sonsuz bölünən paylanmadır*. Əgər asimptotik əhəmiyyətsizlik şərti (*) ödənilərsə, bu halda $X_{k,n}$ komponentlərinin eyni qanunla paylanıb-paylanmaması əhəmiyyət kəsb etmir və sonsuz bölünən paylanmalar sinfi ilə sıfıral seriyalar sxeminin n -ci seriyasının komponentləri cəmlərinin limit paylanması sinfi üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

SEVASTYANOV DÜSTURU « Севастьянова формула; Sevast'yanov formula » – λ parametrlı ən sadə giriş axını halında və xidmət müddətinin paylanması ixtiyari olduqda, tələbə orta xidmət müddəti ρ/λ olduğu halda itkiləri n – xətti xidmət sisteminde k sayda xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k üçün:

$$p_k = \frac{1}{k!} \rho^k / \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \rho^i, \quad 0 \leq k \leq n$$

düsturudur. Bu düstur Erlanq düsturunu ümumiləşdirir; Markov prosesləri üçün B. A. Sevastyanovun erqodik teoreminin nəticəsi kimi onun tərəfindən alınmışdır (1956) (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi; əlavə dəyişənlər metodu*). S. d. xidmət sistemi nəzəriyyəsində invariantlıq probleminin araşdırılmasının mənbəi olmuşdur.

SEVASTYANOV PROSESİ « Севастьянова процесс; Sevast'yanov process » – bax, *Şəxələnən proses* yaşıdan asılı.

SEYRƏKLƏNMƏ « прореживание; decimation » – bax, *Desimasiya*.

SEYRƏKLƏNMƏ (si) axının « прореживание потока; thinning of flow » – *kütləvi xidmət sistemi nəzəriyyəsində* bir anlayışdır. Praktiki cəhətdən bir sıra mühüm məsələlərdə ele hallara təsadüf olunur ki, ardıcıl xidmətdən sonra cihazlar öz elementlərinin müəyyən bir hissəsini itirir. Məs., kütləvi istehsalda cihazın elementi bir sıra dəzgahlarda düzəldilir və hər bir belə əməliyyatdan sonra defektli element atılır və beləliklə də, ilkin axın *seyrəklənir*. Belə hal düzəlişlər aparıldığı halda bir neçə korrektordan istifadə olunduqda da müşahidə olunur. Hər bir korrektordan sonra təktde qalan səhvlərin sayı azalır. Belə hallar *axının seyrəklənməsi* kimi adlandırılır. A. Renyi bu sahədə tədqiqat aparmış (bax, [2]) və bu istiqamətdə aşağıdakı sxemi öyrənmişdir: ixtiyari bərpa axınına baxılır; hər bir tələb axında q ehtimalı ilə qalır və $1-q=p$ ehtimalı ilə axından xaric olunur. Zaman miqyasının dəyişməsi hesabına axının intensivliyi dəyişməz qalır. Bu əməliyyat ardıcıl surətdə təkrar olunur (çox dəfə). A. Renyi isbat etmişdir ki, dəyişilmiş axın doğrudan da, *sadə axınla* yaxınlaşır (bax, [1]).

Deməli, sadə axın yalnız sonsuz kiçilən asılı olmayan axınların cəmlənməsindən alınır. Digər limit prosesləri də bu axına gətirir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания; [2] Реньи А. (A. Rényi), Poisson-folyamat egy jellemzése, Труды Мат. Института АН Венгрии I, 4, 1956, 519-27.

SEYRƏKLƏNMİŞ / ZƏRİF ÇOXLUQ « разреженное множество; thin set » – bax, *Regulyar nöqtə çoxluğu* üçün, *Zerif / seyrəklənmiş çoxluq*.

SƏDA FUNKSIYASI « отклик функция; response function », regressiya funksiyası, regression eksperimentin S. f. – nəzərlənən dəyişənlərin funksiyası kimi ölçmələrin orta qiymətidir.

SƏDA FUNKSIYASI, FİLTİRİN « отклик фильтра функция; response function of a filter » – bax, Xətti filtr.

SƏDD – AVTOREGRESSİV PROSES « пороговый процесс авторегрессии; threshold autoregressive process » – bax, Sədd modeli.

SƏDD MODELİ « пороговая модель; threshold model » təsadüfi prosesin sədd modeli. sədd – avtoregressiv proses, zaman sırasının sədd modeli. – diskret zamanlı $\{\zeta_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ təsadüfi prosesinin əmsalları ζ_t prosesinin qiymətlərinin hər hansı bir «səddi» (və ya «sədləri») bir və ya bir neçə anda aşdıqda, sıçrayışla dəyişən xətti tənliliklə (ζ_t -nin qiymətlərini eyni qanunla paylanmış asılı olmayan e_t təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığının qiymətləri ilə əlaqələndirən tənliliklə) verilən qeyri – xətti modeldir. Təsadüfi prosesin S. m.-ne ən sadə misal:

$$\zeta_t = \begin{cases} a^{(1)} \zeta_{t-1} + b^{(1)} e_t, & \zeta_{t-1} < c \text{ olduqda,} \\ a^{(2)} \zeta_{t-1} + b^{(2)} e_t, & \zeta_{t-1} \geq c \text{ olduqda} \end{cases} \quad (1)$$

tənliliyi ilə təyin olunan prosesdir, burada $Me_t = 0$, $Me_t^2 = 1$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ və c müəyyən sabitlərdir. Bu modelə ilk dəfə 1977-də H. Tonq tərəfindən statistik hidrologiyanın konkret bir məsələsi araşdırılarkən baxılmışdır (bax, məs., [1], [2]).

$(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k}) \in R^{(i)}$, $i = 1, \dots, l$, $R^{(1)}, \dots, R^{(l)}$ isə bütün k – ölçülü $(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k})$ vektorlar fəzasını dolduran, hər hansı kəsişməyən k – ölçülü oblastlar olsun. Onda

$$\zeta_t = a_1^{(i)} \zeta_{t-1} + \dots + a_k^{(i)} \zeta_{t-k} + b^{(i)} e_t \quad (2)$$

şəklində tənliliklə ifadə olunan təsadüfi prosesin S. m. (1) modelinin təbii ümumiləşməsidir. (2) şəklində tənliliklər təsadüfi proseslərin çoxölçülü S. m. -ni təyin edir; bu halda $\{\zeta_t\}$, n – ölçülü təsadüfi vektorlar ardıcılığı, $\{e_t\}$ – asılı olmayan (bir-birindən və $s < t$ olduqda ζ_s vektorlarından), orta qiymətlərinin sıfır vektoru olan eyni qanunla paylanmış n – ölçülü təsadüfi vektorlar ardıcılığı (kovariasion matrisi ilə verilmiş), $a_1^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}$ və $b^{(i)}$ – hər hansı $(n \times n)$ – matrislər, $R^{(1)}, \dots, R^{(l)}$, $-(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k})$ vektorlarının nk – ölçülü fəzasının oblastlarıdır. Təsadüfi proseslərin S. m.-inə aid daha ümumi misallar mövcuddur (bax, məs., [2]).

$b^{(1)} = \dots = b^{(l)}$ olduqda təsadüfi prosesin (2) şəklində S. m.-ne

$$\zeta_t = f(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k}) + b e_t$$

şəklində tənliliklə verilən ümumi qeyri – xətti avtoregressiv prosesin hissəvi xətti approksimasiyası kimi baxmaq olar, burada

$f(x_1, \dots, x_k)$, $i = 1, \dots, l$ qiymətlərində hər bir $R^{(i)}$ oblastı çərçivəsində xətti approksimasiya oluna bilən k dəyişənli funksiyadır. Müxtəlif təbii məsələlərdə (bax, [2]) təsadüfi prosesin S. m. istifadə olunur. Təsadüfi proseslərin S. m. nəzəriyyəsinin statistik məsələlərinə də baxılmışdır (bax, [1] – [3]).

Əd.: [1] Priestley M. B., Spectral analysis and time series, v. 2, L., 1981; [2] Tong H., Threshold models in non-linear time series analysis. – N. Y., 1983; [3] Chan W. S., Tong H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

SƏDD NÖQTƏSİ « пороговая точка; breakdown point » – bax, Robast statistik qiymət.

SƏHV, XƏTA, FƏRQ « промах, погрешность, разность; error, mistake, deviation » – ölçmə nəticəsində müxtəlif səbəblərə görə yaranan ən böyük qiymətlər alan, ölçmə nəticəsini olduqca dəyişən xətalardır. Belə xətalər müşahidə olunduqda, ölçmə nəticələri üzərində hesablamalarda onlar nəzərə alınmamalıdır. Müşahidə olunan xətanın səhv olub-olmadığını təyin etmək üçün onu verilmiş ümumi çoxluqdakı digər qiymətlərlə müqayisə etmək lazımdır.

Əd.: [1] Длин А. М., Математическая статистика в технике. М., 1958.

SƏHV DEKODLAMA EHTİMALI « ошибочного декодирования вероятность; probability of error decoding » – rabitə kanalı ilə ötürülən məlumatların bərpə dəqiqliyinin xarakterizasiyasının mümkün ölçülərindən biridir.

U mənbəindən hasil olunan X məlumatının M sayda müxtəlif $1, \dots, M$ qiymətlərini $p_m = P\{X = m\}$ ehtimalları ilə aldığı fərz olunur, $m = 1, \dots, M$. Fərz olunur ki, bir məlumat rabitə kanalı ilə bezi qeyd olunmuş kodlama və dekodlama metodları vasitəsilə ötürülür. m sayda məlumatın ötürülməsində S. d. e. $P_{e,m}$

$$P_{e,m} = P\{\tilde{X} \neq m | X = m\}$$

bərabərliyi ilə verilir, burada $\tilde{X}$ – kanalın çıxışında dekodlanmış məlumatdır. Səhvin orta ehtimalı

$$P_e = P\{\tilde{X} \neq X\} = \sum_{m=1}^M p_m P_{e,m}$$

kəmiyyətinə deyilir. Səhvin maksimal ehtimalı

$$P_{\max} = \max_{m=1, \dots, M} P_{e,m}$$

kəmiyyətinə deyilir.

$$P_e^{\text{opt}} = \inf P_e$$

düsturu ilə təyin olunan optimal S. d. e. xüsusilə maraqlıdır, burada aşağı səhəd kodlama və dekodlamanın bütün mümkün metodları üzrə götürülür. Ümumi halda, P_e^{opt} üçün ifadə almaq olduqca çətindir, odur ki, X məlumatındakı M -in aldığı qiymətlər sayı artdıqda və uyğun olaraq kanal üzrə ötürmə uzunluğu artdıqda P_e^{opt} ehtimalının asimptotik yaxınlaşmasını araşdırmaq daha maraqlıdır.

Məs., X məlumatı eyni ($p_m = 1/M$) ehtimalla $M = [2^{nR}]$ sayda qiymətlər aldığı halda, diskret zamanlı rabitə kanalının N uzunluqlu parçasından istifadə olunur və $R = \text{const}$, $N \rightarrow \infty$ olduqda P_e^{opt} ehtimalı asimptotik olaraq araşdırılır. Tipik hal $R < C$ olduqda (C – kanalın ötürücülük qabiliyyətidir) P_e^{opt}

ehtimalının eksponensial azaldığı və $R > C$ olduqda $1 - P_e^{\text{opt}}$ -nin eksponensial azaldığı hal sayılır.

Azalma sürətinin olması etibarlılıq əmsalı ilə xarakterizə olunur və onun aşağı və yuxarı sərhədlərinin də olduğu fərz olunur (bax, *Təsadüfi kodla(n)ma: sərhəd*). P_e^{opt} ehtimalının belə asimptotikası kanalları geniş sinfi üçün isbat olunmuşdur (xüsusi halda, diskret zamanlı bütün stasionar erqodik kanallar üçün).

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

SƏPƏLƏNMƏ(si) paylanmanın «разброс распределения; dispersion of distribution» – bax, *Səpələnmə*(si) təsadüfi kəmiyyətin.

SƏPƏLƏNMƏ(si) seçimin «расценвание выборки; dispersion of a sample» – səpələnmə mərkəzi adlandırılan hər hansı seçilmiş nöqtəyə nəzərən seçim elementlərinin səpələnməsinin kəmiyyət xarakteristikasıdır. Birölçülü halda səpələnmə mərkəzi kimi, adətən, $X = (X_1, \dots, X_n)$ ilkin seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanmanın orta qiyməti, medianı və ya modası seçilir, seçimin S. ölçüsü isə münasib qaydada seçilmiş statistikanın köməyi ilə təyin olunur. Məs., seçimin S. ölçüsü kimi əksər hallarda

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

– seçimi ortasına nəzərən

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}_n|, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{və} \quad S_n$$

statistikalarına baxılır; bunlar uyğun olaraq, seçimin orta mütləq yayınması, seçimi dispersiya və seçimin kvadratik orta yayınması adlanır. S. haqqında mühüm informasiyanı variasiya əmsalı və ya seçimin orta nisbi yayınması adlandırılan $V = S_n / \bar{X}_n$ statistikası daşıyır. Seçimin S.-nin digər mühüm xarakteristikaları empirik paylanmanın asimmetriya və ekses əmsallarıdır.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Воинов В. Г., Никulin М. С., Unbiased estimators and their applications, v. 2 – Multivariate case, Dordrecht, 1996.

SƏPƏLƏNMƏ(si) təsadüfi kəmiyyətin «разброс случайной величины; dispersion of a random variable», paylanmanın səpələnməsi, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır və bu təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyası $f_\xi(t)$ əsasında aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\mathbb{E}_r(\xi) = -2 \int_0^1 \operatorname{Re} \log f_\xi(t) \mu(dt) / r^2 \int_0^1 t^2 \mu(dt),$$

burada μ – hər hansı ölçüdür və bu ölçü üçün məxrəcdəki inteqral sonludur və r – təsadüfi kəmiyyətin indeksindən kiçik olan müsbət ədəddir.

Təsadüfi kəmiyyətin S. dispersiyanın bir çox xassələrinə malikdir, məsələn, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün additivlik xassəsini ödəyir. Bununla yanaşı zəif yığılma topologiyasında bu xarakteristika kəsilməzdir. Ölçünün $r=1$ nöqtəsində

cırılmış halına sanki yəqin yüngül səpələnmə, $\mu(dt) = dt$ olduğu halda isə ağır səpələnmə uyğundur. Təsadüfi kəmiyyətin S. və onun ümumiləşmələri çoxölçülü halda, təsadüfi kəmiyyətlər və vektorların cəmlənmə modellərində faydalı vasitədir.

Əd.: «*Mərkəz(i) təsadüfi kəmiyyətin*» məqaləsinə bax.

SƏPƏLƏNMƏ ELLİPSOİDİ «расценвания эллипсоид; ellipsoid of concentration» – təsadüfi vektorun realizasiyaları fəzasında ellipsoiddir, hər hansı vektor ətrafında bu vektorun ehtimal paylanmalarının toplanmasını ikinci tertib momentlər terminləri vasitəsilə xarakterizə edir. X , – n – ölçülü

$\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ qiymətlərini alan təsadüfi vektor, B – bu vektorun cırışmayan kovariasion matrisi olsun.

Bu halda, ixtiyari qeyd olunmuş $a \in \mathbb{R}^n$ vektoru üçün, realizasiyalar fəzası $\mathbb{R}^n$ -də a vektoruna nəzərən X təsadüfi vektorunun ehtimal paylanmasının səpələnmə ellipsoidi və ya X təsadüfi vektorunun səpələnmə ellipsoidi adlandırılan

$$(x - a)^T B^{-1} (x - a) = n + 2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

– ellipsoidini təyin etmək olar. Məs., əgər $a = M.X$ olarsa, onda S. e. X təsadüfi vektorunun paylanma ehtimallığının onun niyazi gözleməsi $M.X$ ətrafında toplanmasının həndəsi xarakteristikasıdır.

Naməlum n – ölçülü θ parametrinin statistik qiymətləndirilməsi məsələsində S. e. anlayışının köməyi ilə θ parametrinin bütün meylsiz T statistik qiymətlərinin $\tau = \{T\}$ çoxluğunda hissevə nizamlama münasibətini daxil etmək olar; bu halda fərz olunur ki, bu statistikalar cırışmayan kovariasion matrislərə malikdirlər və iki $T_1, T_2 \in \tau$ statistik qiymətlərindən T_1 statistik qiyməti o halda üstün hesab olunur ki, T_1 statistik qiymətinin S. e. T_2 statistik qiymətinin S. e.-nin daxilində bütünlüklə yerləşmiş olsun. Məhz bu mənada vektorun naməlum parametrinin meylsiz effektiv statistik qiymətləri ən yaxşı statistik qiymətlər hesab olunur, yeni meylsiz effektiv statistik qiymətin S. e. ixtiyari başqa bir meylsiz statistik qiymətin S. e.-nin daxilində yerləşir.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Ибрагимов А. И., Хасминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

SƏPƏLƏNMİŞ ÖLÇÜ «рассеянная мера; diffuse / non-atomic measure» – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi*, *Təsadüfi ölçü*.

SƏRBƏST ENERJİ «свободная энергия; free energy» – Λ -ə aid tutumda $Z_\Lambda(u)$ statistik cəmi vasitəsilə,

$$F_\Lambda^U(\beta) = -\ln Z_\Lambda(U) \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunan statistik mexanika modellərinin ən mühüm xarakteristikalarındandır.

β ters temperaturundan asılı $U\beta = \beta U$ potensiallar ailesinə baxıldığı halda S. e.

$$F_\Lambda^U(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_\Lambda \quad (2)$$

kimi təyin olunur. Van – Hov teoreminə müvafiq olaraq halların geniş sinfi üçün

$$f(\beta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} F_{\Lambda}^U(\beta) \quad (3)$$

limiti vardır və bu limit sonsuz həcmə uyğun Gibbs meydanının xüsusi sərbəst enerjisi adlanır.

Gibbs paylanmalar nəzəriyyəsində aşağıdakı düstur mühüm rol oynayır. λ – həqiqi parametr, $x_{\Lambda} = (x_t, t \in \Lambda) \in X^{\Lambda}$ və Ψ_{Λ} – x_{Λ} realizasiyasının ölçülən funksiyası olduqda, $H_{\Lambda}^{\lambda}(x_{\Lambda}) = H(x_{\Lambda}) + \lambda \Psi(x_{\Lambda})$ hamiltonianlarının ailəsi ilə verilmiş diskret argumentli meydan halında

$$\int_{X^{\Lambda}} \Lambda \Psi(x_{\Lambda}) p_{\Lambda}(x_{\Lambda}) \prod_{t \in \Lambda} m(dx_t) = \frac{1}{|\Lambda|} \frac{\partial}{\partial \lambda} F_{\Lambda}^{\lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

[burada p_{Λ} – hamiltonu H olan Gibbs paylanmasının sıxlığı, m ölçüdür və p_{Λ} sıxlığına isə bu ölçüyə nəzərən baxılır, F_{Λ}^{λ} – H_{Λ}^{λ} hamiltonianı üçün (1) düsturu ilə statistik cəm ilə təyin olunan sərbəst enerjidir], (2) düsturu ilə verilən S. e. halında, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ qabında sistem halında və nəhayət, Gibbs təsadüfi meydanının funksionallarının orta qiymətlərinin ifadə olduğu halda (3) limit S. e.-si üçün də analogi düsturlar doğrudur.

Faza keçidləri nəzəriyyəsində funksionalının orta qiymətlərinin parametrlərdən analitik asılılığı (Gibbs meydanında) haqqında məsələ mühüm yer tutur; bu parametrlərin meydanın potensialından (məs., β tərs temperaturu və μ kimyevi potensialından) analitik asılılığı nəzərdə tutulur. Statistik cəm belə parametrlərdən analitik asılı olduğundan, S. e. və onun törəmələri üçün bu doğru olmur, bu isə onunla bağlıdır ki, parametrlərin kompleks qiymətləri üçün statistik cəm sıfıra bərabər ola bilər. Sonsuz həcm limit halında belə xüsusiyyətlər parametrlərin həqiqi qiymətlərində də ola bilər, bu isə onunla bağlıdır ki, statistik cəmin kompleks sıfırları $|\Lambda| \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq həqiqi oxə yaxınlaşa bilər. Bununla əlaqədar olaraq Gibbs təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində statistik cəmlərin sıfıra çevrilmədikləri (məs., Li – Yanq teoreminin şərtlərində) kompleks müstəvidə oblastların Λ üzrə müntəzəm statistik qiymətləri mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

SƏRBƏST QAZ « свободный газ; free gas » – bax. *ideal qaz*.

SƏRBƏST MARKOV MEYDANI « свободное марковское поле; free Markov field » – $\mathbb{R}^d$ -də ele stasionar Qauss *təsadüfi meydanıdır* ki, onun orta qiyməti sıfır, spektral sıxlığı $(k^2 + m^2)^{-1}$ -ə bərabərdir ($k \in \mathbb{R}^d$ – spektral parametr, $m \geq 0$ – k ütlə adlanan ədəddir), $d=1$ və $m > 0$ olduqda bu Ornşteyn – Ulenbek stasionar Markov Qauss prosesidir. $d \geq 2$ olduqda spektral sıxlıq inteqrallanır və uyğun meydan adi mənada mövcud olmur. Lakin $d=2$, $m > 0$ və $d \geq 3$ olduqda spektral sıxlığın inteqralı yalnız sonsuzluqda dağılır.

816 SƏRBƏST

Bu hal S. M. m.-ni ümumiləşmiş funksiyaların $S'(\mathbb{R}^d)$ fəzasında ehtimal paylanması kimi qurmağa imkan verir. Bu meydan Markov xassəsi və əksolunmalarda müsbətlik kimi xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е Ф., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [2] С а й м о н Б., Модель $P[\phi]_2$ эвклидовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Д о б р у ш и н Р. Л., М и н л о с Р. А., Исследование свойств обобщенных гауссовских полей, в сб.: Задачи механики и математической физики. Посвящается памяти И. Г. Петровского, М., 1976, с. 117–65; [4] М о л ч а н Г. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 4, с. 784–87; [5] Н е л с о н Е., «J. Funct. Anal.», 1973, в. 12, № 2, p. 211–27.

SƏRBƏST MEYDAN « свободное поле; free field » – bax, *Markov təsadüfi meydanı*.

SƏRHƏD-ÇIXIŞ « граница-выход; exit boundary » – bax, *Martin sərhədi*.

SƏRHƏD-GİRİŞ « граница-вход; entrance boundary » – bax, *Martin sərhədi*.

SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ *təsadüfi dolaşmalar üçün « граничные задачи для случайных блужданий; boundary valued problems for random walks »* – sərhəd funksionallarının paylanmalarının öyrənilməsi ilə bağlı məsələlərdir. Sərhəd məsələləri mahiyyətcə *təsadüfi dolaşmanın* tipi (dim. – ölçülü, zaman üzrə diskret və ya kəsilməzliyi, sıçrayışların paylanmaları üzərinə qoyulan şərtlər və onların asılılığı və s.) və baxılan sərhəd funksionallarının şəkildən asılı olaraq təyin olunur. S. m.-nə nümunə olaraq *iflas məsələsi* və *seçki məsələsi*ni göstərmək olar.

$S_0, S_1, \dots$ – birölçülü təsadüfi dolaşma olsun. Bu dolaşma eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri ilə doğrulmuş təsadüfi dolaşmadır:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_j. \quad (*)$$

(*) şəklində təsadüfi dolaşmalar üçün əsas S. m.-dən: $\sup_{k \leq n} S_k$

funksionalının, zolaqdan ilk çıxış anının, çatım və ötür (eksses və defekt) kəmiyyətlərinin paylanmaları haqqında məsələləri qeyd etmək olar. Təsadüfi dolaşmalar üçün S. m.-nin həlli metodları yavaşmaların müxtəlifliyi ilə xarakterizə olunur.

Əvvəlcə, axtarılan paylanmalar üçün aşkar düsturların axtarılması mümkün olan halı qeyd etmək lazımdır. Fərz olunur ki, (*)-dakı X_j -lər tamqiymətlidir. Əgər

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X_j = k\} = 1, \quad \mathbf{P}\{X_j = 1\} > 0,$$

$$\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \mathbf{P}\{X_j = k\} = 1, \quad \mathbf{P}\{X_j = -1\} > 0 \right)$$

olarsa, onda $0, S_1, S_2, \dots$ təsadüfi dolaşması yuxarıdan (aşağıdan) kəsilməz dolaşma adlanır. Yuxarıdan (aşağıdan) kəsilməz təsadüfi dolaşmalar S. m.-də xüsusi yer tutur, belə ki, bunların çoxsaylı tətbiqləri, təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarının birtərəfli və ya ikitərəfli düzxəli sərhədlərdən çıxması ilə bağlı əsas funksionalların paylanmalarının aşkar

ifadələrinin tapılması mümkünlüyü bunu əsaslandırır (bax, [1], [2], [4], [5]). Məs., kəsilməz F paylanmalı, n həcmli iki seçim üzrə qurulmuş $F_n(x)$ və $G_n(x)$ empirik paylanma funksiyalarının maksimal fərqi haqqında məsələyə baxılır. Əgər

$$D^+(n) = \sup_x (F_n(x) - G_n(x)),$$

$$D(n) = \sup_x |F_n(x) - G_n(x)|$$

işarələmələrini qəbul edib, seçimi qiymətləri $z_1 < z_2 < \dots < z_{2n}$ artan qaydada sıraya düzdükdən sonra, z_j birinci seçimə aid olduqda, $X_j = 1$, əks halda $X_j = -1$ götürülərsə, onda

$$\mathbf{P}\{nD^+(n) < z\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq 2n} S_k < z/S_{2n} = 0\right\} = 1 - C_{2n}^{n-z}/C_{2n}^n,$$

$$\mathbf{P}\{nD(n) < z\} = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq 2n} |S_k| < z/S_{2n} = 0\right\} =$$

$$= \sum_{k=-[n/z]}^{[n/z]} (-1)^k C_{2n}^{n-kz}/C_{2n}^n, \quad z = [z]$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu münasibətlərin asimptotik analizindən Smirnov teoremi alınır:

$z > 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}} D^+(n) < z\right\} \rightarrow 1 - e^{-2z^2}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}} D(n) < z\right\} \rightarrow K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

münasibətləri doğrudur.

Bu nəticələrdən iki seçim biricins olduğu halda Kolmoqorov – Smirnov kriterisinin qurulmasında istifadə olunur.

Baxılan misala

$$D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$$

Kolmoqorov statistikasının araşdırılması məsələsini də əlavə etmək olar. İsbat olunmuşdur ki,

$$\mathbf{P}\{nD_n < c\} = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| < c, S_n = 0\right\} \frac{n! e^n}{n^n},$$

$$c = 1, \dots, n,$$

burada

$$\mathbf{P}\{X_j = k-1\} = \frac{1}{k!} e^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n} D_n < z\} = K(z).$$

D_n -in paylanmasının dəqiq ifadələri olduqca böyükdür, bununla belə, bunlardan paylanmanın asimptotikasının ətrafı araşdırılmasında müvəffəqiyyətlə istifadə etmək olur (bax, [4]).

Yuxarıdan kəsilməz təsadüfi dolaşmaların seçiyyəvi xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, əgər $S_n \geq x > 0$ (x – tam ədəddir) olarsa, onda hökmən elə $k \leq n$ tapılar ki, $S_k = x$ olur. Əgər X_k tamqiymətli eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlədirsə, onda $\mathbf{P}\{X_k \geq 2\} = 0$ şərti

$$n \mathbf{P}\{Y(x) = n\} = x \mathbf{P}\{S_n = x\}, \quad x \geq 1,$$

$$Y(x) = \min\{k : S_k \geq x\}$$

münasibətlərinin ödənməsi üçün zəruri və kifayətdir. Bundan başqa, $x \geq 0$ olduqda $\mathbf{M}\{z^{Y(x)}; Y(x) < \infty\} = p^x(z)$ olur, burada $p(z) = -z \mathbf{M} p^{-Y_1} = 1, |z| \leq 1$ tənliyinin $|p| \leq 1$ oblastında yeganə köküdür.

Əgər X_1 təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması ixtiyari olarsa, onda S. m.-nin həllərinin ən effektiv və universal metodu *faktori-zasion eyniliklərdir*.

S. m.-nin həllində paylanmaların asimptotik xassələrinin öyrənilməsinə xüsusi yer ayrılır. Axtarılan paylanmaların aşkar ifadələrinin qeyd olunan analitik analizi ilə yanaşı, bir sıra digər yanaşmalar da vardır. S. m.-nin analitik həlli, bir qayda olaraq, integral-fərq tənliklərinə gətirilir. Məs., $x \in (-a, b)$ nöqtəsindən çıxan hissəciyin n müddəti ərzində $(-a, b)$ intervalını tərk etməsi ehtimalı $u_n(x, a, b)$

$$u_{n+1}(x, a, b) = \int_{-a-x}^{b-x} u_n(x+y, a, b) dF(y) + 1 - F(b-x) + F(-a-x) \quad (1)$$

tənliyini ödəyir, burada $F(x) = \mathbf{P}\{X_1 < x\}$ (ilk sıçrayış üzrə tam ehtimal düsturu).

Bu istiqamətdə, Kolmoqorov – Petrovski məsələsi adı ilə məlum olan, S. m.-ndən ən təbii olan bir məsələnin asimptotik analizi həyata keçirilmişdir. Bu məsələdə $\{S_n\}$ trayektoriyalarının müəyyən eynilərlə məhdudlanmış zolaqdan çıxması ilə bağlı hal araşdırılmışdır. Fərz olunur ki, $[0, \infty)$ yarımoxunda verilmiş $g^+(t)$ və $g^-(t)$ funksiyalar $g^-(0) < 0 < g^+(0)$, $g^-(t) < g^+(t)$ şərtlərini ödəyirlər və $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, 1, \dots$ olduqda $S_n(t) = S_k/\sqrt{n}$. Mühüm əhəmiyyət kəsb etməyən çətinliklərlə qarşılaşmamaq üçün $S_n(t)$ təsadüfi funksiyasının yalnız k/n tipli nöqtələrdəki qiymətlərinə baxılır.

$$\tau_+ = \min\{k/n : S_n(k/n) \equiv S_k/\sqrt{n} \geq g^+(k/n)\}$$

kəmiyyətinə $g^+(t)$ sərhədini ilk keçmə anı deyilir. Əgər bütün k -lər üçün $S_n(k/n) < g^+(k/n)$ olarsa, onda $\tau_+ = \infty$ olduğu hesab edilir. Analoji olaraq

$$\tau_- = \min\{k/n : S_n(k/n) \leq g^-(k/n)\}$$

kəmiyyəti təyin olunur. $\tau = \min\{\tau_-, \tau_+\}$ təsadüfi kəmiyyəti $S_n(t)$ trayektoriyasının $g^{\pm}(t)$ eyniləri arasındakı zolaqdan ilk çıxma anı adlanır. Əgər G ilə hamar $g^{\pm}(t)$ eyniləri arasındakı $[0, 1)$ -də verilmiş bütün funksiyalar çoxluğu işarə olunarsa, $S_n(t)$ isə $[0, 1)$ -də $S_n(t)$ -nin trayektoriyası kimi hesab edilərsə, onda

$$\mathbf{P}\{S_n(\cdot) \notin G\} = \mathbf{P}\{\tau \leq 1\}$$

berəbərliliyi doğrudur. Baxılan məsələdə sərhəd funksionallının limit paylanması ilk dəfə olduqca mükəmməl surətdə A. N. Kolmogorov (1931, 1933) və İ. Q. Petrovski (1934) tərəfindən öyrənilmişdir. Aydın olmuşdur ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n(\cdot) \in G\}$ limit paylanması

G -nin sərhədində verilən uyğun başlanğıc və sərhəd şərtləri ilə istilikkeçimə tənliyinin həlli ilə təsvir olunur (bax, [6]). $P\{\tau > 1, S_n(1) < z\}$, $P\{\tau = \tau_{\pm}\}$ ehtimalları üçün analogi hökmlər doğrudur. Bu standart Viner prosesi w üçün $P\{S_n(\cdot) \in G\} \rightarrow P\{w(\cdot) \in G\}$ yığılmasına uyğundur.

Bu məsələdə yığılma sürəti qiymətləndirilmişdir.

$$M|X_1|^3 = c_3 < \infty, \quad |g^{\pm}(t+h) - g^{\pm}(t)| < Kh, \quad h > 0$$

$$\Delta_n(T) = \left| P\{g^-(k/n) < S_k/\sqrt{n} < g^+(k/n), 1 \leq k \leq nT\} - P\{g^-(t) < w(t) < g^+(t), 0 \leq t \leq T\} \right|$$

olsun. Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur (bax, [7], [8]):

$$\Delta_n(1) \leq L_1(k+1)c_3/\sqrt{n}, \quad \Delta_n(\infty) \leq L_2kc_3/\sqrt{n}$$

(L_1, L_2 – mütləq sabitlərdir), $c_3 = M|X_1|^3 - MX_1^3$.

(1)-də

$$u(z, x, a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n u_n(x, a, b)$$

doğuran funksiyalarına keçdikdə adi integral tənliklər alınır. Bu tənliklərin həllərinin asimptotik xassələrinin öyrənilməsi üçün yanaşmalardan biri kiçik parametrlili tənliklərin həllində Vişik və Lyusternik metodundan istifadə ilə bağlıdır (bax, [4]). Bu istiqamətdə baxılan məsələlərin potensial nezeriyyəsi ilə dərin əlaqələrinin olduğu aydın olur. Digər yanaşma paylanmaların ikiqat çevirmələrinin sonrakı çevirməsi götürülməklə analitik xassələrinin öyrənilməsinə əsaslanır (bax, [3], [9]). Burada bu və ya digər faktORIZASION eyniliklərdən istifadə olunur. FaktORIZASION komponentlərinin analitik strukturunun analizi təsadüfi dolaşmadakı hissəciyin vəziyyəti ilə bağlı dəyişənlərdən biri üzrə ikiqat çevirmələr aparmağa imkan verir, bu halda baş hissə ayrılır və qalan hissə qiymətləndirilir. Sonrakı mərhələdə alınan baş hissələrə aşınım metodunun (rus. метод перевала) bəzi modifikasiyası tətbiq olunur. Bu yanaşma [3]-də işlənilmişdir və burada Kramer tipli şərtlər ödənilməli halda $P\{\tau(x) = n, S_n \geq x + y\}$, $P\{\max_{k \leq n} S_k \geq x, S_n < x - y\}$ ehtimallarının tam asimptotik

ayrılışları n -dən asılı olaraq, x və y -in dəyişikliklərinə müxtəlif məhdudiyyətlərlə və $x = x(n) \rightarrow \infty$, $y = y(n) \rightarrow \infty$, $x + y = O(n)$ tələblərlə uyğunluq şərtlə tapılmışdır. Bu sxem üzrə iki düzxətli sərhədli məsələlər üçün (bax, [9]), asılı olmayan artımları təsadüfi proseslər üçün birsərhədli və ikisərhədli məsələlərdə tam asimptotik ayrılışlar alınmışdır (bax, [10]).

Təsadüfi dolaşmaya Markov prosesi kimi baxdıqda onun potensial nezeriyyəsi ilə əlaqəsi olduğu aydın olur (bax, [1]).

Potensial nezeriyyəsinin metodlarından istifadə S. m.-nin həllini təsadüfi dolaşmaların geniş sinfi üçün paylanmaların asimptotik analizi də daxil olmaqla, təsvir etməyə imkan verir.

Təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarının qeyri – xətti birtərəfli və ya ikitərəfli sərhədləri kəsməsi haqqında S. m.-nin daha ətraflı öyrənilməsində kombinatorika metodları, faktORIZASION eynilikləri, potensial metodları az effektiv olur.

$$\tau^* = \inf\{k : S_k \geq g^+(k)\},$$

$$\sigma = \inf\{k : S_k \notin (g^-(k), g^+(k))\}$$

olsun, burada $g^{\pm}$ – hər hansı funksiyalardır. τ^* və σ -nin paylanmaların üzrə araşdırmaların əsas hissəsi bu paylanmaların qiymətləndirilməsinə və asimptotikasına həsr olunmuşdur; bu araşdırmalar sərhədlər üzərində və X_j -nin paylanması üzərində qoyulan müxtəlif məhdudiyyətlərlə (Kramer şərti, paylanma «qalıqlarının» rəqulyar dəyişməsi, moment məhdudiyyətləri və s.) aparılmışdır. Burada araşdırmaların müxtəlif metodları: martinqal metodu (bax, [11]), invariantlıq prinsipinin geniş surətdə istifadəsi tətbiq olunur. Əgər $g^{\pm}(k)$ elə dəyişirlərsə ki,

$P\{\tau^* \leq n\}$, $P\{\sigma \leq n\} \rightarrow 0$ münasibəti ödənilsin, onda təsadüfi dolaşmalar üçün *böyük yayınmalar* haqqında məsələ alınır.

Əd.: [1] С п и ц е р Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [2] Б о р о в к о в А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Б о р о в к о в А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; [4] К о р о л ю к В. С., Б о р о в с к и х Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Г в е д е н к о Б. В., К о р о л ю к В. С., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 4, с. 525–28; [6] К о л м о г о р о в А. Н., «Изв. АН СССР. Отдел матем. и естеств. наук», 1931, № 7, с. 959–62; 1933, № 3, с. 363–72 (см.: К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 114–16, 141–48); [7] Н а г а е в С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 2, с. 179–99; [8] С а х н е н к о А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 416–21; [9] Л о т о в В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 475–85, в. 4, с. 873–79; [10] Р о г о з и н Б. А., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 6, с. 1334–63; [11] Н о в и к о в А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 158, с. 130–40.

SƏRHƏD PROSESİ « граничный процесс; boundary process » – bax, *Markov prosesi*; *davamlı*.

SƏSVERMƏ PROSESİ « голосования процесс; voting process » – bax, *Markov prosesi qarşılıqlı təsirli*.

SFERALAR ÜZRƏ DOLAŞMALAR METODU « блужданий по сферам метод; spherical process method / random walk on a sphere method » – $w(t)$

Viner prosesinin təsadüfi trayektoriyasının sərhədə ilk çıxışına qədər $[w(\tau) \in \partial D]$ hər hansı D oblastında kobud modeləşdirilmənin spesifik alqoritmlərinin toplusudur; bəzi elliptik tənliklərin Monte – Karlo metodu ilə həllində istifadə olunur. D -də $\Delta u = 0$ Laplas tənliyi üçün Dirixle məsələsinin Monte – Karlo metodu ilə həlli üçün, $u(x) = M_x f(w(\tau))$ ifadəsi əsasında ən sadə $u(y) = f(y)$, $y \in \partial D$ -də formasında təklif olunmuşdur (bax, [1]), burada riyazi gözləmə $w(0) = x$ olan bütün trayektoriyalar üzrə götürülür. S üzrə d. m. $w(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ trayektoriyasının bütün realizasiyaları əvəzinə, rekurrent olaraq $w(\theta_n)$, $\theta_0 = 0$ ardıcılığını verir, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\theta_n \rightarrow \tau$ münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $w(\theta_n)$ trayektoriyasının təsadüfi vəziyyətidir və o, mərkəzi $w(\theta_{n-1})$ -də olan D oblastı daxilinə çəkilmiş maksimal S_n sferasına ilk çıxış vəziyyəti kimi anlaşılır və bütün sfera üzrə eyni ehtimalla paylanmışdır: $P\{w(\theta_n) \in dS\} = dS/S_{n-1}$. Bu halda ∂D sərhədinin ε – ətrafına çıxışa qədər

v addım edilir, $F_{xy} \approx |\ln \varepsilon|$, sonra isə, məs., $w(\tau) \lambda w_\varepsilon(\tau) = \arg \min_{y \in \partial D} \|w(\theta_y) - y\|$ bərabərliyi alınır. Zəruriyyət yaran-

dıqda $\theta_n - \theta_{k-1}$, $k=1, \dots, \nu$ kəmiyyətləri də asılı olmadan istifadə olunur (bax, [2]). S. ü. d. m.-nin üstün cəhəti model-
ləşdirmənin sadə və qənaətli olmasıdır.

Əd.: [1] Müller M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 569–89; [2] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984.

SFERİK BHATTAÇARYA – RAO MƏSAFƏSİ

«сферическое расстояние Бхаттачарья – РAO; Bhattacharya – Rao spherical distance» – bax, *Riman informasiya metriki*.

SFERİK SİMMETRİK PAYLANMA «сферически симметричное распределение; spherically symmetric distribution». $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında sferik simmetrik ehtimal paylanması – ehtimal paylanmasıdır ki, qeyd olunmuş O nöqtəsi ətrafında fırlanma nəticəsində bir digərindən alınan ixtiyari iki ölçülən çoxluğun ehtimalları üst-üstə düşür. Sonradan fərz olunur ki, O nöqtəsi koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşür.

$\mathbb{R}^k$ -da S. s. p.-ya mühüm misal paylanma sıxlığı

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-(x_1^2 + \dots + x_k^2)/2}$$

olan normal paylanmadır, $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, bu paylanmanın xarakteristik funksiyası

$$f(t) = e^{-(t_1^2 + \dots + t_k^2)/2},$$

düsturu ilə ifadə olunur, $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Bu misalda olduğu kimi, ixtiyari S. s. p.-nın ehtimal sıxlığı varsa, onda o, yalnız $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$ kəmiyyətindən, xarakteristik funksiyası isə $\tau = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_k^2}$ kəmiyyətindən asılı olur.

$X \in \mathbb{R}^k$ – S. s. p.-ya malik təsadüfi vektor, $p_X(\rho)$ – onun ehtimal sıxlığı, $f_X(\tau)$ – xarakteristik funksiyası olsun. Onda

$$f_X(\tau) = \frac{2^{l+1} \pi^{l+1}}{\tau^l} \int_0^\infty \rho^{l+1} J_l(\rho \tau) p_X(\rho) d\rho \quad (1)$$

düsturu doğrudur, burada $J_l(x)$, l – l tərtib Bessel funksiyasıdır; $l = k/2 - 1$. Xüsusi halda, X vektoru $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1$ küresində müntəzəm qanunla paylanarsa, uyğun xarakteristik funksiyaya aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$f_X(\tau) = \frac{\Gamma(l+2)2^{l+1}}{\tau^{l+1}} J_{l+1}(\tau).$$

Digər xüsusi halda, paylanma $x_1^2 + \dots + x_k^2 = 1$ sferasının səthi üzərində müntəzəm paylanma olarsa (təsadüfi vektor vahid uzunluqludur, bütün istiqamətləri eyni ehtimallıdır; X -in əvəzinə U işarəsi istifadə olunacaqdır), onda uyğun xarakteristik funksiyası

$$f_U(\tau) = \frac{\Gamma(l+1)2^l}{\tau^l} J_l(\tau) \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

$\mathbb{R}^k$ -da vahid radiuslu sferanın səthində müntəzəm paylanma bütün S. s. p.-lar arasında xüsusi yer tutur.

1) S. s. p.-ya malik, uzunluğu $|X|$ olan təsadüfi X vektorunun ehtimal sıxlığı

$$p_{|X|}(\rho) = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \rho^{k-1} p_X(\rho)$$

düsturu ilə təyin olunur. Buna görə də, (1) və (2) düsturlarından aşağıdakı ifadə alınır:

$$f_X(\tau) = \int_0^\infty f_U(\rho \tau) p_{|X|}(\rho) d\rho.$$

Beləliklə, X -in paylanması $|X|U$ hasilinin paylanması kimi ifadə oluna bilər, bu halda vuruqların asılı olmadığı fərz olunur və bu paylanma mərkəzi koordinat başlanğıcında olan sferalar üzərində müntəzəm paylanmaların «qanşığı» olur.

2) U vektorunun paylanması $\mathbb{R}^k$ -da Lebeq ölçüsünə nəzərən singular paylanmadır. Lakin toplananlarından hər birinin paylanması U -nün paylanması ilə eyni olan, asılı olmayan $U_1, \dots, U_n$, $n \geq 2$ təsadüfi vektorlarının cəminin paylanması sıxlığa malik olur. Məs., $k=2$ və $n=2$ olduqda $U_1 + U_2$ cəminin sıxlıq funksiyası

$$p_{U_1+U_2}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 \rho \sqrt{4-\rho^2}}, & 0 < \rho < 2, \\ 0, & \rho > 2 \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur. $k=3$ olduqda $U_1 + \dots + U_n$ cəminin sıxlığı n -in çox da böyük olmayan qiymətlərində Reley tərəfindən bəzi təsadüfi dolaşmaların tədqiqi ilə bağlı hesablanmışdır (bax, [1], [2]).

3) dim. – ölçünün artdığı hal ($k \rightarrow \infty$ olduğu hal). l – qeyd olunmuş ədəd, $U_1, \dots, U_k$, – U vektorunun komponentləri olsun; k artdıqca bu vektorun komponentləri asimptotik asılı olmayan və normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olur. Daha dəqiq, $\sqrt{k}U_1, \dots, \sqrt{k}U_l$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması asılı olmayan $(0, 1)$ parametrləri normal qanunla paylanan $Z_1, \dots, Z_l$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasına yığılır (bax, [3]). Hətta $\mathbb{R}^l$ -də bu iki paylanma arasında «variasiya» üzrə məsafə $2(l+3)/(k-l-3)$ kəmiyyətini aşmır, $1 \leq l \leq k-4$. Buna görə də, $k \rightarrow \infty$ və $l = o(k)$ olduqda qeyd olunan paylanmaların «variasiya» üzrə yaxınlaşması qeyri – məhdud olaraq baş verir.

Ümumi hala nəzər salaraq, qeyd etmək düzgün olardı ki, $|X|$ -in paylanması üzrə S. s. p.-ya malik X təsadüfi vektorunun komponentinin, məs., X_1 -in paylanmasının axtarılması olduqca sadə meseledir. Tərs mesele – $|X|$ -in paylanmasının X_1 -in

paylanması üzrə tapılması (deməli, həm də X -in) *Abel inteqral tənliyinin* həllinin tapılmasını tələb edir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [4] Diaconis P., Freedman D., «Ann. Inst. H. Poincaré», Sup. an. № 2, 1987, т. 23, р. 397–423; [5] Хинчин А. Я., Избранные труды по теории вероятностей, М., 1995, с. 383–420.

SFERİK VİNER PROSESİ « сферический винеровский процесс; spherical Wiener process » – vahid radiuslu S^{n-1} sferasında zaman üzrə bircins, aşağıdakı şərtləri ödəyən Markov prosesidir:

- a) prosesin sanki bütün trayektoriyaları kəsilməzdir;
- b) $x \in S^{n-1}$, Γ S^{n-1} -də Borel çoxluğu olduqda, keçid ehtimalı

$P(t, x, \Gamma)$, S^{n-1} -də $SO(n)$ qrupunun tranzitiv təsirinə nəzərən invariantdır, yəni

$$P(t, gx, g\Gamma) = P(t, x, \Gamma);$$

- a) şərti Lindeberg tipli: a) ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $t > 0$ üçün

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} P(t, x, dy) = 0$$

şərtinə ekvivalentdir. Sup-normaya malik kəsilməz funksiyaların Banax fəzası $C(S^{n-1})$ -də S. V. p. ilə doğrulmuş

$$(T_t f)(x) = \int_{S^{n-1}} P(t, x, dy) f(y)$$

semigrupu daraldıcı semigrup olub, C_0 sinfindəndir. Onun infinitesimal operatoru A , c müsbət konstant, Δ_0 S^{n-1} -də Laplas operatoru olduqda (sferik koordinatlarla) $A = C \Delta_0$ bərabərliyi ilə təyin olunur:

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & \frac{1}{\sin^{n-2} \theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \\ & + \frac{1}{\sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \sin^{n-3} \theta_{n-2} + \theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} + \\ & + \dots + \frac{1}{\sin^2 \theta_{n-1} \dots \sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \end{aligned}$$

Əd.: [1] Yosida K., «Ann. Math. Statist.», 1949, v. 20, p. 292–96; [2] Yosida K., «Pacific J. Math.», 1952, № 2, p. 263–70.

SFERİKLİK KRİTERİSİ « сферичности критерий; test of sphericity » – nəzəri kovariasion matrisi hər hansı verilən γ matrisinə mütənəşib olan ümumi çoxluğun müvafiq empirik kovariasion matrisinin olması haqqında statistik hipotezin yoxlanılması qaydasıdır. γ məlum matris olduğundan onu xətti çevirmə tətbiq etməkə vahid I matrisi şəklində ifadə etmək mümkündür. C – müvafiq surətdə çevrilmiş empirik matris olsun. Yoxlamaq lazımdır ki, doğrudandımı

$\sigma^2 I$ nəzəri matrisi C matrisinə uyğundur, σ^2 naməlumdur. Bu prosedur sferikliyin yoxlanılması adlanır.

Kriterinin statistikasi:

$$l = \left(\frac{|C|}{(\text{tr} C)^p / p} \right)^{n/2}$$

düsturu ilə, momentlər isə

$$M(l^{2rfn}) = p^{rfp} \frac{\Gamma(p(n-1)/2)}{\Gamma(pr + p(n-1)/2)} \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(r + (n-j)/2)}{\Gamma((n-j)/2)}$$

düsturu ilə verilir; $-n \ln l^{2fn}$ isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $f = p(p+1)/2 - 1$ olan χ^2 – paylanması kimi paylanır. İkinci approksimasiyadan sonra

$$\rho = 1 - (2p^2 + p + 2) / 6p(n-1)$$

düsturu alınır. S. k. meylsiz kriteridir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

SIÇRAYIŞ ANI « скачка момент; time of a jump » – bax, *Siçrayışvari Markov prosesi, Siçrayışvari təsadüfi proses.*

SIÇRAYIŞLAR ÖLÇÜSÜ « скачков мера; jump measure » – bax, *Levi ölçüsü.*

SIÇRAYIŞVARI MARKOV PROSESİ « скачкообразный марковский процесс; jump Markov process » – zaman parametri $t \in (-\infty, \infty)$ -dan qiymətlər alan, ixtiyari $s \in T$ qiymətində hər bir trayektoriyası hər hansı təsadüfi

$h = h(s) > 0$ uzunluqlu $[s, s+h]$ zaman intervalında sabit qalan Markov prosesidir (qırlan Markov proseslərinə baxıldıqda bu və bundan sonrakı təriflər təbii olaraq modifikasiya olunur). Əgər ele ən kiçik t elementi varsa ki, belə t istisna olunduqdan sonra baxılan ixtiyari $(t-\varepsilon, t)$, $\varepsilon > 0$, $t \in T$ intervalında trayektoriyasının sabitliyi pozularsa, $t \in T$ ədədi S. M. p.-nin siçrayış anı adlanır. Əgər S. M. p.-nin ixtiyari trayektoriyasının siçrayışları çoxluğu T -nin daxilində limit nöqtələrinə malik olmazsa, belə proses pilləvari prosesdir. S. M. p.-lərinə bir çox asılı olmayan artımları proseslər aiddir, o cümlədən, Puasson prosesi, vəziyyətləri çoxluğu sonlu Markov prosesləri və trayektoriyaları sağdan kəsilməz, vəziyyətləri çoxluğu hesabı Markov prosesləri belə proseslərdəndir. S. M. p.-ləri və xüsusilə də, pilləvari S. M. p. öz vəziyyətini anı olaraq, lakin çox da tez-tez dəyişməyən, eyni zamanda yeni vəziyyətə keçdikdə bu yeni vəziyyəti, ola bilsin ki, sistemin yalnız əvvəlki vəziyyətindən asılı ola bilən fiziki sistemlərin təsviri üçün çox münasib riyazi modeldir.

Daha sonra müəyyənlik üçün $T = [0, \infty)$ halına baxılır. $(X_t, \mathcal{A}_t, P_{t,x})$ Markov prosesinin pilləvari olub-olmadığını müəyyənləşdirmək üçün aşağıdakı nəticədən istifadə etmək məsləhətdir (bu halda prosesin $(E, \mathcal{B})$ faza fəzasında verildiyi, onun keçid ehtimalları $p(s, x, t, \Gamma)$ -lərin məlum olduğu fərz olunur):

əgər

$$\lim_{h \downarrow 0} p(t, x, t+h, E \setminus \{x\}) = 0$$

münasibəti $t \geq 0$ və $x \in E$ üzrə müntəzəm ödənilərsə, X prosesi hər hansı pilləvari S. M. p.-nə ekvivalentdir. Geniş şərtlərlə

S. M. p. – hər halda ixtiyari bircins S. M. p. – ciddi Markov prosesidir (bax. [3], [4]).

Bir çox praktiki və nəzəri mühüm hallarda X S. M. p.-nin keçid funksiyası $p(s, x, t, \Gamma)$ Kolmoqorov düz və tərs tənliklərini ödəyir (bax, aşağı) və onlarla birqiyməli təyin olunur. Fərz olunur ki, $t \downarrow s$ olduqda

$$p(s, x, t, \Gamma) = \begin{cases} 1 - a(s, x)(t-s) + o(t-s), & x \in \Gamma, \\ a(s, x, \Gamma)(t-s) + o(t-s), & x \notin \Gamma, \end{cases}$$

burada $a(s, x, \cdot)$ – qeyd olunmuş $s \geq 0$ və $x \in E$ qiymətlərində $\mathcal{B}$ -də hər hansı ölçüdür və ölçü $\{x\}$ çoxluğuna sıfıra bərabər çəki qarşı qoyur və $a(s, x) = a(s, x, E)$. Onda bezi rəqulyarlıq şərtləri ödənildikdə (bax, [1], [2], [4]) aşağıdakı tənliklər doğrudurlar:

$$\frac{\partial p(s, x, t, \Gamma)}{\partial t} = - \int_{\Gamma} a(t, y) p(s, x, t, dy) + \int_E a(t, y, \Gamma) p(s, x, t, dy) \quad (1)$$

– Kolmoqorov düz tənliyi;

$$\frac{\partial p(s, x, t, \Gamma)}{\partial s} = a(s, x) p(s, x, t, \Gamma) - \int_E p(s, y, t, \Gamma) a(s, x, dy) \quad (2)$$

– Kolmoqorov tərs tənliyi.

S. M. p.-ləri üçün Kolmoqorov tənliklərinin varlığı və yeganəliyi teoremlərinə B. Pospişil (B. Pospisil) və U. Feller (W. Feller) 1935 – 36-da baxmağa başlamışlar.

Bax, *Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu sonlu, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabı*.

Əd.: [1] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1940, v. 48, № 3, p. 488–515; [2] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Д ы н к и н Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [4] Г и х м а н И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

SIÇRAYIŞVARI PROSES idarəolunan «скачкообразный процесс управляемый; controlled jump process» – bax, *idarəolunan siçrayışvari proses*.

SIÇRAYIŞVARI TƏSADÜFİ PROSES «скачкообразный случайный процесс; random / stochastic jump process» – qiymətləri hər hansı $(E, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasından olan $(X_t, t \geq 0)$ təsadüfi prosesidir ki, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında $\omega \in \Omega_1$ hadisəsi tapılar ki, $\omega \in \Omega_1$ hadisəsi üçün bütün $t \rightarrow X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega_1$ trayektoriyalar E fəzasının diskret topologiyasında sağdan kəsilməzdir. Bu belə anlaşılır: bütün $s \geq 0$ və $\omega \in \Omega_1$ üçün $\delta = \delta(s, \omega)$ göstərmək olar ki, $0 \leq t < \delta$ olduqda $X(t+s) = X(s)$ olur.

Əgər $\omega \in \Omega_1$ ardıcılığı tapılarsa ki, $X_{t_n}(\omega) \neq X_t(\omega)$ olsun, bu halda $t > 0$ nöqtəsi $t \rightarrow X_t(\omega)$ trayektoriyasının siçrayış anı adlanır. Siçrayışvari prosesin siçrayış anları $[0; \infty)$ yarımoxunda sanki yəqin hesabıdan çox olmayan, tamamilə nizamlanmış çoxluq əmələ gətirir. Məs., ilk siçrayış anı $\tau_1 > 0$

mövcuddur və bu andan sonra ikinci siçrayış anı τ_2 olur və $\tau_2 > \tau_1$ və s. Əgər hər bir sonlu zaman intervalında siçrayışların sayı sanki yəqin sonlu olarsa, S. t. p. *pillevari təsadüfi proses* adlanır. Pillevari X_t , $t \geq 0$ prosesinin trayektoriyası (τ_n, X_{τ_n}) , $n = 0, 1, \dots$, $\tau_0 = 0$ cütlər ardıcılığı ilə birqiyməli təyin olunur; yeni $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$ olduqda $X_t = X_{\tau_n}$ olur.

Markov və semi – Markov siçrayışvari prosesləri ən intensiv surətdə öyrənilir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

*** SIFIR ÇOXLUQ « нулевое множество; null set »** – Ω fəzasının ölçülən altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş μ ölçüsü sıfıra bərabər olan ixtiyari $S \in \mathcal{A}$ çoxluğuna deyilir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülü fəza olarsa, adətən, μ ölçüsü sıfıra bərabər olan çoxluq μ – sıfır çoxluq adlanır, eger hər hansı bir anlaşılmazlıq yaranmazsa, ixtiyari $S \in \mathcal{A}$ üçün $\mu(S) = 0$ olarsa, S – sıfır çoxluq deyilir.

Sıfır ehtimalı çoxluq, adətən, nəzərə alınmır və yalnız belə sıfır çoxluğunda fərqlənən iki təsadüfi kəmiyyət, adətən, «praktik olaraq üst-üstə düşür». Belə təsadüfi kəmiyyətlər formal olaraq ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Sıfır çoxluğun μ altçoxluqları ola bilər ki, onlarda ehtimal təyin olunmamışdır. Bax, *Tamamlanma(sı) ölçünün*.

SIFIR SİNFİ, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin « нулевой класс состояний цепи Маркова; null set of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*.

SIFIR – VAHİD QANUNU « нуль – единица закон; zero – one law » – müəyyən şərtlər ödənildikdə hər bir qalığ hadisəsinin ehtimalının sıfır və ya vahidə bərabər olması haqqında müddəadır. $\{\xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı ilə bağlı qalığ hadisələri çoxluğu $\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$, σ – cəbrlərinin hər biri mötərizədəki təsadüfi kəmiyyətlərin doğmuş olduğu σ – cəbrlərin kəsişməsi kimi təyin olunur.

Ümumi teoremi ilk dəfə A. N. Kolmoqorov isbat etmişdir (bax, [1], s. 116 – 17). $f(\xi_1, \xi_2, \dots)$ – sonsuz sayda arqumentlərin Ber funksiyası olsun. Əgər hər bir n üçün $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ məlum olduğu halda $P\{f(\xi_1, \xi_2, \dots) = 0 | \xi_1, \dots, \xi_n\}$ şərti ehtimalı $P\{f(\xi_1, \xi_2, \dots) = 0\}$ şərtsiz ehtimalına bərabər olarsa, onda bu sonuncu ehtimal ya 0 və ya 1-ə bərabərdir.

Eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün S. – v. q. qalığ hadisələrin σ – cəbri ilə müqayisədə hadisələrin daha geniş sinfi üçün doğrudur (bax, [13]). Bir sıra hallarda S. – v. q. martinqalların yığılması haqqında teoremlərin nəticəsi kimi alınır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Hewitt E., Savage L. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 80, № 2, p. 470–501.

SIFIR – VAHİD QANUNU Markov prosesləri üçün « нуль – единица закон для марковских процессов; zero – one law for Markov process » – ehtimaldır ki, bu teoreme görə *Markov prosesləri* ilə bağlı müəyyən hadisələrin ehtimalı yalnız 0 və ya 1 qiymətə

lörini alır. Vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ olan bircins Markov prosesi $X = (X_t, \mathcal{A}_t, P_x)$, $t \geq 0$ üçün S. – v. q.-nda hökm olunur ki, X normal proses olduqda (yəni $P_x\{X_0 = x\} \equiv 1$ olduqda), bütün $\Lambda \subset \mathcal{G}_0$ hadisələri üçün $P_x\{\Lambda\} = 0$ və ya $P_x\{\Lambda\} = 1$ olur, burada $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$. Bu teorem $\mathcal{G}^* = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{G}_t$ σ – cəbrindən olan hadisələr üçün də doğrudur, burada $\mathcal{G} = \sigma\{X_s; s \geq 0\}$. $\mathcal{A}_0$ və $\mathcal{G}$ isə ixtiyari ilkin μ paylanmalarına uyğun P_μ ölçüləri üzrə $\mathcal{A}_0$ və $\mathcal{G}$ -nin tamamlayıcılarının kəsişməsi kimi təyin olunur (bax, [2]). Sağ Markov prosesi üçün $\mathcal{A}_0 = \bigcap_{k > 0} \mathcal{A}_k$ olduğundan, $\mathcal{G}^*$ $t = 0$ nöqtəsini

daxilə alan sonsuz kiçilən zaman ərzində prosesin cərəyan etməsi ilə rekonstruksiya olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya olunur.

S. – v. q. R. Blumental (R. Blumenthal) tərəfindən 1952-də verilmişdir.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [2] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

SIFIR VƏZİYYƏTİ Markov zəncirinin « нулевое состояние » цели Маркова; **null set of a Markov chain** » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

SIFIRAL SERİYALAR SXEMİ « нулевая схема цепи; null triangular array scheme » – seriyalar sxemi təşkil edən $X_{k,n}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $k = 1, \dots, n$ üzrə ehtimalla görə müntəzəm yığılma şərtini ödəyən *seriyalar sxemidir*. $X_{k,n}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ – təsadüfi kəmiyyətlərin ikiqat ardıcılığı olsun. Bu ardıcılığın n -ci sətrindəki $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\{X_{k,n}\}$ ikiqat ardıcılığı *seriyalar sxemi* adlanır (bax, *Seriyalar sxemi*). Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün n -in olduqca böyük qiymətlərində

$$P\{|X_{k,n}| > \varepsilon\} < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n) \quad (*)$$

berəbersizlikləri ödənilərsə, seriyalar sxemi sıfıral seriyalar sxemi adlanır (və ya komponentləri asimptotik əhəmiyyətsiz seriyalar sxemi; rus. схема серий с асимптотически пренебрегаемыми компонентами). Bu tip təsadüfi kəmiyyətlər sistemləri tez-tez təsadüf olduğundan bunlara belə xüsusi ad verilmişdir.

Misal. $\{Y_j\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ olsun. $S_n a_n^{-1}$ normalanmış cəmi $X_{k,n} = X_k a_n^{-1}$ olan seriyalar sxemində n -ci seriyadakı təsadüfi kəmiyyətlər cəmidir. Əgər $a_n \rightarrow \infty$ olarsa, bu ardıcılıq S. s. s.-dir.

S. s. s.-ndə n -ci seriyayı təşkil edən kəmiyyətlərin cəmi üçün limit paylanması (əgər varsa) *sonsuz bölünən paylanmadır*. Əgər asimptotik əhəmiyyətsizlik şərti (*) ödənilərsə, onda $X_{k,n}$ komponentlərinin eyni qanunla paylanıb-paylanmadıqları mühüm deyildir. Sonsuz bölünən paylanmalar

sınıfı S. s. s.-ndə n -ci seriyayı təşkil edən kəmiyyətlər cəmi üçün limit paylanmaların sınıfı ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Seriyalar sxemi, üçbucaq sxemi*.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984, т. 2.

SİĞORTALAMANIN RİYAZİ NƏZƏRİYYƏSİ

« страхования математическая теория; mathematical insurance theory » – siğortaçıların gəlir və ya digər qazanclarının kəmiyyətə qeyri – müəyyənliyi şərtlərində stabilizədirici iqtisadi mexanizmlərin qarşılıqlı əlaqələrinin riyazi modellərinin toplusudur. Belə mexanizmlərin əksəriyyəti iqtisadi vəziyyətin realizasiyasından sonra siğortaçıların arasında bu və ya digər qaydalarla paylanan (bölüşdürülən) siğorta fondunun yaranmasını nəzərə alır: bu fond iqtisadi vəziyyətin realizasiyasından sonra siğortaçıların arasında bu və ya digər qaydalarla paylanılır. İlk siğorta modelini ola bilsin ki, T. Barroa (T. Barrois) 1834-də qurmuşdur, siğorta fimalarının müasir modelləri F. Lundbergə (F. Lundberg, 1903) aiddir.

Firma modellərinin əksəriyyətində aşağıdakı xarakteristikalara baxılır: X_t , $-t$ anına qədər toplam ödəmələri ifadə edən təsadüfi kəmiyyət, r_t , $-t$ anına qədər toplam siğorta payıdır. Bu ana qədər toplanmış kapital $S_t = s_0 + r_t - X_t$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $S_t = s_0 + r_t - X_t$ ilkin kapitaldır. Adətən, fərz olunur ki, $r_t = \lambda X_t$, burada $\lambda > 0$ – bir qayda olaraq, ekzogen surətdə (xarici təsirlərə məruz qalan) verilən xarakteristika olub, ya üst-üstə gələn xərclər və ya firmanın vahid zaman ərzində gəliri kimi interpretasiya olunur. Məs., T anına qədər firmanın fəaliyyətdə olması ehtimalı kimi

$$R(s_0, T) = P\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t \geq 0\}$$

kəmiyyəti və ya

$$R(s_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(s_0, T)$$

«limit» kəmiyyətinin axtarılması məsələsi qoyula bilər.

Əgər X_t ümumiləşmiş Puasson prosesidirsə, onda məsələni Laplas çevirmələri metodu ilə həll etmək olur (bax, [1], [2]).

Adi şərtlər çərçivəsində $t \rightarrow \infty$ olduqda $S_t \rightarrow \infty$ münasibəti sanki yəqin ödənilir. Bu fakt ilk əvvəl modelin sadəliyini əks etdirir və təklif olunmuşdur ki, dividendləri ödənməsi mümkünlüyü və ya S_t hər hansı z səddini aşdığı halda gəlirin digər istifadəsi nəzərə alınsın. Əgər zaman diskret, X_t isə asılı olmayan artımları təsadüfi proses olarsa, onda model uducu ($S_t = 0$) və elastik ($S_t = z$) ekranlı təsadüfi dolaşmaya gətirilir. z -in seçilməsi sistemin arzuolunan orta yaşama müddəti, yəni

$$D(s_0, z) = \text{Minf}\{t: S_t \geq 0\}$$

kəmiyyəti ilə təyin olunur.

S. r. n.-nin digər məsələləri siğortaçının maraqları ilə bağlıdır. Məs., $Y = Y(\omega)$ siğorta ödəməsi kəmiyyəti, ω elementar nəticədirsə və MY orta qiyməti və gəlir qiymətlərinin ehtimal paylanmaların fəzasında siğortaçının maraqları sisteminin verildiyi halda ω nəticəsində $Y = Y(\omega)$ -nin optimal qiymətinin axtarılması belə məsələlərdəndir (adətən, siğortaçının *faydalılıq funksiyası* verildiyi halda; bax, məs., [3]).

Nəzəriyyənin digər cəhəti siğortaçı və fimalar arasında qarşılıqlı əlaqələrdir. Sadə modeldə bir siğortaçı və bir firma götürülür,

bunlar da uyğun olaraq, $u_1(x)$ və $u_2(x)$ faydalılıq funksiyaları və ilkin I_1 , I_2 kapitaları ilə xarakterizə olunur. ξ sığortanın mümkün ola bilən ziyanını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət,

$$q_1 = \sup \{q : u_1(I_1 - q) > \mathbf{M}u_1(I_1 - \xi)\}$$

sığortacı üçün məqbul hesab olunan maksimal sığorta payı (взно́с) və

$$q_2 = \inf \{q : u_2(I_2) < \mathbf{M}u_2(I_2 + q - \xi)\}$$

firma üçün məqbul hesab olunan minimal sığorta payı olsun. Əgər $q_1 < q_2$ olarsa, onda sığorta mümkün deyil. Əgər $q_1 \geq q_2$ və sığorta firması yeganədirsə (monopol sığortalama), sığortacı q_1 -ə yaxın pay ödəməlidir. Əgər firmaların sayı çoxdursa (rəqabətli sığorta), pay q_2 -yə yaxın olur. Sığortacıların ziyanlarının müxtəlif ehtimal paylanmalarına malik olduqları hallarda ümumi modelər olduqca mürəkkəb olur.

Öz maraqlarını güdən sığorta firması mövcud olmadıqda, sığortacılar öz gəlirlərini stabiləşdirmək məqsədilə («riskin yenidən paylanması», «öz-özünü sığortalama») qarşılıqlı sığorta təşkilatı kimi birləşdikdə, digər mühüm vəziyyət yaranır. Bu halda sığorta fondunun tükenməsi arzuolunmaz ola bilər və məsələ də sığortacıların paylarından, onların maraqlarından və yaranmış vəziyyətdən asılı olaraq sığorta fondunun paylanması üçün ağılabatan qaydaların axtarışından ibarət olur. Yanaşmalardan biri, ümumiyyətlə, tarazlıq vəziyyətini müxtəlif surətdə təyin edən tədqiqatla bağlıdır (bax, [2], [4]). Digər – aksiomatik yanaşmada kooperativ oyunlar nəzəriyyəsindən və gəlirlərin yenidən paylanmasının ümumi prinsiplərindən ifadə olunmasından istifadə olunur (bax, [5]).

Əd.: [1] Scandia Jubilee Volume, Stockh., 1955; [2] Borch K., The mathematical theory of insurance, Lexington, 1974; [3] Arrow K., «Skandinavian Actuarial Journal», 1974, v. 1, p. 1–42; [4] Mossin J., «Econometrica», 1966, v. 34, № 4, p. 768–83; [5] Катышев П. К., Ротарь В. И., «Экономика и математические методы», 1983, т. 19, в. 6, с. 1042–52.

SIX ÖLÇÜ «плотная мера; tight measure» – Hausdorff topoloji T fəzasında aşağıdakı şərti ödəyən Borel ehtimal ölçüsü μ -dür: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ələ $K_\varepsilon \subset T$ kompakt altçoxluğu var ki, $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Polski fəzasında (məs., tam separabel metrik fəzada) hər bir ehtimal ölçüsü S -ö.-dür.

Əd.: [1] Биллингсдей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

SIX YERLƏŞMƏ SƏRHƏDİ «плотной упаковки граница; spher packing bound» – yaddaşsız diskret kanal üzrə məlumatların ötürülməsində səhv dekodlama ehtimalı üçün aşağı sərhəddir. Fərz olunur ki, giriş əlifbası $\mathcal{X}$, çıxış əlifbası $\mathcal{Y}$ olan və keçid ehtimalları $p(\tilde{y}|y)$ -lərin çoxluğu ilə verilən yaddaşsız diskret stasionar kanal üçün six yerləşmə (və ya sferik yerləşmə) eksponentinin üstü adlandırılan $E_{sp}(R)$, $R > 0$ funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$E_{sp}(R) = \sup_{\rho > 0} \max_q \{E_0(\rho, q) - \rho R\},$$

burada $q = \{q(y), y \in \mathcal{Y}\}$, ρ – $\mathcal{Y}$ -də ixtiyari ehtimal paylanması, $E_0(\rho, q)$ – Gallager funksiyasıdır (bax, Təsadüfi kodlaşdırma; sərhəd). Onda sürəti R -ə bərabər, N uzunluqlu

ixtiyari blok kodun köməyiylə verilən kanalla ötürülmədə səhv dekodlama ehtimalının orta qiyməti P_e aşağıdan qiymətləndirilir, yəni

$$P_e \geq \exp\{-N[E_{sp}(R + \alpha(N)) + \beta(N)]\},$$

burada $\alpha(N)$ və $\beta(N)$ N artdıqca sıfıra yaxınlaşırlar. S. y. s.-nə verilən kanalın etibarlılıq funksiyası $E(R)$ üçün yuxarı sərhəd kimi də baxmaq olar: $E(R) \leq E_{sp}(R)$. Məlumdur ki, $0 \leq R < C$ olduqda, $E_{sp}(R)$ – müsbət qabarıq $\cup$ funksiyadır, R -in monoton azalan funksiyasıdır. C – kanalın ötürücülük qabiliyyətidir. $R_{cr} \leq R < C$ olduqda $E_{sp}(R) = E(R)$ bərabərliyi doğrudur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

SIXLIĞI, ÇIXIŞ EHTİMALININ «плотность вероятности выхода; exit rate» – Markov prosesi üçün anlayışdır. ζ Markov prosesinin t anında x vəziyyətindən Çıxış E s.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{t,x}\{\zeta_{t+h} \neq x\}}{h} = q(t, x) \quad (*)$$

münasibətini ödəyən $q(t, x) \in [0, +\infty)$ ədədinə deyilir.

[$q = +\infty$ olduqda, (*) münasibətindən əlavə surətdəki ehtimalın sıfıra yaxınlaşması da tələb olunur]. Ç. e. s. sonlu sayda vəziyyətlər çoxluğu və ya hesabı sayda vəziyyətlər çoxluğu olan Markov prosesləri nəzəriyyələri və bunların ümumiləşməsi – sıçrayışvari Markov prosesləri nəzəriyyəsində istifadə olunur.

Bax, Ani vəziyyət, Dayanıqlı vəziyyət, Kolmogorov tənlikləri.

SIXLIĞI, EHTİMAL PAYLANMASININ «плотность распределения вероятностей; density of probability distribution» – bax, Sixlıq, ehtimal sixlığı.

SIXLIĞI, ÖLÇÜLƏR AİLƏSİNİN «плотность семейства мер; tightness of a family of measures» – bütün limit ölçülər ailəsinin hesabı additivliyini təmin edən və ailənin bütün ölçülərinin hər hansı kompakt «sanki bütünlüklə» toplanmasından ibarət xassədir. Ehtimal ölçülərinin və təsadüfi proseslərin yığılmasının öyrənilməsində yaranan məsələlərdən biri verilən ölçülər ailəsinin hansı şərtlərdə zəif kompakt olması məsələsidir. Öz növbəsində, ehtimal ölçüləri ailəsinin kompaktlıq məsələsi başqa bir sual doğurur: verilən ölçülər ailəsinin limit nöqtələri hansı hallarda hesabı – additiv olur. Ö. a. s. xassəsi limit nöqtələrinin hesabı – additivliyini təmin edir.

($\mathcal{X}, \mathcal{G}$) – normal σ – fəza, $\mathcal{M}$ – $\sigma(\mathcal{G})$ -də verilmiş ölçülər fəzası olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ələ $K \subseteq \mathcal{X}$ kompaktı varsa ki, K kompaktının hər bir $G \in \mathcal{G}$ ətrafı üçün

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} P\{\mathcal{X} \setminus G\} < \varepsilon \quad (1)$$

berabersizliyi ödənilsin, onda $\mathcal{M}$ -dən olan ölçülər ailəsi $\mathcal{P}$ ölçülərin six ailəsi adlanır. K kompaktı həmişə Borel σ – cəbrinə aid olmur, lakin əgər $K \in \sigma(\mathcal{G})$ olarsa, onda əvvəlki şərt aşağıdakı şərte çevrilir: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ələ K kompaktı vardır ki,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} P\{X \setminus K\} < \varepsilon. \quad (2)$$

Əgər (1) və ya (2) şərtlərindən biri ödənilərsə, onda hər bir $P \in \mathcal{P}$ ölçüsü $\mathcal{P}$ ailəsinin bütün limit ölçüləri kimi sıxdır.

Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $eK \subseteq \mathcal{X}$ kompaktı varsa ki, onun ixtiyari G ətrafı üçün

$$\lim_{\emptyset} \sup P_{\emptyset}\{X \setminus G\} < \varepsilon \quad (3)$$

şerti ödənilsin, onda $(P_{\emptyset})$ ehtimal ölçüləri şəbəkəsi ölçülərin sıx şəbəkəsi adlanır. $K \in \sigma(\mathcal{G})$ olduğu halda

$$\lim_{\emptyset} \sup P_{\emptyset}\{X \setminus K\} < \varepsilon \quad (4)$$

şerti, əgər $(P_{\emptyset})$ ardıcılıq olmasa, (3)-dən alınır, (3) və ya (4)-ün (1) və ya (2)-dən fərqi ondan ibarətdir ki, bütün limit ölçülərinin hamısının sıx olmasına baxmayaraq, (3) və ya (4) şərtləri $P_{\emptyset}$ ölçülərinin sıxlığına zəmanət vermir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с.177–237; [2] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук.», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [4] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 1, с. 18–20.

SIXLIĞI, PAYLANMANIN; asimptotik düstur «плотность распределения; асимптотическая формула; asymptotic formula for a distribution density» – bax, Paylanma funksiyası; asimptotik düsturlar.

SIXLIĞI, PAYLANMANIN; müşahidələr üzrə statistik qiymət «плотность распределения; оценка по наблюдениям; estimation of the density of a distribution from observations» – nezen paylanma sıxlığının statistik analoqu kimi tətbiq edilən təsadüfi funksiyadır. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış, qarşılıqlı asılı olmayan, P. s. funksiyası naməlum $f(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətlər – müşahidə nəticələri, $P_n(\cdot)$ – uyğun empirik paylanma, yeni X_i nöqtələrində toplanmış $\delta_{X_i}(\cdot)$ delta – ölçülərinin ədədi ortası olsun. P. s.-nın statistik qiymətinin qurulması ideyası aşağıdakı kimidir: hər bir müşahidə olunmuş $\delta_{X_i}(\cdot)$ ölçüsünü sıxlıq funksiyası $K_n(x, X_i)$ olan hər hansı ölçü ilə əvəz edərək, $X_1, \dots, X_n$ müşahidələri üzrə P. s. statistik qiyməti kimi

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(x, X_i) \quad (1)$$

statistikası götürülür. P. s. üçün belə statistik qiymətlərin (Rozenblatt–Parzen statistik qiymətləri və ya nüvə statistik qiymətləri adlandırılan) bir sinfi M. Rozenblatt (M. Rosenblatt, 1956) və E. Parzen (E. Parzen, 1962) tərəfindən daxil olunmuşdur. Digər sinif (proyeksiya statistik qiymətlər adlandırılan) N. N. Çentsov (1962) tərəfindən daxil olunmuşdur.

1) P. s.-nin Rozenblatt–Parzen statistik qiyməti $K_n(x, y) = a_n K(a_n(x - y))$ nüvəsi ilə alınır, yeni

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n K(a_n(x - X_i)) \quad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada K funksiyası mütləq inteqrallananıdır və $\int K(u) du = 1$, a_n ardıcılığı isə $a_n \rightarrow \infty$.

$a/n \rightarrow 0$ şərtlərini ödəyir.

P. s. üçün (2) statistik qiyməti K və f üzərinə qoyulan olduqca zəif məhdudiyyətlərlə asimptotik meylsiz, tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətdir və

$$M f_n(x) = f(x) + o(a_n^{-2}),$$

$$D f_n(x) = (a_n/n) f(x) \int K^2(u) du + O(a_n/n).$$

Bundan başqa, $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ münasibəti sanki

yəqin ödənilir, bu şərtlə ki, K məhdud dəyişən, müntəzəm kəsilməz funksiya olsun və $n^{-1} a_n^2 \ln n \rightarrow 0$ şərti ödənilsin (bax, [1]).

$F_n(\cdot)$ və $F(\cdot)$, f_n və f -ə uyğun ehtimal paylanmalar olsun. K nüvələrinin ele sinfi vardır ki, bu nüvələr üçün P. s.-nin (2) statistik qiyməti variasiyaya yığılma mənasında korektdir: hər bir P. s. f üçün

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} |F_n(A) - F(A)| \rightarrow 0$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur, $\mathcal{B}$ – Borel çoxluqları sinfidir. (2) P. s.-nin statistik qiymətlərinin xətalının müxtəlif kvadratik ölçülərinin asimptotikası yaxşı öyrənilmişdir (bax, [1], [2]).

$$\xi_n = \sup_{-\infty < a \leq x \leq b < \infty} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\sqrt{f(x)}}$$

kəmiyyəti üçün bezi ümumi şərtlərlə

$$P\{\sigma_n \xi_n - d_n < \lambda\} \rightarrow e^{-2e^{-\lambda}} \quad (3)$$

münasibəti ödənilir, burada σ_n və d_n parametrləri aşkar ifadə olunur (bax, [1], [3]). (3) ifadəsinin köməyiylə P. s.-nin (2) statistik qiymətlərinin f -dən verilmiş yayınmalarının ehtimalları təqribi qiymətləndirmək olur və bununla da, verilmiş ehtimalla f -in qrafikinə yerləşdiyi sərhədləri hesablamaq olur.

$$U_n = \int (f_n(x) - f(x))^2 r(x) dx$$

olsun; $r(x)$ – çəki funksiyasıdır. Bezi normalaşdırmalarla U_n -in limit paylanması normal paylanmadır. Buna əsaslanaraq, U_n statistikası əsasında $H_0: f = f_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün kriteri qurmaq mümkündür. Aydın olmuşdur ki, sinqulyar alternativlərdə f_0 və alternativ P. s. yalnız olduqca kiçik ölçülü çoxluqda fərqləndikdə, bu kriterilər Kolmogorov – Smirnov tipli kriterilərdən daha güclüdür.

2) P. s.-nin Çentsov statistik qiyməti –

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(x) \phi_i(y) r(y)$$

nüvəsi ilə alınır, yeni bu statistik qiymət

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{N_n} \hat{a}_i \varphi_i(x), \quad \hat{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_i(X_j) r(X_j)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\varphi_1, \varphi_2, \dots, r(x)$ çekisi ilə orto-normalanmış funksiyalar sistemidir və $N_n \rightarrow \infty$. Bu tip statistik qiymətlər L^2 metrikasında minimal xətalara nail olmaq zəruriliyi yaranan məsələlərdə əlverişlidir (bax, [4]). $\|f_n - f\|_2$ statistikasının limit paylanması normal paylanmadır və bu da öz növbəsində f üçün statistik kriterlər qurmağa imkan yaradır (bax, [1]).

(1) sxemə müvafiq P. s. statistik qiymətlərinə histogram, tezliklər poliqonu, «yaxın qonşu» metodu ilə qurulmuş statistik qiymətləri misal göstərmək olar.

Əd.: [1] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [2] Ибрагимов Н. А., Хасьянскиий Р. З., «Зал. науч. сем. ЛОМН», 1980, т. 98, с. 61–83; [3] Bickel P., Rosenblatt M., «Ann. Statist.», 1973, v. 1, № 6, p. 1071–95; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Девроу Л., Дьёрфи Л., Непараметрическое оценивание плотности – L_1 – подход, пер. с англ., М., 1988.

SIXLIĞI, STOXAŞTİK NÜVƏNİN «плотность стохастического ядра; density of stochastic kernel» – bax, *Stoxastik / ehtimali nüvə*.

SIXLIQ(ğı) keçid ehtimalının «плотность вероятности перехода; transition density / rate», sıçrayışvari Markov prosesi ζ -nin t anında x vəziyyətindən x -i özündə saxlamayan Γ vəziyyətinə keçid ehtimalının S , elə $q(t, x, \Gamma) \in [0, +\infty]$ ədədinə deyilir ki,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{t,x} \{ \zeta_{t+h} \in \Gamma \}}{h} = q(t, x, \Gamma) \quad (1)$$

münasibəti ödənilsin, burada Γ – ζ prosesinin $\mathcal{E}$ faza fəzasının ölçülən çoxluğu [$q = +\infty$ olduqda, (1) münasibətindən əlavə surətdəki ehtimalın sıfıra yaxınlaşması da tələb olunur]. Keçid ehtimalının S -nin xüsusi halı $\Gamma = \mathcal{E} \setminus \{x\}$ olduğu halda çıxış ehtimalı sıxlığıdır. Keçid ehtimalı S sıçrayışvari Markov prosesinin əsas infinitesimal xarakteristikasıdır. $\mathcal{E}$ faza fəzası sonlu və ya hesabi fəza olduğu halda keçid ehtimalı S , adətən, $y \in \mathcal{E}$ birməqətli çoxluqları üçün limitlər nəzərdə tutulur, «requlyar» hallarda

$$q(t, x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} q(t, x, y) \quad (2)$$

qəbul olunur, lakin, ümumiyyətlə isə, $\mathcal{E}$ hesabi fəza olduğu halda (2)-dəki $=$ işarəsi $\geq$ ilə əvəz olunmalıdır.

Bax, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu sonlu, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

SIXLIQ(ğı) stoxastik differensial tənliyin həllinin paylanması «плотность распределения решения стохастического дифференциального уравнения; density of the distribution of solution of a stochastic differential equation»:

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dw_t + b(t, X_t) dt, \quad X_0 = x \quad (*)$$

stoxastik differensial tənliyin həllidir,

1) əgər σ və b ölçülən və məhduddurlarsa və $\sigma\sigma^*$ cırılma-yandırsa, sanki bütün $t > 0$ üçün (*) tənliyinin həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, *Stoxastik integral; paylanmanın statistik qiymətləri*); bütün $t > 0$ qiymətlərində sıxlıq olmaya da bilər (bax, [1]).

2) əgər əlavə olaraq $\sigma\sigma^*(t, \cdot)$ müntəzəm kəsilməz funksiya olarsa, sıxlıq bütün $t > 0$ qiymətləri üçün mövcud olarsa və parabolik tənlik üçün uyğun Koşi məsələsinin fundamental həlli olarsa, (*)-nın həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, [2]).

3) əgər a və b funksiyaları C_b^∞ sinfindən olarsa və Hermander tipli şərtləri ödəyərsə və bütün $t > 0$ qiymətlərində sıxlıq olarsa və analogi şərtlərlə bu sıxlıq C_b^∞ sinfindən olarsa, (*)-nın həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, *Maliyavin hesabı*).

Əd.: [1] Сафонов М. В., в сб.: Тезисы докладов 3-й Междунар. вильнюсской конф. по теории вероятн. и матем. статистике, т. 2, Вильнюс, 1981, с. 133–34; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [3] Веретенников А. Ю., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 113–25.

SIXLIQ(ğı) təsadüfi matrisin paylanması «плотность распределения случайной матрицы; density of the distribution of a random matrix» – bax, *Təsadüfi matris*.

SIXLIQ, EHTİMAL SIXLIĞI «плотность вероятности; probability density» ehtimal paylanmasının sıxlığı – mütləq kəsilməz ehtimal ölçüsünə müvafiq olan paylanma funksiyasının töremesidir.

$\xi(\omega)$, – $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyət, $F(x)$ – onun paylanma funksiyası olsun. Əgər

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P \{ \omega : x \leq \xi(\omega) < x + \Delta x \}}{\Delta x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

varsa, onda bu limitə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası deyilir.

x -in bütün qiymətlərində

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

bərabərliyini ödəyən inteqrallanan $p(u)$ Borel funksiyası varsa, bu funksiya $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır.

Aydın ki, $p(u) \geq 0$ və $\int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1$.

X , – n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) Evklid fəzasından qiymətlər alan təsadüfi vektor, $F(x_1, \dots, x_n)$ – onun paylanma funksiyası olsun. Əgər ixtiyari heqiqi $x_1, \dots, x_n$ qiymətləri üçün

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

berabərliyi ödəyən mənfi olmayan $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası varsa, bu funksiya X təsadüfi vektorunun ehtimal sıxlığı (çoxölçülü paylanmanın ehtimal sıxlığı) deyilir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyari Borel çoxluğu olarsa,

$$P\{X \in A\} = \int_A \dots \int_A f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

şərtini ödəyən ixtiyari mənfi olmayan inteqrallanan $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası hər hansı təsadüfi vektorun E. s.-dir.

Əgər $\mathbb{R}^n$ -dən qiymətlər alan X və Y təsadüfi vektorlar asılı olmayandırlarsa və uyğun olaraq $f(x_1, \dots, x_n)$ və $g(y_1, \dots, y_m)$ E. s.-lanna malikdirsə, onda $X + Y$ təsadüfi vektorunun E. s. $h(x_1, \dots, x_n)$ vardır və $h(\cdot)$ f və g -nin kompozisiyasıdır:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) \times$$

$$\times g(y_1, \dots, y_m) du_1 \dots du_m =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_n) g(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) du_1 \dots du_n.$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ – qiymətlərini $\mathbb{R}^n$ və $\mathbb{R}^m$ -dən alan ($n, m \geq 1$) və E. s.-ları uyğun olaraq, $f(x_1, \dots, x_n)$ və $g(y_1, \dots, y_m)$ olan təsadüfi vektorlar $Z = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ isə $\mathbb{R}^{n+m}$ -də təsadüfi vektor olsun. Əgər X və Y asılı olmayan vektorlardırsa, onda Z -in E. s. $h(t_1, \dots, t_{n+m})$ vardır və $h(\cdot)$ X və Y təsadüfi vektorlarının birgə ehtimal sıxlığı adlanır və bu halda

$$h(t_1, \dots, t_{n+m}) = f(t_1, \dots, t_n) g(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}). \quad (1)$$

Əksinə, əgər Z -in E. s. (1) münasibətini ödəyirsə, onda X və Y asılı olmayan vektorlardır.

E. s. $f(x_1, \dots, x_n)$ olan X təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyası $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \times$$

$$\times f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

əgər $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ mütləq inteqrallanan funksiya varsa, onda $f(x_1, \dots, x_n)$ məhdud kəsilməz funksiya və

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \times$$

$$\times \varphi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

826 SIXLIQ

E. s. $f(x_1, \dots, x_n)$ və uyğun xarakteristik funksiya $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ aşağıdakı münasibətlə də (Plansşerel eyniliyi) əlaqelidir: $f^2(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası, yalnız və yalnız $[\varphi(t_1, \dots, t_n)]^2$ funksiyası inteqrallanan olduğu halda inteqrallandır və bu halda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n.$$

$(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, ν və μ , – $(\Omega, \mathcal{A})$ -da σ – sonlu ölçülər, ν ölçüsü μ -yə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü, yeni $\mu(A) = 0$ olduqda, $\nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$ olduğu fərz olunur. Bu halda $(\Omega, \mathcal{A})$ -da mənfi olmayan ölçülən f funksiyası vardır ki, ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

f funksiyasına ν ölçüsünün μ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim töreməsi deyilir və ν ehtimal ölçüsü olduqda, ν ölçüsünün μ -yə nəzərən E. s. deyilir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд. М., 1987; [2] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2. М., 1984; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1979.

SIXLIQ OPERATORU «плотности оператор; density operator» – H Hilbert fəzasında müsbət, vahidi izli, öz-özünə qoşma S operatorudur. Daha ətraflı, bütün $\psi \in H$ vektorları üçün

$$(\psi, S\psi) \geq 0$$

və ixtiyari ortonormalanmış $\{e_i\} \subset H$ bazisi üçün

$$\sum_i (e_i, S e_i) = 1$$

şərtlərini ödəyən operatorudur.

S. o. kvant mexanikasında sistemin statistik vəziyyətini təsvir edir, yeni bu və ya digər müşahidə olunan kəmiyyətin ölçülməsinə sistemin bilavasitə əvvəlki vəziyyəti haqqında individual kvantmexanika sistemlərin verilən statistik ansamblının hazırlanması üçün bütün mühüm informasiyanı özündə daşıyır. Bu halda S S. o. ilə təsvir olunan, statistik vəziyyətdə müşahidə olunan X -in orta qiyməti $E_S\{X\} = \text{tr} SX$ olur. Kvant vəziyyəti dedikdə, adətən, müvafiq S S. o. nəzərdə tutulur.

$\varphi(X) = \text{tr} SX$ münasibəti H Hilbert fəzasında S. o. ilə H -dəki bütün məhdud X operatorları cəbrinin normal φ vəziyyətləri arasında qarşılıqlı birqimətli uyğunluq yaradır (bax, Cəbri müşahidə olunanların). Beləliklə, qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində S. o.-na bir növ φ vəziyyətinin izə nəzərən Radon – Nikodim töreməsi kimi baxmaq olar.

Əgər S_i , $i = 1, 2, \dots$, S. o.-landırsa, onda onların ixtiyari qarışığı, yeni

$$S = \sum_i p_i S_i,$$

qabarıq kombinasiyası da S. o.-dur, burada $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$.

Kvant mexanikasında hesab olunur ki, S. o. S S. o. S ilə verilən statistik ansamblın uyğun qarışığını təsvir edir. Beləliklə, H Hilbert fəzasında bütün S. o.-nın çoxluğu $\mathfrak{S}(H)$ qabarıq çoxluqdur. S. o. S əgər başqa S. o.-lının qarışığı kimi ifadə olunmursa, onda S operatoru $\mathfrak{S}(H)$ çoxluğunun kənar nöqtəsidir. Uyğun vəziyyətlər xalis vəziyyətlər (rus. чистыми состояниями) adlanır. S. o. S -in xalis vəziyyət olması üçün zəruri və kifədir ki, S H fəzasının hər hansı vahidi ψ vektoru üzərinə ortoprojektor olsun; ψ vəziyyət vektoru adlanır. Bu halda $E_S\{X\} = (\psi, X\psi)$. Xalis vəziyyətlər və ψ vektorları arasında qarşılıqlı birqiyəmətlı uyğunluq modul üzrə vahidə bərabər kompleks vuruq dəqiqliyi ilədir.

Hər bir S S. o. birölcümlü ortoprojektorların qarışığı şəklində ifadə olunur və belə ifadə olunma birqiyəmətlı deyildir; seçilmiş ifadənin (qarışığın ifadəsinin) komponentləri qarşılıqlı ortoqonal olduqda bu ifadə S. o.-un spektral ayrılışı ilə verilir.

Əd.: bax, «Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlerin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin» məq.-də ([1], [5]).

* **SINAQ** « испытание; trial » – klassik ehtimal nəzəriyyəsinin əsas terminlərindən biridir. Aksiomatik yanaşmada S. elementar hadisələr fəzasının «sınağın nəticələri» adlanan, cüt-cüt uyuşmayan hadisələrə ixtiyari bölgüsü kimi təyin olunur, sınağın nəticələri bunların doğurduğu σ – cəbrin elementləridir – «verilən sınaqlarla bağlı hadisələrdir». S. termini, əsas etibarilə, «təkrar S.», «asılı olmayan S.», «Markov zənciri ilə bağlı sınaqlar» və s. birləşmələrdə istifadə olunur. Başqa sözlə, eksperimentin aparılması üçün qoyulan müəyyən şərtlər kompleksı ilə eksperimentdə baş verəcək və ya baş verməyəcək bütün mümkün olan hadisələr çoxluğu sınağı təşkil edir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ qiymətləri üçün $A_i \cap A_j = \emptyset$ və $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega$ olsun, burada $A_i \in \mathcal{A}$.

Sınaq – $A_1, A_2, \dots, A_r$ hadisələrindən hansı birinin baş verməsinin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir, bu halda $A_1, A_2, \dots, A_r$ sınağın mümkün nəticələri adlanır. Cüt-cüt uyuşmayan mümkün nəticələrindən biri ilə hökmən baş verəcək təsadüfi hadisələrlə ifadə olunan eksperiment S.-dir. Sınaqların asılı olmamazlığı anlayışı ehtimal nəzəriyyəsində xüsusi yer tutur. $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n)$, – n sayda ehtimal fəzaları olsun. Ω_i -nin r_i sayda $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_{r_i}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) atomları ilə bölgüsünün verildiyi fərz olunur, yeni

$$\Omega_i = A_1^{(i)} \cup A_2^{(i)} \cup \dots \cup A_{r_i}^{(i)},$$

$$A_k^{(i)} \cap A_l^{(i)} = \emptyset, \quad l \neq k, \quad l, k = \overline{1, r_i}, \quad r_i \geq 2.$$

Bu halda, $p_k^{(i)} = \mathbf{P}(A_k^{(i)})$ ehtimalları üçün $p_k^{(i)} \geq 0$ və

$$\sum_k p_k^{(i)} = 1 \text{ şərtləri ödənilməlidir (} i \text{ sınağın nömrəsidir).}$$

$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \dots \otimes \Omega_n$ çoxluğunda

$$p_{k_1 k_2 \dots k_n} = \mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{k_n}^{(n)}) \geq 0,$$

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} p_{k_1 k_2 \dots k_n} = 1$$

şərtlərini ödəyən $r = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$ sayda ehtimallar təyin etmək olar, burada $A_{k_s}^{(i)} \in \mathcal{A}_i$, $k_s = 1, 2, \dots, r_s$, $i = \overline{1, n}$, $r_s \geq 2$, $s = \overline{1, n}$.

n sayda sınağın ehtimal modelinə uyğun σ – cəbr kimi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ sinfi, yeni $\mathcal{A}_i$ -lərin düz hasilı götürülür; bu halda

$$A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{k_n}^{(n)} \in \mathcal{A}.$$

Tərif (Kolmoqorov): $k_1, k_2, \dots, k_n$ -lərin ixtiyari qiymətlərində

$$\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{k_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)})$$

bərabərliyi ödənilərsə, n sayda sınaq asılı olmayan S.-lər adlanır (bax, [1]).

Asılı olmayan S.-lının ehtimal modelini qurmaq istədikdə, əgər bu S.-lərə uyğun ehtimal fəzaları müəyyən obyektiv səbəblərə görə bir-birindən asılı olmayan ehtimal fəzaları olarsa, ehtimal nəzəriyyəsi baxımından $\mathcal{A}_i$ -lərə ümumi $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının (n sayda uyğun ehtimal fəzasının) $\mathcal{A}$ σ – cəbrinin σ – altcəbrləri kimi baxılmalı və asılı olmamazlıq da məhz bu nöqtəyi – nəzərdən anlaşılmalıdır.

Asılı olmayan S.-lərə aid aşağıdakı iki teorem A. N. Kolmoqorova məxsusdur.

Teorem 1. n sayda S. asılı olmayan S.-lərdirsə, bu S.-lərdən ixtiyari m ($m \leq n$) saydası da asılı olmayan S.-lərdir.

S.-lər asılı olmayandırsa, aydındır ki,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{k_1}^{(i_1)} \cap A_{k_2}^{(i_2)} \cap \dots \cap A_{k_m}^{(i_m)}) &= \\ &= \mathbf{P}(A_{k_1}^{(i_1)}) \cdot \mathbf{P}(A_{k_2}^{(i_2)}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_{k_m}^{(i_m)}) \end{aligned}$$

bərabərlikləri ödənilir (i_s -lərin müxtəlifliyi fərz olunur).

Teorem 2. $A_{k_i}^{(i)} \in \mathcal{A}_i$ ixtiyari təsadüfi hadisə, $\mathbf{P}(A_{k_i}^{(i)}) > 0$ olarsa, onda n sayda S.-in asılı olmayan sınaqlar olması üçün $A_{k_i}^{(i)}$ hadisəsinin $1, 2, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, n$ -ci S.-lərdə uyğun olaraq $A_{k_1}^{(1)}, \dots, A_{k_{i-1}}^{(i-1)}, A_{k_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}$ nəticələrinin birgə baş verməsi şərtinə nəzərən şərti ehtimalı $A_{k_i}^{(i)}$ -nin şərtsiz ehtimalı $\mathbf{P}_k(A_{k_i}^{(i)})$ -yə bərabər olması, yeni

$$\mathbf{P} \left(A_{k_i}^{(i)} / \bigcap_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n A_{k_\ell}^{(\ell)} \right) = \mathbf{P}(A_{k_i}^{(i)}), \quad i = \overline{1, n}$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kifədir.

Bu teoremlərə əsaslanan aşağıdakı teorem də A. N. Kolmoqorova məxsusdur.

Əgər $\mathbf{P}(A_k) > 0$, $k = \overline{1, n}$ olarsa, $A_1, \dots, A_n$ hadisələrinin asılı olmayan təsadüfi hadisələr olması üçün $\mathbf{P}(A_k / A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_n}) = \mathbf{P}(A_k)$ bərabərliyinin cüt-cüt

müxtəlif olan ixtiyari $k, k_1, k_2, \dots, k_n$ indeksləri üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Изд. второе, М., 1974; [2] Лоев М., Теории вероятностей, пер. с англ., М., 1972; [3] Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; [4] Невё Ж., Математические основы вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

SINAQLARIN ASILI OLMAMAZLIĞI « независимость испытаний; independence of trials » – bax, *Sınaq, Asılı olmayan sınaqlar*.

SIRF ARTIM PROSESİ « чистого размножения процесс; birth process » – *elə doğum və ölüm prosesidir* ki, burada sanki yəqin keçidlər yalnız böyük nömrəli vəziyyətlərdə mümkündür. Əgər vəziyyət hissəciklər sayı kimi interpretasiya olunarsa, onda S. a. p.-ndə hissəciklər sayının yalnız artması mümkündür.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

SIRF ATOMİK ÖLÇÜ « чисто атомическая мера; purely atomic measure » – bax, *Atomik ölçü*.

SIRF KƏSİLƏN MARTİNQAL « чисто разрывный мартингал; purely discontinuous martingale » – bax, *Martinqal*.

SIZMA / PERKOLYASIYA NƏZƏRİYYƏSİ « протекания / просачивания теория; percolation theory » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*.

SİQMA – CƏBRİ, ÇOXLUQLARIN « сигма – алгебра множеств; sigma – algebra of sets » – bax, σ – *Cəbri, çoxluqların*.

SİQMA – CƏBRİ, HADİSƏLƏRİN « сигма – алгебра событий; sigma – algebra of events » – bax, σ – *Cəbri, çoxluqların*.

SİQMA – CƏBRLƏR / σ – CƏBRLƏR AXINI « сигма алгебр / σ – алгебр поток; sigma algebr's flow » – bax, *Təsadüfi zaman axı, Axını, σ – cəbrlərin*.

SİQMA CƏBRLƏR CƏMİ / BİRLƏŞMƏSİ « сигма алгебр объединение; union of sigma – algebras » – bax, *Asılı olmamazlıq*.

SİQMA – TOPOLOJİ FƏZA « сигма – топологическое пространство; sigma – topological space » – bax, σ – *Topoloji fəza*.

SİQNAL / KÜY ƏMSALI « сигнал / шум отношение; signal / noise ratio » – *rabitə kanalının girişində additiv küylü signalın gücünün küy gücünə nisbətidir*. S. / k. ə. *rabitə kanallarının əngələdayanılıqlığını* xarakterizə edir. Qauss additiv küylü kanallar üçün S. / k. ə. vasitəsilə *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* də ifadə olunur: əgər $Y = (\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots)$ və $\tilde{Y} = (\dots, \tilde{Y}_{-1}, \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \dots)$ – Gauss additiv küylü kanalın giriş və çıxışında stasionar təsadüfi ardıcılıqlardırsa, onda $Z = (\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots)$ olan kanalın ötürücülük qabiliyyəti C

$$C = (1/2) \log [1 + S/N] \quad (*)$$

Şеннон düsturu ilə verilir; burada Z_k , $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ – asılı olmayan *elə* Gauss təsadüfi kəmiyyətləri

ardıcılığıdır ki, Z və Y asılı olmayandırlar, $N = \mathbf{M}Z_k^2$ – küy gücüdür, bu şərtlə ki, girişdə signalın gücü S konstantı ilə məhduddur, yəni $\mathbf{M}Y_k^2 \leq S$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ (*) düsturunun analoqu daha ümumi Gauss kanalları üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, М., 1965.

SİQNALIN SEÇİLİB AYRILMASI *əngəllər fonunda « выделение сигнала на фоне помех; signal detection in noise »* – təsadüfi proseslə bağlı signalın müşahidələr üzrə parametrlərinin qiymətləndirilməsidir. Praktika olduqca ətraflı öyrənilmiş Ə. f. s. s. a. məsələsi $\zeta(t)$ Gauss bəyaz küyü fonunda tez-tez təsadüf olunur. Bu halda müşahidə olunan $Z(t)$ prosesi

$$Z(t) = S(t, \mathbf{a}, \theta) + \zeta(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ – əngəlləyici parametrlər vektoru, $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^k$, $-Z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ prosesinin müşahidələri üzrə qiymətləndiriləcək parametrlər vektorudur. $S(t, \mathbf{a}, \theta)$ signalı üçün: 1) $S(t, \mathbf{a}, \theta)$, $-t, \mathbf{a}, \theta$ argumentlərinin məlum funksiyasıdır; 2) $S(t, \mathbf{a}, \theta)$ – korrelyasion funksiyası $\mathbf{a}$ və θ vektor parametrlərindən asılı şərti Gauss prosesinin realizasiyasıdır – kimi modellərdən biri bir qayda olaraq istifadə olunur.

Signalın seçilib ayrılmasına aid məsələlərin geniş sinfi küy fonunda signalın filtrasiya və demodulyasiya məsələlərini təşkil edir (bax, *Filtrasiya(s)* signalın, *Modulyasiya və demodulyasiya*).

Əd.: [1] Ван Трис Г. Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1–3, М., 1972–77; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 2, М., 1975.

SİQNATUR(u) *yerdəyişmənin (permutationun) « сигнатура перестановки; signature of a permutation »* – bax, *Yerdəyişmə / permutation*.

SİLİNDR « цилиндр; cylinder » – bax, *Cəbri, silindrik çoxluqların*.

F – SİLİNDR « F – цилиндр; F – cylinder » – bax, *Silindrik σ – cəbr*.

SİLİNDRİK σ – CƏBR « цилиндрическая σ – алгебра; cylindrical σ – algebra », *silindrik çoxluqlar cəbri*, – ehtimal nəzəriyyəsində, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində ən çox təsadüf olunan, *çoxluqlar σ – cəbrinin* bir növüdür. S. σ – c.-in mühüm rolu onunla əsaslandırılır ki, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və topoloji vektorlar fəzaları nəzəriyyəsində, bir qayda olaraq, müxtəlif S. σ – c.-lərdə verilən ölçülərə baxılır.

$\mathcal{M}$ – əsas bazis çoxluq, $F = \{f_i, i \in I\}$, – $\mathcal{M}$ çoxluğunun müxtəlif, ümumiyyətlə, ölçülən fəzalara inikaslının hər hansı ailəsi olsun. Hər bir f_i inikasının X çoxluğunda minimal σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu σ – cəbrə F inikasıla ailəsinin doğurduğu σ – cəbr deyilir. Əgər F $\mathcal{M}$ -də ədədi funksiyaların hər hansı ailəsidirsə (yəni $F \subset \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ olarsa, burada $\mathbb{R}$ – özünün adi Borel strukturu ilə verilmiş həqiqi oxdur), onda F ailəsi ilə doğurulan σ – cəbr F_b – *silin-*

drik σ – cəbr və ya silindrik σ – cəbr adlanır və bu halda F -ə görə heç bir anlaşılmazlığın olmadığı nəzərdə tutulur. $\{x \in \mathcal{M} : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in B\}$ şəklində çoxluqlar $\mathcal{M}$ -də F – silindrlər adlanır, burada $n \geq 1$, $\{f_1, \dots, f_n\} \subset F$, $B, - \mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında Borel altçoxludur. Bütün mümkün F – silindrlər çoxluğu $\mathcal{M}$ -də çoxluqlar cəbridir və bu cəbr F – silindrlər cəbri adlanır. Aydınır ki, F – silindrlər cəbrinin doğurduğu $\mathcal{M}$ çoxluğunda σ – cəbr F – silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşür.

Əgər $\mathcal{M}$ vektor fəza olarsa, onda F ailəsi kimi $\mathcal{M}$ -də xətti funksionalın müxtəlif ailələri ola bilər, belə ki, əgər $\mathcal{M}$ topoloji vektor fəza olarsa, onda F əvəzinə $\mathcal{M}$ -ə qoşma topoloji fəzanın müxtəlif altçoxluları götürülür. Məs., $\mathcal{M} = \mathbb{R}^T$ olsun, burada T – parametrlərin hər hansı çoxluğudur. Onda, bir qayda olaraq, proyeksiyalayıcı $p_{t_i}, t \in T$ funksiyaların ailəsinin doğurduğu, $\mathcal{M}$ -də kanonik silindrik σ – cəbrə baxılır. Kanonik $S. \sigma$ – c.-lə sonluölçülülüyə paylanmışlar haqqında Kolmoqorov teoremi əlaqəlidir.

Əgər $\mathcal{M}$ topoloji fəza, F $\mathcal{M}$ -də bütün kəsilməz ədədi funksiyalar ailəsidir, onda F ailəsinin doğurduğu σ – cəbr $\mathcal{M}$ -də Borel σ – cəbri adlanır (aydındır ki, fəzanın Borel σ – cəbri onun Borel σ – cəbrinin tərkibindədir).

Topoloji $\mathcal{M}$ fəzası və $\mathcal{M}$ -də kəsilməz ədədi funksiyaların verilən F ailəsi üçün çox vaxt belə sual qoyulur: F – silindrik σ – cəbr ilə Borel σ – cəbri üst-üstə düşürmü? Ümumi halda $\mathcal{M}$ -də Borel σ – cəbri F – silindrik σ – cəbrdən genişdir, lakin bezi mühüm hallarda bu σ – cəbrlər üst-üstə düşə bilərlər. Məs., əgər $\mathcal{M}$ polski fəzası olarsa və F ailəsi $\mathcal{M}$ -də nöqtələri ayırsa, onda qeyd olunan σ – cəbrlər üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SİLİNDRİK ÇOXLUQ « цилиндрическое множество; cylindrical set / cylinder » – sonsuz T çoxluğunda verilmiş və $(\mathcal{M}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alan bütün $x(t)$ funksiyalarının $\mathcal{M}^T$ çoxluğunun bezi $n = 1, 2, \dots, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, \Gamma \in \mathfrak{B}^n$ qiymətlərində

$$A = \{x(\cdot) : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in \Gamma\}$$

şəklində göstərilən A çoxluğudur (burada $\mathfrak{B}^n, - \mathfrak{B}$ σ – cəbrinin özü-özünə n – qat hasilidir). $S. \sigma$ -lar $\mathcal{M}^T$ -nin altçoxlularının σ – cəbrini deyil, cəbrini əmələ gətirir (T sonsuzdur).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход В. А., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SİLİNDRİK EHTİMAL « цилиндрическая вероятность; cylindrical probability » – bax. Silindrik ölçü.

SİLİNDRİK ÖLÇÜ « цилиндрическая мера, цилиндрическая вероятность, промера, квази-мера, слабое распределение; cylindrical measure, quasi measure, weak distribution », silindrik ehtimal, kvazi ölçü, zəif paylanma, – B Banax fəzasının (və ya ümumi lokal qabanq Banax fəzasının) $C(B)$ silindrlər cəbrində aşağıdakı xassələri

ödəyən μ funksiyasıdır: 1) $\mu(B) = 1$; 2) kəsilməz xətti funksionalın hər bir sonlu Γ çoxluğu üçün B -nin altçoxlularının minimal σ – cəbri $C(B, \Gamma)$ -yə μ -nün daralması hesabı – additivdir (Γ -dən olan funksiyaların bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur).

μ $S. \sigma$ -sü üçün 2) xassəsinə əsasən adi qaydada

$$\hat{\mu}(b^*) = \int_X \exp\{ib^*(x)\} d\mu(x)$$

xarakteristik funksionalını təyin etmək olur. μ $S. \sigma$ -nün xarakteristik funksionalı $\hat{\mu}$ aşağıdakı xassələrə malikdir: a) $\hat{\mu}(0) = 1$; b) $\hat{\mu}$ – müsbət müəyyindir; c) B^* fəzasının hər bir sonluölçülülüyə altfəzasına $\hat{\mu}$ -nün daralması kəsilməzdir. Tersi də doğrudur: a), b) və c) xassələrini ödəyən ixtiyari $\chi: B^* \rightarrow \mathbb{C}$ funksionalı üçün $C(B)$ -də elə yeganə μ $S. \sigma$ -sü vardır ki, hər hansı $\hat{\mu}$ üçün $\hat{\mu} = \chi$. Onda aydındır ki, ixtiyari $X: B^* \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ xətti təsadüfi funksiyası $C(B)$ -də silindrik μ ölçüsünü təyin edir:

$$\hat{\mu}(b^*) = \mathbf{M} \exp\{iX(b^*)\}, \quad b^* \in B^* \quad (*)$$

və tərsinə, əgər μ $C(B)$ -də $S. \sigma$ -dürsə, onda elə xətti təsadüfi X funksiyası vardır ki, (*) münasibəti doğrudur.

Əgər hər bir $b^* \in B^*$ üçün

$$\int_B |b^*(x)|^p d\mu(x) \rightarrow \infty, \quad (0 < p < \infty)$$

olarsa, onda μ $S. \sigma$ -sü p – tərtibə malikdir, deyilir. Əgər μ p – tərtibə malikdirsə və

$$b^* \mapsto \int_B |b^*(x)|^p d\mu(x)$$

funksiyası kəsilməzdirsə (B^* fəzasının güclü topologiyasında), μ $S. \sigma$ -sü p tipə malikdir, deyilir ($0 < p < \infty$). p – tərtib $S. \sigma$ p – tərtib xətti təsadüfi funksiya ilə, p tip $S. \sigma$ isə p – tərtib kəsilməz xətti təsadüfi funksiya ilə doğurulur [yeni kəsilməz xətti $X: B^* \rightarrow L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ operatoru ilə].

Əgər μ silindrik σ – cəbrdə ehtimal ölçüsüdürsə, onda onun silindrlər cəbrinə daralması $S. \sigma$ -dür. Belə sual mühümdür: Silindrik ölçü hansı halda silindrik σ – cəbrdə hesabı – additiv ölçüyə qədər və ya Radon ölçüsünə qədər davam oluna bilər?

Proxorov kriterisi: $C(B)$ -də μ $S. \sigma$ -sü B -də Radon ölçüsünə qədər, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilər ki, hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \subset B$ kompakt altçoxlusu tapsın ki, $A \in C(B)$ və $A \cap K = \emptyset$ münasibətlərindən

$$\mu(A) < \varepsilon$$

berabərsizliyi alınsın.

$S. \sigma$ uzlaşmış ehtimallar haqqında Kolmoqorov teoreminin isbatında yaranır.

$S. \sigma$ tez-tez sonluölçülülük fəzalarda verilən ehtimal ölçülərinin proyektiv sistemi kimi təyin olunur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Proc. 4-th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab...», 1960, v. 2, p. 403-19; [2] М у ш т а р и Д. Х., Вероятность и топология в банаховых пространствах, Казань, 1989.

SİMMETRİK BÖLÜNƏN STATİSTİKA « симметрическая разделимая статистика; symmetric separable statistic » – bax, *Bölünən statistika*.

SİMMETRİK FAKTOR EKSPERİMENT « симметричный факторный эксперимент; symmetric factorial experiment » – bax, *Faktor eksperiment*.

SİMMETRİK FOK FƏZASI « симметрическое пространство Фока; symmetric Fock space » – bax, *Fok fəzası*.

SİMMETRİK KANAL « симметричный канал; symmetric channel » – keçid funksiyası bu və ya digər simmetriya xassəsinə malik rabitə *kanalıdır*. Məs., eger giriş və çıxışda signalların qiymətlərinin sonlu çoxluqları ilə baxılan yaddaşsız stasionar kanalın keçid ehtimalları matrisinin setir və sütunları eyni bir ədədlər toplusunun yerdəyişmələrindən ibarət olarsa, belə kanal simmetrik kanal adlanır. S. k. üçün bir çox mühüm nəzəri – informasiya xarakteristikaları ya aşkar surətdə, yaxud qeyri – simmetrik kanallarla müqayisədə olduqca sadə şəkildə hesablanır.

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

SİMMETRİK QAUSS PAYLANMASI « симметричное гауссовское распределение; symmetric Gaussian distribution » – bax, *Qauss paylanması lokal kompakt Abel qrupunda*.

SİMMETRİK PAYLANMA « симметрическое распределение; symmetric distribution » – koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik iki ixtiyari çoxluğa eyni ehtimallar qarşı qoyan ehtimal paylanmasıdır. $A \subset \mathbb{R}^n$ – Borel çoxluğu,

$-A = \{x \in \mathbb{R}^n, -x \in A\}$ olsun; eger ixtiyari A çoxluğu üçün

$P(A) = P(-A)$ olarsa, $\mathbb{R}^n$ -də $P(A)$ ehtimal paylanması simmetrik paylanma adlanır. Paylanma, yalnız və yalnız, onun xarakteristik funksiyası heqiqi olduqda (və ya sıfır nəzərən simmetrik olduqda) simmetrik paylanmadır.

Riyazi gözleməsi sıfır bərabər normal paylanma S. p.-dir.

S. p.-nin bütün tərtib momentləri, eger bunlar varsa, sıfır bərabərdir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda S. p.-dir ki, onun paylanması $-\xi$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşsün.

SİMMETRİK STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK « симметрическое стохастическое дифференциальное уравнение; symmetric stochastic differential equation » – bax, *Stoxastik differensial tənlik Stratonoviç formasında*.

SİMMETRİK STOXAŞTİK İNTEQRAL « симметрический стохастический интеграл; symmetric stochastic integral » – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı*.

SİMMETRİK TƏSADÜFİ MATRİS « симметрическая случайная матрица; symmetric random matrix » – n tərtib ele kvadrat $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ təsadüfi matrisidir ki,

onun baş diaqonala nəzərən simmetrik yerləşən ixtiyari iki elementi bir-birinə bərabərdir. Fərz olunur ki, ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ elementlərinin birgə paylanma sıxlığı vardır, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri, h_i – onun məxsusi vektorlarıdır və bunların sıfırdan fərqli ilk komponentləri mənfi deyildir. Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri λ_i , $i = 1, \dots, n$ vahid ehtimalla müxtəlifdir.

Eger H_n vektor – sütunları h_i , $i = 1, \dots, n$ olan təsadüfi matris, G n – ölçülü heqiqi ortoqonal matrislər qrupu, $\mathcal{B}$ bu qrupda n – ölçülü ortoqonal matrislərin Borel çoxluğunun σ – cəbri və μ G qrupunda normalanmış Haar ölçüsüdürsə, onda ixtiyari $L \in \mathcal{B}$ altçoxluğu və α_i, β_i , $i = 1, \dots, n$ heqiqi ədədləri üçün

$$P\{H_n \in L, \alpha_i < \lambda_i < \beta_i, i = 1, \dots, n\}$$

ehtimalını hesablamaq olur (bax, [1]).

Eger $U_n \Xi_n U_n^T$ matrisinin paylanması bütün $U_n \in G_n$ ortoqonal matrisləri üçün Ξ_n matrisinin paylanmasına bərabər olarsa və ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ elementlərinin birgə paylanma sıxlığı p olarsa, onda H_n matrisi Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və aşağıdakı paylanmaya malikdir:

$$P\{H_n \in L\} = 2^n \int_D \mu(dU_n),$$

$$D = \{U_n \in L \subset G\} \cap \{u_{ii} > 0, i = 1, \dots, n\},$$

burada u_{ii} – U_n matrisinin elementləridir. Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərinin paylanma sıxlığı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\pi^{n(n+1)/4} \prod_{i=1}^n \{\Gamma[(n-i+1)/2]\}^{-1} p(Y_n) \times \\ \times \prod_{\substack{i,j=1,\dots,n, \\ i>j}} |y_i - y_j|, y_1 > \dots > y_n, Y_n = \|\delta_{ij} y_i\|.$$

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

SİMMETRİZASIYA « симметризация; symmetrization » – hər bir ξ təsadüfi kəmiyyətinə hər hansı bir ailədən

${}^s\xi = \xi - \eta$ təsadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulmasıdır, burada η təsadüfi kəmiyyəti ξ -dən asılı deyildir və ξ ilə eyni qanunla paylanmışdır. Eger ξ -nin paylanması F olarsa, $\eta = -\xi$ -nin paylanması $\bar{F}$ -dirsə və $\bar{F} = F$ olarsa, F simmetrik paylanma adlanır. [Sıxlıq funksiyası $p(x)$ -in mövcudluğu halında simmetriklik $p(-x) = p(x)$ kimi anlaşılır]. Kəsilməzlik nöqtələrində $\bar{F}(x) = 1 - F(-x)$.

ξ_1 və ξ_2 eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\xi_1 - \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası ${}^sF = F * \bar{F}$ simmetrik paylanmadır. Onda ${}^sF(x) = 1 - {}^sF(-x)$ simmetriklik şərtindən bilavasitə,

$${}^s F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+y) F\{dy\} \text{ olduğu alınır.}$$

Bu halda ${}^s F(x)$ simmetrik paylanma olub, simmetriklendirilmə nəticəsində alınmışdır, deyilir.

Misal.

F – atomları 0, 1, 2, ... nöqtələrində toplanmış $p_0, p_1, p_2, \dots$ çekili atomik paylanma olsun.

Onda simmetrizasiya nəticəsində alınmış ${}^s F$ paylanması da

atomik paylanmadır və $\pm n$ nöqtələrində $q_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k p_{k+n}$,

$n \geq 0$ ilə təyin olunan çekilərlə paylanmışdır, $q_{-n} = q_n$.
Məs., F Puasson paylanması olarsa, $n \geq 0$ olduqda

$$q_n = e^{-2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+2k}}{k!(n+k)!} = e^{-2\alpha} I_n(2\alpha)$$

olur, burada I_n – Bessel funksiyasıdır (bax, [1], fə. II { 7.1 } məsələ 9).

Simmetrizasiyanın tətbiqi bir çox mülahizələri olduqca sadələşdirməyə imkan yaradır. Məs., F və ${}^s F$ paylanmalarının qalıq paylanmaları bir-birilə müqayisə olunan kəmiyyətlər olur. Bax, *Simmetrizasiya metodu*.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Лов М., Теория вероятностей, М., 1962.

SİMMETRİZASIYA BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « симметризации неравенства; symmetrization inequalities » – bax, *Simmetrizasiya metodu*.

SİMMETRİZASIYA METODU « симметризации метод; symmetrization method » – ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi teoremlərinin isbatında tətbiq olunan bu metod, hər bir ξ

tesadüfi kəmiyyətinə hər hansı bir ailedən ${}^s \xi = \xi - \eta$ tesadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulmasına əsaslanır, burada η tesadüfi kəmiyyəti ξ -dən asılı deyildir və ξ ilə eyni qanunla paylanmışdır. $f(t)$ ξ tesadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdırsa,

${}^s \xi$ tesadüfi kəmiyyəti xarakteristik funksiyası $|f(t)|^2$ (mənfi olmayan) olan simmetrik paylanmaya malikdir; ${}^s f(t)$ ${}^s \xi$ tesadüfi

kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdırsa, onda ${}^s f(t) = |f(t)|^2$. Əgər $\xi = \{\xi_t, t \in T\}$ tesadüfi kəmiyyətlər ailəsidirsə, onda ${}^s \xi = \{\xi_t - \eta_t, t \in T\}$ simmetriklənmiş ailədir; η_t , $t \in T$ ailəsi ixtiyari $t \in T$ qiymətində ξ_t -dən asılı deyildir, η_t və ξ_t eyni qanunla paylanmış tesadüfi kəmiyyətlərdir.

Təsadüfi kəmiyyəti öz medianı ilə simmetrikləşdirmək üçün aşağıdakı *simmetrizasiya bərabərsizliklərindən* istifadə etmək olar: hər bir ε və hər bir a üçün

$$\frac{1}{2} P\{\xi - \mu_\xi \geq \varepsilon\} \leq P\{{}^s \xi \geq \varepsilon\}$$

və

$$\frac{1}{2} P\{|\xi - \mu_\xi| \geq \varepsilon\} \leq P\{{}^s \xi \geq \varepsilon\} \leq 2P\{|\xi - a| \geq \varepsilon/2\};$$

burada $\mu_\xi, -\xi$ tesadüfi kəmiyyətinin medianıdır.

Misallar. a) Üstlü qanunun simmetrizasiyası ikitərəfli üstlü qanuna gətirir; (0, 1) intervalında müntəzəm paylanmanın simmetrizasiyası nəticəsində üçbucaq paylanma alınır.

b) ± 1 nöqtələrində atomları olan $1/2$ ehtimallı simmetrik paylanma heç bir paylanmanın simmetrizasiyası nəticəsi deyildir.

Simmetrizasiya bərabərsizlikləri X_1, X_2 eyni qanunla paylanmış asılı olmayan tesadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $t > 0$ olduqda

$$P\{|X_1 - X_2| > t\} \leq 2P\left\{|X_1| > \frac{1}{2}t\right\}.$$

Əgər $a \geq 0$ olarsa ki, $P\{X_i \leq a\} \geq p$ və $P\{X_i \geq -a\} \geq p$ şərtləri ödənilsin, onda

$$P\{|X_1 - X_2| > t\} \geq p \cdot P\{|X_1| > t + a\}.$$

Xüsusi halda X_1 -in medianı sıfır bərabər olarsa, onda

$$P\{|X_1 - X_2| > t\} \geq \frac{1}{2} P\{|X_1| > t\}.$$

Əgər $X_1, \dots, X_n$ simmetrik paylanmalara malik asılı olmayan tesadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $S_n = X_1 + \dots + X_n$ cəminin paylanması da simmetrik paylanmadır və

$$P\{|X_1 + \dots + X_n| > t\} \geq \frac{1}{2} P\{\max |X_j| > t\}.$$

Əgər X_j -lər eyni F paylanması olan tesadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$P\{|X_1 + \dots + X_n| > t\} \geq \frac{1}{2} P(1 - e^{-n[1-F(t)+F(-t)]}).$$

Əd.: [1] Лов М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984, т. 2.

SİMPLEKS METOD « симплексный метод; simplex method » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

SİMPSON PAYLANMASI « Симпсона распределение; Simpson's distribution » – bax, *Üçbucaq paylanma*.

SİNAY BİLYARDI « Синная бильярд; Sinai billiards » – hissə-hissə hamar və Q oblastının daxilində ciddi qapanq sərhədə malik məhdud qapalı Q oblastında (Evklid fəzasında və ya Evklid metriklı tor üzərində yerləşən) maddi nöqtənin ətalet üzrə hərəkətinə müvafiq dinamik sistemdir; bu sistemdə nöqtə sərhəddən aşağıdakı qanunla əks olunur: düşmə bucağı qayıtma bucağına bərabərdir. S. b. statistik mexanikanın bəzi modellərində yaranır. S. b. güclü stoxastik xassələrlə dinamik sisteme misaldır. Məs., S. b. K – sistemdir (bax, [1]) və *Bernulli yerindəyişməsinə* metrik izomorfudur (bax, [2]).

Əd.: [1] Синай Я. Г., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 141–92; [2] Gallovotti G., Ornstein D., «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 38, № 2, p. 83–101.

SİNХRON ÇOXGİRİŞLİ KANAL « синхронный канал множественного доступа; synchronous channel of multiple access » – bax, Çoxgirişli kanal.

SİNХRON KANAL « синхронный канал; synchronous channel » – bax, Çoxgirişli kanal.

SİNХRON NÖQTƏVİ PROSESLƏR « синхронные точечные процессы; synchronous point processes » – bax, Nöqtəvi proses.

SİNҚULYAR AYRILIŞ « сингулярное разложение; singular decomposition » – X matrisinin $X = ULA^T$

şəklində ifadəsidir, burada X – $(n \times p)$ – matrisi p sayda dəyişənlər üzərində n sayda müşahidələrin matrisidir (bu dəyişənlərin ölçülən orta qiymətlərinin olduğu fərz olunur), U və A – uyğun olaraq, hər birinin ortoqonal sütunları olan $(n \times r)$ – və $(p \times r)$ – matrislərdir; odur ki, $U^T U = I_r$, $A^T A = I_r$, L isə $(r \times r)$ – diaqonal matrisdir, r – X matrisinin rəngidir. S. a. ilə baş komponentlərin tapılması üçün effektiv metod alınır.

Əd.: [1] Julliffe L., Principal component analysis, N. Y., 1986.

SİNҚULYAR KOMPONENTİ, ÖLÇÜNÜN « сингулярная составляющая меры; singular component of measure » – ölçünün Lebeq ayrılışının singulyar komponentidir. E – əsas bazis fəza, S – E -nin hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr, μ və λ – S -də təyin olunmuş ixtiyari iki σ – sonlu ölçülər olsun. Onda μ ölçüsü $\mu_1 + \mu_2$ cəmi şəklində ifadə oluna bilər, belə ki, μ_1 ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən singulyardır (yəni $\mu_1 \perp \lambda$), μ_2 ölçüsü isə λ ölçüsünə nəzərən kəsilməz ölçüdür (yəni $\mu_2 \ll \lambda$). Bu ifadə yeganədir və μ ölçüsünün Lebeq mənada ayrılışı adlanır. Bu halda μ_1 ölçüsü μ ölçüsünün singulyar komponenti, μ_2 ölçüsü isə μ ölçüsünün mütləq kəsilməz komponenti adlanır. Məs., μ ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda mütləq kəsilməz ölçüdür ki, singulyar komponent μ_1 eyniliklə sıfır bərabər olsun. Sonlu μ ölçüsünün singulyar komponentini almaq üçün $\sup\{\mu(Z) : Z \in S \text{ \& } \lambda(Z) = 0\}$ çoxluğuna baxmaq kifayətdir. Y hər hansı λ ölçüsü sıfır olan ele çoxluq olsun ki, qeyd olunan supremum bu çoxluqda olsun (belə çoxluq həmişə vardır). Onda μ ölçüsünün singulyar komponenti μ_1 aşağıdakı kimi təyin olunur: $\mu_1(X) = \mu(X \cap Y)$, $X \in S$. Bu halda $\mu - \mu_1$ fərqi μ ölçüsünün mütləq kəsilməz μ_2 komponentini təyin edir.

Lebeq mənada ayrılış, singulyar komponent və mütləq kəsilməz komponent anlayışları adi ölçülər əvəzinə dəyişən işarəli ölçülər (yəni yüklər) halı üçün də ümumiləşdirilə bilər.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

SİNҚULYAR PAYLANMA « сингулярное распределение; singular distribution » – Lebeq ölçüsü

sıfır bərabər çoxluqda toplanmış, $\mathbb{R}^n$ -də kəsilməz ehtimal paylanmasıdır. Kantor paylanması düz xətt üzərində S. p.-ya

misaldır. $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$ -də S. p., məs., müsbət radiuslu sferada müntəzəm paylanmadır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

SİNҚULYAR PAYLANMA FUNKSIYASI « сингулярная функция распределения; singular distribution function » – bax, Lebeq ayrılışı paylanma funksiyalarının.

SİNҚULYARLIĞI, ÖLÇÜLƏRİN « сингулярность мер; singularity of measures » – iki ölçü arasında, ixtiyari

prehilbert fəzasında iki vektorun ortoqonallıq münasibətinə müəyyən mənada analogi münasibətdir (bəzən $\mu_1 \perp \mu_2$ simvolu ilə işarə olunur).

E – əsas bazis fəzası, S – bu fəzanın hissələrinin qeyd olunmuş σ – cəbri, μ_1 və μ_2 – S σ – cəbrində

təyin olunmuş ölçülər olsun. Əgər E fəzasının ele iki S – ölçülən X_1 və X_2 çoxluqlarına $\{X_1, X_2\}$ bölgüsü olarsa ki,

$\mu_1(X_2) = \mu_2(X_1) = 0$ şərti ödənilsin, onda μ_1 və μ_2 (qarşılıqlı) singulyar ölçülər adlanır; başqa sözlə, μ_1

ölçüsü X_1 çoxluğunda, μ_2 ölçüsü X_2 çoxluğunda toplanmış

ölçülərdir. Bu halda deyilir ki, μ_1 və μ_2 ölçüləri asılı olma

yan spektral tiplərə aiddirlər (və ya dizyunkt spektral tiplərə).

Adi ölçülərin singulyarlıq anlayışını dəyişən işarəli ölçülər (yüklər) üçün də ümumiləşdirmək olur. İki yükün tam variasiyaları singulyar olarsa, onlar (qarşılıqlı) singulyar yüklər adlanır. S E əsas bazis fəzasının hissələrinin qeyd olunmuş σ – cəbri olduqda ölçülərin singulyarlıq anlayışını təyin etmək olur.

$(\mu_i)_{i \in I}$ – eyni bir S σ – cəbrində təyin olunmuş ölçülər ailəsi

olsun. Əgər iki müxtəlif $i \in I$ və $j \in I$ indeksləri üçün bu

ailədən olan uyğun μ_i və μ_j ölçüləri qarşılıqlı singulyar

olarlarsa, onda bu ailənin ölçüləri cüt-cüt singulyar ölçülər

adlanır. Seçmə aksiomunun köməyi ilə vahid uzunluqlu $[0, 1]$ seqmentinin altçoxluqlarının σ – cəbri

S -i qurmaq və S -də cüt-cüt singulyar ehtimal ölçülərinin

$(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsini ele təyin etmək olar ki, hər bir μ_i , $i \in I$ ölçüsü

$[0, 1]$ -də klassik Lebeq ölçüsünün davamı olsun və indekslər

çoxluğu I -nin gücü ən böyük olsun (yəni $2^{2^{\aleph}}$ -yə bərabər olsun, $\aleph$ – kontinum gücüdür).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

K – SİSTEM « K – система; K – system » –

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, K – xassəli

dinamik sistemdir (avtomorfizm T -dir, daha dəqiq, onun

doğruduğu avtomorfizmlər qrupu $\{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$ və ya ölçülən

axındır); avtomorfizm halında K – xassə aşağıdakı kimi ifadə olunur: ele $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ σ – cəbri tapılar ki;

$$1) T \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_0;$$

$$2) \bigcup_{n \geq 0} T^n \mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \text{ } \sigma \text{ – cəbrini doğurur;}$$

3) $\bigcup_{n < 0} T^n \mathcal{A}_0 = \mathfrak{N}$ şərtləri ödənilsin, burada $\mathfrak{N}$ yalnız 0

və ya 1 ölçülü çoxluqları özündə saxlayan σ – cəbrdir (trivial σ – cəbr), σ – cəbrlər arasında bərabərliklər isə sıfır ölçülü çoxluq dəqiqliyiylə yerinə yetir. Axınlar halında K – xassə eynilə ifadə olunur, amma diskret n parametri kəsilməz parametrlə əvəz olunmaq şərtlə.

K – s. anlayışı [1]-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur, belə sistemlər kvazirequlyar sistemlər adlandırılmışdır. Diskret zamanlı K – s.-lər K – avtomorfizmlər, kəsilməz zamanlı K – s.-lər isə K axınları adlanır.

K – s.-ə aid misal – diskret və ya kəsilməz zamanlı ζ_t , $-\infty < t < \infty$ prosesinin dar mənada stasionar seçimi funksiyaları fəzasında yerindəyişmələr qrupudur və bu prosesin qalıq σ – cəbri trivial σ – cəbrdir (qalıq σ – cəbr – $\bigcup_{n > 0} \mathcal{B}_{\zeta_t}$

kəsişməsi kimi təyin olunur, burada $\mathcal{B}_{\zeta_t}$ isə bütün $s \geq t$ üçün ζ_s təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir). Trivial qalıq σ – cəbri proseslər Kolmoqorov mənada requlyar və ya sıfır-vahid qanununu ödəyən proseslər adlanır. Əgər $T^t \zeta_t$ requlyar prosesinin ω realizasiyasını $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(s) = \omega(s+t)$ realizasiyasına çevirən yerindəyişmədirsə (sola yerindəyişmə), onda $\mathcal{B}_{\zeta_0} \sigma$ – cəbri K – s.-in tərifində $\mathcal{A}_0$ üzərinə qoyulan şərtləri ödəyir. Diskret zaman halında, ζ_0 təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu bölgünün entropiyası da sonlu olarsa (yeni $\zeta_0 = \text{const}$ tipli çoxluqlara bölgü olarsa), ζ_t prosesinin requlyarlığı $\{T^t\}$ sisteminin K – xassəli olması üçün yalnız kafi deyil, həmçinin zəruri şərtidir (ümumi halda bu doğru deyil; bax, [2]).

Ehtimal nəzəriyyəsindən başqa klassik və statistik mexanikanın dinamik sistemləri arasında və digər sahələrdə də K – s.-lərə təsadüf olunur. Çevrilməyən çevirmələr sinfində (endomorfizmlər sinfində) K – avtomorfizmin analoqu *dəqiq endomorfizmdir*.

Ümumi K – s. nəzəriyyəsində, adətən, fərz olunur ki, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ Lebeq fəzasıdır; onda K – s.-in tərifində $\mathcal{A}_0 \sigma$ – cəbrini ona uyğun ölçülən bölgü (K – bölgü) ilə, $\mathcal{A}$ və $\mathfrak{N} \sigma$ – cəbrlərini uyğun olaraq ayrı-ayrı nöqtələrə bölgü və yeganə elementi bütün Ω fəzası olan bölgü ilə əvəz etmək olar. Qeyd etmək lazımdır ki, bir çox nəticələr (xüsusilə də, K – avtomorfizmlərə aid) ehtimal fəzalarının daha geniş sinfi üçün də doğrudur.

İxtiyari K – s. erqodikdir, müsbət entropiyaya və hesabat spektrə malikdir (bax, [1], [3]), ixtiyari bölünmə əlamətli qarışıqdır və bundan başqa da, K – xassəyə ekvivalent K – qarışma xassəsinə malikdir (« K – qarışma » termini də buradan götürülmüşdür). K – s. sinfini xalis entropik terminlərlə xarakterizə etmək olar (bax, [5], [6]): dinamik sistem K – s. sinfinə, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, onun tamamilə müsbət entropiyası olsun. Bu baxılan sistemin ixtiyari qeyri – trivial homomorf obrazının (faktorsistem) müsbət entropiyasının olması kimi anlaşılır (bax, *izomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*). Belə homomorf obraza keçdikdə K – xassə saxlanır. Bu xassə « zaman istiqaməti » dəyişildikdə də, yeni $\{T^t\}$ dinamik

sisteminə $\{S^t\}$ dinamik sistemə keçdikdə saxlanır, burada

$S^t = T^{-t}$. Heç olmasa bir K – avtomorfizmi olan ixtiyari ölçülən axın K – s.-dir (bax, [7] – [9]). K – s. sinfi hər biri *Bernulli yerindəyişməsi*ni (diskret zaman halında) və ya onun analoqu Bernulli axınını (kəsilməz zaman halında) özündə saxlayan eyni entropiyalı sistemlərin altsiniflərinə bölünür (bax, [10]). Müxtəlif altsiniflərdən ibarət sistemlər izomorf olmur, lakin eyni entropiyalı K – s.-lər arasında cüt-cüt izomorf olmayan K – s.-lərin qeyri – hesabi ailəsini tapmaq mümkündür (bax, [10], [11]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861–64; [2] Перри В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 2, с. 264–66; [3] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1961, т. 25, № 6, с. 899–924; [4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [5] Рохлин В. А., Синай Я. Г., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 5, с. 1038–41; [6] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [7] Rudolph D., «Math. Z.», 1976, Bd 150, № 3, S. 201–20; [8] Blanchard F., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 36, № 2, S. 129–36; [9] Гуревич Б. М., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, № 3, с. 20–23; [10] Орнштейн Д., Эргодическая теория случайности и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [11] Ornstein D., Shields P., «Adv. Math.», 1973, v. 10, № 1, p. 63–88.

Y – SİSTEM « Y – система; Y – system » – Anosov dinamik sistemidir. D. V. Anosov tərəfindən 1967-də onun tərəfindən baxılan sistemlər üçün daxil olunmuşdur.

SİSTEMATİK XƏTA « систематическая ошибка;

systematic error » – eksperiment nəticəsində daim yaranan və müəyyən səbəblərin təsirilə (cihazın düzgün tənzimlənməməsi, mühitin təsirilə və s.) hər dəfə eyni bir nəticələrə gətirən xətdir. S. x. ölçülən kəmiyyətin müşahidə olunmuş qiyməti (ξ)

və onun əsl qiyməti (a) arasındakı fərq ($\Delta x = \xi - a$; bu fərq *ölçmə (eksperiment) xətası* adlanır) ya sabit olduqda və ya hər hansı bir qanunauyğunluqla dəyişdikdə yaranan xətalara deyilir; bu halda bu xətalara baş vermə səbəbi və xüsusiyyətləri məlum olmalıdır. Belə xətalara əvvəlcədən aradan qaldırılır, ya da hesablamalarda və nəticələrdə uyğun düzəlişlər daxil edilməklə nəzərə alınır.

Cihazın S. x.-nin olub-olmadığını aydınlaşdırmaq üçün, bu cihazın ölçmə nəticələri ilə hər hansı nəzarət cihazının nəticələrini müqayisə etmək məqsədilə xüsusi eksperiment aparılır. Qeyd etmək lazımdır ki, S. x. və *təsədüfi xəta* arasında fərqi həmişə müəyyən etmək olmur, çünki bəzi hallarda bu xətalara hər ikisi də eyni bir səbəb üzündən baş verə bilər.

a – hər hansı araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin üçün ölçmə nəticəsi olsun. Onda, $\xi - a$ fərqi *eksperiment xətası* adlanır. $b = M(\xi - a)$ kəmiyyətinə *sistematik xəta* və ya *meyl* deyilir. Qeyd olunan halda müşahidədə ξ -ni $\xi = a + b + \delta$ cəmi şəklində ifadə etmək olar; $\delta = \xi - a - b$ və $M\delta = 0$, b – meyldir. Əgər $b = 0$ olarsa, onda S. x. və ya cihazın S. x.-sı yoxdur, deyilir.

Bax, *Meylsiz statistik qiymət, Müşahidə xətası, Ən kiçik kvadratlar metodu, Ölçmə xətası*.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] Длин А. М., Математическая статистика в технике, М., 1958.

SİYAHİ DEKODLAMASI « списочное декодирование; list decoding », L həcmli siyahı ilə

de kodlama – ele *dekodlamadır* ki, bərpaulunan məlumat $L > 1$ -dən artıq olmayan sayda məlumatın qiymətlərindən ibarət siyahı şəklində ifadə olunur. Beləliklə, əgər dekodlama φ funksiyası ilə verilsə, bu funksiyanın qiymətləri məlumatın bütün qiymətləri çoxluğunun L güclü altçoxluqlarıdır. Məlumatın bərpasının keyfiyyəti onunla təyin olunur ki, siyahıdakı L məlumatdan biri qəbuledən tərəfdən verilmiş bərpa dəqiqliyini ödəsin.

Məsələn, səhvin maksimal ehtimalı $P_{m,L}$ və səhvin orta ehtimalı $P_{a,L}$ əsl məlumatın L sayda bərpa olmuş məlumatlar siyahısında olmaması ehtimalı kimi təyin olunur. Əgər səhvlərin sayı t -ni aşmayan ixtiyari ədəd olarsa, L sayda bərpa olunmuş məlumatlar siyahısında əsl məlumat da olarsa, S. d. ilə t sayda səhv düzəldilir, deyilir.

Qeyd olunmuş L həcmli S. d.-nda düz və tərs kodlama teoremləri öz qüvvəsində qalır (bax, *informasiya nəzəriyyəsi*). Lakin səhv ehtimalı, düzəlmə səhvlərin sayı kimi ötürmə xarakteristikalarını ötürmə sürəti verildiyi halda olduqca yaxşılaşdırmaq mümkündür.

Məs., fərz olunur ki, $y_j, \tilde{y}_j = 0, 1, j = 1, \dots, n$ uyğun olaraq, giriş və çıxışda ikilik siqnallardır və $P\{y_j = \tilde{y}_j\} = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/2$; bu halda yaddaşsız ikilik simmetrik kanal üzrə məlumatların ötürülməsi araşdırılır. $y^n = (y_1, \dots, y_n)$ və $\tilde{y}^n = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ ardıcılıqları arasında $\rho_n(y^n, \tilde{y}^n)$ Hemming (Hamming R. W., [1]) məsafəsidir, yəni $e_j = 1, \dots, n$ j -lərin sayıdır ki, bu ardıcılıqlarda y_j və $\tilde{y}_j$ müxtəlifdir; $t = [\alpha n]$, $0 < \alpha < \varepsilon$ olsun. $\{\rho_n(y^n, \tilde{y}^n) \geq t\}$ hadisəsinin ehtimalı $P_\alpha^{(n)} = P_{\alpha,sp}^{(n)}$.

$$M_{sp}(R_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^{-1} \log P_{\alpha,sp}^{(n)}, \quad R_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} R_\alpha^{(n)}$$

olsun, burada $R_\alpha^{(n)} = \log(2^n / V_t^{(n)})$, $V_t^{(n)}$ – y^n ardıcılıqları fəzasında t radiuslu, Hemming metrikalı kürenin həcmidir. İxtiyari α və δ , $0 < \delta, \alpha < 1/2$ üçün, α və δ -dan asılı, hər hansı bir L üçün ele kodlama və L həcmli siyahılı S. d. vardır ki,

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^{-1} \log P_{mL}^{(n)} \geq M_{sp}(R_\alpha) - \delta,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} t_{nL} \geq 1 - H(\alpha' n) - \delta$$

münasibətləri doğrudur, t_{nL} – düzəldilmiş səhvlərin sayı, $P_{mL}^{(n)}$ – n uzunluqlu blokun S. d.-nda səhvin maksimal ehtimalıdır.

$$H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x).$$

Bu nəticələr yaddaşsız ümumi kanal halı üçün də alınır. S. d. çox müəkkəb olmayan dekodlamada kodların qurulması üçün istifadə olunur (bax, *Müəkkəblik (yi) kodlama və dekodlamanın*).

Əd.: [1] Зяблов В. В., Пинскер М. С., Списочное каскадное декодирование, «Проблемы передачи информации», 1981, т. 17, в. 4, с. 29–33; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Elias P., «IRE WESCON Convent. Recs», 1957, v. 1, № 2, p. 94–104; [4] Forney G. D., Exponential

error bounds for erasure, list and decision feedback schemes, «IEEE Trans. Inform. Theory», 1968, v. 14, p. 206–20.

SKALYAR CIRLAŞAN ÖLÇÜ « скалярно вырожденная мера; scalarly degenerate measure » – Banax fəzasında (və ya ümumi lokal qabanq fəzada) ele *ehtimal ölçüsüdür* ki, hər hansı sıfırdan fərqli kəsilməz, xətti funksional bu ölçüyə nəzərən sanki yəqin sıfır bərabərdir. Əgər μ separabel B Banax fəzasında zəif ikinci tərtibli ehtimal ölçüsü və $K_\mu: B^* \rightarrow B$ onun korrelyasion operatoru olarsa, onda μ , yalnız və ya yalnız, o halda S. c. ö. olur ki, hər hansı sıfırdan fərqli $x^* \in B^*$ üçün $K_\mu x^* = 0$ olsun. Normalanmış qeyri – separabel fəzada, *silindrik σ – cəbrdə* verilmiş hər bir ehtimal ölçüsü S. c. ö.-dür. Riyazi gözləməsi sıfır bərabər Gauss ölçüsü μ -nün separabel Banax fəzasında cırlaşan ölçü olması onun daşıyıcısının B ilə üst-üstə düşməsinə ekvivalentdir.

Əd.: [1] V a k h a n i a N. N., «Nagoya Math. J.», 1975, v. 57, p. 59–63.

SKALYAR ÖLÇÜLƏN İNİKAS « скалярно измеримое отображение; scalarly measurable mapping » – bax, *Zəif ölçülən inikas*.

SKEDASTİK XƏTT « скедастическая линия; skedastic curve » – bir təsadüfi kəmiyyətin digər təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlərə nəzərən *şərti dispersiyasının* asılılıq qrafikidir. X və Y təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $y = \sigma^2(x) = D(Y|X=x)$ tənliyinin qrafikinə *skedastik xətt* (*əyri*) deyilir. S. x. Y və X -in regressiya xəttinin X -in aldığı qiymətlər dəyişdikdə Y -in (Y -in X -ə görə regressiya xəttinin) orta dəyişməsi dəqiqliyini xarakterizə edir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda X və Y vahid ehtimalla funksional asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir.

SKEYLİNG MÜNASİBƏT « скейлинговое соотношение; scaling relation » – bax, *Kritik indeks*.

SKEYLİNG – PROSES « скейлинг – процесс; scaling process » – bax, *Avtomodel proses*.

SKOROXOD STOXASTİK TÖRƏMƏSİ « Скорохода стохастическая производная; Skorohod stochastic derivative » – bax, *Stoxastik törəmə*.

SKOROXOD TOPOLOGİYASI 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyaların $D[0,1]$ fəzasında « *Скорохода топология* в пространстве функций без разрывов 2-го рода $D[0,1]$; Skorohod topology in the space of CADLAG functions / Skorohod topology in the space right continuous with left limits » –

$$d(x, y) = \inf \{ \| \lambda - i \| + \| x \circ \lambda - y \| : \lambda \in \Lambda \}$$

metrikası ilə doğrulmuş topologiyadır, burada Λ , – $[0, 1]$ -i özünə inikas etdirən bütün kəsilməz ciddi artan funksiyaların çoxluğu.

$$i(t) \equiv t, \quad x \circ \lambda(t) \equiv x(\lambda(t)), \quad \| a \| = \sup \{ | a(t) | : t \in [0, 1] \}.$$

S. t. təsadüfi proseslər üçün *limit teoremlərində* münasib sayılır, ona görə ki, bu topologiya ele d_0 metrikası ilə verilir bilinir ki,

bu metrika üçün (D, d_0) tam separabel metrik fəzadır (bax, *Fəza(sı) 2-ci növ kəsilməyə malik olma-yan funksiyalar*). Qiymətləri $(\mathcal{E}, \rho)$ metrik fəzasından olan funksiyalar fəzasında S. t. – $\|x \circ \lambda - y\|$ -in

$$\sup \{ \rho(x \circ \lambda(t), y(t)) : t \in [0, 1] \}$$

ilə əvəz edilməsilə d şəklində metrika ilə verilir.

Əd.: [1] Скопород А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

SLEPIAN BƏRABƏRSİZLİYİ « Слепьяна неравенство; Slepian inequality » – Gauss proseslərinin maksimumunun paylanması üçün müqayisə bərabərsizliyidir. Əgər $X_t, Y_t, t \in T$ sonlu və ya hesabi T parametrik çoxluğunda verilmiş, mərkəzlənmiş Gauss təsadüfi prosesləridir və bu proseslər üçün

$$\mathbf{M}X_t^2 = \mathbf{M}Y_t^2, t \in T; \mathbf{M}X_t X_s \geq \mathbf{M}Y_t Y_s, t \neq s$$

şərtləri ödənilərsə, onda ixtiyari həqiqi $a_t, t \in T$ funksiyası üçün

$$\mathbf{P} \{ \sup_{t \in T} (X_t - a_t) > 0 \} \leq \mathbf{P} \{ \sup_{t \in T} (Y_t - a_t) > 0 \}$$

S. b. ödənilir.

Məs.,

$$\mathbf{P} \{ \sup_{t \in T} X_t > a \} \leq \mathbf{P} \{ \sup_{t \in T} Y_t > a \}, a \in (-\infty, \infty).$$

S. b. T parametrik çoxluğu separabel metrik fəza, X_t, Y_t separabel proseslər və a_t kəsilməz funksiya olduğu halda da doğrudur.

S. b. D. Slepian tərəfindən [1]-də Gauss proseslərinin realizasiyalarının qeyd olunmuş səddən kənara çıxması ilə bağlı məsələlərlə əlaqədar alınmışdır. S. b.-dən aydındır ki, Gauss prosesinin ixtiyari səddən kənara çıxması ehtimalı prosesin kovariasiyalarının monoton funksiyasıdır. Bu fakt müxtəlif xüsusi hallar üçün digər müəlliflər tərəfindən də isbat olunmuşdur. S. b.-nin müxtəlif modifikasiyaları da alınmışdır (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Slepian D., «Bell. System Techn. J.», 1962, v. 41, № 2, p. 463–501; [2] Ф е р н и к К., в кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с франц., М., 1978, с. 63–132; [3] П и т е р б а р г В. И., Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99.

SLEPIAN MÜQAYİSƏ TEOREMİ « Слепьяна теорема сравнения; Slepian comparison theorem » – bax, *Stoxastik differensial tənlik; müqayisə teoremləri*.

SLUTSKİ ERQODİK TEOREMİ « Slutskiy ergodicheskaya teorema; Slutsky ergodic theorem »: kəsilməz və ya diskret t zamanlı stasionar (geniş mənada) $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t) dt = \mathbf{M} \zeta(t)$$

və ya

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S}^{T-1} \zeta(t) = \mathbf{M} \zeta(t)$$

münasibətinin doğruluğu üçün

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau = 0 \\ \text{və ya} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} b(\tau) = 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)][\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]$, i.i.m. – kvadratik orta mənada limitdir.

Bu teorem Ye. Ye. Slutskiye məxsusdur və o, yalnız kəsilməz hala baxmışdır (bax, [1], [2]); sonradan isbat olunmuşdur ki, (*) şərti $\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ -nin $\lambda = 0$ nöqtəsində kəsilməzlik şərtinə ekvivalentdir.

Bax, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

Əd.: [1] Slutskiy E. E., в сб.: Actualites scientifiques et industrielles, P., 1938, № 738, p. 35–55; [2] Слуцкий Е. Е., Избр. тр., М., 1960, с. 252–68.

SLUTSKİ LİMİT SINUSİDAL TEOREMİ « Slutskogo предельная синусоидальная теорема; Slutsky sinusoidal limit theorem »: $X(t), t = 0, \pm 1, \dots$ müşahidələr sıralarının

$$\mathcal{L}_n X(t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} X(t-k)$$

şəklində, ixtiyari $T > 0$ və $0 < \omega_0 < \pi$ intervalından olan ω_0 üçün $\mathcal{L}_n, n = 1, 2, \dots$ xətti çevirmələrinin ele ardıcılığını tapmaq olar ki, $t \neq s$ olduqda $\mathbf{M}X_0(t) = 0, \mathbf{M}X_0(t)X_0(s) = 0$ və $t = s$ olduqda $\mathbf{M}X_0(t) = 1, \mathbf{M}X_0(t)X_0(s) = 1$ şərtlərini ödəyən $\mathcal{L}_n X_0(t) = Y(t)$ [yeni $X_0(t)$ – diskret bəyaz küydür] ardıcılığının qiymətləri n -in olduqca böyük qiymətində, ixtiyari T uzunluqlu intervalda vahidə daha çox yaxın ehtimalla ω_0 tezlikli hər hansı sinusoidin [yeni $Y(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta)$ funksiyasının] qiymətlərindən olduqca az fərqlənəcəklər. Ye. Ye. Slutski [1], [2]-də konkret olaraq,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_n = \mathcal{D}^{m_n} \mathcal{C}^n, \\ \mathcal{D}X(t) = X(t) - X(t-1), \mathcal{C}X(t) = X(t) + X(t-1) \end{aligned} \right\} (*)$$

xətti çevirmələrinin ardıcılığına baxmışdır, burada $n \rightarrow \infty$ olduqda $m_n/n \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < 1$. O, isbat etmişdir ki, əgər $X_0(t)$ diskret bəyaz küy olarsa, onda $\mathcal{L}_n X_0(t)$ ardıcılığının ixtiyari sonlu parçası $n \rightarrow \infty$ olduqda dairəvi tezliyi

$$\omega_0 = \arccos [(1-\lambda)/(1+\lambda)]$$

olan sinusoidin parçasına yaxınlaşır.

S. s. l. t. öz dövründə mühüm rol oynamışdır (onun bezi ümumiləşmələri [1] işinin dərc olunmasından dərhal sonra [3], [4]-də V. I. Romanovski tərəfindən göstərilmişdir) və bu teorem belə bir faktın aydınlaşmasına təkan vermişdir: müşahidə olunan zaman sırasının xarakteri bu sıranı doğuran hər hansı periodik mexanizmin varlığını hökmən göstərə bilmir, lakin, məs., müşahidələr üzrə

aparılan xətti çevirmələrin təsiri ilə izah oluna bilər. Stasionar təsadüfi proseslərin spektral nəzəriyyəsinin yaranması ilə (bax, *Stasionar təsadüfi proses və Spektral ayrılış* (1)) təsadüfi funksiyaların isbat olunmuşdur ki, ixtiyari stasionar zaman sırasını həmişə sinusoidlərin superpozisiyası kimi göstərmək mümkündür, hətta aydın olmuşdur ki, bu nəzəriyyə əsasında Ye. Ye. Slutski və V. İ. Romanovskinin nəticələri çox sadə isbat olunur; bu nəticələri inkişaf etdirən və tamamlayan bir sıra yeni müddəalar almaq olur. Məs., Ye. Ye. Slutskinin aldığı nəticə asanlıqla yoxlanan belə bir müddəadan alınır: (*) düsturunda münasib normalanmış $\mathcal{L}_n$ çevirməsinin *ötürücü funksiyası* $H_n(\lambda)$, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\delta(\lambda - \omega_0)$ δ – funksiyaya yaxınlaşır (bax, [5], [7]). S. s. l. t.-nin ifadə edilməsində $X_0(t)$ bəyaz küyü spektral sıxlığı $\lambda = \omega_0$ nöqtəsində sıfırdan fərqli olan ixtiyari $X(t)$ stasionar ardıcılığı ilə əvəz oluna bilər; S. s. l. t.-ində $0 < \omega_0 < \pi$ şərtini $0 \leq \omega_0 \leq \pi$ şərti ilə əvəz etmək olar (bax, [7], [8]).

Əd.: [1] С л у ц к и й Е. Е., «Вопросы конъюнктуры», 1927, т. 3, в. 1, с. 34–64; [2] С л у ц к и й Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 99–132; [3] Р о м а н о в с к и й В. И., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1932, v. 56, p. 82–111; [4] Р о м а н о в с к и й В. И., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1933, v. 57, p. 130–36; [5] М о г а н П. А. Р., «Биометрика», 1949, v. 36, p. 63–70; [6] К е н д а л л М., С т ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976, с. 570–71; [7] К е д е м В., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 2, p. 665–74; [8] М о г а н П. А. Р., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1950, v. 46, p. 272–80.

SLUTSKI ŞƏRTİ « Слутского условие; Slutsky condition » – bax, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

SLUTSKI – YUL EFFEKTİ « Слутского – Юла эффект; Slutsky – Yule effect » – *sürüşən orta metodu* ilə zaman sırasının hamarlanması zamanı *trendin* seçilib ayrılmasında yaranan pozuntulardır; 1927-də aşkar edilmişdir (bax, [2], [3]). S. – Y. e.-nin yaranma səbəbi ondan ibarətdir ki, sürüşən ortalar vasitəsilə qurulan trend güclü avtokorrelyar təsadüfi prosesdir, xüsusilə də, qiymətləri böyük olmayan gecikmələr üçün. Nəticədə belə trend həddindən artıq dərəcədə hamar olur, bundan başqa, bu trenddə ilkin zaman sırasına xas olmayan sistematik dəyişikliklər baş verir.

Əd.: [1] К е н д а л л М., С т ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [2] С л у ц к и й Е. Е., «Вопросы конъюнктуры», 1927, т. 3, в. 1; [3] Y u l e Г., «Phil. Trans. A.», 1927, v. 226, p. 267–98; [4] К е н д э л М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

SMIRNOV KRİTERİSİ « Смирнова критерий; Smirnov test » – asılı olmayan iki skalyar seçimin ümumi (kəsilməz) paylanmaya malik olması haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. $F_m(x)$ və $G_n(x)$ – uyğun olaraq, m və n həcmli seçimlərin empirik paylanma funksiyaları, $F(x)$ və $G(x)$ onların nəzəri paylanma funksiyaları olsun.

$H : F(x) \equiv G(x)$ bircinslik hipotezini yoxlamaq tələb olunur.

İkiseçimli Smirnov kriterisi

$$D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

statistikasına əsaslanır. H hipotezində əgər nəzəri paylanma

kəsilməz paylanma olarsa, onda $D_{m,n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması nəzəri paylanmadan asılı olmur.

H hipotezi şərtində və $m, n \rightarrow \infty$ olduqda $D_{m,n} \rightarrow 0$ olduğundan, əksər hallarda, $\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}$ təsadüfi kəmiyyətindən istifadə olunur, bu statistikanın paylanması limitdə cırlaşmayan olur. N. V. Smirnov isbat etmişdir ki (bax, [1]): $z > 0$ üçün

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < z \right\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

münasibəti doğrudur. Əgər $G \neq F$ olarsa, onda $m, n \rightarrow \infty$ olduqda $D_{m,n}$ statistikası üçün

$$D_{m,n} \rightarrow \sup_x |F(x) - G(x)| > 0$$

münasibəti ödənilir, odur ki, $\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \rightarrow \infty$. Bu xassələrdən aşağıdakı qayda alınır: əgər sınaqda $D_{m,n}$ üçün alınmış qiymət olduqca böyük olarsa, $H : F \equiv G$ hipotezi qəbul olunmur.

$D_{m,n}$ statistikasının faiz nöqtələri üçün cədvəllər hal-hazırkı dövrə qədər olduqca ətraflı hesablanmışdır (bax, məs., [3], [4]). m, n -in böyük qiymətlərində yuxarıda qeyd olunmuş limit paylanmasından istifadə olunur (bu da cədvəlləşdirilmişdir, bax, [3]).

S. k. H hipotezinə alternativ bütün hipotezlərə qarşı tutarlı kriteridir. Müəyyən tip alternativlər üçün (F və G -nin yerini dəyişmədə, miqyasda fərqləri) digər statistik kriterilər S. k.-ni güc üzrə aşağı bilər.

Bir seçimli Smirnov kriterisi. *Kolmogorov kriterisi* ilə sıx bağlıdır və bu halda S. k. skalyar seçimin verilmiş nəzəri paylanmaya (məs., $F(x)$) malik olması haqqında hipotezin yoxlanılması üçün istifadə olunur.

$F_n(x)$, – n həcmli seçimin empirik paylanma funksiyası, $G(\cdot)$ – əsl paylanma funksiyası olsun. S. k. $H : F = G$ hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunur.

$$D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)], \quad D_n^- = \sup_x [F(x) - F_n(x)]$$

– Smirnov statistikalarıdır.

Əgər G kəsilməz paylanma funksiyası olarsa, H hipotezi şərtində D_n^+ və D_n^- eyni qanunla paylanmış və G funksiyasından asılı olmayan statistikalarlardır. Bu şərtlərdə paylanma və onun aproksimasiyası N. V. Smirnov tərəfindən göstərilmişdir (bax, [2]). D_n^+ və D_n^- -in faiz nöqtələri haqqında, bax, [3], [4].

Əgər eksperimentdə statistikanın alınmış qiyməti olduqca böyük olarsa, H hipotezi S. k.-nə əsasən qəbul olunmur. D_n^+ statistikasına əsaslanan kriteri $G \geq F$ alternativ hipotezinə qarşı tutarlı kriteridir; D_n^- statistikasına əsaslanan kriteri $F \geq G$ alternativinə qarşı tutarlı kriteridir.

Əd.: [1] С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика. Избр. тр., М., 1970, с. 117–27; [2] С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика,

Избр. тр., М., 1970, с. 133–59; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р - н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Т и м о н и н В. И., Ч е р н о м о р д и к О. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 572–73.

SMIRNOV PAYLANMASI « Смирнова распределение; Smirnov distribution » –

$$\int \alpha_n^2 dF$$

көмийетлери ардıcılıғının limit *paylanmasıdır*, burada $\alpha_n(x) = \sqrt{n} (F_n(x) - F(x))$, $F(x)$ – verilmiş paylanma, $F_n(x)$ – empirik paylanmadır və F_n paylanmalar ardıcılıғı F -ə yaxınlaşır. 1944-də qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərini araşdırdıqda N. V. Smirnov tərəfindən daxil olunmuşdur.

SMIRNOV STATİSTİKASI « Смирнова статистика; Smirnov statistic » – bax, *Kolmogorov – Smirnov kriterisi, Smirnov kriterisi*.

SMIRNOV TEOREMİ « Смирнова теорема; Smirnov theorem » – bax, *Sərhəd məsələləri təsadüfi dolaşmalar üçün*.

SNEDEKOR PAYLANMASI « Снедекора распределение; Snedecor distribution » – bax, *Fişer F – paylanması*.

SOL PALM PAYLANMASI « левое распределение Пальма; left Palm distribution » – bax, *Nöqtəvi proses qrupda*.

SOL TƏSADÜFİ DOLAŞMA « левое случайное блуждание; left random walk » – bax, *Markov zənciri*.

SON QƏRAR FUNKSİYASI « заключительного решения функция; terminal decision function » – bax, *Ardıcıl yoxlanılması, hipotezlerin*.

SONLU – ADDİTİV ÇOXLUQ FUNKSİYASI « конечно – аддитивная функция множеств; finitely additive set function » – çoxluqların hər hansı bir sinfində təyin olunmuş və sonlu additivlik xassəsinə (sonlu sayda toplananlar üçün additivlik xassəsinə) malik olan funksiyadır. Daha dəqiq, K – çoxluqların hər hansı sinfi, G – additiv yazılışda götürülmüş kommutativ qrup olsun (yəni G -də daxili kompozisiya qanunu + simvolu ilə işarə olunur). Onda K sinfinin elementlərindən təşkil olunmuş ixtiyari sonlu dizyunkt $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ ailəsi üçün bunların birləşmələri də K sinfinə daxil olduqda,

$$\mu \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} X_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq m} \mu(X_i)$$

bərabərliyi hökmən ödənilərsə, $\mu: K \rightarrow G$ münasibətini ödəyən μ funksiyası sonlu – additiv funksiya adlanır. Hər bir S – a. ç. f. eyni zamanda *additiv çoxluq funksiyasıdır*. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir, lakin K sinfinə müəyyən məhdudiyyətlərlə bu hökm, ola bilər ki, yerinə yetsin (məs., əgər K sinfinin özü də additiv olarsa).

S – a. ç. f.-na riyaziyyatın müxtəlif oblastlarında təsadüf olunur. Belə funksiyalardan ədədi hesabi – additiv çoxluq funksiyaları xüsusi rola malikdir və bunlar da müxtəlif çoxluqlar σ – cəbrləri və ya çoxluqlar σ – halqalarında verilir. Hesabi – additiv çoxluq funksiyası olan ədədi S – a. ç. f.-na misal n – ölçülü Evklid fəza-

sının Jordan məna bütün ölçülən altçoxluqları üçün təyin olunan klassik Jordan həcmnin funksiyasıdır. Verilən S – a. ç. f.-nın eyni zamanda hesabi – additiv çoxluq funksiyası da olması üçün hansı şərtlərin ödənilməsi sualı ölçü nəzəriyyəsinin əsas suallarından biridir. Ehtimal nəzəriyyəsində əksər hallarda analoji suala – zəif paylanmanın, uyğun fəzada, hansı şərtlər daxilində paylanma olması haqqında suala baxılır.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. 3 изд., М., 1987; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SONLU BÖLGÜ « конечное разбиение; finite partition » – bax, *Bölgü*.

SONLU EHTİMALİ AVTOMAT « конечный вероятностный автомат; finite probabilistic automaton » – bax, *Ehtimali avtomat*.

SONLU FURYE ÇEVİRMƏSİ « конечное преобразование Фурье; finite Fourier transform » –

$$d_x^N(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \exp\{-i\lambda j\}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

münasibətilə təyin olunan çevrilmədir, burada x_j ,

$j = 0, \dots, N-1$ – kompleks ardıcılıqdır. Bu halda $d_x^N(\lambda)$ periodu 2π olan periodik funksiyadır. Tezlik oblastında zaman sıralarının analizində belə çevirmələr mühüm statistikalar olur.

S -də, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ intervalında bir-birindən eyni məsafədə yerləşən $\lambda = 2\pi n/S$, $n = 0, \dots, S-1$ nöqtələrində $d_x^N(\lambda)$ qiymətlərinin hesablanması $y(j)$, $j = 0, \dots, S-1$ ardıcılığının

$$y(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(j+kS), \quad j = 0, \dots, S-1$$

çevirməsinin köməyiylə ($y < 0$, $j \geq N$ olduqda $x(j) = 0$) diskret Furiye çevirməsinin (bax, *Sürətli Furiye çevirməsi, Vinqrad metodu*) effektiv alqoritmləri ilə həyata keçirmək olur.

$S > T$ olduqda bu prosedür $j = N, \dots, S-1$ qiymətlərində $x(j)$ ardıcılığının sıfıra bərabər qiymətləri də əlavə olunmaqla ardıcılığın S – nöqtəvi çevirməsinin hesablanmasına gətirilir.

Əd.: [1] Б р и л л и н д ж е р Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980.

SONLU MARKOV ZƏNCİRİ « конечная цепь Маркова; finite Markov chain » – 1) geniş mənada – vəziyyətləri çoxluğu sonlu *Markov prosesidir*. 2) S. M. z. dar mənada – vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins *Markov zənciridir*. Vəziyyətlərinin sayı sonlu olduğu halda S. M. z. nəzəriyyəsi, asılı təsadüfi sınaqlar və kömüyətlərin bütün nəzəriyyəsi kimi, A. A. Markovun (1906, 1907) əsas sayılan işləri seriyasından mənbələnmişdir. Vəziyyətlərinin sayı sonsuz zəncirlərin öyrənilməsinə 1936-da A. N. Kolmogorov tərəfindən başlanılmışdır. Bax, *Hesabi Markov zənciri*.

Əd.: [1] Р о м а н о в с к и й В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949; [2] Ф е л л е р В., Введение в теория вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984, гл. 16; [3] К е м е н и Д. ж., С н е л л Д. ж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

SONLU ÖLÇÜ « конечная мера; finite measure » – bax, Ölçü.

σ – SONLU ÖLÇÜ « σ – конечная мера; σ – finite measure » – bax, Ölçü.

σ – SONLU ÖLÇÜLÜ ALTÇOXLUQ « σ – конечной меры подмножество; set of σ – finite measure » – bax, Ölçü.

SONLU ÖLÇÜLÜ ÇOXLUQ « конечной меры множество; set of finite measure » – bax, Ölçü.

SONLU ÖLÇÜLÜ PAYLANMA « конечномерное распределение; finite – dimensional distribution » – bax, Ehtimal nəzəriyyəsi, Birgə paylanma (Çoxölçülü paylanma).

SONLU TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « конечное случайное множество; finite random set » – sonlu çoxluğun təsadüfi altçoxluğudur. S. t. ç., daha dəqiq, aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – hər hansı ehtimal fəzası, Ω – elementar nəticələr fəzası, $\mathcal{A}$ – hadisələrin σ – cəbri, P – $\mathcal{A}$ -da ehtimal ölçüsü olsun; C – sonlu çoxluq, 2^C – onun bütün altçoxluqlarının çoxluğudur. $\mathcal{A}$ -ya nəzərən ölçülən $K: \Omega \rightarrow 2^C$ inikasına sonlu təsadüfi çoxluq deyilir. S. t. ç.-un paylanmasında bütün $D \subseteq C$ üçün $P\{K=D\}$ ehtimallar toplusu ilə verilir.

S. t. ç.-un mühüm xüsusi halı asılı olmayan elementləri S. t. ç.-dur (bax, *Lysian*) və bu çoxluq aşağıdakı xassəyə malikdir: ixtiyari k və ixtiyari $c_1, \dots, c_k \in C$ elementləri üçün $\{c_j \in K\}$, $j=1, \dots, k$, ($i \neq j$ olduqda $c_i \neq c_j$) hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

SONLU VARIASIYA « конечная вариация; finite variation » – bax, Ölçü; вариация, Вектор ölçü.

SONSUZ BÖLÜNƏN NÖQTƏVİ PROSES « безгранично делимый точечный процесс; infinitely divisible point process » – ixtiyari tam n qiymətində n sayda qarşılıqlı asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi nöqtəvi proseslərin superpozisiyası şəklində ifadə oluna bilən təsadüfi nöqtəvi prosesdir. Beləliklə, S. b. n. p.-ə təsadüfi kəmiyyətlərin sonsuz bölünən paylanmalarının ümumiləşməsi kimi baxmaq olar. *Puasson nöqtəvi prosesi* S. b. n. p.-dir.

$E(\cdot)$ – bütün lokal məhdud sayıcı ölçülərin (bax, *Nöqtəvi proses*) ölçülən fəzası $(M, \mathfrak{M})$ -də sonlu ölçü, E^n , – E ölçüsünün n – qat kompozisiyası olsun. Onda $(M, \mathfrak{M})$ fəzasında təyin olunmuş

$$U_E = e^{-E(M)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} E^n(\cdot)$$

ifadəsilə verilən ehtimal paylanması S. b. n. p. təyin edir.

Əgər $(M, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında P ehtimal paylanması B vəziyyətlərinin fəza fəzasına malik Φ S. v. n. p.-ni təyin edərsə və $P(\Phi(B) < \infty) = 1$ olarsa, onda $(M, \mathfrak{M})$ -də E ölçüsü tapılar ki, $P = U_E$. Aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

838 SONSUZ

$$\|U_{E_1} - U_{E_2}\| \leq 2\|E_1 - E_2\|.$$

Əd.: [1] Керстан И., Маттес К., Мекке И., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « безгранично делимое распределение; infinitely divisible distribution » – bircins, stoxastik kəsilməz, asılı olmayan artımları təsadüfi proseslərin – *sonsuz bölünən proseslər* adlandırılan proseslərin – öyrənilməsi ilə bağlı yaranmış anlayışdır. S. b. p.-nin tərifini B.de Finetti [1]-də vermişdir. «S. b. p.» termin kimi P. Levi (bax, [2]) tərəfindən daxil olunmuşdur. Əgər $\mathbb{R}^1$ -də təyin olunmuş ehtimal paylanması P (və ya uyğun paylanma funksiyası F) n -in ixtiyari $n \geq 2$ tam qiymətində hər hansı ehtimal paylanması P_n -in öz-özü ilə n – qat kompozisiyasına bərabər olarsa, yəni

$$P = \underbrace{P_n * P_n * \dots * P_n}_{n \text{ dəfə}} \quad (1)$$

olarsa, onda P ehtimal paylanması S. b. p.-lər sinfi $\mathfrak{S}$ -dəndir; $*$ – kompozisiya simvoludur.

$\mathfrak{S}$ çoxluğunu genişləndirmədən, (1) şərtini $1 < n_1 < n_2 < \dots$ ardıcılığından yalnız n sayda qiymətlər üçün ödənilməsi tələbi ilə zəiflətmək olar. Normal paylanma, Puasson paylanması, qamma – paylanma (üstlü paylanmalar da daxil olmaqla), qamma paylanmalarının diskret variantı – «mənfi binomial paylanma» (həndəsi paylanma da daxil olmaqla), Koşi paylanması S. b. p.-lərdir. $\mathfrak{S}$ sinfi sonsuz kiçiklik şərtini ödəyən, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcılıqları üçün limit teoremlərinin ümumi nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. A. Ya. Xinqin 1934-də isbat etmişdir ki, bu modeldə mümkün limit paylanmalar çoxluğu $\mathfrak{S}$ sinfi ilə üst-üstə düşür. (1) şərtinin analoqlarından istifadə edərək, S. b. p. anlayışını daha ümumi təbii fəzalar (Evklid, Hilbert və s.) halına keçirmək olur, lakin bəzən ehtisaslara olar ki (məs., kompakt altqrupları olan lokal kompakt Abel qruplarına baxdıqda), S. b. p. anlayışının verilməsi üçün (1) şərtinin müəyyən modifikasiyası tələb olunur. Məs., M – sonsuz bölünən paylanmanı konkret misal kimi göstərmək olar. Aşağıda yalnız kompozisiya əməli ilə birözlülük halı baxılır.

$\mathfrak{S}$ sinfinin təsviri bu sinfdən olan paylanma funksiyaların $F \rightarrow$ uyğun f xarakteristik funksiyaları terminləri ilə verilir. f funksiyasının yazılış forması (bu forma yeganə olmur və müxtəlif şəkillərdə təsvir edilir) *kanonik ifadə (təsvir)* adlanır. *Levi kanonik ifadəsi* və *Levi – Xinqin kanonik ifadəsi* ən çox yayılmış kanonik ifadələrdir. Levi – Xinqin kanonik ifadəsinin ümumiləşmiş variantı

$$f(t) = \exp\{it\gamma + \int \mathcal{E}(t, x) dG(x)\}. \quad (2)$$

düsturu ilə verilir, burada $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $G = \lambda U$, $\lambda \geq 0$, U , – $\mathbb{R}^1$ -də hər hansı paylanma funksiyasıdır və

$$\mathcal{E}(t, x) = \begin{cases} (e^{itx} - 1 - itx/s(x))/s(x), & \text{əgər } x \neq 0, \\ -t^2/2, & \text{əgər } x = 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

r və $s > 0$ funksiyaları aşağıdakı xassələrə malik olmalıdırlar: (2)-dəki inteqral göstənilən şəkili hər bir G funksiyası üçün və ixtiyari $t \in \mathbb{R}^1$ qiymətində mütləq yığılandır; $r(x) = x + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ olduqda $s(x) = x^2(1 + o(1))$.

Məs., $r(x) = x/(1+x^2)$, $s(x) = x^2/(1+x^2)$ və $r(x) = \sin x$, $s(x) = \min(1, x^2)$ belə funksiyalardır. Xüsusi halda Kolmoqorov düsturları $r(x) = x$ və $s(x) = x^2$ halı üçün ifadə olunur.

Kanonik təsvirdə, $\mathcal{E}$ funksiyası qeyd olunduğu halda, hər bir S. b. p.-ya onu təyin edən iki xarakteristika – ədədi γ parametri və bu S. b. p.-nin Xinqin spektral funksiyası adlanan G funksiyası qarşı qoyulur. G funksiyasının artım nöqtələri çoxluğu (yəni G -nin daşıyıcısı, $\text{supp } G$) S. b. p.-nin spektri adlanır. $H(-\infty) = H(\infty) = 0$ şərtlərini ödəyən, G ilə $s(x)dH(x) = dG(x)$, $x \neq 0$ bərabərliyi ilə əlaqəli və $x < 0$, $x > 0$ yarıoxlarında kəsilməz H funksiyası Levi spektral funksiyası adlanır. F S. b. p.-nin normal komponentinin dispersiya rolunu ifadə edən $\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$ kəmiyyəti ilə birlikdə H funksiyası vasitəsilə ikinci tip kanonik ifadəsi aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$f(t) = \exp\{it\gamma - \sigma^2 t^2/2 + \int_{x \neq 0} (e^{itx} - 1 - itx) dH(x)\}$$

(2)-də $(r_1, s_1, \gamma_1, G_1)$ xarakteristikalarının bir toplusundan digər $(r_2, s_2, \gamma_2, G_2)$ toplusuna keçmək üçün $s_2 dG_1 = s_1 dG_2$,

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \int (r_1 - r_2) \frac{dG_1}{s_1} \text{ münasibətlərindən istifadə olunur.}$$

Bu halda $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ və $\text{supp } G_1 = \text{supp } G_2$.

γ parametri paylanmanın yerindəyişməsinə heyatə keçirir, spektral G funksiyası meylsiz ($\gamma = 0$) F S. b. p. haqqında informasiyanı özündə daşıyır. Məs., bu funksiya F funksiyasının Lebeq ayrılığını, strukturunu və asimptotikasını təyin edir. Məs., $\mathbb{R}^1$ -də ixtiyari cüt ψ funksiyaları bütün $x, y \in \mathbb{R}^1$ qiymətlərində və $c \geq 1$ sabit olduqda

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \psi(x+y) \leq c(\psi(x) + \psi(y)), \\ 0 \leq \psi(x+y) \leq c(\psi(x)\psi(y)) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

şərtlərdən birini ödədikdə (Ψ sinfi), aşağıdakı implikasiya doğrudur (bax, [7]):

$$\begin{aligned} \int \psi(x) dF(x, \gamma, G) < \infty &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int I(|x| \geq 1) \psi(x) dH(x) < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Məs., (3) şərtləri onu ifadə edir ki, ψ funksiyaları sonsuzluqda eksponentdən sürətlə arta bilməz. Olduqca sürətlə artan funksiyalar üçün oxşar əlaqə yoxdur. Bu aşağıdakı müddəadan alınır (bax, [7]): əgər $\text{supp } G$ məhduddursa və birçə $x = 0$ nöqtəsindən ibarət deyildirsə, onda ələ $a = a(G)$ vardır ki,

$$\int \exp(a|x| \log(1+|x|) dF(x, \gamma, G)) < \infty$$

və a -nı böyük ədədlə, integralın sonlu olmasını təmin etmək, əvəz etmək olmaz.

(4) xassəsinə əsasən Kolmoqorov düsturunu ümumiləşdirmək və $\mathcal{E}$ sinfindən $\Psi \in \Psi$ tərtib sonlu momentləri olan paylan-

maların $\mathcal{H}_\Psi$ altsinfini seçmək olur. Bu halda kanonik ifadə $\mathcal{H}_\Psi$ -ni təsvir edir, bu şərtlə ki, (2)-də $r(x)$ və $s(x)$ funksiyaları $r(x) = \sin x$ və $s(x) = x^2(1+\psi(x))/(1+x^2)$ şəklində olsunlar.

$\mathcal{E}$ çoxluğu ona daxil olan paylanmaların tam yığılmasına ($\xrightarrow{d}$ yığılma) nəzərən qapalı çoxluqdur. Bu halda

$$F(x, \gamma^*, G^*) \xrightarrow{d} F(x, \gamma, G), \quad G^* = \lambda U^*, \quad G = \lambda U$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\gamma^* \rightarrow \gamma$,

$\lambda^* \rightarrow \lambda$ və $U^* \xrightarrow{d} U$ münasibətləri ödənilsin. $\mathcal{E}$ sinfinin mühüm (məs., limit teoremləri nöqtəyi – nəzərindən) altsinfləri – öz-özünə ayrılan paylanmalar sinfi $\mathcal{L}$ və dayanıqlı paylanmalar sinfi $\mathcal{S}$ kimi altsinfləri vardır. $\mathcal{E}$ çoxluğu konvolusiyaya eməlinə görə ələ Abel semi – qrupudur ki, onun vahidi rolunu sıfırdan cırılmış paylanma oynayır. Lakin $\mathcal{E}$ çoxluğu belə semi – qrup deyildir, $\mathcal{L}$ çoxluğu isə belə semi – qrupdur. Hər bir F S. b. p. xarakteristik funksiyaları $\{f^\lambda; \lambda \geq 0\}$ olan birparametrlili $\{F_\lambda; \lambda \geq 0\}$ semi – qrupunu doğundur (bax, Sonsuz bölünən proses).

Əgər $F(x, \gamma, G)$ S. b. p.-nin təyinedici xarakteristikaları belə xarakteristikaların sıraları ilə ifadə olunurlarsa, yeni

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + \dots, \\ G &= G_1 + G_2 + \dots, \end{aligned}$$

olarsa, onda

$$F(x, \gamma, G) = F_1(x, \gamma_1, G_1) * F_2(x, \gamma_2, G_2) * \dots$$

münasibəti doğrudur, burada $\gamma_k \in \mathbb{R}^1$ və G_k – spektral funksiyalardır.

İxtiyari $F \in \mathcal{E}$ paylanma funksiyaları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$F(x, \gamma, G) = 1 - F(-x + 0, -\gamma, \tilde{G}), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

burada

$$\tilde{G}(x) = G(\infty) - G(-x),$$

$$F(x, \gamma, G) = F(x, 0, G_1) * \Phi_{\gamma, \delta}(x) * F(x, 0, G_2),$$

$\Phi_{\gamma, \delta}$ – riyazi gözləməsi γ , dispersiyası σ^2 olan normal paylanma, $G_1(x) = (G(x) - G(+0))I(x > 0)$, $G_2(x) = (G(-0) - G(-x))I(x < 0)$.

$\mathcal{E}$ sinfini aşağıdakı şərtlərlə üç qrupa bölmək olar:

$$I_1 = \int I(0 < |x| \leq 1) |x| dH(x) < \infty \quad (\text{A qrupu}),$$

$$I_1 = \infty, \quad I_2 = \int I(|x| > 1) |x| dH(x) < \infty \quad (\text{B qrupu}),$$

$$I_1 = \infty, \quad I_2 = \infty \quad (\text{C qrupu}).$$

Bu qruplar əsas parametrlin $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ və $1 < \alpha \leq 2$ qiymətlərinə müvafiq dayanıqlı paylanmaların müəyyən menada

analoqlardır. Əgər $G(+0)=0$ olarsa, $F(x, \gamma, G)$ S. b. p. kənar S. b. p. adlanır. A qrupunun kənar S. b. p.-ları ilə B qrupunun S. b. p.-nın müvafiq hissəsi arasında analitik əlaqə vardır (bax, *Sonsuz bölünən paylanmaların ikilik xassəsi*). A qrupunun kənar F S. b. p.-ları – birtərəfli sonsuz bölünən paylanmalardır, yəni hər bir belə paylanma üçün $e_q = q(\gamma, G) \in \mathbb{R}^1$ sabiti vardır ki, $F(x) = 0, x < q$. 6 sinfi çərçivəsində kənar S. b. p.-lar ixtiyari $x > 0$ yarımxunda və ya $(-\infty, a)$ yarımxunda, əgər bu S. b. p.-lar B və C qruplarına aid olarsa, öz qiymətləri ilə birqiymətli bərpə olunurlar (ətraflı bax, [4]).

Əd.: [1] Finetti B. de, «Atti Accad. naz. Lincei. Met. Cl. sci. fis., mat. e nature. Sez. I», Ser. 6, 1929, v. 10, p. 163–68; [2] Levy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; [3] Parthasarathy K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967; [4] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 393–99; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [7] Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 2, с. 330–36.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA, *asimptotikası « безгранично делимое распределение, асимптотическое поведение; infinitely divisible distribution; asymptotic behaviour »* – mərkəzi qeyd olunmuş, radiusu qeyri – məhdud artan kürelərin xaricində olan çoxluqlarda *sonsuz bölünən paylanmaların* xassələrinin ifadəsidir. Belə təsvir uyğun spektral ölçülər terminləri ilə mümkündür. Məs., birölçülü halda, əgər H *Levi kanonik ifadəsinə* daxil olan spektral funksiya ($\tau > 1$ olduqda $H(\tau) = -\tau^a h(\tau)$, burada $h(\tau)$ – müsbət asta dəyişən funksiya) və $a > 0$ olarsa, onda

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (1 - F(\tau)) / H(\tau) = -1.$$

Ümumi halda, $0 \leq \gamma \leq \infty$ olan hər hansı γ üçün

$$\inf \{ \tau : H(-\tau) - H(\tau) = 0 \} = \gamma$$

olması üçün

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{-\ln[F(-\tau) + 1 - F(\tau)]}{\tau \ln(1 + \tau)} = \frac{1}{\gamma} \quad (*)$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kifidir, bu halda əgər $\gamma = 0$ olarsa, $1/\gamma = \infty$ olur. Burada F S. b. p.-nın paylanma funksiyasıdır.

Bir sıra hallarda asimptotik yaxınlaşma vasitəsilə ayrıca bir S. b. p.-nı və ya paylanma növünü tam mənası ilə xarakterizə etmək olur. Məs., S. b. p. funksiyası F -in normal paylanma funksiyası olması üçün (*) münasibətinin $\gamma = 0$ halı üçün ödənilməsi zəruri və kifidir; S. b. p. F -in Puasson paylanma funksiyası olması üçün $x < 0$ olduqda $F(x) = 0$, $0 < x < 1$ olduqda isə $F(x) = c > 0$ olması və (*) münasibətinin $\gamma = 1$ halı üçün ödənilməsi zəruri və kifidir.

840 SONSUZ

[4] və [5]-də spektral ölçüləri sonlu çoxluqda toplanmayan, lakin bir sıra xüsusi şərtləri ödəyən S. b. p.-ların asimptotik yaxınlaşmaları verilmişdir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 3, с. 330–34; [2] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984; [3] Круглов В. М., «Матем. заметки», 1976, т. 20, в. 6, с. 879–82; [4] Круглов В. М., Антонов С. Н., «Теория вероятн. и ее примен.» 1982, т. 27, в. 4, с. 625–42; т. 29, в. 4, с. 735–42; [5] Якимов А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 691–702; [6] Horn R. H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd. 21, H. 3, S. 179–87.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; *ayrılış « безгранично делимое распределение; разложение; infinitely divisible distribution; decomposition of »* – *sonsuz bölünən paylanmaların* müəyyən ehtimal paylanmalarının kompozisiyası şəklində ifadə olunmasıdır. Bu ayrılışdakı paylanmalar *ayrılışın komponentləri* adlanır.

S. b. p.-ların bəzi ayrılışlarının komponentləri S. b. p. olmaya bilər ([1] – [3]). Bu nöqteyi – nəzərdən, yalnız sonsuz bölünən komponentləri olan S. b. p.-lar sinfini – I_0 sinfini müəyyən etmək mühüm məsələdir. Məs., normal paylanma, Puasson paylanması, bu paylanmaların kompozisiyası I_0 sinfindəndir. $0 < \alpha < 2$ olduqda α parametrlili dayanıqlı paylanma, qamma paylanma I_0 sinfindən deyildir. $G(x)$ spektral funksiyasının Levi – Xinqin ifadəsində sıfırda müsbət sıçrayışa malik olan və ya $x \rightarrow \pm 0$ olduqda $x^{-2} dG(x)$ ölçüsü olduqca sürətlə artan S. b. p.-ların *Linnik sinfi* L -dən olması S. b. p.-nın I_0 sinfine aid olması üçün zəruri şərtidir, kafi deyildir. Lakin ixtiyari $k > 0$ qiymətlərində $\gamma \rightarrow \infty$ olduqda

$$\int_{|x| > \gamma} dG(x) = O(\exp\{-k\gamma\}) \quad (*)$$

şərtini ödəyən L sinfindən olan paylanmalar I_0 sinfindəndir.

Ümumi halda L sinfine məxsusluq I_0 sinfine məxsusluq üçün zəruri deyildir. Məs., $0 < a < b \leq 2a$, $x < a$, $x > b$ olduqda $G(x)$ funksiyası sabit olan bütün S. b. p.-lar I_0 sinfindəndir. $G(x)$ funksiyasının (*) şərtini ödəyən şəkəvkəvari S. b. p.-ların I_0 sinfindən olması üçün $G(x)$ -in artım nöqtələrinin yerləşməsi terminlərində zəruri və kafi şərtlər məlumdur. I_0 sinfine məxsusluğun sadə kafi şərti: $0 < a < 2a < b$ olduqda $a < x < b$ intervalında $G'(x) \geq \text{const} > 0$ bərabərsizliyinin ödənilməsidir.

I_0 sinfi zəif yığılma topologiyasında bütün S. b. p. sinfində sıxdır; hər bir S. b. p. I_0 sinfindən olan sonlu və ya hesabı paylanmalar çoxluğunun kompozisiyası şəklində ifadə olunur.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков В. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. т. 12, М., 1975, с. 5–42; [4] Островский И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA Banach fəzasında « безгранично делимое распределение в банаховом пространстве; infinitely divisible distribution in a Banach space » – Banach fəzası $\mathbb{B}$ -də ehtimal ölçüsü μ -dür ki, hər bir $n \geq 1$ üçün ehtimal ölçüsü vardır ki, $\mu = \underbrace{\nu_n * \dots * \nu_n}_n$; «*» – kompozisiya

simvoludur.

Sonsuzölçülü Banach fəzasında S. b. p. $\mathbb{R}^k$ fəzası halındakı kimi struktura malikdir; S. b. p.-nin xarakteristik funksionalı *Levi kanonik ifadəsi* kimi təsvir oluna bilər. Yalnız və yalnız asimptotik əhəmiyyətsizlik xassəsinə malik olan, asılı olmayan toplananlar cəminin paylanmaları üçün S. b. p.-lər limit qanunları ola bilər. S. b. p.-lərin bir altsinfi – Banach fəzasında *dayanıqlı paylanmalar* (xüsusi halda, Gauss paylanmaları) daha çox öyrənilmiş paylanmalardır.

Əd.: [1] Araujo A., Giné E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [3] Linde W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA birtərəfli « безгранично делимое распределение одностороннее; onesided infinitely divisible distribution » – bax, *Birtərəfli sonsuz bölünən paylanma*.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA qrupda « безгранично делимое распределение на группе; infinitely divisible distribution on a group » – lokal kompakt G qrupunda ehtimal $\mathbb{P}$ paylanmasıdır ki, bu paylanma üçün ixtiyari natural n qiymətində, G -də, ehtimal $\mathbb{P}_n$ paylanmasında vardır ki, $\mathbb{P}_n^n = \mathbb{P}$, burada $\mathbb{P}_n^n$ – $\mathbb{P}_n$ paylanmasının konvolusiyası əməlinə görə n -ci dərəcəsidir.

Əgər G Abel qrupu olarsa, onda G qrupunda bütün S. b. p.-lər çoxluğu $\mathcal{F}(G)$ G -də bütün ehtimal ölçülərinin topoloji $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupunda altsemi – qrupdur. G Abel qrupu olmazsa, $\mathcal{F}(G)$ üçün semi – qrup xassəsi, ümumiyyətlə, ödənilmir. Əgər G kökləri – kompakt qrup olarsa, onda $\mathcal{F}(G)$ çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -də zəif qapalıdır. İxtiyari lokal kompakt qruplar üçün (hətta Abel qrupları üçün də) bu müddəə artıq doğru olur.

Klassik halda olduğu kimi, qrupda S. b. p. anlayışı ehtimal ölçülərinin konvolusiyaları üçün limit teoremləri nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır (bax, *Mərkəzi limit teoremi* qruplarda); bununla yanaşı qeyd etmək lazımdır ki, burada $\mathbb{R}^1$ -ə verilən paylanmalar üçün olduğu kimi tam nəzəriyyə helə yoxdur. Məs., ixtiyari G qrupu üçün cırlaşmış δ_x , $x \in G$ paylanması, ümumiyyətlə, S. b. p. deyildir, buna görə də, aşağıdakı tərifin verilməsi məqsəduşundur. Əgər ixtiyari natural n ədədi üçün

G -də ehtimal $\mathbb{P}_n$ paylanması və $x_n \in G$ olarsa ki, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^n * \delta_{x_n}$ bərabərliyi ödənilsin, onda $\mathbb{P}$ ehtimal paylanması G qrupunda sonsuz bölünən paylanma adlanır, burada *, – G qrupunda paylanmaların konvolusiyası əməlinin işarəsidir ($\mathbb{R}^1$ -də əməl kompozisiya adlanır). Abel qrupları üçün G qrupunda bütün zəif S. b. p.-lərin çoxluğu $\mathcal{J}_0(G)$ çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -də sekvensial qapalıdır. Aydındır ki, $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{J}_0(G)$.

$\mathcal{J}_0(G) \subset \mathcal{F}(G)$ münasibəti yalnız sonsuz bölünən G qrupları üçün doğrudur. μ_{nj} , $j=1, \dots, k_n$, $n \geq 1$, – G qrupunda ölçülərin kommutativ infinitezimal ələ sistemi olsun ki, bu sistem kökləri – kompakt və eyni zamanda Mur qrupu olsun; fərz olunur ki, $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n}$ ardıcılığı μ -yə yığılır. Onda $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Abel qrupları üçün μ_n -lər üçün mərkəzləyici yerindəyişmələr mümkündür və bu halda $\mu \in \mathcal{J}_0(G)$.

Qruplarda S. b. p.-lərə misallar aşağıdakılardır: qrupda *ümumiləşmiş Puasson paylanması*, lokal kompakt Abel qrupunda *Gauss paylanması*, qrupda *idempotent ölçü*, qrupda *dayanıqlı paylanma*.

Bax, həm də *Sonsuz bölünən paylanma qrupda; daxilolma problemi*.

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA qrupda; daxilolma problemi « безгранично делимое распределение на группе; проблема вложения; infinitely divisible distribution on a group; imbedding problem » – qrupda verilən S. b. p.-nin (və ya bütün belə paylanmaların) hər hansı konkret qrup üçün (və ya hər hansı xüsusi sinifdən olan qrup üçün) ölçülərin konvolusiyası semiqrupuna daxil oluna bilinməsi şərtlərinin təsviri məsələsidir.

Bu məsələnin iki qoyuluşuna baxılır: cəbri və kəsilməz daxilolma. Əgər bütün müsbət rəşional ədədlərin toplama əməli təyin olunmuş $\mathbb{Q}_+^*$ semi – qrupunun G -də bütün ehtimal ölçülərinin konvolusiyası təyin olunmuş $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupuna

$\varphi(1) = \mu$ şərtini ödəyən φ cəbri homomorfizmi vardırsa, G qrupunda verilən sonsuz bölünən μ paylanması cəbri daxilolma təmin edir, deyilir. Başqa sözlə, əgər $\varphi(t) = \mu_t$,

$t \in \mathbb{Q}_+^*$ işarələməsi qəbul edilərsə, onda μ_t , $t \in \mathbb{Q}_+^*$ ölçülərinin ehtimal konvolusiyası semi – qrupu vardır ki, $\mu_t = \mu$. Əgər (μ_t) kəsilməz semi – qrup olarsa (bax, *Konvolusiyası semi – qrup*), μ ölçüsü kəsilməz daxilolma təmin edir. Bu halda homomorfizm topoloji homomorfizmdir və bu homomorfizm bütün mənfi olmayan həqiqi ədədlərin semi – qrupu $\mathbb{R}_+$ -un topoloji homomorfizminə qədər zəif yığılma topologiyası ilə verilən daxilolma əməli ilə $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupuna birqismətli davam olunur.

Daxilolma probleminin bütün lokal kompakt qruplar üçün müsbət həlli yoxdur. Buna görə də, belə bir sual yaranır: qrupların hansı sinifləri üçün daxilolma problemi doğrudur? Bu tipli ən ümumi teoremlərdən birində hökm olunur ki, əgər lokal kompakt G qrupu kökləri – kompakt qrupdursa, onda G -də ixtiyari μ S. b. p.-si cəbri daxilolma təmin edir (bax, [1]). Məsələn, bu hökm ixtiyari kompakt qrup üçün doğrudur.

Kəsilməz daxilolma problemi daha mürəkkəbdir. Əgər G qrupunun köklər çoxluğu (rus. корневое множество)

$$R(\mu) = \bigcup_{n \geq 1} \{ \nu^n : \nu \in \mathcal{M}^1(G), \nu^n = \mu, 1 \leq n \leq n \}$$

$\mathcal{M}^1(G)$ -də nisbi kompakt çoxluqdursa, G qrupunda bütün S. b. p. sinfi $\mathcal{F}(G)$ -dən olan ehtimal ölçüsü μ kökləri – kompakt ölçü adlanır. S sinfi güclü kökləri – kompakt

çoxluqların R_0 sinfini özündə saxlayır. $\mathcal{E}(G)$ kəsilməz daxilolma təmin edən, bütün $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ ölçülərinin sinfi olsun. Əgər G qrupu S -ə daxil olarsa, onda $\mathcal{E}(G)$ sinfi $\mathcal{F}(G)$ -də sıx sinfidir. Əgər, bundan əlavə, G -də ixtiyari əlaqə altqrup xətti əlaqəlidirsə, onda $\mathcal{F}(G) = \mathcal{E}(G)$. Məsələn, bu hökm özü Li qrupu olan (və ya onun C_0 komponentləri vahid olan) ixtiyari $G \in S$ üçün doğrudur. Abel qrupları üçün bu nəticəni gücləndirmək mümkündür. Əgər $G \in S$ Abel qrupudursa, onda $\mathcal{F}(G) = \mathcal{E}(G)$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, G_0 lokal xətti əlaqəli olsun. Bundan başqa, Abel qrupları üçün S sinfinə aidiyyətin olduqca sadə kriteriləri mövcuddur: lokal kompakt Abel qrupu, yalnız və yalnız, o halda S sinfində yerləşir ki, G -nin bütün kompakt elementlərinin (yeni kompakt altqrup doğuran) çoxluğu $B(G)$ kompakt olsun, G -nin bölünən elementlərinin $\{x^n = a \text{ tənliyinin həllinin olmasını təmin edən } a \text{ elementlərinin } \}$ çoxluğu $T(G)$ G ilə üst-üstə düşsün.

Daxilolma probleminin müsbət həll olduğu hallarda, belə daxilolmanın yeganəliyi haqqında problem yaranır. Aydındır ki, bu probleme cəbri daxilolmalar üçün baxmaq yetərlidir. Verilən məsələ ixtiyari $\mu \in \mathcal{F}(G)$ -dən ixtiyari $n > 1$ dərəcəli yeganə kökün alınmasının müəyyən olunmasına gətirir. Məqbul həll Abel qrupu üçün alınmışdır: əgər G lokal kompakt Abel qrupudursa, onda ixtiyari $n > 1$ üçün n -ci dərəcədən kökəlmə ixtiyari $\mu \in \mathcal{F}(G)$ üçün, yalnız və yalnız, o halda birqiymətli təyin olunur ki, G qeyri-trivial kompakt altqruplara malik olmasın.

Əd.: [1] Хейер X., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; Laplas çevirməsi « безгранично делимое распределения; преобразование Лапласа; Laplace transform of infinitely divisible distribution » – ehtimal nəzəriyyəsinə *sonsuz bölünən paylanmalarla* bağlı anlayışdır. ω funksiyası, yalnız və yalnız, $\omega = e^{-\psi}$ şəklində olduğu halda S. b. p.-nin Laplas çevirməsidir, burada

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} P\{dx\}, \lambda > 0$$

və P ele ölçüdür ki,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} P\{dx\} < \infty.$$

ω funksiyası, yalnız və yalnız, o halda S. b. p.-nin Laplas çevirməsidir ki, $\omega = e^{-\psi}$ olsun, burada ψ tamamilə monoton töləməyə malik funksiyadır və $\psi(0) = 0$.

Misallar. 1)

$$u = e^{-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} F^{n*}$$

ümumiləşmiş Puasson paylanmasının $e^{-c+e\psi}$ -yə

bərabər Laplas çevirməsi vardır və (*) $P\{dx\} = cxF\{dx\}$ olduqda doğrudur.

2) $x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$ – Q amma paylanmasının sıxlıq funksiyasının Laplas çevirməsi $\omega(\lambda) = 1/(\lambda+1)^\alpha$ düsturu ilə ifadə olunur.

Burada

$$\psi(\lambda) = a \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} e^{-x} dx,$$

belə ki, $\psi'(\lambda) = a(\lambda+1)^{-1} = \omega'(\lambda)/\omega(\lambda)$.

3) Dayanıqlı paylanmalar. $0 < \alpha < 1$ olduqda aşağıdakı xassələrə malik G_α paylanmasının Laplas çevirməsi

$\gamma_\alpha(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$ funksiyasıdır. G_α – dayanıqlı paylanmadır; daha dəqiq, əgər asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni G_α paylanmasına malikdirsə, onda $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n^{1/\alpha}$ təsadüfi kəmiyyətinin də paylanması G_α -dır; $x \rightarrow \infty$ olduqda

$$x^\alpha [1 - G_\alpha(x)] \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},$$

$$x \rightarrow 0 \text{ olduqda } e^{x^\alpha} G_\alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$\text{Bu halda } \psi(\lambda) = \lambda^\alpha \text{ və } \lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} dx.$$

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA müşayiət edici « безгранично делимое распределение сопровождающее; accompaning infinitely divisible distribution » – bax, *Müşaiətəddici sonsuz bölünən paylanma*.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; struktur « безгранично делимое распределение; структура; structure of infinitely divisible distribution » – sonsuz bölünən paylanmanın *Lebeq ayrılışı* $P = P_a + P_d + P_s$ və bu paylanmaya uyğun spektral funksiyasının $H = H_a + H_d + H_s$ – *Levi kanonik ifadəsinin* qarşılıqlı asılılığıdır.

Belə qarşılıqlı asılılığa aid misallar: 1) S. b. p. P , yalnız və yalnız, o halda diskret paylanmadır ki (yeni $P = P_d$), Levi spektral funksiyasının tam dəyişikliyi $\text{Var } H$ məhdud olsun və $H = H_d$ ödənilsin. 2) S. b. p.-nin ayrılışında, yalnız və yalnız, o halda diskret hədd yoxdur (yeni $P_a = 0$) ki, $\text{Var } H = \infty$ olsun. 3) S. b. p. P , – $H_a \neq 0$ və $\text{Var } H = \infty$ olduğu halda mütləq kəsilməz paylanmadır (yeni $P = P_a$). 4) əgər $\text{Var } H = \infty$ və $H = H_d$ olarsa, onda $P = P_a$ və ya $P = P_s$ olur.

Əd.: [1] Tucker H. G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 316–20; [2] Золотарев В. М., Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 712–24.

M – SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « M – безгранично делимое распределение; M – infinitely divisible distribution » – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulma sxeminə *sonsuz bölünən paylanmanın*

analoqudur. Paylanma funksiyaları F_ξ və F_η olan ξ və η asılı olmayan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərinin vurulması kompozisiyaya analoji semi – qrup eməli doğurur, yəni $F_{\xi\eta} = F_\xi \Psi F_\eta$. İxtiyari $n \geq 2$ üçün F funksiyası hər hansı paylanma funksiyası G_n -in və $\delta(n) = -1$ və ya $\delta(n) = -1$ nöqtələrindən birində cırılmış E_{δ_n} paylanmasının n – qat kompozisiyası kimi: yeni

$$F = G_n \Psi G_n \Psi \dots \Psi G_n \Psi E_{\delta(n)}$$

şəklində ifadə olunarsa, F paylanma funksiyası M – sonsuz bölünən paylanma adlanır və bu paylanma $\mathfrak{M}$ sinfindendir. $\mathfrak{M}$ sinfi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasiləri ardıcılığı –

$$\alpha_n \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nm}, \quad n \geq 1$$

üçün mümkün limit paylanmalarının çoxluğu ilə üst-üstə düşür: bu ardıcılıqlarda $\alpha_n \neq 0$ sabitlərdir, ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətləri isə sonsuz kiçiklik şərtinə analoji: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\max \mathbf{P} \left\{ \left| \xi_{nk}^2 - 1 \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (*)$$

şərtinə tabedirlər. Həqiqi ədədlərin semi – qrupu vurma eməlinə nəzərən iki elementdən ibarət kompakt $K = (-1, 1)$ semi – qrupunu özündə saxlayır. (*) şərti ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathfrak{M}$ -in alt sinfi olan, K -da toplanmış bütün paylanmaların sinfi $\mathfrak{H}$ ilə zəif topologiyada müntəzəm yaxınlaşmasını ifadə edir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxemi üçün xarakteristik funksiyalar rolunu F paylanmalarının xarakteristik çevirmələri:

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix},$$

$$w_k(t) = \int_{x \neq 0} |x|^t (\text{sign } x)^k dF(x)$$

ifadə edir. Xarakteristik çevirməsi W olan F paylanma funksiyasının $\mathfrak{M}$ sinfindən olması üçün w_k funksiyalarının

$$w_k(t) = \alpha_k f_1(t) (f_2(t))^{1-2k}, \quad k = 0, 1$$

düsturları ilə ifadə olunması zəruri və kafidir, burada f_1 və f_2 sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik funksiyalarıdır, həm də

$$f_2(t) = \exp \left(\int_{x \neq 0} (e^{itx} - 1) dH(x) \right)$$

(Levi kanonik ifadəsi formasında), həqiqi α_k parametrləri isə

$$0 < \alpha_0 \leq 1, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_0 \exp \left(- \int_{x \neq 0} dH(x) \right)$$

şərtlərinə tabedirlər.

$\mathfrak{M}$ sinfində özü-özünə ayrılan paylanmalar və dayanıqlı paylanmalara analoji M – özü-özünə ayrılan və M – dayanıqlı paylanmalar anlayışlarını daxil etmək olar.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 4, с. 788–91.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMALARIN İKİLİLİK XASSƏSİ « безгранично делимых распределений двойственность; duality of infinitely divisible distribution »

– sonsuz bölünən paylanmaların iki sinfi arasında xüsusi növ analitik əlaqədir. $\zeta(u)$, $\zeta(0) = 0$, $u \rightarrow \infty$ olduqda sanki yəqin qeyri – məhdud artan və müsbət sıçrayışlırsız, paylanma funksiyası $F_\zeta(x, u)$ olan bircins sonsuz bölünən proses: $\tau(v)$, – $\zeta(u)$ prosesinin $v > 0$ səddini ilk aşma anı, $F_\tau(x, v)$, – $\tau(v)$ -nin paylanma funksiyası olsun. $\tau(v)$, $\tau(0) = 0$ də sonsuz bölünən prosesdir və müsbət λ və x üçün paylanma funksiyası F_τ paylanma funksiyası F_ζ ilə

$$\int_0^\lambda (1 - F_\zeta(x, u)) \frac{du}{u} = \int_0^x F_\tau(\lambda, v) \frac{dv}{v} \quad (1)$$

bərabərliyi ilə bağlıdır. p_ζ və p_τ sıxlıq funksiyaları eyni zamanda ya mövcuddur və ya yoxdur, birinci halda bunlar

$$x p_\zeta(x, u) = u p_\tau(u, x) \quad (2)$$

bərabərliyi ilə bir-birilə bağlıdır.

S. b. p. i. x. 1954-də (bax, [1]) ciddi dayanıqlı paylanmalar sinfi $\mathcal{H}$ -da, ümumi halda isə 1961-də (bax, [2] – [4]) aşkar olunmuşdur.

Ciddi dayanıqlı paylanmaların sıxlıqları arasında əlaqə aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunur:

$$x p(x, \alpha, \theta) = x^{-\alpha} p(x^{-\alpha}, \alpha^*, \theta^*), \quad (3)$$

burada $x > 0$, $1 \leq \alpha \leq 2$, θ isə $\mathcal{H}$ sinfi üçün məqbul ixtiyari qiymətlər alır, $\alpha^* = 1/\alpha$, $\theta^* = \alpha(1 + \theta) - 1$. (3) bərabərliyində (2) halı $\theta = \alpha - 2$ qiymətinə uyğundur. (3)-də digər halların təsadüfi proseslər dilində interpretasiyası məlum deyildir. (1) – (3) münasibətlərinin xüsusi cəhəti – paylanmaların əlaqəsini tamamilə deyil, yalnız yarımxələrdə toplanmış «yanları» (hissəsi) arasında əlaqəni müəyyən edir. Bütün $s > 0$ üçün mövcud olan

$$\mathbf{M} \exp[s \zeta(u)] = \exp[u \psi_\zeta(s)],$$

$$\mathbf{M} \exp[-s \tau(v)] = \exp[-v \psi_\tau(s)]$$

Laplas çevirmələri (1)-ə ekvivalent, $\psi_\zeta(\psi_\tau(s)) = s$ bərabərliyi ilə əlaqəlidir.

Mənfi sıçrayışlırsız bircins sonsuz bölünən proseslər [$\zeta(0) = 0$, $\zeta(u) \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow \infty$] də analoji xassəyə malikdirlər, çünki, $\zeta(u)$ prosesi də yuxarıda baxılan tip prosesdir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 5, с. 735–38; [2] Золотарев В. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 52–60; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 4, с. 724–33; [4] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 360–63.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMALARIN QARIŞMASI « безгранично делимых распределений смесь; mixture of infinitely divisible distributions » –

$$P(\cdot) = \int_A Q(\cdot, \alpha) \mu(d(\alpha)) \quad (*)$$

şəklində ifadə olunan paylanmadır, burada $\{Q(\cdot, \alpha) : \alpha \in A\}$ – hər hansı bir sonsuz bölünən paylanmalar ailəsidir, μ isə A -nın alt çoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdə verilmiş normalanmış ölçüdür [ola bilər ki, dəyişənşərəli, $\mu(A) = 1$]. Əgər $A = [0, 1]$, μ Lebeq ölçüsü və $Q(\cdot, \alpha) = \zeta(\alpha)$, $\alpha \in A$ ölçülən sonsuz bölünən prosesinin paylanması olarsa, onda **P qarışma** təsadüfi v_n sayda hər hansı asılı olmayan və limitcə müntəzəm əhəmiyyətsiz toplananların $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nv_n}$ cəmlərinin limit paylanmasıdır (ξ_{nj} və v asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir) (bax, [1]).

S. b. p. q. **P**-nin özü də sonsuz bölünən paylanma ola bilər, məs., əgər $A = [0, \infty)$, μ – A -da sonsuz bölünən paylanmadır və $Q(\cdot, \alpha) = A$ -da bircins sonsuz bölünən $\zeta(\alpha)$ prosesinin paylanmasıdır (bax, [2]).

Çoxölçülü qarışmalar üçün Ş önbərqin məhşur teoreminde isbat olunur ki, əgər $f_n(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ karakteristik funksiyaları $f_n(t) = \varphi(|t|)$ şəklində olarsa, $|t|$ – $t \in \mathbb{R}^n$ vektorunun Evklid norması və φ – $\mathbb{R}^1$ -də hər hansı bir funksiya olarsa, onda $n \geq 1$ olan bütün n -lər üçün

$$f_n(t) = \int_0^\infty e^{-|t|^2 \alpha} \mu(d\alpha).$$

Əgər bundan əlavə $n \geq 1$ olan bütün n -lər üçün f_n $\mathbb{R}^n$ -də sonsuz bölünən paylanmanın karakteristik funksiyası olarsa, onda μ də sonsuz bölünən paylanma olacaqdır. Paylanma funksiyalarının qarışmaları haqqında bax, [3].

Əd.: [1] Szasz D., «Ann. Math. Statist.», 1972, v. 43, № 6, 1902–13; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., М., 1984; [3] Лунач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [4] Ахизер Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961.

SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES « безгранично делимый процесс; infinitely divisible process » – stoxastik kəsilməz və asılı olmayan artımlı bircins $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir, yəni elə prosesdir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $s \rightarrow t$ olduqda

$$P\{|\zeta(t) - \zeta(s)| > \varepsilon\} \rightarrow 0;$$

ixtiyari $t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq \dots \leq t_n < s_n$ topluları üçün $\zeta(t_1) - \zeta(s_1), \dots, \zeta(t_n) - \zeta(s_n)$ artımları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və prosesin artımlarının paylanması yalnız $t_k - s_k$ fərqlərindən asılıdır. Əgər $\zeta(0) = 0$ şərtinin sanki yəqin

ödənilməsi qəbul olunarsa, onda $\zeta(t)$ kəmiyyətinin karakteristik funksiyası $f^*(\lambda)$ şəklində olur; $t > 0$, burada $f(\lambda)$ hər hansı sonsuz bölünən paylanmanın karakteristik funksiyasıdır. S. b. p. $\zeta(t)$ -nin trayektoriyalarının yalnız sanki yəqin birinci növ kəsilmə nöqtələri ola bilər. Əgər karakteristik funksiya $f(\lambda)$ *Levi kanonik ifadəsi* formasında ifadə olunarsa, onda spektral funksiya $H(x)$ -in ehtimalı mənası aşağıdakı kimidir: S. b. p.-in trayektoriyası $(t, t + \Delta)$ intervalında $Y < u < 0$ uzunluqlu sıçrayışları [uyğun olaraq, $-H(u)\Delta + o(\Delta)$ ehtimalı ilə $0 < u < Y$ uzunluqlu] $H(u)\Delta + o(\Delta)$ ehtimalı ilə alır. Əgər $x > 0$ olduqda $H(x) = 0$ olarsa, onda $\zeta(t)$ prosesinin sanki yəqin müsbət sıçrayışları yoxdur (yuxarıdan səmikəsilməz). Aşağıdan səmikəsilməz S. b. p. analogi olaraq təyin olunur. Əgər S. b. p. $\zeta(t)$ yuxarıdan semi kəsilməz proses və

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\} = 1$$

olarsa, onda prosesin ixtiyari $y > 0$ səddini kəsməsi sanki yəqin hər hansı təsadüfi $\tau(y)$ anında baş verir; $\tau(y)$ isə S. b. p.-dir. S. b. p.-lər olan $\zeta(t)$ və $\tau(y)$ -in paylanması arasında aşkar asılılıq vardır (bax, *Sonsuz bölünən paylanmaların ikililik xassəsi*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949.

SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES aşağıdan (yuxarıdan) semi – kəsilməz « безгранично делимый процесс полунепрерывный снизу (сверху); lower (upper) semicontinuous infinitely divisible process » – bax, *Sonsuz bölünən proses*.

SONSUZ BÖLÜNƏN TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « безгранично делимое случайное множество; infinitely divisible random set » – aşağıdakı xassəyə malik təsadüfi A çoxluğudur: ixtiyari natural n ədədi üçün elə eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $A_1, \dots, A_n$ təsadüfi çoxluqları vardır ki, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ və A təsadüfi çoxluqlarının paylanması eynidir.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

SONSUZ KİÇİLƏNLİK ŞƏRTİ « бесконечной малости условие; infinitesimality condition », asimptotik önəmsizlik şərti, – asılı olmayan $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin (bax, *Seriya şəxsi, üçbucaq şəxsi*) $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$, $n \geq 1$ cəminin paylanması üçün limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsinin əsas ilkin fərziyyəsidir: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$\sup [P\{|\xi_{nk}| > \varepsilon : k \geq 1\}] \rightarrow 0 \quad (*)$$

fərz olunur

Aşağıdakı hökmlər (*) ilə ekvivalentdir:

$n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$\sup [L(\xi_{nk}, 0) : k \geq 1] \rightarrow 0,$$

burada L – Levi metrikasıdır;

$n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$\sup [M \min(\xi_{nk}^2, 1); k \geq 1] \rightarrow 0;$$

hər bir $t \in \mathbb{R}^1$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$\sup [|f_{nk}(t) - 1|; k \geq 1] \rightarrow 0,$$

burada $f_{nk}(t) = \xi_{nk}$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır. «S. k. ş.» anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinə A. N. Kolmogorov (bax, [1]) tərəfindən daxil edilmişdir. S. k. ş.-nin analogları ümumiləşmiş cəmləmə modelləri ilə bağlı (təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulma sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumu sxemi) limit teoremlərində istifadə olunur.

$n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\sup |\xi_{nk}|; k \geq 1\} \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

şerti, bezen, müntəzəm sonsuz kiçiklik şərti adlanır.

Əd.: [1] Х и н ч и н А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938; [2] Г н е д е н к о Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Л о з в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

SONSUZ LATIN KVADRATI «безконечный латинский квадрат; infinite Latin square» – bax, *Latin kvadrat*.

SPEKTR(i) dinamik sistemin «спектр динамической системы; spectrum of a dynamical system» – $\{T_t, t \in \mathbb{Z}$ və ya $\mathbb{R}\}$ Lebeq fəzası X -də, μ ölçüsünü saxlayan dinamik sistem olduqda, $U_t: f(x) \rightarrow f(T_t x)$ unitar operatorlarının $L^2(X, \mu)$ -də qrupunun spektridir. Unitar operatorların ixtiyari qrupu üçün olduğu kimi dinamik sistemin $S. (\sigma, n)$ cütü ilə tamamilə xarakterizə olunur, burada σ – maksimal spektral tipin ölçüsü, $n = n(\lambda)$ – təkrarlıq funksiyasıdır.

Adətən, $S.-ə \int f(x) d\mu(x) = 0$ şərtini ödəyən funksiyaların altfəzasında baxılır.

K – sistemlər üçün $(\sigma, n) = (d\lambda, \infty)$ olur, yəni $S.$ – hesabıqat Lebeq $S.$ -dir. Belə $S.$ entropiyası sıfır olan sistemlərdə də ola bilər (məs., oritsiklər axınlarında). Sıfır nöqtəvi $S.-li$ ergodik sistemlər (burada σ – nöqtəvi ölçüdür) üçün $S.$ sadədir, yəni $n(\lambda) = 1$ və tam metrik invariantdır. Sadə və kəsilməz $S.-li$ sisteme misal Gauss dinamik sistemlərinin əsasında qurulmuşdur. Sadə olmayan və sonluqat $S.-li$ sistemlərə əif misallar vardır, burada $n(\lambda) < \infty$, $n\lambda \neq 1$, məs., sonlu sayda parçalarını keçirilmə sinfində. Keçirilmələrdə arasında özünün təsirini ilə qoşma olmayan, sadə və kəsilməz $S.-li$ sistem vardır. Ergodik dinamik sistemdə hansı (σ, n) cütünün mümkün olduğu məlum deyildir, məs., $(d\lambda, 1)$ cütü mümkündürmü, yəni sadə Lebeq $S.$ mümkündürmü? Yalnız o məlumdur ki, $S.-də$ iqiqat Lebeq komponentli olan sistemlər mövcuddur.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Оселедец В. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1971, т. 5, № 3, с. 75–79; [3] Оселедец В. И., «Матем. заметки», 1969, т. 5, в. 3, с. 323–326; [4] M a t h e w J., N a d k a r n i M., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1984, v. 16, № 4, p. 402–06.

SPEKTR; faza spektri «спектр фазовый; phase spectrum» – bax, *Faza*.

SPEKTR(i) koherentlik «спектр когерентности; spectrum of coherence» – bax, *Koherentlik*.

SPEKTR(i) Kolmogorov «спектр колмогоровский; Kolmogorov spectrum» – bax, *Kolmogorov spektri*.

SPEKTR kumulyativ «спектр кумулятивный; cumulativ spectrum» – bax, *Spektral səmi-invariant*.

SPEKTR(i) qarşılıqlı faza «спектр взаимный фазовый; phase cross – spectrum» – bax, *Faza*.

SPEKTR(i) planın «спектр плана; spectrum of a design», plan daşıyıcısı, planın dayaq nöqtələri, planın nöqtələri də adlandırılır.

Bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

SPEKTR(i) prosesin «спектр процесса; spectrum of a process» – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq*.

SPEKTR(i) sonsuz bölünən paylanmanın «спектр безгранично делимого распределения; spectrum of a infinitely divisible distribution» – bax, *Sonsuz bölünən paylanma*.

SPEKTR(i) stasionar təsadüfi prosesin «спектр стационарного случайного процесса; spectrum of a stationary random process» – bax, *Spektral sıxlıq*.

SPEKTR(i) təsadüfi bircins meydanın «спектр случайного однородного поля; spectrum of a random homogeneous field» – bax, *Spektral sıxlıq*.

SPEKTR(i) təsadüfi prosesin «спектр случайного процесса; spectrum of a random process» – bax, *Spektral ayrılış*.

SPEKTRAL ANALİZ(i) təsadüfi proseslərin və meydanların «спектральный анализ случайных процессов и полей; spectral analysis of a random processes and fields» – *stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsinin* bu proseslər və meydanların yüksək tərtib spektral xarakteristikalarını öyrənən bölməsidir; [1] – [3] işlərinin əsasında yaranmışdır.

$T^{(k)}$, –

$$M|\zeta(t)|^k \leq C_k < \infty$$

şertini ödəyən $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinin sinfi olsun, $S^{(k)}$ – $\zeta(t) \in T^{(k)}$ proseslərinin sinfi olsun ki, bütün $t_1, \dots, t_l$ üçün, $1 \leq l \leq k$, $-\infty < \tau < \infty$ üçün bunlar

$$M(\zeta(t_1) \dots \zeta(t_l)) = M(\zeta(t_1 + \tau) \dots \zeta(t_l + \tau))$$

şertini ödəmiş olsunlar. $S^{(k)}$ sinfinin prosesləri, bəzən, k tərtib geniş mənada stasionar proseslər adlanır.

$M_{\zeta}^{(k)}(\Lambda) \in \mathbb{R}^n$ Ekvilid fəzasının Borel çoxluqları sistemində təyin olunmuş ele kompleks tamamilə sonlu ölçü olsun ki (bu ölçü spektral moment ölçüsü adlanır),

$$M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t, \lambda)} M_{\zeta}^{(k)}(d\lambda)$$

şərtini ödəsin, burada $M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{M}(\zeta(t_1) \dots \zeta(t_k))$. Əgər bütün $1 \leq l \leq k$ üçün

$$M^{(l)}(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^l} e^{i(t, \lambda)} M_{\zeta}^{(l)}(d\lambda)$$

münasibəti ödənilərsə, $\zeta(t)$ prosesi $\Phi^{(k)}$ sinfindəndir. $\mathbf{T}^{(k)}$, $\mathbf{S}^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$ sinifləri arasında münasibətlər ödənilir: $\mathbf{S}^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)}$, $\Phi^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)}$. Məlumdur ki, $\mathbf{S}^{(2)} \subset \Phi^{(2)}$, məs., $\zeta^*(t) = \zeta(t) \cos \omega t$, $\zeta(t) \in \mathbf{S}^{(2)}$ prosesi misalından aydındır ki, $\Phi^{(2)}$ sinfi $\mathbf{S}^{(2)}$ sinfindən daha genişdir. $k > 2$ üçün [2]-də qurulmuş misaldan aydındır ki, $\mathbf{S}^{(k)}$ sinfindən olan ele proseslər var ki, onlar eyni zamanda $\Phi^{(k)}$ sinfindən deyildirlər.

Bir çox hallarda təbii olaraq, moment spektral ölçüsü $M_{\zeta}^{(k)}(\Lambda)$ -ya deyil,

$$\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t, \lambda)} F_{\zeta}^{(k)}(d\lambda)$$

münasibətilə təyin olunan spektral semi - invariant $F_{\zeta}^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsünə baxılır, burada

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k) &= \\ &= \frac{i^{-k} \partial^k}{\partial u_1 \dots \partial u_k} \ln \mathbf{M} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^k u_j \zeta(t_j) \right\} \Big|_{u_1 = \dots = u_k = 0} = 0. \end{aligned}$$

$M_{\zeta}^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsü çox vaxt spektral moment, $F_{\zeta}^{(k)}(\Lambda)$ - spektral semi-invariant adlandırılır. Təsadüfi kəmiyyətlərin semi - invariantları bezen $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)) = \mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k)$ kimi işarə olunur.

A. N. Kolmoqorovun [1]-də təklif edərək daxil etdiyi $\Delta^{(k)}$ sinfi $\Phi^{(k)} \cap \mathbf{S}^{(k)}$ sinfinin altsinfi kimi təyin olunur və bu sinif onunla xarakterizə olunur ki, $F_{\zeta}^{(l)}(\Lambda)$, $1 \leq l \leq k$ ölçüləri $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = 0$ müstəvilərində Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kesilməzdir. Təsadüfi proseslərin və meydanların rəqulyarlıq şərtlərində $F_{\zeta}^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsünün $f_{\zeta}^{(k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sıxlığının varlığı şərtləri [4]-də öyrənilmişdir (bax, *Spektral semi - invariant*).

A. N. Kolmoqorovun təşəbbüsü ilə olunmuş işlərdə $\Delta^{(k)}$ sinifləri təyin olunmuş və öyrənilmişdir və bu işlər stasionar təsadüfi proseslər və meydanların yüksək tərtib spektrlərinin statistik analizi nəzəriyyəsi adlanan nəzəriyyə kimi yeni bir istiqamətin araş-

dılma seriyalarının yaranması ilə nəticələnmiş oldu. Bu istiqamətdəki işlərin nəticələri fundamental xarakter daşıyır, həm də, astronomiya, geofizika, mayenin turbulentliyinin öyrənilməsində, müxtəlif tətbiqi məsələlərin həllində geniş istifadə olunur (bax, məs., [5]).

Təsadüfi proseslərlə bağlı ixtiyari asimptotik araşdırmalarda, praktiki olaraq, əsas vasitə yüksək tərtib semi - invariantlardır (kumulyantlar, bax, [6]) ki, bunlar həm də, yeri gəldikdə proses və meydanların S. a.-ində də istifadə olunur. Aşağıda semi - invariantların bir sıra xassələri verilir və bunlardan axırıncı üç xassədən aydındır ki, semi - invariantlar təsadüfi kəmiyyətlərin statistik asılılığının faydalı bir ölçüsüdür:

1. $\mathbf{S}^{(k)}(a_1 \zeta_1, \dots, a_n \zeta_n) = a_1 \dots a_k \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$;
2. $\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k)$ - simmetrik funksiyadır;
3. $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + Z, \dots, \zeta_k) = \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) + \mathbf{S}^{(k)}(Z, \dots, \zeta_k)$;
4. $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + C, \dots, \zeta_k) = \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$, $C = \text{const}$, $k > 2$;
5. $\mathbf{S}^{(2)}(\zeta, \bar{\zeta}^*) = \text{cov}(\zeta, \bar{\zeta}^*)$;
6. $\mathbf{S}^{(1)}(\zeta) = \mathbf{M}\zeta$;

7. əgər $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ və $(\zeta_1^*, \dots, \zeta_k^*)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + \zeta_1^*, \dots, \zeta_k + \zeta_k^*) &= \\ &= \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) + \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1^*, \dots, \zeta_k^*); \end{aligned}$$

8. əgər $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ kəmiyyətlərinin hər hansı bir qrupu bu topludakı digər kəmiyyətlərdən asılı olmazsa, onda

$$\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) = 0;$$

9. əgər $\zeta(t) \in T^{(kq)}$, $q > 2$ və bundan başqa, qarışma əmsali

$$\alpha(r) = \sup_{t, A \in \mathfrak{A}_{t-\infty}^b, B \in \mathfrak{A}_{t+r}^b} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

(burada $\mathfrak{A}_a^b$ - $\zeta(t)$, $t \in [a, b]$ -nin doğurduğu σ - cəbrdir) olan Rozenblatt qarışma şərtini ödəyirsə, onda $t_1 \leq \dots \leq t_k$ olduqda

$$|\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k)| \leq CK^{k+1} \alpha^{(q-2)k/4}(d)$$

münasibəti doğrudur, burada d - $(t_1, \dots, t_k)$ toplusunun qonşu koordinatları arasında məsafədir.

$$P_1 \cup \dots \cup P_m$$

$$A = \left\{ (1, 1), \dots, (1, m_1) \right\} \cup \left\{ (k, 1), \dots, (k, m_k) \right\}$$

cədvəlinin elementləri çoxluğunun bölgüsü olsun.

Əgər ele $(i_1, j_1) \in P_{m'}$ və $(i_2, j_2) \in P_{m''}$ elementləri varsa ki, $i_1 = i_2$ şərti ödənilir, onda bölgüyə aid $P_{m'}$ və $P_{m''}$ çoxluqları zəncir əmələ gətirir; əgər bölgünün ele $P_{m_1} = P_{m_1}$, $P_{m_2}, \dots, P_{m_N} = P_{m'}$ çoxluqları ardıcılığı varsa ki, P_{m_n} və $P_{m_{n+1}}$ çoxluqları $n = 1, 2, \dots, N-1$ qiymətlərində zəncir əmələ gətirir,

onda $P_{m'}$ və $P_{m''}$ çoxluqları əlaqəli çoxluqlardır, yəni bunlar arasında əlaqə vardır, deyilir; əgər bölgünün bütün çoxluqları P_m -lər əlaqəli çoxluqladırsa, onda bölgü ayrılma-ya n bölgü adlanır. $X_{ij}(i, j) \in A$ təsadüfi kəmiyyətlər və

$$Y_i = \prod_{j=1}^{m_j} X_{ij} \text{ olsun. Onda}$$

$$S^{(k)}(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{A=P_1 \cup \dots \cup P_M} S^{(k_1)}(X_{ij}(i, j) \in P_1) \dots S^{(k_M)}(X_{ij}(i, j) \in P_M),$$

burada cəmləmə A cədvəlinin bütün ayrılmayan bölgüləri üzrə aparılır, $A = P_1 \cup \dots \cup P_M$, $S^{(k_j)}(X_{ij}(i, j) \in P_j)$, $-(i, j) \in P_j$ indeksli X_{ij} təsadüfi kəmiyyətinin semi – invariantdır. Təsadüfi kəmiyyətlərin polinomial funksiyalarının semi – invariantlarının hesablanması [7]-də verilmişdir.

Yuxarıdakı bütün mülahizələr şübhə doğurmayan dəyişikliklərlə təsadüfi biricins meydanlar üçün də doğrudur (bax, [4], [8], [9]). Spektral semi – invariantların statistik qiymətləndirilməsi haqqında, bax, [4], [10].

Əd.: [1] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Theories des fonctions aleatoires, P., 1953; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 428–29; [3] Ширяев А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 293–313; [4] Журибенко И. Г., Анализ стационарных и однородных случайных систем, М., 1987; [5] Моинин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [6] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [7] Леонов В. П., Ширяев А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 342–55; [8] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [9] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [10] Time series in the frequency domain, Amst. – [a. o.], 1983.

SPEKTRAL ANALİZ(i) zaman sıralarının « спектральный анализ временных рядов; spectral analysis of time series » – zaman sıralarının statistik analizinin bölməsidir, əsas məqsədi statistikada *zaman sırası* adı ilə qəbul edilmiş diskret zamanlı *stasionar təsadüfi prosesin* tezlik xarakteristikalarının tədqiqidir.

Zaman sıralarının analizi 20-ci əsrin 80-ci illərində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın ən vüsətlə inkişaf edən oblastlardan biri olmuşdur. Stasionar proseslər nəzəriyyəsinin dərin nəzəri nəticələri əsasında zaman sıralarının analizi, tətbiq nöqtəyi – nəzərindən, riyazi statistikanın ən mühüm istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir. Ən müxtəlif araşdırmalarda, o cümlədən, fizika və iqtisadiyyat, texnika və linqvistik, biologiya və sosiologiya da daxil olmaqla, ya müşahidələrin stoxastik stasionar sıraları ilə və ya stasionar sıralardan asanlıqla seçilib ayrılan trendin olması ilə, mövsüm dəyişmələri ilə, periodik komponentlərlə və s. ilə fərqlənən sıralar tədqiqat obyektləri olur. Belə halların öyrənilməsinə iki əsas yanaşma vardır: birinci yanaşmada zaman üzrə stoxastik əlaqələr öyrənilir və bu hal zaman oblastında *zaman sıralarının analizi* adlandırılır, ikinci yanaşmada baxılan sıraların tezlik xarakteristikaları araşdırılır ki, bu hal *zaman sıralarının spektral analizi* adlanır. Birinci yanaşma müşahidə sıralarının korrelyasion funksiyalarına əsaslanaraq, əsas etibarilə, parametrik çoxölçülü araşdırma metodlarından istifadə edir. İkinci yanaşma öyrənilən hadisələr və ya proseslərin fiziki məğzinə bir çox hallarda olduqca bağlı olan müxtəlif spektral, asimptotik, funksional texnikaya əsaslanır və aydınlıqla təsvir oluna bilər.

Tezlik xarakteristikalarının statistik öyrənilməsinə ilk cəhdlərdən biri A. Şustere məxsusdur (bax, [1]); o, periodoqramın tərifini daxil etmiş və gizli periodikliklərin ayırd olunmasında onu istifadə etmişdir. O, spektral sıxlığın statistik qiyməti kimi periodoqramı istifadə etməyə imkan verməyən periodoqramın statistik dayanıqsızlığını qeyd etmişdir. Spektral sıxlığın tutarlı statistik qiymətinin alınması üçün spektral pəncərə vasitəsilə periodoqramın ortalanması ideyasını ilk dəfə A. Eynşteyn [2]-də təklif etmişdir, lakin onun bu ilk işi statistik aləmdə nəzərə çarpmamış qaldı və bu sahədə prioritet, adətən, M. Bartlett və F. Daniyele verilir (bax, [3], [4]). Periodoqram statistikalarının ilk ətraflı öyrənilməsi U. Qrenander və M. Rozenblatta (bax, [5]) məxsusdur (bax, *Spektral sıxlıq; qeyri – parametrik statistik qiymət*). Yüksək tərtibli statistik qiymətlərin və ya ədəbiyyatda *spektral semi – invariantlar* kimi adlandırılan statistik qiymətlərin öyrənilməsi (bax, [6]) D. Brillinger və M. Rozenblatta (bax, [7]) məxsusdur.

Zaman sıralarının S. a.-nin çoxsaylı təbiiqlərinin inkişafında kəsilməz zamanlı stasionar prosesin diskretizasiya probleminin həlli V. A. Kotelnikov və ondan asılı olmadan K. Şennon (bax, [8]) tərəfindən alınmış və mühüm bir sıçrayışa səbəb olmuşdur. Aydın olmuşdur ki, $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$ məhdud zolağında topla-

lanmış, kəsilməz zamanlı, spektrli ixtiyari prosesi onun Δ zaman intervallarından bir diskret qiymətlərinin xətti kombinasiyası şəklində ifadə etmək mümkündür, beləliklə, məhdud spektrli proses özünün bütün xarakteristikaları ilə $x(k\Delta)$, $k = 0, \pm 1, \dots$

qiymətlərlə tamamilə təyin olunur (*Kotelnikov teoremi*). Əksinə, prosesin spektri sonsuz zolaqda toplanmışdırsa, bu müddəə doğru olmur; məs., apriori sonsuz zolaqda toplanmış spektrin statistik qiymətləndirilməsində $k\Delta$ anlarında prosesin qiymətləri üzrə tezliklərin üst-üstə gəlməsi effekti baş verir və bu halda ən böyük qiymətli dairəvi tezlik təyin etmək olur, bu tezlik isə *Naykvist tezliyi* adlandırılır.

Bu effektlərin anlaşılması zaman sıralarının filtrasiyası nəzəriyyəsinə mühüm rol oynayır (bax, *Mövsüm dəyişmələri, Xətti filtr, Desimasiya, Kompleks demodulyasiya*).

Zaman sıralarının S. a. uzun müddət, xüsusilə də, *diskret Furye çevirmələrinin* alqoritmlərinin realizasiyası üçün zəruri hesablamalar həcmının böyüklüyü ilə əlaqədar hesablamaların çətinliyinə görə, o qədər də inkişaf edə bilməmişdir. Bu məsələyə marağın kəskin dəyişməsi *sürətli Furye çevirməsinin* alqoritminin yaranması ilə bağlı olmuşdur (bax, [9]). Bu alqoritm nəticəsində sonlu diskret Furye çevirmələrindəki hesablamaya üçün tələb olunan CN^2 sayda əməliyyat $CN \ln N$ sayda əməliyyata qədər azalmışdır, odur ki, hətta kovariasion funksiyanın statistik qiymətinin hesablanması ilkin müşahidələr sırasından istifadə edilərək, ikiqat Furye çevirməsi aparıldıqda səmərəli olmuşdur. Bütün bunlarla yanaşı, hesablamaya texnikasının imkanlarının da olduqca artması 20-ci əsrin sonuncu onilliyində zaman sıralarının statistik analizinin problemlərinin öyrənilməsində spektral yanaşmanın populyarlığına səbəb oldu.

Zaman sıralarının çoxölçülü S. a.-inin mühüm tətbiqi əhəmiyyəti $\zeta(t)$ prosesinə $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında baxıldığı halda aydın olur. Bu sahədə araşdırmalar aparan tədqiqatçılar, adətən, kross-spektrlərin öyrənilməsi ilə kifayətlənməyərək, kospekt və kvadratur spektrin, koherentliyin öyrənilməsinə böyük diqqət yetirirlər və bu da çoxsaylı ədəbiyyatda öz əksini tapa bilmişdir (bax, [10] – [15]).

Zamana görə yerindəyişmə üzrə ortalanma vasitəsilə alınan spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi metodları olduqca inkişaf etməyə başladı. Bu prosedura, ilk dəfə C. Tyuki (J. Tukey) tərəfindən təklif olunmuş və [15]-də ətraflı araşdırılır.

Əd.: [1] Grenander U., Rozenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, 2 ed., N. Y. – Stockh., [1966]; [2] Ж у р - бенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982.

SPEKTRAL AYRILIŞ(1) kovariasion matrisin « спектральное разложение ковариационной матрицы; spectral decomposition of covariance matrix » – bax, *Kovariasion matris*; spektral ayrılış.

SPEKTRAL AYRILIŞ(1) təsadüfi funksiyanın « спектральное разложение случайной функции; spectral decomposition / representation of random function » – 1) $X(t)$ təsadüfi funksiyanın ortoqonal ifadəsidir, yeni təsadüfi funksiyanın (o cümleden, təsadüfi prosesin və ya təsadüfi meydanın) sıraya və ya inteqralla xüsusi funksiyaların bu və ya digər sistemi üzrə ele ayrılışdır ki, bu ayrılışın əmsalları qarşılıqlı korrelyar olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Kompleksqiymətli $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyanın S. a.-lının geniş sinfi

$$X(t) = \int_{\Lambda} \varphi(t, \lambda) Z(d\lambda) \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilinir, burada Λ – «ölçülən altçoxluqların» sistemi (yeni ölçülən fəza) ilə verilən hər hansı çoxluqdur; $\varphi(t, \lambda)$, $t \in T$, $\lambda \in \Lambda$, – λ parametrlərindən asılı, T -də kompleksqiymətli funksiyaların sistemidir; $Z(d\lambda)$ – qeyri – korrelyar qiymətləri, Λ -da təyin olunmuş təsadüfi ölçüdür [odur ki, ixtiyari iki kəsişməyən ölçülən Δ_1 və Δ_2 altçoxluqları üçün

$\mathbf{M} Z(\Delta_1) \overline{Z(\Delta_2)} = 0$], (1)-in sağ tərəfindəki inteqral Koşi inteqral cəmlərinin uyğun ardıcılığının kvadratik orta mənada limiti kimi təyin olunur (bax, [1]) və ya daha ümumi « $Z(d\lambda)$ ölçüsü üzrə inteqral» kimi anlaşılmalıdır (bax, məs., [2]). Təsadüfi funksiyanın inteqral şəklində ifadəsi haqqında ümumi *Karunen teoremine* əsasən (bax, [1]), $X(t)$ təsadüfi funksiyanın (1) şəklində S. a.-nın varlığı üçün uyğun $B(t, s) = \mathbf{M} X(t) \overline{X(s)}$ korrelyasion funksiyanın

$$B(t, s) = \int_{\Lambda} \varphi(t, \lambda) \overline{\varphi(s, \lambda)} F(d\lambda)$$

şəklində ifadə oluna bilmesi zəruri və kafidir, burada $F(d\lambda) = \mathbf{M} |Z(d\lambda)|^2$, – Λ -da mənfi olmayan ölçüdür.

Təsadüfi funksiyanın S. a.-lının ən geniş yayılmış sinfi stasionar təsadüfi $X(t)$ proseslərinin

$$X(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad (2)$$

Furye – Stilyes inteqralı şəklində ifadə olunan sinfidir, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlı, λ parametrlərinin təsadüfi funksiyasıdır, Λ , t kəsilməz olduqda $(-\infty, \infty)$ oxu, diskret zamanlı proseslər halında $[-\pi, \pi]$ intervalıdır (t bu halda diskret qiymətlər alır). Belə S. a.-ın varlığı $B(s) = \mathbf{M} X(t+s) \overline{X(t)}$ korrelyasion funksiyanın inteqral ifadəsi haqqında ümumi Xinqin teoremindən alınır (bax, *Stasionar təsadüfi proses*); korrelyasion funksiyanın inteqral ifadəsindən aydın olur ki, ixtiyari stasionar təsadüfi prosese təsadüfi

fazaları və amplitudları müxtəlif tezliklərin bir-birilə qeyri – korrelyar, harmonik rəqslərinin üst-üstə gəlməsi kimi baxmaq olar. n – ölçülü yastı dalğalarla harmonik rəqslərin əvəzlənməsi n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında və ya $\mathbb{R}^n$ -in tamqiymətli koordinatları nöqtələrinin $\mathbb{Z}^n$ şəbəkəsində verilən bircins təsadüfi meydanlar üçün analoji şəkildə S. a. mümkündür. $\mathbf{M} X(\varphi) = m(\varphi)$ və $\mathbf{M} X(\varphi_1) \overline{X(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2)$ xarakteristikaları ixtiyari həqiqi a qiymətində $\varphi(t)$ funksiyanın $\varphi(t+a)$ funksiyanı əvəzlənməsinə nəzərən invariant olduğu halda, ümumiləşmiş stasionar proses [sonsuz differensiallanan finit $\varphi(t)$ funksiyanın fəzası D_{∞} -də $X(\varphi)$ xətti funksionalı] halında

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) dZ(\lambda) \quad (3)$$

olur, burada

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t) dt$$

$\varphi(t)$ funksiyanın Furye çevirməsidir. (3) düsturu

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(\lambda) \overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)} dF(\lambda)$$

ifadəsi əsasında alınır, burada $F(\lambda) = \mathbf{M} |Z(\lambda) - Z(-\infty)|^2$ – monoton azalmayan ele spektral funksiya, ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2)^{-p} dF(\lambda) < \infty$$

berəbersizliyi hər hansı mənfi olmayan p qiymətində ödənilir (bax, [3]). Əgər $\varphi(t)$ funksiyanın fəzası kimi tam analitik funksiyanın hər hansı fəzası götürülərsə, onda spektral funksiya eksponensial artan $F(\lambda)$ olan ümumiləşmiş stasionar təsadüfi $X(\varphi)$ proseslərini almaq olur (bax, məs., [4]). G qruplarında və bircins S fəzalarında bircins təsadüfi meydanlar üçün də xüsusi şəkili S. a.-lar vardır; bu fakt, ortoqonal ifadə haqqında Karunen teoremine əsasən, G və S çoxluqlarında müsbət müəyyən funksiyaların (və ya nüvələrin – iki dəyişənli funksiyaların) ümumi şəkli haqqında alınan bir sıra nəticələrdən alınır. Məs., ixtiyari lokal kompakt kommutativ G qrupunda bircins $X(g)$ meydanı üçün $X(g)$ meydanının S. a. (1) şəklində ifadə olunur, burada $\varphi(t, \lambda)$ funksiyası rolunu G qrupunun $\chi^{\lambda}(g)$ xarakteri oynayır, inteqrallama oblastı Λ isə $\hat{G}$ -nin xarakterlərinin uyğun qrupu olur (bax, [5], [6]). Daha mürəkkəb şəkili S. a.-lar, geniş şərtlərlə, qeyri – kommutativ müsbət qruplarda bircins meydanlar üçün də vardır (bax, [5], [7]). Bircins $S = \{s\}$ fəzalarında bircins meydanlar halında $X(s)$ meydanının S. a.-na S fəzasının sferik funksiyaları da daxil olunur, $B(s_1, s_2) = \mathbf{M} X(s_1) \overline{X(s_2)}$ korrelyasion funksiyanın ifadəsinə isə uyğun zonal sferik funksiyalar daxil olur (bax, [5].

[7], [8]). Məs., üçölçülü $\mathbb{R}^3$ fazasının S_2 sferasında $X(\theta, \varphi)$ ümumi bircins meydanının S. a.

$$X(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) Z_{l,m} \quad (4)$$

şəklində ifadə olunur, burada $Y_{l,m}(\theta, \varphi) = e^{-im\varphi} P_l^m(\cos \theta)$ – adi sferik funksiyalardır, $Z_{l,m}$ təsadüfi funksiyalar isə $\mathbf{M} Z_{l,m} \overline{Z_{l,n}} = \delta_{mn} f_l$ şərtini ödəyirlər, burada δ_{ij} – Kroneker simvoludur.

$$\mathbf{M} X(\theta_1, \varphi_1) \overline{X(\theta_2, \varphi_2)} = B(\theta_{12})$$

korrelyasion funksiyasının (4) düsturuna uyğun ifadəsi

$$B(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [(2l+1)/2] f_l P_l(\cos \theta)$$

düsturu şəklindədir, burada θ_{12} , – (θ_1, φ_1) və (θ_2, φ_2) nöqtələri arasında bucaq məsafəsi, P_l – Lejandr çoxhədliləridir. Əgər (r, φ) polyar koordinatlar, $X(r, \varphi)$ $\mathbb{R}^2$ müstəvisində bircins və izotrop meydan olarsa [belə ki, r_{12} , – (r_1, φ_1) və (r_2, φ_2) nöqtələri arasında Evklid məsafəsi olduqda, $\mathbf{M} X(r_1, \varphi_1) \overline{X(r_2, \varphi_2)} = B(r_{12})$], $X(r, \varphi)$ meydanının S. a.

$$X(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) dZ_k(\lambda) \quad (5)$$

şəklində olur, burada $J_k(x)$, – k tərtib Bessel funksiyasıdır. $Z_k(\lambda)$ isə qeyri – korrelyar artımları ilə təsadüfi funksiyalardır ki,

$$\mathbf{M} Z_k(\Delta_1) \overline{Z_m(\Delta_2)} = \delta_{km} F(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

burada

$$Z_k(\Delta) = \int_{\Delta} dZ_k(\lambda)$$

$[0, \infty)$ yarımxunda mənfə olmayan ölçüdür. (5) S. a.-na $B(r)$ korrelyasion funksiyası üçün aşağıdakı ifadə uyğun olur:

$$B(r) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) dF(\lambda).$$

Bircins meydanların S. a.-na aid digər misallar da vardır (bax, [5] – [8]).

Təsadüfi funksiyaların S. a. yalnız stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi proseslər üçün mövcud deyildir. Məs., $X(t)$, – $a \leq t \leq b$ intervalında ixtiyari təsadüfi proses, onun korrelyasion funksiyası $B(t, s) = \mathbf{M} X(t) \overline{X(s)}$ hər iki arqumentinə görə kəsilməz olarsa, onda $X(t)$ prosesinin S. a.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \varphi_k(t) Z_k \quad (6)$$

şəklində ifadə olunur, burada $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ və λ_k , $k = 1, 2, \dots$ – nüvəsi $B(t, s)$ olan integral operatorunun uyğun olaraq, ortonormalanmış məxsusi funksiyaları və məxsusi qiymətləridir, $\mathbf{M} Z_j \overline{Z_k} = \delta_{jk}$. Sonlu intervalda verilən təsadüfi $X(t)$ prosesinin (6) şəklində S. a. təsadüfi vektorun baş komponentlərinə ayrılışına kontinual analoqdur, bu ayrılış çoxölçülü statistik analizdə tez-tez istifadə olunur. $X(t)$ -nin bu ayrılışı bir sıra müəlliflər tərəfindən alınmışdır və əksər hallarda *Karunen – Loev ayrılışı* adlanır. Bu növ S. a.-lar təbiiqədə, məs., avtomatik idarələmədə (bax, məs., [9]) və geofizikada (bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*) geniş istifadə olunur.

2) $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyasının S. a. – $\varphi(t; \lambda)$ funksiyalarının hər hansı standart tam sistemi üzrə – (1) şəklində ümumi ayrılış da anlaşılır. Adətən, belə S. a.-a kəsilməz zamanlı $X(t)$ təsadüfi prosesinə və $\varphi(t; \lambda) = e^{it\lambda}$ funksiyalarına təbiiqədə baxılır, belə ki, (1) bərabərliyi (2)-yə çevrilir. Bu halda $B(t, s) = \mathbf{M} X(t) \overline{X(s)}$ funksiyası

$$B(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda t - \mu s)} F(d\lambda \times d\mu) \quad (7)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $F(d\lambda \times d\mu)$, – (λ, μ) müstəvisində $F(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathbf{M} Z(\Delta_1) \overline{Z(\Delta_2)}$ münasibətilə verilən kompleksqiymətli ölçüdür. Əksinə, $B(t, s)$ -in (7) şəklində ifadə olunmasından S. a.-ın (2) şəklində ifadəsinin varlığı alınır (bax, məs., [10], [11]). $Z(\lambda)$ -nin artımlarının qeyri – korrelyarlığı heç də hökmən ödənilmədiyi hallarda, S. a.-ları (2) şəklində olan təsadüfi proseslər *harmoniklənən təsadüfi proseslər* adlanır; bu halda $F(d\lambda \times d\mu)$ kompleks ölçüsü $X(t)$ prosesinin spektral ölçüsü adlanır, onların spektral ölçüsü sıfıra bərabər olmayan, (λ, μ) müstəvisinin nöqtələri çoxluğu $\zeta(t)$ prosesinin spektri adlanır. Stasionar $X(t)$ təsadüfi prosesinin spektri $\lambda = \mu$ düz xəttində toplanmışdır. Hər hansı $T_0 > 0$ və ixtiyari tam m qiymətində

$$\mathbf{M} X(t + m T_0) = \mathbf{M} X(t),$$

$$\mathbf{M} X(t + m T_0) \overline{X(s + m T_0)} = \mathbf{M} X(t) \overline{X(s)}$$

xassəsinə malik olan periodik korrelyar təsadüfi proseslər, geniş şərtlərlə, harmoniklənən təsadüfi proseslər olur; belə proseslərin spektri $\lambda = \mu + 2\pi k/T_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ düz xətlərinin çoxluğunda toplanmışdır.

Əd.: [1] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. – Phys. I», 1947, № 37, p. 3–79; [2] Розанов Ю. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [3] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Ошотам А. Т., «Мем. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.», 1959, v. 13, № 2, p. 208–13; [5] Яглом А. М., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, Л., 1961, т. 1, Л., 1963, с. 250–73; [6] Яглом А. М., в кн.: Proceeding of the 4-th Berkeley symposium mathematical statistic and probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1961, p. 593–622; [7] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [8] Ядренко М. И., Спек-

тральная теория случайных полей. К., 1980; [9] Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [10] Лозв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [11] Рао М. М., в кн.: Handbook of statistic, v. 5, Amst., 1985, p. 279-310.

SPEKTRAL FUNKSIYA « спектральная функция; spectral function » – bax, *Spektral sıxlıq (ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL FUNKSIYA evolyusionar « спектральная функция эволюционирующая; evolutionary spectral function » – bax, *Evolyusionar spektral ifadə*.

SPEKTRAL FUNKSIYA kumulyativ « спектральная функция кумулянтная; cumulative spectral function » – bax, *Spektral semi-invariant*.

SPEKTRAL FUNKSIYA qarşılıqlı « спектральная функция взаимная; cross spectral function » – bax, *Spektral sıxlıq (ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL FUNKSIYA ortalalanmış « спектральная функция осредненная; averaged spectral function » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

SPEKTRAL FUNKSIYA(sı) sonsuz bölünən paylanmanın « спектральная функция безгранично делимого распределения; spectral function of a infinitely divisible distribution » – bax, *Sonsuz bölünən paylanma*.

SPEKTRAL FUNKSIYA; statistik qiymət « спектральная функция; оценка; estimator of a spectral function » – diskret zamanlı stasionar $\zeta(t)$, $t=0, \pm 1, \dots$ təsadüfi prosesinin müşahidə olunmuş $\zeta(1), \dots, \zeta(N)$ qiymətlərinin funksiyasıdır və $F(\lambda)$ spektral funksiyasının statistik qiyməti kimi istifadə olunur. $\zeta(t)$, $t=0, \pm 1, \dots$ stasionar təsadüfi prosesinin S. f.-nin statistik qiyməti kimi

$$F_N(\lambda) = \frac{2\pi}{N} \sum_{-\pi \leq 2\pi k/N \leq \pi} I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad (1)$$

düsturundan istifadə olunur, burada $I_N(x)$ – *periodoqramdır*. $F(\lambda)$ S. f.-nin hamarlığı üçün olduqca geniş şərtlərdə və ya $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma şərtlərində bu statistik qiymət asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymət olur.

(1) statistik qiyməti $J(A) = \int_{-\pi}^{\pi} A(x) dF(x)$ funksionalının statistik qiyməti –

$$F_N^* = \frac{2\pi}{N} \sum_{-\pi < 2\pi k/N < \pi} A\left(\frac{2\pi k}{N}\right) I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2)$$

statistikasının xüsusi halıdır. Məs., $A(x)$ funksiyası seçim uzunluğu N -dən asılı və λ nöqtəsi ətrafında toplanmış funksiya olarsa, $f(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiyməti (2) şəklində olur

(bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət).

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

SPEKTRAL FUNKSIYA(sı) təsadüfi matrisin « спектральная функция случайной матрицы; spectral function of a random matrix » – *təsadüfi matrisin* məxsusi qiymətlərinin $(-\infty, x)$ intervalından olan məxsusi qiymətləri sayına bərabər olan funksiyadır. Ξ_n – elementləri ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$ olan *simmetrik təsadüfi matris*, $F(x)$ –

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \text{ olduqda}$$

münasibətilə təyin olunan funksiya, λ_i , – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri olarsa,

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n F(\lambda_i - x)$$

ifadəsile verilən $\mu_n(x)$ *simmetrik təsadüfi* Ξ_n matrisinin normalanmış S. f. adlanır. $\mu_n(x)$ üçün limit teoremləri ya

$$\int (x - z)^{-1} d\mu_n(x) = n^{-1} \operatorname{tr} \|\Xi_n - zI\|^{-1}$$

– Stilyes çevirməsi (z – ixtiyari kompleks ədəd, $\operatorname{Im} z \neq 0$), yaxud

$$\int (1 + itx)^{-1} d\mu_n(x) = n^{-1} \operatorname{tr} \|I + it\Xi_n\|^{-1}$$

çevirməsi vasitəsilə isbat olunur. $\mu_n(x)$ funksiyasının stoxastik kəsilməzlik nöqtələri x_1 və x_2 -də Stilyes çevirməsi üçün çevirmə düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} P \{ \mu_n(x_2) - \mu_n(x_1) < u \} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \left\{ \pi^{-1} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Im} \xi_n(y + i\varepsilon) dy < u \right\}, \end{aligned}$$

burada $\xi_n(z) = \int (x - z)^{-1} d\mu_n(x)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

$\mu_n(x) \Rightarrow \mu(x)$ münasibəti $\mu_n(x)$ təsadüfi S. f.-lərinin sonluölçülü paylanmalarının $\mu(x)$ təsadüfi S. f.-nin sonluölçülü paylanmalarına zəif yığılmasını; $\mu_n(x) \simeq \mu(x)$ isə $\mu_n(x)$ təsadüfi S. f.-lərinin sonluölçülü paylanmalarının $\mu(x)$ təsadüfi S. f.-nin sonluölçülü paylanmalarına, $\mu(x)$ -in stoxastik kəsilməzlik nöqtələrində zəif yığılmasını ifadə etmiş olsun.

Əgər $\mu_n(x)$ normalanmış S. f.-lər ardıcılığı və $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n M \mu_n(h) = 0$, $\mu(x)$ isə hər hansı məhdud variational azalmayan təsadüfi funksiya olarsa, onda

$$\xi_n(z) \Rightarrow \xi(z), \operatorname{Im} z \neq 0, \xi(z) = \int (x - z)^{-1} d\mu(x)$$

şərtlərinin ödənilməsi $\mu_n(x) \simeq \mu(x)$ zəif yığılması üçün zəruri və kafidir.

Əgər n -in hər bir qiymətində $(\xi_n, \dots, \xi_m)$, $i=1, \dots, n$ vektorları asılı olmayan vektorlar, ξ_{ij} , $i, j=1, 2, \dots$ – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olarsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{tr} \|I + it \Xi_n\|^{-1} = m(t)$$

limiti mövcuddursa və $m(t)$ funksiyası sıfırdan kəsilməz olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(t) = \nu(x)$$

münasibəti təsadüfi olmayan $\nu(x)$ S. f.-nin hər bir kəsilməzlik nöqtəsində sanki yəqin ödənilir; $\nu(x)$ -in Stilyes çevirməsi

$$\int (1 + itx)^{-1} d\nu(x) = m(t)$$

funksiyasına bərabərdir.

Əgər n -in hər bir qiymətində $H_n = \|\xi_{sl} + i\eta_{sl}\|$ düzbucaqlı matrisinin vektor-sütunları asılı olmayan vektorlar olarsa, ξ_{ij} , η_{ij} , $i, j, n=1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni ehtimal fəzasında verilərsə ($s=1, \dots, m_n$, $l=1, \dots, n$ – sütunların sayı, m_n – sətirlərin sayıdır),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{tr} \|I + it H_n H_n^*\|^{-1} = a(t)$$

limiti mövcuddursa (burada $a(t)$ – sıfırdan kəsilməz funksiya,

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} m_n^2$ – yığılan sıradır), onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \alpha(x)$$

münasibəti təsadüfi olmayan $\alpha(x)$ S. f.-nin hər bir kəsilməzlik nöqtəsində sanki yəqin ödənilir və bu halda $\alpha(x)$ funksiyasının Stilyes çevirməsi

$$\int \frac{d\alpha(x)}{1 + itx} = a(t)$$

integralına bərabərdir.

Əgər $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ təsadüfi matrisinin təsadüfi elementləri ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j=1, \dots, n$, n -in hər bir qiymətində asılı olmayan və paylanma sıxlıqları p -yə bərabər təsadüfi elementlər olarsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{M} \mu_n(h) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, onda hər bir x üçün

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n(x) - \mathbf{M} \mu_n(x)) = 0$$

münasibəti ödənilir, burada

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mu_n(x) &= \\ &= n^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \det \|\Xi^{s-1} - Ix\| \det \|\Xi^s - Ix\|^{-1} < x \right\}. \end{aligned}$$

852 SPEKTRAL

$$\Xi^s = \left\| \xi_{ij} \right\|_{i,j=1}^s, \quad \det \Xi^0 = 1.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980; [2] Пастур Л. А., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 1, с. 1–64.

SPEKTRAL MOMENT « спектральный момент; spectral moment » – bax, *Spektral analiz(i)* təsadüfi proseslər və meydanların, *Spektral semi-invariant*.

SPEKTRAL MOMENT ÖLÇÜSÜ « спектральная моментная мера; spectral moment measure » – bax, *Spektral analiz(i)* təsadüfi proseslər və meydanların.

SPEKTRAL NƏZƏRİYYƏLƏR(i) qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin « спектральные теории нестационарных случайных процессов; spectral theories of nonstationary processes » – təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin ələ bölmələridir ki, qeyri – stasionar proseslərin bu və ya digər siniflərinin öyrənilməsi – proseslərin və onların korrelyasion funksiyalarının spektral ayrılışına və ya bu proseslərin ələ spektral xarakteristikalarından istifadəyə əsaslandırılır ki, bu xarakteristikalar, müəyyən dərəcədə, stasionar proseslərin spektral ölçü və sıxlıqlarına oxşar olsun. Təsadüfi əmsallı funksiyaların xüsusi sistemləri üzrə stoxastik inteqrallar və sıralar şəklində spektral ayrılış mümkün olan qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin S. n.-nə, məs., aşağıdakı nəzəriyyələr daxildir.

1) Harmoniklənən təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi – $T = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ və ya $T = \mathbb{Z} = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ olduqda

$$\zeta(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \quad t \in T \quad (1)$$

şəklində ifadə olunan $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi proseslərinin nəzəriyyəsidir, burada $T = \mathbb{R}$ olduqda, $\Lambda = \mathbb{R}$ və $T = \mathbb{Z}$ olduqda

$\Lambda = [-\pi, \pi]$, Z isə $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ Hilbert fəzasından qiymətlər alan, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında ikinci tərtib momentləri olan kompleksqiymətli kəmiyyətlərin Λ -da sonlu semi – variyasiyası olan, vektorqiymətli ölçüdür. Bu halda $\Delta, \Delta' \subset \Lambda$ Borel çoxluqlarının $F(\Delta, \Delta') = \mathbf{M} Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}$ additiv ölçüsünün də ($\zeta(t)$ prosesinin spektral ölçüsü adlanan) sonlu semi – variyasiyası vardır və

$$\mathbf{M} \zeta(t) \overline{\zeta(s)} = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} e^{i(\lambda t - \mu s)} F(d\lambda, d\mu).$$

Harmoniklənən proseslərin altıncı, geniş mənada sanki stasionar proseslərdir, yəni ələ $\zeta(t)$, $t \in T$, $\mathbf{M} |\zeta(t)|^2 < \infty$ [$T = \mathbb{R}$ olduqda $B_{\zeta}(t, s) = \mathbf{M} \zeta(t) \overline{\zeta(s)}$ funksiyasının kəsilməz olduğu fərz olunur] prosesləridir ki, bunlar üçün ələ $K_{\zeta} \geq 1$ vardır ki, bütün natural m ədədləri və $c_1, c_2, \dots, c_m$ və $s, t_1, t_2, \dots, t_m \in T$ ədədləri üçün

$$\mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^m c_j \zeta(t_j + s) \right|^2 \leq K_{\zeta} \mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^m c_j \zeta(t_j) \right|^2$$

münasibəti ödənilir.

2) Hər hansı n tərtib stasionar artımlı təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, yəni elə qeyri – stasionar $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ proseslərinin ki, bunların n -ci tərtib fərqi

$$\Delta_r^{(n)} \zeta(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \zeta(t - k\tau)$$

– τ parametrindən asılı, t arqumentinin geniş mənada stasionar prosesidir (bax, [3], [4]). Bu halda

$$\Delta_r^{(n)} \zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (1 - e^{-i\lambda\tau})^n \frac{(1 + i\lambda)^n}{(i\lambda)^n} Z(d\lambda)$$

düsturu doğrudur, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçü, $\zeta(t)$ prosesinin özü isə $\Delta_r^{(n)} \zeta(\tau)$ üzrə təsadüfi əmsallı, $(n-1)$ tərtib çoxhədli dəqiqliyi ilə təyin olunur.

3) Kvadratik orta mənada kəsilməz təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi. Bu nəzəriyyədə elə $\zeta(t)$, $a \leq t \leq b$ təsadüfi proseslərinə baxılır ki, bunlar üçün

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) Z_k$$

Karunen – Loev ayrılığı mümkün olsun, burada φ_k , $k = 1, 2, \dots$, – λ_k məxsusi ədədlərinə uyğun, nüvəsi $B_\zeta(t, s)$ olan integral

operatorun məxsusi funksiyaları, Z_k , – $\mathbf{M}[Z_k]^2 = \lambda_k$ şərtini ödəyən ortoqonal təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır (bax, [5]).

4) Qeyri – stasionar xətti ifadə olunan təsadüfi proseslərin bir sıra siniflərinin nəzəriyyəsi. Bu proseslər aşağıdakı kimi təyin olunur. $\zeta(t)$, $t \in T$ qeyri – stasionar proses, $T = [0, \infty)$ və ya $T = \mathbb{R}$, $\mathbf{M}[\zeta(t)]^2 < \infty$, A – prosesin qiymətlərinin kvadratik orta mənada qapalı xətti örtüyü kimi təyin olunan H_ζ Hilbert fəzasında xətti operator olsun. Onda

$$\zeta(t) = e^{itA} \zeta(0), \quad t \in T \quad (2)$$

şəklində ifadə olunan proseslər qeyri – stasionar xətti ifadə olunan təsadüfi proseslərdir. A operatorunun spektri (2) prosesinin spektri adlanır,

$$r_\zeta = \dim \left[\left(\frac{A - A^*}{2i} \right) H_\zeta \right]$$

kəmiyyətinə prosesin qeyri – stasionarlıq rəngi deyilir. Bütün $Y \in H_\zeta$ üçün $\text{Im} \{ \mathbf{M}[(AY)\bar{Y}] \} \geq 0$ şərtini ödəyən, dissipativ operatoru A olan, (2) şəklində proseslərin bəzi siniflərinin spektral ayrılıqları məlumdur (bax, [6], [7]).

5) Harmonikləşən α – dayanıqlı proseslər nəzəriyyəsi. Bu proseslər (1) bərabərliyi ilə təyin olunur və burada Z , – Λ -nın kəsişməyən Borel çoxluqlarında qiymətləri asılı olmayan elə kompleksqiymətli təsadüfi ölçüdür ki, onun sonluölçülülüyü paylanmaları çoxölçülülüyü simmetrik α – dayanıqlı paylanmalardır, $1 < \alpha \leq 2$ (bax, [8], [9]). Belə proseslər öyrənilərkən, spesifik korrelyasiya nəzəriyyə – kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər anlayışlarının birlikdə baxılmasına əsaslanan nəzəriyyə istifadə olunur.

6) Ossilyar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi.

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} A(t, \lambda) Z(d\lambda)$$

şəklində evolyusionar spektral ayrılığı mümkün olan təsadüfi proseslər nəzəriyyəsidir, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçüdür,

$$\mathbf{M}[Z(d\lambda)]^2 = G(d\lambda), \quad G(\mathbb{R}) < \infty \quad \text{və}$$

$$A(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} d_\theta H_\lambda(\theta),$$

$|d_\theta H_\lambda(\theta)|$ -nin hər bir λ üçün $\theta = 0$ nöqtəsində maksimumu vardır (bax, [10], [11]). $\zeta(t)$ prosesinin $\{e^{i\lambda t} A(t, \lambda)\}$ funksiyalar ailəsinə nəzərən evolyusionar spektral ölçüsü $F_t(d\lambda)$

$$F_t(d\lambda) = |A(t, \lambda)|^2 G(d\lambda)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

7) İkiqat stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi. Bunlar elə $\zeta(t)$, $t \in T$ [$T = [0, \infty)$ və ya $T = \{0, 1, 2, \dots\}$] proseslərdir ki, bütün $s, t \in T$ qiymətlərində

$$B_\zeta(s) = \mathbf{M} \zeta(t \oplus s) \bar{\zeta}(t)$$

funksiyası t -dən asılı deyildir, $\oplus$ simvolu T -dən olan ədədlərin ikiqat toplanması əməlidir (bax, [12], [13]). Məs., əgər diskret zamanlı $\zeta(t)$ prosesi üçün hər bir ikilik rəşional $\rho \in (0, 1)$ qiymətində

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{s=0}^{2n-1} B_\zeta(s) \psi_s(\rho - 0) = 0$$

münasibəti ödənilərsə (ψ_s Uolş funksiyalarıdır), onda

$$\zeta(t) = \int_0^1 \psi_t(\lambda) Z(d\lambda)$$

ayrılığı doğrudur, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçüdür.

8) Normal tip proseslər nəzəriyyəsi. Bu tip proseslər üçün $\zeta(t)$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin yerindəyişmə operatorları V_s , H_ζ -də normal operatorlardır və $V_s \zeta(t) = \zeta(t+s)$ bərabərliyi ilə təyin olunur və $\mathbf{M}[\zeta(t)]^2 < \infty$ (bax, [14], [15]). Məs., kvadratik orta mənada kəsilməz, normal tip $\zeta(t)$, $t \in [0, \infty)$ prosesi üçün

$$\zeta(t) = \int_{\Gamma} e^{\lambda t} Z(d\lambda)$$

$$B_\zeta(t, s) = \int_{\Gamma} e^{\lambda t + \bar{\lambda} s} F(d\lambda)$$

ayrılıqları doğrudur, burada Z – kompleks müstəvidə Borel çoxluqlarında daşıyıcısı Γ olan ortoqonal təsadüfi ölçü və $F(d\lambda) = \mathbf{M}[Z(d\lambda)]^2$, – $\zeta(t)$ prosesinin spektral ölçüsüdür.

Təsədüfi proseslər nəzəriyyəsinin tətbiqlərində qeyri – stasionar $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{M}[\zeta(t)]^2 < \infty$ təsadüfi prosesinin ümumi – ləşmiş spektral sıxlığı – $\psi_{\zeta}(\lambda, \mu)$, tezlik – zaman spektral sıxlığı – $\varphi_{\zeta}(t, \lambda)$, ani spektral sıxlığı – $\rho_{\zeta}(t, \lambda)$, fiziki spektral sıxlığı – $S_{\zeta}(t, \lambda, \omega)$ kimi spektral xarakteristikalar da istifadə olunur, bunlar uyğun olaraq, aşağıdakı bərabərliklərlə təyin edilir:

$$\psi_{\zeta}(\lambda, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\zeta}(\tau, s) e^{i(\lambda\tau - \mu s)} d\tau ds,$$

$$\varphi_{\zeta}(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\zeta}(t - \tau/2, t + \tau/2) e^{-i\lambda\tau} d\tau,$$

$$\rho_{\zeta}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \left| \int_{-\infty}^t \zeta(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right|^2,$$

$$S_{\zeta}(t, \lambda, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{M} \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) \zeta(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right|^2, \quad (3)$$

bu şərtlə ki, bu bərabərliklərin sağ tərəflərindəki ifadələr vardır [(3)-də fərz olunur ki, $w(t)$, $t \in \mathbb{R}$ həqiqi funksiyadır ki,

$w(0) > 0$ və $\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t) dt = 1$ şərtlərini ödəyir]; digər spektral

xarakteristikalardan da istifadə olunur (bax, məs., [11], [16] – [21]).

Ortalanmış korrelyasion funksiyası –

$$\tilde{B}_{\zeta}(s) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} B_{\zeta}(t + s, t) dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

kəsilməz olan $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{M}[\zeta(t)]^2 < \infty$ təsadüfi prosesləri

üçün $\tilde{B}_{\zeta}(s)$ ilə

$$\tilde{B}_{\zeta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} d\tilde{F}(\lambda)$$

münasibətilə bağlı *ortalalmış spektral funksiya* $\tilde{F}(\lambda)$ spektral xarakteristikadır.

Əd.: [1] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [2] Мияме А. Г., Salehi H., «Indiana Univ. Math. J.», 1978, v. 27, № 1, p. 37–50; [3] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141–96; [4] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, с. 319–44; [5] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [6] Лившиц М. С., Янцевич А. А., Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Хар., 1971; [7] Кирчев К., «Сердика. Бълг. Мат. списания», 1975, т. 1, № 2, с. 199–217; [8] Weron A., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1080, p. 306–64; [9] Pourahmadi M., «SIAM J. Appl. Math.», 1984, v. 44, № 5, p. 1023–30; [10] Priestley M. B., «J. Roy. Statist. Soc., ser. B», 1965, v. 27, № 2, p. 204–37; [11] Priestley M. B., Spectral analysis and time series, v. 1–2, L., 1981; [12] Nagai T., «Bull.

Math. Statist.», 1976, v. 17, p. 65–73; [13] Engels W., Spletts-tosser W., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1982, v. IT28, № 4, p. 612–19; [14] Gettoor R., «Duke Math. J.», 1956, v. 23, № 1, p. 175–87; [15] Tjøstheim D., «Stoch. Proc. and Appl.», 1980, v. 10, № 2, p. 145–60; [16] Silverman R. A., «IRE Trans. Inform. Theory», 1957, v. IT 3, № 3, p. 182–87; [17] Loynes R. M., «J. Roy. Statist. Soc., ser. B», 1968, v. 30, № 1, p. 1–30; [18] Бендат Д., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [19] Bendat J. S., Piersol A. G., Random data. Analysis and measurement procedures, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1986; [20] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [21] Рытов С. М., Случайные процессы, 2 изд., М., 1976 (Введение в статистическую радиофизику, ч.1).

SPEKTRAL ÖLÇÜ « спектральная мера; spectral measure » – bax, *Martin sərhədi. Spektral ayrılış.*

SPEKTRAL PƏNCƏRƏ (si) « спектральное окно; spectral window » spektral sıxlığın statistik qiymətinin – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin

spektral sıxlığı $f(\lambda)$ -nın prosesin müşahidələri üzrə qurulmuş *periodoqramın* hamarlanması vasitəsilə qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində istifadə olunan, çəki funksiyası təyin edən dairəvi λ tezliyinin funksiyasıdır. Adətən, spektral sıxlığın λ_0

nöqtəsində statistik qiyməti kimi λ nöqtəsində periodoqramın $B_N A(B_N(\lambda - \lambda_0))$ tipli ifadəsinə hasilinin $d\lambda$ üzrə inteqralı

götürülür, burada $A(\lambda)$, $-\lambda = 0$ qiymətində ən böyük qiymətini alan ele qeyd olunmuş tezlik funksiyasıdır ki, onun bütün λ qiymətləri üzrə inteqralı vahidə bərabərdir [mehaz bu $A(\lambda)$ funksiyası spektral pəncərə adlanır, bununla yanaşı, bu termin $B_N A(B_N(\lambda))$ funksiyasına da şamil olunur], B_N^{-1} – seçimin ölçüsü N -dən asılıdır [yəni $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyasının müşahidə olunan parçasının uzunluğundan] və $N \rightarrow \infty$

olduqda sıfıra yaxınlaşan (N^{-1} -dən asta sürətlə) S. p.-nin enidir. Diskret zaman halında, $-\pi \leq \lambda < \pi$ S. p.-nin Furiye əmsalları olduqda, S. p.-nin Furiye çevirməsi spektral sıxlığın statistik qiymətinin korrelyasion pəncərəsi adlanır; t -nin diskret və ya kəsilməz olmasından asılı olaraq, korrelyasion pəncərə uyğun olaraq diskret və ya kəsilməz argumentin çəki funksiyasını təyin edir və bu çəki funksiyasını isə seçim üzrə qurulmuş empirik avtokorrelyasiyalara vurmaq lazımdır ki, alınan hasilin Furiye çevirməsi spektral sıxlığın tövsiyyə olunan statistik qiyməti ilə üst-üstə düşsün.

Bax, *Spektral sıxlıq; qeyri-parametrik statistik qiymət.*

Əd.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Брилл и н д ж е р Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [4] Марпл С. Л., Цифровой спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., М., 1990.

SPEKTRAL SEMİ – INVARIANT « спектральный семинвариант; spectral semiinvariant » – təsadüfi proseslər və meydanların *spektral analizində* öyrənilən, *təsədüfi prosesin* xarakteristikalarından biridir. $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$,

– $\mathbf{M}[\zeta(t)]^n \leq C < \infty$ şərtini ödəyən həqiqi stasionar proses olsun. Bu prosesin semi – invariantı –

$$S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \frac{i^{-n} \partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \ln \mathbf{M} e^{i(u_1 \zeta(t_1) + \dots + u_n \zeta(t_n))} \Big|_{u_1 = \dots = u_n} = 0$$

$M^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{M}\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ momentləri ilə

$$S^{(n)}(I) = \sum (-1)^{q-1} (q-1)! \prod_{p=1}^q M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(n)}(I) = \sum \prod_{p=1}^q S^{(p)}(I_p),$$

münasibətlərlə bağlıdır, burada $I = (t_1, \dots, t_n)$, $I_p = (t_{i_1}, \dots, t_{i_p}) \subseteq (t_1, \dots, t_n) = I$ və cəmlənmə I çoxluğunun bir-birilə kəsişməyən I_p altçoxluqlarına bölgüsü üzrə aparılır. Əgər bütün $1 \leq k \leq n$ üçün $\mathbb{R}^k$ fazasında məhdud variasiyalı elə $M^{(k)}(\Delta)$ ölçüsü varsa ki, bütün $t_1, \dots, t_k$ üçün

$$\begin{aligned} M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t_1 \lambda_1 + \dots + t_k \lambda_k)} M^{(k)}(d\lambda_1, \dots, d\lambda_k) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t, \lambda)} M^{(k)}(d\lambda) \end{aligned}$$

olsun, onda $\zeta(t) \in \Phi^{(n)}$. $M^{(k)}(\Delta)$ ölçüsü $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral momenti adlanır. Bu ölçünün sıxlığını yalnız ümumiləşmiş funksiya kimi təyin etmək olar.

Əgər Borel çoxluqlar sisteminde təyin olunmuş $F^{(n)}$ ölçüsü üçün

$$S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t, \lambda)} F^{(n)}(d\lambda)$$

integralı bütün $t_1, \dots, t_n$ üçün mövcud olarsa, $F^{(n)}$ ölçüsü spektral semi-invariant (polispektr, kumulyativ spektr) adlanır. Əgər $\zeta(t) \in \Phi^{(n)}$ olarsa, $F^{(n)}$ ölçüsü vardır və məhdud variasiyaya malikdir. $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi proses olarsa, $S^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ semi-invariantları yerindəyişmələrə görə invariantdır, yəni

$$S^{(n)}(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = S^{(n)}(t_1, \dots, t_n),$$

$F^{(n)}$ və $M^{(n)}$ spektral ölçüləri isə $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında toplanmışlar. Əgər $F^{(n)}$ ölçüsü bu çoxobrazlıda Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz olarsa, onda bütün $t_1, \dots, t_n$ üçün

$$\begin{aligned} S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(i \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \right) \delta(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda \end{aligned}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, n -ci tərtib semiinvariant spektral sıxlıq (polispektral sıxlıq, kumulyativ spektral sıxlıq) – $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vardır, burada $\delta(x)$ delta – funksiyadır,

$$f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum^* S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \right\},$$

$\sum^*$ -da cəmlənmə $t_1, \dots, t_n$ üzrə aparılır, $\min_i t_i = 0$.

$\zeta(t)$ prosesinin olduqca geniş qanşma şərtlərində $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ semi-invariant spektral sıxlığı $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında özünün bütün dəyişmələrinin kəsilməz məhdud funksiyasıdır.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin ilk pn ($p > 2$) momentləri varsa və Rozenblatt qanşma əmsali

$$\alpha(r) = \sup_{x, A \in \mathfrak{A}_{-\infty}^t, B \in \mathfrak{A}_{t+r}^\infty} |P(AB) - P(A)P(B)|$$

bərabərliyi ilə ifadə olunarsa, $f_n(\cdot)$ -in qanşıq törəməsi məhduddur, yəni

$$\left| \frac{\partial^s f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{s_1} \dots \partial \lambda_n^{s_n}} \right| \leq C, \quad s_1 + \dots + s_n = s, \quad s_i \geq 0,$$

burada $\mathfrak{A}_a^b$, $\zeta(t)$, $t \in [a, b]$ prosesinin doğurduğu σ – cəbri

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^{n+s-1} \alpha^{(p-2)/p}(r) < \infty$$

şərtini ödəyir.

$$M^{(n)}(t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \int_{\Pi^n} g_n(\bar{\lambda}) \exp \left(i \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \right) \delta(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) d\bar{\lambda}$$

münasibətindən formal təyin olunan, $M^{(n)}(\Delta)$ ölçüsünün moment spektral sıxlığı $g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında ümumiləşmiş funksiyadır və $F^{(n)}(\Delta)$ ölçüsünün semi-invariant spektral sıxlığı ilə

$$\begin{aligned} f(\bar{\lambda}) \delta(|\bar{\lambda}|) &= \\ &= \sum_p (-1)^{k-1} (k-1)! g(\bar{\lambda}_1) \delta(|\bar{\lambda}_1|) \dots g(\bar{\lambda}_p) \delta(|\bar{\lambda}_p|), \end{aligned}$$

$$g(\bar{\lambda}) \delta(|\bar{\lambda}|) = \sum_p f(\bar{\lambda}_1) \delta(|\bar{\lambda}_1|) \dots f(\bar{\lambda}_p) \delta(|\bar{\lambda}_p|)$$

münasibətlərlə bağlıdır, burada cəmlənmə $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ çoxluğunun nizamlanmamış, kəsişməyən $\bar{\lambda}_p = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p})$, $1 \leq i_k \leq n$, $k=1, \dots, p$ toplularının bütün nizamlanmamış bölgüləri üzrə aparılır, $|\bar{\lambda}_p| = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p}$. $n=2$ olduqda, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ düz xəttində $f_2(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$ moment sıxlığı ilə üst-üstə düşən 2-ci tərtib spektral semi-invariant sıxlıq, sadəcə, 2-ci tərtib spektral sıxlıq adlanır.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ikiölçülü müstəvidə 3-cü tərtib spektral semi – invariant sıxlıq bispektral sıxlıq, bu sıxlığın uyğun ölçüsü bispektral funksiya adlanır.

Diskret zaman halında $\mathbb{R}^n$ fəzası kimi aşağıdakı bütün düsturlarda n – ölçülü $-\pi \leq \lambda_i \leq \pi$, $i = 1, \dots, n$ kubu anlaşılmalıdır.

δ – funksiya isə Dirak «təpəsi» $\delta^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi k)$

ilə əvəz olunmalıdır.

$\zeta(t)$ Gauss prosesi olduqda 2-ci tərtibdən yüksək bütün S. s.-lar sıfıra bərabərdir.

Semi – invariant spektral $\hat{f}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sıxlığının asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymətini $|\bar{\lambda}| = 0$ müstəvisinin $(\lambda_j - 2\pi k_j/N)$, $j = 1, \dots, n$ nöqtələrində hesablanmış $I_N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ periodqramının qiymətlərinin ortalanması ilə almaq olar, bu şərtlə ki, qeyd olunan nöqtələrin heç biri $|\bar{\lambda}_p| = 0$ müstəvisinin dim. – ölçüsündən kiçik dim. – ölçülü müstəvidən olmamalıdır. Ortalama $\bar{\lambda}$ nöqtəsində toparlanan çəki funksiyası $\Phi_N(\bar{x} - \bar{\lambda})$ vasitəsilə aparılır (2-ci tərtib spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində olduğu kimi). $\hat{f}_N(\bar{\lambda})$ semi – invariant sıxlığının statistik qiymətini zaman sırasının M sayda yerindəyişmiş parçalarda ($N = MT$) hesablanmış $I_M(\bar{\lambda})$ periodqramının qiymətlərinin ortalanması ilə almaq olur.

n -ci tərtibə qədər və n -ci tərtib də daxil olmaqla semi – invariant spektral sıxlıqlar differensiallanan olarsa,

$$\mathbf{M} \hat{f}_N(\bar{\lambda}) = \left(\frac{M}{2\pi} \right)^{m-1} \sum_{k=1}^m \prod_{j=1}^m f(\bar{\lambda}_k) + O(M^{m-2} \ln^{n-1} M)$$

düsturu doğrudur, burada cəmlənmə $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_m$ şəklində bütün $\bar{\lambda}$ bölgüləri üzrə aparılır; $\bar{\lambda}_k$ vektorlarının hər biri üçün onun sıfırdan fərqli koordinatlarının cəmi $\sum_j \lambda_j^{(k)} = 0$. Belə

minimal m ədədi $\bar{\lambda}$ vektorunun xarakteristikası adlanır. $\hat{f}_N(\bar{\lambda})$ statistikasi yalnız $m = 1$ halında asimptotik meylsiz statistika olur. $n = 2$ dim. – ölçülü S. s. üçün bu şərt avtomatik ödənilir. $n > 2$ olduqda asimptotik meylsizlik yalnız esas $\sum_j \zeta_j = 0$ hipermüstəvisinə aid olan, bu dim. – ölçüden

kiçik dim. – ölçülü müstəvilərə aid olmayan $\bar{\lambda}$ nöqtələri üçün ödənilir. [3] və [4]-də argumentin bütün qiymətlərində tutarlı statistik qiymətlər alınmışdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [3] Журбенко И. Г., Анализ стационарных и случайных систем, М., 1987; [4] Time series in the frequency domain, Amst., – [a. o.], 1983; [5] Subba Rao T., Gabr M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, N. Y., – [a. o.], 1984.

856 SPEKTRAL

SPEKTRAL SIXLIQ kumulyativ «спектральная плотность» кумулятивная; cumulative spectral density – bax, *Spektral semi-invariant*.

SPEKTRAL SIXLIQ qarşılıqlı «спектральная плотность» взаимная; cross spectral density – bax, *Spektral sıxlıq(ğı)* stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL SIXLIQ; qeyri – parametrik statistik qiymət «спектральная плотность»; непараметрическая оценка; non-parametric estimator of spectral density – diskret zamanlı stasionar təsadüfi prosesin müşahidə qiymətləri – $X(1), \dots, X(N)$ toplusunun funksiyasıdır, prosesin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ -nın statistik qiyməti kimi istifadə olunur.

$X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ stasionar prosesinin S. s. $f(\lambda)$ -nın statistik qiyməti kimi ölçü vahidi baxımından $X(1), \dots, X(N)$ seçimi üzrə qurulmuş

$$\sum_{s,t=1}^N b_{s,t}^{(N)} X(s)X(t)$$

kvadratik formalarından istifadə olunur, burada $b_{s,t}^{(N)}$ – ixtiyari kompleks əmsallardır. $N \rightarrow \infty$ olduqda stasionar prosesin S. s.-nın ilk iki momenti asimptotik olaraq $b_{s_1,t_1}^{(N)} = b_{s_2,t_2}^{(N)}$, $s_1 - t_1 = s_2 - t_2$ şərtləri ödənilən kvadratik formaların altsiniflərinə baxıldıqda, ümumiyyətlə, pisləşmir və bu halda $f(\lambda)$ üçün aşağıdakı şəkildə statistik qiymətlər alınır:

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{i\lambda t} b^{(N)}(t) B_N(t),$$

burada

$$B_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-|t|} X(s)X(s+|t|)$$

– $X(t)$ stasionar prosesinin kovariasion funksiyasının seçimi statistik qiymətidir. $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiymətini

$$\hat{f}_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) I_N(x + \lambda) dx \quad (1)$$

düsturu ilə də ifadə etmək olar, burada $I_N(x)$ – periodqram, $\Phi_N(x)$ – hər hansı kəsilməz cüt funksiya olub, özünün Furiye əmsalları ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$b_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) e^{itx} dx, \quad t = -N+1, \dots, N-1.$$

Adətən, aşağıdakı şəkili $\Phi_N(x)$ funksiyalarına baxılır:

$$\Phi_N(x) = A_N \Phi(A_N x), \quad A_N \rightarrow \infty$$

və $\Phi(x)$ funksiyası spektral pəncərə adlandırılır və bu halda fərz olunur ki, $\Phi(x)$, $-\infty, \infty$ -da ehtə hər hansı kəsilməz funksiyadır ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1,$$

$A_N \rightarrow 0$ isə ehtimaldır ki, $A_N N^{-1} \rightarrow 0$ münasibətini ödəyir. Analoji olaraq,

$$b_N(t) = K(A_N^{-1}t)$$

şəklində $b_N(t)$ əmsallarına baxılır və $K(x)$ funksiyası kovariasion pəncərə, $b_N(t)$ funksiyası – gecikmə pəncərəsi adlanır. $K(x)$ və $\Phi(x)$ funksiyaları bir-birilə Furiye çevirməsi ilə əlaqədardır:

$$K(t) = \int \Phi(x) e^{itx} dx,$$

bunlar A_N əmsalları ilə birlikdə (1) statistikasını tamamilə təyin edirlər; bu statistika əksər hallarda periodogram və ya Qrenander–Rozenblatt tip statistika adlandırılır.

Praktikada, adətən, müəyyən formada kovariasion və spektral pəncərələr istifadə olunur:

Bartlett statistik qiyməti –

$$\Phi_B = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2,$$

$$K_B = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

Parzen statistik qiyməti –

$$\Phi_P(x) = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\sin x/4}{x/4} \right)^4,$$

$$K_P(t) = \begin{cases} 1 - 6|t| + 6|t|^3, & |t| \leq 1/2, \\ 2(1 - |t|)^3, & 1/2 \leq |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

Tyuki–Henning statistik qiyməti –

$$\Phi_T(x) = \frac{\sin x}{2\pi x} \frac{\pi^2}{\pi^2 - x^2},$$

$$K_T(t) = \begin{cases} 2^{-1}(1 + \cos \pi t), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

müntəzəm spektral ortalanma statistik qiyməti –

$$\Phi_M(x) = \begin{cases} \pi^{-1}, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2, \end{cases}$$

$$K_M(t) = \frac{\sin \pi t/2}{\pi t/2}.$$

$\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ üstlü Hölder bərabərsizliyini qeyd olunmuş λ qiymətində ödəyən, spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan x prosesləri sinfində

$$\min_x \sup_x \mathbf{M}(\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda))^2 \quad (2)$$

kvadratik orta yayınmasını minimallaşdıran optimal spektral pəncərə axtarışı haqqında məsələnin həlli aşağıdakı şəkilli spektral pəncərənin alınması ilə nəticələnir:

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha+1}{2\alpha} |x|^\alpha + \frac{\alpha+1}{2\alpha}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

bu halda (2) ifadəsi asimptotik olaraq $C N^{-2\alpha/(1+2\alpha)}$ -ya bərabər olur.

Praktikada (1) statistikasının diskret analoqundan tez-tez istifadə olunur, bu halda λ nöqtəsi ətrafında $\Phi_N(x_k)$ çökələ ilə müxtəlif $x_k = 2\pi k/N$ qiymətlərində periodogramın $I_N(x_k)$ qiymətlərinin orta qiyməti qurulur və alınan statistika $\hat{f}_N(\lambda)$ -nın statistik qiyməti kimi istifadə olunur.

Müxtəlif k -lar üçün periodogramın $I_N(x_k)$ qiymətlərinin asimptotik qeyri – korrelyarlığından $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiymətinin dispersiyasının sıfıra yaxınlaşması alınır:

$$\mathbf{D}\hat{f}_N(\lambda) \sim \frac{2\pi}{N} f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N^2(x) dx, \quad (3)$$

$$N \rightarrow \infty, \lambda \neq 0 \bmod \pi,$$

lakin qeyd etmək lazımdır ki, $\mathbf{D}I_N(\lambda) \sim f^2(\lambda)$,

$\lambda \neq 0 \bmod \pi$, ümumiyyətlə, sıfıra yaxınlaşmır. $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının asimptotik meylsizliyi çəki funksiyaları $\Phi_N(x)$ -lərin (spektral pəncərələrin) sıfırda toplanması hesabına və $f(x)$ -in λ nöqtəsində kəsilməzliyinin fərz olunmasına görə alınır. Bu halda, A_N əmsallarının seçilməsi hesabına $\Phi_N(x)$ -lərin sıfırda toplanması sürətlə baş verdiyindən meyl azalır, lakin $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının dispersiyası artır.

S. s. $f(\lambda)$ -nın hamarlığı üzərində və ya $X(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma şərtlərinə olduqca zəif məhdudiyyətlər qoyulduqda spektral və ya kovariasion pəncərələrin geniş sinfi üçün $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiyməti asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymət olur. Çoxölçülü təsadüfi proses halında S. s. matrisinin elementləri $f_{kl}(\lambda)$ -lərin statistik qiymətlərinin qurulması üçün uyğun $I_N^{(k,l)}$ periodogramlarından istifadə olunur.

$X(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma əmsalının eksponensial azalma sürətilə Rozenblatt qarışma şərtlərində $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının orta qiyməti $f(\lambda)$ və dispersiya (3) ifadəs ilə təyin olunan asimptotik normal statistika olur. Bu nəticədən istifadə edərək, bu statistika üçün etibarlı intervallar almaq olur. Bir qədər daha məhdud şərtlərlə, $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının $L^2(-\pi, \pi)$ və $C(-\pi, \pi)$ metrikasında $f(\lambda)$ -ya yığılır, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Buna əsasən, apriori naməlum S. s. $f(\lambda)$ ilə hər hansı verilmiş $f_0(\lambda)$ -nın üst-üstə düşməsi haqqında hipotezi yoxlamaq olur.

Məs., $X(t)$ prosesinin S. s. $f_0(\lambda) = \text{const}$ olan bəyaz küylə üst-üstə düşməsi haqqında hipotezi yoxlamaq olar. Bu halda etibarlı sərhədlər ikiqat eksponentin paylanma qanunu əsasında tapılır.

Kvadratik orta yayınma asimptotikası nöqtəyi – nəzərdən periodogram statistikalarının sinfi – prosesin müşahidəsi nəticəsində alınan ixtiyari kvadratik formalar şəklində alınan bütün S. s. statistikaları arasında kafi statistikalar sinfidir. Praktiki istifadə olunan statistikaların ekseriyyəti konkret tətbiqi nöqtəyi – nəzərdən kvadratik orta yayınmanın olduqca yaxın qiymətlərini verir. Bununla belə, kvadratik orta yayınma, praktikada S. s. statistikaları üzərində qoyulan yeganə tələb deyildir. Çoxsaylı tətbiqlərdə, ən müxtəlif təbii proseslərin spektrlərinin qiymətləndirilməsində, spektrin güclü girintili-çıxıntılı (kəsik-kəsik) olması, gözcəcarpan dərəcəli zaman trendi, tezliklərin «yox olması», «axması» (rus. плавание), güclü qeyri – stasionar küylərlə olması və s. kimi hallara təsadüf olunur. Belə hallarda periodogram statistikalarından istifadə nəticəsində spektrdə maraqlı xüsusiyyətləri qiymətləndirdikdə, olduqca arzuolunmaz təhriflər, tezliklər üzrə spektrin azalma sürəti göstəricisinin doğru olmadığı statistik qiymət alınır. Belə arzuolunmaz effektlər, real spektrin qiymətləndirilməsində, uzaqlaşmış tezliklərdən zəif asılı spektrlərin qiymətləndirilməsində istifadə olunarkən olduqca azalır. Periodogram statistikalar belə asılılığın azalma sürətini CN^{-1} -dən yaxşı vermir və tezliklərin olduqca böyük parçasında «yaddaş» güclü kükrəntidən mühüm olaraq qoruyub saxlayır. Seçimi ardıcılığın kənarlar üzrə hamarlanması proseduru (zaman pəncərəsinin tətbiqi) uzaq tezliklərin olduqca azalmasına səbəb olur (ətraflı analiz [1], [2]-də verilmişdir). Bu prosedurun uzaqlaşmış tezliklərin təsirini olduqca zəiflətməsinə baxmayaraq, verilmiş uzunluqlu seçim halında dispersiyanın olduqca artmasına və o, bununla yanaşı, kvadratik orta yayınmanın da artmasına səbəb olur.

Zaman parçalarının kənarları üzrə dərin hamarlama tətbiq edib, bu tərzde zaman sırasının zaman üzrə yerindəyşmiş parçalarına görə hesablanmış modifikasiya olunmuş periodogramların orta qiymətlərinin təyin edilməsi ilə çox yaxşı nəticələr əlmaq olur. Polinomial hamarlama tətbiq edərək zaman üzrə yerindəyşməyə görə ortalanma uzaq tezliklərdən asılılıq dərəcəsi $\exp(-bN^\varepsilon)$ tərtib ($b > 0$, $\varepsilon > 0$) olan statistikaya gətirir və bu statistikanın kvadratik orta yayınması optimal yayınmaya son dərəcədə yaxın olur (bax, [4]).

Zaman üzrə yerindəyşmə ilə alınan S. s. ümumi halda aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\bar{f}_N(\lambda) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |W_M^L(\lambda)|^2, \quad (4)$$

burada $W_M^L(\lambda)$ – modifikasiya olunmuş

$$W_M^L(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_M(t-Q) e^{i\lambda t} X(t)$$

periodogramdır, L, M, T, N – tam qiymətli dəyişənlər olub, $N = (T-1)L + M + 1$, $4 \ll M \ll N$, $LT \sim N$ münasibətlərlə əlaqədirlər.

Mənfi olmayan $a_M(t)$, $t=0, \pm 1, \dots$ (zaman pəncərəsi, verilənlər pəncərəsi) $[0, M]$ parçasından kənarda sıfır bərabərdir; bu funksiya vasitəsilə

$$\varphi_M^Q(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_M(t-Q) e^{itx}$$

858 SPEKTRAL

statistikasının spektral nüvəsi təyin olunur və fərz olunur ki,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_M^Q(x)|^2 dx = 1.$$

Olduqca geniş fərziyyələrlə (4) statistikası asimptotik meylsiz, tutarlı, baş həddə malik dispersiyası

$$D\bar{f}_N(\lambda) \sim \frac{2\pi f^2(\lambda)}{N} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_M^Q(x)|^4 dx, \quad \lambda \neq 0 \bmod \pi$$

normal olan statistikadır.

Asimptotik normallıq şərtlərində dispersiyanın aşkar ifadəsi olması nəticəsində (4) statistikası üçün etibarlı sərhədləri asanlıqla müəyyənləşdirmək olur.

Bu statistikada uzaqlaşmış tezliklərdən son dərəcə zəif asılılıq və zaman üzrə yerindəyşmədən istifadə olunma kimi keyfiyyətlərin birləşməsi, digər tezliklərdə sıra üzərində məhdudiyyətlər qoyulmadığı halda, tezliklərin verilən zolağında sıranın stasionar olub-olmadığı və analizi üçün geniş imkanlar yaradır. Bu statistika EHM-dən istifadə ilə tətbiq üçün münasibdir, emeliyyatların ümumi sayının azalmasına səbəb olur, hesablamalar üçün zəruri yaddaş həcmi xüsusilə qənaətləndirir. Bu statistikadan real rejimə aparılan spektral statistik qiymətlər üçün istifadə etmək olur, o, spektrin bütün dəyişikliklərini analiz edir, EHM-da çoxsaylı tətbiqlərdə yaranan real prosesləri ətraflı öyrənməyə imkan yaradır.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Численный анализ в теории временных рядов, пер. с англ., М., 1981; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982; [5] Time series in the frequency domain, Amst. – [a. o.], 1983; [6] Priestley M., Spectral analysis and time series, v. 1-2, L. – [a. o.], 1981; [7] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, 2 ed., N. Y. – Stock., 1966.

SPEKTRAL SIXLIQ ortalanmış «спектральная плотность осредненная; averaged spectral density» – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq*.

SPEKTRAL SIXLIQ(ğı) n – ölçülü fəzada stasionar təsadüfi prosesin və ya bircins təsadüfi meydanın «спектральная плотность стационарного случайного процесса или однородного случайного поля в n -мерном пространстве; spectral density of a stationary random process or homogeneous random field in n -dimensional space» – *stasionar təsadüfi prosesin* (geniş mənada) və ya *bircins təsadüfi meydanın* (geniş mənada) kovariasion funksiyasının Furiye çevirməsidir. Kovariasion funksiyasının Furiye çevirməsi olan bu tip proses və meydanlar S. s.-li proses və ya meydanlar adlanırlar.

$\zeta(t) = \{\zeta_k(t)\}_{k=1, \dots, n}$ – n – ölçülü stasionar proses.

$$\zeta(t) = \int e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda), \quad \Phi = \{\Phi_k\}_{k=1, \dots, n}$$

– onun spektral ifadəsi olsun (Φ_k – çoxölçülü $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin k -cı komponenti $\zeta_k(t)$ -yə uyğun spektral təsadüfi ölçüdür, bax, *Stoxastik integral*). t diskret zaman dəyişəni olduqda, integral $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ sərhədlərində, t kəsilməz zaman dəyişəni olduğu halda $-\infty < t < \infty$ sərhədlərində götürülür. Əgər

$F = \{F_{kl}\}_{l=1, \dots, n}^{k=1, \dots, n}$ spektral ölçüsünün bütün elementləri, yeni

$$F_{kl}(\Delta) = \mathbf{M} \Phi_n(\Delta) \Phi_k(\Delta), \quad k, l = 1, \dots, n$$

funksiyaları mütləq kəsilməz olarsa və $f_{kl}(\lambda) = \frac{F_{kl}(d\lambda)}{d\lambda}$

olarsa, prosesin spektral sıxlığı vardır və o,

$$f(\lambda) = \{f_{kl} \}_{k,l=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n}$$

şəklində ifadə olunur. $f_{kk}(\lambda)$ elementi birölçülü $\zeta_k(t)$ prosesinin spektral sıxlığı, $f_{kl}(\lambda)$ – kross-spektral və ya qarşılıqlı spektral sıxlıq. F_{kl} $\zeta_k(t)$ və $\zeta_l(t)$ zaman sıralarının kross-spektral və ya qarşılıqlı spektral funksiyası adlanır.

$$F(x) = \int F(d\lambda)$$

matrisi $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası.

$$B(t) = \{B_{kl}(t)\}_{k,l=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n} = \{\mathbf{M} \zeta_k(t+s) \overline{\zeta_l(s)}\}_{k,l=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n}$$

matrisi $\zeta(t)$ prosesinin kovariasion funksiyası adlanır və $B(t)$ spektral ölçü ilə

$$B(t) = \int e^{i\lambda t} F(d\lambda)$$

münasibətlə ifadə olunur. Əgər $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ prosesi üçün

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |B_{kl}(t)| < \infty, \quad k, l = 1, \dots, n$$

münasibəti ödənilərsə, onda

$$\zeta(t) \text{ prosesinin S. s. vardır və}$$

$$f_{kl}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} B_{kl}(t) \exp\{-i\lambda t\},$$

$$-\infty < t < \infty, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Analoji münasibət kəsilməz zamanlı proseslər üçün də doğrudur. $f(\lambda)$ S. s. digər yüksək tərtib S. s.-lardan fərqli olaraq, bəzən ikinci tərtib spektral sıxlıq adlanır (bax, *Spektral semi-invariant*).

Birdən n – ölçülü $\zeta(t_1, \dots, t_n)$ təsadüfi meydanının S. s. $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ o halda vardır ki, onun spektral funksiyası

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ -nin qarışıq törəməsi } \frac{\partial^k F}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_k} \text{ sanki hər yerdə}$$

mövcud olsun və sanki hər yerdə $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ -ə bərabər olsun və

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \dots \int_{\lambda_0}^{\lambda_n} f(\mu_1, \dots, \mu_n) d\mu_1 \dots d\mu_n + \text{const}$$

şərtini ödəsin.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. 3 изд., М., 1987; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

SPEKTRAL TIPLƏR asılı olmayan «спектральные типы независимые; independent spectral types» – bax, *Sinqulyarlığı, ölçülərin*.

SPEKTRAL TIPLƏR dizyunkt «спектральные типы дизъюнктные; disjoint spectral types» – bax, *Sinqulyarlığı, ölçülərin*.

SPEKTRAL TIPLƏR(i) ölçünün «спектральные типы меры; spectral types of a measure» – bax, *Mütləq kəsilməzliyi, ölçülərin, Ekvivalent ölçülər*.

SPEKTROGRAM «спектрограмма; spectrogram» – $S(\omega) = \mathbf{I}(1/\omega)$ funksiyasıdır, $\mathbf{I}(\lambda)$ – periodogram,

$\lambda = 1/\omega$ – dalğa uzunluğu, ω – tezlikdir. Ədəbiyyatda «S.» və «periodogram» terminləri qarşılıqlı əvəz olunurlar.

SPEŞİFİK FAKTOR «специфический фактор; specific factor» – bax, *Faktor analiz*.

SPEYSİNG «спейсинг; spacing» – simmetrik təsadüfi matrisin iki qonşu məxsusi λ_i , λ_{i+1} qiymətləri arasında məsafədir. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, – n tərtib Ξ_n simmetrik təsadüfi matrisinin məxsusi qiymətləri olsun. Belə matrisin S.-i üçün

$$\lambda_n(x) = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{M} F(\lambda_i - \lambda_{i+1} - x)$$

spektral funksiyasına baxılır, burada $y < 0$ olduqda $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda isə $F(y) = 0$. Əgər Ξ_n elə matrisdirsə ki, λ_i təsadüfi funksiyalarının paylanma sıxlığı $p(x_1, \dots, x_n)$, $x_1 > \dots > x_n$ vardır və $|p|$ funksiyası simmetrikdir, yəni dəyişənlərin eyni zamanda yer dəyişmələrində dəyişmərsə, onda

$$\lambda_n(x) = (n-1)^{-1} \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \rho(u, v) \right]_{u=y, v=z+y} dy dz,$$

burada $\rho(u, v)$, – λ_i məxsusi qiymətlərinin (u, v) intervalından kənarda yerləşməsi ehtimalıdır.

Bax, *Nişənlənmiş nöqtəvi proses*.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106; [2] М е т т а М. Л., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. – L., 1967.

SPIRMƏN ƏMSALI rəng korrelyasiyasının «Спирмена коэффициент ранговой корреляции; Spearman rank correlation coefficient» – müşahidələrin asılı olmayan $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ nəticələrinin rənglənməsinə əsaslanan, iki X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin (əlamətlərinin) asılılıq ölçüsüdür. Əgər X -in qiymətlərinin rənglənmə təbii qaydada, yəni $i = 1, \dots, n$ kimi yerləşmiş olarsa, $R_i(X, Y)$ cütünə müvafiq Y -in rəngi olarsa ki, bu cütdə X -in rəngi da i -yə bərabər olsun, onda rəng korrelyasiyasının S. ə.

$$r_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n (i - (n+1)/2)(R_i - (n+1)/2)$$

düsturu ilə və ya bu düsturla eynigüclü

$$r_s = 1 - 6 \sum_{i=1}^n d_i^2 / n(n^2-1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada d_i , $-X_i$ və Y_i -nin rəngləri arasında fərkdir. r_s -in qiyməti -1 və $+1$ arasında dəyişir və rənglər ardıcılıqları tamamilə üst-üstə düşdükdə $r_s = +1$ olur, yəni $i = R_i$, $i = 1, \dots, n$ olduqda; rənglər ardıcılığı tamamilə bir-birinə əks olarsa, yəni $i = (n+1) - R_i$, $i = 1, \dots, n$ olarsa, onda $r_s = -1$ olur. Rəng korrelyasiyasının S. ə. ixtiyari digər rəng statistikası kimi iki əlamətin asılı olmamazlığı haqqında hipotezin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. Əgər əlamətlər asılı olmazsa, onda $\mathbf{M}r_s = 0$, $\mathbf{D}r_s = 1/(n-1)$ olur. Beləliklə, r_s -in 0-dan yayınmasının qiymətinə görə əlamətlərin asılı olub-olmaması haqqında nəticə çıxarmaq olur. Müvafiq kriterinin qurulması üçün asılı olmayan X və Y əlamətləri üçün r_s -in paylanması hesablanır. $4 \leq n \leq 10$ olduqda dəqiq paylanma cədvəllərindən istifadə olunur (bax, [2], [4]), $n > 10$ olduqda isə, məs., ondan istifadə etmək olar ki, $\sqrt{n-1} r_s$ təsadüfi kəmiyyəti $n \rightarrow \infty$ olduqda $(0, 1)$ parametrləri asimptotik normal qanunla paylanır. Bu sonuncu halda, əgər $|r_s| > u_{1-\alpha/2} / \sqrt{n-1}$ olarsa, asılı olmazlıq hipotezi qəbul edilmir, burada $u_{1-\alpha/2}$, $-\Phi(u) = 1 - \alpha/2$ tənliyinin köküdür [$\Phi(u)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır].

Əgər X və Y -in birgə normal paylanması adi korrelyasiya əmsali ρ ilə verilmiş olarsa, onda n -in olduqca böyük qiymətlərində

$$\mathbf{M}r_s \sim \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

olur və buna görə də, $2 \sin \frac{\pi}{6} r_s$ kəmiyyətini ρ -nun statistik qiyməti kimi istifadə etmək olar.

Rəng korrelyasiyasının S. ə. psixoloq C. Spirmenin adı ilə adlandırılmışdır; o, psixologiyada adi korrelyasiya əmsali əvəzinə S. ə.-ni istifadə etmişdir. Rəng korrelyasiyasının S. ə.-na və rəng korrelyasiyasının *Kendall əmsalına* əsaslanan kriterilər asimptotik ekvivalentdirlər ($n = 2$ olduqda uyğun rəng statistikaları üst-üstə düşür).

Əd.: [1] Spearman C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 72–101; [2] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

SPITSER – ROQOZİN EYNİLİYİ « Спитцера – Рогозина тождество; Spitzer – Rogozin identity » – bax, *Faktorizasiya metodu*.

SPLAYN – STATİSTİK QIYMƏT « сплайн – оценка; spline estimator » – bax, *Qeyri – parametrik regression analiz*.

STABİL STATİSTİK QIYMƏT « стабильная оценка; stable estimator » – bax, *Robast statistik qiymet*.

STANDART BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « стандартный процесс броуновского движения / стандартный винеровский процесс; standart Brown motion / standart Wiener process » – bax, *Braun hərəkəti prosesi*.

860 SPİRMƏN

STANDART XƏTƏ « стандартная ошибка; standard error » – statistikanın öz riyazi gözləməsindən *kvadratik orta yayınmasına* deyilir. «S. x.» termininin yaranması onunla əlaqədar olmuşdur ki, kvadratik orta yayınma və ya normal qanunun standart yayınması belə adlandırılırdı, belə ki, normal qanun 18 – 19-cu əsrlərdə daha çox xətlərin paylanma qanunu kimi məlum idi. Riyazi statistikanın inkişafı və asimptotik normallıq anlayışının daxil olunması ilə bağlı «S. x.» termini asimptotik paylanması normal paylanma olan statistikaların kvadratik orta yayınmaları üçün də tətbiq olunmağa başlandı.

Müasir ədəbiyyatda «S. x.» terminindən az istifadə olunur. Əd.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

STANDART MARKOV PROSESİ « стандартный марковский процесс; standard Markov process » – bircins qırılan $\zeta = \{\zeta_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x\}$ Markov prosesidir və aşağıdakı şərtləri ödəyir: 1) ζ prosesinin fəza fəzası $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ lokal kompakt metrik fəzadır və ölçülən çoxluqların σ – cəbri $\mathcal{B}$ $\mathcal{E}$ -də açıq çoxluqların doğurduğu σ – cəbrdir; 2) ζ normal prosesdir, yəni bütün $\omega \in \Omega$ üçün qırılma anı $\xi(\omega) > 0$; 3) hər bir $\omega \in \Omega$ üçün $\zeta(t, \omega)$, $0 \leq t < \xi$ trayektoriyası t -yə görə sağdan kəsilməzdir; 4) $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrləri hər bir $\mathbf{P}_x$, $x \in \mathcal{E}$ ölçüsünə nəzərən tam σ – cəbrlərdir; 5) $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrləri sağdan kəsilməzdir, yəni $\mathcal{A}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{A}_u$; 6) ζ ciddi Markov

prosesidir; 7) ζ soldan kvazi-kəsilməz prosesdir, yəni ixtiyari dayanma anları τ və τ_n , $n \geq 1$, $\tau_n \uparrow \tau$ üçün

$$\mathbf{P}_x \{ \tau < \xi, \zeta(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(\tau_n) \} = \mathbf{P}_x \{ \tau < \xi \}, \quad x \in \mathcal{E}$$

münasibəti doğrudur. S. M. p. [1]-də təyin olunmuşdur. [2]-də isbat olunmuşdur ki, əgər: a) $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzası 1) şərtindəki kimi olarsa, b) keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ sağdan stoxastik kəsilməzdirsə: x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı üçün $t \downarrow 0$ olduqda $p(t, x, U) \rightarrow 1$, c) keçid funksiyasına uyğun

$$P^t F(x) = \int_{\mathcal{E}} F(y) p(t, x, dy), \quad t \geq 0$$

operatorları $\mathcal{E}$ -dəki kəsilməz F funksiyalarının sinfini özünə köçürür, belə ki, bu funksiyalar 0-da sonsuzluğa çevrilən funksiyalardır, onda uyğun Markov prosesini S. M. p. hesab etmək olar. «S. M. p.» termini [3]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Blumenthal R. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 52–72; [2] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [3] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

STANDART VİNER PROSESİ « стандартный винеровский процесс; standard Wiener process » – bax, *Braun hərəkəti prosesi, Viner prosesi*.

STANDART YAYINMA « стандартное отклонение; standard deviation » – bax, *Kvadratik yayınma*.

STANDARTİZASIYA « стандартизация; standardization » – *demoqrafik statistika* metodudur: bu metodla doğum və ölümün ümumi və interval əmsallarının hesablanması bunlara əhalinin tərkibinin təsiri (yaş həddi nəzərdə tutulur) aradan qaldırılır. Birbaşa S. müşahidə olunmuş yaş göstəricilərinin $\tau^k x$ qiymətlərində və

$$k^{cm} = \sum_x \tau k_x \tau C_x^0$$

düsterunda τC_x^0 standart yaş paylanması götürüldüyü halda ümumi intensivlik göstercisi k^{cm} -in hesablanmasından ibarətdir. Dolayısı ilə S.-da

$$k^{cm} = k k^0 / \sum_x \tau k_x \tau C_x$$

düsteru tətbiq olunur, burada k_0 və τk_x^0 – standart intensivliklər, k və τC_x – müşahidəolunan kəmiyyətlərdir.

STASİONAR ARTIMLARLI TƏSADÜFİ PROSES «случайный процесс со стационарными приращениями; stochastic process with stationary increments» – bax, *Təsadüfi proses asılı olmayan artımları*.

STASİONAR ƏLAQƏLİ TƏSADÜFİ PROSESLƏR «стационарно связанные случайные процессы; stationary connected random process» – *qərşılıqlı korrelyasion funksiyası* (ikinci tərtib qarışıq momenti) $B_{12}(t, s) = M\zeta_1(t)\zeta_2(s)$ yalnız $(t-s)$ fərqiindən asılı $\{\zeta_1(t); t \in T\}$ və $\{\zeta_2(t); t \in T\}$ təsadüfi proseslərinə deyilir. Bu halda $B_1(t)$ və $B_2(t)$, bəzən, *avtokorrelyasion funksiyalar* da adlanır (bax, *Avtokorrelyasion funksiya*).

STASİONAR HƏNDƏSİ PROSES «стационарный геометрический процесс; stationary geometric process» – bax, *Həndəsi proses*.

STASİONAR KANAL «стационарный канал; stationary channel» – bax, *Kanal yaddaşsız*.

STASİONAR KORRELYASİON FUNKSİYƏ «стационарная корреляционная функция; stationary correlation function» – bax, *Korrelyasion funksiya*.

STASİONAR KOVARIASİYƏ(sı) *təsadüfi çoxluğun «стационарная ковариация случайного множества; stationary covariance of a random set»* – bax, *Kovariasiya(sı) təsadüfi qapalı çoxluğu*.

STASİONAR MARKOV PROSESİ «стационарный марковский процесс; stationary Markov process» – həm *Markov prosesi*, həm də *stasionar təsadüfi proses* olan təsadüfi prosesdir. S. M. p., yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, Markov keçid ehtimalı $p(x, t, A)$ zaman üzrə bircins olsun və prosesin stasionar başlanğıc paylanması $\mu(A)$ mövcud olsun, yəni

$$\mu(A) = \int_X p(x, t, A) \mu(dx)$$

tənliyini ödəyən paylanma olsun.

Əgər fəza fəzası X kompakt, $M\{f(\zeta(t)) | \zeta(0) = x\}$ ixtiyari kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün x üzrə kəsilməz funksiya olarsa, onda verilən keçid funksiyası $p(x, t, A)$ -ya müvafiq S. M. p. həmişə mövcuddur. Vəziyyətləri çoxluğu X hesabı.

diskret zamanlı proses üçün S. M. p.-nin varlığı şərti – ehlə $x \in X$ vəziyyətinin varlığıdır ki, trayektoriyaların bu vəziyyətə orta qayıdış müddəti sonlu olsun (Kolmoqorov kriterisi). İxtiyari ciddi Markov prosesi üçün belə bir kriteri doğrudur: S. M. p.-nin varlığı üçün ehlə $K \subset H$ kompaktının varlığı kafidir ki, x vəziyyətləndən K -ya çatım müddətinin riyazi gözləməsi ixtiyari $x \in X \setminus K$ üçün sonlu olsun. Lyapunov stoxastik funksiyaların terminlərində Foster kriterisi doğrudur: K hər hansı kompakt, L prosesin doğuran operatoru olduqda, ehlə $V(x) \geq 0$ funksiyası olarsa ki, $x \in X \setminus K$ üçün $LV(x) \leq -1$ şərtini ödəsin, onda Markov keçid funksiyası $p(x, t, A)$ -ya müvafiq S. M. p. vardır.

Əgər prosesin stasionar başlanğıc paylanması μ yeganədirsə, onda uyğun S. M. p. erqodik prosesdir. Bəzi əlavə şərtlərlə keçid ehtimalı, $t \rightarrow \infty$ olduqda, μ -yə zəif yığılır. Vəziyyətləri sayı sonlu və diskret zamanlı proses üçün stasionar paylanma $\mu P = \mu$ tənliyini ödəyir; P – keçid ehtimalları matrisidir. Əgər $\zeta(t)$ kəsilməz zamanlı analogi proses olarsa, onda $\mu A = 0$, burada A – keçid ehtimalları sıxlıqları matrisidir. Bu tənliklər S. M. p.-nin varlığı halında vəziyyətlər sayı hesabı hal üçün də doğrudur. Ümumi hal üçün μ paylanması $L^* \mu = 0$, – Fokker – Plank – Kolmoqorov tənliyini ödəyir; L^* – prosesin infinitezimal operatoruna qoşma operatorudur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984; [2] Севастьянов Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 106–16.

STASİONAR – NİŞANLANMIŞ NÖQTƏVİ PROSES «стационарный маркированный точечный процесс; stationary marked point process» – bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*.

STASİONAR NÖQTƏVİ PROSES «стационарный точечный процесс; stationary point process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

STASİONAR ÖLÇÜ «стационарная мера; stationary measure» – bax, *Stasionar paylanma*.

STASİONAR PAYLANMA «стационарное распределение; stationary / steadystate distribution» – zamandan asılı olmayan bircins Markov zəncirinin ehtimal paylanmasıdır. $X(t)$ – vəziyyətləri çoxluğu S və keçid ehtimalları $p_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}$ olan bircins Markov zənciri olsun. S. p. –

$$\pi_j \geq 0, \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j, \quad j \in S, \quad t > 0 \quad (2)$$

münasibətlərlə təyin olunan $\{\pi_j, j \in S\}$ ədədlər toplusudur. (2) bərabərlikləri onu ifadə edir ki, S. p. zamana görə invariantdır: yeni ehlə $P\{X(0) = i\} = \pi_i$, $i \in S$ olarsa, onda ixtiyari $i \in S$, $t > 0$ üçün $P\{X(t) = i\} = \pi_i$ bərabərliyi ödənilir, hətta ixtiyari $t, t_1, \dots, t_k > 0$, $t_1, \dots, t_k \in S$ üçün

$$P\{X(i_1+t)=i_1, \dots, X(i_k+t)=i_k\} = \\ = P\{X(t_1)=i_1, \dots, X(t_k)=i_k\}$$

Əgər $i \in S$ $X(t)$ Markov zəncirinin ele vəziyyəti olarsa ki,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j(i) \geq 0, \quad j \in S, \quad \sum_{j \in S} \pi_j(i) = 1$$

limitləri mövcuddur, onda $\{\pi_j(i), j \in S\}$ ədədlər toplusu (2) münasibətini ödəyir və bu toplu $X(t)$ zəncirinin S. p.-dir.

(2) xətti tənliklər sisteminin (1) əlavə şərtlərində $\{\pi_j\}$ toplusuna nəzərən yeganə həlli vardır. bu şərtlə ki, $X(t)$ Markov zəncirinin vəziyyətlərinin müsbət sinifləri sayı 1 olsun; əgər zəncirin vəziyyətlərinin sayı k olarsa, onda onun S. p. çoxluğu hər biri müsbət sinifdə toplanmış k sayda stasionar paylanmaların qarışıq örtüyüdür (bax, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı).

(2) sisteminin mənfəi olmayan ixtiyari həlli stasionar ölçü adlanır; (1), (2) sistemi uyuşmayan olduğu halda belə stasionar ölçü mövcud ola bilər. Məs., $\{0, 1, 2, \dots\}$ vəziyyətlər çoxluğunda $X(0)=0$, $X(t)=X(t-1)+Y(t)$, $t=1, 2, \dots$ təsadüfi dolaşma olsun; burada $Y(1), Y(2)$ isə asılı olmayan ele təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, $P\{Y(i)=1\}=p$, $P\{Y(i)=-1\}=1-p$, $0 < p < 1$, $i=1, 2, \dots$, onda bu təsadüfi dolaşmanın stasionar paylanması yoxdur, lakin stasionar ölçüsü vardır və bu ölçü $\pi_j = (p/(1-p))^j$, $j=0, \pm 1, \dots$ toplusu ilə təyin olunur.

Vəziyyətləri çoxluğu S olan Markov zənciri $X(t)$ -nin stasionar ölçüsü $\{\pi_j\}$ toplusunun mümkün ehtimalı interpretasiyalardan biri aşağıdakı kimidir. $X(t)$ zəncirinin asılı olmayan realizasiyalarının hesabı çoxluğunun olduğu fərz olunur və $Y_i(i)$ təsadüfi kəmiyyəti $X(t)=i$ şərtini ödəyən realizasiyalar sayı olsun. Əgər $Y_0(i)$, $i \in S$ orta qiymətləri uyğun olaraq, π_i , $i \in S$ olan Puasson paylanmasına tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ixtiyari $t > 0$ qiymətində $Y_i(i)$, $i \in S$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunlar $Y_0(i)$, $i \in S$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylandığı qanunla paylanır.

Əd.: [1] Ч ж у н К а й - л а й, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., 1964; [2] К а р л и н С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971.

STASİONAR PAYLANMA(sı) bircins Markov zəncirinin «стационарное распределение однородной цепи Маркова; stationary distribution of a homogeneous Markov chain» – bircins Markov zəncirinin vəziyyətləri fəzasında invariant ehtimal ölçüsüdür. Ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasında bircins (X_n) Markov zənciri keçid ehtimalları $p(x, \mathcal{E})$, $x \in \Gamma$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ ilə verilmişdir. Əgər $\mathcal{B}$ -də verilmiş μ ölçüsü σ – sonlu və $\mu P = \mu$ şərtini ödəyirsə, μ zəncir üçün invariant ölçü adlanır, burada

$$\mu P(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} p(x, \cdot) \mu(dx).$$

Məs., vəziyyətləri çoxluğu hesabı $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots\}$ Markov zənciri halında μ -nü elementləri $\mu_i = \mu(\{i\})$ olan $(\mu_1, \mu_2, \dots)$ ardıcılığı ilə eyniləşdirmək olar, onda $\mu P = \mu$ bərabərliyini $\sum_{i \geq 1} p_{ij} \mu_i = \mu_j$, $j \geq 1$ bərabərliklər sistemi kimi yazmaq olar,

burada p_{ij} – i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalıdır.

Hər bir invariant ölçü *ekspressiv ölçüdür*.

Erqodik Markov zənciri üçün final ehtimalları S. p.-ya misaldır və eyni zamanda S. p. anlayışının mühümlüyünü illüstrasiya edir. Əgər hər hansı S. p. (X_n) zəncirinin başlanğıc paylanması kimi seçilmişdirsə, onda bu zəncir diskret zamanlı stasionar proses olur: $\{X_m \in \Gamma_0, \dots, X_{m+k} \in \Gamma_k\}$ hadisəsinin ehtimalı $m \geq 0$ qiymətindən asılı olmur; $k \geq 0$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}$, $0 \leq i \leq k$.

Qayıdışlı Markov zənciri halında bütün sıfır invariant ölçülər bir-birindən ədədi vuruqla fərqlənir və aydın ehtimalı mənə daşıyır (bax, Limit teoremləri Markov zəncirlərində nisbətlər üçün).

Bax, həm də, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

Əd.: [1] Ч ж у н К а й - л а й, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Р е в у з Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997.

STASİONAR PROSES; statistik məsələlər «стационарный процесс; статистические задачи; statistical problems for a stationary process» – bax, Statistik məsələlər(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

STASİONAR PROSES ümumiləşmiş «стационарный процесс обобщенный; generalized random process» – bax, Ümumiləşmiş stasionar proses.

STASİONAR PUASSON AXINI «стационарный пуассоновский поток; stationary Poisson input» – bax, Giriş axını keçmiş məhdud təsirliliyə malik.

STASİONAR STRATEGİYA «стационарная стратегия; stationary strategy / policy» – bax, Strategiya, idarəolunan sıçrayışvari proses, idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı.

STASİONAR TƏSADÜFİ ÇOXLUQ «стационарное случайное множество; stationary random set» – S vektor fəzasında aşağıdakı xassəyə malik A təsadüfi çoxluğudur: ixtiyari $x \in S$ üçün $A \oplus \{x\}$ təsadüfi çoxluqlarının və

A -nın paylanmaları üst-üstə düşür (burada $\oplus$ – Minkovski üzrə cəm eməlidir; bax, Minkovski eməlləri).

STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES «стационарный случайный процесс; stationary random process», zaman üzrə bircins təsadüfi proses, – t zamanı keçdikcə statistik xarakteristikaları dəyişməyən $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir, yeni statistik xarakteristikaları $t \rightarrow t+a$, $\zeta(t) \rightarrow \zeta(t+a)$ zaman yerindəyişmələrinə görə ixtiyari qeyd olunmuş a qiymətində invariant olan təsadüfi prosesdir (prosesin kəsilməz zamanlı və ya diskret zamanlı olmasından asılı olaraq, a həqiqi və ya tamqiymətli ola bilər). S. t. p. anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin təbiətşünaslıq və texnikanın müxtəlif bölmələrinə təbiiqədə geniş istifadə olunur, belə ki, bu tip proseslər nizamlanmamış fluktuasiyalarla müşayiət olunan bir çox real hadisə və prosesləri yaxşı dəqiqliklə

tesvir edir. Məs., elektrik şəbəkəsində cərəyan gücü və ya gərginliyin pulsasiyasına (elektrik «küyü»), eger şəbəkə stasionar rejimə olarsa, S. t. p. kimi baxmaq olar; turbulent axın nöqtəsində sürət və ya təzyiqin pulsasiyaları axın qararlaşmış olduğu halda S. t. p.-dir.

S. t. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsində $\zeta(t)$ prosesinin ehtimal paylanmalarının momentləri mühüm rol oynayır; ilk iki tərtib momentlər, yəni $\zeta(t)$ prosesinin orta qiyməti (riyazi gözləməsi) və onun korrelyasion funksiyası – $M\zeta(t) = m$ və $M\zeta(t+\tau)\zeta(t) = B(\tau)$ xüsusilə mühüm xarakteristikalarlardır. S. t. p.-lər nəzəriyyəsi üzrə bir çox araşdırmalarda, ümumiyyətlə, bu prosesin yalnız ələ xassələri öyrənilir ki, bunlar yalnız m və $B(\tau)$ xarakteristikaları ilə tamamilə təyin olunurlar (korrelyasion nəzəriyyə və ya ikinci tərtib S. t. p.-lər nəzəriyyəsi adlandırılan nəzəriyyələrdə). Bununla bağlı, $M\zeta(t)$ və $M\zeta(t+\tau)\zeta(t)$ momentləri t -dən asılı olmayan proseslərə xüsusi bir sinif kimi baxaraq, onu geniş mənada S. t. p.-lər kimi də adlandırılır; bu halda zaman etibarilə bütün xassələri dəyişməyən, daha xüsusi təsadüfi proseslər [belə ki, n -in ixtiyari qiymətində $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n)\}$ n – ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin n – ölçülü paylanma funksiyası $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ yalnız $(n-1)$ sayda $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots,$

$t_n - t_1$ fərqlərindən asılı olur] dar mənada S. t. p.-lər adlandırılır. Buna görə də, S. t. p.-lər nəzəriyyəsi müxtəlif riyazi aparat istifadə edən, dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi və geniş mənada S. t. p. nəzəriyyəsinə ayrılır.

Dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi, birparametrlili qruplar nəzəriyyəsi kimi, ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsindən kənar şərh oluna bilər; belə qruplar ölçüyə malik ölçülü fəzaların çevirmələrinin ölçüsünü dəyişmir; bu nəzəriyyə dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsi və ergodik nəzəriyyə ilə qovuşur. Dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsində ən mühüm ümumi teorem *Birkhof – Xinqin ergodik teoremidir* (bax, məs., [2], [3], [6], [7]) və bu teoreme əsasən dar mənada ixtiyari $\zeta(t)$ S. t. p.-nin riyazi gözləməsi varsa [yəni $M|\zeta(t)| < \infty$ olarsa], onda

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t) dt = \hat{\zeta} \quad (1)$$

və ya

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S+1}^T \zeta(t) = \hat{\zeta} \quad (1a)$$

limiti sanki yəqin vardır [(1) düsturu kəsilməz zamanlı S. t. p.-lərə, (1a) düsturu diskret zamanlı S. t. p.-lərə aiddir]. Yə. Yə. Slutskinin [1]-də, geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsinə aid aldığı nəticədə hökm olunur ki, (1) və ya (1a) limiti kvadratik orta mənada limit kimi vardır və bu limit, yalnız və yalnız,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau = 0 \quad (2)$$

və ya uyğun olaraq,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} b(\tau) = 0 \quad (2a)$$

olduğu halda $M\zeta(t)$ ilə üst-üstə düşür, burada $b(\tau) = B(\tau) - m^2 = M[\zeta(t+\tau) - m][\zeta(t) - m]$, yəni (2) və

(2a) şərtləri ödənildikdə [yəni $b(\tau) \rightarrow 0$ münasibəti $\tau \rightarrow \infty$ olduqda ödənilirdi bütün hallarda] (1) və ya (1a) limiti $M\zeta(t)$ ilə üst-üstə düşür.

Birkhof – Xinqin teoremi $Y_\Phi(t) = \Phi[\zeta(t)]$ şəklində dar mənada bütün mümkün S. t. p.-lərə tətbiq oluna bilər, burada $\Phi[\zeta(t)]$ – S. t. p. $\zeta(t)$ -nin ixtiyari funksionalıdır və bu funksional riyazi gözləməsi olan təsadüfi kəmiyyətdir; eger bütün belə $Y_\Phi(t)$ S. t. p.-ləri üçün uyğun $\hat{Y}_\Phi$ limiti $M\hat{Y}_\Phi$ ilə üst-üstə düşərsə, onda $\zeta(t)$ metrik tranzitiv S. t. p. adlanır. Gauss S. t. p. $\zeta(t)$ üçün dar mənada stasionarlıq şərti geniş mənada stasionarlıq şərti ilə üst-üstə düşür, metrik tranzitivlik, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ λ -nın kəsilməz funksiyası olsun (bax, məs., [2], [3]). Ümumi halda S. t. p.-lərin metrik tranzitivliyi üçün sadə zəruri və kafi şərtlər yoxdur.

Metrik tranzitivliyə aid yuxarıda qeyd olunan nəticədən başqa, mehz Gauss S. t. p.-lərinə aid olan bir çox digər nəticələr də vardır: məs., belə proseslər üçün $\zeta(t)$ S. t. p.-nin realizasiyalarının (yəni müşahidə olunmuş ayrı-ayrı qiymətlərin) lokal xassələri, $\zeta(t)$ S. t. p.-nin realizasiyasının sıfırları ardıcılığı və ya maksimumları haqqında, bu realizasiyanın verilmiş səddi kəsdiyi nöqtələrin statistik xassələri haqqında məsələlər ətrafı öyrənilmişdir (bax, məs., [8] – [10]). Hər hansı səddi kəsməyə aid alınan nəticələrə tipik misalda hökm olunur ki, geniş rəqulyarlıq şərtləri daxilində, müəyyən bir xüsusi zaman miqyasında (u -dan asılı olan və $u \rightarrow \infty$ olduqda sonsuzluğa sürətlə yaxınlaşan zaman parametri halında) Gauss S. t. p.-nin yüksək $x = u$ səddini kəsdiyi nöqtələrin çoxluğu $u \rightarrow \infty$ olduqda, intensivliyi vahidə bərabər Puasson axınına yaxınlaşır (bax, [3], [9], [10]).

Geniş mənada S. t. p.-lərə baxıldıqda, $\zeta(t)$ prosesinin qiymətlərinin bütün mümkün xətti kombinasiyalarının və bu xətti kombinasiyaların kvadratik orta mənada ardıcılıqlarının limitlərinin Hilbert fəzası H_ζ daxil edilir və bu fəzada skalyar hasil $(Y_1, Y_2) = M Y_1 \bar{Y}_2$ düsturu ilə verilir. Bu halda α qeyd olunmuş ədəd olduqda $\zeta(t) \rightarrow \zeta(t + \alpha)$ çevirməsi H_ζ fəzasını özünə inikas eldirən U_α xətti unitar operatorunu doğurur. Bu zaman U_α operatorlar ailəsi $U_\alpha U_\beta = U_{\alpha+\beta}$ şərtini ödəyir və $\zeta(t) = U_t \zeta(0)$ qiymətləri bütün U_α operatorları ilə özünə çevrilən nöqtələr çoxluğu (t kəsilməz olduqda bu əyri, diskret olduqda isə nöqtələrin hesabi ardıcılığı) olur. Buna uyğun olaraq, geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi funksional analiz terminləri ilə H_ζ Hilbert fəzasının $\zeta(t) = U_t \zeta(0)$ nöqtələri çoxluğunun öyrənilməsi kimi ifadə oluna bilər, burada U_t – ələ xətti unitar operatorlar ailəsidir ki, $U_\alpha U_\beta = U_{\alpha+\beta}$.

Geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsində $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral ayrılığı və onun korrelyasion funksiyası $B(\tau)$ -nin Furiye – Stilyes integralına ayrılışına əsaslanan spektral baxışlar mərkəzi yer tutur. Kəsilməz zamanlı S. t. p.-in korrelyasion funksiyası $B(\tau)$ Xinqin teoreminə əsasən (bax, [4]-də) (bu teorem Boxnerin müsbət müəyyən funksiyanın ümumi ifadəsi haqqında analitik teoreminin sadə nəticəsidir) həmişə

$$B(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda) \quad (3)$$

düsturu şəklində ifadə oluna bilər, burada $F(\lambda)$, $-\lambda$ -nin məhdud monoton azalmayan funksiyasıdır. $\Lambda = (-\infty, \infty)$; müsbət müəyyən ardıcılıqların ümumi şəklində Herqlots teoreminə analoji olaraq isbat olunur ki, belə bir ifadə yalnız $\Lambda = [-\pi, \pi]$ halında diskret zamanlı S. t. p.-in korrelyasion funksiyası üçün də doğrudur. Əgər $B(\tau)$ korrelyasion funksiyası $|\tau| \rightarrow \infty$ olduqda olduqca sürətlə azalarsa [bu əksər hallarda tətbiqi məsələlərdə baş verir, bu şərtlə ki, $\zeta(t)$ əvəzinə $\zeta(t) - m$ fərqi baxılır, yeni fərz olunur ki, $M\zeta(t) = 0$], onda (3)-ün sağ tərəfindəki integral adi Furiye integralına çevrilir, yeni

$$B(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

burada $f(\lambda) = F'(\lambda)$ – mənfi olmayan funksiyadır. $F(\lambda)$ funksiyası $\zeta(t)$ S. t. p.-nin spektral funksiyası, $f(\lambda)$ funksiyası isə onun spektral sıxlığı [(4) bərabərliyi ödənilərsə] adlanır. $\zeta(t)$ prosesinin spektral ayrılığı

$$\zeta(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad (5)$$

düsturu ilə ifadə oluna bilinir, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımları təsadüfi funksiyadır [yeni ele funksiyadır ki, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduqda $M dZ(\lambda_1) dZ(\lambda_2) = 0$], $M[dZ(\lambda)]^2 = dF(\lambda)$ şərtini ödəyir, sağ tərəfdəki integral isə integral cəmlərinin uyğun ardıcılığının kvadratik orta limiti kimi anlaşılır. (5) ayrılığı geniş mənada ixtiyari S. t. p. $\zeta(t)$ -yə təsadüfi amplitudları və fazaları müxtəlif tezlikləri, bir-birilə qeyri – korrelyar harmonik rəqslərin çoxluğunun superpozisiyası kimi baxmağa əsas verir; bu halda $F(\lambda)$ spektral funksiyası və $f(\lambda)$ spektral sıxlığı λ tezliklərinin spektri üzrə $\zeta(t)$ -nin tərkibinə daxil olan harmonik rəqslərin orta enerjisinin (və ya, daha dəqiq, gücünün) paylanması təyin edir [bununla bağlı tətbiqi araşdırmalarda $f(\lambda)$ funksiyası əksər hallarda S. t. p. $\zeta(t)$ -nin energetik spektri (cərəyan spektri) və ya güc spektri adlanır].

(3) düsturu ilə verilən $B(\tau)$ korrelyasion funksiyasının spektral ayrılığından aydındır ki, H_{ζ} Hilbert fəzasının elementləri $\zeta(t)$ -ləri $L^2(dF)$ Hilbert fəzasının elementləri $e^{it\lambda}$ -lara çevirən $\zeta(t) \rightarrow e^{it\lambda}$ inikası H_{ζ} fəzasının ayrısı (və ya nöqtələrin hesabı ardıcılığı) $\zeta(t)$ -nin $L^2(dF)$ fəzasına izometrik inikasıdır, burada $L^2(dF)$, $-\Lambda$ çoxluğunda modulunun kvadratı ilə $dF(\lambda)$ üzrə integrallanan kompleksqiymətli funksiyaların Hilbert fəzasıdır. Bu inikası sonra bütün H_{ζ} fəzasının $L^2(dF)$ fəzasına izometrik xətti $\mathcal{M}$ inikasına qədər davam etdirmək

olar ki, bu da geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsinin bir çox məsələlərini funksiyalar nəzəriyyəsinin məsələləri şəklində ifadə etməyə imkan yaradır.

Geniş mənada S. t. p. nəzəriyyəsinin böyük bir hissəsi belə proseslər üçün xətti aproksimasiya məsələlərinin həlli metodlarına, yeni $\zeta(t)$ -nin hər hansı «məlum» qiymətlərinin ele xətti kombinasiyasının tapılması metodlarına həsr olunmuşdur ki, bu xətti kombinasiya bu prosesin hər hansı «məlum» qiymətini və ya hər hansı «məlum» Y təsadüfi kəmiyyətini ən yaxşı yaxınlaşdıran (xətanın kvadratik ortasının minimumu mənasında) kombinasiyadır. Məs., S. t. p. $\zeta(t)$ -nin optimal xətti ekstrapolyasiyası haqqında məsələ $t \leq 0$ olduqda $\zeta(t)$ -nin «keçmiş qiymətlərindən» xətti asılı olan $\zeta(s)$, $s > 0$ qiymətinə ən yaxşı $\zeta^*(s)$ yaxınlaşmasının tapılmasından ibarətdir; optimal xətti interpoliyası haqqında məsələ t -nin zaman oxunun s -in aid olduğu seçilmiş intervaldan olmayan bütün qiymətlərində $\zeta(t)$ -nin qiymətlərindən xətti asılı olan və $\zeta(s)$ -ə ən yaxşı yaxınlaşmanın tapılmasından ibarətdir; optimal xətti filtrasiya haqqında məsələ $t \leq 0$ olduqda $\zeta(t)$ -nin qiymətlərindən xətti asılı olan hər hansı Y təsadüfi kəmiyyətinə ən yaxşı Y^* yaxınlaşmasının axtarılmasıdır; bu zaman əksər hallarda Y – hər hansı $t = s$ qiymətində $\zeta(t)$ ilə korrelyar bağlı, «signal» rolunu ifadə edən, S. t. p. $Y(t)$ -nin qiymətidir, $\zeta(t) = Y(t) + N(t)$ – «signal» ilə onu «təhrif edən» $N(t)$ «küynün» müşahidələrdən məlum olan cəmdir.

Yuxarıda qeyd olunan bütün məsələlər hendesi olaraq, H_{ζ} Hilbert fəzasının (və ya onun genişlənməsinin) hər hansı nöqtəsindən bu fəzanın verilmiş altfəzasına perpendikulyar endirilməsinə gətirilir. Belə hendesi interpretasiyaya və H_{ζ} ilə $L^2(dF)$ fəzalarının izomorfizminə əsaslanaraq, A. N. Kolmoqorov 1941-də (bax, [5]) diskret t zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$ -nin spektral funksiyası $F(\lambda)$ üzrə, $\zeta(t)$ -nin qiyməti yalnız $t = s$ halında məlum olduqda, optimal xətti ekstrapolyasiya və ya interpoliyası xətanın kvadratik ortasını təyin etmək üçün ümumi düsturlar çıxarmışdır (bax, [2], [6], [7]). Ekstrapolyasiya məsələsinə tətbiqdə kəsilməz zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$ üçün analoji nəticələri bir qədər sonra M. Q. Kreyn və K. Karunen (K. Karhunen; bax, məs., [2], [6], [7]) almışlar. N. Viner [11]-də isbat etmişdir ki, optimal xətti ekstrapolyasiya və filtrasiya haqqında məsələlər halında ən yaxşı $\zeta^*(s)$ və ya $Y^* = Y^*(s)$ yaxınlaşmalarının tapılması Viner – Hopf tipli hər hansı integral tənliyin və ya (diskret t halında) belə tənliyin diskret analoqunun həllinə gətirilə bilər, bu isə belə tənliklərin həlli üçün işlənmiş faktorizasiya metodunu tətbiq etməyə imkan verir. Kəsilməz zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$ -nin $t \leq 0$ halında bütün keçmiş qiymətləri deyil, yalnız sonlu $-T \leq t \leq 0$ intervalında qiymətləri məlum olduqda, bu prosesin optimal xətti ekstrapolyasiya və ya filtrasiyası haqqında məsələlər, həm də belə $\zeta(t)$ -nin optimal xətti interpoliyası məsələlərinin xüsusi şəkildə (simin ümumiləşmiş tənliyi) differensial tənliyin spektri üzrə bərpası haqqında bəzi məsələlərə gətirilə bilər (bax, [12], [13]).

Optimal xətti ekstrapolyasiya, interpoliyası və filtrasiya haqqında məsələlərin həllinə yuxarıda şərh olunan yanaşmalar $\zeta^*(s)$ və ya Y^* -nin axtarılma ən yaxşı yaxınlaşmaları üçün yalnız bəzi nadir hallarda olduqca sadə, aşkar düsturlar almağa

imkan vardır; bu düsturları praktikada müvəffəqiyyətlə tətbiq etmək olur. Belə aşkar düsturların varlığının mühüm həli N. Vinerin [1]-də xüsusi olaraq araşdırdığı bir haldır ki, bu halda S. t. p. $\zeta(t)$ -nin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ -nin $e^{i\lambda}$ -ya nəzərən (t diskret olduqda) və ya λ -ya nəzərən (t kəsilməz olduqda) rəşional olduğu halda (bu zaman $t \leq 0$ olduqda qiymətlər üzrə ekstrapolyasiya və filtrasiya məsələlərinə tətbiqdə). Sonradan isbat olunmuşdur ki, rəşional spektral sıxlığa malik belə S. t. p.-lər üçün $-T \leq t \leq 0$ (bax, məs., [2], [4]) sonlu intervalında verilənlər üzrə xətti ekstrapolyasiya və ya ekstrapolyasiya və filtrasiya haqqında məsələlərin də aşkar həli sadəcə tapılır (bax, [2], [14]). Rəşional spektral sıxlıqlı proseslərin xüsusi sadəliyi onunla izah olunur ki, belə S. t. p.-lər (və praktik olaraq yalnız bunlar) çoxölçülü stasionar Gauss – Markov prosesinin birölçülü komponentidirlər (bax, Gauss – Markov prosesi).

S. t. p. anlayışının bir çox mühüm ümumiləşmələri vardır. Bunlardan biri *ümumiləşmiş stasionar proses* anlayışdır: digər çox istifadə olunan S. t. p.-in ümumiləşmiş anlayışları – hər hansı tərtib stasionar artımlı *təsadüfi proses* və *bircins təsadüfi meydan* anlayışlarıdır.

Əd.: [1] С л у щ и й Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 252–68; [2] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Х и н ч и н А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42–51; [5] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63; [6] Д у б Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [8] Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с англ. и франц., М., 1978; [9] П и т е р б а р г В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99; [10] L e a d b e t t e r M. R., L i n d g r e n G., R o o t z e n H., Extremes and related properties of random sequences and processes, N. Y. – [a. o.], 1983; [11] W i e n e r N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., [1949]; [12] К р е й н М. Г., «Докл. АН СССР», 1954, т. 94, № 1, с. 13–16; [13] Д у м Н., М о К е а n H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, N. Y. – [a. o.], 1976; [14] Я г л о м А. М., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 333–74.

STASIONAR TƏSADÜFİ PROSES; б о ю ю к е д е д л е р қ а н у н у « **стационарный случайный процесс;** закон больших чисел; law of large numbers for a stationary random process » – bax, *Бöyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

STASIONAR TƏSADÜFİ PROSES; б о ю ю к е д е d l e r i n г ү c l e n d i r i l m i ş қ а н у н у « **стационарный случайный процесс;** усиленный закон больших чисел; strong law of large numbers for a stationary random process » – bax, *Бöyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

STASIONARLIĞI, AXININ « **стационарность потока;** flow stationarity » – *giriş axınının* ehtimali rejiminin zaman üzrə dəyişməzliyini xarakterizə edən xassədir. A. s. onu ifadə edir ki, $(T, T + t)$ müddətində k sayda tələbin daxil olma ehtimalı T -dən asılı olmur və bu ehtimal yalnız k, t dəyişənlərinin funksiyasıdır.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987.

STASIONARLIQ geniş mənada « **стационарность** в широком смысле; **stationarity** in the wide sense » – bax, *Təsadüfi funksiya*; geniş mənada xassə.

STATİSTİK ANALİZ(i) təsadüfi meydanların « **статистический анализ** случайных полей; **statistical analysis** of random fields » – *təsadüfi meydanın* bir və ya bir neçə realizasiyası şəklində ifadə olunan verilənlər əsasında stoxastik nəticələrə həsr olunmuş riyazi statistika bölməsidir. Ən ümumi qoyuluşda hər hansı

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ oblastında $X(t)$ təsadüfi meydanı müşahidə olunur və müşahidə nəticələri üzrə təsadüfi meydanın xarakteristikaları haqqında statistik nəticələr əldə etmək tələb olunur (məs., meydanın naməlum orta qiymətini, korrelyasiya funksiyasını qiymətləndirmək, təsadüfi meydanın paylanması haqqında müəyyən statistik hipotezləri yoxlamaq kimi). Təsadüfi meydanların S. a. intensiv inkişaf mərhələsindədir. Hal-hazırda məlum olan nəticələrin böyük əksəriyyəti bircins, bircins və izotrop, izotrop təsadüfi meydanlara aiddir (bax, [1] – [3]). Təsadüfi meydanların S. a. məsələləri avtomatik tənzimləmədə, statistik radiofizikada, statistik optikada, meteorologiyada, statistik hidromexanikada, geologiyada, obrazların müəyyən edilməsi nəzəriyyəsində, hidrolokiya səthlərinin nahamərlik nəzəriyyəsində yaranır (bax, məs., [3] – [6]).

Regressiya əmsallarının və təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin qiymətləndirilməsi Δ oblastında

$$X(t) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(t) + Y(t)$$

təsadüfi meydanı müşahidə olunur, burada $g_i(t)$ – məlum, təsadüfi olmayan funksiyalar, θ_i – naməlum parametrlər, $Y(t)$ – riyazi gözləməsi $MY(t) = 0$ olan təsadüfi meydandır və $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ vektor parametrlərini qiymətləndirmək tələb olunur. Belə ifadə olunmuş məsələ təsadüfi meydanın xətti regressiya əmsallarının qiymətləndirilməsi məsələsi adlanır; bircins təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi xüsusi hal kimi ($q = 1$, $g_1(t) \equiv 1$) bu məsələyə aid hesab olunur. Statistik qiymətlərin mühüm sinfi ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətləri sinfidir, yeni

$$\int_{\Delta} (X(t) - \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(t))^2 dt$$

ifadəsini minimallaşdıran $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ parametrlərinin statistik qiymətləri – $\hat{\theta}_{\Delta} = (\hat{\theta}_{1\Delta}, \dots, \hat{\theta}_{q\Delta})$ vektor parametrlərinin sinfidir.

$\hat{\theta}_{\Delta}$ statistik vektor parametrlərinin qiymətləndirilməsi xətti sistemlərin həllinə gətirilir və $\hat{\theta}_{\Delta}$ geniş fərziyyələrlə aşkar şəkildə tapılır. Məs., bircins təsadüfi meydanın ($q = 1$, $g_1(t) \equiv 1$) naməlum orta qiymətinin statistik qiyməti $\hat{\theta}_{\Delta}$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} X(t) dt,$$

burada $|\Delta|$, Δ oblastının həcmidir (sahəsidir). Ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətləri meylsiz statistik qiymətlərdir; bunları hesablamaq üçün təsadüfi meydanın digər xarakteristikalarının heç biri haqqında bilgi tələb olunmur. Əksər hallarda fərz olunur ki, $X(t)$ təsadüfi meydanı $\{\Delta\}$ oblastlar sisteminde müşahidə olunur və oblastlar müəyyən şəkildə sonsuzluğa qədər genişlənirlər. [2]-də ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətlərinin meylsiz və asimptotik normal olması üçün şərtlər göstərilmişdir. Burada həmçinin qeyri – xətti regressiya halında ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətlərinin xassələri araşdırılmış, ən kiçik modullar metodunun statistik qiymətləri də ətraflı öyrənilmişdir.

Xətti regressiya parametrlərinin statistik qiymətlərinin digər mühüm sinfi xətti (yeni müşahidələrin nəticələri ilə xətti ifadə olunan) minimal dispersiyalı meylsiz statistik qiymətlərdir. Belə statistik qiymətlərin axtarılması xətti cəbri və ya korrelyasion funksiyalar vasitəsilə təyin olunan xətti integral tənliklərin həllinə gətirilir. Sferada müşahidə olunan izotrop təsadüfi meydanlar üçün [1]-də xətti regressiyanın minimal dispersiyalı xətti meylsiz statistik qiymətləri aşkar şəkildə göstərilmişdir. Məs., r radiuslu $S_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r\}$ sferasında müşahidə olunan izotrop təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin statistik qiyməti

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n(1)} X(r, u) m_n(du), \quad n \geq 2$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $m_n(\cdot)$, $S_n(1)$ sferasında Lebeq ölçüsü, ω_n , $S_n(1)$ sferasının səthi, $r \geq 0$, $u \in S_n(1)$, $t \in \mathbb{R}^n$ nöqtəsinin koordinatlarıdır. Beləliklə, bu halda minimal dispersiyalı xətti meylsiz statistik $\tilde{\theta}$ qiyməti ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış $\hat{\theta}$ statistik qiyməti ilə üst-üstə düşür.

Korrelyasion funksiyanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi. $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ – orta qiyməti sıfıra bərabər, korrelyasion funksiyası $B(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ naməlum olan geniş mənada bircins təsadüfi meydan, Δ , $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş məhdud Borel çoxluğu, K – koordinat başlanğıcını özündə saxlayan kompakt olsun. $X(t)$ meydanının realizasiyasının müşahidəsi üzrə $h \in K$ olduqda $B(h)$ üçün statistik qiymət kimi

$$\hat{B}_{\Delta}^{(1)}(h) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} X(t)X(t+h) dt,$$

$$\hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta \cap (\Delta-h)} X(t)X(t+h) dt,$$

$$\Delta - h = \{t \in \mathbb{R}^n; t = s - h, s \in \Delta\}$$

statistikalarından istifadə olunur, bunlar təsadüfi prosesin korrelogramına analogi olan, $B(h)$ korrelyasion funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətləridir.

866 STATİSTİK

$\hat{B}_{\Delta}^{(1)}$ statistik qiyməti $\hat{B}_{\Delta}^{(2)}$ statistik qiymətindən sadə olsa da, $h \in K$ olduqda onu təqdim etmək üçün $X(t)$ meydanının $\Delta + k = \{t \in \mathbb{R}^n; t = s + u, s \in \Delta, u \in K\}$ çoxluğunda müşahidəsindən istifadə etmək zəruridir. $\hat{B}_{\Delta}^{(2)}$ -ni təyin etmək üçün $X(t)$ meydanının müşahidəsindən $t \in \Delta$ olduqda istifadə olunmalıdır.

$\{\Delta\}$ oblastlar sistemi müəyyən surətdə sonsuzluğa qədər genişləndirildiyi halda $\hat{B}_{\Delta}^{(i)}$, $i = 1, 2$ statistik qiymətlərinin xassələri [2]-də tədqiq olunmuşdur. Məs.,

$$P \left\{ \sup_{h \in K} |\hat{B}_{\Delta}^{(i)}(h) - B(h)| \rightarrow 0 \right\} = 1, \quad i = 1, 2$$

münasibətlərinin ödənilməsi üçün şərtlər tapılmışdır; həm də $K = \Pi[0, H] = \{t \in \mathbb{R}^n; 0 \leq t_i \leq H, i = 1, \dots, n\}$ üçün ələ şərtlər göstərilmişdir ki, bu şərtlər daxilində müntəzəm topologiyalı

$$X_{\Delta}^{(1)}(h) = |\Delta|^{1/2} (\hat{B}_{\Delta}^{(1)}(h) - B(h)), \quad h \in \Pi[0, H]$$

meydanları və

$$X_{\Delta}^{(2)}(h) = |\Delta|^{1/2} (\hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h) - \mathbf{M} \hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h)), \quad h \in \Pi[0, H]$$

meydanları ilə K -da kəsilməz funksiyaların $C(K)$ fəzasında doğrulmuş bəzi ölçülər $\Delta \rightarrow \infty$ olduqda $C(K)$ -da hər hansı limit Qauss ölçüsünə zəif yığılırlar. Bu isə bircins təsadüfi $X(t)$,

$t \in \mathbb{R}^n$ meydanının naməlum korrelyasion funksiyası $B(h)$, $h \in \Pi[0, H]$ üçün asimptotik etibarlı intervallar qurulmasına imkan verir.

Bircins izotrop təsadüfi meydanın naməlum korrelyasion funksiyasının asimptotik etibarlı intervallarının qurulması üçün analogi yanaşma [2]-də istifadə olunmuşdur. Δ çoxluğunun qeyd olunduğu, lakin eksperimentatorun $X(t)$, $t \in \Delta$ meydanının bir çox asılı olmayan realizasiyalarına malik olduğu halda, bircins təsadüfi meydanın korrelyasion funksiyasının qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi məsələsinə də baxılmışdır. Burada $B(h)$ -ın statistik qiymətləri kimi müşahidə olunmuş realizasiyaların sayı üzrə orta qiymətləri götürülmüş $\hat{B}_{\Delta}^{(i)}$ statistik qiymətlərini $\{i = 1, 2\}$ götürmək olar. Bu statistik qiymətlərdən istifadə edərək, asılı olmayan realizasiyaların sayı qeyri – məhdud artdığı halda $X(t)$ meydanının naməlum korrelyasion funksiyası $B(h)$ üçün asimptotik etibarlı intervallar da qurmaq olur.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması. Statistik hipotezlərin yoxlanılması haqqında məsələyə mühüm misal küy fonunda siqnalın aşkar olunması məsələsidir. $Y(t)$ – təsadüfi meydan, $f(t)$ – təsadüfi olmayan funksiya (siqnal) olsun. İki hipoteze baxılır: H_1 , Δ -da müşahidə olunan $X(t)$ meydanı $X(t) = f(t) + Y(t)$ şəklindədir; H_0 – müşahidə olunan meydan $X(t) = Y(t)$ şəklindədir. Müşahidələrin nəticələri əsasında bu hipotezlərdən biri qəbul olunmalıdır.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsinin həllində $X_1(t) = f(t) + Y(t)$, $X_0(t) = Y(t)$, $t \in \Delta$ təsadüfi meydanlarının doğrurduqları $\mu_1^{\Delta}(\cdot)$ və $\mu_2^{\Delta}(\cdot)$ ölçülərinin mütləq kəsil-

mezliyi və singulyarlığı anlayışları və bu ölçülərin Radon – Nikodim töreməsi – (doğruoxşarlıq nisbəti) $d\mu_1^\Delta/d\mu_2^\Delta$ anlayışı mühüm rol oynayır. Gauss bircins meydanlarının doğurduqları ölçülərin, bircins və izotrop təsadüfi meydanların doğurduqları ölçülərin mütləq kəsilməzlik və singulyarlıq şərtləri [1]-də göstərilmişdir. Məs., $Y(r)$ – Gauss izotrop təsadüfi meydan.

$S(r)$, – r radiuslu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan sfera.

$f(r)$ isə yalnız $r = |t|$ -dən asılı olarsa, onda

$$\frac{d\mu_1^\Delta}{d\mu_0^\Delta} = \exp \left\{ \frac{f(r)}{b_0(r)} \int_{S_n} Y(r, u) m_n(du) - \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{b_0(r)} f^2(r) \right\}$$

düsturu doğrudur, burada $b_0(r)$, – $Y(r)$ -nin spektral ayrılışındakı əmsəldir.

Əd.: [1] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Л е о н е н к о Н. Н., И в а н о в А. В., Статистический анализ случайных полей, К., 1986; [3] V a n - m a r c k e E., Random fields: analysis and synthesis, Camb. – L., 1983; [4] G r e n a n d e r U., Abstract inference, N. Y., 1981; [5] R i p - l e y B., Spatial statistics, N. Y., 1981; [6] М е т е р о н Ж., Основы прикладной геостатистики, пер. с франц., М., 1968.

STATİSTİK ANALİZ(i) təsadüfi proseslərin «статистический анализ случайных процессов»; **statistical analysis of a random process** – riyazi statistika və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin statistik məsələlərinin həlli və tədqiqinə həsr olunmuş bölməsidir.

* **STATİSTİK ASILI ANSAMBLAR** «статистически зависимые ансамбли»; **statistical dependent ensembles** – bax, *Diskret ansambl*.

* **STATİSTİK ASILI OLMAMAZLIQ** «статистическая независимость»; **statistical independence** – bax, *Asılı olmamazlıq*.

* **STATİSTİK ASILI OLMAMAZLIQ(ğı)** ansambların «статистическая независимость ансамблей»; **statistical independence of ensembles** – bax, *Diskret ansambl*.

* **STATİSTİK ASILI OLMAYAN ANSAMBLAR** «статистически независимые ансамбли»; **statistically independent ensembles** – bax, *Diskret ansambl*.

* **STATİSTİK ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR** «статистически независимые события»; **statistically independent events** – bax, *Asılı olmayan hadisələr*.

STATİSTİK CƏM «статистическая сумма; normalizing constant / factor» – *Gibbs paylanması*na tərifinə daxil olan normalizə edici vuruqdur. Diskret $t \in \Lambda$ parametri və qiymətləri ölçülən $(X, \mathcal{L}, \mu)$ fəzasının meydanından olan Gibbs paylanması halında S. c.

$$Z_\Lambda = \int_{X^\Lambda} \exp \{-H(x_t, t \in \Lambda)\} \prod_{t \in \Lambda} \mu(dx_t)$$

integralı kimi təyin olunur, burada H – uyğun Gibbs paylanmasının hamiltonianıdır. X sonlu və ya hesabı, μ isə sayıcı ölçü olduqda, integral aydındır ki, cəmə çevrilir və bu termin də məhz

bu xüsusiyyətlə əlaqədar yaranmışdır. $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ qabında N hissəcikdən ibarət sistemin Gibbs paylanması

$$Z_{N,\Lambda} = \int_{\Lambda^N} \exp \{-H(x_1, \dots, x_N)\} dx_1 \dots dx_N$$

integralı kimi təyin olunur; H – uyğun hamiltoniandır. Böyük kanonik və mikrokanonik ansamblarda Gibbs paylanmasının S. c.-i analogi təyin olunur. Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsində S. c.-in mühüm əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, meydanın sərbəst enerjisi bu cəmlə ifadə olunur, bu da öz növbəsində Gibbs meydanının sonluölçülü paylanmasını ifadə etməyə imkan yaradır.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

STATİSTİK DAYANIQLILIQI, TEZLİKLƏRİN «статистическая устойчивость частот; statistical stability of frequencies» – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*.

STATİSTİK ERQODİK TEOREM «статистическая эргодическая теорема; mean ergodic theorem» – bax, *Ergodik teoremlər*.

STATİSTİK HƏLLEDİCİ QAYDALAR KATEQORİYASI «статистических решающих правил категория; category of statistical decision rules» – bütün Markov keçid ehtimalları ilə (riyazi statistikada həm determinik, həm də randomlanmış *helledici qaydalar* təsvir edən), təbii kompozisiya əməli ilə yaradılan cəbri kateqoriya. Hər hansı ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasında bütün ehtimal paylanmalarının $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ toplusu S. h. q. k.-sıdır. Hər bir $\Pi: \text{cap}(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \text{cap}(\Omega', \mathcal{A}')$ morfizmi,

$$(\Pi \Pi')\{\cdot\} = \int_{\Omega} \Pi(d\omega) \Pi'(\omega \cdot)$$

qaydası üzrə $\Pi(\omega, \mathcal{A}')$, $\omega \in \Omega$, $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$ keçid ehtimalı ilə verilir. Bundan başqa, S. h. q. k.-nin obyektlərini tenzor qayda ilə bir-birinə vurmaq olar (bax, [6]). Bu kateqoriya [3] və [4]-də bir-birindən asılı olmadan qurulmuşdur. Bu kateqoriya ələ həndəsə doğurur ki, burada $\{P_\theta, \theta \in \Theta\} \subset \text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ ehtimal paylanmaları ailəsi – həndəsə fiqurları, morfizmlər – affın çevirmələr rolunu oynayır. Ümumi parametrik çoxluğu Θ olan iki $\{P_\theta\}$ və $\{Q_\theta\}$ ailəsi, statistik nəticə nəzəriyyəsində,

$$(P_\theta \Pi)\{\cdot\} = Q_\theta\{\cdot\}, (Q_\theta \mathcal{K})\{\cdot\}, \theta \in \Theta$$

şərtlə verilən iki Π və $\mathcal{K}$ morfizmlərinin varlığı halında ekvivalent aile hesab edilir. Riyazi statistiklərin bir çox anlayışları bu həndəsənin invariant, kovariant və daha mürəkkəb ekvariantlarıdır (məs., kafi statistika). Qrup hərəkətinə olan həndəsədən fərqli olaraq, kateqoriya həndəsəsində invariantdan (skalılar) başqa, monoton invariant (skalılar) anlayışı da vardır. Məs., S. h. q. k.-nin bütün obyektlərinin kvadratlarda təyin olunmuş $f(P, Q)$ funksionalı $f(\Pi P, \Pi Q)$ ifadəsi təyin olunmuş bütün P, Q, Π toplularında $f(\Pi P, \Pi Q) \leq f(P, Q)$ şərtini ödəyərse, o, monoton invariant funksional adlanır. Məs., *nisbi entropiya* belə kəmiyyətlərdəndir.

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960 (добавление); [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решаю-

щие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] Ченцов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 3, с. 511–14; [4] Morse N., Sacksteder R., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, № 1, p. 203–14; [5] Martin F., Petit J., Petit-Littaye M., «Ann. Inst. H. Poincaré», ser. B., 1971, v. 7, № 2, p. 145–76; [6] Ченцов Н. Н., «Math. Operations Forsch. Statist., ser. Statistic», 1978, v. 9, № 2, p. 267–76.

STATİSTİK HƏLLƏR NƏZƏRİYYƏSİ «статистических решений теория; statistical decision theory»

– statistik eksperimentlərin planlaşdırılması, alınan nəticələrin analizi və araşdırılan obyekt haqqında müəyyən qərarların (mülahizələrin) qəbul olunması haqqında ümumi riyazi nəzəriyyədir. S. h. n. ümumi nöqtəyi – nəzərdən riyazi statistikanın bütün əsas məsələlərini – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsini, *statistik hipotezlərin yoxlanılması* nəzəriyyəsini, *eksperimentin planlaşdırılması* kimi məsələləri araşdırır və formalaşdırır.

Fərz olunur ki, araşdırılan obyekt verilmiş Θ parametrik fəzasının hər hansı abstrakt (naməlum) θ parametrinin qiymətilə xarakterizə olunur. Bu parametrlər üçün həllər fəzası adlanan, mümkün həllər çoxluğu olan $\mathcal{D}$ -dən müəyyən bir d həllini (qərarını) qəbul etmək tələb olunur. Hər bir həllin qəbul edilməsi müəyyən itkilərə səbəb olur, bu itkilər isə obyektə xarakterizə edən θ parametrinin qiymətindən asılı olur. Θ və $\mathcal{D}$ fəzalarında uyğun olaraq, $\mathcal{X}$ və $\mathcal{A}$ σ – cəbrlərinin verdiyi olduğu fərz olunaraq, *itki funksiyası* $L(\theta, d)$ mənfi olmayan ölçülən funksiya kimi $\Theta \times \mathcal{D}$ fəzasında təyin olunur.

Qərar qəbul etmək məqsədilə statistik eksperiment aparılır, bu eksperimentin nəticəsi x araşdırılan obyektə bağlı olan təsadüfi element X (X təsadüfi kəmiyyət, vektor, funksiya, seçim ola bilər) üzərində müşahidələnəndir. Statistik eksperiment nəticəsinin qərar qəbul etmədə istifadəsi S. h. n.-ni qərar qəbul etmə ümumi nəzəriyyəsində fərqləndirir (bax, [6]). $\mathcal{X}$ təsadüfi elementinin ölçülən qiymətləri fəzasında [seçimi fəza adlandırılan $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -də] təyin olunmuş $\mathbf{P}_\theta$ paylanması araşdırılan obyektin naməlum xarakteristikası θ -dan asılıdır. Seçimi fəzalar ailəsi $\mathcal{P} = \{(\mathcal{X}, \mathcal{X}, \mathbf{P}_\theta), \theta \in \Theta\}$ – statistik struktur (ehtimal modeli) adlanır. Araşdırılan obyekt təsadüfi qaydada (hər hansı ehtimal paylanmasına uyğun olaraq) müəyyən bir obyektlər çoxluğundan seçildiyi halda θ müəyyən bir ϑ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası olur, ehtimal modeli (aprior adlanan) ϑ -nın mümkün paylanmaları ilə tamamlanır (bax, *Bəyəs yanaşması* statistik məsələlərə). Eksperimentlərin planlaşdırılması nəzəriyyəsinin mövzusu – rəşional qərarların qəbul edilməsi məqsədilə, statistik eksperimentdə müşahidə olunacaq X təsadüfi elementinin təyin olunmasıdır (seçilməsidir); bu nəzəriyyəyə S. h. n.-nin bir hissəsi kimi baxmaq olar.

Riyazi statistikanın inkişafının başlanğıc mərhələsində qərarlar $\mathcal{X}$ -dən $\mathcal{D}$ -yə ölçülən $d(x)$ inikası (statistikalar) əsasında qəbul olunurdu: əgər X -in müşahidəsi nəticəsi x olmuşsa, onda $d = d(x) \in \mathcal{D}$ həlli (qərarı) qəbul olunurdu.

Bu inikas, yeni $d: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ inikası S. h. n.-də randomlanmamış həlledici funksiya adlanır. Əsas statistik nəticənin optimal prosedurlarının qurulması ilə bağlı nəzəriyyənin sonrakı inkişafı, daha ümumi anlayış olan randomlanmış həlledici funksiya anlayışının yaranmasına səbəb oldu; bu funksiya $\mathcal{X}$ -in $\mathcal{D}$ -yə stoxastik inikası ilə təyin olunur. Bu ümumi halda, x nəticəsinə görə konkret bir $d(x)$

həlli deyil, x -dən asılı, $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ -də təyin olunmuş hər hansı $\varphi(\cdot|x)$ ehtimal paylanması təyin edilir; bu ehtimal paylanması $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -dən $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ -yə keçid ehtimalıdır. φ paylanması qərar qəbul etmə qaydası və ya həlledici qayda adlanır.

Statistik eksperimentin hər bir qeyd olunmuş x nəticəsinə görə $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\varphi(\cdot|x)$ randomlanmış həlledici funksiya adlanır, bu funksiya bəzən həlledici qayda φ ilə eyniləşdirilir.

Beləliklə, statistik eksperimentin nəticəsi x məlum olduqdan sonra, φ qaydasından istifadə edərək, qərar qəbul etmək üçün randomizasiya adlanan əlavə prosedura aparılır. Bu prosedura (randomizasiya) təsadüfi bir mexanizmin qurulmasından ibarətdir (məs., vergəcin və ya təsadüfi ədədlər cədvəlinin köməyi ilə), belə ki, bu mexanizmlə paylanması $\varphi(\cdot|x)$ olan δ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyalarını almaq olur. $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası d sonuncu qərar (həll) kimi qəbul olunur.

Randomlanmamış həlledici funksiyalar cırlaşmış $\varphi(\cdot|x)$ paylanmalarına (həllər fəzası $\mathcal{D}$ -nin hər hansı bir $d(x)$ nöqtəsində toplanmış) uyğun olan randomlanmış həlledici funksiyaların xüsusi halıdır. Buna görə də, S. h. n.-də «həlledici funksiya» termini randomlanmış həlledici funksiya kimi anlaşılır.

İxtiyari həlledici δ funksiyasının keyfiyyəti orta itki kəmiyyəti –

$$R(\theta, \delta) = \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X)) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{D}} L(\theta, a) \varphi(da|x) \mathbf{P}_\theta(dx), \quad (1)$$

ilə təyin edilir; $\theta \in \Theta$ arqumentinin funksiyası $R(\theta, \delta)$ δ həlledici funksiyasının *risk funksiyası* adlanır. Randomlanmamış həlledici funksiyalar halında (1) düsturu

$$R(\theta, \delta) = \int_{\mathcal{D}} L(\theta, \delta(x)) \mathbf{P}_\theta(dx)$$

kimi ifadə olunur.

S. h. n.-nin əsas məsələsi orta itki kəmiyyətini minimallaşdıran δ həlledici funksiyasının qurulmasından ibarətdir. Belə $R(\theta, \delta)$ itkiləri naməlum θ parametrinin əsl qiymətindən asılı olduqlarına görə məqsəduyğun olardı ki, elə həlledici funksiyalar tapılardı ki, bunlar bütün $\theta \in \Theta$ qiymətləri üçün $R(\theta, \delta)$ -ni minimallaşdırıbilsinlər. Bütün $\theta \in \Theta$ və ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün

$R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ münasibətinin ödənilməsinə təmin edən δ^* həlledici funksiyasına müntəzəm münasib həlledici funksiya deyilir. Bütün mümkün həlledici funksiyalar sinfində belə funksiyalar həmişə olmaya da bilər; bu halda S. h. n.-də daha dar siniflərə baxılır və bu siniflərdə bəzən müntəzəm münasib həlledici funksiya tapmaq mümkün olur. Meylsiz həlledici funksiyalar və invariant həlledici funksiyalar sinifləri belə dar siniflərdəndir.

Nəzərə alınmalıdır ki, həlledici funksiyalar sinfinin daralması qəbul olunacaq qərarın keyfiyyət itkisinə səbəb ola bilər, lakin bununla belə, hər bir halda təbii olaraq, yalnız elə həlledici funksiyaların $\mathcal{K}^*$ sinfinə baxmaqla kifayətlənmək olar ki, ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün elə $\delta^* \in \mathcal{K}^*$ olsun ki, bu δ^* üçün bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta) \quad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilsin. Belə $\mathcal{H}^*$ sinfi həlledici funksiyaların tam sinfi adlanır.

Tam sinfin altçoxluqlarından heç biri tam sinif olmazsa, belə sinif minimal tam sinif adlanır. Olduqca ümumi halda minimal sinif məqbul funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür: əgər elə δ^* həlledici funksiyası yoxdursa ki, bu funksiya üçün (2) bərabərsizliyi bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində Θ parametrik fəzasının heç olmasa bir nöqtəsində ciddi bərabərsizliyi ödənilsin, onda δ həlledici funksiyası məqbul həlledici funksiya adlanır.

Minimal tam sinifdə müntəzəm münasib həlledici funksiya olmadığı hallarda, bu sinifdən yeganə həlledici funksiya seçmə prinsipinin olması zəruridir. Bu prinsip həlledici δ funksiyasının (və ya uyğun həlledici φ qaydasının) riski adlanan (risk funksiyasından fərqli olaraq, sadəcə, risk adlandırılan) orta itki kəmiyyətinin bəzi ədədi xarakteristikalarının minimallaşdırılmasına əsaslanır. Məs., risk funksiyasının qeyd olunmuş nöqtədə qiymətinə *Vald riski* deyilir. Bəzən ədəbiyyatda «risk funksiyası» və «Vald riski» anlayışları fərqləndirilmir. Sonuncu bəzən sadəcə risk adlandırılır. Digər risk nümunələri: risk funksiyasının θ üzrə ən böyük qiyməti, aprior risk, aposterior risk və bunlarla bağlı uyğun optimal həlledici funksiyaların xarakteristikaları – minimaks risk və Bayes riski kimi risklərdir. Bəzən riskə additiv əlavə kimi statistik eksperimentin aparılması ilə bağlı olan xərclər də daxil edilir; bu halda risk *tam risk* adlanır. Optimal həlledici funksiyaların qurulması üçün hər bir risk növünə müvafiq uyğun yanaşma vardır. Məs.:

Bayes yanaşması. Fərz olunur ki, ölçülən parametrik $(\Theta, \mathcal{F})$ fəzasında aprior paylanma adlanan G paylanması verilir və bu paylanma vasitəsilə ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün aprior risk:

$$R_G(\delta) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta) G(d\theta)$$

funksiyası daxil olunur, bu funksiya tam orta itki kəmiyyətini təyin edir. Aprior riskin minimum qiymət almasını təmin edən δ_θ həlledici funksiyası *Bayes həlledici funksiyası*, belə optimal həlledici funksiyanın aprior riski $R_G(\delta_G)$ *Bayes riski* adlanır.

Statistik məsələlərin geniş sinfində Bayes həlledici funksiyaları vardır və G paylanması $(\Theta, \mathcal{F})$ fəzasında bütün ehtimal ölçülərinin və onların limitlərinin (həlledici funksiyaların müəyyən zəif yığılma topologiyasında) çoxluğunda deyisərsə, bütün Bayes həlledici funksiyalar çoxluğu həlledici funksiyaların tam sinfini əmələ gətirir.

Statistik məsələlərə Bayes yanaşmasının iki müxtəlif aspekti fərqləndirilməlidir. Bir sıra konkret statistik araşdırmalarda parametrin naməlum qiyməti, həqiqətən də, G paylanmasına malik hər hansı təsadüfi kəmiyyətin realizasiyasıdır (məs., *Statistik qəbul nəzarəti*). Bu halda aprior risk tam orta itki kəmiyyətini həqiqətən xarakterizə edir; lakin G məlum olmadığı halda, optimal həlledici funksiyaların qurulması üçün Bayes yanaşması praktik olaraq, əsas etibarilə, empirik *Bayes yanaşması* çərçivəsində mümkündür. Digər tərəfdən, statistik məsələlərin elə geniş sinfi də vardır ki (məs., hər hansı fiziki konstantın qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi), bu məsələlərdə θ -ya təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası kimi baxmaq olmaz və bu halda G çəki funksiyası, aprior risk isə həlledici funksiyanın keyfiyyətinin formal ədədi xarakteristikasıdır. Bu halda aprior paylanmaya Bayes

həlledici funksiyalarının tam sinfinin münasib parametrizasiyası kimi baxmaq olar.

Minimaks yanaşma risk funksiyasının ən böyük qiyməti – $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$ -nin minimallaşdırılması şərtindən həlledici

funksiyanın seçilməsini təklif edir. Belə ekstremal məsələnin həlli *minimaks həlledici funksiya*, $\inf_{\delta} \sup_{\theta} R(\theta, \delta)$

isə *minimaks risk* adlanır.

Olduqca ümumi halda minimaks həlledici funksiya vardır və bu funksiya

$$\inf_{\delta} R_{G^*}(\delta) = \sup_G \inf_{\delta} R_G(\delta)$$

şərtini ödəyən, çox da münasib olmayan G^* aprior paylanmasına nəzərən *Beyes (ümumiləşmiş Bayes) həlledici funksiyasıdır*.

Bu halda minimaks həlledici funksiyanın risk funksiyası sabitdir və onun qiyməti çox da münasib olmayan paylanmaya nəzərən *Beyes riskinə* bərabərdir.

Minimaks yanaşma θ parametrine nəzərən aprior informasiya olmadığı hallarda çox istifadə olunur və statistik eksperimentin optimal dayanma anının planlaşdırılmasında mühüm rol oynayır. Minimaks yanaşmanın tətbiqi praktikada özünü doğrultmur, çünki, bu yanaşmada qərar qəbul edən statistik ən pis halda orta itki kəmiyyətinə əsaslanır; belə itkilərin minimallaşdırılması isə, bir qayda olaraq, parametrik fəzanın digər nöqtələrində *Vald riskinin* kəskin surətdə artmasına səbəb olur.

Həlledici funksiyaların seçilməsinə müxtəlif yanaşmalar mövcuddur (bax, *Optimallıq (ğı) statistik prosedurların*).

S. h. n.-nin daxil edilmiş anlayışları və metodlarını riyazi statistikanın klassik nəzəriyyəsinin iki əsas problemi təmsalında illüstrasiya etmək olar.

Misal 1. (parametrin qiymətləndirilmə problemi). Parametrik qiymətləndirmənin statistik problemi, adətən, aşağıdakı kimi ifadə olunur: sonluölçülü $\theta \in \Theta$ naməlum parametri üçün paylanması P_θ olan X təsadüfi elementinin

müşahidə nəticəsi x -ə görə $\hat{\theta}(x)$ nöqtəvi statistik qiymətini təyin etmək tələb olunur. S. h. n. nöqtəyi – nəzərindən məsələnin həlləri fəzası kimi Θ parametrik fəzası, həlledici funksiya kimi $\hat{\theta}$ statistik qiyməti götürülür. İtki funksiyası, adətən, yalnız θ ilə qəbul olunmuş $d: L(\theta, d) = l(|\theta - d|)$ həlli (statistik qiymət) arasındakı fərqdən asılı olmaq şərtilə seçilir, $l(0) = 0$. Məs.,

$l(p) = p^2$ kvadratik itki funksiyasıdır və əgər $p < \Delta$ olarsa, $l(0) = 0$, əks halda $l(p) = 1$, $-0 - 1$ tipli itki funksiyasıdır.

Kvadratik itki funksiyası halında statistik qiymətin kvadratik orta xətası risk kimi qəbul edilir; $-0 - 1$ tipli itki funksiyası halında isə risk $(\delta(X) - \Delta, \delta(X) + \Delta)$ intervalından kənarda yerləşən

oblastın θ -nın əsl qiymətini daxilə alması ehtimalıdır. S. h. n.-nin əsas anlayışları Bayes həlledici funksiyası, minimaks həlledici funksiya və s. kimi anlayışlar statistik qiymətləndirilmə probleminə «Bayes statistik qiyməti», «minimaks statistik qiymət» kimi terminlərlə konkret şəkildə ifadə olunur.

Misal 2 ($k \geq 2$ sayda sadə hipotezin fərqləndirilməsi). $\mathcal{P}$ statistik strukturunda Θ çoxluğu sonlu sayda $\theta_1, \dots, \theta_k$ nöqtələrindən ibarət olsun. Statistik problem k

sayda $H_i: \theta = \theta_i, i = 1, \dots, k$ hipotezlerinden birinin doğruluğunu yoxlamaqdır. S. h. n. çərçivəsində baxılan statistik problem sonlu həllər fəzası $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_k)$ ilə təyin olunur, burada $d_i, - H_i$ hipotezinin qəbul edilməsi qərandır, $i = 1, \dots, k$. $L(\theta_j, d_i)$ itki funksiyası

$$L(\theta_j, d_i) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } i = j \text{ olarsa,} \\ 1, & \text{əgər } i \neq j \text{ olarsa.} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur.

Həllədiçi qayda k r i t e r i adlanır və $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$ vektor – funksiyası ilə təyin olunur: $\varphi(x)$ -in i -ci komponenti $\varphi_i(x)$ randomizasiya proseduru nəticəsində H_i hipotezinin qəbul olunması ehtimalına bərabərdir, bu şərtlə ki, X -in müşahidə nəticəsi x -ə bərabər olsun:

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = 1. \varphi \text{ kriterisinin risk funksiyası } \theta_i \text{ nöqtəsində } H_i$$

hipotezi doğru olduğu halda onun qəbul edilməməsi ehtimalına bərabərdir. Bu halda da, qiymətləndirilmə məsələsində olduğu kimi, S. h. n.-nin müvafiq terminləri «Beyes kriterisi», «minimaks kriteri» kimi terminlərlə konkret şəkildə ifadə olunur.

S. h. n.-nin yuxarıda qeyd olunmuş problemləri, əsas etibarilə, riski minimallaşdıran həllədiçi funksiyaların qurulması məsələlərini həyata edirdi.

S. h. n.-nin praktik cəhətdən daha mühüm digər məsələsi statistik nəticənin alınması üçün zamanətli prosedurun qurulması məsələsidir. Problemin mahiyyəti o faktla bağlıdır ki, həllədiçi funksiyaların optimallığı keyfiyyətli qərar qəbul etməyə zamanət vermir, belə ki, risk qəbul olunmayacaq dərəcədə böyük ola bilər. Lakin statistik eksperimenti müvafiq surətdə planlaşdıraraq, yeni eksperimentdə müşahidə olunacaq araşdırılan obyekt haqqında ən informativ xarakteristikalar seçərək və kifayət qədər çox müşahidələr apararaq, risk kəmiyyətini kiçiltmək olar.

Beləliklə, S. h. n. çərçivəsində statistik nəticənin zamanətli olması problemi risk kəmiyyəti üçün verilən məhdudiyyətlərin yerinə yetirilməsinə zamanət verən, statistik eksperimentin keçirilməsi ilə yaranan xərcləri minimallaşdıran statistik prosedurun (müşahidələrin idarə olunma sxemləri, statistik eksperimentin dayandırılması anı və qərar qəbul olunma qaydaları) qurulmasından ibarətdir. Bu problem iki hipotezin yoxlanılması məsələsində aşağıdakı kimi illüstrasiya olunur.

M i s a l 3. $k = 2$ olduğu, yeni iki hipotezin olduğu hal üçün misal 2-də verilmiş statistik problemə baxılır. X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı şəkildə formalaşır. $X_1, X_2, \dots$ – paylanmalar θ -dan asılı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun. Statistik eksperiment bir sıra addımla aparılır: hər bir n nömrəli ($n = 1, 2, \dots$) hər bir addımda X_n təsadüfi kəmiyyəti müşahidə olunaraq müşahidənin nəticəsi x_n qeyd olunur və sonra iki hipotezden birinin qəbul edilməsi qərarı ilə müşahidələrin aparılıb-aparılmaması məsələsinə baxılır. Eksperimentin dayandırılması (müşahidələrin aparılmaması) randomlanmış dayanma qaydası $\varphi_n = \{\varphi_n^*(x^{(n)}), n = 1, 2, \dots\}$ vasitəsilə aparılır, burada $\varphi_n^*(x^{(n)})$ – eksperimentin nəticəsi n -ci addımda $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ olduqda eksperimentin dayandırılması (randomlanma prosedurunun aparılması ilə) ehtimalıdır. Eksperimentin dayandırılması qaydası Markov dayanma anı – ν təsadüfi

kəmiyyətini (seçimin təsadüfi həcmi) doğurur və bu halda $X = (X_1, \dots, X_\nu)$ qınlı diskret təsadüfi proses olur. Statistik prosedura (kriteri) bu halda $\varphi = \{\varphi_n, \varphi_d\}$ cütü ilə təyin olunur, burada φ_d – statistik eksperiment dayandırılan anda qərar qəbulu üçün qaydadır.

Zamanətlik problemi ele φ kriterisinin qurulmasından ibarətdir ki, $R(\theta_i, \varphi) \leq \alpha_i, i = 1, 2$ Vald riski üçün verilmiş (α_1, α_2) məhdudiyyətləri ödənilir, belə ki, bu halda ν seçiminin orta həcmnin ən böyük qiyməti, yeni $\max(M_{\theta_1\nu}, M_{\theta_2\nu})$ minimallaşdır (bax, *Ardıcıl analiz*).

Statistik eksperimentin hər bir addımında yalnız müşahidələrin davam edilməsi məsələsinə deyil, həm də növbəti addımda müşahidə olunacaq təsadüfi kəmiyyətin seçilməsi məsələsinə ehtə edən daha müəkkəb məsələlərə regression eksperimentlərin planlaşdırılması nəzəriyyəsində baxılır. Belə tipli məsələlərdə statistik prosedura φ_i komponenti əlavə olunur – $\varphi = \{\varphi_i, \varphi_n, \varphi_d\}$ qaydası seçilir.

Beyes yanaşması çərçivəsində zamanətli qaydaların qurulmasında tələb olunan məhdudiyyətlər bəzən tam aprior risk üzərinə deyil, eyni bir d qərarının qəbulu ilə sona yetmiş statistik eksperimentlərin orta itki kəmiyyəti üzərinə qoyulur; məs., statistik qəbul nəzarətində məhdudiyyətlər məmulatın müəyyən bir partiyasının qəbulu ilə bağlı və (ayrıca) onun qüsurlu olması ilə bağlı orta itki kəmiyyətləri üzərinə qoyulur.

Statistik nəticənin zamanətliyi problemine belə yanaşma (Bolşev yanaşması) d – aposterior yanaşma adlanır.

Əd.: [1] В а л ь д А., в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–322; [2] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [3] Л е С а м Л., «Ann. Math. Statist», 1955, v. 26, p. 69–81; [4] F e r g u s o n T. S., Mathematical statistics. A decision theoretic approach, N. Y. – L., 1967; [5] B e r g e r J. O., Statistical decision theory, N. Y. – [a. o.], 1980; [6] Д е Г р о о т М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [7] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [8] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [9] Х о л е в о А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [10] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [11] В о л о д и н И. Н., в сб.: Исследования по прикладной математике, в. 10, [Каз.], 1984, с. 13–53.

STATİSTİK HƏLLƏRİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ
« статистических решений общая теория; general statistical decision theory » – statistik qeyri – müəyyənlik vektor fəzanın hər hansı qabarıq $\mathcal{S}$ altçoxlğunun nöqtələri – abstrakt vəziyyətləri ilə təsvir olunduğu hallarda, optimal həllədiçi qaydalar öyrənən nəzəriyyədir.

Statistik struktur $\{S_\theta: \theta \in \Theta\} \subset \mathcal{S}$ vəziyyətlər ailəsinin verilməsilə təyin olunur, burada Θ – həllərin ölçülən fəzası $\mathcal{H}$ -nın və hər bir $\theta \in \Theta$ qiymətində $u \in \mathcal{H}$ üzrə aşağıdan məhdud və ölçülən $W_\theta(u)$ itki funksiyasının namelum parametri θ -nın qiymətlər çoxluğudur.

Vəziyyətlər çoxluğu $\mathcal{S}$ -nin $\mathcal{H}$ -da təyin olunmuş ehtimal paylanmaları çoxluğu $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ -ya affin inikası $M: S \rightarrow \mu_S(du)$ abstrakt həllədiçi qayda adlanır. Verilmiş θ üçün M həllədiçi qaydasının orta riski

$$\mathcal{R}_\theta\{M\} = \int_{\mathcal{H}} W_\theta(u) \mu_{S_\theta}(du)$$

düsturu ilə təyin olunur və bütün həlledici qaydalar çoxluğunda affin funksiyadır.

Adi (klassik) statistik həllər nəzəriyyəsi ilə analogi olaraq, məqbul, minimaks, Beyes və s. həlledici qaydaları formalaşır. Əvəziyyətlər çoxluğunun müşahidələrin hər hansı Ω fəzasında paylanmalar çoxluğu olduğu klassik nəzəriyyədəki nəticələrin əksər hissəsi, müvafiq ümumiləşmə nəticəsində, vəziyyətlər çoxluğunun ixtiyari həli üçün də alınmışdır. Eyni zamanda S. h. ü. n. praktiki maraq kəsb edən *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin kvant nəzəriyyəsinin* elə sxemini əhatə edir ki, bu sxemdə Ə hər hansı Hilbert fəzasında sıxlıq operatorlarının çoxluğu və bu sxem prinsipial olaraq statistik həllərin klassik nəzəriyyəsinə gətirilə bilər.

Əd.: [1] Хо л е в о А. С., Исследования по общей теории статистических решений, «Труды МИАН», 1976, т. 124; [2] О з а в а М., «Repts Math. Phys.», 1980, v. 18, p. 11–28.

STATİSTİK HİDROMEXANİKA « статистическая гидромеханика; statistical hidromechanics » – hidromexanika tənliliklərinin ehtimalı xassələri öyrənilən nəzəriyyədir.

Əd.: [1] Математическая физика. Энциклопедия, М., 1998, с. 569–72.

STATİSTİK HİPOTEZ « статистическая гипотеза; statistical hypothesis » – ehtimal paylanması haqqında müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya proseslərə əsaslanan müəyyən fərziyyədir. Müşahidə nəticələri, adətən, təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu və ya sonsuz hər hansı çoxluğunun realizasiyası kimi ifadə olunur və S. h. bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanmasının hər hansı müəyyən paylanmalar sinfinə aid olması haqqında fərziyyə kimi formalaşır. S. h. kimi elə bu paylanmalar sinfinin özü də anlaşılar. Əgər bu sinif yalnız bir elementdən ibarətdirsə, onda S. h. sadə hipotez adlanır, əks halda – mürəkkəb S. h. adlandırılır. Yeni sadə S. h. müşahidələrin paylanması haqqında müəyyən birqiymətli təyin olunan fərziyyə ifadə edir. Mürəkkəb S. h.-ə misal paylanmanın naməlum parametrlər qədər dəqiqliklə verilməsidir. S. h. statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinin qoyuluşuna daxildir.

STATİSTİK HİPOTEZLƏRİN YOXLANILMASI « статистических гипотез проверка; testing statistical hypotheses » – müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesi təsvir edən ehtimal paylanması haqqında əvvəlcədən irəli sürülmüş statistik hipotezlərdən birinin doğru olub-olmadığı haqqında qərar qəbul etmə problemdir. İki hipotezli məsələlərə daha çox təsadüf olunur və bu halda $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ seçimi fəzasında təyin olunmuş mümkün $\mathbf{P}$ paylanmalarının ailəsi $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$, iki – $H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ və $H_1 = \mathcal{P} \setminus H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_1\}$, $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ altçoxluqlarına ayrılır və müşahidə nəticəsi $X \in \mathcal{X}$ üzrə iki: $\mathbf{P} \in H_0$ və ya $\mathbf{P} \in H_1$ müddəalarından birini qəbul etmək tələb olunur. H_0 və H_1 işarələmələri əksər hallarda hipotezlər üçün istifadə olunur. H_0 hipotezi, adətən, əsas və ya ilkin hipotez, H_1 hipotezi isə alternativ hipotez və ya alternativ adlandırılır. Bu terminologiya H_0 və H_1 hipotezlərinə görə S. h. y. məsələsinin qoyuluşunun qeyri – simmetrikliyi ilə bağlıdır (bax, aşağı).

Əgər H_i , $i = 0, 1$ yalnız bir elementdən ibarətdirsə, onda belə hipotez sadə, əks halda mürəkkəb hipotez adlanır. X -in müşahidəsi üzrə H_0 və H_1 -in qəbul olunması üçün ixtiyari qayda statistik kriteri adlanır. Praktikada, adətən, $S \subset \mathcal{X}$ kritik çoxluğunun verilməsi ilə təyin olunan

kriterilərdən (randomlanmamış) istifadə olunur və X -in müşahidələri nəticəsi bu çoxluqdan olduğu halda H_0 hipotezi qəbul olunmur, yeni qəbul olunur ki, $\mathbf{P} \in H_1$, əks halda (yeni $X \in \mathcal{X} \setminus S$) olarsa, H_0 hipotezi qəbul olunur.

Məs., Bernulli sınaqlarında n -in kifayət qədər böyük qiymətlərində «müvəffəqiyyətlərin» nisbi tezliyinin $1/2$ -dən olduqca fərqlənməsi sınaq nəticələrinin eyniəhtimallı olması hipotezinə zidd olur. Yeni $H_0 = \{\theta = 1/2\}$ hipotezini qəbul etməmək məqsədəuyğun olur və bu halda $H_1 = \{\theta \neq 1/2\}$ hipotezi məqsədəuyğun sayılır (θ «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır) ki, bu halda müvəffəqiyyətlər sayı ν

$$S = \{0, 1, m, n - m, \dots, n\} \quad (1)$$

çoxluğundan qiymətlər alır və burada m elə seçilir ki, $\mathbf{P}\{\nu \in S \mid \theta = 1/2\}$ ehtimalı kifayət qədər kiçik olsun. Ümumiyyətlə, H_0 və H_1 hipotezlərini etibarlı fərqləndirmək üçün S çoxluğu elə seçilməlidir ki, X -in S -dən olması $\mathbf{P} \in H_0$ hipotezi şərtində az ehtimalı, $\mathbf{P} \in H_1$ hipotezi şərtində isə kifayət qədər böyük ehtimalı olsun.

Bu tələb aşağıdakı kimi ifadə olunur. Kriterini tətbiq etdikdə iki növ səhvə yol verilə bilər. H_0 hipotezi əslində doğru olduğu halda $\mathbf{P} \in H_1$ qərarı qəbul olunur, onda bu 1-ci növ səhv adlanır. 2-ci növ səhv H_1 alternativi əslində doğru olduğu halda, H_0 hipotezinin qəbul edilməsinə deyilir. Kritik çoxluğu S olan kriteri üçün 1-ci növ səhv $\mathbf{P} \in H_0$, lakin müşahidənin nəticəsi $X \in S$ olduğu halda baş verir. Uyğun olaraq, $\mathbf{P} \in H_1$, $X \in \mathcal{X} \setminus S$ olduqda isə 2-ci növ səhv baş verir.

Kriteri elə seçilməlidir ki, səhv ehtimalları mümkün qədər kiçik olsun. Lakin hər iki səhvi məhdud olmayaraq azaltmaq, ümumiyyətlə, mümkün deyildir: birinin azaldılması, digərinin artmasına səbəb olur. S. h. y.-na ən çox yayılmış yanaşma ondan ibarətdir ki, 1-ci növ səhvin ehtimalı əvvəlcədən verilmiş kiçik $\alpha > 0$ ədədi ilə məhdudlanır (bax, *Mühümlük ölçüsü*) və bu məhdudiyyəti ödəyən kriterilər sinfində 2-ci növ səhv ehtimalı mümkün olduqca kiçik olan kriteri axtarılır. Bir qayda olaraq, bu ehtimalı $\theta \in H_1$ üzrə müntəzəm kiçik etmək olmur. Buna görə də, etibarlılığı verilmiş α ilə nəzarət olunan « H_0 hipotezini qəbul etməmək» qərarından fərqli olaraq, « H_0 hipotezini qəbul etmək» qərarı yalnız onu ifadə edir ki, H_0 hipotezi müşahidə nəticələri ilə uzlaşır, $\mathbf{P}$ -nin H_0 -dan mümkün yayınması kifayət dərəcədə böyük olmur ki, bu yayınma verilmiş eksperimentdə nəzərə çarpsın.

S. h. y. proseduru ümumi şəkildə $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ kritik funksiyası ilə verilir və bu prosedur ondan ibarətdir ki, X -in müşahidəsində əlavə: ehtimalları $\varphi(X)$ və $1 - \varphi(X)$ olan iki nəticəsi olan təsadüfi sınaq aparılır; birinci nəticə baş verdikdə H_0 hipotezi qəbul olunmur, ikinci nəticə baş verdikdə H_0 qəbul olunur. Bununla da, bütün kriterilər sinfi qiymətləri $[0, 1]$ -dən olan, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzasında bütün ölçülən φ funksiyalarının çoxluğu

kimi təsvir olunur. Əgər φ yalnız 0 və 1 qiymətlərini alırsa, kriteri r a n d o m l a n m a m ı ş kriteri adlanır, bu hal əvvəldə baxılan $S = \{x: \varphi(x) = 1\}$ halına uyğundur. Əks halda kriteri r a n d o m l a n m ı ş kriteri adlanır.

Əgər $X \sim P_\theta$, $\theta \in \Theta$ paylanması malikdirsə, onda kritik funksiyası φ olan kriteri (və ya qısaca, φ kriterisi) H_0 hipotezini

$$\beta_\varphi(\theta) = M_\theta \varphi(X) = \int \varphi(x) P_\theta(dx), \theta \in \Theta \quad (2)$$

ehtimalı ilə qəbul etmir. $\theta \in \Theta_0$ olduqda, $\beta_\varphi(\theta)$ funksiyası φ kriterisinə müvafiq 1-ci növ səhv ehtimalı kimi interpretasiya olunur, $\sup \{\beta_\varphi(\theta); \theta \in \Theta_0\}$ kəmiyyəti isə φ kriterisinin ö l ç ü s ü adlanır. 2-ci növ səhv ehtimalı $1 - \beta_\varphi(\theta)$ -ya bərabərdir, $\theta \in \Theta_1$. Bu ehtimalın kiçik olması tələbi φ kriterisinin güc funksiyası adlanan $\beta_\varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$ funksiyasının özünün 1-ə yaxın olması tələbi ilə eynigüdüdür. Beləliklə, S. h. y. məsələlərində kriterinin seçilməsi

$$\beta_\varphi(\theta) \leq \alpha, \quad \theta \in \Theta_1 \quad (3)$$

şerti ilə məhdudlanır və belə kriterilər sinfində gücü ən böyük

$$\beta_\varphi(\theta), \quad \theta \in \Theta_1 \quad (4)$$

kriterisinin tapılmasına səy edilir.

(3) şərti ödənilmədiyi halda (4) funksionalları ailəsinin maksimizasiyası məsələsinin həllinin olduğu statistik modellərin nisbətən dar sinifləri mövcuddur. Əgər H_0 və H_1 sadə hipotezlədirsə, onda bu məsələnin konstruktiv həlli Neyman – Pirson lemmasına əsasən alınır. H_1 alternativini sadə hipotez olduğu halda qeyd olunan məsələnin həlli əvvəlcədən mövcuddur. H_1 mürekkəb hipotez olduğu halda bu məsələnin həlli yalnız olduqca spesifik H_0 və H_1 hipotezləri ailəsi üçün vardır (bax, Müntəzəm ən güclü kriteri).

M i s a l 1. «Müvəffəqiyyət» ehtimalı θ , $0 \leq \theta \leq 1$ olan n sayda Bernulli sınaqlarının nəticəsi üzrə $H_1 = \{\theta > 1/2\}$ hipotezinə alternativ $H_0 = \{\theta \leq 1/2\}$ hipotezi yoxlanır. Məs., yeni çeşid toxumların yoxlanılması məsələsi belə praktiki məsələdir. n sayda biricins. iki hissəyə bölünmüş sahələrdə yeni çeşid və «nəzarətçi» çeşid toxumları ekilir və bunların məhsuldarlığı müqayisə olunur. Əgər yeni çeşidin məhsuldarlığı digəri ilə müqayisədə çoxdursa, bu hal «müvəffəqiyyət» kimi qeyd olunur. Təsədüfi dəyişikliklər nəzərə alınmaqla, $\theta = 1/2$ olması məhsuldarlıqda fərqin olmadığına, θ -nın $1/2$ -dən fərqli olması isə bu və ya digər çeşidin məhsuldarlığının artıq olduğuna dəlalət edir. H_0 hipotezi yeni çeşid toxumun üstün olmadığı fərziyyəsini ifadə edir. Əgər H_0 hipotezi qəbul olunmursa, onda yeni çeşidin məhsuldarlığının müqayisədə çox olması nəticəsi çıxanılır; bu müddəə onun etibarlılığına $\leq \alpha$ ehtimalı ilə nəzarət edərək səhv ola bilər. Əks halda, belə nəticə çıxanılır ki, çeşidlərin bir-birindən üstünlüyü yoxdur, ya da ki, bu o qədər azdır ki, onu müəyyən etmək olmur.

Bu misalda $\mathcal{X}$ fəzası kimi 2^n sayda $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektorlarından ibarət çoxluq götürmək olar, burada x_i 0 və 1

qiymətlərini alır. Müşahidə olunan $X = (X_1, \dots, X_n)$ vektoru $x \in \mathcal{X}$ qiymətini

$$P_\theta \{x|\theta\} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

ehtimalı ilə alır, $\theta \in \Theta = [0, 1]$; $\Theta_0 = [0, 1/2]$, $\Theta_1 = (1/2, 1]$.

$v = \sum_i X_i$ təsadüfi kəmiyyəti («müvəffəqiyyətlər» sayı) (n, θ) parametrləri

$$P\{v = k|\theta\} = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

binomial paylanma qanununa tabedir. v -nin böyük qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etməmək təbii. Bu isə onu ifadə edir ki, əgər randomlanmamış kriterilə kifayətlənmək olarsa, onda $v > k_\alpha$ olduqda H_0 hipotezi qəbul olunmamalıdır, burada k_α verilən mühümlük ölçüsü α ilə ələ təyin olunur ki,

$$P\{v > k_\alpha | 1/2\} = p_{k_\alpha+1} + \dots + p_n = \alpha' \leq \alpha,$$

$$P\{v \geq k_\alpha | 1/2\} = \alpha' + p_{k_\alpha} > \alpha \quad (5)$$

şərtləri ödənilsin, burada $p_k = P\{v = k | 1/2\} = C_n^k 2^{-n}$. Belə kriterinin ölçüsü $\alpha' \leq \alpha$ -ya bərabərdir. Əgər $\alpha' < \alpha$ olarsa, onda böyük gücə malik, $\alpha - \alpha'$ ölçülü randomlanmış kriteri qurmaq olar. Bu kriterinin kritik funksiyası

$$\varphi_1(X) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } v > k_\alpha, \\ \gamma_1, & \text{əgər } v = k_\alpha, \\ 0, & \text{əgər } v < k_\alpha \text{ olarsa,} \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $\gamma_1 = (\alpha - \alpha')/p_{k_\alpha}$, yeni bu kriteri $v > k_\alpha$ olduqda determinik olaraq H_0 hipotezini qəbul etmir, $v = k_\alpha$ olduqda isə H_0 hipotezini γ ehtimalı ilə qəbul etmir. Bu kriterinin gücü

$$\beta_{\varphi_1}(\theta) = \sum_{k=k_\alpha+1}^n C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} + \gamma C_n^{k_\alpha} \theta^{k_\alpha} (1-\theta)^{n-k_\alpha}$$

düsturu ilə ifadə olunur (yuxarıda göstərilən randomlanmamış kriterinin gücü düsturunda axırıncı toplanan yoxdur). İsbat etmək olar ki, bu kriteri müntəzəm ən güclü kriteridir, yeni $\alpha - \alpha'$ ölçülü ixtiyari digər kriterinin gücü hər bir $\theta > 1/2$ üçün böyük deyildir. Bununla da, (3) şərti ödəniləndə (4) gücünün maksimizasiyası bu halda tamamilə həll olunur.

Bir çox hallarda məsələnin göstərilən şəkildəki qoyuluşu həllə gətirmir və buna görə də, məsələnin dəqiqləşdirilməsi və ya tamamlanması tələb olunur. Mümkün yanaşmalardan biri kriterinin bu və ya digər arzuolunan xassələrini ifadə edən bezi əlavə tələblərin köməyi ilə baxılan kriterilər sinfinin daraldılmasıdır. Bu xassələrdən oxşarlıq, meylsizlik və invariantlıq əsas xassələrdir (bax, Oxşar kriteri, Meylsiz kriteri, İnvariant kriteri). Digər yanaşmalar güc funksiyasının bezi funksionalları maksimumlaşdırma- siyasından ibarətdir, məs., hər hansı ölçü üzrə onun ortalanması və ya alternativ hipotezlərin hər hansı çoxluğunda onun minimumlaşdırma- siyasından (bax, Bayes yanaşması statistik məsələ- lərə, Maksimin kriteri).

M i s a l 2. Elə bu statistik modeldə $H_0 = \{\theta = 1/2\}$ hipotezi alternativ $H_1 = \{\theta \neq 1/2\}$ hipotezinə qarşı yoxlanılır.

«Təbii» randomlanmamış kriteri H_0 hipotezini $v \in S$ olduqda, $m = n - k_{\alpha/2} - 1$ halında qəbul etmir (bax, [1]), burada $k_{\alpha/2}$

$$\mathbf{P}\{v > k_{\alpha/2} | 1/2\} = \alpha^*/2 \leq \alpha/2, \quad \mathbf{P}\{v \geq k_{\alpha/2} | 1/2\} > \alpha/2$$

şərtlərlə təyin olunur. α – ölçülü uyğun randomlanmış kriterinin kritik funksiyası

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } X \leq m \quad \text{və ya } X \geq n - m, \\ \gamma_2, & \text{əgər } X = m + 1 \quad \text{və ya } X = n - m - 1, \\ 0, & \text{əgər } m + 1 < X < n - m - 1 \quad \text{olarsa,} \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $\gamma_2 = (\alpha - \alpha^*)/2 p_{k_{\alpha/2}}$. Bu məsələdə müntəzəm ən güclü kriteri yoxdur. φ_2 kriterisi meylsiz kriterilər sinfində müntəzəm ən güclü kriteridir, yeni $\theta \neq 1/2$ olduqda, $\beta_\varphi(\theta) \geq \alpha$ xassəli, α – ölçülü φ kriteriləri sinfində müntəzəm ən güclü kriteridir. φ_2 kriterisi də, G ölçüsünün $[0, 1]$ parçasında $1/2$ -ə görə simmetrikiyi halında

$$\int_0^1 \beta_\varphi(\theta) dG(\theta) \quad (6)$$

ən böyük orta gücə malikdir. Bu kriteri «əhəmiyyət kəsb etməyən» simmetriklik zonasından kənarda güc minimumunu maksimuma mallaşdırır, yəni bu zonada

$$\max_{\varphi} \min_{|\theta - 1/2| \geq \delta} \beta_\varphi(\theta) \quad (7)$$

ixtiyari $0 < \delta < 1/2$ üçün nail olunur.

Müntəzəm ən güclü kriteri olmadığı halda kriterilərin mümkün olduqca dar sinfinin seçilməsi məsələsi qarşıya çıxır, yəni elə sinfin ki, bu sinfə daxil olmayan hər bir kriteri üçün həmin sinfdə elə kriteri vardır ki, onun gücü bu kriterilərin gücündən az olmasın. Bu məsələ kriterilərin məqbulluğunun araşdırılması ilə sıx bağlıdır (bax, *Statistik kriteri*; tam sinif; *Məqbulluq* (ğ u) statistik prosedurun).

Bu qəbildən olan məsələlərdə *statistik həllər nəzəriyyəsinin* metodlarından istifadə olunur.

Məs., misal 2-də

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } v < k_1 \quad \text{və ya } v > k_2, \\ \gamma_i, & \text{əgər } v = k_i, \quad i = 1, 2, \\ 0, & \text{əgər } k_1 < v < k_2 \quad \text{olarsa} \end{cases} \quad (8)$$

şəklində kriterilər üçün $\beta_\varphi(1/2) = \alpha$ şərtini ödəyən kriterilər tam sinif təşkil edir, burada $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$. Bu fakt onu ifadə edir ki, güc funksiyasının qiymətlərinə əsaslanan konkret kriterinin seçilməsi (8) şəkilli kriterilərlə məhdudlana bilər. Məs., (6) və ya (7)-ni maksimuma mallaşdıran kriterinin axtarılmasında bu sinflə kifayətlənmək olar, ümumiyyətlə, qeyri – simmetrik ölçü və ya əhəmiyyətsiz zona halında məsələ olduqca asanlaşır.

Xüsusi tipli modellərin dar sinfindən başqa (bunlara misal 1 və 2 aiddir) S. h. y. məsələlərinin «dəqiq» həlli mümkün olmur, ya da ki, seçimin həcmi n -in hər hansı böyük qiymətlərində olduqca çətin olur. Buna görə də, S. h. y. məsələlərinin təqribi həlli üçün nisbətən sadə limit qanunauyğunluqlarından və statistik modellərdən istifadə etməklə asimptotik metodlardan geniş istifadə olunur (bax, *Riyazi statistika*; a s i m p t o t i k m e t o d l a r).

Praktiki məsələlərdə H_0 və H_1 hipotezləri ailələrinin seçil-

məsi **P** paylanması haqqında olan aprior informasiya ilə təyin olunur, bu informasiya əvvəllər alınmış məlumatlara və ya araşdırılan hadisə və ya prosesin nəzəri analizinə əsaslanır. Aprior informasiya kifayət qədər olmadıqda riyazi statistikanın qeyri – parametrik metodlarından istifadə olunur (bax, *Riyazi statistika*; q e y r i – p a r a m e t r i k m e t o d l a r). Aprior informasiyadan maksimal istifadə mühüm əhəmiyyətə malikdir, H_0 və H_1 hipotezləri ailələrinin daralması məsələni sadələşdirirdiyindən, ən güclü kriterilərin qurulmasına imkan yaradır. Digər tərəfdən, modelin real vəziyyətə adekvat ola bilməyəcəyi halda, məqsəduyğun olardı ki, baxılan statistik məsələdəki kriterilərin xassələri modelin bu və ya digər dəyişikliklərində az dəyişsin (bax, *Robastlıq* (ğ ı) statistik prosedurun).

Yuxarıda nəzərdə tutulurdu ki, müşahidələrin sayı və struktura statistik təsir edə bilməz. Bir çox praktiki hallarda, müşahidələr eksperimentin nəticəsi kimi alınır ki, eksperiment kriterinin verilmiş xarakteristikalarının alınması məqsədilə əvvəldən planlaşdırıla bilər. Məs., verilmiş $\delta > 0$ və $\varepsilon > 0$ üçün sınaqlar sayı n -i elə təyin etmək olar ki, φ_2 kriterisi alternativləri fərqləndirməyə imkan yaratsın, elə alternativləri ki, onların $1/2$ -dən fərqi δ -dan az olmasın, gücü isə $1 - \varepsilon$ -dan kiçik olmasın. Daha

mürəkkəb məsələlərə: müşahidələr aparılan nöqtələrin seçilməsi (parametrlərin, rejimlərin seçilməsi), eksperimentin davam etdirilməsi və dayandırılması qaydasının verilməsi və s. aiddir; eksperimentin aparılmasına sərf olunan xərclər və ya onun aparılması üçün ayrılan vaxt nəzərə alın bilər (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*).

S. h. y. məsələləri nöqtəvi və etibarlı qiymətləndirmə məsələləri ilə sıx əlaqədardır. Məs., parametrin qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması üçün onun hər hansı statistik qiymətindən istifadə oluna bilər (məs., hesab etmək olar ki, misal 1 və 2-dəki kriterilər θ parametrinin statistik qiyməti – $\hat{\theta} = v/n$ -ə əsaslanır).

Digər tərəfdən, S. h. y. nəzəriyyəsinin nəticələri qiymətləndirmədə aşağı sərhədin dəqiqliyini təyin etmək üçün də istifadə oluna bilər. Məs., $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ olduqda, $\tilde{\theta}$ statistik qiymətinin θ -ya nəzərən ədəd oxundakı vəziyyəti

$$\mathbf{P}_\theta \{ |\hat{\theta} - \theta| > h \}, \quad h > 0 \quad (9)$$

ehtimalları ilə xarakterizə olunur. $\tilde{\theta}$ -nın θ üçün median – meylsiz statistik qiymət olduğu, yəni

$$\mathbf{P}_\theta \{ \hat{\theta} \leq \theta \} = \mathbf{P}_\theta \{ \hat{\theta} \geq \theta \} = 1/2, \quad \theta \in \Theta$$

olduğu fərz olunur. Onda $\hat{\theta} \leq \theta_0 + h$ olduqda $H_1 : \theta = \theta_0$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta = \theta_0 + h$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin 1-ci və 2-ci növ səhvlərinin ehtimalları uyğun olaraq,

$$\mathbf{P}_{\theta_0+h} \{ \hat{\theta} \leq \theta_0 + h \} = 1/2$$

və

$$\mathbf{P}_{\theta_0} \{ \hat{\theta} > \theta_0 + h \} \quad (10)$$

olur.

Deməli, (10) ehtimalı $\alpha = 1/2$ ölçülü ən güclü kriterinin 2-ci növ səhvinin ehtimalından kiçik deyildir; bu kriteri Neyman – Pirson lemmasına əsasən qurulur. $\mathbf{P}_{\theta_0} \{ \hat{\theta} \leq \theta_0 - h \}$ üçün

analoji sərhəd ilə birlikdə bu (9) üçün $\hat{\theta}$ -nin median – meylsiz statistik qiymətləri sinfi üzrə aşağı sərhədi təyin edir.

Etibarlı qiymətləndirmədə etibarlı çoxluğa statistik kriterilərin verilmiş sinfi üzrə müşahidələrin nəticələri ilə «uzlaşan» parametrlər qiymətləri daxildir. Bu halda kriterilərin optimallığı xassələri və etibarlı çoxluqların xassələri bir-birilə əlaqəli olur. Bax, *Etibarlı qiymətləndirmə. Ən dəqiq etibarlı çoxluq.*

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [5] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [6] Нейман Ю., Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, пер. с англ., М., 1968; [7] Гинхман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

STATİSTİK XARAKTERİSTİKA « статистическая характеристика; statistical characteristic » – empirik paylanma üzrə qurulmuş orta qiymət, moda, median, kvadratik orta yayınma, variasiya əmsali və s. kimi ən sadə statistikaların realizasiyalarına tətbiq olunmaqla seçim üzrə statistik nəticələr alındıqda riyazi statistika terminologiyasının formalaşması mərhələsində istifadə olunmuş təmindir.

STATİSTİK KRİTERİ « статистический критерий; statistical test », statistik test, – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində statistik hipotezlərdən birinin doğruluğu haqqında qərar qəbul etmə qaydasıdır. Ümumi halda, S. k. kritik funksiya ilə verilir; *randomlanmış kriteri kritik oblastla* verilə bilər, kritik oblast isə praktiki olaraq, kriterinin *statistikası* vasitəsilə təyin olunur.

STATİSTİK KRİTERİ; məqbulluq « статистический критерий; допустимость; admissibility of a statistical test » – bax, *Məqbulluq (ğu) statistik kriterinin.*

STATİSTİK KRİTERİ; tam sinif « статистический критерий; полный класс; complete class of a statistical test » – *stoxastik hipotezlərin yoxlanılması* məsələsində baxılan ele statistik kriterilər çoxluğu ki, bu kriterilər öyrənilən məsələdə qəbul edilən qərarların keyfiyyətinin itkisiz olmasına kifayət edir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması məzəriyyəsində S. k.-lərin tam sinfi anlayışı statistik həllər məzəriyyəsində *statistik prosedurların* tam sinfi ümumi anlayışının konkret formasıdır. X – paylanması naməlum $\omega \in \Omega$ parametridən asılı P_ω olan təsadüfi seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1: \omega \in \Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı ilkin $H_0: \omega \in \Omega_0$ hipotezi yoxlanılır, Ω_0 və Ω_1 Ω -nin kəsişməyən altçoxluqlarıdır. K bu məsələdə kriterilərin hər hansı sinfi, $K^* \subset K$ hər hansı alt sinif olsun. Əgər ixtiyari $\varphi \in K$ kriterisi üçün ele $\psi \in K^*$ kriterisi olarsa ki, $\beta(\omega|\varphi) = M_\omega \varphi(X)$ φ kriterisinin güc funksiyası olduqda

$$\text{bütün } \omega \in \Omega_0 \text{ üçün } \beta(\omega|\psi) \leq \beta(\omega|\varphi), \quad (1)$$

$$\text{bütün } \omega \in \Omega_1 \text{ üçün } \beta(\omega|\psi) \geq \beta(\omega|\varphi) \quad (2)$$

şərtləri ödənilsin, onda K^* sinfi K sinfində məhiyyətce tam sinif adlanır. Əgər bu halda ω -nin ($\omega \in \Omega$) heç

olmasa bir qiymətində hər bir (φ, ψ) cütü üçün (1) və (2)-də ciddi bərabərsizlik ödənilsə, onda K^* sinfi K sinfində tam sinif adlanır. Əgər K^* sinfini tamlıq xassəsi (məhiyyətce tamlıq xassəsi) saxlanılmaqla daraltmaq mümkün olmazsa, onda K^* minimal tam (məhiyyətce tam) sinif adlanır.

Statistik prosedurların tam sinfi haqqında ümumi nəticələr hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində S. k.-lərin tam sinifləri üçün ifadə olunur və konkretləşdirilir: məqbul kriterilər çoxluğu minimal məhiyyətce tam sinif əmələ gətirir; geniş mənada Bayes kriteriləri çoxluğu məhiyyətce tam sinif əmələ gətirir və s. Lakin hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinin geniş sinfi üçün S. k.-nin tam sinfinin daha ətraflı təsvirləri məlumdur. Hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində ən mükəmməl nəticələr paylanmaların eksponensial ailəsinin parametrləri haqqında alınmışdır.

$\omega = (\xi, \theta)$ olsun; burada $\xi \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, $\theta \in \Theta \in \mathbb{R}^m$ və $\Omega = \Xi \times \Theta$. $\mathbb{R}^{k+m}$ -də eksponensial tip $P_{\xi, \theta} \equiv P_{\xi, \theta}$ ailəsi $\mathbb{R}^{k+m}$ -də hər hansı ehtimal paylanması P -yə nəzərən

$$\frac{dP_{\xi, \theta}}{dP}(x) = B(\xi, \theta) \exp \{ \xi' U(x) + \theta' T(x) \} \quad (3)$$

sıxlığı ilə təyin olunur. Paylanması $P_{\xi, \theta}$ olan X təsadüfi seçiminin x müşahidəsi üzrə $H_1: \xi \in \Xi \setminus \{0\}$, $\theta \in \Theta$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \xi = 0$, $\theta \in \Theta$ ilkin hipotezi yoxlanılır; bu qoyuluşda θ əngəlləyici parametrdir. $m = 0$ olduqda (yəni əngəlləyici parametrlər olmadıqda) müəyyən olunmuşdur ki (bax, [1]), S. k.-lərin tam sinfi hipotezlərin qəbul olunma oblastlarının qəbər kriterilərindən ibarətdir, yəni ele $\psi(x) = \psi(x|C)$ kriterilərdən ki, onlar

$$\psi(x|C) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } U(x) \in \text{Int } C, \\ 1, & \text{əgər } U(x) \notin C \end{cases} \quad (4)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $C \subseteq \mathbb{R}^k$ – qapalı qəbər çoxluqdur ($\text{Int } C$, – C -nin daxildir); ∂C sərhədində randomizasiya (ölçülən) mümkündür.

Bu nəticə sonralar dəqiqləşdirilmiş və müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir (bax, [2] – [4]). Məs., əgər Ξ çoxluğu hər hansı qəbər V konusuna daxildirsə, onda (4) şəklində kriterilər tam sinif təşkil edir, bu kriterilər üçün qəbər C çoxluqları V konusunun polyanlarıdır, V^0 -dan olan istiqamətlərdə recessiv («lat. əlamət – üstünlük təşkil edən, inkişaf etmiş – dominant əlamətə əks olan əlamətdir») çoxluqlardır. Əgər Ξ çoxluğu $\mathbb{R}^k$ və ya V ilə üst-üstə düşərsə, onda uyğun tam siniflər minimal tam siniflər olur (bax, [5]).

Əngəlləyici parametrlər olduğu hallarda ($m > 0$) S. k.-nin tam sinfi [6]-də müəyyənləşdirilmişdir və bu sinif hipotezin qəbul olunma oblastının qəbər kəsikləri kriterilərindən ibarətdir, yəni

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } (U(x); T(x)) \in \text{Int } D, \\ 1, & \text{əgər } (U(x); T(x)) \notin D \end{cases}$$

münasibətilə verilən $\psi(x)$ kriterilərindən ibarətdir, burada $D \subset \mathbb{R}^{k+m}$ – bütün t – kəsikləri $C(t) = \{U \in \mathbb{R}^k;$

$(U, t) \in D\} \mathbb{R}^k$ -nin qəbənq altçoxluluqları olan ölçülən çoxluqdur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələlərində uyğun olaraq, asimptotik tam sinif anlayışı daxil olunur. $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ – naməlum $\xi \in \mathbb{R}^k$ və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ parametrlərindən asılı, paylanması $P_{\xi, \theta}$ olan təkrar seçim olsun [burada $P_{\xi, \theta}$ ixtiyari paylanmalar ailəsidir və onun (3) şəklində olması vacib deyildir]. $X^{(n)}$ seçimi üzrə yaxınlaşan $H_{1n}: \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}$ ($\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, $\theta \in \Theta$) alternativləri ardıcılığına qarşı $H_0: \xi = 0$ hipotezi yoxlanılır; θ – engelleyici parametrdir. Bu məsələdə həlledici qayda $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcılığı ilə verilir və hər bir n qiymətində $\varphi_n(x^n)$ kriterisi n həcmli seçim üzrə qurulur və $\beta_n(\xi, \theta | \varphi_n) = M_{\xi, \theta}^{(n)} \varphi_n(X^n)$ güc funksiyası ilə xarakterizə olunur.

$r \geq 0$ – tam ədəd, K – ardıcıl kriterilərin hər hansı sinfi olsun.

Əgər $\{\varphi_n\} \in K$ kriterilər ardıcılığı üçün ələ $\{\psi_n\} \in K^*$ kriterilər ardıcılığı tapılsa ki, bütün $\lambda \in \Lambda$ və $\theta \in \Theta$ qiymətlərində və $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\beta_n(0, \theta | \psi_n) \leq \beta_n(0, \theta | \varphi_n) + o(n^{-r/2}),$$

$$\beta_n(\lambda/\sqrt{n}, \theta | \psi_n) \geq \beta_n(\lambda/\sqrt{n}, \theta | \varphi_n) + o(n^{-r/2})$$

münasibətlərini ödəsin, onda $K^* \subset K$ sinfi r tərtib asimptotik tam sinif adlanır. (k, m, r) parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində bütün ardıcıl kriterilər sinfində S. k.-lərin asimptotik tam sinifləri müəyyən olunmuşdur; $k \geq 1$, $m = 0$, $r = 0$, bax, [1]; $k = 0$, $m = 0$, $r = 1$ və $r = 2$, bax, [7] və [8]; $k \geq 1$, $m = 0$ və $r \geq 0$, bax, [9]; $k \geq 1$, $m > 0$, $r = 0$, bax, [10]; $k \geq 1$, $m > 0$, $r > 0$, bax, [11]. Bundan başqa, ardıcıl kriterilərin müxtəlif konkret siniflərində S. k.-lərin asimptotik tam sinifləri öyrənilmişdir (bax, məs., [12], [13] və *Statistik kriteri* $C(\alpha)$ və [10]).

Əd.: [1] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [2] Eaton M. L., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 6, p. 1884–88; [3] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 404–10; [4] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 576–80; [5] Stein C. H., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 616–23; [6] Matthes T. K., Truax D. R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 3, p. 681–97; [7] Чибисов Д. М., в кн.: Proceeding of the Prague symposium on asymptotic statistics, 1973, v. 2, Prague, 1974, p. 37–68; [8] Pfanzagl J., в кн.: Statistical inference and related topics, v. 2, N. Y., 1975, p. 1–43; [9] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 67–80; [10] Бернштейн А. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11(258), с. 3–18; [11] Бернштейн А. В., в сб.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике, т. 1, Вильнюс, 1985, с. 77–79; [12] Pfanzagl J., Wefelmeyer W., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 45, H. 1, S. 49–72; [13] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91.

STATİSTİK KRİTERİ $C(\alpha)$ « статистический критерий $C(\alpha)$; statistical $C(\alpha)$ – test » – engelleyici parametrlər olduğu halda müəkkəb statistik hipotezlərin fərqləndiril-

məsi üçün statistik asimptotik oxşar kriteridir. Belə kriterilərin qurulması üçün əsas konsepsiyalar Yu. Neyman tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur və buna görə də, S. k. $C(\alpha)$ bezən Neyman $C(\alpha)$ – kriteriləri də adlandırılır.

$X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ – naməlum $\xi \in \mathbb{R}^k$ və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ parametrlərindən asılı $P_{\xi, \theta}$ paylanmalı, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən paylanma sıxlığı $p(x | \xi; \theta)$ olan təkrar seçim olsun. Bu seçim əsasında $H_0: \xi = 0$ müəkkəb hipotezi $H_1: \xi \neq 0$ müəkkəb alternativ hipotezinə qarşı engelleyici θ parametri olduğu halda yoxlanılır. Fərz olunur ki,

$$\left. \begin{aligned} y(x, \theta) &= \frac{\partial \ln p(x | \xi; \theta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \\ z(x, \theta) &= \frac{\partial \ln p(x | \xi; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

– loqarifmik törəmələrin uyğun olaraq, k – ölçülü və m – ölçülü vektorlardır. $z(X_1; \theta)$ təsadüfi vektorunun komponentləri üçün $y(X_1; \theta)$ təsadüfi vektorunun (H_0 hipotezi şərtində) $k \times m$ tərtib reqressiya əmsalları matrisi $A = A(\theta)$

$$M_{0, \theta}(y(X_1; \theta) - A z(X_1; \theta))(z(X_1; \theta))^T \equiv 0 \quad (2)$$

şərtindən təyin olunur və fərz olunur ki,

$$y^*(x, \theta) = y(x, \theta) - A(\theta) z(x, \theta); \quad (3)$$

$$\Xi(\theta) = M_{0, \theta}(y^*(X_1; \theta))(y^*(X_1; \theta))^T \quad (4)$$

– H_0 hipotezi şərtlərində $y^*(X_1; \theta)$ təsadüfi vektorunun kovariasion matrisidir; $k = 1$ olduqda (4) dispersiyası $\sigma^2(\theta)$ ilə işarə olunur.

Birölçülü halda ($k = 1$), S. k. $C(\alpha)$

$$Y_n = Y_n(X^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{n} \sigma(\tilde{\theta}_n)} \sum_{i=1}^n y^*(X_i; \tilde{\theta}_n) \quad (5)$$

statistikasına əsaslanır, burada $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(X^{(n)})$ – ilkin hipotezin şərtlərində [seçimin paylanması $P_{0, \theta}^{(n)}$ olduğu halda] θ parametri üçün $X^{(n)}$ seçimi üzrə qurulmuş, ixtiyari $\sqrt{n}$ – tutarlı statistik qiymətdir. (5) statistikası bütün $\theta \in \Theta$ üçün H_0 hipotezi şərtlərində (0, 1) parametrləri asimptotik normal paylanmaya malikdir. Buna görə də, $Y_n \leq v(\alpha)$ və $|Y_n| \leq v(\alpha/2)$ olduğu hallarda H_0 hipotezini qəbul edən uyğun φ'_n və φ_n^* kriteriləri α həddüdlü asimptotik oxşar kriterilərdir, burada $v(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ standart normal $\Phi(\cdot)$ paylanma funksiyasının yuxarı α – kvantilidir. Bu kriterilərdən birtərəfli $H'_1: \xi > 0$ və

uyğun olaraq, ikiterəfli $H'_1: \xi \neq 0$ alternativ hipotezlərində H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunur; bu halda φ_n^* asimptotik meylsiz kriteridir.

φ_n' və φ_n^* alternativ kriterilərinin xassələrinin öyrənilməsində H'_1 və H_2^* asimptotik analoqlarının bir-birinə yaxınlaşan alternativlərinin uyğun olaraq:

$$H'_{1n}: \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}, \quad \lambda > 0, \quad (6)$$

və

$$H''_{1n}: \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}, \quad \lambda \neq 0, \quad (7)$$

ardıcılıqlarına, engelleyici θ parametrinin olduğu halında, baxılır. Limit güc funksiyaları

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n'\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n'(X^{(n)}) dP_{\lambda/\sqrt{n}, \theta}^{(n)}$$

və $\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n^*\})$ uyğun olaraq:

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n'\}) = 1 - \Phi(v(\alpha) - \lambda \sigma^2(\theta));$$

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n^*\}) = 2(1 - \Phi(v(\alpha/2) - \lambda \sigma^2(\theta)))$$

bərabərlikləri ilə ifadə olunur.

(2)–(5) tipli münasibətlərdə $y(x; \theta)$ və $y^*(x; \theta)$ funksiyaları ixtiyari $f(x; \theta)$ və bu funksiya üzrə (3) düsturu ilə hesablanmış $f^*(x; \theta)$ funksiyası ilə, $M_{0, \theta}(f(X_1; \theta)) \equiv 0$ və $M_{0, \theta}(f(X_1; \theta))^2 < \infty$ şərtlərində əvəz olunduğu halda, $C(\alpha)$ – kriteriləri adlandırılan kriterilər sinfi birölçülülük halda araşdırılmışdır (bax, [1]). Belə kriterilər sinfində φ_n' və φ_n^* kriteriləri uyğun olaraq, (6) və (7) alternativlərində, mümkün olan ən böyük gücə malik olub, asimptotik lokal optimal asimptotik oxşar $C(\alpha)$ – kriterilərdir (φ_n^* kriterisi üçün «asimptotik meylsizlik» də əlavə olunur); bu kriterilər Yu. Neyman terminologiyasında belə adlandırılır. [2]-də isbat olunmuşdur ki, $o(n^{-1/2})$ tərtibə qədər asimptotik ayrılış nəzərə alınmaqla, bütün differensial asimptotik oxşar kriterilər sinfində bu kriterilər asimptotik optimaldır. Sonralar bəzi rəqulyarlıq şərtlərinin yerinə yetirilmədiyi hallar üçün $C(\alpha)$ tipli kriterilər qurulmuşdur (bax, [3]). Məs., əgər $y(x; \theta)$ vektoru $z(x; \theta)$ vektorunun komponentlərinin xətti kombinasiyası olarsa, onda hətta asimptotik optimal φ_n' kriteriləri üzrə (uyğun olaraq, φ_n^*) H_0 və H'_{1n} (uyğun olaraq H''_{1n}) hipotezlərini tutarlı şəkildə fərqləndirmək mümkün deyildir; [4]-də yalnız $s > 1$ olan minimal tərtib tapılmışdır və bu halda H_0 və $H'_{1n}(s): \xi = \xi_n = \lambda_n^{s/2}, \lambda > 0$ hipotezlərini tutarlı şəkildə fərqləndirmək mümkündür və differensial asimptotik oxşar kriterilər sinfində qeyd olunan hipotezləri fərqləndirmək üçün $C(\alpha)$ tipli kriteriləri olan asimptotik optimal φ_{sn}' (uyğun olaraq φ_{sn}^*) kriterisi tapılmışdır.

Çoxölçülülük halda ($k > 1$) $C(\alpha)$ S. k.-nə oxşar çoxölçülülük asimptotik S. k.-lər sinfi – $\Phi_{C(\alpha)}$ daxil olunmuşdur (bax, [5]), bu sinfdə H_0 və

$$H_{1n}: \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (8)$$

($\Lambda = \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$) hipotezlərinin fərqləndirilməsi məsələsində asimptotik optimal φ_n kriterisi tapılmışdır; bu kriteriyə görə $Y_n' \Xi^{-1}(\tilde{\theta}_n) Y_n \leq \chi_k^2(\alpha)$ olduqda H_0 hipotezi qəbul edilir, burada $\chi_k^2(\alpha)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı k olan mərkəzi χ^2 – paylanmanın yuxarı α – kvantilidir. $\Lambda = \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ olduğu halda, bu φ_n kriterisi *doğruyaxoxşarlıq nisbət kriterisi*, *Rao kriterisi*, *Vald kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, lakin hesablama cəhətcə bunlardan sadədir. φ_n kriterisinin gücünün limit funksiyası

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n\}) = 1 - G_k(\chi_k^2(\alpha), \lambda' \Xi(\theta) \lambda)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $G_k(\cdot, a)$ – qeyri – mərkəzlilik parametri a olan və sərbəstlik dərəcəsi sayı k -ya bərabər qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanmanın paylanma funksiyasıdır. $\Phi_{C(\alpha)}$ sinfi bir sıra hallarda olduqca dar sinif olur [məs., əgər (8)-də $\Lambda \subseteq V \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, $V \cap \{0\}$ isə $\mathbb{R}^k$ -də qabarıq konus olduqda, $\Phi_{C(\alpha)}$ sinfindən olan bütün kriterilər asimptotik qeyri – məqbul olur]; $C(\alpha)$ – kriterilərinin çoxölçülülük ümumiləşmələrinin daha geniş sinfi daxil olunmuşdur ki, bu sinfin asimptotik tam alt-sinfini seçmək mümkün olmuşdur.

Əd.: [1] Neyman J., в кн.: Probability and statistics, Stochl. – N. Y., 1959, p. 213–34; [2] Chibisov D. M., «Lect. Notes in Math.», 1974, v. 330, p. 16–45; [3] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56; [4] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 34–47; [5] Bühler W. J., Puri P. S., «Z. Wahr und Geb.», 1966, Bd. 5, № 1, S. 71–88; [6] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 291–302; [7] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91.

STATİSTİK QƏBUL NƏZARƏTİ « статистический приемочный контроль; statistical acceptance inspection / acception sampling » – kütləvi məhsul istehsalının *keyfiyyətə statistik nəzarət* metodlarının toplusudur və bu nəzarət keyfiyyətin verilən tələblərə uyğun olduğunu aydınlaşdırmaq məqsədilə aparılır. S. q. n. – nəzarət planları cədvəllərini və bu cədvəllərdən planların seçilməsi qaydalarını özündə ehsas ehtiva edən dövlət standartları (rus. ГОСТ) əsasında aparılır. Ciddilik həddi (rus. уровень жесткости) və nəzarət planını seçdikdə nəzarət olunan partiyaların (bu partiya daxil olan məmulatların) həcmi, əvvəlki partiyalara nəzarətin nəticələri və digər faktorlar nəzərə alınır. S. q. n. məhsulun tələb olunan keyfiyyət həddinin saxlanılması üçün təsir vasitəsidir.

S. q. n.-də, bir qayda olaraq, seçimi təşkil edən məmulatların yalnız bir hissəsi yoxlanılır, buna görə də, səhv qərarlar verilə bilər. Əgər nəzarət dağıdıcı xarakter (partiyası üçün sınaqlar) daşıyarsa, onda bütün məmulatların hamısına bir-bir nəzarət etmək mümkün deyildir. Nəzarət olunan məmulatları seçmək üçün müxtəlif metodlar vardır. Ən geniş yayılmış metodlardan biri, qaytarmamaq şərtlə təsadüfi seçim metodudur (bax, *Seçim statistik, Seçimi metod*).

S. q. n.-nin ən çox tətbiq olunan iki növündən birincisi – alternativ əlamət üzrə nəzarət, yeni nəzarət olunan məmulatlar yararlı və ya qüsurlu olduqda nəzarət, ikincisi isə kəmiyyət əlamətinə görə nəzarət, yeni nəzarət olunan məmulatların heqiqi qiymətlər alan parametrlərinin ölçüldüyü haldakı nəzarətdir.

S. q. n. nəzəriyyəsində ayrı-ayrı nəzarət planlarının, həm də nəzarət planları sisteminin ehtimal göstəricilərinin hesablanması üçün metodlar, nəzarətin gedişində əldə olunan informasiya əsasında S. q. n.-nin faktiki effektivliyinin qiymətləndirilməsi üçün metodlar işlənir.

Məhsulun çoxlu partiyalarının S. q. n.-nin nəticələri üzrə S. q. n. üçün istifadə olunan, standartın effektivliyini əks etdirən müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl statistik qiymətlər adlandırılan statistik qiymətlərini qurmaq mümkündür (bax, [1]). Məs., nəzarətə təqdim olunmuş partiyalarda olan qüsurlu məmulatların toplam sayının meylsiz statistik qiymətlərini tapmaq mümkündür; istehlakçının qəbul etdiyi bütün məmulatlar içərisində qüsurlu məmulatların toplam sayının (qəbul olunma ədədinin) statistik qiymətlərini qurmaq mümkündür. Bu statistik qiymətlərin meylli seçimlərin həcmi artdıqca sürətlə azalır.

S. q. n.-nə standartın əsası nəzarət planını təyin edən parametrlərin cədvəlidir. Cədvəllərə müəyyən optimallıq xassələrinə malik (heç olmasa təqribən də olsa) nəzarət planları daxil edilir. Bu zaman nəzarət planlarının *operativ xarakteristikalarından* istifadə olunur.

$q = D/N$ – qüsurlu məmulatların hissəsi, q_H – stasionar istehsal prosesində qüsurlu məmulatların hissəsi olsun. Optimal nəzarət planlarının axtarışını, $q = q_H$ olduğu halda, eyni orta məsrəfləri olan planlar arasında aparmaq olar. Orta məsrəf seçimi təşkil edən məmulatlara nəzarətin dəyərə və qüsursuz məmulatların səhvən qüsurlu hesab edilməsindən dəyən zərərə bərabərdir. Bəzən sərf olunan bütün məsrəflərə qüsurlu məmulatların qəbulundan dəyən zərəri də daxil etmək məqsəduyğun hesab edilir. Standartlarda (bax, [2]) birpilləli planların cədvəlləri vardır və bu cədvəllər nəzarətə məsrəflərin orta həddi və q_H verildiyi halda, qiymətlərin $D > N_{q_H}$ geniş intervalında, tərkibində

D sayda qüsurlu məmulat olan partiyanın qəbulunda istehlakçının təqribi də olsa, ən yaxşı müdafiəsini təmin edir. Yeni qiymətlərin geniş intervalı D üçün belə planların *operativ xarakteristikaları* $q = q_H$ olduqda nəzarətin aparılmasına sərf olunan xərcləri eyni olan bütün birpilləli *operativ xarakteristikaların* aşağı qurşayıcısına yaxın olur. Standartlara daxil ediləsi planları yalnız EHM-nin köməyiylə tərtib etmək mümkündür.

S. q. n.-nin ciddilik həddi standartda qəbul edilmiş *korrektləyici qaydalarla* dəyişir və bu qaydalar əsasında, nəzarətin nəticələri də nəzərə alınmaq şərtlə, cədvəllərdən nəzarət planlarının seçilməsi qaydası ya olduğu kimi qalır, ya da ki, dəyişir.

Alternativ əlamət üzrə S. q. n. metodlarının müxtəlif ümumiləşmələri məlumdur (bax, [3], [4]); bəzi tətbiqlərdə, qüsurlu məmulatların qüsursuz kimi və qüsursuz məmulatların qüsurlu kimi səhv təsnif olduğu S. q. n.-nə baxmaq da məqsəduyğun hesab edilir (bax, [5]). S. q. n.-ndə Bayes metodları geniş istifadə olunur (bax, [6]).

Kəmiyyət əlamətləri üzrə S. q. n.-nə standartlar belə bir fərziyyəyə əsaslanır ki, nəzarətdə seçimdəki məmulatların xarakteristikaları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanma funksiyaları hər hansı parametrik ailədən olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ən çox istifadə olunan standartlarda belə ailə normal (Gauss) paylanmış ailəsi olur. Praktiki qeyd olunan fərziyyələrin yerinə yetirilməsi ciddi yoxlanılmalıdır və bu kəmiyyət əlaməti üzrə S. q. n. standartının qəbul edilməsi haqqında qərardan əvvəl edilməlidir.

Kəmiyyət əlamətləri üzrə S. q. n.-ni yalnız əsaslandırılaraq istifadə etdikdə, alternativ əlamət üzrə S. q. n. ilə müqayisədə, daha effektiv nəticələr əldə etmək olur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303–26; [2] ГОСТ 24660–81; [3] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [4] Лумельский Я. П., Статистические оценки результатов

контроля, качества, М., 1979; [5] Беляев Ю. К., «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 3, с. 521–24; [6] Халд А., Statistical theory of sampling inspection by attributes, L. – [a. o.], 1981.

STATİSTİK QIYMƏT « статистическая оценка; statistical estimator » – seçimi vektorun ölçülən funksiya-sıdır; qiymətləndirilən parametrin ilkin naməlum qiyməti üçün ona yaxın olan qiymətdir. Statistik eksperimentin nəticələri üzrə hesablanan S. q.-lər ya qiymətləndirilən parametr fəzasının nöqtələri (nöqtəvi statistik qiymət) və ya onun alt çoxluqlandır (interval statistik qiymət). Seçimin həcmi olduqca böyük olduğu halda nöqtəvi statistik qiymətin parametrin əsl qiymətinə yaxınlığı bu statistik qiymətin tutarlılığı ilə təmin olunur, əsl qiymətin interval statistik qiyməti ilə interval daxilinə alınmasının etibarlılığına isə etibarlılıq həddünün olduqca yüksək seçilməsi ilə nail olunur.

Bax, *Adaptiv statistik qiymət, Ardıcıl statistik qiymət, Asimptotik effektiv statistik qiymət, Asimptotik meylsiz statistik qiymət, Asimptotik minimaks statistik qiymət, Asimptotik normal statistik qiymət, Bayes statistik qiyməti, Ceyms – Steyn statistik qiyməti, Effektiv statistik qiymət, Ekvivariant statistik qiymət, Empirik Bayes statistik qiyməti, Xətti statistik qiymət, Kafi statistik qiymət, Interval statistik qiyməti, Invariant statistik qiymət, Median – meylsiz statistik qiymət, Meylli statistik qiymət, Meylsiz xətti statistik qiymət, Meylsiz qiymət, Məqbul statistik qiymət, Minimaks statistik qiymət, Modal meylsiz statistik qiymət, Nöqtəvi statistik qiymət, Pitmen statistik qiyməti, Randomlanmış statistik qiymət, Robast statistik qiymət, M – statistik qiymət, Supereffektiv statistik qiymət, Tutarlı statistik qiymət, Ümumiləşmiş Bayes statistik qiyməti.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984, [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

STATİSTİK QIYMƏT; tam sinif « статистическая оценка; полный класс; complete class of statistical estimators » – *statistik qiymətlərin* ələ $\mathcal{C}$ çoxluğu ki, bu çoxluğa aid olmayan ixtiyari statistik qiymət üçün $\mathcal{C}$ -dan olan müntəzəm çox da böyük olmayan *risk funksiyasına* malik statistik qiymət vardır, belə ki, risk funksiyaları arasında qiymətləndirilən parametrin heç olmasa bir qiyməti üçün ciddi bərabərsizlik ödənilir (bax, *Həllədiçi funksiya; tam sinif*).

Əd.: [1] Закас III., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

G – STATİSTİK QIYMƏT « G – оценка; G – estimator » – bax, *Ümumi statistik analizi, müşahidələrin.*

G₂ – STATİSTİK QIYMƏT « G₂ – оценка; G₂ – estimator » – bax, *Ümumi statistik analizi, müşahidələrin.*

L – STATİSTİK QIYMƏT « L – оценка; L – estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

M – STATİSTİK QIYMƏT « M – оценка; M – estimator » – θ_n statistik qiymətidir,

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i, \theta_n) = \min \quad (1)$$

münasibətlə və ya

$$\sum_{i=1}^n \psi(X_i, \theta_n) = 0 \quad (2)$$

tənliklər sisteminin həlli kimi təyin olunur, burada ρ , – $\mathcal{X} \times \Theta$ çoxluğunda həqiqi qiymətli funksiya, $\mathcal{X}$ – müşahidə olunan X_i

kəmiyyətlərinin seçimi fəzası, $\Theta, - \mathbb{R}^p$ Evklid fəzasının açıq alt çoxluğu və $\psi(x, \theta) = \nabla_{\theta} \rho(x, \theta)$.

$M - S. q.-ə$ klassik misallar aşağıdakılardır:

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (\text{burada } \psi = x - \theta)$$

seçimi ortası; $y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \theta_j + \varepsilon_i$ xətti modelində

$$\rho = \left(y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \theta_j \right)^2$$

ən kiçik kvadratlar statistik qiymətləri;

$$\mu_n(\psi = \text{sign}(x - \theta))$$

seçimi medianı.

Əgər (1), (2) məsələsinin həlli yeganə deyilsə, onda bu həllərdən birinin seçilməsi üçün əlavə qaydalar istifadə olunur. n cüt olduğu halda, seçimi median $\mu_n = (\theta^* + \theta^{**})/2$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\theta^*, \theta^{**} - (1)$ münasibətinin uyğun olaraq, ən böyük və ən kiçik həlləridir, ya $\mu_n = \theta^*$ və ya $\mu_n = \theta^{**}$ eyni ehtimallı fərz olunur.

$\psi(x; \theta) = \psi(x - \theta)$ olduqda, yerindəyişmə parametrlərinin $M - S. q.-ləri$, $\psi(x, \theta) = \psi(\theta^{-1} x)$, $\theta > 0$ olduqda isə miqyas parametrlərinin $M - S. q.-ləri$ alınır. Yerindəyişmə parametrlərinin $M - S. q.-ləri$ $\bar{X}_n$ statistik qiymətinə xas olan, miqyas çevirməsinə nəzərən invariantlıq xassəsini $\psi(x - \theta)$ -ni $\psi(x - \theta)/s$ nisbətə əvəz etdikdə olduğu kimi saxlayırlar, burada $s -$ miqyasın ixtiyari yerindəyişmə parametrlərinin $M - S. q.-dir$. X_i -lər heqiqi olduğu halda, s -in statistik qiyməti kimi X_i kəmiyyətlərinin bunlar üçün ümumi μ_n medianından mütləq yayınmalar $- |x_i - \mu_n|$ -lərin medianından istifadə olunması məsləhətdir.

$X_1, \dots, X_n -$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F, - X_i$ -lərin verilən $\mathcal{F}$ ailəsinə mənsub paylanmasıdır. Bəzi ümumi fərziyyələrlə, (1) münasibətilə təyin olunan $M - S. q.,$

$$\lambda_F(\theta) = \int \psi(x, \theta) dF(x), \quad F \in \mathcal{F}$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunan F paylanmasının $\theta = \theta(F)$ parametrlərinin tutarlı statistik qiymətləri olur. Əgər bu halda ψ funksiyası bəzən ümumi rəqulyarlıq şərtlərini ödəyərsə, $\lambda_F(\cdot)$ isə $\theta(F)$ nöqtəsində törəmələrin cırlaşmayan matrisi Λ -ə malik olarsa və hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün $|\lambda_F(\theta)| \geq \varepsilon(\min(\varepsilon, |\theta - \theta(F)|))$ olarsa, onda $\sqrt{n}(\theta_n - \theta(F))$ kəmiyyəti orta qiyməti sıfıra bərabər, kovariasion matrisi $\Lambda^{-1} C \Lambda$ olan normal qanunla asimptotik olaraq paylanır, burada

$$C = \int \psi(x_1, \theta(F)) \psi^T(x, \theta(F)) dF(x).$$

$M - S. q. -$ in asimptotik effektivliyi üçün kafi, bəzi əlavə şərtlərlə isə zəruridir ki, hər bir $F \in \mathcal{F}$ paylanması ilə birgə, $\mathcal{F}$ çoxluğu $F_k(x, \theta), F(k, 0) = F(x), k = 1, 2, \dots$ parametrik ailələrinin öz sıxlıqları $f_k(x, \theta)$ ilə ələ ardıcılığını özündə saxlasın ki, $-\nabla_{\theta} \ln f_k(x, \theta)$ funksiyaları $k \rightarrow \infty$ olduqda $\psi(x, \theta(F))$ funksiyasını approksimasiya etsin (bax, [2]). Məs., sıxlıq funksiyası $f(x, \theta)$ -ya malik $\mathcal{F} = \{F(x, \theta)\}$ parametrik ailəsi halında $M - S. q.$ asimptotik effektiv yalnız o halda olur ki, bu statistik qiymət maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti $-\psi(x, \theta) = \nabla_{\theta} \ln f(x, \theta)$ ilə üst-üstə düşsün.

(1) tənliyinin Nyuton metodu tipli ədədi həll metodlarından istifadəsi ilə həllində iterasiyanın bir addımına $M - S. q.-in$ xassələrinə analoji asimptotik xassələrə malik statistik qiymətlər alınır.

Klassik olmayan ψ funksiyaları ilə $M - S. q.-lər$ robust qiymətləndirmə nəzəriyyəsində fəal istifadə olunur. $\mathcal{K}, - \mathbb{R}^1$ -də simmetrik F paylanmaları ailəsinin qabarıq alt çoxluğu olsun, fərz olunur ki, bu paylanmalar sonlu $I(F)$ informasiya miqdanna malikdirlər və $\mathcal{F} = \{F(x - \theta) | F \in \mathcal{K}, \theta \in \mathbb{R}^1\}$. Olduqca ümumi fərziyyələrlə $\mathcal{K}_0$ sinfində $I(F)$ informasiya miqdarını minimumallaşdıran, sıxlığı R_0 olan yeganə F_0 paylanması vardır. $\psi(x - \theta) = -\nabla_{\theta} \ln f_0(x - \theta)$ funksiyasına uyğun θ parametrlərinin $M - S. q. \theta_n$ -in asimptotik dispersiyası bütün $F \in \mathcal{F}$ üçün $I^{-1}(F_0)$ kəmiyyətini aşmır. Beləliklə, θ_n statistik qiyməti $\mathcal{F}$ ailəsinə nəzərən θ parametrlərini dayanıqlı qiymətləndirir və bu statistik qiymət asimptotik minimum statistik qiymətdir. θ parametrlərinin asimptotik dispersiyası $V(\theta, F)$ olan bütün statistik qiymətləri sinfində θ_n statistik qiyməti

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}^1, F \in \mathcal{K}_0} V(\theta, F)$$

ifadəsinin minimumunu təmin edir.

Əgər $\mathcal{K}_0$ standart normal $\Phi(x)$ paylanmasının $\varepsilon - kobud xətalı$ oblastı olarsa, yəni

$$\mathcal{K}_0 = \{F / F = (1 - \varepsilon) \Phi + \varepsilon H\}$$

olarsa, onda F_0 funksiyasına uyğun ψ funksiyası aşağıdakı şəkildə olur:

$$\max\{-k, \min\{k, x - \theta\}\};$$

burada $H -$ ixtiyari simmetrik paylanmadır və

$$2\varphi(k)/k - 2\Phi(-k) = \varepsilon/(1 - \varepsilon), \quad \varphi = \Phi'.$$

X_n -in statistik qiymətinə müvafiq olan, keskin surətdə fərqlənən müşahidələrin təsirinin azaldılmasına $\psi = x - \theta$ funksiyasının kəsişinin götürülməsi ilə nail olunur və bununla da, uyğun $M - S. q.-in$ dayanıqlılığı təmin olunur. Bu statistik qiymətin $\Phi(x - \theta)$ ailəsi üçün effektiv statistik qiymət olmasına baxmayaraq, bu qiymət normal paylanmanın $\varepsilon - kobud xətalı$ ətrafına nəzərən

son dərəcə dayanıqsız olur; bu ətrafda $V(\theta, F)$ dispersiyası məhdud deyildir.

Əd.: [1] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984; [2] Кошеник Ю. А., Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 4, с. 759–74.

R – STATİSTİK QIYMƏT « R – оценка; R – estimator » – bax, *Robast statistik qiymət*.

STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRMƏ « статистическое оценивание; statistical estimation » – riyazi statistikanın əsas bölmələrindən biri olub, təsadüfi müşahidələr üzrə onların paylanması bu və ya digər xarakteristikalarının qiymətləndirilməsinə həsr olunmuşdur.

M i s a l 1. $X_1, \dots, X_n$ – ümumi paylanması müşahidəçiyə məlum olmayan $\mathcal{P}$ olan ədəd oxunda verilmiş və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər (müşahidələr) olsun. Hər bir təsadüfi X_i nöqtəsinə $1/n$ çəkisi qarşı qoyulan empirik (seçimi) $\mathcal{P}_n^*$ paylanması $\mathcal{P}$ üçün statistik qiymətdir. $\alpha_v = \int x^v d\mathcal{P}$ momentləri üçün empirik (seçimi) momentlər

$$\alpha_v = \int x^v d\mathcal{P}_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^v / n$$

düsturu ilə təyin olunur. Məsələn, orta qiymət üçün statistik qiymət

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n,$$

dispersiyanın statistik qiyməti

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$$

düsturları ilə təyin olunur.

Ə s a s a n l a y ı ş l a r. Ümumi qiymətləndirmə nəzəriyyəsinə X müşahidəsi məlum paylanması verilən $\mathcal{P}$ paylanmalar ailəsindən olan, qiymətləri ölçülən $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$ fəzasından olan təsadüfi elementdir. Paylanmalar ailəsini həmişə parametrik ailə – $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi kimi göstərmək olar. Bu halda parametrdən asılılıq forması və Θ çoxluğunun məlum olduğu fərz olunur. X müşahidəsi üzrə θ parametrinin və ya g funksiyasının θ nöqtəsində $g(\theta)$ qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi θ -nı ($g(\theta)$ -nı) olduqca approksimasiya edə bilən müşahidələr funksiyası $\theta^*(X)$ -in qurulmasından ibarətdir.

Statistik qiymətlərin müqayisəsi aşağıdakı kimi aparılır. $\Theta \times \Theta$ ($g(\Theta) \times g(\Theta)$) çoxluğunda mənfəi olmayan $w(y_1; y_2)$ itki funksiyasının verildiyi fərz olunur, bu funksiyanın mənası belə anlaşılır: parametrdə faktiki qiyməti θ olduğu halda θ^* statistik qiymətdən istifadə $w(\theta^*; \theta)$ itkilərinə səbəb olur. İtki funksiyası w olduğu halda θ -nın statistik qiymətləri kimi risk funksiyasının orta itkiləri $R_w(\theta^*; \theta) = \mathbf{M}_\theta w(\theta^*; \theta)$ θ^* statistikasının keyfiyyət ölçüsü əvəzində götürülür. Bununla da, statistik qiymətlər çoxluğunda hisəvi nizamlanma münasibəti daxil olunur; əgər $R_w(T_1; \theta) \leq R_w(T_2; \theta)$ olarsa, T_1 statistik qiyməti T_2 statistik qiymətdən üstün sayılır. Məs., bütün $\theta \in \Theta$ üçün $\theta \in T'$

statistik qiyməti tapılırsa ki, $R_w(T'; \theta) \leq R_w(T; \theta)$ bərabərsizliyi ödənilsin, hər hansı bir θ üçün isə ciddi bərabərsizlik də ödənilmiş olsun, onda θ parametrinin statistik qiyməti T' itki funksiyasına nəzərən qeyri – məqbul statistik qiymət adlanır. Qiymətləndirmə keyfiyyətinin belə müqayisə üsulunda bir çox statistik qiymətlər müqayisəedilməz olur, bununla belə itki funksiyası olduqca ixtiyari qayda ilə seçilir.

Bəzən θ statistik qiymətlər tapmaq mümkün olur ki, bunlar statistik qiymətlərin hər hansı dar sinfində optimal olur. *Meylsiz statistik qiymətlər* sinfi mühüm siniflərdən biridir. Əgər ilkin eksperiment hər hansı çevirmələr qrupuna nəzərən invariant olarsa, məsələnin simmetriyasını pozmayan statistik qiymətlərlə kifayətlənmək təbii (bax, *Ekvivariant statistik qiymət*).

Statistik qiymətləri onların «yaxşı olmayan» nöqtələrdə özlərini necə aparması ilə müqayisə etmək olar: əgər $\sup_{\theta} R_w(T_0; \theta) =$

$= \inf_{T'} \sup_{\theta} R_w(T; \theta)$ olarsa (infimum bütün $T = T(X)$ statis-

tik qiymətləri üzrə götürülür), θ parametrinin T_0 statistik qiyməti *minimaks statistik qiymət* adlanır (bax, *Minimaks statistik qiymət*).

Qiymətləndirmə məsələsinin Bəyəs qoyuluşunda hesab edilir ki, məlum θ parametri Θ -da aprior paylanması $\mathbf{Q}$ olan təsadüfi kəmiyyətin qiymətləridir. Bu halda w itki funksiyasına nəzərən ən yaxşı statistik qiymət T_0

$$\begin{aligned} r_w(T_0) &= \mathbf{M}_w(T_0; \theta) = \int_{\Theta} \mathbf{M}_\theta w(T_0; \theta) \mathbf{Q}(d\theta) = \\ &= \inf_T \int_{\Theta} \mathbf{M}_\theta w(T; \theta) \mathbf{Q}(d\theta) \end{aligned}$$

münasibətilə təyin olunur və infimum bütün $T = T(X)$ statistik qiymətləri üzrə götürülür.

Qiymətləndirilmə parametrik və qeyri – parametrik məsələlər fərqləndirilir. Parametrik məsələlərdə Θ sonluölçülü Evklid fəzasının alt çoxluğu olur. Bu halda, adətən, $l(|\theta_1 - \theta_2|)$ şəklində

itki funksiyalarına baxılır, l – $\mathbb{R}^+$ -da mənfəi olmayan azalmayan funksiyadır. Daha çox istifadə olunan $|\theta_1 - \theta_2|^2$ kvadratik itki funksiyası xüsusi rol oynayır.

Əgər $T = T(X)$ $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi üzrə kafi statistikadırsa, onda əksər hallarda $\theta^* = h(T)$ statistik qiymətləri ilə kifayətlənmək olur. Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $w(\theta_1; \theta_2) = l(|\theta_1 - \theta_2|)$

və θ^* , θ üçün hər hansı statistik qiymət olarsa (l – qabarıq funksiyadır), onda $h(T)$ statistik qiyməti tapılır ki, o, θ^* – dan pis deyildir; əgər θ^* meylsiz statistik qiymət olarsa, onda $h(T)$ -ni meylsiz statistik qiymət seçmək olar (Blekuel teoremi).

Əgər $T \in \{\mathcal{P}_\theta\}$ ailəsi üçün tam kafi statistika, $\theta^* g(\theta)$ üçün meylsiz statistik qiymətdir, onda $h(T)$ şəklində, meylsiz statistik qiymətlər sinfində minimal dispersiyalı meylsiz statistik qiymət tapmaq olar (Leman – Şeffe teoremi).

Parametrik qiymətləndirmə məsələlərində, bir qayda olaraq, fərz olunur ki, $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsinin elementləri hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir və

$\frac{d\mathcal{I}_0}{d\mu} = p(x, \theta)$ sıxlığı vardır. Əgər $p(x, \theta)$ θ -nın olduqca hamar funksiyası olarsa və

$$\mathbf{I}(\theta) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial p}{\partial \theta}(x, \theta) \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}(x, \theta) \right)^T \frac{\mu(dx)}{p(x, \theta)}$$

– Fişer informasiya matrisi mövcud olarsa, onda qiymətləndirmə məsələsi *reqlulyar məsələ* adlanır. Reqlulyar məsələlərdə qiymətləndirmə dəqiqliyi *Kramer – Rao bərabərsizliyi* ilə aşağıdan məhdudlanır: əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ olarsa, onda ixtiyari T statistik qiyməti üçün

$$\mathbf{M}_\theta |T - \theta|^2 \geq \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}(\theta)\right)^2}{\mathbf{I}(\theta)} + b^2(\theta), \quad b(\theta) = \mathbf{M}_\theta T - \theta$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Qiymətləndirmə məsələlərinə aid misallar.

2. Ən çox yayılmış qoyuluş n həcmli seçimin müşahidə olunduğu haldır: $X_1, \dots, X_n$, $\theta \in \Theta$ olduqda ümumi paylanma sıxlığı v ölçüsünə nəzərən $f(x, \theta)$ olan, ölçülən $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$ fəzasından qiymətlər alan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Reqlulyar məsələlərdə, əgər bir müşahidə üçün Fişer informasiyası $\mathbf{I}(\theta)$ olarsa, bütün seçimin Fişer informasiyası $\mathbf{I}_n(\theta) = n\mathbf{I}(\theta)$ olur. Bu halda *Kramer – Rao bərabərsizliyi*

$$\mathbf{M}_\theta |T - \theta|^2 \geq \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}\right)^2}{n\mathbf{I}(\theta)} + b^2(\theta), \quad T = T(X_1, \dots, X_n)$$

şəklində olur.

2.1. X_j – paylanma sıxlığı $(2\pi)^{-1/2} \exp\{-2^{-1}\sigma^{-2}(x-a)^2\}$ olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\theta = (a, \sigma^2)$ naməlum parametrdir; a və σ^2 -nin statistik qiymətləri kimi $\bar{X}$ və s^2 ola bilər. Bu halda $(\bar{X}, s^2)$ kafi statistik kəmiyyətdir. $\bar{X}$ meylsiz, s^2 meylli statistik qiymətlərdir. Əgər σ^2 naməlum olarsa, $\bar{X}$ minimal dispersiyanın meylsiz statistik qiymətidir, $\bar{X}$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən minimaks statistik qiymətdir.

2.2. X_j – paylanma sıxlığı $(2\pi)^{-k/2} \exp\{-2^{-1}|x-\theta|^2\}$, $\theta \in \mathbb{R}^k$ olan $\mathbb{R}^k$ -də normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\bar{X}$ θ -nın meylsiz statistik qiymətidir, əgər $k \leq 2$ olarsa, $\bar{X}$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən məqbul statistikadır, əgər $k > 2$ olarsa, $\bar{X}$ qeyri – məqbul statistikadır.

2.3. X_j – naməlum paylanma sıxlığı f , sıxlıqlar ailəsi verilən F -ə aid olan, $\mathbb{R}^1$ -də təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Olduqca geniş F sinfi üçün bu qeyri – parametrik məsələ, yəni $f(x_0)$ sıxlığının x_0 nöqtəsində qiymətinin qiymətləndirilməsi

məsələsi $g(f) = f(x_0)$ funksionalının qiymətləndirilməsi məsələsidir.

3. *Xətli regression model*. ξ_i – təsadüfi kükrəntilər, $i = 1, \dots, n$, $\|a_{\alpha i}\|$ – məlum matris olsun.

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^p a_{\alpha i} \theta_{\alpha} + \xi_i$$

kəmiyyətləri müşahidə olunur. $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur.

$$4. \text{Rasional spektral sıxlığı } \left| \sum_{j=0}^m a_j \lambda^j \right|^2 \left| \sum_{j=1}^n b_j \lambda^j \right|^{-2} \text{ olan}$$

$\zeta(t)$, $0 \leq t \leq T$ Gauss stasionar prosesinin parçası müşahidə olunur; $\{a_j\}, \{b_j\}$ naməlum parametrlərini qiymətləndirmək tələb olunur.

Statistik qiymətlərin qurulması üsulları. Ən çox yayılmış *maksimal doğruxaoxşarlıq metodunda* θ -nın statistik qiyməti kimi maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{\theta}(X)$ götürülür və bu statistik qiymət $p(X; \theta)$ təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsi kimi təyin olunur. Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X; \theta) = 0$$

doğruxaoxşarlıq tənliyinin kökləri arasında olur.

Ən kiçik kvadratlar metodunun 3 misalına tətbiqi halında statistik qiymət kimi

$$m(\theta) = \sum_{i=1}^n (X_i - \sum_{\alpha} a_{\alpha i} \theta_{\alpha})^2$$

funksiyasının minimum nöqtəsi götürülür.

Statistik qiymətin qurulmasının daha bir üsulunda θ üçün statistik qiymət kimi hər hansı w itki funksiyasına və hər hansı aprior Q paylanmasına nəzərən *Beyes statistik qiyməti* T seçilir, baxmayaraq ki, ilkin qoyuluş *Beyes qoyuluşu* deyildir. Məs., əgər $\Theta = \mathbb{R}^1$ olarsa, θ -nı

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(X; \theta) d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(X; \theta) d\theta \right)^{-1}$$

vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Bu kvadratik itki funksiyası və müntəzəm aprior paylanmaya nəzərən *Beyes statistik qiymətidir*.

Momentlər metodu aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ və fərz olunur ki, $\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_k(\theta)$ üçün k sayda «yaxşı» $a_1(X), \dots, a_k(X)$ statistik qiymətləri vardır. *Momentlər metodu* statistik qiymətləri məhz $\alpha_i(\theta) = a_i$ sisteminin həlləridir. Əksər hallarda a_i statistik qiyməti kimi empirik momentlər götürülür (bax, misal 1).

Əgər $X_1, \dots, X_n$ seçimi müşahidə olunarsa (bax, misal 1), $g(\mathcal{P})$ üçün statistik qiymət kimi $g(\mathcal{P}_n^*)$ -ni seçmək olar. Əgər $g(\mathcal{P}_n^*)$ funksiyası təyin olunmamışdırsa [məs., $g(\mathcal{P}) =$

$= \frac{d\mathcal{P}}{d\lambda}(x)$, λ – Lebeq ölçüsüdür], $g_n(\mathcal{P}_n^*)$ -nin münasib modifikasiyalari seçilir. Məs., sıxlığın statistik qiyməti kimi histqramdan və ya

$$\int \varphi_n(x-y) d\mathcal{P}_n^*(y)$$

şəklində statistik qiymətdən istifadə olunur.

Statistik qiymətlərin asimptotikası. Müəyyənlik üçün misal 2-dəki məsələyə baxılır, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Belə gözləmək olardı ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda «yaxşı» statistik qiymətlər qiymətləndirilən xarakteristika ilə qeyri – məhdud olaraq yaxınlaşmalıdırlar. Əgər bütün θ üçün $\theta_n^* \rightarrow \theta$ münasibəti $\mathbf{P}_\theta$ – ehtimala görə yığılma olarsa, $\theta_n^*(X_1, \dots, X_n)$ statistik qiymətlər ardıcılığı θ -nın tutarlı statistik qiymətlər ardıcılığı adlanır. Yuxarıda qeyd olunmuş statistik qiymətlərin qurulma üsulları geniş fərziyyələrlə tutarlı statistik qiymətlərin alınmasına gətirir. Misal 1-dəki statistik qiymətlər tutarlı statistik qiymətlərdir. Reqlular qiymətləndirmə məsələlərində maksimal doğruxaşaqlıq və Beyes statistik qiymətləri riyazi gözləməsi θ -ya bərabər, korrelyasion matrisi $(n \mathbf{I}(\theta))^{-1}$ olan asimptotik normal statistik qiymətlərdir. Bu şərtlərlə bu statistik qiymətlər itki funksiyalarının geniş sinfinə nəzərən asimptotik lokal minimaks statistik qiymətlərdir və bunlara asimptotik optimal statistik qiymətlər kimi baxmaq olar (bax, *Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*).

İnterval qiymətləndirilməsi. Etibarlılıq əmsali γ ilə θ statistik qiyməti üçün *etibarlı çoxluq*, əgər $\mathbf{P}_\theta\{E \supset \theta\} = \gamma(\geq \gamma)$ olarsa, Θ çoxluğunun təsadüfi $E = E(X)$ altçoxluğuna deyilir, yəni E təsadüfi çoxluğuna θ statistik qiymətinin γ etibarlılıq əmsallı *etibarlı çoxluq* deyilir. Adətən, etibarlılıq əmsali verilmiş γ olan etibarlı oblastlar çox olur və problem bu halda ehtimal oblastın seçilməsindən ibarət olur ki, o, bəzi optimallıq xassələrinə malik olsun (məs., $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ olduqda minimal uzunluqlu interval). 2.1 misalının şərtlərində $\sigma = 1$ olsun; onda

$$[\bar{X} - \lambda/\sqrt{n}, \bar{X} + \lambda/\sqrt{n}], \quad \gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\{-u^2/2\} du$$

intervalı etibarlılıq əmsali γ olan etibarlı intervaldır (bax, *Interval statistik qiymət*).

Əd.: [1] Fisher R., «Phil. Trans. Roy. Soc.» (A), 1922, v. 222, p. 309–68; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., 1973; [5] Ибрагимов И. А., Хасмискин Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [8] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981.

STATİSTİK MEXANİKА « статистическая механика; statistical mechanics » – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan çoxsaylı hissəciklərdən ibarət sistemlərin statistik metodlarla öyrənilməsinə həsr olunmuş fizika bölməsidir. S. m. və ehtimal nəzəriyyəsi uzun müddət bir-birlərinin maraq dairələrinin təbii yaxınlığına baxmayaraq, demək olar ki, bir-birilə təmasda

olmadan paralel inkişaf etmişlər. 20-ci əsrin son iki onilliyində vəziyyət kəskin dəyişərək, riyazi fizika və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə mütəxəssislərin müştərək səyləri ilə müəyyən edilmişdir ki, S. m.-nin əsas anlayışları ehtimal nəzəriyyəsinin təbii anlayışları kimi riyazi olaraq ifadə oluna bilər və S. m.-nin bütün əsas tezisləri riyazi teoremlər kimi interpretasiya oluna bilər və ya riyazi hipotezlər kimi olduqca dəqiq ifadə oluna bilər.

S. m. ənənəvi olaraq klassik Nyuton mexanikası anlayışlarına əsaslanan klassik S. m. və kvant mexanikası anlayışlarına əsaslanan kvant S. m.-sı kimi hissələrə ayrılır. Belə aydın olmuşdur ki, klassik S. m. tamamilə təsadüfi meydanlar və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi dilində şərh oluna bilər. Kvant S. m.-nin anlayışları təbii olaraq funksional analizin yeni bölməsi terminologiyasında şərh olunur və bu bölmə əksər hallarda *qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi* kimi adlandırılır, bu adlandırılma da adi ehtimal nəzəriyyəsinin ideya və metodları ilə nəzərə çarpacaq qədər paralelizmin olmasından irəli gəlir. Burada klassik S. m.-nin daha əyani anlayışlarına baxılır.

S. m. ənənəvi olaraq, digər şəkildə tarazlıqlı statistik mexanika və qeyri – tarazlıqlı statistik mexanika kimi hissələrə bölünür. Tarazlıqlı S. m. tarazlıq vəziyyətində olan sistemin statistik xassələrini – fəza biricins sisteminin olduqca uzun müddət ərzində avtonom inkişafında müəyyənleşən xassələrini təsvir edir. Qeyri – tarazlıqlı S. m. belə tarazlığın müəyyənleşmə prosesinin özünü, qeyri – biricins sistemlərin dinamikasını, o cümlədən, kinetik tənliklərin makroskopik miqyasları səviyyəsində belə dinamikasının təsvirinin aşkar edilməsi məsələsini öyrənir.

S. m.-nin tədqiqlərində əsas məqsəd maddenin makroskopik xassələrini onu təşkil edən makroskopik hissələrin qarşılıqlı təsir xarakteri haqqında təsəvvürlər əsasında təsvirdir. Tipik hallarda makromiqyas həcmdə hissəciklərin sayı (normal atmosfer şərtlərində 1 m^3 havada $\sim 10^{19}$ molekul vardır) olduqca böyük olduğundan sistemin *termodinamik limit keçidindən* sonra (bu halda hissəciklər sayı $N \rightarrow \infty$) yaranan xassələrinin öyrənilməsi ön plana çəkilir. Son zamanlar riyazi araşdırmalarla daxil olunmuş əsas metodik yenilik sonsuz sayda qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklərdən ibarət obyektlərin aşkar sürətdə baxılmasından ibarətdir, bu obyektlərin xarakteristikaları sonlu sistemlərin uyğun xarakteristikalarının termodinamik limitləri ilə üst-üstə düşür. Sonsuz saylı hissəciklər sistemlərinin öyrənilməsinə keçidin daha çətin və daha abstrakt riyazi aparatın tətbiqi ilə bağlı olmasına baxmayaraq, nəticə etibarilə bu keçid özünü doğruldur, belə ki, belə yanaşmada S. m.-nin bütün anlayışları və ideyaları olduqca düzgün və aşkar sürətdə ifadə olunur.

Klassik tarazlıqlı S. m.-da sistemin vəziyyəti $\mathbb{R}^3$ Evklid fəzasında nöqtəvi təsadüfi meydanın ehtimal paylanması kimi təsvir oluna bilər. Bu meydanın realizasiyaları $\mathbb{R}^3$ -də hesabı lokal sonlu altçoxluqlardır. Nöqtələr hissəciklərin vəziyyətləri kimi anlayılır. Əksər hallarda bir qədər daha ümumi nişanlanmış nöqtəvi meydan modelinə baxılır ki, bu halda hər bir hissəciyə əlavə olaraq onun sürəti qarşı qoyulur, əgər bir neçə tip hissəciklərdən ibarət sistemə baxılırsa, onda hissəciyin tipi də nəzərə alınır. Ən

çox tədqiq olunan obyekt üçölçülü tamqiymətli $\mathbb{Z}^3$ şəbəkəsindən qiymətlər alan (çox vaxt digər düzgün şəbəkələrə də baxılır) diskret argumentli təsadüfi meydanlar kimi riyazi təsvir olunan sistemlərdir. Fiziki olaraq, $t \in \mathbb{Z}^3$ nöqtələrinə kristal şəbəkənin

düyünləri, X_t , $t \in \mathbb{Z}^3$ meydanının qiymətlərinə bu düyünlərdə yerleşən hissəciklərin bəzi xarakteristikaları uyğundur. Belə şəbəkəvari modellər, kvant modellərinə baxıldıqda, daha mürəkkəb modellərin sadələşmiş klassik analoqları kimi yaranır.

Meydanın X_i qiymətlərinin Evklid fəzasına aid olduğu hal kimi, X_i qiymətlərinin sonlu və ya hesabi fəzasına baxıldığı hal da maraqlıdır. Fiziki olaraq bu sonuncu halda X_i -nin qiymətləri, əksər hallarda uyğun hissəciyin xarici elektronunun spininin qiyməti kimi interpretasiya olunur, buna görə də, belə modellər spin modelləri adlandırılır.

Üçölçülü sistemlərdən başqa, nazik plyonkaların təsvirində istifadə olunan ikiölçülü sistemlərə ($\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{Z}^2$ -də), tellərin (məs., polimerin uzun molekulalarının) təsvirində istifadə olunan birölçülü sistemlərə ($\mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$ -də) də baxılır. Dördölçülü modellər, $\mathbb{R}^4$ -də ümumiləşmiş təsadüfi meydanlar kimi təsvir olunan meydanların kvant meydan nəzəriyyəsinin dördölçülü modellərinə diskret yaxınlaşmalar kimi maraqlıdır. Təsadüfi meydanların xassələri onların dim. – ölçülərindən kəskin surətdə asılıdır və bu asılılığın tədqiqi S. m.-nin ənənəvi diqqət mövzudur. Məs., ehtimali proseslərə gətirən birölçülü hal, əksər hallarda, trivial hal kimi izah olunur, belə ki, burada Markov proseslərini xatırladan proseslər yaranır və lokal qarşılıqlı təsirlərin ən təbii halı üçün faza keçidləri yoxdur. Qeyd olunmuş mülahizələrə görə ixtiyari dim. – ölçülü sistemlərə baxılması adi hal şəklini almışdır, bu şərtlə ki, sistemin dim. – ölçüsündən asılı olaraq sistemin xassələrinin keyfiyyətə dəyişikliklərinə xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Tarazlıqlı S. m.-nin əsas nəticəsi Gibbs postulatıdır; bu postulatda hökm olunur ki, spin sistemləri halında makroskopik ölçüdəli sonlu Ω qabında tarazlıq vəziyyətində hissəciklərin hər hansı x konfigurasiyasının ehtimalı $\exp\{-H(x)/T\}$ eksponentinə mütənəsbir, burada $H(x)$ – hissəciklərin bu konfigurasiyasının enerjisi, T – sistemin mütləq temperaturudur və o, uyğun vahidlər sisteminde ölçülür. Nöqtəvi təsadüfi meydan halında Gibbs paylanması Ω qabında Puasson nöqtəvi təsadüfi meydanının paylanmasına nəzərən $\exp\{-T^{-1}(H(x) - \mu N(x))\}$ -ə mütənəsbir sıxlıq ilə verilir. Burada $N(x)$, – x konfigurasiyasındakı hissəciklərin sayı, μ – hissəciklərin orta sıxlığını xarakterizə edən və kimyəvi potensial adlanan həqiqi parametrdir. Sonsuzölçülü sistemlərə keçdikdə Gibbs postulatı belə bir müddəə kimi ifadə oluna bilər: S. m.-nin tarazlıq paylanması DLR–şərti ilə seçilən Gibbs təsadüfi meydanının paylanmasıdır. DLR–şərti sonlu althəcmələrdə realizasiyalar üçün şərti ehtimalları bu althəcmələrin xaricində realizasiyalar verildiyi halda sistemin enerjisini təyin edən potensiallar vasitəsilə ifadə edir. Gibbs postulatı S. m.-də variasion prinsip kimi də başqa şəkildə ifadə oluna bilər.

Maddənin əsas fiziki maraqlı makroskopik xassələri Gibbs meydanının sonluölçülü paylanmaları ilə ifadə olunur. S. m.-də bu paylanmaların xüsusi surətdə daxil olunmuş korrelyasion funksiyaların köməyi ilə təsvirinə üstünlük verilir. Buna görə də, sonluölçülü paylanmaları Gibbs meydanının potensialı vasitəsilə ifadə etmək mümkündür mövzusu fundamental məsələ kimi baxılır. Təəssüflə qeyd olunmalıdır ki, aşkar analitik düsturlar səviyyəsində bu məsələni həll etmək az hallar üçün mümkündür. Bu, əsas etibarilə, birölçülü meydanlar halıdır ki, burada bu problem Markov zəncirinin stasionar paylanmasının onun keçid ehtimalları üzrə tapılması kimi məşhur məsələyə yaxındır. Bu məsələnin məlum olan ən aşkar həlli ikiölçülü *İzinq modeli* üçün dərin cəbri ideyalar sayəsində alınan Onsager həllidir. Aşkar həll olunan modellərdən maraqlıların siyahısı xüsusi hallar üçün olduğu baxmayaraq genişlənməkdə davam edir, lakin hər hansı ümumi halda belə aşkar həllin alınmasına ümid azdır. Korrelyasion funksiyaların təqribi hesablanması üçün ənənəvi olaraq ayrılış metodu istifadə olunur və bu funksiyaların yüksək temperaturu ayrılış sıralara ayrılışında bir neçə ilk hədləri effektiv surətdə

hesablamaq olur. Son zamanlar mahiyyətə qarşılıqlı təsiri *Markov proseslərinin* modeləşdirilməsinə əsaslanan ədədi metodlar sürətlə inkişaf edir, bu proseslər elə seçilir ki, bunlar üçün Gibbs paylanması zaman üzrə stasionar olsun.

Qeyd olunanlarla əlaqədar olaraq potensial və korrelyasion funksiyalar arasında qarşılıqlı əlaqələrin keyfiyyətli araşdırılmasına böyük maraq göstərilir. Məs., faza keçidləri problemi belə məsələlərə gətirilir. Faza keçidləri fiziki olaraq onun parametrləri kəsilmez dəyişdiyi halda maddənin xassələrinin sıçrayışla dəyişmələrində və maddədə makroskopik qeyri – bircinsliyin yaranması mümkünlüyü halında yaranır. Faza keçidini riyazi olaraq belə bir vəziyyət kimi təyin etmək olar ki, potensial, temperatur, kimyəvi potensial parametrdən analitik asılı olduğu halda sonluölçülü paylanmaların bu parametrdən asılılığının öz xüsusiyyətləri vardır, məs., törəmələrin kəsilməzliyi və ya kəsilməziyi kimi şərtlərin pozulması. Faza keçidləri problemi potensialı ilə verilən müxtəlif Gibbs meydanlarının sayı haqqında problem ilə sıx bağlıdır. Parametrlər oblastını belə meydanın yeganə olduğu və yeganə olmadığı hissələrə ayıran sərhəddə faza keçidləri baş verir. Ciddi riyazi səviyyədə vəziyyət əsas etibarilə, hələlik kükrəntilər nəzəriyyəsi tip metodlarla anlaşılır (Payerls metodu, Piroqov – Sinay metodu).

Sistemlərin bəzi sinifləri üçün korrelyasion bərabərsizliklər metodu da səmərəli olur. Olduqca yüksək temperaturar oblastında, nöqtəvi meydanlar üçün isə olduqca kiçik sıxlıqlar halında faza keçidləri yoxdur, yeganəlik isə vardır. Aşağı temperaturalarda yeganəlik olmaya bilər və burada yaranan vəziyyətlər olduqca müxtəlifdir. Burada sistemin temperaturu sıfır yaxınlaşdıqda, onun asimptotik vəziyyətini təsvir edən *əsas vəziyyətlərin* araşdırılması mühüm problemdir. Riyazi araşdırmalar üçün xüsusilə çətin sayılan hal – yeganəlik və qeyri – yeganəlik oblastını ayıran kritik temperatur yaxınlığında yerləşən «orta» temperaturar halının araşdırılmasıdır. Belə kritik temperatur qiymətlərində gözlənilir ki, korrelyasiyaları o dərəcədə asta azalan Gibbs meydanları yarana bilər ki, mərkəzi limit teoremi bu halda doğru olmur. Daha sonra gözlənilir ki, burada uyğun parametrlərlə renormalizasion qrupun seçilməsində limitdə yeni qeyri – trivial avtomodel təsadüfi meydanlar yarana bilər. Bu problematika intensiv müzakirə olunsada, bu zaman inkişaf edən ideya və metodlar hələ ki, riyazi olaraq, çox çətinliklə anlaşılır.

Qeyri – tarazlıqlı S. m. problemlərinin riyazi işlənilməsi daha da pis vəziyyətdədir. Burada əsas tədqiqat obyektləri S. m.-nin dinamik sistemləridir. Bunlar elə dinamik sistemlərdir ki, onların faza fəzası – $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında nişanlanmış nöqtəvi meydanın realizasiyalardır, burada nöqtələr (hissəciklər) $d \geq 2$ -yə aid olan sürət vektoru ilə nişanlanmışlar. Realizasiyanın hərəkəti differensial tənliklərin sonsuz sistemi ilə verilir, bu tənliklər Nyuton mexanikası tənliklərinin adi sisteminin analoqudur. Belə dinamikanın qurulması məsələsinin özü, realizasiyaların olduqca zəngin çoxluğunda, yalnız $d \leq 2$ halı üçün həll olunmuşdur.

Fəza ölçülərinin ixtiyari qiymətlərində dinamikanın yalnız tarazlıqlı variantı, yeni uyğun Gibbs təsadüfi meydanını verən invariant ölçüyə malik dinamik sistemi qurmaq mümkün olmuşdur. Əlbəttə, daha artıq nəticələrin alınmasını gözləmək olar. Belə fikirləşmək olar ki, requlyarlıq tipli bəzi əlavə məhdudiyyətlərlə Gibbs paylanmaları sonsuz hissəciklər sistemlərinin dinamikasında dəyişməz qalan bütün paylanmalar çoxluğunu tamamilə istifadə edir və 0 anında başlanğıc ehtimal paylanmalarının olduqca geniş sinfi üçün paylanma $t \rightarrow \infty$ anında Gibbs paylanmalarından birinə yığılır. Lakin hələlik belə hipotezin isbatı üçün heç bir yanaşma məlum deyildir.

Qeyri – tarazlıqlı S. m.-də kinetik tənliklər görkəmli yer tutur (o cümlədən, *Boltsman tənliyi*, *Vlasov tənliyi*, hidrodinamik tənlikləri). Bunlar evolyusion tipli inteqro – differensial tənliklər olub, S. m.-nin dinamik sistemlərinin vəziyyətlərinin bəzi ortalanmış xarakteristikalarının zaman üzrə evolyusiyasını təqribən təsvir edir. Son müddətdə riyaziləşdirilmiş tədqiqatlarda kinetik tənliklər zaman və fəza miqyaslarının və qarşılıqlı təsiri potensialının

nəticəsi kimi interpretasiya olunur. Burada araşdırmalar ciddi riyazi çərçivədə yalnız başlanğıc mərhələdədir.

Dinamikanın təqribi təsviri üçün çox vaxt təsadüfi proseslərin istifadəsinə əsaslanan modellər daxil olunur. Məs., hissəciklər sisteminin hərəkəti bəzən çoxölçülü *diffuzion proses* kimi təsvir olunur və bu halda fərz olunur ki, hissəciklərdən birinin vəziyyətinin artımlarının infinitezimal xarakteristikaları və ya sürəti bu hissəciyə qonşu hissəciklərin vəziyyətlərindən asılıdır. Termodinamik limit keçidindən sonra qarşılıqlı təsirli Markov prosesləri sinfinə aid olan sonsuzölçülü diffuzion proses yaranır.

S. m.-nin riyazi problemlər üzrə araşdırmalarının inkişafı yalnız fiziki anlayışlar və nəticələrin əsaslandırılması və dəqiqləşdirilməsi üçün səmərəli olmamışdır. Bu araşdırmaların gedişatında elə təbii və gözəl riyazi anlayışlar aşkar olunmuşdur ki, bunlar özlərinin abstraktlaşdırılması və fiziki reallıqdan seçilən variantında gözənilməyən qeyri – fiziki təbiiqlərini tapa bilməşlər. Məs., Gibbs meydanları biologiya və texnikada yaranan təsadüfi proseslərin təsviri üçün geniş istifadə olunur. Gibbs paylanması anlayışı isə dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsində özünəməxsus yer tutmuşdur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84; [2] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [3] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [4] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [5] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] Ruelle D., Thermodynamic formalism, L. – [a. o.], 1978.

STATİSTİK MƏSƏLƏLƏR qruplarda və bircins fəzalarda « статистические задачи на группах и однородных пространствах; statistical problems on groups and homogeneous spaces » – qrupda və ya qrupun bircins fəzasında invariant çoxluqlar üçün riyazi statistikanın elə məsələsidir ki, onların həll metodları çoxluqların cəbri xassələrinə, həm də qoyuluşuna görə bunlara ekvivalent olan çoxluqlar üçün həll metodlarına əsaslanır.

G – hər hansı qrup, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ – statistik struktur olsun. Əgər hər bir $g \in G$ elementi $\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{X}$ $\mathcal{A}$ – ölçülən inikasını təyin edirsə və $\mathcal{P}$ ölçülər çoxluğunu özünə inikas etdirən g^* inikasını doğrursa, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ G –invariant statistik struktur adlanır. g inikası əksər hallarda sol (sağ) yerinidəyişmə adlanır; x nöqtəsinin sol yerinidəyişməsi gx kimi işarə olunur. Invariant $\mathcal{X}$ fəzasını kəşisməyən $\{gx, g \in G\}$ altçoxluqlarının – orbitlərinin birləşməsi kimi ifadə etmək olar; əgər $\mathcal{X}$ bir orbitdən ibarət olarsa, onda $\mathcal{X}$ bircins fəza adlanır. Məs., hər bir qrup özü özünün bircins fəzasıdır. g^* çevirmələrinin çoxluğu G^* da qrup təşkil edir. Əgər $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Omega\}$ ölçülərin parametrik ailəsi olarsa, G^* -nu parametrik çoxluğun çevirmələr qrupu hesab etmək olar. Əgər $\mathbf{P}$ hər hansı qeyd olunmuş ehtimal ölçüsü, $A \in \mathcal{A}$, $\theta \in \Omega = C$ olduqda, bu parametrik $\mathbf{P}_\theta: \mathbf{P}_\theta(A) = \mathbf{P}(\theta^{-1}A)$ ölçülər ailəsi olarsa, $\mathcal{P}$ ailəsi yerinidəyişmə parametrindən asılıdır, deyilir.

X təsadüfi elementi ilə ifadə olunan ümumi çoxluq (rus. генеральная совокупность) invariant statistik struktur doğrursa, bu çoxluq invariant çoxluq adlanır. Invariant çoxluqlar üçün statistik məsələlərin özünəməxsus xüsusiyyəti həlledici qaydalara və itki funksiyalarına qoyulan tələblərdə əks olunur.

Doğrudan da, əgər d θ parametrinin qiymətində doğru həlledirsə, $\bar{g}d$ $g^*\theta$ parametri üçün doğru həlledirsə, $\bar{g}$ isə g çevirməsinin doğurduğu, həllər fəzası D -də hər hansı çevirmədirsə, onda $d(x):d(gx) = \bar{g}d(x)$ ekvivalent həlledici qaydaları və $r:r(\bar{g}d, g^*\theta) = r(d, \theta)$ invariant itki funksiyalarına baxılır. Bu halda risk funksiyası $R(d, \theta) = \mathbf{M}_\theta r(d(X), \theta)$ Ω -da G^* -nın orbitlərində sabitdir. Əgər Ω bircinsdirsə, onda risk funksiyası bütün $\theta \in \Omega$ qiymətlərində sabit olur və bu halda, çox vaxt optimal həlledici qaydanı tapmaq mümkün olur.

Ω_0 və Ω_1 G^* -ya nəzərən invariant çoxluqlar olduğu halda $H_1: \theta \in \Omega_1$ alternativinə qarşı $H_0: \theta \in \Omega$ hipotezinin yoxlanılması məsələlərində yalnız bütün $g \in G$ üçün $d:d(gx) = d(x)$ invariant kriteriləri ilə kifayətlənmək məsləhətdir. Məlumdur ki, bəzi əlavə məhdudiyyətlərdə elə invariant kriteri vardır ki, bu kriteri bütün kriterilər sinfində minimaksdır. Bu kriterinin tapılması metodu doğruyaoxşarlıq nisbətinin maksimal invariantın doğurduğu σ – cəbrə daralması ilə əlaqədardır (bax, [1]). Maksimal invariant invariant statistikadır, yəni müxtəlif orbitlərdə müxtəlif qiymətlər alan, $t(gx) = t(x)$, $x \in \mathcal{X}$, $g \in G$ xassəli $t: \mathcal{X} \rightarrow T$ inikasıdır. Maksimal invariantın köməyiylə yalnız seçimin reduksiyası deyil, həm də parametrik fəzanın reduksiyası həyata keçirilir, belə ki, invariant həlledici qaydanın riski parametrlər fəzasında maksimal invariantın funksiyasıdır.

Seçimin reduksiyasının digər üsulu kafi statistiklərə baxılmaqla ilə əlaqədardır. Invariantlıq və kafilik anlayışları arasında münasibət də öyrənilmişdir (bax, [2] – [4]).

Yerinidəyişmə parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi çox yaxşı öyrənilmişdir. Bu halda $D = \Omega = G$ olur və $d(X)$ statistik qiymətinin ekvivariantlığı $d(gx) = g d(x)$ bərabərliyinə gətirilir.

Burada ilk misallardan biri miqyas parametrləri və $\mathbb{R}^1$ -də paylanmaların yerinidəyişməsi üçün Pitmen statistik qiymətləridir (bax, [5], [6]). G Abel qrupu olarsa, itki funksiyası kimi $r(d, \theta) = [\chi(d) - \chi(\theta)]^2$ götürülməsi təklif olunur, burada χ , – G qrupunun hər hansı qeyd olunmuş xarakteridir.

Bəzi təbii məhdudiyyətlər qoyulduqda isbat olunmuşdur ki, təkrar seçim əsasında alınan ekvivariant statistik qiymət, yalnız və yalnız, o halda optimal statistik qiymətdir ki, o, G -də invariant ölçüyə nəzərən ümumiləşmiş Bayes statistik qiyməti olsun. χ xarakterlər qrupunda dəyişdikdə, bütün itki funksiyalarının ailəsinə nəzərən optimal statistik qiymətin varlığı üçün zəruri və kafi şərt – invariant ölçü üzrə X seçiminin paylanma sıxlığı f -in güclü simmetriyaya malik olmasıdır: $\{x: f(x - \theta) = f(x + \theta), \theta \in G\}$ çoxluğunun $\mathcal{X}$ -də hər bir orbit ilə yalnız bir ümumi nöqtəsi vardır (bax, [7]). Qeyri – Abel qruplarında mühüm nəticələr yalnız xüsusi qruplar üçün alınmışdır.

Məs., sferada, $SO(m)$ və $\mathbb{R}^m$ -də invariant çoxluqlar üçün $SO(m)$ qrupunun yerinidəyişmə parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi həll olunmuşdur, dayanıqlılıq və statistik modellərin $SO(m)$ -də kəsilməzliyi araşdırılmışdır (bax, [8]).

Digər məsələlərdən paylanma sıxlığının ekvivariant statistik qiyməti məsələsini qeyd etmək olar. İsbat olunmuşdur ki,

yerindəyişmə parametrlı sıklığın optimal ekvivalent statistik qiyməti, bəzi şərtlər ödəniləndə, G -də invariant ölçüyə nəzərən ümumiləşmiş Bayes statistik qiymətidir (bax, [9], [10]).

Əd.: [1] Stein C., «Techn. Rept. Nat. Aeron and Space Admin.», 1956, № 6; [2] Hall W. J., W i j s m a n R. A., G h o s h J. K., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 575–614; [3] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 2, с. 307–21; [4] Сапожников П. Н., «Матем. заметки», 1970, т. 7, № 6, с. 707–15; [5] Pitman E. J. G., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391–421; [6] Каган А. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 104, с. 19–87; [7] Рухин А. Л., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 52–109; [8] Никитин В. Н., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, М., 1984, с. 94–112; [9] W e r t z W., «Metrika», 1979, v. 26, с. 157–67; [10] Кондаков В. М., Сапожников П. Н., «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», 1988, № 6, с. 25–30.

STATİSTİK MƏSƏLƏLƏR(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin « статистические задачи теории случайных процессов; **statistical problems of theory of random processes** » – *təsadüfi proses* şəklində ifadə olunan müşahidələr əsasında alınan statistik nəticələrə həsr olunmuş riyazi statistika bölməsidir. Ən ümumi qoyuluşda, $t \in T$ üçün, $X(t)$ təsadüfi funksiyasının qiymətləri müşahidə olunur və bu müşahidələr əsasında $X(t)$ təsadüfi prosesinin bəzi xarakteristikaları haqqında statistik nəticələr çıxarılması tələb olunur. Belə geniş qoyuluşda asılı olmayan müşahidələrin bütün klassik statistikasına formal olaraq bura daxil olunur. Əslinə qaldıqda isə təsadüfi proseslərin statistik analizi kimi yalnız asılı müşahidələrin statistikasına əsaslanır, bu şərtlə ki, məs., təsadüfi prosesin çoxsaylı asılı olmayan realizasiyalarının statistik analizi istisna olunur. Bununla yanaşı, statistik nəzəriyyənin əsasları, məsələlərin əsas qoyuluşları (*statistik qiymətləndirmə, statistik hipotezlərin yoxlanılması*), əsas anlayışlar (kafilik, meyilsizlik, tutarlılıq və s.) klassik nəzəriyyədə olduğu kimidir. Lakin konkret məsələlərin həllində bəzən yeni səpikli proseslər və mühüm çətinliklər yaranır. Bu çətinliklər müəyyən dərəcədə müşahidə olunan prosesin daha mürəkkəb strukturlu olmasından asılı olduğu kimi, bir qədər də kəsilməz zamanlı müşahidələrlə bağlı – paylanmaların sonsuz – ölçülü fəzələrdə baxılması zəruriliyi ilə əlaqədar olur.

Əslinə qaldıqda, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin S. m.-nin həllində müşahidə olunan prosesin strukturundan olduqca istifadə olunur və təsadüfi prosesin təsnifatına uyğun olaraq Gauss, Markov, stasionar, şaxələnən, diffuzion və s. proseslərin S. m.-nə baxılır. Bu istiqamətdə stasionar prosesin statistik nəzəriyyəsi (zaman sıralarının analizi) ən çox inkişaf etmiş hesab oluna bilər.

Təsadüfi prosesin statistik analizinin zəruriliyi, o cümlədən, meteoroloji iqtisadi sıraların analizi, tsiklik proseslərin (qiymətlərin dəyişməsi, günəş ləkələri kimi) tədqiqi 19-cu əsrdə yaranmışdır. Hal-hazırda təsadüfi proseslərin statistik analizi ilə bağlı məsələlərin dairəsi olduqca genişdir. Təsadüfi küylərin, vibrasiyaların, turbulent proseslərin, dəniz təlatümlərinin, kardiogramların, ensefaloqramların və s. statistik analizini qeyd etmək olar. Küy fonunda signalın ayırd edilməsi problemlərinin nəzəri aspektləri təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin olduqca mühüm S. m.-dir.

Bundan sonra fərz olunur ki, $X(t)$ təsadüfi prosesi yalnız $0 \leq t \leq T$ parçasında müşahidə olunur və fərz olunur ki, t parametri ya bütün $[0, T]$ parçasında dəyişir və ya bu parçadan yalnız tam qiymətləri alır. Adətən, $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ statistik prosesinin paylanması $\mathbf{P}^T$ haqqında S. m.-də yalnız o məlum

olur ki, bu paylanma paylanmaların hər hansı $\{\mathbf{P}^T\}$ ailəsindədir. Bu ailəni parametrik formada yazmaq həmişə mümkündür.

M i s a l 1. Müşahidə olunan $X(t)$ prosesi ya təsadüfi olmayan $s(t)$ funksiyası («signal») və $Y(t)$ təsadüfi funksiyasının («küy») cəmidir və ya yalnız $Y(t)$ təsadüfi funksiyasıdır.

$H_1: X(t) = Y(t)$ alternativinə qarşı $H_0: X(t) = s(t) + Y(t)$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur (küy fonunda signalın aşkar edilməsi məsələsi). Bu statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsidir.

M i s a l 2. $X(t) = s(t) + Y(t)$ müşahidə olunan prosesdir, burada $s(t)$ – müşahidəçiyə məlum olmayan təsadüfi olmayan funksiyadır (signal), $Y(t)$ – təsadüfi prosesdir (küydür). s funksiyasını və ya onun verilmiş t_0 nöqtəsindəki $s(t_0)$ qiymətini qiymətləndirmək tələb olunur. Oxşar şəkildə fərz etmək olar ki, $X(t) = s(t; \theta) + Y(t)$ prosesində s naməlum θ parametridən asılı məlum funksiyadır, bu funksiyanı $X(t)$ -nin müşahidəsi üzrə qiymətləndirmək tələb olunur (küy fonunda signalın ayırd olunması). Bu qiymətləndirməyə aid məsələlərdir.

Təsadüfi proseslər üçün *doğruya oxşarlıq nisbəti*: S. m.-də doğruya oxşarlıq nisbəti və doğruya oxşarlıq funksiyası böyük rol oynayır (bax, *Neyman – Pirson lemması, Statistik hipotezlərin yoxlanılması*). $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ paylanmalarının *doğruya oxşarlıq nisbəti* –

$$p(X(\cdot); u, v) = p(X(\cdot)) = \frac{d\mathbf{P}_u^T}{d\mathbf{P}_v^T}(X(\cdot))$$

sıklığına deyilir. μ , – σ – sonlu ölçüdür, bütün $\mathbf{P}_\theta^T$ ölçüləri isə μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olarsa,

$$L(\theta) = \frac{d\mathbf{P}_\theta^T}{d\mu}(X(\cdot))$$

funksiyasına *doğruya oxşarlıq funksiyası* deyilir. Diskret halda, $t \in [0, T]$ parçasının tam nöqtələrindəki qiymətləri alarsa və $T < \infty$ olarsa, məs., $\mathbf{P}_u$ və $\mathbf{P}_v$ -nin müsbət paylanma sıklıqları olarsa, doğruya oxşarlıq nisbəti həmişə mövcuddur və o, bu sıklıqların nisbəti ilə üst-üstə düşür.

Əgər t bütün $[0, T]$ parçasından qiymətlər alırsa, onda ehtəmallar ola bilər ki, $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ ölçüləri bir-birinə nəzərən mütləq kəsilməz olmasınlar; hətta, bundan başqa, ehtəmallar ola bilər ki, $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ ölçüləri qarşılıqlı sinqulyar olsunlar, yəni $X(t)$ -nin realizasiyaları fəzasında hər hansı A çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}_u^T\{X \in A\} = 0, \quad \mathbf{P}_v^T\{X \in A\} = 1.$$

Bu halda $p(X; u, v)$ mövcud deyildir. $\mathbf{P}_\theta^T$ ölçüləri sinqulyar olduğu halda mühüm və müəyyən dərəcədə paradoksal nəticələr alınır, bu isə θ parametri haqqında səhv olmayan nəticələr çıxarmağa imkan verir. Məs., $\Theta = \{0, 1\}$ olsun; $\mathbf{P}_0^T$, $\mathbf{P}_1^T$ ölçülərinin sinqulyarlığı belə anlaşılır: « $X \notin A$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul edilir, əgər $X \in A$ olarsa, H_0 qəbul edilmir» kriterisinin köməyi ilə $H_0: \theta = 0$ və $H_1: \theta = 1$ hipotezləri səhv edilmədən fərqləndirilir. Belə mükəmməl kriterilərin olması əksər hallarda

göstərir ki, S. m. o qədər yaxşı qoyulmamışdır və bu səbəbdən çox mühüm olan dəyişikliklər yox olmuşdur.

M i s a l 3. $X(t) = \theta + Y(t)$ olsun, fərz olunur ki, $Y(t)$ riyazi gözləməsi sıfıra bərabər stasionar erqodik proses, θ – heqiqi parametrdır. Fərz olunur ki, $Y(t)$ -nin realizasiyalari heqiqi oxu özündə saxlayan zolaqda sanki yaqin analitik funksiyalardır. Erqodik teoreme esasən

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \theta$$

münasibeti doğrudur və bütün $\mathbf{P}_\theta^\infty$ ölçüləri qarşılıqlı singulyardırlar. Analitik $X(t)$ funksiyası sıfır ətrafında öz qiymətlərilə tamamilə təyin olunduğundan, θ parametri ixtiyari $T > 0$ üçün $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ müşahidələri üzrə səhvə yol verilmədən qiymətləndirilir.

Əgər doğruxaoxşarlıq nisbəti varsa, onda onun hesablanması çətin məsələdir. Hesablamalar əksər hallarda

$$p(X(\cdot); u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_u(X(t_1), \dots, X(t_n))}{p_v(X(t_1), \dots, X(t_n))}$$

limit münasibəti əsasında aparılır, burada $p_u, p_v, - (X(t_1), \dots, X(t_n))$ vektorunun paylanma sıxlıqlarıdır, $\{t_1, t_2, \dots\}, - [0, T]$ -də sıx çoxluqdur. Bu bərabərliyin sağ tərəfinin araşdırılması $\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v$ ölçülərinin singulyarlığının isbatında səmərəlidir.

M i s a l 4. Ya $X(t) = w(t)$ [burada $w(t)$ – Viner prosesidir (H_0 hipotezi)], yaxud $X(t) = m(t) + w(t)$ olduğu [m – təsadüfi olmayan funksiyadır (H_1 hipotezi)] fərz olunur. $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ ölçüləri $m' \in L^2(0, T)$ olduqda qarşılıqlı mütləq kəsilməz və $m' \notin L^2(0, T)$ olduqda qarşılıqlı singulyardırlar. Doğruxaoxşarlıq nisbəti aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunur:

$$\frac{d\mathbf{P}_1^T}{d\mathbf{P}_0^T}(X) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T [m'(t)]^2 dt + \int_0^T m'(t) dX(t) \right\}.$$

M i s a l 5. Fərz olunur ki, $X(t) = \theta + Y(t)$, θ – heqiqi parametrdır, $Y(t)$ isə riyazi gözləməsi sıfıra bərabər və korrelyasion funksiyası $r(t) = e^{-\alpha|t|}$, ($\alpha > 0$) olan məlum stasionar Markov Gauss prosesidir. $\mathbf{P}_\theta^T$ aşağıdakı doğruxaoxşarlıq funksiyası ilə verilən qarşılıqlı mütləq kəsilməz ölçülərdir:

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^T}{d\mathbf{P}_0^T}(X) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \theta X(0) + \frac{1}{2} \theta X(T) + \frac{1}{2} \theta \alpha \int_0^T X(t) dt - \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{4} \theta^2 \alpha T \right\}.$$

Məsələn, $X(0) + X(T) + \alpha \int_0^T X(t) dt$ $\mathbf{P}_\theta^T$ ailəsi üçün kafi

statistikadır.

Təsadüfi proseslərin statistikasının xətti məsələləri.

$$X(t) = \sum_{j=1}^k \theta_j \varphi_j(t) + Y(t) \quad (*)$$

funksiyası müşahidə olunur, burada $Y(t)$ – riyazi gözləməsi sıfıra bərabər, korrelyasion funksiyası məlum $r(t, s)$ olan təsadüfi prosesdir, φ_j – məlum təsadüfi olmayan funksiyalar, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ – məlum parametrdır (θ_j regressiya əmsalları).

θ parametrik çoxluğu $\mathbb{R}^k$ -nin altfəzasıdır. θ_j əmsalları üçün xətti statistik qiymətlər ya $\sum c_j X(t_j)$ şəklində statistik qiymətlərdir və ya bunların kvadratik orta mənada limitləridir. Kvadratik orta mənada meyilsiz xətti, optimal statistik qiymətlərin axtarılması məsələsi r -lə təyin olunan xətti integral tənliklərin və ya xətti cəbri tənliklərin həllinə gətirilir. Məhz belə optimal $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $Y = \sum b_j X(t_j)$, $\sum b_j \varphi_j(t_j) = 0$ münasibətlərlə verilən ixtiyari Y kəmiyyəti üçün $\mathbf{M}_\theta(\theta_j Y) = 0$ tənlikləri ilə təyin olunurlar. Bir sıra hallarda ən kiçik kvadratlər metodu ilə θ üçün alınmış statistik qiymətlər asimptotik olaraq ($T \rightarrow \infty$ olduqda) optimal xətti statistik qiymətlərdən pis olmur.

Ən kiçik kvadratlər metodu ilə statistik qiymətlərin hesablanması sadə olur və r -dən asılı olmur.

M i s a l 6. Məsəl 5-in şərtlərində $k=1$, $\varphi_1(t) \equiv 1$ olsun. Onda optimal meyilsiz xətti statistik qiymət

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2 + \alpha T} (X(0) + X(T) + \alpha \int_0^T X(t) dt)$$

olacaqdır.

$$\theta^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

statistik qiyməti asimptotik olaraq həmin dispersiyaya bərabər olur.

Qauss proseslərinin statistik məsələləri. $\{X(t), 0 \leq t \leq T, \mathbf{P}_\theta^T\}$ – bütün θ qiymətlərində Gauss prosesi olsun. Gauss prosesləri üçün alternativ vardır: ixtiyari $\mathbf{P}_u^T, \mathbf{P}_v^T$ ölçüləri ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz və ya singulyar ölçülərdir. Gauss paylanması özünün orta qiyməti $m\theta(t) = \mathbf{M}_\theta X(t)$ və korrelyasion funksiyası $r_\theta(s, t) = \mathbf{M}_\theta X(s)X(t)$ ilə tam mənası ilə təyin olunduğundan doğruxaoxşarlıq nisbəti $d\mathbf{P}_u^T/d\mathbf{P}_v^T = m_u, m_v, r_u, r_v$ xarakteristikaları ilə mürəkkəb şəkildə ifadə olunur. $r_u = r_v = r$, r kəsilməz funksiya olduğu hal nisbətən sadə haldır. Doğrudan da, $\Theta = \{0, 1\}$, $r_0 = r_1 = r$ olsun; λ_i – məxsusi qiymətlər, φ_j –

$$\lambda \varphi(s) = \int_0^T r(s, t) \varphi(t) dt$$

integral tənliyinin $L^2[0, T]$ -də bunlara uyğun normalanmış məxsusi funksiyalardır; $m_0(t)$, $m_1(t)$ – orta qiymətləri kəsilməz funksiyalardır və fərz olunur ki,

$$m_{ij} = \int_0^T m_i(t) \varphi_j(t) dt.$$

P_0 , P_1 ölçüləri, yalnız və yalnız, o halda mütləq kəsilməz ölçülərdir ki,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (m_{0j} - m_{1j})^2 \lambda_j^{-1} < \infty$$

şərti ödənilsin.

Bu halda

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_{1j} - m_{0j}}{\lambda_j} \left(\int_0^T X(t) \varphi_j(t) dt - \frac{m_{1j} - m_{0j}}{2} \right) \right\}.$$

Bu bərabərlikdən, r funksiyası müşahidəçiyə məlum olduğu halda, $H_1: m = m_1$ alternativinə qarşı $H_0: m = m_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün kriterinin qurulmasında istifadə etmək olar.

Stasionar proseslərin statistik məsələləri. Müşahidə olunan $X(t)$ -nin riyazi gözləməsi m , korrelyasion funksiyası $r(t)$ olan stasionar proses olduğu fərz olunur; $f(\lambda)$ və $F(\lambda)$, $X(t)$ -nin spektral sıxlığı və spektral funksiyası olsun. Stasionar proseslərin əsas statistika məsələləri hipotezlərin yoxlanılması və ya bu və ya digər – m , r , f , F xarakteristikalarına aid qiymətləndirmə ilə bağlı məsələlərdir. $X(t)$ ərqodik proses olduğu halda, m və $r(t)$ üçün tutarlı statistikalar $T \rightarrow \infty$ olduqda, uyğun olaraq

$$m^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad r^*(t) = \frac{1}{T} \int_0^{T-t} X(t+s)X(s) ds$$

düsturları ilə ifadə olunur. r məlum olduğu halda m -in qiymətləndirilməsi məsələsinə xətti məsələlər çərçivəsində baxılır. (*) şəklində müşahidələr üzrə regressiya əmsallarının $Y(t)$ -nin stasionar proses olduğu halında qiymətləndirilməsi kimi daha ümumi məsələlər də belə məsələlərdəndir.

Fərz olunur ki, $X(t)$ -nin orta qiyməti sıfır bərabərdir, spektral sıxlığı $f(\lambda; \theta)$ isə sonluölçülü $\theta \in \Theta$ parametrindən asılıdır.

Əgər $X(t)$ Gauss prosesi olarsa, onda dP_θ/dP_0 doğruxaoxşarlıq nisbəti üçün (əgər bu nisbət varsa) bir sıra hallarda maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətlərini və ya T -nin böyük qiymətlərində bu statistik qiymətlərə yaxın «yaxşı» qiymətləri tapmaq üçün düsturlar göstərmək olur. Bu statistik qiymətlər, olduqca geniş şərtlərlə, $(\theta, c\theta/\sqrt{T})$ parametrləri asimptotik normal və asimptotik effektiv qiymətlər olur.

M i s a l 7. $X(t)$ – kəsilməz zamanlı və spektral sıxlığı rəsonal

$$f(\lambda) = |Q(\lambda)/P(\lambda)|^2$$

olan stasionar Gauss prosesi olsun; P , Q – çoxhədlilərdir. Rəsonal spektral f_0 , f_1 sıxlıqlarına uyğun P_0^T , P_1^T ölçüləri yalnız

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_0(\lambda)/f_1(\lambda) = 1$$

münasibəti ödənilməli halda mütləq kəsilməz ölçülər olur. Burada θ parametri P , Q çoxhədlilərinin bütün əmsallarının çoxluğu-
dur.

M i s a l 8. Stasionar Gauss proseslərinin mühüm sinfi avto-
regressiv $X(t)$ proseslərinin sinfidir:

$$X^{(n)}(t) + \theta_n X^{(n-1)}(t) + \dots + \theta_1 X(t) = \varepsilon(t),$$

burada $\varepsilon(t)$ – vahid intensivlikli Gauss bəyaz küydür, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ – məlum parametrdir. Bu halda

$$f(\lambda; \theta) = (2\pi)^{-1} |P(i\lambda)|^{-2}$$

spektral sıxlıqdır, burada $P(z) = \theta_1 + \theta_2 z + \dots + \theta_n z^{n-1} + z^n$. Doğruxaoxşarlıq funksiyası isə

$$\frac{dP_\theta^T}{dP^T}(X) = \sqrt{\frac{K(\theta)}{K(\theta^0)^2}} \exp \left\{ \frac{\theta_n - \theta_n^0}{T} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [\lambda_j(\theta) - \lambda_j(\theta^0)] \int_0^T [X^{(j)}(t)]^2 dt - \frac{1}{2} (\lambda(\theta) - \lambda(\theta^0)) \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada $\lambda_j(\theta)$, $\lambda(\theta)$, θ -nin kvadratik formaları olub, $t = 0, T$ nöqtələrində $X^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots, (n-1)$ qiymətlərindən asılıdır; $K(\theta)$, $(X(0), X^{(1)}(0), \dots, X^{(n-1)}(0))$ vektorunun korrelyasion matrisinin determinantıdır.

θ avto-regressiya parametri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik normal və asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir.

$$\frac{1}{2T} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \lambda_j(\theta)}{\partial \theta_i} \int_0^T [X^{(j)}(t)]^2 dt = \begin{cases} 0, & 1 \leq i < n, \\ 1/2, & i = n \end{cases}$$

təqribi doğruxaoxşarlıq tənliyinin həlli θ_T^* da bu xassələrə malikdir.

Stasionar prosesin spektrinin statistik araşdırılmasında $I_T(\lambda)$ p e r i o d o q r a m ı mühüm rol oynayır. Bu statistika aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=0}^T e^{-it\lambda} X(t) \right|^2 \quad (\text{diskret zaman halında}),$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{-it\lambda} X(t) dt \right|^2 \quad (\text{kəsilməz zaman halında}).$$

$f(\lambda)$, $F(\lambda)$ üçün müxtəlif növ statistik qiymətlərin qurulmasında və bu xarakteristikalar haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün kriterilərin qurulmasında periodogramlardan geniş istifadə

olunur. Geniş şərtlərlə $\int I_T(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$ statistikaları $\int f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$ üçün tutarlı statistik qiymətlərdir. Məs., $\int_{\alpha}^{\beta} I_T(\lambda) d\lambda$ statistikaları $F(\beta) - F(\alpha)$ üçün statistik qiymətdir. Əgər $\varphi_T(\lambda; \lambda_0)$ ardıcılığı $\delta(\lambda - \lambda_0)$ δ - funksiyasına münasib surətdə yığılırsa, onda $\int \varphi_T(\lambda; \lambda_0) I_T(\lambda) d\lambda$ inteqralları $f(\lambda_0)$ üçün tutarlı statistik qiymətlər olur. Çox vaxt $\varphi_T(\lambda; \lambda_0)$ funksiyası kimi $a_T \psi(a_T(\lambda - \lambda_0))$, $a_T \rightarrow \infty$ şəklində funksiya seçilir. Əgər $X(t)$ diskret zamanlı proses olarsa, bu statistik qiymətləri

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{t=-T+1}^{T-1} e^{-it\lambda} r^*(t) c_T(t)$$

şəklində yazmaq olar, burada empirik korrelyasiya funksiyası

$$r^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{u=0}^{T-t} X(u+t)X(u)$$

düsturu ilə ifadə olunur, təsadüfi olmayan $c_T(t)$ əmsalları isə ψ , a_T -nin seçilməsi ilə təyin olunurlar. Bu seçmə öz növbəsində $f(\lambda)$ haqqında aprior bilgilərdən asılıdır. Kəsilməz zamanlı proseslər üçün analogi ifadə vardır.

Stasionar proseslərin ekstrapolyasiya, interpolyasiya və filtrasiya məsələləri də bəzən stasionar məsələlərin statistik məsələlərinə aid edilir.

Markov proseslərinin statistik məsələləri. Fərz olunur ki, $X_0, X_1, \dots, X_T$ müşahidələri birinci Markov zənciri təşkil edir. Olduqca geniş fərziyyələrlə doğruxaoxşarlıq funksiyası

$$\frac{d\mathbf{P}_{\theta}^T}{d\mu^T}(X) = p_0(X_0; \theta) p(X_1 | X_0; \theta) \dots p(X_T | X_{T-1}; \theta)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada p_0, p - başlanğıc (ilk) və keçid paylanma sıxlıqlarıdır. Bu ifadə asılı olmayan müşahidələr ardıcılığı üçün doğruxaoxşarlıq funksiyasına oxşardır və rəqulyarlıq şərtləri ödənildikdə ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ üzrə hamarlıq) asılı olmayan müşahidələr üçün uyğun olaraq analogi qiymətləndirmə və hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyələrini qurmaq olur.

$X(t)$ kəsilməz zamanlı Markov prosesi olduğu halda daha mürəkkəb vəziyyət yaranır. $X(t)$ - vəziyyətləri sayı sonlu N , differensiallanan keçid ehtimalları $p_{ij}(t)$ olan Markov prosesi olsun. Keçid ehtimalları matrisi $Q = \|q_{ij}\|$ matrisi ilə təyin olunur, $q_{ij} = p'_{ij}(0)$, $q_{ii} = -q_{ij}$. Fərz olunur ki, başlanğıc anda $X(0) = i_0$ qiyməti Q -dən asılı deyildir. Hər hansı $Q_0 = \|q_{ij}^0\|$ matrisini seçərək

$$\frac{d\mathbf{P}_{Q_0}^T}{d\mathbf{P}_{Q_0}^T}(X) = \exp \{ (q_{i_n}^0 - q_{i_n})^T \} \prod_{v=0}^{n-1} \frac{q_{j_v, j_{v+1}}}{q_{j_v, j_{v+1}}^0} \times$$

$$\times \exp \{ t_v (q_{i_n} - q_{i_n}^0 + q_{i_n}^0) \}$$

doğruxaoxşarlıq funksiyası tapılır. Burada $n(x)$, $t_v(x)$, $j_v(x)$ statistikaları aşağıdakı kimi təyin olunurlar: n - $X(t)$ prosesi $[0, T]$ intervalında sıçrayışları sayıdır, t_v - n -ci sıçrayış anıdır, $t_v = \tau_{v+1} - \tau_v$, $z_v = X(\tau_v)$. Yuxarıdakı ifadələrdən q_{ij} parametri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri alınır: $q_{ij}^* = m_{ij}/\mu_i$, burada m_{ij} - $[0, T]$ intervalında i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçidlərin sayıdır, μ_i - $X(t)$ prosesinin i vəziyyətində olduğu müddətdir.

Misal 9. $X(t)$ - artım intensivliyi λ və ölüm intensivliyi μ sabit ədədləri olan doğum və ölüm prosesi olsun. Yeni $q_{i, i+1} = i\lambda$, $q_{i, i-1} = i\mu$, $q_{ij} = 1 - i(\lambda + \mu)$, əgər $|i - j| > 1$ olarsa, $q_{ij} = 0$. Bu misalda vəziyyətlər sayı sonsuzdur. $X(0) \equiv 1$ olsun. Doğruxaoxşarlıq nisbəti -

$$\frac{d\mathbf{P}_{\lambda, \mu}^T}{d\mathbf{P}_{\lambda_0, \mu_0}^T}(X) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^B \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^D \exp \left\{ -(\lambda + \mu - \lambda_0 - \mu_0) \int_0^T X(s) ds \right\}.$$

Burada B - doğumların ümumi sayı (+1-ə bərabər sıçrayışların sayı), D - ölümlərin sayıdır (-1-ə bərabər sıçrayışların sayı). λ və μ üçün maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\lambda_T^* = \frac{1}{B} \int_0^T X(s) ds, \quad \mu_T^* = \frac{1}{D} \int_0^T X(s) ds$$

düsturları ilə təyin olunurlar. $X(t)$ - apan əmsalı a və diffuziya əmsalı b olan diffuzion proses olsun; $X(t)$ aşağıdakı stoxastik differensial tənliyi ödəyir:

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dw(t), \quad X(0) = X_0,$$

burada $w(t)$ - Viner prosesisidir. Onda müəyyən məhdudiyyətlərlə

$$\frac{d\mathbf{P}_{ab}^T}{d\mathbf{P}_{a_0 b}^T}(X) = \exp \left\{ - \int_0^T (b(t, X(t))^{-1} (a(t, X(t)) - a_0(t, X(t)))) dX(t) + \frac{1}{2} \int_0^T (b(t, X(t))^{-1} (a(t, X(t)) - a_0(t, X(t)))^2) dt \right\}$$

(burada a_0 - qeyd olunmuş əmsaldır).

Misal 10.

$$dX(t) = a(t, X(t); \theta) dt + dw$$

olsun. a - məlum funksiyadır, θ - məlum heqiqi parametrdir.

Əgər μ ilə Viner ölçüsü işarə edilərsə, onda doğruxaoşarlıq funksiyası

$$\frac{dP_{\theta}^T}{d\mu}(X) = \exp \left\{ \int_0^T a(t, X(t); \theta) dx - \frac{1}{2} \int_0^T a^2(t, X(t); \theta) dt \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur və requlyarlıq şərtləri daxilində Kra - mer - Rao bərabərsizliyi ödənilir: meyli $\Delta(\theta) = M_{\theta} \tau - \theta$ olan τ statistik qiyməti üçün

$$M_{\theta} |\tau - \theta|^2 \geq \frac{\left(1 + \frac{d\Delta}{d\theta}\right)^2}{M_{\theta} \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial \theta} a(t, X(t); \theta)\right]^2 dt} + \Delta^2(\theta).$$

Əgər θ -dan asılılıq xətti olarsa, maksimal doğruxaoşarlıq statistik qiymətləri

$$\theta_T^* = \int_0^T a(t, X(t)) dt \left(\int_0^T a^2(t, X(t)) dt \right)^{-1}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [3] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [4] Grenander U., Abstract inference, N. Y. - [a. o], 1981; [5] Розанов Ю. А., Гауссовские бесконечномерные распределения, М., 1968; [6] Брагинков И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [7] Бриллинджер Д., Временные ряды, пер. с англ., М., 1980; [8] Billingsley P., Statistical inference for Markov processes, Chi., 1961; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [10] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [11] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976.

STATİSTİK MODEL « статистическая модель; statistical model » – statistik məsələnin ilkin obyektlərini: təsadüfi xarakterli statistik verilənləri, bunlarla bağlı hadisələri və mümkün ehtimal paylanmalarını formalaşdıran riyazi obyektdir. Bir qayda olaraq, S. m. $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ üçlüyü ilə verilir, burada $\mathcal{X}$ – elementləri statistik verilənlər çoxluğunun mümkün realizasiyalarından (seçimi nöqtələri) ibarət çoxluq, $\mathcal{A}$, – $\mathcal{X}$ -in müşahidə oluna bilən hadisələri kimi interpretasiya olunan alt-çoxluqlarının σ – cəbri, P – seçimi $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ fəzasında paylanmalar ailəsidir.

Məs., θ kəmiyyətinin n sayda ölçmələrdə xətlərlə alınan nəticələrinin asılı olmayan, $N(0, \sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur, bu halda S. m.-də $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -də Borel σ – cəbri) və $P = P^{\theta} = \{N(\theta \mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}), \theta \in \mathbb{R}^1, \sigma^2 > 0\}$; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{I}$, – $(n \times n)$ ölçülü vahidi matrisdir. Bu sxemdə ölçmələrin ardıcıl aparılması $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, P_t)$, $t = 1, \dots, n$ ailəsi ilə təsvir olunur,

$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n = \mathcal{B}^n$, burada $\mathcal{A}_t = \{x = (x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}^t$ çoxluqlarının σ – cəbri və bu cəbr t anından sonra müşahidə olunan hadisələri təyin edir, P_t , – P^n -dən olan paylanmaların $\mathcal{A}_t$ -yə daralmaları ailəsidir.

S. m. ailələrinə baxılması təsadüfi proseslər statistikasi məsələləri üçün seçiyəvidir. S. m.-in digər – analoji məzmunlu mənaya malik formalanna da ədəbiyyatda təsadüf edilir.

STATİSTİK MODELƏŞDİRİLMƏ (si) xidmət sistemlərinin « статистическое моделирование систем обслуживания; statistical simulation of queuing systems » – xidmət sistemindəki prosesin gedişatının zaman üzrə EHM-nin köməyiylə bərpasıdır. Bu halda istifadə olunan alqoritmlər belə sistemlərin təsvir edildiyi ehtimal modellərinin əsasında qurulur və bu alqoritmlər təsadüfi proseslərin statistik modeləşdirilməsi alqoritmləridir. Xidmət sistemlərinin S. m.-nin mühümlüyü texniki sistemlərin geniş siniflərinin analitik tədqiqinin praktiki cəhətdən qeyri – mümkünlüyü ilə təyin olunur (məs., rabitə, nəqliyyat sistemləri və s. kimi). Əsas məsələlər aşağıdakılardır.

1) Sistemin münasib formal təsviri məsələsi. Problemə olduqca ümumi yanaşma sistemin alt-sistemlərə – aqreqatlara bölünməsindən ibarətdir (bax, [1]). Xüsusi hallarda S. m.-ni daxil edilmiş Markov prosesinin köməyiylə təsvir etmək mümkün olur. Təxmini təsvir geniş tətbiq olunur, bu halda sistem kiçik zaman intervallarından bir (Δt) – prinsip müşahidə edilir və hər bir zaman intervalında baş verən hadisələr qeyd olunur. Sonuncu halda, stasionar rejimə malik sistemlər üçün, onları vektor Markov prosesinin vasitəsilə təxmini təsvir etmək mümkündür. Kütləvi xidmət sistemlərinin münasib rahat formal təsviri üçün modeləşdirmənin çoxlu alqoritm dilləri yaranmışdır (simula, simskript, alqol-68 bazasında modeləşdirmənin xüsusi vasitələri və s.).

2) Statistik qiymətlərin qurulması və alqoritmlərin effektivliyinin artırılması (bax, [2], [3]). Xidmət sistemlərinin xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi üçün riyazi statistikanın vasitələrindən və məsələnin xüsusiyyətlərinə əsaslanan xüsusi üsullardan istifadə olunur. Təxminə qədər keçid rejiminin xarakteristikalarını qiymətləndirdikdə sistem başlanğıc sıfır anından etibarən N dəfə modeləşdirilir, nəticədə isə statistik qiymət kimi uyğun orta qiymətlər götürülür. Stasionar rejimin xarakteristikaları olduqca uzun bir trayektoriya üzrə qiymətləndirilir, bu halda böyük ədədlər qanunu və asılı təsadüfi kəmiyyətlər üçün teoremlərdən istifadə olunur (bu halda alınan statistik qiymətlər asimptotik meylsiz statistik qiymətlər olur).

Sonuncu məsələyə güclü müsbət xətti operatorların öz ölçülərinin funksionallarının Monte – Karlo metodu ilə qiymətləndirilməsi məsələsi kimi baxmaq olar. Bu halda Monte – Karlo metodunun ümumi nəzəriyyəsi ilə inkişaf etmiş effektivliyin artırılması üsullarından istifadə etmək, dispersiyanın azaldılması və statistik qiymətlərin meyl məsələsinə eyni bir nöqtəyi – nəzərdən baxmaq mümkün olur.

Əd.: [1] Бусленко Н. П., Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах, М., 1964; [2] Ермаков С. М., Мелас В. Б., Математический эксперимент с моделями сложных стохастических систем, СПб., 1993; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Ю. Н., Методы расчета высоконадежных систем, М., 1988.

STATİSTİK MODELƏŞDİRİLMƏ (si) köçürtmə məsələlərinin « статистическое моделирование задач переноса; statistical simulation of transport problems » – köçürtmə nəzəriyyəsi

məsələlərinin ədədi həllinin hissəciklərin təsadüfi trayektoriyalarının, hətta ola bilər ki, ilkin köçürmə məsələsində bunlardan fərqli trayektoriyaların *statistik modeləşdirilməsi* yolu ilə həyata keçirilməsidir. Tətbiqlərlə bağlı olaraq, stasionar xətti *kinetik köçürmə tənliyi* $Af = g$ və ya onun stasionar analoqu ilə təsvir olunan hissəciklərin az qarışıqlı mühitində (məs., neytronların, fotonların, elektronların) köçürmənin statistik modeləşdirilməsi daha çox inkişaf etdirilmişdir. Adətən, təsadüfi modeləşdirmədə prosesin stoxastik differensial təsvirini təyin edən A operatorunu parçalayırlar, yeni $\mathbb{R}^n$ fəzasında $x(t)$ Markov prosesi xalis köçürməyə (və ola bilər ki, kəsilməz diffuziyaya) və mühitin hissəciklərində diskret səpələnməyə bölünür, ayrılır.

Qiymətləndirilən fiziki kəmiyyətlərə (məs., integral axınlarına, detektorların göstəricilərinə) köçürmə məsələsinin həllinin xətti funksionalları kimi baxmaq, onları ardıcıl modeləşdirilə bilən asılı olmayan təsadüfi Markov trayektoriyalarının ansamblı üzrə uyğun xarakteristikaların orta qiymətləri kimi hesablamaq olar. Qarışıq hissəciklərinin öz aralarında və ya onların təsirindən dəyişən mühitin vəsitəsilə bilavasitə qarşılıqlı təsirini nəzərə almaq mümkün olarsa, belə xətti yanaşma doğru olur. Ümumi halda isə trayektoriyalar ansamblını paralel sürətdə modeləşdirmək olar.

Xətti məsələlərin həlli üçün hesablamaları sürətləndirən modelləri çevirmə metodlarının geniş arsenalı işlənmişdir (bax, *Statistik modeləşdirmə*). Əsas üsul çəkili fiktiv hissəciklərin (bu hissəciklər üçün axıtan axın kütlə axınının mənasını daşıyır) Markov trayektoriyalarının statistik modeləşdirilməsinə keçməkdən ibarətdir (bax, *Xətti tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll). Faza fəzasının $\mathbb{R}^n$ -dən $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^+$ fəzasına qədər genişləndirilməsi imkan verir ki (məs., təsadüfi udulma əvəzinə hissəciklərin kütləsini azaltmaq), ν hissəcikdən ibarət kaskadın modeləşdirilməsi əvəzinə kütləsi $M\nu$ olan bir hissəciyin köçürülməsinə baxmaq olar. Bu ideyadan *dəyər funksiyası*, yeni *qoşma köçürmə məsələsinin həlli* nəzərə alınmaqla təsadüfi modeləşdirmə üsulunda istifadə olunur, məsələn, trayektoriyanın təsadüfi uzunluğunun *eksponensial çevirməsində*. Çəkirlərin daxil olunması sayəsində $\mathbb{R}^n$ -də yeganə Markov prosesinə baxaraq statistik modeləşdirmədə $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^+$ -də verilmiş bir neçə Markov prosesinin asılı sınaqlarını almaq olur ki, bu Markov prosesləri $\mathbb{R}^n$ -də köçürmə prosesləri ailəsinə müvafiq olur. Çəkirləri ailənin parametri üzrə differensiallayaraq, köçürmə məsələsinin parametri üzrə axıtan funksionalların uyğun törəmələrinin effektiv statistik qiymətlərini qurmaq olur. f axınının qiymətləndirilməsi üçün, yalnız oblast üzrə ortalənmiş axın təyin edən *toqquşmalar metodundan* başqa, f -in lokal statistik qiymətlərindən də istifadə olunur. Mürəkkəb mühitlərdə hissəciklərin trayektoriyalarının S. m.-nin alqoritmı «maksimal kəsmə» metodu ilə olduqca sadələşir, bu halda fiktiv ele «eyniliklə bərabər səpələnmə» daxil olunur ki, nəticədə hissəciyin sürət vektoru dəyişməz qalır, fiziki və fiktiv səpələnmələrinin kəsikləri cəmi isə fəza üzrə sabit seçilir.

Bölünən hissəciklərin köçürmə məsələləri üçün, mənbələri $Af = g$ olan məsələlər istisna olunmaqla, $Af = \kappa f$ -in maksimal məxsusi qiymətinin axtarılması, sistemin kritik ölçülərinin, yeni $\kappa = 1$ qiymətinə uyğun ölçülərinin təyin olunması və s. kimi məsələlər də maraqlıdır. Bu məqsədlə, məs., nüvə reaktorlarının neytron – fiziki hesablamalarında hissəciklərin nəsilər metodunun xüsusi modifikasiyaları istifadə olunur (bax, [1]).

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Марчук Г. И., [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосибир., 1976; [3] Елепов Б. С., [и др.], Решение краевых задач методом

Монте – Карло, Новосиб., 1980; [4] Франк – Каменецкий А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте – Карло, М., 1978, [5] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967, с. 25–52.

STATİSTİK MODELƏŞDİRİLMƏ (si) Markov zəncirlərinin «статистическое моделирование цепей Маркова; statistical simulation of Markov chains» – statistik modeləşdirmə nəzəriyyəsinin bölməsidir; bu bölməyə Markov sınaqları ardıcılıqlarının imitasiya metodları, Markov trayektoriyaları fəzası üzrə integraların çevirmə prinsipləri və s. daxildir. Prosesin vəziyyətinin tamqiymətli və ya kəsilməz koordinatı X üçün keçid ehtimalları paylanması $Q(x; dy)$ olan biraddımlı Markov keçidlərinin – $\{X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow \dots\}$ ardıcılığının – qurulması asılı olmayan, müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi və ya psevdo-təsadüfi ədədlərin ardıcılığı üzrə, paylanması $Q(X_{n-1}; dy)$ olan

$Y = X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin modeləşdirilməsi ilə həyata keçirilir. Belə modeləşdirmənin tutarlılığı psevdotəsadüfi ədədlərin tamamilə müntəzəm paylandığı halda təmin olunur. Markov trayektoriyaları $X(t)$ ya t zamanının $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$ zaman anlarının hər hansı ardıcılığı üçün modeləşdirilir və ya da ki, bu trayektoriyaların dayaq nöqtələri, məs., köçürmə məsələlərində səpələnmə vəziyyətləri qurulur (bax, *Dolaşmalar metodu, küreələr üzrə Braun trayektoriyaları üçün*). Markov meydanlarının modeləşdirilməsi daha çətin olur. Xətti tənliklərin Monte – Karlo metodu ilə həlli üçün (bax, [3]), statistik fizikanın məsələləri üçün (bax, [4]), kvant meydanlar nəzəriyyəsi, elementar hissəciklər nəzəriyyəsi, o cümlədən, kontinual integraların hesablanması üçün müxtəlif Markov modelləri tətbiq olunur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, с. 632–43; [2] Кертисс Д., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 149–74; [3] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [4] Методы Монте – Карло в статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [5] Гельфанд И. М., Ченцов Н. Н., «Ж. эксперим. и теоретич. физики», 1956, т. 31, с. 1106–07; [6] Applications of the Monte – Carlo method in statistical physics, 2 ed., B. – [a. o.], 1987.

STATİSTİK MODELƏŞDİRMƏ «статистическое моделирование; statistical modelling» – təsadüfi hadisə və ya prosesin riyazi imitasiyalarnın qurulmasıdır. S. m. riyazi statistikada, statistik oyunlarda, kriptografiya və kodlamada randomizasiya üçün istifadə olunur, yəni qeyri – determinik alqoritmlərin konkret realizasiyası üçün və prosesin nə cür cərəyan edəcəyini yalnız «orta hesabla» qurmaq məqsədilə istifadə olunur. S. m.-nin imkanlarından *Monte – Karlo metodu* (statistik sınaqlar metodu) üzrə hesablamalar üçün tətbiqi və hesablama riyaziyyatında istifadə olunur. Statistik sınaqlar metodu ondan ibarətdir ki, axıtanları məlum kəmiyyətlər uyğun təsadüfi Φ təzahürünün xarakteristikalarını kimi interpretasiya olunur; bu təsadüfi təzahür ədədi olaraq modeləşdirilir, sonra isə axıtanları kəmiyyətlər təsadüfi Φ təzahürünün imitasiyalarna əsasən qiymətləndirilir (bax, *İmitasiyası təsadüfi təzahürün; Ədədi simulyasiyası təsadüfi təzahürün*). Bu metod stoxastik sistemlərin öyrənilməsi üçün geniş tətbiq olunur və bu halda bu sistemlərin ədədi imitasiyaları üzərində «eksperimentlərdən» istifadə olunur (bax, məs., *Statistik modeləşdirilmə (si)* xidmət sistemlərinin, *Statistik modeləşdirilmə (si) Markov zəncirlərinin*).

Əksər hallarda hesablamalarda real təzahürün sadələşdirilmiş modellərinə baxılır (bax, *Statistik modeləşdirilmə (si) köçürmə məsələlərinin*). Qeyri – ehtimali təbii məsələlərin həlli üçün (məs., elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin) Monte – Karlo metodunu istifadə etməyə imkan yaradan stoxastik modellər də işlənmişdir (bax, *Xətti tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll, *Elliptik tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll).

Adətən, hər hansı bir təsadüfi təzahürün S. m.-si üçün Lebeq ölçüsü $dV = \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$ olan, tilinin uzunluğu vahidə bərabər

hesabi – ölçülü $H = \sum_{k=1}^{\infty} \{x_k : 0 \leq x_k \leq 1\}$ kubunun, az və ya

çox dərəcədə, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasına təbii inikası f qurulur; $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası bu təsadüfi təzahürün riyazi sxemidir, $\Omega = f(H)$, $\mathbf{P} = Vf^{-1}$. Onda təsadüfi təzahürün nəticəsi ω , $\omega = f(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ düsturu ilə təsadüfi kəmiyyətlər və ya psevdotəsadüfi kəmiyyətlərin (TK) ardıcılığı üzrə qurulur. Skalyar təsadüfi kəmiyyəti modeləşdirmək üçün ya bir, nadir halda iki TK istifadə olunur. S. m.-nin bütün məsələlərində TK imitasiyası kütləvi problem hesab edilir: fərz olunur ki, alınan «yaxşı nəticə» müəyyən ehtimalla «tipik» ω nəticəsinə gətirə bilər. S. m.-nin çətinliyi, dəqiqliyi və etibarlılığına, məsələn, istifadə olunan ξ_k -ların tipikliyine tətbiq edilən tələblər oblastından asılı olaraq TK -lar dəyişilə bilər. Məs., riyazi statistikada qeyri – determinik strategiya (stoxastik həlledici qayda), situasiyanın ω elementar nəticələrinin $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasından δ nəticələrinin ölçülən fəzası $(\Delta, \mathcal{B})$ -yə Markov keçid ehtimalları $\Pi(\omega, d\delta)$ ilə təsvir olunur. Burada, ilk növbədə, tezliklərin $\Pi(\omega, B)$ ehtimallarına yaxın olması mühümdür. Əgər nəticə bir TK ardıcılığı üzrə qurulursa, onda ξ_k ədədlərinin $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yerləşməsi vacibdir. Statistik oyunlarda ξ_k nöqtələrinin $[0, 1]$ parçasının müxtəlif hissələrində olması tələbi də qoyula bilər.

Monte – Karlo metodunda, bir qayda olaraq, namelum z üçün $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, baxılan təsadüfi Φ təzahürünü təsvir edən hər hansı $Z(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin $z = \mathbf{M}Z(\omega)$ riyazi gözləməsi şəklində ifadəsi axtarılır və Φ -in asılı olmayan müşahidələri imitasiya olunur. Onda böyük ədədlər qanununa əsasən

$$z \approx \zeta_n = [Z(\omega^{(1)}) + \dots + Z(\omega^{(N)})] / N \quad (*)$$

götürmək olar.

Yuxarıda şərh olunmuş standart S. m. sxeminə bu məsələ formal olaraq

$$z = \int_H Z(f(x)) dV = \mathbf{M}Z(\omega)$$

integralının bərabər çəkilişli və təsadüfi $x^{(n)}$ absisli olduqca sadə (*) kvadratur düsturu üzrə hesablanılmasına gətirilir.

$\mathbf{M}|Z(\omega)|^2 < \infty$ olduqda bu düsturun xətası «kobud» şəkildə

Çebişev bərabərsizliyinin köməyi ilə ehtimala görə və ya asimptotik olaraq mərkəzi limit teoreminə əsasən qiymətləndirilir, yəni

$$\mathbf{P}\{|z - \zeta_n| < a\sigma(Z)N^{-1/2}\} \approx \text{erf}(a),$$

$$\sigma^2(Z) = \mathbf{M}|Z(\omega)|^2 - [\mathbf{M}Z(\omega)]^2.$$

$\mathbf{M}|Z(\omega)|^2$ riyazi gözləməsini də «eksperimentlərdən» qiymətləndirmək olar, bu halda hesablama dəqiqliyinin aposterior etibarlı statistik qiymətini vermək olur (bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*). z -in hesablanması verilən dəqiqliyin alınması üçün zəruri olan hesablama işinin həcmi (bax, *Monte – Karlo metodu*; zəruri işin həcmi) etibarlılıq səddi $\text{erf}(a)$ qeyd olunduqda

$$N\tau = \varepsilon^{-2} a^2 \sigma^2(Z) \tau(Z)$$

hasili ilə təyin olunur, burada $\tau(Z)$, $Z(\omega)$ -nin bir realizasiyasının qurulması üzrə hesablama işi həcmi riyazi gözləməsidir. Bu riyazi gözləmə ε azaldıqca sürətlə artır; buna görə də, $\sigma^2 \tau$ olduqca kiçik olan modelin uğurlu seçilməsinin böyük

əhəmiyyəti vardır. Məsələn, ilkin integral yazılışda əvvəlcə x_i dəyişənlərini hissə-hissə analitik integrallamaq, digər dəyişənləri əvəz etmək, integrallanma kubunu oblastlara bölmək, integralın baş hissəsini ayırmaq, funksiyaların hər hansı sinfi üçün dəqiq kvadratur düstur verən asılı düyünlərin qrupunu istifadə etmək və s. lazımdır.

İmitasiya «eksperimentindən» nadir bir hadisənin ehtimalını qiymətləndirmək istədikdə və ya daha ümumi, yalnız kiçik oblastda sıfırdan olduqca fərqlənən funksiyanın integralını hesabladığıda xüsusilə ehtiyatla davranmaq tələb olunur. Burada, demək olar ki, həmişə imitasiya olunan təzahürün çevirməsi aparılmalıdır, bundan sonra araşdırılan hadisə nadir hadisə olur.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Франк-Каменецкий А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте – Карло, М., 1978; [3] Методы Монте – Карло статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [4] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [5] Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К., Ченцов Н. Н., в кн.: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования, Новосиб., 1982, с. 69–82; [6] Forsythe G., Leibler R., «Math. Tables and Other Aids Comp.», 1950, v. 4, p. 127–29; [7] Бёрд Г., Молекулярная газовая динамика, пер. с англ., М., 1981; [8] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [9] Поллак Ю. Г., Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, М., 1971; [10] Muller M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 569–98; [11] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972.

STATİSTİK NƏZARƏT, KEYFİYYƏT « статистический контроль качества; statistical quality control » – riyazi statistikanın bölməsidir; metodlarından sənayedə keyfiyyətin faktiki alınan səddini təyin etmək üçün, keyfiyyətin dəyişikliklərindəki təmayülləri və texnoloji prosese olan əsaslandırılmış təkmilləşdirmələri müəyyənləşdirmək üçün istifadə olunur. Kütləvi sənaye məhsullarının keyfiyyəti ya ədədlər toplusu və ya funksiyalar şəklində ifadə edilən xassələr toplusu ilə xarakterizə olunur. Tələb olunan keyfiyyətin səddi dövlət standartları (rus. ГОСТ – государственный стандарт) ilə təyin olunur, bu standartlarda keyfiyyət göstəricilərinin faktiki sədlərini qiymətləndirmə qaydaları verilir. Dövlət standartlarından istifadə zəruridir, belə ki, nəzarət nəticələrinə görə qəbul edilən qərarlar real məsələlərə əlaqədar olub, istehsalat kollektivlərinin maraqlarına da təsir edir. K. s. n. metodları kütləvi sənaye məhsulu

istehsalında keyfiyyəti idarəetmə üzrə tədbirlərin ümumi sisteminə mühüm rol oynayır. Bu ilk növbədə onunla əsaslandırılır ki, əsas keyfiyyət göstəricilərinin ədədi xarakteristikalarındakı dəyişikliklər təsadüfi xarakter daşıyır. Sistemə xətaları olmayan nəzarəti daha obyektiv etmək məqsədi randomizasiya metodlarının zəruriliyinə gətirir, bu da özlüyündə, ehtimali və statistik metodların istifadə olunması zəruriliyini əsaslandırır.

K. s. n.-də tətbiq olunan riyazi metodlar müxtəlifdir. İlk materialların və komplektləyici məmulatların yararlılığını (rus. годность) qiymətləndirmək üçün giriş – *statistik qəbul nəzarəti* istifadə olunur. İcazə verilən dəqiqliklə dəzgahlarda detalların hazırlanma imkanının yoxlanılması məsələləri tipik məsələlərdir. Dəqiqliyin azalması səbəblərini aşkar etmək üçün *dispersion analiz* tətbiq olunur. Kütləvi məhsul istehsalının kəsilməz axınının cari K. s. n. metodlarından arzuolunmaz yayınmaların aşkar edilməsi və avadanlıqların lazımi işlək vəziyyətlərinin alınmasına nail olmaq zəruriliyi məqsədilə istifadə olunur.

$\{O_i\}$ – məmulatlar ardıcılığı olsun, $i = 1, 2, \dots$. Nəzarət nəticəsində O_i məmulatına ε_i ədədi qarşı qoyulur. Alternativ əlamətə görə nəzarət nəticəsində, əgər O_i qüsursuz olarsa, $\varepsilon_i = 0$, O_i qüsurlu (defektli) olarsa, $\varepsilon_i = 1$ götürülür. Qüsurlu məmulatlar xaric olunur. $\Pi(f, i)$ D o d c p l a n l a r ı üzrə cari nəzarət aşağıdakı qaydalar sistemi ilə təsvir olunur. Nəzarətə $\{O_i\}$ ardıcılığının məmulatlarının bir-bir yoxlanılması ilə başlanır və bu proses o vaxta qədər davam olunur ki, i sayda qüsursuz məmulat seriyası alınmış olsun. Sonra isə hər bir növbəti məmulat, nəzarət olunma üçün, f ehtimalı ilə ($0 < f < 1$) təsadüfi seçilir. Qüsurlu məmulat ilk dəfə aşkar edilən kimi yenə də qalan məmulatlar bir-bir, i sayda qüsursuz məmulat seriyası alınana qədər nəzarət olunur. Sonra yenə də seçmə ehtimalı f ilə seçimi nəzarətə keçilir və s. ε_i – Bernulli ardıcılığı olsun, $P\{\varepsilon_i = 1\} = q$. Onda $\Pi(f, i)$ planı üzrə nəzarət olunan məmulatların orta qiyməti

$$f(q) = f[f + (1-f)(1-q)^i]^{-1}$$

olur. f , i -nin qiymətləri münasib seçildiyi halda, orta çıxış keyfiyyətinin limit qiymətinin səddi L^* -dan istifadə olunur:

$$L^* = \max_{0 \leq q \leq 1} L(q);$$

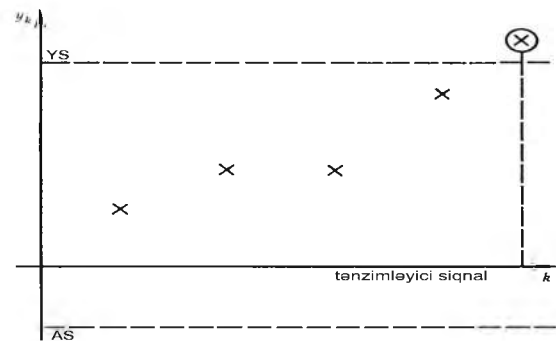
$$L(q) = \frac{q[1-f(q)]}{1-qf(q)}$$

– məmulatın qüsurlu olacağına onun nəzarət olunmadığı şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır (bax, [1], [2]). f , i -nin qiymətləri ele seçilməlidir ki, L^* verilmiş qiyməti aşmasın.

Əgər məmulatların nizamlanmış ardıcılığında qüsurlu məmulatlar seriyasının olacağı mümkündürsə, onda hər dəfə qüsurlu məmulat aşkar olunduqda, onunla qonşu məmulatlarda nəzarət aparılır.

$\{O_i\}$ məmulatlar ardıcılığının nəzarəti kəmiyyət əlaməti üzrə aparıldığı hallarda nəzarətin nəticələrinin qiymətləri ε_i təsadüfi proses kimi anlaşılır. Müxtəlif tipli pozuntular mümkün ola bilər, məs., ε_i təsadüfi prosesinin parametrlərinin qiymətlərinin məqbul qiymətlər oblastından təcridcən «yox olmas» kimi. Pozuntu ε_i -nin parametrlərinin təsadüfi τ anında sıçrayışlarla dəyişməsi nəticəsində də ola bilər. Pozuntu aşkar olunan məsələlərdə Bayes metodlarından istifadə olunur (bax, [3]). Əsas dövlət standart-

larında fərz olunur ki, pozuntu olmadığı halda $\{\varepsilon_i\}$ -nin qiymətləri normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı əmələ gətirir. Kəmiyyət əlaməti üzrə nəzarətin effektiv istifadə olunması üçün zəruri ilkin şərt ε_i -nin paylanma qanununun tipi haqqında ilkin fərziyyələrin yoxlanılmasıdır. Pozuntuların olması ya $trend$ -in əmələ gəlməsinə – ε_i -nin orta qiymətlərinin sistematik artmasına (azalmasına) və ya ε_i -nin dispersiyasının artmasına və s. səbəb olur. Belə pozuntuların aşkar edilməsi məqsədilə, nəzarət kartlarından (rus. контрольные карты) istifadə edən K. s. n. metodları çox geniş tətbiq olunur. Bu kartlarda (şəkil) absis oxu üzrə nəzarət olunan $O_{k+1}, \dots, O_{k+n}$ seçiminin nömrəsi k qeyd olunur, ordinat oxu üzrə, $\varepsilon_{k+1} = x_1, \dots, \varepsilon_{k+n} = x_n$ qiymətlərlə təyin olunan y_k kəmiyyətinin qiyməti qeyd olunur. Adətən, n böyük olmur: $n = 3 \div 5$.



y_k göstəriciləri kimi aşağıdakı xarakteristikalardan tez-tez istifadə olunur:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

– orta qiymət, median,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

– dispersiyasının statistik qiyməti, seçimin açımı (dəyişmə boyu – genişliyi, rus. размах) –

$$R = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ və s.}$$

Nəzarət kartında əvvəlcədən iki xətt çəkilir (şəkilə absis oxuna paralel qırıq xətlərlə göstərilən): *tənzimləyici yuxarı sərhəd* (TYS) və *tənzimləyici aşağı sərhəd* (TAS). Əgər y_k -nin qiyməti bu sərhədlərdən aşağı və yuxarı olarsa, onda texnoloji prosesə onun sabitləşdirilməsi məqsədilə təsir göstərilməsi tələb olunur.

Nəzarət kartları [4]-də təklif olunmuşdur. Hal-hazırda nəzarət kartlarının müxtəlif variantlarından istifadə olunur. Nəzarət kartlarının müxtəlif tiplərinin olması onunla əsaslandırılır ki, bunlar müxtəlif pozuntuların aşkarlanmasında eyni effektivliyə malik deyildirlər. Məs., ε_i -nin orta qiymətlərinin sıçrayışvari dəyişmələrini aşkar etmək üçün K. s. n.-də şəkilə göstərilənlərlə müqayisədə yığım cəmlərinin (rus. накопленная сумма) nəzarət kartları daha effektivdir. Müxtəlif tip nəzarət kartlarının tətbiqi haqqında bax,

[5] – [7]. Müxtəlif tip pozuntuların tez aşkar olunması üçün iki-qat nəzarət kartlarından istifadə etmək məsləhətdir; bu kartlar üzərində iki göstəricinin qiymətləri, məs., $\bar{x}$ və R -in qiymətləri qeyd olunur. Nəzarət kartlarının müxtəlif xarakteristikalarının, məs., müəyyən tip pozuntuların aşkarlanmasında orta gecikmə müddətinin dəqiq hesablanması, böyük həcmli hesablamalar tələb edən (yəqin ki, yalnız EHM-da) çətin məsələlərdən biridir.

Nəzarət olunan məhsul partiyalara bölündükdə statistik qəbul etmə nəzarətinin metodları geniş tətbiq olunur.

Əd.: [1] Додге Н. Ф., «Ann. Math. Statist.», 1943, v. 14, p. 264–79; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [4] Shewhart W. A., Economic control of quality of manufactured product, N. Y., 1931; [5] Шиндковский Э., Шюрц О., Статистические методы управления качеством, пер. с нем., М., 1976; [6] Джонсон Н., Лион Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1980; [7] Мердок Д., Контрольные карты, пер. с англ., М., 1986.

STATİSTİK NƏZƏRİYYƏSİ, QRUPLARIN «СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП; statistical group theory»

– ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının tətbiqi ilə qrupların araşdırılmasıdır. Bu nöqteyi – nəzərdən sonlu tərtib simmetrik qruplar əsas etibarilə P. Erdəşin (P. Erdős), P. Turanın (P. Turan), M. Salainin (M. Szalay) bir sıra işlərində mükəmməl araşdırılmışdır. Bu işlərdə qrup elementlərinin tərtiblərinin paylanmalarının asimptotik statistik qiymətləri alınmışdır, bu tərtiblərin bölünmələrinin sayı, qrupun əlaqəli siniflərinin sayı qiymətləndirilir, qrupların təsvirlərinin xarakterlərinin paylanmaları araşdırılmışdır. Mərkəzi limit teoremi isbat olunmuşdur (bax, [1]): $n!$ – simmetrik qrupun tərtibi, $O(g)$ – qrupun g elementinin tərtibi olsun; onda

$$P \left\{ \frac{\log O(g) - \log^2 n/2}{\log^{3/2} n \sqrt{3/3}} < y \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-v^2/2} dv$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Erdős P., Turan P., «Acta. Math. Acad. Sci. Hung.», 1967, t. 18, № 3–4, p. 309–20; [2] Szalay M., Turan P., «Acta. Math. Acad. Sci. Hung.», 1978, t. 32, № 1–2, p. 129–55.

STATİSTİK OYUN «СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИГРА; statistical game»

– iki şəxsin oyunu anlayışına əsaslanan riyazi statistika məsələlərini təsvir edən riyazi modeldir.

Riyazi statistikanın bütün məsələlərini birləşdirən cəhət statistikin eksperimental verilənlər əsasında müəyyən qərar qəbul etməsidir. Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində bu qərarlar naməlum θ

parametri üçün θ^* nöqtəvi statistik qiymətləri formasında ola bilər; statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində araşdırılan obyektin təbiəti haqqında hansı fərziyyələrin doğru olub-olmadığı haqqında mülahizələr formasında ola bilər. Bu qərarlar səhv olduğu halda, bir qayda olaraq, itkilərə səbəb olur. Bütün bunlara əsasən statistik məsələlərin oyun modelinin qurulması üçün təbii zərurət yaranır (bax, *Oyunu, iki şəxsin*). Belə modelin elementlərindən aşağıdakıları qeyd etmək lazımdır.

1) Araşdırılan obyektin vəziyyətləri – θ -lar çoxluğu Θ olsun. Əgər θ məlumdursa, onda statistik həllin qurulması zəruriliyi yoxdur. θ çoxluğu parametrlər çoxluğu kimi də adlanır, lakin Θ daha geniş anlam da daşıya bilər (məs., Θ çoxluğu çox geniş ola bilər və hər hansı $\mathcal{X}$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu ilə üst-üstə düşə bilər).

2) Naməlum θ parametri haqqında informasiya əldə etmək üçün statistik eksperiment qoyaraq hər hansı təsadüfi kəmiyyət üzərində müşahidələr aparır, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması θ -dan asılıdır. Başqa sözlə, müşahidələr nəticəsində P_θ paylanmasına malik X seçimini statistik təyin etmiş olur.

3) Statistika məsələlərində statistikin qəbul edə biləcəyi δ qərarlarının çoxluğu $D = \{\delta\}$ həmişə təyin olunmuş hesab edilir.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində D çoxluğu, adətən, Θ çoxluğu ilə üst-üstə düşür; hipotezləri yoxlama məsələlərində D çoxluğu sonludur, onun elementləri sayı yoxlanılan hipotezlərin sayına bərabərdir. Əgər θ məlumdursa, onda $\delta = \varphi(\theta)$ həlli birqiymətli təyin olunur. Əgər θ naməlum olarsa, δ həllini məlum mənada optimal seçmək məqsəduyğundur. Həlləri müqayisə etmək məqsədilə itki funksiyası daxil olunur.

4) İtki funksiyası $w(\delta, \theta)$ $D \times \Theta$ fəzasında təyin olunur; əgər araşdırılan obyekt θ vəziyyətində olarsa, itki funksiyasına əsasən təyin etmək olur ki, δ qərarının qəbul edilməsi hansı itkilərə səbəb ola bilər. Fərz olunur ki, $\delta \neq \varphi(\theta)$ olduqda $w(\delta, \theta) > 0$; $w(\varphi(\theta), \theta) = 0$.

Əgər 1) – 4) elementlərindən θ -nın «küylənmiş» müşahidəsi haqqında 2) proseduru xaric olunarsa, onda adi – iki şəxsin oyunu modeli alınır və burada I oyunçu – statistik, II oyunçu – təbiət olur.

Beləliklə, S. o.-nun əsas elementləri iki şəxsin oyunu modelində baxılan (D, Θ, w) üçlüyü ilə təşkil olunur. Lakin burada aşağıdakı xüsusiyyətlər yaranır.

S. o.-da I oyunçu rolunda statistik (tədqiqatçı), II oyunçu rolunda təbiət (daha dəqiq, araşdırılan hadisə və ya prosesin təbiəti) olur. Sonuncu θ parametrini (strategiyasını) seçir, bu parametr statistik üçün naməlumdur və bu parametr araşdırılan obyektin vəziyyətini təyin edir. Riyazi statistikanın məsələlərinin əksəriyyəti bu və ya digər surətdə bu naməlum θ -nı dəqiq «tapan» belə δ həllərinin (qərarlarının) qəbul olunması ilə bağlıdır. Bu zaman «təbiət» öz strategiyalarını məqsədyönlü seçmir, buna görə də, ümumiliyi pozmadan yalnız sıfırla nəticələnən oyunlara baxmaq olar.

S. o.-da statistikin imkanı olur ki, eksperimentlərin köməyi ilə «təbiətin» strategiyasını müəyyən etsin, bunlar isə naməlum θ haqqında θ parametrindən asılı P_θ paylanmasına malik X seçimi kimi informasiya əldə etməyə imkan yaradır. δ qərarı bu şərtlərdə X -dən asılı olaraq seçilməlidir. Seçimi $\mathcal{X}$ fəzasını D -yə inikas etdirən bütün $\delta(X)$ funksiyaları statistikin strategiyalarıdır. Bu $\delta(X)$ funksiyaları həlledici funksiyalar və ya həlledici qərarlar adlanır, bəzən isə bunlar sadəcə həllər (qərarlar) da adlandırılır. Adətən, D çoxluğu ölçülən fəza strukturlu olur və yalnız $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ -nin $(D, \mathcal{F}_D)$ -yə ölçülən inikaslarına baxılır, burada $\mathcal{B}, \mathcal{F}_D$ seçim və həllər fəzalarında münasib σ – cəbrlərdir. Belə funksiyalar çoxluğu aşağıda $\mathcal{D}$ ilə işarə olunmuşdur. II oyunçunun (təbiətin) strategiyaları çoxluğu Θ olduğu kimi qalır.

δ strategiyasında itkilər

$$W(\delta(\cdot), \theta) = \mathbf{M}_\theta w(\delta(X), \theta) = \int w(\delta(x), \theta) P_\theta(dx) (*)$$

risk funksiyasına bərabər götürülür, burada w – ilkin itki funksiyasıdır.

$(\mathcal{D}, \Theta, W)$ üçlüyünə statistik oyun deyilir, Θ – təbiətin strategiyaların çoxluğu, $\mathcal{D}$, – $\mathcal{X}$ fəzasının D çoxluğuna bütün ölçülən inikasları çoxluğu, W isə $(*)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. S. o.-nun tam xarakterizasiyası üçün $(\mathcal{D}, \Theta, W)$ üçlüyü ilə (X, P_θ) cütünün də verildiyini hesab etmək olar, X P_θ paylanmasına malik seçimdir. S. o.-nun verilmiş tərifindən aydındır ki, sonuncudakı strategiyalar çoxluğu ilkin – iki şəxsin oyunu (D, Θ, w) ilə müqayisədə daha genişdir.

İki şəxsin oyununun adı halında olduğu kimi $(\mathcal{D}, \Theta, W)$ oyunu ilə yanaşı (bu oyunda strategiyalar xalis strategiyalar adlanır), randomlanmış və ya qarışıq, $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Theta}, \tilde{W})$ oyunlarına baxılır. Burada heller çoxluğu $\tilde{\mathcal{D}} = \pi(X)$ paylanmalarının çoxluğudur, yəni $\mathcal{X} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ inikaslarının çoxluğudur; $\tilde{D} = (D, \mathcal{D})$, $(\Theta, \mathcal{D})$ -da bütün paylanmaların çoxluqlandır. $\pi \in \tilde{\mathcal{D}}$ paylanması ele seçilir ki,

$$\tilde{w}(\pi(X), \theta) = \int_D w(u, \theta) \pi(X, du)$$

qiymətləri $(\Theta, \mathcal{D})$ -da təsadüfi kəmiyyətlər olsun $(\pi(X, A), -\pi)$ həlledici qaydasına uyğun $A \subset D$ çoxluğunun ehtimalıdır). $Q \in \tilde{\Theta}$ təbiətinin strategiyasında risk

$$\tilde{W}(\pi(\cdot), Q) = \int \int \int w(u, t) \pi(x, du) P_t(dx) Q(dt)$$

funksiyasına bərabər götürülür.

$\pi(X)$ strategiyası – randomlanmış həlledici qayda, Q – təbiətin randomlanmış (qarışıq) strategiyası adlanır.

Strategiyalararası müəyyən bir qaydalı münasibətlər, altsiniflərdə müntəzəm ən yaxşı strategiyalar, Bayes və minimaks strategiyalar, S. o. üçün strategiyaların tam sinifləri iki şəxsin oyununda olduğu kimi təyin olunur (D çoxluğu $\mathcal{D}$ ilə, $w, \tilde{w}$ funksiyaları $W, \tilde{W}$ ilə əvəz olunur). Məs., əgər

$$\tilde{W}(\pi_Q(\cdot), Q) = \inf_{\pi \in \tilde{\mathcal{D}}} \tilde{W}(\pi(\cdot), Q)$$

olarsa, π_Q strategiyası aprior Q paylanması üçün Bayes strategiyası adlandırılır. Əgər

$$\sup_Q \tilde{W}(\tilde{\pi}(\cdot), Q) = \inf_{\pi \in \tilde{\mathcal{D}}} \sup_Q \tilde{W}(\pi(\cdot), Q)$$

olarsa, $\tilde{\pi}(\cdot)$ – minimaks strategiyadır.

D çoxluğunun təbiəti ilə əlaqəli olmayan adı oyunlar nəzəriyyəsinin müddəaları S. o.-larda da ifadə olunur. D və Θ çoxluqlarının təbiəti S. o.-nun esas növlərini ayırdan aşağıdakı təsnif ilə bağlıdır.

1) əgər $\Theta = A$, $D = A$ olarsa, burada $A \subset \mathbb{R}^k$ daxili nöqtələrə malik çoxluq, $t \neq u$ olduqda $w(t, t) = 0$, $w(t, u) > 0$ olarsa, onda nəmulum θ parametrinin nöqtəvi qiymətləndirilmə nəzəriyyəsinin məsələləri alınır.

2) Əgər $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_r\}$, $D = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ – sonlu, eyni saylı elementləri olan çoxluqlar, $i \neq j$ olduqda $w(\delta_i, \theta_j) = 0$,

$w(\delta_i, \theta_j) > 0$ olarsa, onda sonlu sayda sadə hipotezin yoxlanılması məsələsi alınır.

3) Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ daxili nöqtələrli oblast, $D = \{\delta_1, \delta_2\}$ – iki elementli çoxluq, $\theta \in \Theta_1$ olduqda $w(\delta_1, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta_2$ olduqda $w(\delta_2, \theta) = 0$ ($\Theta_1 \cap \Theta_2$ boş çoxluqdur) və digər hallarda $w(\delta_i, \theta) > 0$ olarsa, onda oyun mürekkəb $\{\theta \in \Theta_1\}$ və $\{\theta \in \Theta_2\}$ hipotezlərinin yoxlanılması məsələsini ifadə edir.

Məsələlərin digər sinifləri də mümkündür. 1) – 3) məsələləri daha çox öyrənilmiş və yayılmışdır. Qeyd etmək lazımdır ki, məsələlərin birinci qrupunda itkilər əksər hallarda kvadratik orta yayınma ilə təyin olunurlar ki, bu da

$$w(\delta, \theta) = c(\delta - \theta)^2, \quad c = \text{const}$$

itki funksiyasına uyğundur. Məsələlərin ikinci qrupunda itkilər səhv etmək ehtimalı ilə təyin olunur, bu isə

$$w(\delta_i, \theta_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

funksiyasına uyğundur. Bu ele üçüncü qrup məsələlərə də aiddir ki, bunlarda əksərən

$$w(\delta_i, \theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in \Theta_1, \\ 1, & \theta \in \Theta_2, \end{cases} \quad w(\delta_2, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in \Theta_1, \\ 0, & \theta \in \Theta_2, \end{cases}$$

itki funksiyası istifadə olunur.

Qeyd olunmuş təsnifat onun göstərir ki, qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin məsələləri ilə statistik hipotezlərin yoxlanılması arasında prinsipli fərq yoxdur. Hər şey Θ və D çoxluqlarının təbiəti və itki funksiyalarının şəkildən asılıdır.

Aşağıda S. o. nəzəriyyəsinin ən ümumi olmasa da, kifayət qədər geniş fərziyyələrdə, iki fundamental müddəası şərh olunur.

A şərti. Θ və D çoxluqlarından hər biri ya sonludur və ya $\mathbb{R}^k$ -da kompakt qabarıq çoxluqdur.

B şərti. 1) Əgər $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, onda $w(\delta, \theta)$ itki funksiyası $D \times \Theta$ fəzasında kəsilməzdir. 2) Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $D = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ sonludursa, onda r sayda $w(\delta_i, \theta)$, $i = 1, \dots, r$ funksiyalarından hər biri Θ -da kəsilməzdir. 3) Əgər $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ və $D = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ sonlu çoxluqlar olarsa, onda $w(\delta_i, \theta_j)$ funksiyaları ixtiyari qiymətlər ala bilər.

C şərti. P_θ paylanması θ -ya nəzərən variasiya üzrə kəsilməzdir, yəni $\theta_1 \rightarrow \theta$ olduqda

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} |P_{\theta_1}(B) - P_\theta(B)| \rightarrow 0$$

olur.

Birinci fundamental teorem: əgər A, B, C şərtləri ödənilərsə, onda $(\tilde{\mathcal{D}}, \Theta, \tilde{W})$ ortalanmış oyununun $\tilde{\pi}(X)$ və $\tilde{Q}$ dəyəri (qiyməti) və minimaks strategiyası vardır və:

$$\tilde{W}(\tilde{\pi}(\cdot), \tilde{Q}) = \inf_{\pi} \sup_Q \tilde{W}(\pi(\cdot), Q).$$

$$\tilde{W}(\downarrow, \overline{Q}) = \sup_Q \inf_{\pi} \tilde{W}(\pi(\cdot), Q).$$

Adi oyunlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $\overline{Q}$ ən əlverişsiz paylanmadır,

$$\tilde{W}(\pi_{\overline{Q}}(\cdot), \overline{Q}) = \sup_Q \tilde{W}(\pi_Q(\cdot), Q) = \sup_Q \tilde{W}(\downarrow, Q)$$

və $\pi(X) = \pi_{\overline{Q}}(X)$, – $\overline{Q}$ -yə uyğun Bayes strategiyasıdır.

Həmçinin məlumdur ki, $\pi(X)$ -in minimaks strategiya olması üçün onun Bayes strategiyası olması ($\pi(X) = \pi_Q(X)$ bərabərliyinin hər hansı aprior Q paylanması üçün ödənilməsi) və $\tilde{W}(\pi(\cdot), \theta) = c = \text{const}$ münasibətinin Q , $\tilde{W}(\pi(\cdot), \theta) \leq c$ şərtinə nəzərən sanki hər yerdə ödənilməsi zəruri və kafidir.

İkinci fundamental teorem: A, B, C şərtləri ödənildikdə bütün Bayes strategiyalar sinfi tam sinfidir.

S. o. üçün Bayes strategiyalarının axtarılması məsələsi (dəmli, tam sinif və minimaks strategiyaların axtarılması məsələsi) iki şəxsin adi oyunu (D, Θ, w) üçün məlum mənada eyni məsələyə gətirilə bilər (bax, *Bayes prinsipi*).

Əd.: [1] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; [2] Боровков А. А., Математическая статистика. (Дополнительные главы), М., 1984; [3] Вальд А., Статистические решающие функции, в кн.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–522; [4] Маккинси Дж., Введение в теорию игр, пер. с англ., М., 1960; [5] Ferguson T. S., Mathematical statistics. A decision theoretic approach, N. Y. – L., 1967.

STATİSTİK OYUN; invariantlıq prinsipi «статистическая игра; принцип инвариантности; invariance principle for statistical game» – bax, *Invariantlıq statistik oyunlar nəzəriyyəsində*.

STATİSTİK OYUN; kafilik prinsipi «статистическая игра; принцип достаточности; sufficiency principle for statistical game» – bax, *Kafilik statistik oyunlar nəzəriyyəsində*.

STATİSTİK OYUN; meylsizlik prinsipi «статистическая игра; принцип несмещенности; unbiasedness principle for statistical game» – bax, *Meylsizlik statistik oyunlar nəzəriyyəsində*.

STATİSTİK PLAN «статистический план; statistical design» – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*.

STATİSTİK PROQNOZU, HAVANIN «статистический прогноз погоды; statistical weather forecast» – hidrometeoroloji müşahidələrdən məlum olan verilənlərin yenidən işlənilməsi ilə empirik olaraq müəyyən olunan atmosfer proseslərinin dəyişmələrinin statistik qanunauyğunluqlarından istifadə olunmasına əsaslanan hava proqnozudur. Hava proqnozunun statistik metodları bəzən empirik və ya fiziki – statistik (*prediktorların* seçilməsi fiziki mülahizələrə əsaslandığında) adlandırılır. H. s. p.-da hava hər bir zaman anında çoxkomponentli (vektor) təsadüfi meydan kimi (yeni üç fəza koordinatının təsadüfi funksiyalarının toplusu kimi) interpretasiya olunur. Bu meydanın komponentləri atmosfer havasının vəziyyətinin fiziki xarakteristikaları (temperatur, təzyiq, külək sürəti

vektorunun komponentləri və s.) və havadakı rütubətdir (bulud, yağıntı və s.).

Proqnozlar ənənəvi olaraq: qısamüddətli – bir neçə saatdan 1 – 2 günə qədər, ortamüddətli (vaxtından bir az əvvəl) – 3 – 10 günlük, uzunmüddətli (vaxtından çox əvvəl) – ay və mövsüm üçün proqnozlara ayrılır. Bir çox hallarda havanın bir illik və daha çox müddətli, uzunmüddətli də artıq, hava proqnozlarına da baxılır. Son illərdə biraylıq və mövsüm üçün uzunmüddətli proqnozları iqlim dəyişmələrinin qısaperiodlu proqnozlar adlandırmaq tendensiyləri nəzərə çarpır. Hava proqnozu ərazi üçün (adətən, siyasi – administrativ bölgü əlaqəsi və ya hər hansı fiziki – coğrafi əlaqə üçün), ayrı-ayrı məntəqələr (şəhər, aeroport) və ya magistral üçün (aviatras, avtomobil və dəmir yolları) üçün tərtib olunur. Xüsusişdirilmiş proqnozlar, o cümlədən, xalq təsərrüfatının konkret sahələri üçün təsis edilmiş, ümumi istifadə üçün, əhali və xalq təsərrüfatı üçün, sahə konkretləşdirmədən tərtib olunmuş proqnozlar da vardır.

Meteoroloji proqnozun ixtiyari metodu istifadə olunan X prediktorunun (ümumiyyətlə, çoxölçülü) və hər hansı P operatorunun (qayda, düstur, alqoritm, həlledici funksiyaların) göstərilməsindən ibarətdir və P operatoru X vektorunun ixtiyari realizasiyası x -ə proqnozun mümkün ifadələrindən birini qarşı qoyur [yeni baxılan Y prediktantının müəyyən bir $y = P(x)$ qiyməti]. H. s. p. halında X və Y təsadüfi vektorlar hesab olunur, yəni $P(x)$ də təsadüfi vektordur və $Y = P(x) + \delta$, δ – proqnozun təsadüfi xətasıdır.

Əgər proqnoz metodu yalnız ümumi fizika qanunlarını ifadə edən tənliklərə istinadlanırsa, onda proqnoz **dinamik proqnoz** adlanır. Əgər proqnoz metodu seçilərkən prediktorlar və prediktantlar üzərində müşahidələrin verilənlərinin yenidən statistik işlənilməsindən alınan nəticələr istifadə olunursa, onda uyğun proqnoz ya sadəcə statistik proqnoz, ya da fiziki – statistik proqnoz (fizika qanunlarından istifadə olunduqda), başqa sözlə, **dinamik – stoxastik proqnoz** adlanır.

Hal-hazırda H. s. p.-nin rolu müxtəlif növ vaxtından əvvəl proqnozlar üçün olduqca fərqlidir. Qısamüddətli və ya ortamüddətli proqnozlar, əksər hallarda, hidrotermodynamik atmosferin xüsusi törəmələri, başlanğıc şərtləri və sərhəd şərtləri ilə verilən qeyri – xətti tənliklər sisteminin ədədi həllinə əsaslanır (son zamanlar, yalnız *təsinin empirik funksiyaları* metoduna əsaslanan xəttişdirilmiş tənliklərə baxılmaqla kifayətlənmirlər). Bununla bağlı olaraq, burada statistik metodlar – birincisi, meteoroloji sahələrin obyektiv analizində istifadə olunur [yeni dinamik tənliklərin ədədi həlli üçün stansiyaların qeyri – rəqulyar şəbəkəsində olan müşahidələrin şəbəkənin rəqulyar nöqtələrinə (düyünlərinə) optimal interpolasiyası üçün], ikincisi, bu metodlar verilənlərin inisiallaşdırılması üçün istifadə olunur, yəni verilənlərin elə çevirməsi (məs., hamarlaşdırma və s.) üçün ki, o, proqnozların keyfiyyətinin statistik qiymətini optimallaşdırır (bax, *Hava proqnozu; keyfiyyət statistik qiyməti*).

Nəhayət, ən geniş yayılmış metodlar verilənlərin statistik olaraq optimal sürətdə kəsilməz yadda saxlanması metodlarıdır və bu metodlar, obyektiv analiz üçün, dinamik tənliklərin hər addımda zaman üzrə inteqrallanmasından, müvafiq andaki müşahidə verilənlərindən və bu müddət üçün proqnoz nəticələrindən də istifadə edir. Bütün qeyd olunan məsələlərin həlli üçün meteoroloji sahələrin statistik strukturu haqqında bilgi tələb olunur.

Qısamüddətli və ortamüddətli hava proqnozlarının müasir praktikasında statistik metodların istifadəsində digər bir metod dinamik proqnozların nəticələrinin statistik interpretasiyasından istifadə olunmaqla bağlıdır. Bu halda dinamik tənliklərin həllində alınan verilənlər, maraq prediktantı Y -in statistik proqnoz sxeminə, X prediktoru kimi istifadə olunur. Burada X -in qiymətləri müəyyən dinamik model əsasında hesablanmış Y prediktantının özünün

$\hat{Y}$ qiymətləri olduğu kimi (baxılan modelin qeyri – dəqiqliyinə, modelin həllinin təqribi xarakterli olması və müşahidə xətlərinin olmasına görə əsl y qiymətindən fərqlənən), atmosferin Y -dən fərqli hansısa xarakteristikalarının hesablanmış qiymətləri də ola bilər (məs., marağ sahəsinin lazımi nöqtədən fərqli olan nöqtələrində X qiymətləri və ya verilən hündürlükdə atmosfer təzyiqinin qiymətləri X , Y -in bu halda, hava şəraitinin bilavasitə xarakteristikası olmasına baxmayaraq). X ilə Y arasında statistik əlaqələri (və X üzrə Y -in proqnozu metodu) müəyyənləşdirən müşahidələr arxivi kimi seçilmiş dinamik modelin köməyiylə toplanılmış nəticələrdən istifadə olunduğu kimi, X -in faktiki verilmiş müşahidə qiymətlərindən də istifadə oluna bilər (bu şərtlə ki, X və Y üst-üstə düşməsin). Birinci halda, X -in qiyməti üzrə Y kəmiyyətinin proqnozu ədədi modelləşdirmə nəticələrinin statistik analizinə əsaslanır (MOS və ya MOC metodu adlanır). İkinci halda, X -in hesablanan sahələrinin və Y prediktantının faktiki qiymətləri arasında sinxron əlaqələr istifadə olunur (yeni aşkar olmayaraq hesab olunur ki, X -in qiymətlərinin dinamik proqnozu ideal proqnozdur).

H. s. p. statistik əlaqələrin təbiiyyətinə əsaslanır. Bu əlaqələr hər hansı qeyd olunmuş seçim üzrə empirik təyin oluna bilinir və sonradan bunların qeyd olunduqlarını hesab edərək, bu ana qəddər yığılmış bütün informasiya əsasında hər bir verilən proqnoz üçün onları yenidən istifadə etmək olar, bu da H. s. p.-nın adaptiv sxeminin istifadəsinə uyğundur. Uzunmüddətli və uzunmüddətli-dən daha çox müddətli hava proqnozları halında dinamik tənliliklərdən istifadə etməyən xalis statistik proqnoz metodları tətbiq olunur. Bu halda meteorologiyada uzaq əlaqələr böyük rol oynaya bilər, bu əlaqələrə mühüm dərəcəli zaman intervalları ilə ayrılmış asinxron dəyişənlər daxildir. Məhz buna görə də, uzaq zaman əlaqələri tədqiqatçıların böyük diqqətini daha çox cəlb edir, lakin bunların həyranlıqla qarşılanması, inkişafın başlanğıc mərhələsini yaşayır. $\mathcal{P}$ həlledici qaydası, adətən, funksiyaların hər hansı sinfindən seçilir ki, arxiv verilənlərinin əsasında onu proqnozların keyfiyyət statistik qiymətinin bu və ya digər qiymətinə nəzərən optimal hesab etmək mümkün olsun (məs., xətanın kvadratik ortasının minimumu mənasında, itki minimumu və faydalılıq maksimumu mənasında). Buna görə axtarılan funksiyaya naməlum parametrlər daxil olunur və bunların empirik verilənlər üzrə qəbul edilən optimallıq kriterisinə müvafiq olaraq qiymətləndirilməsi $\mathcal{P}$ həlledici qaydasının qurulması məsələsini təşkil edir. Göstərilən parametrləri modelə aşkar şəkildə, $Y = \mathcal{P}'(X, A) + \delta'$ götürərək daxil etmək olar (burada A , məs., toplam regressiya əmsalları vektoru ola bilər; bax, *Empirik funksiya(sı) təsiri*).

H. s. p.-nin praktiki realizasiyası üçün proqnozun bütün məlum statistik metodları və EHM-də böyük həcmli verilənlərin yenidən işlənilməsinin müasir metodları tətbiq edilir. Prediktorlar və prediktantlar, adətən, çoxölçülü kəmiyyətlər olduğundan çoxölçülü statistik analizin qaydalarından geniş istifadə olunur (əsasən də, regressiya və diskriminant analizin). Kəsilməz meydanlar əvəzinə əksər hallarda onların bazis funksiyalarının müxtəlif sistemləri üzrə ayrılışlarının əmsallarına baxılır, bazis funksiyaları arasında *empirik ortoqonal funksiyalar* böyük populyarlıq qazanmışdır. Belə ayrılışlar prediktorlar və prediktantların ölçülərini olduqca azaltmağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Г р у з а Г. В., «Труды Среднеазиатского научноисследовательского гидрометеорологического института», 1967, в. 29 (44), с. 3–41; [2] Руководство по долгосрочным прогнозам погоды на 3–10 дней, Л., 1968; [3] Руководство по месячным прогнозам погоды, Л., 1972; [4] The global climate, Camb., 1984.

STATİSTİK PROSEDUR « статистическая процедура; statistical procedure » – müşahidələr nəticələrinin əsasında statistik nəticələrin alınması prosedurudur. Müasir riyazi statistikada statistik nəticələr [A. Valdin (A. Wald) işlədiyi

statistik həlledici qaydalar nəzəriyyəsi çərçivəsində] müşahidə olunan təsadüfi elementin realizasiyalar fəzasını mümkün həllər fəzasına inikas etdirən *həlledici qayda* əsasında alınır. Riyazi statistikanın əsas məsələsi elə S. p.-un qurulmasından ibarətdir ki, bu prosedur hər hansı müəyyən mənada optimal həlledici qaydanın seçilməsinə səbəb olsun.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

STATİSTİK PROSEDUR; dayanıqlılıq « статистическая процедура; устойчивость; stability of a statistical procedure » – bax, *Dayanıqlılıq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; effektivlik « статистическая процедура; эффективность; efficiency of a statistical procedure » – bax, *Effektivlik(yi)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; invariantlıq « статистическая процедура; инвариантность; invariance of a statistical procedure » – bax, *Invariantlıq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; meylsizlik « статистическая процедура; несмещенность; unbiasedness of a statistical procedure » – bax, *Meylsizlik(yi)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; məqbulluq « статистическая процедура; допустимость; admissibility of a statistical procedure » – bax, *Məqbul-luq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; minimaksliq « статистическая процедура; минимаксность; minimaxity of a statistical procedure » – bax, *Minimaksliq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; optimallıq « статистическая процедура; оптимальность; optimality of a statistical procedure » – bax, *Optimallıq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; robastlıq « статистическая процедура; робастность; robustness of a statistical procedure » – bax, *Robastlıq(ğı)* statistik prosedurun.

STATİSTİK PROSEDUR; tam sinif « статистическая процедура; полный класс; complete class of a statistical procedures » – statistik prosedurların verilmiş çoxluğunda tam sinif – verilən çoxluqdan olan *statistik prosedurların* elə çoxluğu-dur ki, bu sinifdən olan prosedurlar statistik problemde qəbul edilən qərarların keyfiyyətinin itkisiz olması üçün kifayət edir. Ümumi halda statistik həllər nəzəriyyəsində S. p.-un tam sinfi araşdırılan obyektə xarakterizə edən və aşağıdakı xassəyə malik olan namə-lum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında həllər (qərarlar) qəbul etmək üçün istifadə edilən S. p.-lar çoxluğunu təşkil edir: ixtiyari S. p. üçün S. p.-ların tam sinfindən elə S. p. tapılır ki, $\theta \in \Theta$ parametrinin bütün qiymətlərində onun ən yaxşı keyfiyyət göstəriciləri olur (verilən statistik problem üçün baxılan S. p.-ların keyfiyyət göstəriciləri toplusundan); məs., ardıcıl müşahidələr sxeminde seçim həcmnin orta qiyməti, həlledici funksiyanın risk funksiyası kimi göstəricilər və s. Lakin S. p.-ların tam sinfi haqqında

nəticələrin əksəriyyəti daha dar – həlledici funksiyaların tam sinfi anlayışına aiddir. Əgər baxılan statistik problemə S. p. və həlledici funksiya anlayışı üst-üstə düşərsə, onda həlledici funksiyaların tam sinfi və S. p.-ların tam sinfi anlayışları da üst-üstə düşür.

Əgər bütün $\theta \in \Theta$ üçün $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$ bərabərliyi ödənilərsə, δ_1 həlledici funksiyası δ_2 funksiyasından üstündür (δ_1 – dominar həlledici funksiya) (rus. доминирует) deyilir; bu halda, əgər hər hansı $\theta_0 \in \Theta$ üçün ciddi bərabərsizlik ödənilərsə, onda δ_1 həlledici funksiyası δ_2 funksiyasından ciddi üstündür, deyilir [burada $R(\theta, \delta)$, – δ həlledici funksiyasının risk funksiyasıdır]. K – həlledici funksiyaların hər hansı sinfi olsun. Əgər ixtiyari $\delta \in K$ həlledici funksiyası üçün ondan ciddi üstün (üstün) $\delta^* \in K^*$, $K^* \subset K$ həlledici funksiyası tapılsa,

$K^* \subset K$ sinfi K sinfində tam sinif (məhiyyətə tam sinif – rus. существенно полный) adlanır. K^* sinfinin özünün heç bir altçoxlğu tam (məhiyyətə tam) sinif olmazsa, K^* tam (məhiyyətə tam) sinfi minimal tam (məhiyyətə tam) sinif adlanır.

Əgər K sinfi bütün həlledici funksiyalar sinfi olarsa, yuxarıda verilən təriflərdəki «bütün həlledici funksiyalar sinfində» sözləri, adətən, yazılır.

Bir qayda olaraq, yalnız həlledici funksiyaların tam sinfindən olan həlledici funksiyalara baxıldıqda, araşdırılan statistik problem olduqca sadələşir, belə ki, bu halda ilkin verilənlərin həcmi onlardakı informasiya itkisiz qalmaqla azalır və bütün həlledici funksiyalar sinfində optimal həlledici funksiyanın axtarışı problemi belə prosedurun yalnız tam sinif çərçivəsində axtarışına gətirilə bilər (əgər tam sinifdən olan prosedurlara hər hansı parametrlə, ola bilər ki, sonsuzölçülü parametrlə, baxılsa, onda ilkin problem bu parametr üzrə riskin optimizasiya məsələsinə gətirilir). Tam sinifdən olan prosedurlar, bezen, müəyyən requlyarlıq xassələrinə malik olur, onda bu hal prosedurların xassələrinin analizinin sadələşməsinə səbəb olur. Buna görə də, həlledici funksiyaların tam sinfinin müəyyənləşdirilməsi və effektiv təsviri statistik həllər nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biridir və məs., müntəzəm ən yaxşı həlledici funksiyanın tapılması (əgər varsa) da bu problemə aiddir: bu halda S. p.-ların minimal tam sinfi yeganə həlledici funksiya ibarət olur.

Olduqca ümumi şərtlərdə həlledici funksiyaların minimal, məhiyyətə tam sinfi həlledici funksiyalar çoxluğunu əmələ gətirir. Öyrənilən problemə ən mühüm ümumi nəticə A. Valdin [1]-də aldığı *Beyes həlledici funksiyalar* sinfinin təmliyi haqqında nəticədir: *Beyes* həlledici funksiyaları və onların limitlərinin (həlledici funksiyaların hər hansı təbii zəif yığılma topologiyasında), yeni ümumiləşmiş həlledici funksiyaların çoxluğu məhiyyətə tam sinif əmələ gətirir. Buna görə də, riyazi statistika məsələlərinin geniş sinfində optimal prosedurları ümumiləşmiş *Beyes* həlledici funksiyalar sinfində axtarmaq kifayətdir.

Bu nəticə qeyri – *Beyes* yanaşmasında da tez-tez istifadə olunur, bu halda aprior paylanmalar həlledici funksiyaların tam sinfindən olan həlledici funksiyanı parametrləşdirən kəmiyyət kimi götürülür.

Həlledici funksiyaların tam sinfi haqqında olduqca ümumi nəticələr bu və ya digər monotonluq xassələrinə malik olan paylanmalar ailəsi üçün ifadə olunmuş, riyazi statistika məsələlərinin (qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, statistik hipotezlərin yoxlanılması) geniş sinfi üçün alınmışdır (bax, məs., *Monoton doğruxaşaqlıq nisbəti*), – burada həlledici funksiyaların məhiyyətə tam sinfi monoton prosedurlar çoxluğu adlandırılan çoxluq əmələ gətirir (bax, [4] – [6]). Həlledici funksiyaların tam sinfinin digər ümumi

xüsusiyyəti kafilik anlayışı ilə bağlıdır: bir çox statistik problemlərdə (qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, statistik hipotezlərin yoxlanılması və s.) seçimdən yalnız seçim üzrə qurulmuş kafi statistikanın qiyməti vasitəsilə asılı olan prosedurlarla (uyğun olaraq, statistik qiymətlərlə, kriterilərlə və s.) kifayətlənmək olur. Riyazi statistikanın konkret məsələlərində baxılan problemlər üçün S. p.-ların tam sinifləri haqqında digər nəticələr də məlumdur.

Riyazi statistikanın asimptotik məsələlərində seçim həcmi n və ya müşahidə müddəti T qeyri – məhdud artdığı halda S. p.-un effektivlik xarakteristikaları kimi sonlu n və ya T üçün hesablanan uyğun xarakteristikaların limitləri ($n \rightarrow \infty$ və ya $T \rightarrow \infty$ olduqda) götürülür və təbii olaraq, S. p.-ların asimptotik tam sinfi anlayışı daxil olunur. Məs., həlledici funksiyaların tam sinfinin qeyri – asimptotik tərifində həlledici funksiyaların tam sinfinin tərifindəki $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$ münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda (və ya $T \rightarrow \infty$) $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2) + o(1)$ münasibətilə əvəz olunur.

Əd.: [1] Вальд А., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522; [2] Ле Сам Л., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 1, p. 69–81; [3] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистический решений, пер. с англ., М., 1958; [4] Karlin S., Rubin H., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 272–99; [5] Brown L., Cohen A., Strawderman W., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 4, p. 712–22; [6] Ruschendorf L., «Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Statist.», 1983, Bd 14, № 2, S. 243–50.

STATİSTİK PROYEKSIYASI, PLANIN « статистическая проекция плана; projection of a design » – bax, *Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentin*.

STATİSTİK SEÇİM « статистическая выборка; statistical sample » – bax, *Seçim*.

STATİSTİK SINAQLAR METODU « статистических испытаний метод; statistical simulation method » – bax, *Monte – Karlo metodu*.

STATİSTİK STRUKTUR « статистическая структура; statistical structure » müşahidə olunan nizamsız dəyişən $x(t, r)$ meydanının və ya $x(t)$ zaman sırasının strukturu – realizasiyası verilmiş meydan və ya sıra qəbul edilən $X(t, r)$ [uyğun olaraq $X(t)$] təsadüfi funksiyanın *statistik xarakteristikaları* çoxluğu.

S. s. termini bir çox tətbiqi araşdırmalarda: xüsusilə də, meteorologiya, okeanologiya və geofizikanın digər bölmələrində geniş istifadə olunur; belə ki, bu sahələrdə qeyri – requlyar dəyişən müşahidələrlə əlaqədar olaraq onların interpretasiyası və tədqiqinə statistik yanaşmadan istifadə olunur.

S. s.-un ən mühüm elementləri: moment funksiyaları – $\mathbf{M}X(t, r) = m(t, r)$ və $\mathbf{M}[X(t_1, r_1) X(t_2, r_2)] = B(t_1, r_1, t_2, r_2)$ və ya $D(t_1, r_1, t_2, r_2) = \mathbf{M}[X(t_2, r_2) - X(t_1, r_1)]^2$ struktur funksiyasıdır.

Çoxölçülü $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ meydanı halında $\mathbf{m}$ orta qiyməti – özünün arqumentlərinin vektor funksiyası, ikinci moment $\mathbf{B}$ isə matris funksiyadır. Fəza koordinatları $\mathbf{r}$ və zaman dəyişəni t -dən asılı $X(t, r)$ meydanı üçün $\mathbf{m}(t, r)$ və $B(t, r)$ xarakteristikaları ümumi fəza – zaman S. s.-nu təsvir edir. Fəza S. s. (qeyd olunmuş zaman anında meydanın qiymətlərinə uyğun) və zaman S. s. (qeyd olunmuş nöqtədə meydanın zaman üzrə gedişinə müvafiq) S. s.-un xüsusi hallarıdır.

$X(t, \mathbf{r})$ təsadüfi meydanı fəza üzrə birinci və zaman üzrə stasionar meydan olduğu xüsusi hal mühüm hal hesab olunur. Onda $B(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ korrelyasiya funksiyası və $D(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ struktur funksiyası ilə yanaşı, S. s. uyğun spektral sıxlığı (spektri) vasitəsilə eynilə təsvir olunur. Praktiki olaraq yalnız S. s. elementlərinin müşahidələrdən alınmış statistik qiymətləri məlum olur; bu qiymətlər müşahidə xətalara və istifadə olunan seçimin məhdudluğu ilə əlaqədar, qaçılmaz xətalara malik statistik qiymətlər olur. Bu xətalara qiymətləndirilir, onların təsirinin azaldılması yolları araşdırılır. Qiymətləndirmə dəqiqliyini artırmaq və yuxarıda qeyd olunan funksiyalardan istifadə etmək üçün, bunlar bəzən az sayda parametrlərdən asılı sadə analitik ifadələrlə təqribə edilə bilər.

Əd.: [1] Гандин Л. С., Каран Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л., 1976; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

STATİSTİK TEST « статистический тест; statistical test » – bax, *Statistik kriteri*.

STATİSTİK VƏZİYYƏT « статистическое состояние; statistical state » – bax, *Vəziyyət*.

STATİSTİKA « статистика; statistic » – müşahidələrin nəticələrinin funksiyasıdır.

Misal 1. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor, $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$, – X vektorunun realizasiyanı fəzasında verilmiş ixtiyari funksiya olsun. Onda $T(X)$ S.-dir. Mes.,

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k=1, 2, \dots$$

S.-sı, X -in müşahidələri vektoru üzrə qurulmuş empirik paylanmanın k -cı tərtib momentidir.

Misal 2. θ – naməlum parametr, $\theta \in \mathbb{R}^1$, $X(t)$ – korrelyasiya funksiyası

$$r(t, s) = M.X(t)X(s) = e^{-\alpha|t-s|}, \quad M.X(t) = 0$$

ifadəsile verilən təsadüfi proses olsun.

$$x(t) = \theta + X(t), \quad t \in [0, T]$$

funksiyası müşahidə olunur. Onda

$$\hat{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{və} \quad \hat{\theta} = \frac{1}{2 + \alpha T} [x(0) + x(T) + \alpha T]$$

statistikalan θ parametrinin nöqtəvi statistik qiymətləridir.

Bax, *Müşahidələrin yenidən işlənilməsi*.

Əd.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Воинов В. Г., Никulin M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1 – Univariate case, Dordrecht, 1993.

STATİSTİKA(sı) binar münasibətlərin « статистика бинарных отношений; binary relations statistics » – bax, *Binar münasibətlər statistikasi*.

STATİSTİKA bölünən / ayrılan « статистика разделимая; decomposable/separable statistic » – bax, *Bölünən statistika, Seçimi təzlik*.

STATİSTİKA(sı) interval verilənlərinin « статистика интервальных данных; interval data statistics » – bax, *Interval verilənlərinin statistikasi*.

STATİSTİKA invariant « статистика инвариантная; invariant statistic » – bax, *Invariant statistika*.

STATİSTİKA kafi « статистика достаточная; sufficient statistic » – bax, *Kafi statistika*.

STATİSTİKA(sı) kriterinin « статистика критерия; test statistic » – kritik funksiyası

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > C_0 (< C_0), \\ 0, & T(x) < C_0 (> C_0), \end{cases} \quad (1)$$

və ya $\{x: T(x) = C_i\}$, $i = 0, 1, 2$ çoxluqlarında mümkün randomizasiya ilə

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < C_1 \text{ və ya } T(x) > C_2, \\ 0, & C_1 < T(x) < C_2, \end{cases} \quad (2)$$

münasibətlərlə ifadə olunan statistik kriterinin təyin olunması üçün istifadə olunan T *statistikasıdır*.

Praktiki tətbiqlərdə kritik oblastları

$$\{T(x) \geq C_0\} \quad (\{T(x) \leq C_0\}) \quad (3)$$

və ya

$$\{T(x) \leq C_1\} \cup \{T(x) \geq C_2\} \quad (4)$$

şəklində olan (yaxud ciddi bərabərsizlik işarələrlə razılaşdıraraq) randomizasiya kriteriləri istifadə olunur.

« T statistikasının böyük (kiçik) qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etməyən kriteri» ifadəsi (1) və ya (3) şəklində kriteri kimi anlaşılır və bu halda nəzərdə tutulur ki, C_0 kritik qiyməti və zəruri randomizasiya verilən mühümlük ölçüsü üzrə təyin olunur. (2) və ya (4) kriterilərinin analoji təsvirində əlavə tələblər daxil edilir, məs., simmetriya, məylsizlik və s. Hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinin həlli, bir qayda olaraq, münasib statistikanın müəyyənləşdirilməsinə gətirilir və bu statistika ilə də sonra (1) və ya (2) şəklində kriterilər qurulur. Kriterinin S.-nin istifadəsi onunla şərtləndirilir ki, onun vasitəsilə seçimi fəzanın bölgüsü təyin olunur və bu da hipotezlərin fərqləndirilməsinin verilmiş məsələsi üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

STATİSTİKA kvaziməqbul « статистика квази-достаточная; quasi-sufficient statistic » – bax, *Yardımcı statistika*.

STATİSTİKA(sı) qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin « статистика объектов нечисловой природы; statistics of non-numerical type objects » – riyazi statistikanın ələ bölməsidir ki, statistik verilənlər (müşahidələrin nəticələri) qeyri – ədədi təbiətli obyektlərdir, yəni vektor fəzaları olmayan çoxluqların elementləridir. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin S. birölçülü statistikası (müşahidələr nəticəsi heqiqi ədəddir), çoxölçülü statistik analizi (müşahidələr nəticəsi sonluölçülü vektordur), təsadüfi proseslər və zaman sıraları statistikasını (müşahidələr nəticəsi funksiyadır) tamamlayan statistikaadır. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərə misallara aid müxtəlif

şkalalarda ölçmə nəticələrini (*ölçmə nəzəriyyəsində* seçilmiş olan şkalalarda), binar münasibətləri (*ranqlanmalar, bölgüləri, tolerantlığı*), *qeyri – səliss çoxluqları*, intervalları, cüt-cüt və toplam müqayisələrin nəticələrini qeyd etmək olar. Müşahidənin nəticəsi – ixtiyari təbii fəzədə *təsadüfi element* olduğu hal ən ümumi model hesab edilir. Elmi və praktik fəaliyyətin bir çox oblastlarında qeyri – ədədi təbii obyektlərin tətbiqinin zəruriliyi yaranır: məs., texniki, sosial – iqtisadi, tibbi – bioloji, psixoloji, geoloji, kimyəvi və digər tədqiqatlarda; qiymətləndirmədə, məmurların keyfiyyətinə nəzarət və idarəetmədə; təşkilatı və texnoloji sistemlərin öyrənilməsində (xüsusən də, ekspert statistik qiymətlər metodu ilə) və s.

Qeyri – ədədi təbii obyektlər S.-da riyazi statistika məsələləri – verilənlərin təsviri, qiymətləndirilmə, hipotezlərin yoxlanılması – qeyri – ədədi təbii verilənlər üçün baxılır və bu isə məsələlərin özünəməxsus qoyuluşu və bunların həlli metodlarına gətirilir. Qeyri – ədədi təbii obyektlərin hər bir ayrıca götürülmüş növü üçün xüsusi nəzəriyyələrlə (*ölçmə nəzəriyyəsi, binar münasibətlər statistikası, qeyri – səliss çoxluqlar statistikası, təsadüfi çoxluqlar statistikası*, cüt-cüt müqayisələrin *lyusianlar* nəzəriyyəsi və s. xüsusi nəzəriyyələrlə) yanaşı ümumi təbii fəzalarda verilənlər üzərində yenidən işlənilmə nəzəriyyəsi də vardır ki, bu nəzəriyyənin nəticələri bütün xüsusi nəzəriyyələrdə, hətta riyazi statistikanın klassik oblastlarında, məs., çoxölçülü statistik analizdə də tətbiq olunur.

Qeyri – ədədi təbii obyektlər S. riyazi statistika və tətbiqi riyaziyyatın klassik və son vaxtlarda yaranan bir sıra istiqamətlərini birləşdirir (bax, [1]). Qradiasiyalı sayı sonlu olan qaydalı və nominal şkalalar üzrə ölçmə nəticələrinə riyazi statistikanın qoşmalq cədvəllərinin analizi və ranq korrelyasiyası nəzəriyyəsi kimi klassik istiqamətlərdə baxılmışdır. Ölçmə nəzəriyyəsində göstərilmişdir ki, qaydalı və nominal şkalalarda ölçmələr uyğun olaraq ranqlanma və bölgülərin analizinə gətirir; qaydalı şkalada ölçülmüş verilənlər üzərində riyazi statistikanın ranq metodları ilə yeni-dən işlənilməlidir. Ranqlanma, bölgülər və digər binar münasibətlər dekart kvadrat çoxluğunun baxılan münasibətlər təyin olunan altçoxluqlarına uyğundur və buna görə də, bunların ehtimali nəzəriyyəsi *sonlu təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır. Statistik metodlar, o cümlədən, təsadüfi tolerantlıq nəzəriyyəsi qeyri – səliss çoxluqların mənsubluq funksiyaları və münasibətlərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur. Öz növbəsində, qeyri – səliss çoxluqlar nəzəriyyəsi müəyyən mənada (bax, [1]) təsadüfi çoxluğun proyeksiyalarının köməyi ilə təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinə gətirilə bilər. Cüt-cüt müqayisələnmələr təsadüfi ranqlanma və digər binar münasibətlərin alınması üçün istifadə olunur. Asılı olmayan elementləri sonlu təsadüfi çoxluqların asılı olmayan cüt-cüt müqayisələnmələri, təsadüfi tolerantlıqlar nəzəriyyələri – Lyusianlar (asılı olmayan Bernulli sınaqlarının sonlu ardıcılıqlarının) nəzəriyyəsinin xüsusi hallarıdır. Qeyri – ədədi təbii obyektlərin müxtəlif növləri arasında qeyd olunan əlaqələr 1970-in sonunda isbat olunmuşdur (bax, [1] – [3]).

Verilənlər fəzasının xətti strukturunun olmaması səbəbindən qeyri – ədədi təbii obyektlər S.-sında təsadüfi X elementi-nin orta qiyməti (başqa sözlə, nəzəri orta) təsadüfi elementin qiyməti və fəzanın qeyd olunmuş elementi arasında *yaxınlıq ölçüsünün* riyazi gözləməsi olan funksiyanın minimizasiyası məsələsinin həlli kimi, yeni müəyyən *ekstremal statistik məsələnin* həlli kimi təyin olunur. Bu tərifin klassik riyazi statistikadakı analoqu belədir: $X \in \mathbb{R}^1$ təsadüfi kəmiyyəti üçün $M(X - a)^2$ riyazi gözləməsi minimumunu $a = M(X)$ qiymətində alır, $M|X - a|$ -nin minimumu $a = X$ təsadüfi kəmiyyətinin medianı olduqda alınır. Seçimi orta empirik paylanmaya uyğun orta qiymət kimi təyin olunur. Ekstremal məsələnin həlli kimi orta

kəmiyyət element deyil, çoxluqdur və ola bilər ki, bu çoxluq ya boş və ya bir elementdən çox elementi olan çoxluqdur. Ümumi təbii fəzalarda böyük ədədlər qanununun analoqları alınmışdır, bu qanunlara görə asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi elementlərin seçimi ortası seçimin həcmi artdıqca onların nəzəri orta qiymətinə yığılır (yığılma anlayışının uyğun dəqiqləşdirilməsi şərtlə bax, [4]). Eyni bir təsadüfi element üçün, müxtəlif yaxınlıq ölçülərində orta kəmiyyətlər, ümumiyyətlə, müxtəlifdir, necə ki,

$X \in \mathbb{R}^1$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, moda və medianı

üst-üstə düşməyə bilər. $\mathbb{R}^1$ -də unimodal simmetrik paylanmaların analoqu izotrop fəzalarda *monoton paylanmalardır* ki, bu paylanmalar üçün nəzəri orta qiymətlər paylanmanın mərkəzi ilə üst-üstə düşür. Belə paylanmalar üçün yaxınlıq ölçüsü seçildiyi halda paylanma mərkəzinin statistik qiymətini tapmaq üçün seçimin elementləri ilə fəzanın elementləri arasında yaxınlıq ölçülərinin *Kolmoqorov orta kəmiyyətlərini* minimallaşdırmaq məqsəduyğundur, belə ki, ölçmə nəzəriyyəsi nəticələrindən belə alınır ki, yalnız müəyyən tərtiblə götürülən orta qiymətləri istifadə etmək olar (bax, [1]).

Ümumi təbii fəzalar üçün asılılıqların approksimasiyası və regression analiz, diskriminant və klaster analiz metodlarının analoqları işlənilmişdir (bax, [3], [4]). Şərti orta, yeni şərti paylanma üzrə orta qiymət uyğun ekstremal məsələnin həlli kimi təyin olunur. Regression asılılığı parametrik ailənin elementi ilə approksimasiya etdikdə də ən kiçik kvadratlar, ən kiçik modullar, robust regressiya metodlarında analoji istifadə olunan ekstremal statistik məsələlər həll olunur (bax, [5]). Ümumi təbii fəzalarda qeyri – parametrik nəzəriyyə təsadüfi elementin hər hansı ölçüyə görə paylanma sıxlığının qeyri – parametrik statistik qiymətləri, ən əvvəl sıxlığın nüvə statistik qiymətləri əsasında qurulur. Nüvə statistik qiymətləri təsnif məsələlərində şərti sıxlığın qiymətləndirilməsi və regressiyanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Hipotezlərin yoxlanılması üçün, məs., integral tipli statistiklardan istifadə olunur (bax, [6]).

Qeyri – ədədi təbii obyektlər S.-nın bir çox metodlarında yaxınlıq ölçülərindən istifadə olunur. Yaxınlıq ölçüsünün aksiomatik daxil edilməsinə misal: $\mathfrak{A}$ – vahidə malik çoxluqlar cəbri olsun, d funksiyası isə elə olsun ki, $d: \mathfrak{A}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ və a) $d(A, B) \geq 0$; b) $d(A, B) = d(B, A)$; c) əgər $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ olarsa, onda $\mathfrak{A}$ -ya daxil olan ixtiyari A, B və C üçün $d(A, B) = d(A \cup C, B \cup C)$; ç) əgər $A \cap C \subseteq B \subseteq A \cup C$ olarsa, onda $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ şərtləri ödənilsin. Onda yaxınlıq ölçüsü $d(A, B)$ üçün $\mathfrak{A}$ -da elə (yeganə) μ ölçüsü vardır ki, $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$, burada $A \Delta B$, – A və B -nin simmetrik fərqi (bax, ətraflı, [1]). Yaxınlıq ölçüsü tarixən ilk dəfə *Kemeni məsafəsi* ilə aksiomatik olaraq daxil olmuşdur (bax, [7], [8]).

Qeyri – ədədi təbii obyektlər S.-nin bölməsi kimi ölçmə nəzəriyyəsi ölçmə şkalalarının mümkün çevrilmələrinə nəzərən statistik nəticələrin invariantlığını öyrənir (bax, [1], [3]). Tətbiqi riyaziyyatın bu bölməsi psixoloji ölçmə nəzəriyyəsi (bax, [9]) kimi inkişaf edirdi və bu bölməyə yalnız XX əsrin 70-ci illərində müstəqil bölmə kimi baxılmışdır. Münasibətlərlə verilən empirik sistemin münasibətli ədədi sisteme homomorfizmini öyrənən klassik yanaşmadan fərqli olaraq, qeyri – ədədi təbii obyektlər S.-sında «tətbiqi ölçmə nəzəriyyəsi» istifadə olunur ki (bax, [1]), burada əsas anlayış ölçmə şkalasının mümkün çevrilmələrinin qrupu anlayışdır. Çoxölçülü şkalalanma metodları (bax, [3]) ölçmə nəzəriyyəsi ilə birgə öyrənilən fəzanın dim. – ölçüsünü, xüsusilə də, onun vizualizasiyası məqsədilə, ölçüsünü azaltmağa imkan verir.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nin bölməsi kimi binar münasibətlər statistikasında *Kemeni medianı* və *Kemeni məsafəsi* ilə bağlı metodlar mərkəzi yer tutur. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nin yaxın bölmələri cüt-cüt müqayisələmələr (bax, [11]) və lyusianlar da alternativ əlamətə görə statistik nəzarət nəzəriyyəsi ilə əlaqədardır (bax, [12]). Lyusianlar nəzəriyyəsi məsələlərinin əsas qoyuluşlarında naməlum parametrlərin sayı verilənlərin həcminə proporsional artır.

Qeyri – səliss çoxluqlar statistikasını qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nin bölməsi kimi qeyri – səliss nəzəriyyəsi (bax, [14]), təsadüfi çoxluqlar statistikasını və ümumi təbiətli fəzalarda statistikanın sintezidir.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nin nəticələri riyazi statistikanın klassik bölmələrində də tətbiq olunur. Məs., regressiya və diskriminant analizlərdə əlamətlərin informativ altçoxluqlarının seçilməsində məqsəd altçoxluğun qiymətləndirilməsidir və qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S. terminlərində əlamətlərin seçilmə metodunun tutarlılığı anlayışı da formalaşır. Müşahidə xətlərinin nəzərə alınması, yəni müşahidə nəticələrinin ədədlərlə deyil, qeyri – səliss çoxluqlar və ya intervallarla təsviri klassik nəticələrdən fərqli nəticələrin alınmasına səbəb olur. Məs., qamma – paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsində momentlər metodunun statistik qiymətləri geniş parametrlər oblastında maksimal doğruxoxşarlıq statistik qiymətlərdən daha yaxşı hesab olunur (bax, [15], [16], *interval verilənlərinin statistikasını*).

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S. texniki, tibbi, sosioloji araşdırmalarla sıx əlaqədar olub, bu sahələrin müxtəlif məsələlərini tədqiq edərək, bu sahələrdə elmi və praktiki fəaliyyətdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Орлов А. И., в кн.: Вопросы кибернетики, М., 1979, в. 58, с. 17–33; [3] Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985; [4] Орлов А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12; [5] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М., 1981; [6] Орлов А. И., Вероятностные процессы и их приложения, М., 1989, с. 118–23; [7] Кемени Дж., Снелл Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер. с англ., М., 1972; [8] Раушенбах Г. Б., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 169–203; [9] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967, с. 9–110; [10] Пфанцагл И., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [11] Дэвид Г., Метод парных сравнений, пер. с англ., М., 1978; [12] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [13] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [14] Заде Л., Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений, пер. с англ., М., 1976; [15] ГОСТ 11.011-83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения, М., 1985; [16] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр., Пермь, 1988, с. 45–55; [17] Орлов А. И., «Заводская лаборатория», 1990, т. 56, № 3, с. 76–83; 1995, т. 61, № 3, с. 43–52; 1995, т. 61, № 5, с. 43–51; 1996, т. 62, № 1, с. 54–60.

STATİSTİKA(sı) qeyri – səliss çoxluqların « **статистика** нечетких множеств; **statistics** of fuzzy sets » – bax, *Qeyri – səliss çoxluqlar statistikasını*.

STATİSTİKA oxşar « **статистика** подобная; ancillary statistic » – bax, *Oxşar statistika*.

STATİSTİKA(sı) ranq « **статистика** ранговая; rank statistic » – bax, *Ranq statistikasını*.

STATİSTİKA tabe « **статистика** подчиненная; subordinate statistic » – bax, *Tabe statistika*.

STATİSTİKA tam « **статистика** полная; complete statistic » – bax, *Tam statistika*.

STATİSTİKA(sı) təsadüfi çoxluqların « **статистика** случайных множеств; **statistics** of random sets » – riyazi statistikanın ələ bölməsidir ki, burada statistik verilənlər çoxluqlardır. Təsadüfi çoxluqlar S.-ində verilənlərin təsviri üçün təsadüfi çoxluğun orta qiyməti tətbiq olunur. Təsadüfi çoxluqların S.-nin qiymətləndirilməsinin parametrik məsələlərinin əksəriyyətində statistik qiymətlər ekstremal məsələlərin həlli kimi ifadə olunur, bunların xassələri isə qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin *statistikasının* metodları ilə təyin olunur (bax, [1]). Modanın, regressiya asılılığın, obrazların tanınması və s.-nin qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi təsadüfi çoxluqlar S.-ində paylanma sıxlıqlarının qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin müxtəlif tiplərinin köməyi ilə aparılır (bax, [1]). Riyazi statistikanın klassik məsələlərində istifadə olunan etibarlı çoxluq – təsadüfi çoxluqdur.

Təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin müxtəlif oblastlarında təsadüfi çoxluqların S.-nin metodları və məsələlərin spesifik qoyuluşları istifadə olunur. Məs., sonluölçülü Evklid fəzasının təsadüfi altçoxluqlarının S. üçün əsas öyrənmə obyektləri ixtiyari ehtimal fəzasının Hausdorf metriyası ilə verilmiş boş olmayan kompaktlar çoxluğuna ölçülən inikaslarıdır (bax, [2]). Bu halda təsadüfi çoxluqların Minkovski toplanmasından (bax, *Minkovski əməlləri*), böyük ədədlər qanunları və mərkəzi limit teoremlərinin analoqlarından istifadə olunur (bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*).

μ ölçüsü ilə verilən fəzalarda təsadüfi çoxluqların S., adətən, çoxluqların yaxınlıq ölçülərinin daxil olunmasına əsaslanır. Bu yaxınlıq ölçüləri aşağıdakı düsturlarla təyin olunur: əgər

$$d_1(A, B) = \mu(A \Delta B); \quad \mu(A \cup B) > 0,$$

$$d_2(A, B) = \mu(A \Delta B) / \mu(A \cup B),$$

və əks halda isə $d_2(A, B) = 0$. Burada $A \Delta B$, – A və B çoxluqlarının simmetrik fərqidir. Belə yaxınlıq ölçüləri psevdometrikalardır (bunların asimptotik təsviri haqqında bax, [3], [1]).

Təsadüfi çoxluqların S.-nin inteqral həndəsə ilə bağlı məsələlərində müvafiq statistik problemlərin müxtəlif parametrisasiya qaydaları ilə klassik problemə gətirilməsi böyük rol oynayır (bax, [4]). Sonlu təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində və xüsusilə də, asılı olmayan elementləri təsadüfi çoxluqlar (bax, *Lyusian*) nəzəriyyəsində ehtimal modelini təsvir edən qoyuluşlarda parametrlərin sayı verilənlərin həcminə mütənasib olaraq artdığı halda, hipotezlərin yoxlanılması metodları böyük yer tutur.

Tətbiq üçün bir çox mühüm statistik xarakterli problemlər qeyri – səliss çoxluqlar terminlərində təbii surətdə ifadə olunur. Belə məsələlər təsadüfi çoxluğun proyeksiyasının köməyi ilə təsadüfi çoxluqların S.-na gətirilir.

Əd.: [1] Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985; [2] Лященко Н. Н., в кн.: Прикладная статистика, М., 1983, с. 40–59; [3] Лященко Н. Н., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [4] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [5] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980.

STATİSTİKA yardımçı « **статистика** вспомогательная; auxiliary statistic » – bax, *Yardımcı statistika*.

STATİSTİKA zəruri « статистика необходима; minimal sufficient statistic » – bax, *Minimal kafi statistika*.

R/S – STATİSTİKA « R/S – статистика; R/S – statistic » – bax, *Hörsfenomeni*.

T^2 – STATİSTİKA « T^2 – статистика; T^2 – statistic » – normal qanunla paylanmış iki seçim üzrə orta qiymətlər vektorlarının (ikiseçimli T^2 -s.) bərabərliyi haqqında hipotezin və ya orta qiymətlər vektorunun verilmiş *Hotelling* (bax, [1]) T^2 -s. (birseçimli T^2 -s.) vektoruna bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün istifadə olunan *statistikadır*, məlum t^2 statistikasının birölçülü hal üçün ümumiləşməsidir.

Fərz olunur ki, p – ölçülü $N_p(\mu_i, \Xi)$ normal paylanmalara malik n_i ($i=1, 2$) həcmli seçim vardır; X_i və S_i , – $N_p(\mu_i, \Xi)$ paylanmasının orta qiymətlər vektorunun və kovariasiyalar matrisinin uyğun seçimi qiymətləri olsun. Onda ikiseçimli T^2 -s.

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} d^T S^{-1} d$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $d = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$,

$$S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ümumi kovariasion Ξ matrisinin statistik qiymətidir.

$\hat{v}^2 = d^T S^{-1} d$ – *Mahalanobis məsafəsinin* seçimi statistik qiymətidir. Birseçimli T^2 -s. $N_p(\mu_i, \Xi)$ paylanmasına malik n həcmli seçim üzrə qiymətləndirilən orta qiymətlər vektoru naməlum μ -nün verilmiş μ_0 vektoruna bərabərliyi haqqında hipotez yoxlanıldıqda istifadə olunur, bu halda

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T S^{-1}(\bar{X} - \mu_0).$$

Yoxlanılan hipotez düzgün seçildiyi halda T^2 – s. *Hotelling* T^2 – *paylanma* adlanan paylanma qanununa tabe olur. T^2 – s. paylanması normallıqdan yayınlara dayanıqlı paylanmadır..

Əd.: [1] *Hotelling* H., «Ann. Math. Statist.», 1931, v. 2, p. 360–78; [2] *Андерсон* Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

STEK – ALQORİTM « стек – алгоритм; stack – algorithm » – bax, *Ardıcıl dekodla(n)ma*.

STEK – YADDAŞ « стек – память; stack – memory » – bax, *Ardıcıl dekodla(n)ma*.

STEYN EFFEKTİ « Стейна явление; Stein effect » – bax, *Ceyms – Steyn statistik qiyməti*.

STİLTYES – MİNKOVSKİ İNTEQRALI « Стильеса – Минковского интеграл; Stieltjes – Minkowski integral » – adi Stilyes inteqralının *təsədüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinə* baxılan analoqudur, bu inteqral Stilyes inteqralının konstruksiyasını qiymətləri Evklid fəzasının kompaktları olan funksiyalara ümumiləşdirir. $A(x)$, $a \leq x \leq b$, – Evklid fəzasının boş

olmayan (qabarıq olması hökm deyildir) kompaktlarının Hausdorf metriyasında kəsilməz birparametrlili ailəsi, X – qiymətləri $[a, b]$ -dən olan təsadüfi kəmiyyət, F – bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması olsun. F paylanmasına nəzərən $A(x)$ -in S. – M. i. $[a, b]$ seqmentinin Δ_k intervallarına bölgülərinin filtri üzrə götürülən kompaktların

$$\oplus_k F(\Delta_k)A(x_k), \quad x_k \in \Delta_k$$

– vektor cəminin Hausdorf limiti kimi təyin olunur (bax, *Minkovski əməlləri*) və bu inteqral $A(x)$ təsadüfi çoxluğunun *riyazi gözləməsi* ilə üst-üstə düşür. F – qeyri-atomik paylanma olduqda, yeni ixtiyari $x \in [a, b]$ qiymətində $P\{X=x\}=0$ olduqda, S. – M. i.-nin qiymətlərinin qabarıq olması zəruridir.

Əd.: [1] *Матерон* Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] *Aumann* R. J., «J. Math. Analysis and Appl.», 1965, v. 12, № 1, p. 1–12.

STİRLİNG ƏDƏDLƏRİ « Стирлинга числа; Stirling numbers » – $S(n, k)$ və $\sigma(n, k)$ *kombinator ədədləridir* (uyğun olaraq birinci və ikinci növ) və aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunurlar:

$$A_x^n \equiv (x)_n \equiv x(x-1) \dots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k, \quad n \geq 1$$

$$x_n = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k)(x)_k, \quad n \geq 1.$$

[1]-də J. Stirling tərəfindən daxil olunmuşdur. S. ə. qiymətləri

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k), \quad n \geq 1,$$

$$\sigma(n, k) = \sigma(n-1, k-1) + k\sigma(n-1, k), \quad n \geq 1,$$

rekurrent münasibətləri, $S(0, 0) = \sigma(0, 0) = 1$, $S(0, k) = \sigma(0, k) = 0$, $k \neq 0$ başlanğıc şərtləri ilə hesablanılır. S. ə. üçün

$$\sum_{j=k}^n S(n, j)\sigma(j, k) = \sum_{j=k}^n \sigma(n, j)S(j, k) = \delta_{nk}$$

– ortoqonallıq münasibəti ödənilir, burada δ_{nk} – Kroneker simvoludur. Müxtəlif məsələlərdə

$$\sum_{k=0}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \ln^k(1+t),$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k$$

– doğuran funksiyalarından və aşağıdakı aşkar ifadələrdən istifadə olunur:

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \Delta^k 0^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j j^n,$$

burada Δ – fərq operatorudur: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$,

$$S(n, k) = (-1)^{n+k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \dots i_{n-k}.$$

S. e.-nin kombinator və nəzəri – ehtimali interpretasiyası: $(-1)^{n+k} S(n, k)$ – tsikli k , qüvvət üstü n olan evəzləmələrin sayı. $\sigma(n, k)$ n elementli çoxluğun k sayda boş olmayan altçoxluqlara bölgülərinin sayı və ya n sayda müxtəlif eşyalının k sayda bir-birindən fərqlənməyən oyuqlarda, bütün oyuqların dolu olması şərti ilə, yerləşmələri sayıdır. S. e. $\sigma(n, k)$ ilə yerləşmə haqqında klassik məsələdə boş oyuqların sayının paylanması da ifadə olunur, daha dəqiqliklə, n sayda müxtəlif hissəciyin N sayda müxtəlif oyuqlarda təsadüfi və eyniehtimalı yerləşmə sxeminə boş oyuqların sayının m -ə bərabər olması ehtimalı

$$\frac{N!}{m! N^n} \sigma(n, N-m)$$

olur.

S. e.-nin yerləşmələr məsələsi ilə bağlı ümumiləşmələrindən biri

$$k! \sigma(n, m, k) = \Delta^k (m-k)^n$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan ədəddir və bu ədəd n müxtəlif eşya-nın m müxtəlif oyuqda yerləşmələrində, k sayda qeyd olunmuş oyuqlardan heç birinin boş olmaması şərti ilə, mümkün ola bilən halların sayıdır.

Asimptotik hesablamalarda S. e. üçün müxtəlif təqribi düsturlardan istifadə olunur (bax, [4]), məs., əgər $n, k \rightarrow \infty$,

$\frac{n}{k} = \alpha = \text{const} > 1$ olarsa, onda

$$\sigma(n, k) = \frac{k^n}{n!} \left(1 - \frac{\alpha b}{1+b} \right)^{-1/2} (b^b (1+b)^{\alpha-1-b})^k (1 + O(1/\sqrt{n}))$$

düsturu doğrudur, burada $b > 0$, $-1+b = be^{\alpha/(1+b)}$ tənliyinin köküdür.

Əd.: [1] Stirling J., Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, L., 1730; [2] Ч а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения, М., 1982; [4] Медведев Ю. И., Ивченко Г. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 151–56.

STOXASTİK AXIN(ı) diffeomorfizmlərin «стохастический поток диффеоморфизмов; stochastic flow of diffeomorphisms», stoxastik differensial tənliyin doğurduğu, – $\mathcal{M}$ hamar çoxobrazlısının $\mathcal{N}$ hamar çoxobrazlısına $X(t, \cdot)$ inikaslının ailəsidir və bu axın aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) ixtiyari $x \in \mathcal{M}$ üçün $X(t, x)$ ilkin stoxastik differensial tənliyin həllidir;

b) ixtiyari t üçün $X(t, \cdot)$ $\mathcal{M}$ -in $\mathcal{N}$ -ə diffeomorfizmidir (sanki yaqın).

STOXASTİK ANALİZ «стохастический анализ; stochastic analysis» – bax, Stoxastik hesab.

STOXASTİK APPROKSİMASIYA «стохастическая аппроксимация; stochastic approximation» – parametrik və qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərinin geniş sinfinin, müşahidələr sayı artdıqca, statistik qiymətlərin ardıcıl (rekurrent) dəyişməsinə əsaslanan həll metodudur. Parametrik məsələlərə tətbiq olunduğu halda S. a. əksər hallarda rekurrent qiymətləndirmə adlandırılır. S. a.-nin proseduru

$$X_{n+1} = X_n + a_n (Y_n(X_n) - \alpha) \quad (1)$$

şəklində Robbins – Monro proseduru olmuşdur; bu prosedurla regressiya funksiyası $R(x)$ -in X_n nöqtələrindəki $Y_n(X_n)$ müşahidələri üzrə riyazi gözlemləri sıfıra bərabər, asılı olmayan xətlərlə $R(x) = \alpha$ tənliyinin kökü – x_* qiymətləndirilir. $R(x)$ funksiyasının maksimum nöqtəsi $x_{\max}$ -u təyin etmək üçün S. a.-nin ilk proseduru

$$X_{n+1} = X_n + a_n [(Y_n(X_n + c) - Y_n(X_n - c_n)) / 2c_n]$$

şəklində Kifer – Volfovits proseduru olmuşdur, burada $c_n \rightarrow 0$ olduqda kvadrat mötərizədəki ifadə $R'(X_n)$ kəmiyyətinin app-roksimasiyasıdır.

S. a. metodunun problemləri dairəsi, əsas etibarilə, 20-ci əsrin 60-cı illərinin ortalarında formalaşmışdı. S. a. prosedurlarının öyrənilməsində iki əsas məsələyə baxılır: yığılma şərtlərini müəyyən etmə və app-roksimasiya prosedurunun yığılma sürətini araşdırmaq. Əgər $(x - x_*)(R(x) - \alpha)$ mənfi olarsa və x_* nöqtəsinin olduqca kiçik ətrafından kənarda sıfırdan aralıdırsa və $d > 0$ olduqda, $M[Y(x)]^2 \leq d(1 + x^2)$ şərti ödənilərsə, onda (1) prosedurunun sanki yaqın və kvadratik orta mənada yığılması üçün

$$a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

şərtlərinin ödənilməsi kifayətdir. (2) prosedurunun yığılması üçün $R(x)$ funksiyası üzərində qoyulan kafi şərtlər:

$$n \rightarrow \infty \text{ olduqda } a_n, c_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$$\sum a_n c_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n / c_n)^2 < \infty$$

münasibətləri ilə ifadə olunur və $n \rightarrow \infty$ olduqda $X_n \rightarrow x_{\max}$ – sanki yaqın və kvadratik orta yığılmasını təmin edir.

(1) prosedurunun asimptotikasına aid ən səciyyəvi xüsusiyyət aşağıdakı kimi ifadə olunur. Bəzi şərtlər ödənildikdə $\sqrt{n}(X_n - x_*)$ təsadüfi kəmiyyətləri riyazi gözlemləri sıfıra bərabər və dispersiyası – $\sigma^2 A^2 / (1 + 2AR'(x_*))$ olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətlərdir; bu şərtlərdən ən əsasları $a_n = A/n$, $x \rightarrow x_*$ olduqda $M[Y(x)]^2 \rightarrow \sigma^2$, $1 + 2AR'(x_*) < 0$ münasibətləri ilə ifadə olunan fərziyyələrdir.

Bu halda limit dispersiya minimal qiymətini $A = -1/R'(x_*)$ olduqda alır. Yığılma şərtlərinin və asimptotikanın araşdırılmasından başqa, (1) və (2) prosedurları çoxölçülü hal üçün ümumiləşdirilmişdir, kəsilməz zaman halı üçün bu prosedurların analoqları qurulmuşdur, yığılma sürətinin üsulları, çoxaddımlı prosedurlar araşdırılmışdır, dispersiyanın qeyri – asimptotik statistik qiymətləri alınmışdır və s. (bax, [1], [2]).

S. a. metodunun inkişafında S. a.-nin

$$X_{n+1} = T_n(X_1, \dots, X_n) + \xi_n \quad (3)$$

şəklində ümumiləşmiş proseduru (Dvoretzki proseduru) böyük rol oynamışdır, burada $\xi_n, - \sum_{n=1}^{\infty} M \xi_n^2 < \infty$ şərtini ödəyən martinqalferqdir. $T_n(x_1, \dots, x_n)$ inikasının sıxlaşan olması fərziyyəsində, yeni

$$|T_n(x_1, \dots, x_n) - x_*| \leq \max[a_n; (1 + b_n)|x_n - x_*| - c_n]$$

olarsa,

$$n \rightarrow \infty \text{ olduqda } a_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ və } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$$

şərtlərinin ödənilməsi Dvoretzki prosedurunun yığılmasını təmin edir (bax, [1]).

20-ci əsrin 60-cı illərindən etibarən S. a.-nın araşdırılması vasitələrindən biri martinqallar nəzəriyyəsi texnikası olmuşdur (bax, [3]).

$$dX(t) = \alpha(t)[R(X(t)) + \psi(t, X(t))]dt + \beta(t)\sigma(t, X(t))d\xi(t) \quad (4)$$

münasibətlə təyin olunan Markov prosesinin (diskret zaman halında Markov zəncirinin) xüsusi sinfinin S. a. prosedurlarının öyrənilməsinə yanaşma səmərəli olmuşdur, burada $R(x), \psi(t, x) \in \mathbb{R}^d; \sigma(t, x), - (d \times d)$ matris; $\psi(t, x), - R(x)$ -in ölçülməsindən yaranan determinik meyl olub, $t \rightarrow \infty$ olduqda yox olan kiçik kəmiyyətdir. Diskret zaman halında, (4)-də, $dX(t) = X(t+1) - X(t), dt=1$ yazmaq lazımdır, $d\xi(t)$

isə $\mathbb{R}^d$ -də asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcılığıdır. Kesilməz zaman halında (4) asılı olmayan artımları, kvadratik inteqrallanan d -ölçülü $\xi(t)$ prosesi üzrə stoxastik differensial İto tənliyi kimi anlaşılır. $\alpha(t) = \beta(t) = a(t)$ olduqda (4) proseduru (1) şəklində, $\alpha(t) = a(t)$ və $\beta(t) = a(t)/c(t)$ olduqda isə (2) şəklində olur. (4) prosedurunun yığılma şərtlərinin

$$\dot{x}_s = R(x_s) \quad (5)$$

dinamik sistemi üçün Lyapunov funksiyalarının varlığı və dinamik sistemlərin bütünlüklə dayanıqlılığı, eksponensial dayanıqlılığı kimi anlayışları ilə sıx əlaqəli olduğu aşkar edilmişdir. Kesilməz zaman halında (4) proseduru, $\xi(t)$ -nin Viner prosesi olduğu hal üçün ətraflı öyrənilmişdir. Əgər bu halda $V(x) - (5)$ sisteminin Lyapunov funksiyasıdırsa, yeni: $V(x) > 0$ və $x \neq x_*$ olduqda $\langle (R(x), \text{grad } V(x)) < 0, V(x_*) = 0; |x| \rightarrow \infty$ olduqda $V(x) \rightarrow \infty; |\sigma(t, x) \text{ grad } V(x)|^2 \leq (C(1 + V(x)))$ olarsa, onda (4) prosedurunun sanki yeqin yığılması üçün

$$\int_0^{\infty} a(t)dt = \infty \text{ və } \int_0^{\infty} a^2(t)dt < \infty$$

şərtlərinin ödənilməsi kafidir. (5) sistemi müntəzəm eksponensial dayanıqlı sistem olduqda (4) prosedurunun kvadratik orta mənada yığılması üçün birinci inteqralın dağılması və $t \rightarrow \infty$ olduqda

$a(t) \rightarrow 0$ şərtinin ödənilməsi kafi şərtlərdir. (5) dinamik sisteminin bəzi tarazlıq vəziyyətləri halı - (1)-də $R(x) = \alpha$ tənliyinə uyğun olan haldır və bu halda $R(x) = \alpha$ tənliyinin bir neçə kökü və ya $R(x)$ funksiyasının (2)-də bir neçə ekstremumu vardır. (4) prosedurunun trayektoriyalarının (5) sisteminin tarazlığının qeyri - dayanıqlı vəziyyətlərinə sanki yeqin yığılmayacağına bir sıra kafi şərtləri alınmışdır (bax, [3]).

Əgər (4) prosedurunda $\alpha(t) = \beta(t) = a/t$ seçilərsə: $\psi(t, x) = 0$ və $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sigma(t, x_*) M[d\xi(t)(d\xi(t))^T] \sigma^T(t, x_*) \rightarrow S_0 dt,$$

$A = a \text{ grad } R(x_*) + I/2$ dayanıqlı matris olarsa (I - vahidi matrisdir), onda bəzi əlavə şərtlər ödəniləndikdə $\sqrt{t}(X(t) - x_*)$ təsadüfi vektoru $t \rightarrow \infty$ olduqda riyazi gözləməsi sıfır bərabər və dispersion matrisi -

$$S = a^2 \int_0^{\infty} \exp(At) S_0 \exp(A^T t) dt$$

$AS + SA^T = -a^2 S_0$ matris tənliyinin həlli olan asimptotik normal təsadüfi vektordur. Bundan başqa, funksional mənada asimptotik normallıq haqqında nəticə də doğrudur, yeni: $\exp(t/2)(X(e^t) - x_*)$ təsadüfi prosesi $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$dZ(t) = AZ(t)dt + aS_0^{1/2}dw(t)$$

stoxastik differensial İto tənliyinin həlli olan stasionar Gauss $Z(t)$ təsadüfi prosesinə yığılır (bax, [3]).

S. a. prosedurlarının limit yaxınlaşmalarla bağlı araşdırmalarda prosedurun asimptotik optimal parametrləri haqqında məsələ yaranır. (1) prosedurunda $a_n = A/n$ seçildiyi halda, A parametrlərinin limit dispersiyasını minimallaşdıran optimal qiyməti $1/R'(x_*)$ -ya bərabərdir. Lakin $R'(x_*)$ kəmiyyəti məlum deyildir. Bu kəmiyyəti müşahidələr üzrə alınan statistik qiymətlə əvəz etmək üçün prosedur təklif olunmuşdur. Bu proseduru iki rekurrent münasibətlə yazmaq olar:

$$X_{n+1} = X_n + (2nW_n)^{-1}[Y_n(X_n + c_n) + Y_n(X_n - c_n)],$$

$$W_{n+1} = n^{-1}(n-1)W_n + (2nc_n)^{-1}[Y_n(X_n + c_n) - Y_n(X_n - c_n)].$$

Bu prosedur çoxölçülü hal üçün də alınmışdır. Belə prosedurlar S. a.-nın adaptiv prosedurları kimi adlandırılmışdır. Adaptiv rekurrent prosedurların qurulması (sintezi) üsulları kibernetikanın müstəqil oblası - adaptiv sistemlər nəzəriyyəsində öyrənilir (bax, [4]).

S. a. ümumi prosedurlarının mühüm tətbiqlərindən biri asılı olmayan $Y_1, Y_2, \dots$ müşahidələri üzrə $f(y|x)$ sıxlığının x parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün

$$X_{n+1} = X_n + (nI(X_n))^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(Y_n | X_n) \quad (6)$$

rekurrent prosedurudur. (6) prosedurunda $I(x), - f(y|x)$ sıxlığının Fişer informasiya miqdadıdır. $f(y|x)$ üzerine bəzi şərtlər qoyulduqda (6) proseduru x parametrlərinin tutarlı və asimptotik effektiv statistik qiymətini təyin edir. (6) prosedurunun

ifadəsindən X_n statistik qiyməti ilə x parametrisinin maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinin dərin əlaqəsi olduğu aydın görünür.

S. a. metodunun inkişafı bir neçə istiqamətlə təyin olunur: ümumi statistik metodlarda yeni ideyalar qiymətləndirmənin rekurrent metodlarına köçürülür, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənməsi nəzəriyyəsinin aparatı S. a. prosedurlarının trayektoriyalarının incə xassələrini öyrənmək məqsədilə bir vasitə kimi istifadə olunur. Statistika məsələlərində roblast statistik qiymətlərin öyrənilməsi ənənəsi ilə S. a.-nın roblast prosedurları inkişaf etmişdir və bu prosedurlar təsadüfi xətalara paylanmalarının apriori verilən sinfinə nəzərən minimaks mənada optimal prosedurlardır (bax, [6]). Asimptotik minimaks mənada effektiv statistik qiymətlərin qurulması ideyaları da S. a. metodlarında eks olunmuşdur və burada belə effektiv statistik qiymətlər rekurrent qurulur. S. a. metodunun filtrasia nəzəriyyəsi ilə, məsələn, Kalman – Byusi xətti filtrasiası ilə əlaqəsi aydın surətdə aşkar edilmişdir (bax, *Kalman filtri*, həm də [4]).

S. a. prosedurlarının lokal xassələri, yeni limit nöqtələri ətrafında trayektoriyaların xassələri araşdırılır. Əgər (4) proseduru üçün $ds = \alpha(t) dt$ bərabərliyi ilə təyin olunan zaman əvəzləməsi daxil edilərsə, onda $X(t(s))$ proseduruna s zamanının sonlu parçalarında (5) dinamik sisteminin kükrəntisi kimi baxmaq olar. (5) sisteminde asimptotik dayanıqlı, cazibə oblası D olan x_* tarazlıq vəziyyətinin varlığını fərz edərək, (4) prosedurunun x_* nöqtəsinə yığılmasının tədqiqini prosedurun trayektoriyalarının D və $\xi(t)$ prosesi ilə doğurulan kükrəntilərin kiçik olduğu oblasta qayıdışlarının yoxlanılmasına gətirmək olur. (4)-də təsadüfi kükrəntilərin kiçik olması şərtlərinin aydınlaşdırılması üçün klassik ehtimal nəzəriyyəsi aparatından istifadə olunur. Bu halda S. a. prosedurlarının yığılma şərtləri böyük ədədlər qanunu tipli teoremlər olur, asimptotik normallıq isə mərkəzi limit teoremi ilə əlaqəlidir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün və Markov prosesləri üçün böyük yayınmalar nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə, bir sıra hallarda, S. a. prosedurlarının sanki yəqin yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır. Məs., əgər $d\xi(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası qüvvət üstlü asimptotikaya malik olarsa, yeni

$$P\{|d\xi(t)| > x\} = O(|x|^{-\nu}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \nu > 2, \\ \alpha(t) \rightarrow 0, \quad \beta(t) \rightarrow 0, \quad \beta^2(t)/\alpha(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \\ \int_0^\infty \alpha(t) dt = \infty$$

olarsa, onda bezi fərziyyələrlə (4) prosedurunun yığılması üçün $\int_0^\infty \beta^\nu(t) dt < \infty$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. $d\xi(t)$ kəmiyyətlərinin eksponensial momentinin varlığı halında bu şərt ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$\int_0^\infty \alpha(t) \exp(-\lambda \beta^2(t)/\alpha(t)) dt$$

integralının yığılması tələbi ilə əvəz olunur. S. a. prosedurlarının sanki yəqin ödənilən asimptotik xassələri də öyrənilir. S. a. prosedurları üçün klassik təkrar loqarifm qanununu ümumiləşdirən nəticələr alınmış, yuxarı və aşağı funksiyalar tapılmışdır.

Asılı müşahidələrlə bağlı sxemlərdə S. a. prosedurları, bir qayda olaraq, xətalara stasionar olması haqqında fərziyyələrlə öyrənilir.

Belə tip proseslərdən tarixən ilk prosedurlar kəsilməz zamanlı prosedurlar olmuşdur.

$$dX(t) = a(t)(R(X(t)) + h(t))dt$$

şəklində prosedura baxılmışdır, burada $h(t)$ – orta qiyməti sıfıra bərabər erqodik prosesdir. Asılı kükrəntilərlə S. a. prosedurlarının yığılması və yığılma sürətinin tədqiqində böyük ədədlər qanununun və stasionar təsadüfi proseslər üçün mərkəzi limit teoreminin nəticələrindən istifadə olunur; güclü və müntəzəm güclü qarışma əmsalları terminlərində kükrəntilərin asılılığının azalma sürəti üçün şərtlər öyrənilmişdir, dinamik sistemlərdə stoxastik ortalama prinsipinin metodları və ideyalarından istifadə olunmuşdur. Nisbətən geniş fərziyyələrlə yığılma üçün kafi şərtlərin çıxarılmasında şərti riyazi gözləmələr texnikası tətbiq olunmuşdur. Kükrəntilər avtoreqressiya – sürüşən orta prosesi əmələ gətirdiyi halda, asılı kükrəntilərlə S. a. prosedurları ətraflı öyrənilmişdir (bax, [4], [5]).

S. a.-nın mahiyyət etibarilə, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin bölməsidir və bu bölmədə trayektoriyaların faza fazasının ayrı-ayrı nöqtələrinə yığılan proseslərin xüsusi sinfi öyrənilir.

Əd.: [1] В а з а н М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [2] Цы п к и н Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968; [3] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [4] Ф о м и н В. Н., Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация, М., 1984; [5] К о р о с т е л е в А. П., Стохастические рекуррентные процедуры, М., 1984; [6] Цы п к и н Я. З., Основы информационной теории идентификации, М., 1984.

STOXASTİK APPROKSİMƏSİYƏ kəsilməz zamanda «стохастическая аппроксимация в непрерывном времени: stochastic approximation in continuous time» – kəsilməz müşahidələr üzrə naməlum regressiya funksiyasının sıfır və ya ekstremum nöqtələrinin tapılması metodudur.

$$Y(t, x) = R(x) + G(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

kəsilməz ölçmələri üzrə $R(x) = 0$ regressiya tənliyinin kökünü tapmaq tələb olunur, burada hər bir $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ qiymətlərində $G(t, x)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdir. Robbins – Monro proseduruna analoji olaraq x_0 kəmiyyətinin statistik qiyməti $X(t)$ kimi

$$X(t) = -a(t)Y(t, X(t)) \quad (1)$$

differensial tənliyinin həllini götürmək olar, burada $a(t)$ kəsilməz funksiyası

$$\int_0^\infty a(t) dt = \infty, \quad \int_0^\infty a^2(t) dt < \infty \quad (2)$$

şərtlərini ödəyir. Belə prosedur üçün, məs., aşağıdakı nəticə alınmışdır: əgər $a(t) = 1/t$ olarsa, $R(x)$ funksiyası monoton artarsa və ixtiyari $x \in \mathbb{R}$ üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u, x) du = 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, onda $t \rightarrow \infty$ olduqda $X(t) \rightarrow x_0$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

Ölçmə xətaləri $G(t, x)$ Qauss bəyaz küy tipli xətlər olduğu, yeni

$$G(t, x) = \sigma(x) \xi(t) \quad (3)$$

olduğu və $\xi(t)$ standart Viner prosesi olduğu hal öyrənilmişdir. Bu halda (1) tənliyi İto stoxastik differensial tənliyi kimi anlaşılmışdır. Baxılan halda aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər ölçmə xətaləri (3) şəklində olarsa, (2) münasibətləri ödənilərsə, $R(x)$ və $\sigma(x)$ kəsilməz funksiyalar olub, Lipsitzs lokal şərtini ödəyərsə və $x \neq x_0$ olduqda $R(x)(x - x_0) > 0$, hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_{t \geq 0, |x - x_0| < \delta} \sigma^2(t, x) < \infty$$

olarsa, onda (1) proseduru $t \rightarrow \infty$ olduqda x_0 nöqtəsinə sanki yəqin yığılır.

Robbins – Monro proseduru və (3) şəklində ölçmələr üçün diskret haldakı kimi $\sqrt{t}(X(t) - x_0)$ kəmiyyətinin paylanması, $R(x)$ və $\sigma(x)$ üzərinə bezi əlavə şərtlər qoyulmaqla, $t \rightarrow \infty$ olduqda Qauss paylanmasına yığılır (bax, [3]). Kifer – Volfovits kəsilməz proseduru üçün də yığılma və asimptotik normallıq haqqında analogi nəticələr vardır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Driml M., Nedoma J., в кн.: Transactions of the second Prague conference on information theory, Prague, 1960, p. 145–58; [2] Хасьяминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [3] Невельсон М. Б., Хасьяминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [4] Хасьяминский Р. З., «Проблемы передачи информации», 1972, т. 8, № 1, с. 81–91.

STOXASTİK APPROKSİMASIYA; modifikasiyalar «стохастическая аппроксимация; модификации; modifications of stochastic approximation» – Robbins – Monro proseduru və Kifer – Volfovits prosedurunun xassələrini yaxşılaşdıran, bu prosedurların dəyişilmiş modifikasiyaları üçün stoxastik approksimasiyadır. S. a.-nın ilk modifikasiyası Robbins – Monro prosedurunda $X(n)$ -in modifikasiyasıdır və bu modifikasiya sürətləndirilmiş yığılma proseduru adlandırılmışdır (bax, [1]). Bu modifikasiyanın ideyası ondan ibarətdir ki, əgər $X(n) - X(n-1)$ fərqi işarəsini saxlayırsa, onda addım vuruğu $a(n)$. Robbins – Monro prosedurunda olduğu kimi azalmır və o vaxta qədər sabit qalır ki, bu fərq öz işarəsini dəyişsin. Bu növ prosedurların $R(x) = 0$ reqressiya tənliyinin kökü x_0 -a sanki yəqin yığılması isbat olunmuşdur.

Robbins – Monro prosedurunun digər modifikasiyası trend olduğu hal üçündür, yeni reqressiya funksiyasının zamandan asılı olduğu və bu funksiyanın sıfır $x_0(n)$ -in $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$x_0(n+1) - (1 + 1/n) x_0(n) = O(n^{-b})$$

tənliyi ilə təyin olunduğu haldır, burada b – hər hansı müsbət sabitdir.

Robbins – Monro prosedurunun daha bir modifikasiyası

$$X(n+1) - X(n) = -\frac{a}{n} Y(n+1, X(n)), \quad a > 0 \quad (1)$$

proseduru ilə bağlıdır. Məlumdur ki, belə prosedur üçün, müəyyən şərtlər ödənildikdə, $\sqrt{n}(X(n) - x_0)$ kəmiyyəti riyazi gözləməsi sıfır bərabər, dispersiyası

$$\sigma^2(a) = a^2 S_0(2a\alpha - 1)$$

olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətdir, burada $\alpha = R'(x_0)$, $S_0 = \lim_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0} M G^2(n, x)$, $a = 1/\alpha$ olduqda

$\sigma^2(a)$ funksiyası özünün S_0/α^2 -na bərabər minimal qiymətini alır. Bununla əlaqədar olaraq, (1) əvəzinə, onun aşağıdakı

$$X(n+1) - X(n) = \frac{1}{n W(n)} \frac{Y(n+1, X(n) + c(n)) - Y(n, X(n) - c(n))}{2} \quad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan modifikasiyasına baxmaq təklif olunmuşdur, burada $c(n)$, n artdıqca sıfır yaxınlaşan hər hansı müsbət ardıcılıqdır, $W(n)$ – naməlum α kəmiyyətinin $\alpha \neq 0$ olduqda

$$W(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y(i+1, X(i) + c(i)) - Y(i+1, X(i) - c(i))}{2c(i)}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan statistik qiymətdir, $\alpha = 0$ olduqda isə $W(n) = 1$. İsbat olunmuşdur ki, bezi şərtlər ödənildikdə (2)

proseduru üçün $\sqrt{n}(X(n) - x_0)$ kəmiyyəti riyazi gözləməsi sıfır bərabər, dispersiyası $S_0 \alpha^{-2}$ olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətin (2) prosedurunun təkmilləşdirilmiş formaları da vardır (bax, [4]).

Robbins – Monro prosedurunun modifikasiyalannın ele sinfi məlumdur ki, bu modifikasiyalar $|x| \rightarrow \infty$ olduqda $R(x)$ reqressiya funksiyası üzərinə qoyulan şərtləri zəiflətmək məqsədinə xidmət edir (bax, [6] – [8]).

Kifer – Volfovits prosedurunun modifikasiyasına, $R(x)$ reqressiya funksiyasının x_0 maksimum nöqtəsi ətrafında sonlu s sayda törəmələrinin olduğu hal üçün baxılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, s böyük olduqca, bu modifikasiyanın yığılma sürəti böyük olur. Bundan başqa, Kifer – Volfovits prosedurunda $a(n)$ və $c(n)$ ardıcılıqlarına analogi, addım vuruqlarının optimal seçilməsi haqqında məsələ də öyrənilmişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] Kesten H., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 41–59; [2] Dupač V., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, № 6, p. 1695–1702; [3] Venter J. H., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 1, p. 181–90; [4] Fabian V., «Ann. Math. Statist.», 1968, v. 39, № 4, p. 1327–32; [5] Robbins H., Siegmund D., в кн.: Optimizing methods in statistics, N. Y. – L., 1971, p. 233–57; [6] Komlos J., Revész P., «Stud. sci. math. Hung.», 1973, v. 8, p. 329–40; [7] Невельсон М. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 383–88; [8] Fabian V., в кн.: Optimizing methods in statistics, N. Y. – L., 1971, p. 439–70.

STOXASTİK ARDICILLIQ « **стохастическая последовательность; stochastic / adapted sequence** » – ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ -da verilmiş $X = (X_n)_{n \geq 1}$ *tesadüfi kəmiyyətlər* ardıcılığıdır ki, X_n hər bir $n \geq 1$ üçün $\mathcal{A}_n$ – ölçüləndir, yəni X_n *tesadüfi kəmiyyətləri* uyğun uzlaşma xassəsinə (rus. – адаптированности свойство) malikdirlər, burada $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$, $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$, – σ – cəbrlərin azalmayan ailəsidir. Belə ardıcılıqların simvolik yazılışı üçün, əksər hallarda, $X = (X_n, \mathcal{A})_{n \geq 1}$ işarələməsindən istifadə olunur və bu işə X_n -in $\mathcal{A}_n$ -ə ölçülən olduğunu nəzərə çatdırmaq məqsədilə edilir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən S. a.-a tipik misallar Markov ardıcılıqları, martinqallar, semimartinqallar və başqalardır. Kəsilməz zaman halında (diskret zaman $n \geq 1$, kəsilməz $t \geq 0$ zamanı ilə əvəz olunduğu halda) uyğun $X = (X_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 1}$ obyektlər çoxluğu *stoxastik proses* adlanır.

STOXASTİK ASILI OLMAMAZLIQ « **стохастическая независимость; stochastic independence** » – bax. *Asılı olmamazlıq*.

STOXASTİK ATTRAKTOR « **стохастический аттрактор; stochastic attractor** » – aşağıdakı xassələri ödəyən, $\{S^t\}$ dinamik sisteminə nəzərən invariant, hamar çoxobrazlının diffeomorfizmlərinin birparametrlı qrupu olan qapalı A çoxluğudur: 1) $e_0 \supset A$ ətrafı vardır ki, $t > t_1$ olduqda $U_{t_1} = S^{t_1} U_0 \supset U_t$ və $\bigcap_t U_t = A$; 2) U_0 -da mütləq kəsilməz ixtiyari μ_0 ölçüsü üçün $\mu_t = S_t^* \mu_0$ ölçülər ailəsi μ_0 -dan asılı olmayan invariant, A -da toplanmış λ ölçüsünə yığılır; 3) $(A, \lambda, \{S^t\})$ dinamik sistemini qanşdırıcı (bax. *Qanşma*) sistemdir (bax, [1]).

S. a.-un cazibə oblastında Lebeq ölçüsünə nəzərən tipik trayektoriyaların statistikası limit ölçüsü λ ilə təyin olunur.

Əd.: [1] С и н а й Я. Г., в кн.: Нелинейные волны, М., 1979, с. 192–212.

STOXASTİK AYRILIŞ(1) statistik qiymətlərin « **стохастическое разложение оценок; stochastic expansion of estimators** » – bax, *Asimptotik ayrılış*(1) statistik qiymətlərin.

STOXASTİK BAZİS « **стохастический базис; stochastic basis** » – $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ filtrasiyası ilə təmin olunmuş, yeni azalmayan $(\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}, s \leq t)$ və sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{A}_s, t \geq 0)$, $\mathcal{A}$ -nın σ – altcəbrlərinin ailəsi ilə

verilmiş $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasıdır; simvolik olaraq aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}).$$

Əgər $\mathcal{A}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən tam σ – cəbr olarsa və hər bir $\mathcal{A}_t$ σ – cəbri $\mathcal{A}$ -nın sıfır $\mathbf{P}$ – ölçülü çoxluqlarını özündə saxlayarsa, $\mathcal{B}$ S. b.-i tam *stoxastik bazis* və ya adi şərtləri ödəyən S. b. adlanır. $\mathcal{B}$ S. b., tam olarsa,

adətən, $\mathcal{B}$ kimi işarə olunur və indeks $\mathbf{P}$ ölçüsü üzrə tamamlanmanı göstərir.

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Théorie des martingales, t. 2, P., 1980; [2] Л и п ц е р П. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986, с. 512; [3] Ж а - к о д Ж., Ш и р я е в А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK DIFFERENSİAL « **стохастический дифференциал; stochastic differential** » – dX intervalının *tesadüfi funksiyasıdır* və $\{\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}\}$ *stoxastik bazisində* baxılan, *semimartinqallar* sinfindən olan hər bir $X = (X_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$ prosesi üçün

$$(dX)I = X_t - X_s, \quad I = (s, t]$$

düsturu ilə təyin olunur. $ds = \{dX : X \in S\}$ S. d.-lar ailəsində additiv (A), multiplikativ (M) əməllər və vurma əməli (P) uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla daxil edilir:

$$(A) \quad dX + dY = d(X + Y),$$

$$(M) \quad (\Phi dX)(s, t) = \int_s^t \Phi dX$$

[– *stoxastik inteqraldır*, Φ isə $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axını ilə uzlaşmış lokal məhdud prosesdir],

$$(P) \quad dX \cdot dY = d(XY) - X dY - Y dX.$$

$\Delta = (s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t)$, – $(s, t]$ intervalının ixtiyari bölünüşü, l.i.p. – ehtimala görə limit, $|\Delta| = \max |t_i - t_{i-1}|$ olduqda,

$$(dX \cdot dY)(s, t) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

olur.

Stoxastik hesabda *tesadüfi funksiyaların «differensiallanma»* qaydası və ya İ t o d ü s t u r u mühüm yer tutur: əgər $X^1, \dots, X^n \in S$ və $f = f(x_1, \dots, x_n) \in C^2$ şərtlə verilən funksiya olarsa, onda Y prosesi

$$Y = f(X^1, \dots, X^n) \in S$$

şərtini ödəyir və

$$df(X^1, \dots, X^n) = \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f \cdot dX^i dX^j \quad (1)$$

düsturu doğrudur, burada ∂_i , – i -ci koordinat üzrə xüsusi törəmədir. Məs., əgər $X \in S$ olarsa, onda (1)-dən

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \\ f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d\langle X \rangle_s^c + \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s] \end{aligned} \quad (2)$$

düsturu alınır, burada X^c , X -in ayrılışında kəsilməz martinqal komponentidir, $\Delta Y_s = X_s - X_{s-}$.

(2) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s + \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s - \frac{1}{2} f''(X_{s-}) (\Delta X_s)^2],$$

burada $[X, X]$, X -in kvadratik variasiyasıdır.

Əd.: [1] Ito K., Watanabe S h., в кн.: Proceedings of the International Symp. SDE Kyoto. 1976, N. Y. - [a. o.], 1978, p. 1-30; [2] Г н х м а н Н. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

STOXASTİK DIFFERENSİAL HƏNDƏSƏ « STOХАСТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ; stochastic differential geometry » – təsadüfi proseslərin zaman üzrə cərəyanını hamar çoxoxobrazlılarda öyrənən və analizin qarışıq məsələlərini tədqiq edən riyazi fəndir. Hamar çoxoxobrazlıda xarakteristikaları öz strukturu ilə bağlı təsadüfi proseslərə baxmaq təbii; ilk əvvəl diffuzion proseslər və onların ümumiləşmələri nəzərdə tutulur. Hamar çoxoxobrazlılarda diffuzion proseslərin ilk konstruksiyaları K. İosida tərəfindən [1]-də semiqruplar nəzəriyyəsinin metodları ilə, K. İto tərəfindən [2]-də stoxastik differensial tənliklərin köməyi ilə verilmişdir. Stoxastik differensial tənliklər metodu Q. Mak-kin tərəfindən [3]-də inkişaf etdirilmişdir. S. d. h.-nin problematikası, əsas etibarilə (M. Kasın, [4]-dəki işlərindən başlayaraq, bax. həm də [5]), çoxoxobrazlı həndəsənin diffuzion proseslərin asimptotikası və bu proseslərin uyğun differensial operatorlarının spektral xassələri ilə əlaqəsinə əsaslanmışdır. S. d. h.-nin inkişafına diffuzion proseslərin keçid ehtimalllarının hamarlılığının öyrənilməsinə yeni yanaşma (və «S. d. h.» terminini) təklif etmiş Malyavenin işləri təkan vermiş oldu (bax, [6]). Sonsuzölçülü hamar çoxoxobrazlılarda analizin inkişafı ilə əlaqədar olaraq S. d. h. metodları sonsuzölçülü hala keçirilir (bax, [7] – [9]). Bu halda bu metodlar hamar ölçülərin və differensial tənliklərin həllərinin qurulmasında xüsusi rol oynayır, belə ki, sonsuzölçülü halda Lebeq ölçüsü kimi ölçünün olmaması səbəbindən klassik metodlar yaramır.

Sonra diffuzion təsadüfi proseslər, stoxastik differensial tənliklər və hamar çoxoxobrazlılarda differensial operatorlarla əlaqədar əsas konstruksiyalar təsvir olunur. Bu təsvirdə hamar çoxoxobrazlıların differensial həndəsəsinin koordinatsız müasir dili istifadə olunur, bu dil isə özünün kompaktlığı və dim. – ölçüdən asılı olmamalarına görə çox münasibdir (bax, [10]).

I. Hamar çoxoxobrazlıların differensial həndəsəsinin əsas anlayışları.

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ – həqiqi Banax (sonluölçülü və ya sonsuzölçülü) fəzaları, $L_k(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, $\mathfrak{B}_1$ -dən $\mathfrak{B}_2$ -yə kəsilməz k – xətli inikasların fəzası, $\mathfrak{B}^* = L_1(\mathfrak{B}, \mathbb{R})$, $\langle x, \varphi \rangle$, $x \in \mathfrak{B}$, $\varphi \in \mathfrak{B}^*$ elementlərinin kanonik cütləşməsidir (rus. спаривание).

G , $\mathfrak{B}_1$ -də oblast olsun. Əgər $f: G \rightarrow \mathfrak{B}_2$ inikasının $\|h\| \rightarrow 0$ olduqda $f(x+h) - f(x) - f'(x)h = o(\|h\|)$ xas-

səsini ödəyən törəməsi – $f'(x) \in L_1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ varsa, f inikası $x \in G$ nöqtəsində differensiallandı, deyilir. Yüksək tərtib törəmələr

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x) \in L_k(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$$

düsturu ilə ardıcıl təyin olunur. f inikasının G -də k – tərtib ($k=0, 1, 2, \dots, n$) kəsilməz törəmələri varsa, $f \in C_n(G, \mathfrak{B}_2)$ münasibəti doğrudur, deyilir; $n \geq 2$ olduqda C_n sinfinin inikasları, qısaca, hamar inikaslar adlanır.

Hamar (həqiqi) X çoxoxobrazlısı hamar struktur təyin olunmuş, yeni təbii xassələrə malik olan hamar funksiyalar ehtiyatı göstərilmiş ayrılan topoloji fəzadır, Bu struktur $\mathfrak{B}$ Banax fəzasının $G_\alpha^0 \subset \mathfrak{B}$, $\varphi_\alpha: G_\alpha \rightarrow G_\alpha^0$ ətraflarına homeo-

morf olan açıq çoxluqların (kartların) $X = \bigcup_\alpha G_\alpha$ sistemini

örtən $\{G_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlası vasitəsilə daxil olunur və bu atlas model atlas adlanır. X -in dim. – ölçüsü tərifə görə $\mathfrak{B}$ -nin dim. – ölçüsüdür. $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^n$ olduqda, X hamar çoxoxobrazlısı sonluölçülüdür. $\varphi_\alpha: x \rightarrow x_\alpha$ homeomorfizmlərinin (koordinat inikasları) uzlaşmış olduğu fərz olunur, bu isə o mənada anlaşılır ki, calayan $F_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: G_\beta^0 \rightarrow G_\alpha^0$ ($G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$) inikasları hamar inikaslardır. Əgər $\tilde{X}$ atlası $(\tilde{G}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ və modeli $\tilde{\mathfrak{B}}$ olan hamar çoxoxobrazlıdırsa,

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: G_\alpha^0 \rightarrow \tilde{G}_\alpha^0 f(G_\alpha) \cap \tilde{G}_\alpha \neq \emptyset$$

inikasları hamarlılıq xassəsinə malik olarlarsa, onda $f: X \rightarrow \tilde{X}$ inikası hamar inikas adlanır.

Sonluölçülü halda, model fəzada bazis seçərək, hər bir G_α kartında koordinat inikası φ_α -nın köməyi ilə ayrılmalı koordinatlar daxil edərək, kartların kəsişmələrində calayan inikasların köməyi ilə müxtəlif koordinat sistemləri arasında əlaqəni göstərmək mümkündür.

Vektor laylaşması $\pi = (\pi, X, \mathcal{E})$ hamar X çoxoxobrazlısı ilə (vektor laylaşmasının bazası ilə), $\mathcal{E}$ vektor laylarının total fəzası və hamar $\pi: \mathcal{E} \rightarrow X$ inikası (proyeksiyası) ilə təyin olunur. Əgər $\mathcal{E} = X \times E$ və $\pi: x \times E \mapsto x$ olarsa, vektor laylaşması trivial vektor laylaşması (lay ilə – Banax fəzası E ilə) adlanır. Ümumi halda vektor laylaşmasında lokal trivialliq tələbi qoyulur: X bazası kartları üçün $\pi_\alpha = \pi|_{G_\alpha}$, $\mathcal{E}_\alpha = \pi^{-1}(G_\alpha)$ layları triviallaşa bilən atlasla malikdir (triviallaşma o mənada anlaşılır ki, laylar üzrə təsir edən triviallayıcı $\Phi_\alpha: \mathcal{E}_\alpha \rightarrow G_\alpha^0 \times E$ homeomorfizmləri (trivializasiyaları) təyin olunmuşdur: $\Phi_\alpha(x) = \Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}: \mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x) \rightarrow \varphi(x) \times E$). Bu halda fərz olunur ki, calayıcı $S_{\varphi\beta}(x_\beta) = \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta^{-1}(x): E \rightarrow E$ inikasları xətti inikaslardır və $\mathcal{E}_x$ laylarına uzlaşdırılmış surətdə E Banax fəzasının strukturu (vektor laylaşmasının tipik layını) daxil edirlər. Vektor laylaşmasının $f: \pi \rightarrow \tilde{\pi}$ inikası hər bir layda xətti olan və hər bir lay üzrə təsir edən $\Phi: \mathcal{E}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_\varphi(x)$, $\varphi: X \rightarrow \tilde{X}$, $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ hamar inikaslarının (φ, Φ) cütüdür.

Hər bir hamar X çoxobrazlısına onun toxunan layı $\tau_X = (\tau_X, X, T_X)$ uyğundur və onun tipik layı üçün $\mathfrak{B}_X = X$ -in modelidir və $S_{\alpha\beta} = F'_{\alpha\beta}$ isə calayıcı inikaslardır. Bu halda çoxobrazlıların hamar $f: X \rightarrow X$ inikasına toxunan layların törəmə inikası $Tf: TX \rightarrow T\tilde{X}$, $Tf = (f, f')$, $Tf|_{T_x X} = f'(x): T_x X \rightarrow T_{f(x)} \tilde{X}$ uyğun olur. Tipik layı $\mathfrak{B}^*$, calayan inikaları $F_{\alpha\beta}^*$ olan $\tau_X^* = (\tau_X^*, X, T^*X)$ laylaşmasına kotoxunana laylaşma deyilir; tipik layları $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ fəzalarının yarıxətli inikaları ilə yaranan laylaşmalara tenzor laylaşmalar deyilir.

(π, X, ε) vektor laylaşmasının kəsiyi - ele $z: X \rightarrow \varepsilon$ hamar inikasıdır ki, $z(x) \in \varepsilon_x$. Trivial $(\pi, X, X \times E)$ laylaşmasının kəsiyi özünün baş hissəsi $\hat{z}: X \rightarrow E$, $z(x) = x \times \hat{z}(x)$ ilə təyin olunur. Lokal trivial vektor laylaşmasının kəsiyi z özünün $z_\alpha = z|_{G_\alpha}$ lokalizasiyalanna baxılmaqla və Φ_α -nın trivializasiyasının köməyiylə, $\hat{z}_\alpha \circ F_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta$ əlaqələri ilə (çevirmələrin tenzor qanunu) onun $\hat{z}_\alpha: G_\alpha^\emptyset \rightarrow E$ baş hissələrinə keçilməklə öyrənilir. Vektor laylaşmanın kəsikləri meydanlar; toxunan üçün vektor meydanlar; tenzorlar üçün tenzor meydanlar adlanır. π vektor laylaşmalarının kəsiklərinin fəzası $\sigma(\pi)$ ilə işarə olunur.

Əgər hamar X çoxobrazlısında Riman tenzoru - $T_x X: (\varphi, \psi)_x = \langle \varphi, g(x) \psi \rangle$ toxunanlar fəzasında bixətli formanın müsbətliyi mənasında cırlaşmayan xətti $g(x): T_x X \rightarrow T_x^* X$ inikasılarının meydanı təyin olunmuşdursa, X Riman hamar çoxobrazlısı adlanır. Bu forma $T_x X$ toxunanlar fəzalarında Evklid strukturunu (sonsuzölçülü halda Hilbert strukturu) və X çoxobrazlısının metrikasını təyin edir. Qeyd etmək lazımdır ki, sonluölçülü Riman çoxobrazlısında standart ölçü - ν həcmi mövcuddur.

Vektor laylaşması π -nin əlaqəliliyi vektor meydanları $z \in \sigma(z)$ boyunca kəsiklərin kovariant differensiallanma xətti əməli - $\nabla_z: \sigma(\pi) \rightarrow \sigma(\pi)$ ilə təyin olunur. τ_X toxunan laylaşmasının əlaqəliliyi (X -in xətti əlaqəliliyi) tenzor laylaşmalarının əlaqəliliyini birqiyəmetli olaraq ele təyin edir ki, ∇_z əməli tenzor vurma əməlinə nəzərən differensiallanma əməli olur. Vektor laylaşmalarının əlaqəliliyini lokal əmsallar sisteminin köməyiylə təsvir etmək olur, bu halda da əmsallar kalibrleyici

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(F'_{\beta\alpha}(x_\alpha)h, S_{\beta\alpha}(x_\alpha)e) = \\ = S_{\beta\alpha}(x_\alpha) \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha(h, e) - S'_{\beta\alpha}(x_\alpha)(h, e) \end{aligned}$$

çevirmələri ilə əlaqəli olan $\Gamma_{x_\alpha}^\alpha: \mathfrak{B} \times E \rightarrow E$ bixətli inikalarının ayrı-ayrı trivializasiyalarına uyğun əmsallardır.

e meydanının kovariant törəməsinin baş hissəsi

$$(\nabla_z \hat{e})_\alpha = \hat{e}'_\alpha \hat{z}_\alpha + \Gamma^\alpha(\hat{z}_\alpha, \hat{e}_\alpha)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər $\nabla_{x'} e = 0$ olarsa, e meydanı $x: [0, 1] \rightarrow X$ əyrisi boyunca paralel meydan adlanır. Hər bir e_α lokalizasiyası üçün paralel meydanın baş hissəsi

$$\frac{d}{dt} \hat{e}_\alpha(x_\alpha(t)) + \Gamma_{x_\alpha(t)}^\alpha(x'(t), \hat{e}_\alpha(x(t))) = 0$$

xətli differensial tənliyini ödəyir. Bu tənliklərdən əyrilə boyunca tenzorların paralel köçürməsinin xətti operatorlarının ailəsi $\tau_x(t, s): \varepsilon_{x(s)} \rightarrow \varepsilon_{x(t)}$ təyin olunur, bu ailə $\tau_x(t_1, t_2) = \tau_x(t_1, t) \tau_x(t, t_2)$ evolyusionluq xassəsinə malik olub, tenzor münasibətlərini dəyişmir.

Çoxobrazlıda əlaqəliliyə malik x əyrisi boyunca X' toxunanları meydanı paralel meydan olarsa, x geodeji əyrilə adlanır. Hər bir $x_0 \in X$ nöqtəsi və $z_0 \in T_{x_0} X$ istiqaməti heç olmasa bir lokal geodeji əyrini birqiyəmetli təyin edir, bu əyrini ixtiyari $G_\alpha \ni x_0$ kartı üçün

$$x''_\alpha(t) + \Gamma_{x_\alpha(t)}^\alpha(x'_\alpha(t), x'_\alpha(t)) = 0,$$

$$x_\alpha(0) = x_{0\alpha}; x'_\alpha(0) = z_{0\alpha}$$

Koşi məsələsini həll edərək hesablamaq olur.

Riman çoxobrazlısında Riman tenzoru ixtiyari əyrilə boyunca paralel olan əlaqəlilik (Levi - Çivita əlaqəliliyi) birqiyəmetli təyin olunur. Bu əlaqəlilik üçün iki nöqtəni birləşdirən ən qısa əyrilər geodeji əyrilərdir.

Sıfırın hər hansı $Q_x \subset T_x X$ ətrafında təyin olunmuş və qarşılıqlı birqiyəmetli $\exp_x: Q_x \rightarrow X$, $x_0 \mapsto x(1)$ inikası eksponensial inikas adlanır. Bu inikas $T_x X$ toxunun fəzasının sıfırdan çıxan şüalarının parçalarını $x \in X$ nöqtəsindən çıxan geodeji parçalara çevirir.

Skalyar hamar $u: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ funksiyası üçün differensial əməllər aşağıdakı kimi təyin olunur. $u'(x) \in T_x^* X$ olduğundan, hər bir $a \in \sigma(\tau_x)$ vektor meydanına 1-ci tərtib differensiallama əməli uyğun olur, yeni $\nabla_\alpha u(x) = \langle a(x), u'(x) \rangle = \langle a(x), \nabla \rangle u(x)$, burada ∇ - differensiallama əməlidir və $T_x^* X$ elementinin formal xassələrinə malikdir.

$X = \mathfrak{B}$ vektor fəza. $u^*(x) \in L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ olduğu halda, 2-ci tərtib elliptik differensiallama əməlini aşağıdakı kimi təyin etmək olur: H - Hilbert fəzası (sonsuzölçülü halda $H = \mathbb{R}^n$),

$A(x) \in L(H, \mathfrak{B})$, $B(x) = A(x)A^*(x) \in L(\mathfrak{B}^*, \mathfrak{B})$ olsun, onda

$$I_{\mathfrak{B}}(B, u)(x) = \langle B(x) \nabla, \nabla \rangle u(x) = \text{tr} A^*(x) u^*(x) A(x)$$

($\text{tr} K = \sum_j \langle K e_j, e_j \rangle$, burada $\{e_j\}$ - H -da ortobazisdir).

Xətli əlaqəliliyə malik hamar X çoxobrazlıları üçün ikinci törəmələr meydanı $\nabla^2 u(x) \in L(T_x X, T_x^* X)$ təyin olunur, bu meydanın baş hissəsi hər hansı trivializasiyada

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi, (\nabla^2 u)_\alpha(x_\alpha) \psi \right\rangle = \\ & = \left\langle \varphi, u^*(x_\alpha) \psi \right\rangle - \left\langle u'(x_\alpha), \Gamma_{x_\alpha}^\alpha(\varphi, \psi) \right\rangle \end{aligned}$$

düsturu ilə verilir.

2-ci tərtib elliptik operatorun kovariant analoqu $B(x) = A(x)A^*(x)$, $A(x) \in L(H, T_x X)$ olduqda aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\begin{aligned} l_X(B, u) &= \text{tr } B(x) \nabla^2 u(x), \\ l_X(B, u)x_\alpha &= \text{tr } A_\alpha^*(x_\alpha) u^*(x_\alpha) \hat{A}'_\alpha(x_\alpha) - \\ & - \left\langle u'(x_\alpha), \text{tr } \Gamma_{x_\alpha}^\alpha(\hat{A}'(x_\alpha) \cdot \hat{A}(x_\alpha)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Əgər X Riman çoxobrazlısıdır və toxunan laya Hilbert fəzası H -in strukturu Riman metrikası vasitəsilə daxil olmuşdursa, onda $A = I$ götürmək olar. Bu halda alınan

$$\nabla_X u = L_X(I, u) = \text{tr } \nabla^2 u$$

operatoru Laplas–Beltrami operatoru adlanır.

II. Diffuzion proseslər və differensial tənliklər. $\zeta(t)$ – hamar X çoxobrazlısında kəsilməz bircins Markov prosesi olsun. Bu prosesin xarakteristik operatoru

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{G \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x f(\zeta(\tau_G)) - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_G}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada τ_G – $\zeta(t)$ -nin $x = \zeta(0)$ nöqtəsini özündə saxlayan G ətrafından birinci dəfə kənara çıxdığı andır. $C_2(X)$ prosesin təyin olunma əlaqəsi $\mathcal{Q}_\alpha$ -ya daxil olarsa, proses diffuzion proses adlanır (bax, [11]). Bu halda

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(B, a, c) = l_X(B)/2 + \langle a, \nabla \rangle + c$$

– diffuziya əmsalı $B(x) \in L(T_x X, T_x^* X)$, aparı əmsalı $a(x) \in T_x X$, qırıqlı əmsalı $c(x) \leq 0$ olan ikinci tərtib elliptik operatorudur. Bu operator $C_2(X)$ -də $\tilde{\mathfrak{A}}$ doğuran operatorunun daralmasıdır, $\tilde{\mathfrak{A}}$ – $C(X)$ fəzasında $U_t: f \mapsto \int_X f(y) P(t, x, d y)$ daraldıcı semigrupunun Markov prosesi $\zeta(t)$ ilə doğurduğu operatorudur. Qeyri – bircins $\zeta(t)$ prosesi üçün xarakteristik operatorun əmsalları t zaman parametrindən asılıdırlar. Bu proses $C(X)$ fəzasında xətti inikasların ikiparametrlili evolyusion ailəsini, yeni

$$\begin{aligned} U(t, \tau)f(x) &= \mathbf{M}\{f(\zeta(\tau)) | \zeta(t) = x\} = \\ &= \int_X f(y) P(t, \tau, x, d y) \end{aligned}$$

inikaslar ailəsini doğurur:

$$U(t, \tau) = U(t, s)U(s, \tau), \quad t < s < \tau.$$

Bu halda $u(t, x) = U(t, \tau)f(x)$ düsturu

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u(t, x) = 0, \quad u(\tau, x) = f(x), \quad t \leq \tau \quad (1)$$

parabolik tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllini ifadə edir: (1) tənliyi verilən diffuzion prosesin Kolmogorov tərs düsturu adlanır (ümumiyyətlə, bu həll ümumiləşmiş haldır, belə ki, onun hamarlılığı haqqında əlavə fərziyyələr edilməlidir). 2-ci tərtib differensial tənliklər üçün bir sıra digər məsələlərin həlləri diffuzion proseslərin bəzi funksionallarının orta qiymətləri ilə ifadə olunur. Məs. φ potensialı haqqında bəzi fərziyyələrlə

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u(t, x) + \varphi(x)u(t, x) &= 0, \\ u(\tau, x) &= f(x) \end{aligned}$$

– Koşi məsələsinin həlli

$$u(t, x) = \mathbf{M} \left\{ e^{\int_t^\tau \varphi(\zeta(s)) ds} f(\zeta(\tau)) | \zeta(t) = x \right\}$$

Feynman – Kas düsturu ilə verilir. Bu düstur $\mathfrak{A} + \varphi(x)$ operatorunun spektral xassələrinin (bax, [5]), həm də parabolik məsələlərin həllərinin asimptotik xassələrinin araşdırılmasında mühüm rol oynayır. Elliptik və parabolik sərhəd məsələlərinin həlləri üçün də düsturlar vardır.

Əksinə, əgər $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u = 0$ tənliyi üçün Koşi məsələsi

$C_2(X)$ sinfində korrekt olarsa, onda bu məsələ

$$U(t, \tau): f \mapsto \int_X f(y) P(t, \tau, x, d y)$$

xətti operatorlarının evolyusion ailəsini doğurur, burada $P(t, \tau, x, \cdot)$ funksiyası X -də Markov prosesinin keçid ehtimalının xassələrinə malikdir. Sonluölçülül halda əmsalların hamarlılığı üçün müəyyən tələblər qoyulduqda və diffuziya əmsalının cırlaşmayan olduğu halda baxılan məsələnin korrektiliyi klassik analitik metodlarla müəyyən olunur (bax, [1]). Diffuzion prosesin asılı olmadan qurulması cırlaşmayanlıq və sonluölçülülük şərtlərindən istifadə etmədən differensial tənliklərin həllinə gətirir.

III. Stoxastik differensial tənliklər hamar çoxobrazlılarda.

Diffuzion proseslərin geniş sinfinin birbaşa qurulması İto stoxastik differensial tənliklərinin köməyi ilə həyata keçirilir. $w(t)$ ($t \geq 0$) – separabel həqiqi Hilbert fəzası H (sonluölçülül halda $\mathbb{R}^n$ fəzası ilə) ilə kanonik əlaqəli Viner prosesi, yeni parametrləri $\mathbf{M}w(t) = 0$, $\mathbf{M}[w(t + \tau) - w(t), \varphi]^2 = \tau \|\varphi\|^2$ olan və asılı olmayan artımları Qauss təsadüfi prosesi olsun [dim $H = \infty$ olduqda $w(t)$ -nin trayektoriyaları hər hansı genişlənmiş $H_- \supset H$ fəzasında sanki yəqin yerləşən proses]. $\mathcal{B}$ Hilbert fəzasında (məsələn, $\mathbb{R}^n$ -də) stoxastik differensial tənliklər $a(t, x) \in \mathcal{B}$, $A(t, x) \in L_2(H, \mathcal{B})$ meydanları ilə (ümumiyyətlə, zamandan asılı meydanlarla) təyin olunur, burada $L_2(H, \mathcal{B})$ – Hilbert – Şmidt operatorları fəzasıdır. Bu tənliklər

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + A(t, \zeta(t))dw(t)$$

şəklində və ekvivalent integral formada –

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{t_0}^t a(s, \zeta(s)) ds + \int_{t_0}^t A(s, \zeta(s)) dw(s)$$

şəklində yazılır, burada ikinci toplanan – İto stoxastik integralıdır. x üzrə əmsallar klassik kəsilməzlik və Lipsits şərtlərini ödədiyi halda, bu stoxastik differensial tənliyin başlanğıc qiyməti qeyri – antisipativ ζ_0 üçün stoxastik ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganə qeyri – antisipativ həll – $\mathfrak{B}$ -də diffuzion proses olan $\zeta(t)$ həlli vardır ($\dim \mathfrak{B} = \infty$ halında bax, [12]); bu prosesin aparı əmsalı $a(t, x)$, diffuziya əmsalı $B(t, x) = A(t, x) A^*(t, x)$ -dir.

Modeli Hilbert fəzası $\mathfrak{B}$ olan əlaqəli hamar X çoxobrazlısında stoxastik differensial tənliklər aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$d\zeta(t) = \exp_{\zeta(t)} \{ a(t, \zeta(t)) dt + A(t, \zeta(t)) dw(t) \},$$

burada $a(t, x) \in T_x X$, $A(t, x) \in L_{12}(H, T_x X)$ – aparı və diffuziya əmsallarının hamar meydanlarıdır. Əmsalların daşıyıcıları qeyd olunmuş G kartında olarlarsa, tənlik lokal tənlik olur. Bu halda $\zeta_\alpha(t) = \varphi_\alpha(\zeta(t))$ prosesi $C_\alpha^q \subset \mathfrak{B}$ ətrafından kənara çıxmır və

$$d\zeta_\alpha(t) = \{ \hat{a}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))) \} dt + \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyini ödəyir.

Bu tənlik calaqlanan çevirmələrə nəzərən invariant olur, bu şərtlə ki, stoxastik differensiallar İto düsturu üzrə çevrilsinlər, əlaqə əmsalları isə kalibrləmə çevirmələri üzrə çevrilsinlər. Beləliklə, lokal stoxastik differensial tənliklər nezeriyyəsi vektor fəzada uyğun nezeriyyəyə ekvivalentdir. Ümumi halda tənliyin həllinin qurulması – kiçik zaman intervallarında ardıcıl lokalizasiya yolu ilə, alınmış lokal tənliklərin həllərinin calaqlanması və zaman intervalının sıxlaşan bölgüləri üzrə limite keçid vasitəsi ilə aparılır. Bu halda X çoxobrazlısında stoxastik axın, yeni $V_\zeta(\tau, t) = V_\zeta(\tau, s) V_\zeta(s, t)$, $t < s < \tau$ evolyusion xassəsinə sanki yəqin malik olan $V_\zeta(\tau, t): \zeta(t) \rightarrow \zeta(\tau)$ inikaslar ailəsi yaranır. Bu ailənin başlanğıc qiymətlərinə və ya hər hansı parametrlərə nəzərən hamarlılığının öyrənilməsi üçün ilkin differensial tənlikdən ardıcıl formal differensiallanma yolu ilə alınan – onun differensial davam olunmaları yolu ilə – stoxastik differensial tənliklərinə baxılır. Bu tənliklər artıq ilkin X çoxobrazlısındakı tənliklər deyil, onun toxunan TX laylaşmasının total fəzalarında tənliklərdir və bunların iterasiyalandır.

V stoxastik axını funksiyalar fəzası $C(X)$ -də xətti inikasların evolyusion ailəsini doğurur. Onun doğuran operatoru

$$\mathfrak{A}(AA^*, a, 0)u = I_X(AA^*, u)/2 + \langle a, \nabla \rangle u$$

düsturu ilə ifadə olunur.

IV. Stoxastik tənliklər laylaşmalarda. Tenzorların diffuziyası.

Əgər hamar çoxobrazlıda əlavə struktur varsa, onda bu strukturla uzlaşan konstruksiyalara baxmaq təbii. Stoxastik differensial tənliklər üçün belə uzlaşma əmsalların uyğun xassələri ilə təyin olunur. Bu mənada vektor laylaşmalarının total fəzasında əmsalları laylarda xətti olan və proyeksiyası ilə bazaya kommuta-

siya olunan stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Hamar çoxobrazlılarda stoxastik differensial tənliklərin differensial davamları, məs., iterasiya olunmuş toxunan laylaşmalarda, bu xassələrə malikdirlər. Bu xassələrə malik olan stoxastik differensial tənlik, X bazasında proyeksiyası diffuzion $\zeta(t) = \pi\eta(t)$ prosesi olan, total $\mathcal{E}$ fəzasında $\eta(t)$ diffuzion prosesini doğurur. Uyğun $V_\eta(\tau, t): \eta(t) \rightarrow \eta(\tau)$ təsadüfi axını laylarda xəttidir və $\zeta(t)$ prosesi üçün operator multiplikativ funksionalının xassələrinə malikdir. Bu axının $\eta_0 \in \mathcal{E}_{\zeta(t_0)}$ tenzoruna təsiri $\eta(t) = V_\eta(t, t_0)\eta_0$ təsadüfi evolyusiyasını – tenzorların diffuziyası adlanan evolyusiyanı – doğurur (bax, [13], [14], [7]). Tenzorların diffuziyasının xüsusi halı laylaşma bazası üzərində $\zeta(t)$ diffuzion prosesinin trayektoriyası boyunca tenzorları paralel köçürmə prosesidir. Konkret trivializasiyanın seçilməsi ilə bağlı lokalizasiya olduqda, bu proses ələ sistemlə təsvir olunur ki, baza üzərində yuxarıda qeyd olunmuş tənlik aşağıdakı tənliklə tamamlanır:

$$\begin{aligned} d\zeta_\alpha(t) &= [\hat{a}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) - \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{tr} \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)))] dt + \\ &+ \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) dw(t); \\ d\hat{\eta}_\alpha(t) + \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (d\zeta_\alpha(t), \hat{\eta}_\alpha(t)) &= \\ = \operatorname{tr} \{ \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot \hat{\eta}_\alpha(t)) - \\ &- \Gamma_{\zeta_\alpha(t)}^\alpha (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot (\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)) \cdot \hat{\eta}_\alpha(t))) \} \end{aligned}$$

və $A=0$ olduqda vektor meydanı ilə təyin olunan trayektoriya boyunca paralel köçürtməyə getirilir.

Tenzorların diffuziya prosesinə uyğun vektor laylarının kəsiklər fəzasında xətti evolyusion ailəsi müvafiqdir, bu ailə vektor laylarının kəsiklərində parabolik tənliklərin həlləri üçün Feynman – Kas düsturunun ümumiləşmiş forması olan düsturla təyin olunur və bu həllər parabolik sistemin lokalizasiyaları üçün kovariant törəmələrə çevilir.

Üzərində hamar strukturla uzlaşdırılmış qrup strukturu təyin olunmuş hamar çoxobrazlı Li qrupu adlanır. Li qrupunda əmsalları qruplarla yerindəyişmələrə nəzərən invariant stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Belə tənliklərin həlləri stoxastik multiplikativ integralın xüsusi konstruksiyası vasitəsilə ifadə olunur (bax, [3], [8]).

V. Hamar ölçülər. Kolmoqorov düz düsturu.

$\mathfrak{M}(X)$ – hamar X çoxobrazlısı üzərində heqiqi sonlu ölçülərin vektor fəzası olsun. Bu fəzanın elementləri hamar funksiyalar fəzası $C_n(X)$ -də xətti kəsilməz $\langle \varphi, \mu \rangle = \int_X \varphi(x) \mu(dx)$

funksionalları doğurur. Bu isə funksiyalar üzərində müxtəlif eməlləri ölçülər üçün də təyin etməyə imkan yaradır, məs., $\langle \nabla_z \varphi, \mu \rangle = - \langle \varphi, \nabla_z \mu \rangle$ vektor meydanı boyunca kovariant differensiallama: $\mu \mapsto \nabla_z \mu$ eməlini. Əgər $\nabla_z \mu$ ölçüsü vardırsa və μ -yə nəzərən mütəq kəsilməzdirsə, onda $\rho(\mu, z, x) = (\nabla_z \mu)(dx)/\mu(dx)$ sıxlığı μ -nün z boyunca loqarifmik törəməsi adlanır. Hamar loqarifmik törəməsi olan

ölçüyə hamar ölçü deyilir. Sonluölçülü Riman çoxobrazlısında hamar ölçü Riman ölçüsünə nəzərən hamar $\rho(x) = \mu(dx)/\nu(dx)$ sıxlığına malik ölçüdür.

Hamar ölçülər çoxluğu vektor fəzalarında Qauss ölçülərini özündə saxlayır və bu çoxluq bezi hamar inikaslıq şərtlərinin ödənilməsinə nəzərən və hamar sıxlıqla inteqrallanmaya nəzərən invariantdır.

Markov prosesi $\zeta(t)$ ölçülər fəzası $\mathfrak{M}(X)$ -də

$$U^*(t, \tau): \mu \mapsto \int_X \mu(dx) P(t, \tau, x)$$

inikaslarının xətti evolyusion ailəsini doğurur və bu ailə funksiya-fəzasında evolyusion $U(t, \tau)$ ailəsinə nəzərən qoşma ailədir.

Diffuzion proses üçün bu ailənin doğuran operatoru $\mathfrak{A}$ -ya nəzərən qoşma operatorudur və hamar ölçülər üzərində daralma xüsusiyyəti kimi 2-ci tərtib differensial $\mathfrak{A}^*$ operatoruna malikdir. Bu halda $\mu(t) = U^*(t_0, t) \mu_0$ ölçüsü

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mathfrak{A}^*(t) \mu, \quad \mu(t_0) = \mu_0 \quad (2)$$

tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllidir; (2) baxılan diffuzion prosesin Kolmoqorov düz tənliyi (və ya Fokker-Plank tənliyi). $P(t_0, t, x, \cdot)$ uyğun olaraq, bu tənliyin fundamental həlli adlanır. Sonluölçülü halda baxılan tənliyi ehtimalın keçid sıxlığı terminləri vasitəsilə yazmaq olar:

$$p(t_0, t, x, y) = P(t_0, t, x, dy) / \nu(dy).$$

Göstərilən həllər, ümumiyyətlə, ümumiləşmiş həllərdir və bunların hamarlıq şərtlərini aydınlaşdırmaq da tələb olunur. Keçid ehtimallarının hamarlığının tədqiqinə ehtimali yanaşmanı P. Mallyaven [6]-də göstərmişdir. Bu yanaşma sonradan tədqiqatların geniş axınına səbəb oldu, bu yanaşma ona əsaslanır ki, stoxastik tənlik Qauss ölçülü fəzanın bu tənliyin həllinin aid olduğu çoxobrazlıya inikasını doğurur; bu inikas müəyyən mənada hamardır və buna görə də, Qauss ölçüsünün obrazı hamar ölçüdür.

VI. Stoxastik differensial həndesəyə N. N. Çentsov və S. Amarinin inkişaf etdirmiş olduqları statistik nəticələr nəzəriyyəsinə differensial həndəsə metodlarının tətbiqi üzrə araşdırmaları da aid etmək təbii (bax, [18], [19]).

Əd. [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Ито К., «Nagoya Math. J.», 1950, v. 1, p. 35–47; [3] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [4] Кас М., «Amer. Math. Mon.», 1966, v. 73, p. 1–23; [5] Молчанов С. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 3–59; [6] Malliavin P., Géométrie différentielle stochastique, Montreal, 1978; [7] Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 3, с. 95–142; [8] Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И., Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия, К., 1989; [9] Elworthy K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Camb. – [a. o.], 1982; [10] Лент С., Введение в теорию дифференциальных многообразий, пер. с англ., М., 1967; [11] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [12] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [13] Ито К., в кн.: Proceedings International Congress of Mathematicians, [Uppsala], 1963, p. 536–39; [14] Дынкин Е. Б., «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 6, с. 1264–67; [15] Bismut J.-M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 56, S. 469–505; [16] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения

и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [17] Далецкий Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 87–111; [18] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [19] Amari S., «Lect. Notes in Statist.», 1985, v. 28, p. 1–290.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK « STOXAСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; stochastic differential equation, SDE » – stoxastik differensial və stoxastik inteqrallardan istifadə edən, təsadüfi proseslərin seçimi funksiyaları üçün tənlikdir. Ən sadə S. d. t-lər Viner prosesi üzrə stoxastik differensiallardan istifadə edir. $X(t)$, – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında $t \in \mathbb{R}_+$ qiymətlərində təyin olunmuş, $\mathbb{R}^m$ fəza fəzasında təsadüfi proses, $\mathcal{A}_t$, – $X(s)$, $s \leq t$ -in doğurduğu σ – cəbr, $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – axın olsun. Fərz olunur ki, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ -dən $\mathbb{R}^m$ -ə $a(t, x)$ və $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ -dən $L(\mathbb{R}^m)$ -ə $\mathcal{B}(t, x)$ funksiyaları, ele ölçülən və $(\mathcal{A}_t)$ ilə uzlaşdırılmış, $\mathbb{R}^m$ -də verilən ele $w(t)$ Viner prosesi vardır ki, $t_0 < t$ olduqda

$$X(t) - X(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^t a(s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t \mathcal{B}(s, X(s)) dw(s) \quad (1)$$

bərabərliyi doğrudur. Onda $X(t)$ prosesi

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \mathcal{B}(t, X(t))dw(t) \quad (2)$$

stoxastik differensial tənliyini ödəyir, deyilir. Adətən, Viner prosesi $w(t)$ -nin və $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur; (2) tənliyinin həllinin varlığı üçün şərtlər, belə həllin başlanğıc şərt ödənildikdə yeganəliyi öyrənilir.

Teorem 1. Fərz olunur ki, $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ ölçülən funksiyalardır və lokal Lipsits şərtini ödəyirlər, yəni: hər bir $c > 0$ üçün ele l_c sabiti vardır ki, $|x| \leq c$, $|y| \leq c$, $t \leq c$ olduqda

$$|a(t, x) - a(t, y)| + \|\mathcal{B}(t, x) - \mathcal{B}(t, y)\| \leq l_c |x - y|.$$

Onda $X(0) = X_0$ başlanğıc şərtini ödəyən (2) tənliyinin həlli, X_0 $w(t)$ -dən asılı olmadığı halda, stoxastik ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganədir, yəni iki həll bir-birilə stoxastik ekvivalentdirlər. Əgər hər hansı k üçün $|a(t, x)| + \|\mathcal{B}(t, x)\| \leq k(1 + |x|)$ – xətti məhdudluq şərti ödənilərsə, onda $w(t)$ -dən asılı olmayan ixtiyari $X(0) = X_0$ üçün (2) tənliyinin aşağıdakı şərtləri ödəyən həlli $X(t)$ vardır: a) $X(t)$ sanki yəqin kəsilməzdir; b) $k \in \mathbb{Z}_+$ üçün ele $c_k > 0$ və $\alpha_k > 0$ sabitləri vardır ki,

$$M(|X(t)|^k |X(0)|) \leq c_k e^{\alpha_k t} (1 + |X(0)|)^k;$$

c) $X_{t_0}(t)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^m$ ilə $X(t_0) = x$ başlanğıc şərtini ödəyən (2) tənliyinin $[t_0, \infty)$ intervalında həlli işarə olunarsa, onda $0 \leq t_0 < t$ olduqda $X(t) = X_{t_0 X(t_0)}(t)$ olur. ç) $X(t)$ keçid ehtimalı

$$P(t_0, x, t, B) = P\{X_{t_0x}(t) \in B\}$$

olan Markov təsadüfi funksiyasıdır;

d) əgər əlavə olaraq $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ t üzrə kəsilməz olarsa, onda $X(t)$ diffuzion prosesdir, $a(t, x)$ isə onun aparıcı əmsalı, $\mathcal{B}(t, x)\mathcal{B}^*(t, x)$ diffuziya operatorudur.

Qeyd. Varlığı teoremlərdə hökm olunan həll X_0 və $w(t)$ prosesinin doğurduğu $\mathcal{A}_t(X_0, w)$ axınına nəzərən ölçülən prosesdir. Belə həll güclü həll adlanır. Əgər $\mathcal{B}(t, x)$ operatoru cırlaşmırsa, onda hər bir güclü həll yeganədir.

Teoremlərin şərtlərində (2) tənliyinin həllini ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə və

$$\begin{aligned} X_0(t) &= X_0, \\ X_n(t) &= X_0 + \int_0^t a(s, X_{n-1}(s))ds + \\ &+ \int_0^t \mathcal{B}(s, X_{n-1}(s))dw(s), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

olduğunu fərz edərək almaq olar. Bu ardıcıl yaxınlaşmalar $X(0) = X_0$ başlanğıc şərtlə (2) tənliyinin həllinə kvadratik orta mənada yığılır. Əgər $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ kəsilməz olarlarsa, onda differensial tənliyi sonlu fərqlər tənliyi ilə əvəz etməklə həlli tapmaq olar: fərz olunur ki,

$$\begin{aligned} X^h(t) &= X^h(kh), \quad kh \leq t < (k+1)h, \quad X^h(0) = X_0, \\ X^h((k+1)h) &= X^h(kh) + a(kh, X^h(kh))h + \\ &+ \mathcal{B}(kh, X^h(kh))[w((k+1)h) - w(kh)], \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

onda $h \rightarrow 0$ olduqda $X^h(kh)$ kvadratik orta mənada $X(t)$ -yə yığılır (bax, *Stoxastik differensial tənlik; sonlu fərqli aproksimasiya*).

(2) tənliyinin güclü olmayan həlləri, ümumiyyətlə, zəif həllər adlanır (belə həllər üçün $\mathcal{A}_t^{X_0, w}$ – ölçülənlik haqqında müzakirə aparılır). Qeyd etmək lazımdır ki, əgər (2) tənliyinin iki ixtiyari $X_1(t)$ və $X_2(t)$ həllərinin paylanmaları eyni olarsa, onda (2)-nin həlli zəif yeganə həll adlanır.

Teorem 2. $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ funksiyalarının dəyişənləri toplusu üzrə kəsilməzliyi və $\det \mathcal{B}(t, x) \neq 0$ fərz olunur, onda (2) tənliyinin həlli zəif yeganə həldir: əgər xətti məhdudluq şərti ödənilərsə, (2) tənliyinin həlli vardır və bu həll teoremlərin a), b), c), d) şərtlərini ödəyir.

Zəif həllərə baxıldıqda (2) tənliyinin həlli, təbii olaraq, həllə uyğun olan ölçü kimi anlaşılır. Belə ölçü, teoremlərin 2-nin şərtləri ödənilməli halda, (3) düsturu ilə qurulmuş $X^h(t)$ proseslərinə uyğun μ_h ölçülərinin zəif limiti kimi alınır.

Bax: *Stoxastik differensial tənlik; güclü həll, Stoxastik differensial tənlik; həllərin güclü yeganəliyi, Stoxastik differensial tənlik; zəif həll, Stoxastik differensial tənlik; həllərin zəif yeganəliyi*.

(2) tipli tənliklərə aid olan məsələlər arasında həllin parametrdən asılılıq xarakterinə də baxılır, bu şərtlə ki, tənliyin əmsalları və başlanğıc şərt bu parametrdən asılı olsun. Məs., həllin başlanğıc verilənlərdən asılılığı da öyrənilir.

Teorem 3. $a(\theta, t, x)$, $\mathcal{B}(\theta, t, x)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ funksiyalarının aşağıdakı şərtləri ödədiyi fərz olunur:

1) k sabiti vardır ki,

$$|a(\theta, t, x)| + \|\mathcal{B}(\theta, t, x)\| \leq k(1 + |x|)$$

2) bütün $c > 0$ üçün $l_c > 0$ vardır ki, $|x| \leq l_c$, $|y| \leq l_c$, $t \leq c$ olduqda

$$|a(\theta, t, x) - a(\theta, t, y)| + \|\mathcal{B}(\theta, t, x) - \mathcal{B}(\theta, t, y)\| \leq l_c |x - y|,$$

3) t, x üzrə lokal məhdud funksiyalar olan

$$\frac{\partial}{\partial \theta} a(\theta, t, x), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{B}(\theta, t, x), \quad a'_x(\theta, t, x), \quad \mathcal{B}'_x(\theta, t, x)$$

töremələri vardır.

$$X_\theta(t) \text{ kvadratik orta töreməsi } \frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(0) \text{-nin varlığı fərz}$$

olunan, başlanğıc qiyməti $X_\theta(0)$ ilə verilən

$$dX_\theta(t) = a(\theta, t, X_\theta(t))dt + \mathcal{B}(\theta, t, X_\theta(t))dw(t) \quad (4)$$

S. d. t.-nin həlli olsun. Onda ehtimal görə yığılma mənasında $\frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(t)$ töreməsi vardır və o,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(t) &= \frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(0) + \int_0^t a'_\theta(\theta, s, X_\theta(s))ds + \\ &+ \int_0^t \mathcal{B}'_\theta(\theta, s, X_\theta(s))dw(s) + \\ &+ \int_0^t a'_x(\theta, s, X_\theta(s)) \frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(s)ds + \\ &+ \int_0^t \mathcal{B}'_x(\theta, s, X_\theta(s)) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(s), dw(s) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

xətti stoxastik integral tənliyini ödəyir ($[\cdot, \cdot]$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ -dən olan bixətti formadır).

Qeyd. $\frac{\partial}{\partial \theta} X_\theta(t)$ üçün (5) tənliyi təsadüfi əmsallı xətti

tənlik olub, (2) tənliyindən daha ümumdür. (4) tənliyini (1)-ə oxşar, integral formada yazıb, sonra onu θ üzrə formal differensiallamaqla (5) tənliyini almaq olar. (5)-i sonra yenidən formal olaraq θ üzrə differensialladıqda və bu halda $X_\theta(0)$, $a(\theta, s, x)$, $\mathcal{B}(\theta, s, x)$ funksiyalarından alınan bütün töremələrin s, x üzrə lokal məhdudluğunun varlığını tələb kimi qoyduqda,

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} X_\theta(t) \text{ ehtimala görə yığılma mənada vardır və o, alınan}$$

tənliyi ödəyir. Bu differensiallama prosesini lazım olan töremələrin olduğu və onların lokal məhdudluğu ödənilməli ana qədər davam etdirmək olar.

$A(t)$ və $B(t) \in L(\mathbb{R}^m)$ fəza fəzası ilə, $(\mathcal{A}_t)$ axını ilə uzlaşdırılmış təsadüfi proseslər, $w(t)$ bu axına nəzərən Viner prosesi olarsa, təsadüfi əmsalları, $\mathbb{R}^m$ -də ümumi xətti tənlik aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$dY(t) = A(t)Y(t)dt + B(t)Y(t)dw(t). \quad (6)$$

$\mathcal{A}_0$ – ölçülən $Y(0) = Y_0$ başlanğıc şərtini və (6) tənliyini ödəyən, $(\mathcal{A}_t)$ – uzlaşdırılmış, $\mathbb{R}^m$ – qiymətli $Y(t)$ prosesini tapmaq tələb olunur.

$$Z(t) = \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dw(s)$$

olsun və fərz olunur ki, $A(s)$ və $B(s)$ -ə görə inteqrallar vardır. Onda (6) tənliyinin həllini aşağıdakı çoxqat inteqrallar vasitəsilə yazmaq olar:

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t dZ(s)Y_0 + \iint_{0 < s_1 < s_2 < t} dZ(s_1)dZ(s_2)Y_0 + \dots + \int_0^t \dots \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < t} dZ(s_1) \dots dZ(s_n)Y_0 + \dots$$

(2) tənliyinin bilavasitə ümumiləşməsi diffuzion tipli tənliklərdir. $C_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^m)$, $-\mathbb{R}_+$ -də $\mathbb{R}^m$ – qiymətli kəsilməz funksiyaların lokal müntəzəm yığılma topologiyası və Borel çoxluqlarının σ – cəbri C ilə verilmiş fəza olsun. $C_t \subset C$, $-\{x(\cdot): x(s) \in B\}$, $s \leq t$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbr olsun. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes C$ -yə nəzərən ölçülən $f(t, x(\cdot))$ funksiyası bütün $t > 0$ üçün C_t – ölçülən olarsa, bu funksiya qeyri – antisipativ funksiya adlanır. $a(t, x(\cdot))$ və $B(t, x(\cdot))$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ və $L(\mathbb{R}^m)$ -dən olan qeyri – antisipativ funksiyalar olsun. Qiymətləri $\mathbb{R}^m$ -dən olan $X(t)$ kəsilməz prosesi üçün

$$dX(t) = a(t, X(\cdot))dt + B(t, X(\cdot))dw(t) \quad (7)$$

tənliyinə baxılır. (7) tənliyinin həlli $X(0) = X_0$ -in $w(t)$ -dən asılı olmayan verilmiş başlanğıc qiymətində axtarılır.

T e o r e m 4. Fərz olunur ki, $a(t, x(\cdot))$ və $B(t, x(\cdot))$ aşağıdakı şərti ödəyirlər: bütün $c > 0$ üçün ele $t_c > 0$ vardır ki,

1) bütün $x(\cdot), y(\cdot) \in C_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^m)$ üçün $\|x(\cdot)\|_c \leq c$, $\|y(\cdot)\|_c \leq c$ olduqda,

$$\|a(\cdot, x(\cdot)) - a(\cdot, y(\cdot))\|_c + \|B(\cdot, x(\cdot)) - B(\cdot, y(\cdot))\|_c \leq \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_c$$

münasibəti ödənilir, burada $\|f\|_c = \sup_{t \leq c} \|f_t\|$;

2) $\|a(\cdot, x(\cdot))\|_c + \|B(\cdot, x(\cdot))\|_c \leq l_c(\|x(\cdot)\| + 1)$ münasibəti bütün $x(\cdot) \in C_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^m)$ üçün ödənilir.

912 STOXASTİK

Onda (7) tənliyinin həlli vardır və bu həll yeganədir.

Q e y d. Bu həll güclü həll olacaqdır. 1) şərti evezinə əmsalların bütün dəyişənlər toplusu üzrə kəsilməzliyini tələb edərək, 2) şərtini saxladıqda həllin varlığını isbat etmək olar. (7) şəklində tənlik üçün momentlərin statistik qiymətlərini almaq, parametrdən asılı (7) tənliklərinə baxmaq və teoremlərin analoquunu müəyyən etmək olar.

(2) tənliyinin digər ümumiləşmələri təsadüfi ölçülər üzrə stoxastik inteqrallarla əlaqədar olan yeni stoxastik differensialların əlavə edilməsilə bağlıdır, belə tənliklərlə kəsilməz təsadüfi proseslərin trayektoriyalarını almaq olur. $(U, \mathcal{U})$ – hər hansı köməkçi ölçülən fəza olsun. $(\mathbb{R}_+ \times U, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{U})$ fəzasında $\mathbf{M} p_i(dt \times du) = m_i(dt \times du)$ şərtini ödəyən iki asılı olmayan $p_i(dt \times du)$, $i = 1, 2$ Puasson ölçülərinə baxılır, burada m_i – bütün $t > 0$ üçün $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{U}$ -də $m_i([0, t] \times U) < \infty$ şərtini ödəyən, σ – sonlu ölçülərdir, $q_i = p_i - m_i$, $f_i(t, x, u)$, $i = 1, 2$ isə $\mathbb{R}^m$ -də $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U$ -dan olan ölçülən funksiyalar olsun. Fərz olunur ki, $a(t, x)$ və $B(t, x)$ (2) tənliyindəki kimi funksiyalardır, $\mathbb{R}^m$ -də verilən Viner prosesi $w(t)$ isə p_i , $i = 1, 2$ ölçülərindən asılı deyildir. $t_1 < t_2$ olduqda

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s, X(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} B(s, X(s))dw(s) + \int_{t_1}^{t_2} \int_U f_1(s, X(s), u)q_1(ds \times du) + \int_{t_1}^{t_2} \int_U f_2(s, X(s), u)p_2(ds \times du) \quad (8)$$

münasibətini ödəyən, sağdan kəsilməz və 2-ci növ kəsilməsi olmayan, $\mathbb{R}^m$ -də təyin olunan $X(t)$ prosesi axtarılır. (8) münasibəti differensial formada aşağıdakı şəkildə olur:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + B(t, X(t))dw(t) + \int_U f_1(t, X(t), u)q_1(dt \times du) + \int_U f_2(t, X(t), u)p_2(dt \times du). \quad (9)$$

(9) tənliyinin həlli verilmiş $X(0)$ başlanğıc şərtində axtarılır və bu həll ele olmalıdır ki, $X(s)$, $s \leq t$ ilə doğurulan $\mathcal{A}_t^X$ σ – cəbrləri $s > t$ olduqda $w(s) - w(t)$ fərqiindən və $[t, \infty) \times U$ -də p_1 , p_2 ölçülərindən asılı olmasın.

T e o r e m 5. Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

1) hər bir $c > 0$ üçün ele $t_c > 0$ vardır ki, $|x| \leq c$, $|y| \leq c$ olduqda

$$|a(t, x) - a(t, y)| + \|B(t, x) - B(t, y)\| + \left(\int_U |f_1(t, x, u) - f_1(t, y, u)|^2 m_1(du) \right)^{1/2} \leq l_c |x - y|;$$

2) $f_2(t, x, u)$ t, x -ə üzrə $m_2(du)$ ölçüsünə nəzərən kəsilməzdir, onda verilmiş $X(0)$ başlanğıc şərtində (9) tənliyinin həlli yeganədir.

3) əgər, bundan əlavə, hər hansı $k > 0$ qiymətində bütün x -lər üçün

$$|a(t, x)| + \|\mathcal{B}(t, x)\| + \left(\int_U |f_1(t, x, u)|^2 m_1(du) \right)^{1/2} \leq k(1 + |x|)$$

olarsa, onda (9) tənliyinin həlli vardır. Bu həll keçid ehtimalı

$$P(t_0, x, t, B) = P\{X_{t_0x}(t) \in B\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan Markov təsadüfi funksiyasıdır, burada $X_{t_0x}(t)$ – başlanğıc şərti $X_{t_0x}(t_0) = x$ olan (9) tənliyinin $[t_0, \infty)$ -də həllidir.

Qeydlər. Teorem 5-in şərtlərində həll güclü həll olacaqdır, yeni $X(t)$ $w(s)$, $s \leq t$ və $[0, t] \times U$ -də p_t -lərin qiymətləri ilə doğrulan $\mathcal{A}_t$ σ -cebrinə nəzərən ölçülən prosesdir. $f_2 \equiv 0$ olduğu halda həlli ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə qurmaq olur. (8)-in sağ tərəfini $F(X(\cdot), t_1, t_2)$ ilə işarə edərək, $X_0(t) = X(0)$, $X_n(t) = X(0) + F(X_{n-1}(\cdot), 0, t)$ götürdükdə, $n \rightarrow \infty$ olduqda, $X_n(t)$ (9) tənliyinin həlli $X(t)$ -yə yığılır ($f_2 = 0$ olduqda). Əgər $f_2 \neq 0$ olarsa, həll aşağıdakı qaydada qurulur. $f_2 = 0$ olduğu halda başlanğıc şərti $\hat{X}(t_0, x, t) = x$ olan (9) tənliyinin $[t_0, \infty)$ -də həlli $\hat{X}(t_0, x, t)$ ilə işarə olunur. $p_2([0, t] \times U)$ – parametri $m_2([0, t] \times U)$ olan Puasson prosesidir. $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ – bu prosesin bütün sıçrayış anları olsun. Onda

$$\begin{aligned} X(t) &= \hat{X}(0, X(0), t), \quad t < \tau_1, \\ X(\tau_1) &= \hat{X}(0, X(0), \tau_1) + f_2(\tau_1, \hat{X}(0, X(0), \tau_1)u_1), \dots, \\ X(t) &= \hat{X}(\tau_k, X(\tau_k), t), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ X(\tau_{k+1}) &= \hat{X}(\tau_k, X(\tau_k), \tau_{k+1}) + \\ &+ f_2(\tau_{k+1}, \hat{X}(\tau_k, X(\tau_k), \tau_{k+1}), u_{k+1}) \end{aligned}$$

münasibətləri doğrudur, burada $u_1, u_2, \dots$ – U -dan olan ele təsadüfi nöqtələrdir ki,

$$p_2(B) = \sum I_{\{(t_k, u_k) \in B\}}, \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes U.$$

(2) tənliyi üçün olduğu kimi (9) tənliyi üçün də zəif həllərə baxmaq olar.

T e o r e m 6. Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

a) $a(s, x)$, $\mathcal{B}(s, x)$ – ölçülən, lokal məhdud, x üzrə kəsilməz funksiyalardır;

b) bütün s -lər üçün

$$\lim_{y \rightarrow x} \int |f_1(s, x, u) - f_1(s, y, u)|^2 m_1(du) = 0$$

münasibəti ödənilir;

c) teorem 5-in 2) və 3) şərtləri ödənilir. Onda $X(0)$ verildiyi halda (9) tənliyinin həlli vardır.

(9) tənliyinin həllinin zəif yeganəlik şərtləri aşağıdakı kimidir. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ -də

$$n_k(t, x, B) = m_k(\{u : f_k(t, x, u) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m},$$

$$\tilde{n}(t, x, B) =$$

$$= \int |y - x|^2 \left(1 + |y - x|^2\right)^{-1} n_1(t, x, dy) + n_2(t, x, dy)$$

ölçüləri daxil olunmuşdur.

T e o r e m 7. Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

a) $a(t, x)$ və $\mathcal{B}(t, x)$ və $\mathcal{B}^{-1}(t, x)$ kəsilməz funksiyalardır;

b) teorem 5-in 3) şərti ödənilir;

c) $\mathbb{R}^m$ -də ele $n_1(dz)$ və $n_2(dz)$ ölçüləri vardır ki,

$$n_i(t, x, \cdot) < n_i(\cdot) \quad \text{və} \quad \int |z|^2 n_1(dz) + n_2(\mathbb{R}^m) < \infty,$$

$$\int \left(\frac{dn_1(t, x, \cdot)}{dn_1(\cdot)}(z) \right)^2 |z|^2 n_1(dz) + \int \left(\frac{dn_2(t, x, \cdot)}{dn_2(\cdot)}(z) \right)^2 n_2(dz)$$

– lokal məhdud funksiyadır;

ç) bütün $T > 0$, $r > 0$ üçün

$$\int_0^T \int_{|x| \leq r} \tilde{n}(t, x, A - x) dt dx$$

– A -nın funksiyası kimi Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz funksiyadır. Onda $X(0)$ verildiyi halda (9) tənliyinin həlli vardır və bu həll zəif yeganə həldir; bu həll keçid ehtimalı teorem 5-də təyin olunduğu kimi təyin olunan Markov təsadüfi funksiyasıdır.

Qeydlər. (9) tənliyinin əmsallarının t -dən asılı olmadığı fərz olunur. Onda müvafiq keçid ehtimalı biricins olacaqdır. Əgər T, f bu keçid ehtimalı ilə verilən biricins Markov prosesinə uyğun semi – qrup olarsa, onda bu semi – qrupun doğuran operatoru A $\mathbb{R}^m$ -də verilən ikiqat kəsilməz differensiallanan bütün funksiyalarda

$$\begin{aligned} A\varphi(x) &= (a(x), \varphi'(x)) + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{B}(x) \mathcal{B}^*(x) \varphi''(x) + \\ &+ \int [\varphi(x + f_1(x, u)) - \varphi(x) - (\varphi'(x + f_1(x, u)))] m_1(du) + \\ &+ \int [\varphi(x + f_2(x, u)) - \varphi(x)] m_2(du) \end{aligned}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Belə Markov prosesləri **l o k a l s o n s u z b ö l ü n e n M a r k o v p r o s e s l e r i** adlanır. (9) tənliyinin əmsalları qeyri – antisipativ funksiyalar olduqda (9) tənliyinin ümumiləşdirilməsi mümkündür. Bu halda sağdan kəsilməz, 2-ci növ kəsilməsi olmayan $x(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ funksiyalarının fəzası – $D_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$ fəzasına baxılır. Bu fəzada I – yığılmanın doğurduğu topologiya daxil etmək olar. Bu topologiya belə təyin olunur: əgər ele ciddi artan $\lambda_n(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$\lambda_n(0) = 0$ funksiyaları ardıcılığı varsa ki, $|\lambda_n(t) - t| + |x_n(t) - x_n(\lambda(t))| \rightarrow 0$ lokal müntəzəm yığılma olsun, onda $x_n(t) \xrightarrow{t} x(t)$ münasibəti doğrudur. $D_+ = D_+(\mathbb{R}^m)$ -də Borel çoxluqlarının σ – cəbri, $D_t \in D_+ = \{x(\cdot) : x(s) \in B\}$ çoxluqları ilə doğrulmuş σ – cəbr olsun, $s \leq t$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$. (9) tənliyinə $a(t, x(\cdot))$, $B(t, x(\cdot))$, $f_i(t, x(\cdot), u)$ şəklində əmsalları yazmaq olar. Güclü və zəif həllərin varlığı şərtlərini 5, 6, 7 teoremlərinin şərtlərinin kombinasiyası ilə almaq olar.

Ən ümumi S. d. t., stoxastik inteqrallara kəsilməz martinqallar, martinqal ölçülər və mənfəət olmayan uzlaşdırılmış ölçülər üzrə baxıldıqda alınır. Bu halda tənliyin əmsalları təsadüfən asılı olur. $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, P\}$ – filtrasiyası $(\mathcal{A}_t)$ olan ehtimal fəzası olsun. $\mathcal{H}$ və $\mathcal{P}$ ilə $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -də tamamilə ölçülən və öngörül çoxluqlar σ – cəbrləri işarə olunur. Aşağıdakılardan verildiyi fərz olunur:

1) $\mathbb{R}^m$ -də kəsilməz, məhdud variasiyalı, uzlaşdırılmış (deməli, $\mathcal{P}$ – ölçülən) $\alpha(t, \omega)$ prosesi;

2) operator xarakteristikası $B(t)$ olan, $\mathbb{R}^m$ – qiymətli kəsilməz $\beta(t, \omega)$ martinqalı (bu $\mathcal{P}$ – ölçülən, $L(\mathbb{R}^m)$ -də artan prosesdir);

3) $\mathbb{R}_+ \times U$ -də ortoqonal qiymətləri $\gamma(t, B)$ olan ədədi martinqal ölçüsü $g(t, B)$; bu ölçünün kvadratik xarakteristikasının t üzrə kəsilməz olduğu fərz olunur;

4) $\mathbb{R}_+ \times U$ -də ələ sonlu nöqtəvi $\delta(C)$ ölçüsü ki, $\delta([0, t] \times C)$ – sıçrayışları 1-ə bərabər, sağdan kəsilməz, tam-qiymətli, $\mathcal{A}_t$ – uzlaşdırılmış prosesdir; $g(t, B)$ və $\delta([0, t] \times C)$ eyni zamanda sıçrayış almır;

5) $a(t, \omega, x)$, $-\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ -dən $\mathbb{R}^m$ -ə $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ – ölçülən funksiya;

6) $A(t, \omega, x)$, $-\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ -dən $L(\mathbb{R}^m)$ -ə $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ – δ – ölçülən funksiya;

7) $\varphi(t, \omega, x, u)$ və $\psi(t, \omega, x, u)$, $-\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times U$ -dən $\mathbb{R}^m$ -ə $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes U$ – ölçülən funksiyalar;

8) $\mathcal{H}$ – ölçülən $\mathbb{R}^m$ – qiymətli $Z(t)$ funksiyası.

$$\begin{aligned} X(t) = Z(t) + \int_0^t a(s, \omega, X(s)) d\alpha(s, \omega) + \\ + \int_0^t A(s, \omega, X(s)) d\beta(s) + \\ + \int_0^t \int \varphi(s, \omega, X(s), u) \gamma(ds \times du) + \\ + \int_0^t \psi(s, \omega, X(s), u) \delta(ds \times du) \end{aligned} \quad (10)$$

münasibətini ödəyən $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ funksiyasını tapmaq tələb olunur. $\rho(t) = |\alpha|(t) + \text{tr } B(t, \omega) + \int \varphi(u) g(t, du)$

işarələməsində $\varphi > 0$ ələ funksiya ki, $\rho(t)$ sonludur. Onda $X(t)$ kəsilməz artan prosesdir.

$$G(s, B) = \frac{dg(s, B)}{d\rho(s)}$$

olsun.

Teore m 8. Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur:

1) $Z(t)$ lokal məhduddur,

2) bütün $c > 0$ üçün ələ $\mathcal{P}$ – ölçülən artan $\lambda_r(t)$ funksiyası vardır ki, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ olduqda

$$\begin{aligned} |a(t, \omega, x) - a(t, \omega, y)|^2 + \|B(t, \omega, x) - B(t, \omega, y)\|^2 + \\ + \int |\varphi(t, \omega, x, u) - \varphi(t, \omega, y, u)|^2 G(t, du) \leq \\ \leq \lambda_r(t) |x - y|^2. \end{aligned}$$

Onda (10)-un lokal məhdud $\mathcal{H}$ – ölçülən həlli yeganədir. Hətta, eger:

3) ələ $\mathcal{P}$ – ölçülən artan $\kappa(t)$ funksiyası olarsa ki,

$$\begin{aligned} |a(t, \omega, x)|^2 + \|B(t, \omega, x)\|^2 + \\ + \int |\varphi(t, \omega, x, u)|^2 G(t, du) \leq \kappa(t)(1 + |x|^2) \end{aligned}$$

şərti ödənilsin, onda (10)-un lokal məhdud $\mathcal{H}$ – ölçülən həlli vardır.

Əd. [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] F r i e d m a n A., Stochastic differential equations and applications, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1975–76; [3] S t r o o c k D. W., V a r a d h a n S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [4] I k e d a N., W a t a n a b e S., Stochastic differential equations and diffusion processes, Amst. – [a. o.], 1981.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; diffuzion proses doğuran « стохастическое дифференциальное уравнение; порождающее обобщенный диффузионный процесс; stochastic differential equation generating generalized diffusion process », – həlli ümumiləşmiş diffuzion proses olan *stoxastik differensial tənlikdir*. Bu halda zaman üzrə bir cins ümumiləşmiş diffuzion proses – keçid ehtimalı $P(t, x, \Gamma)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ olan (Γ , $-\mathbb{R}^d$ -nin Borel altçoxluğudur), aşağıdakı şərtləri ödəyən Markov prosesinə deyilir:

1) ixtiyari $\varepsilon > 0$ və ixtiyari $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün [$C_0(\mathbb{R}^d)$, $-\mathbb{R}^d$ -də verilmiş bütün həqiqi kəsilməz finit funksiyalar çoxluğu-
dur]

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\{y: |y-x| > \varepsilon\}} P(\Delta t, x, dy) \right] \varphi(x) dx = 0$$

münasibəti ödənilir;

2) hər hansı $\varepsilon > 0$, bütün $\theta \in \mathbb{R}^d$ və ixtiyari $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün aşağıdakı limitlər mövcuddur:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\{y: |y-x| \leq \varepsilon\}} (y - x, \theta) P(\Delta t, x, dy) \right] \varphi(x) dx,$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\{y: |y-x| \leq \varepsilon\}} (y-x, \theta)^2 P(\Delta t, x, dy) \right] \varphi(x) dx.$$

Aytdır ki, eğer 1) şərti ödənilərsə və 2)-dəki limitlər hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün mövcud olarsa, onda bu limitlər bütün $\varepsilon > 0$ üçün mövcuddur və ε -dan asılı deyildir. Bu limitlərdən birincisini $(A(\varphi), \theta)$ şəklində yazmaq olar, burada $A(\varphi), - C_0(\mathbb{R}^d)$ -də vektor (d - ölçülü) xətti funksionaldır; ikinci limiti $(B(\varphi), \theta, \theta)$ şəklində yazmaq olar, burada $B(\varphi), - C_0(\mathbb{R}^d)$ -də operator xətti funksionaldır ($B(\varphi), - \mathbb{R}^d$ -dən $\mathbb{R}^d$ -yə operatorudur), hətta aytdır ki, eğer $\varphi \geq 0$ olarsa, $B(\varphi)$ mənfi olmayan müəyyən operatorudur.

Ümumiyyətlə, adi diffuzion proseslər olmayan və uyğun S. d. t.-nin həlləri olan, ümumiləşmiş diffuzion proseslərə aid m i s a l l a r.

A. Fərz olunur ki: a) qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən $\mathbb{R}^d$ -yə xətti operatorlar olan, x üzrə Hölder şərtini ödəyən, bütün $\theta \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ üçün c_1 və c_2 hər hansı sabitlər olduqda $c_1 |\theta|^2 \leq (b(x)\theta, \theta) \leq c_2 |\theta|^2$ bərabərsizliklərini ödəyən $b(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası;

b) qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan, hər hansı $p > d$ üçün

$$\|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

şərtini ödəyən $a(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası verilmişdir. Onda ele ümumiləşmiş diffuzion proses vardır ki, bu proses üçün

$$A(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \varphi(x) dx, \quad B(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \varphi(x) dx$$

olur, ümumiləşmiş diffuzion prosesin tərifində 1) şərti əvəzinə $t \downarrow 0$ olduqda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$I') \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\{y: |y-x| > \varepsilon\}} P(t, x, dy) = o(t)$$

şərti ödənilir. Bu prosesin trayektoriyaları

$$dx(t) = a(x(t))dt + b^{1/2}(x(t))dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləri olur, burada $w(t)$, $-d$ - ölçülü Viner prosesi, $b^{1/2}$, $-b$ operatorunun müsbət kvadrat köküdür.

B. A bəndindəki kimi $b(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ funksiyasının və $\mathbb{R}^d$ -ni iki: daxili və xarici hissələrə ayıran, olduqca hamar qapalı S hiper-müstəvisinin verildiyi fərz olunur. $v(x)$ ilə S səthinə $x \in S$ nöqtəsinə xarici normalın vahidi vektoru işarə olunmuşdur. $N(x) = b(x)v(x)$ vektoru $x \in S$ nöqtəsində səthə k o n o r m a l adlanır. S -də $|q(x)| \leq 1$ şərtini bütün $x \in S$ üçün ödəyən, kəsilməz $q(x)$ funksiyasının verildiyi fərz olunur. Ele ümumiləşmiş diffuzion proses vardır ki, bu proses və bütün $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün

$$A(\varphi) = \int_S N(x) q(x) \varphi(x) d\sigma, \quad B(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \varphi(x) dx$$

olur, burada birinci integral səth üzrə integraldir. Bu halda, A bəndində olduğu kimi bu proses I') şərtini ödəyir və odur ki, onun trayektoriyalarını kəsilməz hesab etmək olar. Bundan başqa, bu trayektoriyalar

$$dx(t) = N(x(t))q(x(t))\delta_S(x(t))dt + b^{1/2}(x(t))dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləridir, burada $\delta_S(x)$, $- \mathbb{R}^d$ -də ümumiləşmiş funksiyadır və onun «sınırı» funksiyaya təsiri bu funksiyanın S səthi üzrə integrallanmasına gətirilir.

C. Ümumiləşmiş diffuzion prosesi, xüsusilə də sadəcə olaraq, $b(x) \equiv I$ (I - vahidi operatorudur), $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, v) = 0\}$, $- \mathbb{R}^d$ -də hipersəth və bu hipersəth $v \in \mathbb{R}^d$ vahidi vektora ortoqonal olduqda, $q(x)$ isə $|q(x)| \leq 1$ şərtini ödəyən, S -də kəsilməz funksiya olduğu halda vermək mümkündür. Belə prosese uyğun funksiyalar fəzasında operatorların semi - qrupu

$$T_t \varphi(x) = T_t^0 \varphi(x) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y) \frac{\partial T_\tau^0(y)}{\partial v} q(y) d\sigma$$

düsturu ilə təyin olunur, burada daxiləki integral y dəyişəni üzrə səth integralıdır, $\partial/\partial v$, $-v$ istiqaməti üzrə törəmədir,

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\},$$

$$T_t^0 \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy.$$

Bu semi - qrup $\mathbb{R}^d$ -də kəsilməz ümumiləşmiş diffuzion proses təyin edir və bu proses üçün

$$A(\varphi) = v \int_{\mathbb{R}^d} q(x) \varphi(x) d\sigma, \quad B(\varphi) = I \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$$

olur, $x(t)$ -nin trayektoriyaları isə

$$dx(t) = v q(x(t))\delta_S(x(t))dt + dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləridir.

$d=1$ olduqda $S = \{0\}$ olur. $q(0) = c$ ($|c| \leq 1$) olduğunu fərz edərək T_t semi - qrupunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$T_t \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x)^2/2t} \varphi(y) dy + \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(y+|x|)^2/2t} [\varphi(y) - \varphi(-y)] dy.$$

Bu prosesin keçid ehtimalının sıxlığı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$G(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-(y-x)^2/2t} + c \operatorname{sign} y \cdot e^{-(|y|+|x|)^2/2t} \right).$$

Bu prosesin trayektoriyaları aşağıdakı S. d. t.-yi ödəyirlər:

$$dx(t) = c\delta(x(t))dt + dw(t);$$

burada $\delta(x)$ – Dirak δ – funksiyasıdır. $c=+1$ ($c=-1$) olduqda, bu proses $x=0$ nöqtəsində sağa (sola) ani eksetməyə malik Viner prosesidir. $|c| < 1$ olduqda bu çər Braun hərəkətidir (bax, [1]).

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Портенко Н. И., Обобщенные диффузные процессы, К., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; genişləndirilmiş stoxastik integral anlayışı istifadə edən « **стохастическое дифференциальное уравнение;** использующее понятие расширенного стохастического интеграла; **stochastic differential equation with extended stochastic integral** », –

$$X = J(QX) + AX + \varphi$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir*, burada $X, \varphi \in H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, A , – H -da operator, Q , – H -dan $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+^2)$ -na təsir edən operatorudur. Hitsuda – Skoroxod və ya Oqava məna ilə genişləndirilmiş integral (ω, s, t) dəyişənlərinin funksiyasına (ω, s) dəyişənləri üzrə təsir edir.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; güclü həll « **стохастическое дифференциальное уравнение;** сильное решение; strong solution of a **stochastic differential equation** »:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin güclü həlli

$$\mathbf{P}\left\{X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dw_s + \int_0^t b(s, X_s)ds, t \geq 0\right\} = 1$$

şərtini ödəyən, kəsilməz $\mathcal{A}_t^w$ – uzlaşdırılmış X_t prosesinə deyilir.

Güclü həllin varlığı üçün σ və b üzərinə Lipsits integral şərtinin qoyulması kafidir. Həllin varlığı (zəif həllin varlığı) şərtindən güclü həllin varlığı güclü yeganəlikdən alınır (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; həllərin güclü yeganəliyi).

$\mathbb{R}^d$ -də məhdud ölçülən σ və b və σ – cırlaşmayan matrisi ilə verilən

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x$$

tənliyinin həlli – σ matrisi x üzrə Lipsits şərtini, $d=1$ olduqda isə $\alpha=1/2$ üstlü Hölder şərtini ödəyərse, onda güclü həll olur. $\alpha < 1/2$ olduqda isə, ümumiyyətlə, güclü həll yoxdur.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Yamada T., Watanabe S., «J. Math. Kyoto Univ.», 1971, v. 11, p. 155–67; [3] Звонкин А. К., «Матем. сб.», 1974, т. 93, № 1, с. 129–49; [4] Веретенни-

ков А. Ю., «Матем. сб.», 1980, т. 111, № 3, с. 434–52; [5] Клепцына М. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 392–96; [6] Barlow M. T., «J. London Math. Soc.», 1982, v. 26, pt 2, p. 335–47; [7] Цирельсон Б. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, с. 427–30.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllər üçün aşkar düsturlar « **стохастическое дифференциальное уравнение;** явные формулы для решений; explicit formulae for solution of a **stochastic differential equation** » – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərini idarəedici təsadüfi proseslərlə (semimartinqallarla) ifadə edən düsturlardır. Məs., Stratonoviç formada birölçülü

$$dX = a(X_t)dt + b(X_t) \circ dZ_t, \quad X_0 = x$$

S. d. t.-nin həlli $X_t = u(D_t, Z_t)$ bərabərliyi ilə verilir, burada $u = u(t, z)$, –

$$\frac{\partial u}{\partial z}(t, z) = b(u(t, z)), \quad u(t, 0) = t$$

tənliyinin həlli. $D = D_t$ isə

$$D_t' = \exp\left\{-\int_0^{Z_t} b'(u(D_t, s))ds\right\} a(u(D_t, X_t)), \quad D_0 = x$$

tənliyinin həllidir.

Digər bir misal Z semimartinqalının

$$X_t = \exp\left\{Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}\langle Z^c \rangle_t\right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Z_s) e^{-\Delta Z_s}, \quad t \geq 0$$

bərabərliyi ilə verilən, stoxastik eksponent adlanan $X = \varepsilon(Z)$ eksponentidir və o, $dX_t = X_t - dZ_t$, $X_0 = 1$ xətti S. d. t.-nin həllidir.

Əd.: [1] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузные процессы, пер. с англ., М., 1986; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin dayanıqlılığı « **стохастическое дифференциальное уравнение;** устойчивость решений; stability of solution of a **stochastic differential equation** » – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərinin $t \rightarrow \infty$ olduqda S. d. t.-in hər hansı seçilmiş həlli ilə yaxınlaşma xassəsidir.

$\mathbb{R}^n$ -də

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, X(t))dw_r(t) \quad (*)$$

İto S. d. t.-nin, $b(t, 0) = \sigma_r(t, 0) \equiv 0$ şərti ödənildikdə trivial $X(t) \equiv 0$ həlli vardır. (*) tənliyinin $X(s) = x$ şəklində başlanğıc şərti ilə həlli $X^{s,x}(t)$ kimi işarə olunur (fərz olunur ki, bu həllin yeganəliyini təmin edən şərtlər ödənilir). (*) tənliyinin həlli $X(t) \equiv 0$: –

a) $t \geq 0$ olduqda ixtiyari $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ üçün $x \rightarrow 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq s} |X^{s,x}(t)| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilərsə, ehtimala görə dayanıqlı həll; b) əgər həll ehtimala görə dayanıqlı və bundan başqa $x \rightarrow 0$ olduqda

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X^{s,x}(t) = 0 \right\} \rightarrow 1$$

münasibətini də ödəyərsə, ehtimala görə asimptotik dayanıqlı həll;

c) əgər həll ehtimala görə dayanıqlı və bundan başqa $\lim_{t \rightarrow \infty} X^{s,x}(t) = 0$ münasibəti bütün $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

üçün sanki yəqin ödənilərsə, tam dayanıqlı (asimptotik) həll adlanır.

Bu təriflər mənasında Lyapunov stoxastik funksiyalar terminlərində dayanıqlılıq şərtləri məlumdur. Bu halda Lyapunov operatorunun – determinik sistemin trayektoriyası boyunca törəmənin rolunu (*) tənliyi üçün doğuran differensial L operatoru, yeni

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(b(t, x), \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\sigma_i(t, x), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

operatoru ifadə edir. Məs., $X(t) \equiv 0$ həllinin ehtimala görə dayanıqlılığı üçün $x = 0$ nöqtəsi ətrafında $LV(t, x) \leq 0$ şərtini ödəyən və bu nöqtə ətrafında müsbət müəyyən funksiyanın varlığı kafidir.

Xətti stoxastik tənliyin dayanıqlılığının ilk yaxınlaşma üzrə dayanıqlılığın tədqiqində və digər məsələlər üçün aşağıdakı anlayış faydalıdır. Əgər hər hansı sabit $\alpha > 0$ üçün

$$M |X^{s,x}(t)|^p \leq A |x|^p \exp(-\alpha(t-s))$$

şərti ödənilərsə, (*) tənliyinin həlli $X(t) \equiv 0$ eksponensial p – dayanıqlı həll adlanır. Lyapunov stoxastik funksiyalar terminlərində eksponensial p – dayanıqlılıq şərtləri məlumdur. S. d. t. üçün ilk yaxınlaşma üzrə dayanıqlılıq haqqında teoremlər məlumdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Хасеминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [2] К у ш н е р Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin güclü yeganəliyi «стохастическое дифференциальное уравнение; сильная единственность решений; strong/pathwise uniqueness of solutions of a stochastic differential equation» – əgər

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x \quad (*)$$

stoxastik differensial tənliyinin ixtiyari ehtimal fəzasında və eyni bir ixtiyari Viner prosesi ilə iki ixtiyari həlli üst-üstə düşərsə, (*) stoxastik differensial tənliyinin həlli güclü yeganədir və ya trayektoriyalar üzrə yeganədir, deyilir (bax, Stoxastik differensial tənlik; həllərin zəif yeganəliyi).

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin zəif yeganəliyi «стохастическое дифференциальное уравнение; слабая единственность решений; weak uniqueness of solution of a stochastic differential equation» –

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin paylanma qanunu yeganədirsə, bu həll zəif yeganə həldir. Əgər bu həll güclü yeganədirsə, onda o, zəif yeganə həldir (bax, Stoxastik differensial tənlik; həllərin güclü yeganəliyi). Tərsi doğru deyildir. σ və b ölçülən məhdud olduqda, $\mathbb{R}^d$ -də

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x$$

tənliyinin həllinin zəif yeganəliyi üçün $\sigma\sigma^*$ -nun cırlaşmayan və

$\sigma\sigma^*$ -nın x üzrə müntəzəm kəsilməzliyi, $d=1$ olduqda isə

yalnız $\sigma\sigma^*$ -nın cırlaşmayan olması kafidir. Həllin zəif yeganəliyi problemi əmsalları ölçülən 2-ci tərtib parabolik tənliklərin həlli problemi və Markov həlləri problemi ilə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Г и р с а н о в И. В., «Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 77–84; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [3] К р у л о в Н. В., в сб.: Statistics and control of stochastic processes. Steklov seminar, 1984, N. Y., 1985, p. 214–29.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; həllin çevirməsi «стохастическое дифференциальное уравнение; обращение решения; reversed solution of a stochastic differential equation» – ilkin stoxastik differensial tənliyin ($\mathcal{W}$ -də) doğurduğu $X(t, \cdot)$ -nin diffeomorfizmlərinin stoxastik axınına tərs inikastlar ailesidir (hamar çoxobrazlıların $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{W}$ inikastlarının).

Əgər $X(t, x)$

$$dX_i(t, x) = b_i(t, X(t, x))dt + \sum_j \sigma_{ij}(t, X(t, x))dw_j(t),$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad X_i(0, x) = x_i, \quad i = 1, \dots, d$$

S. d. t.-in həllidirsə (w – Viner prosesidir), onda bu həllin çevirməsinin i -ci koordinatı aşağıdakı xüsusi törəməli S. d. t.-in həllidir:

$$dv(s, x) = \left(\sum_i \mathcal{M}^i \mathcal{M}^i - \mathcal{L} \right)(s, x) v(s, x) ds -$$

$$- \mathcal{M}^i(s, x) v(s, x) dw^i(s), \quad s, x \in (0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad v(0, x) = x_i,$$

burada

$$\mathcal{L}(s, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(s, x) \sigma_{ij}(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_i b_i(s, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\mathcal{M}^i(s, x) = \sum_j \sigma_{ij}(s, x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Əd.: [1] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические дифференциальные уравнения, М., 1983.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; həllin momentləri «стохастическое дифференциальное уравнение; моменты решения; moments of the solution of a stochastic differential equation» –

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyin həllinin momentləri üçün

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, X_t)\|^2 &\leq \lambda^2(t) \left(1 + \|X_t\|^2 c[0, t]\right), \\ |b(t, X_t)| &\leq \lambda(t) \left(1 + \|X_t\| c[0, t]\right), t \geq 0 \end{aligned}$$

şərtləri daxilində və $\tau_N = \inf(t \geq 0: \lambda(t) > N)$ olduqda

$$\begin{aligned} M\left|X_{t \wedge \tau_N}\right|^{2r} &= C(N^2 + |x|^{2r} + N^2 |x|^{2r}) \exp(CN^2 t), \\ C > 0, \quad r &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; həllin varlığı haqqında lokal teoremlər « **стохастическое дифференциальное уравнение;** локальные теоремы существования решения; local existence theorems for a **stochastic differential equation** » – S. d. t.-in həllinin hər hansı oblastı tərk etməsi anına qədər və ya onun partlayış anına qədər (ξ) (yəni $t \uparrow \xi$ olduğu halda sonlu limitin yoxluğu) varlığı haqqında teoremlərdir. Belə teoremlər o halda doğru olur ki, varlıq şərtləri (məs., əmsalların məhdudluğu) yalnız lokal surətdə ödənilir və proses sonlu müddət ərzində partlayışa məruz qala bilər (bax, *Stoxastik differensial tənlik; partlayış kriterisi*).

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK xüsusi törəmələri « **стохастическое дифференциальное уравнение с частными производными; stochastic partial differential equation** » –

$$A(u, \omega) = 0$$

şəklində tənlikdir: $A(\cdot, \omega)$ – xüsusi törəməli inteqro – differensial tənlik, ω – təsadüfiyyəti simvolik ifadə edən dəyişəndir. Belə tənliklərin iki əsas tipini qeyd etmək olar.

I. Xüsusi törəməli evolyusion S.d.t.-lər –

$$du(t, x) = \mathcal{L}u(t, x) dt + \mathcal{M}u(t, x) dM(t) \quad (1)$$

şəklində tənliklərdir, burada $\mathcal{L}$ və $\mathcal{M}$ – x üzrə inteqro – differensial operatorlar, M – hər hansı vektor fəzasında semimartinqaldır, (1) bərabərliyi isə stoxastik differensial hesabı mənasında anlaşılır.

II. Xüsusi törəməli stasionar S.d.t.-lər –

$$\mathcal{L}u = \dot{M}$$

şəklində tənliklərdir, burada $\mathcal{L}$ – elliptik tip operator, $\dot{M}$ – stasionar təsadüfi meydan (bir qayda olaraq, çoxparametrlı beyaz küy).

Təbiətşünaslığın müxtəlif oblastlarının bir çox məsələləri, o cümlədən, təsadüfi proseslər və meydanlar nəzəriyyəsinin bəzi mühüm «daxili» problemləri xüsusi törəməli S. d. t.-lərə gətirilir, məs.,

1) $u(t, x, s)$ diffuzion prosesi

$$\begin{aligned} du(t) &= b(u(t))dt + \sigma(u(t))dw(t), \\ t > s, \quad u(s) &= x \end{aligned}$$

adi S. d. t.-in həlli olsun; $w(t)$ – Viner prosesidir. Onda əmsallar haqqında bəzi təbii fərziyyələrlə $u(t, x, s)$ t -nin qeyd olunmuş qiymətində x, s -in funksiyası kimi aşağıdakı tənliyin həllidir:

$$\begin{aligned} -du(t, x, s) &= \\ &= \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) u_{xx}(t, x, s) + b(x) u_x(t, x, s) \right] ds + \\ &\quad + \sigma(x) u_x(t, x, s) * dw(s), \quad s < t, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(t, x, t) = x. \quad (3)$$

$dw(s)$ -in qarşısındakı $*$ işarəsi stoxastik inteqralın tərs İto inteqralı kimi anlaşılmasını ifadə edir. (2) – (3) tənliyi, adətən, **tərs diffuziya tənliyi** adlandırılır.

2) Relyativist kvant mexanikasının sadə obyektlərindən biri – sərbəst (bozon) meydanıdır. Bu meydan

$$du(t, x) = -\sqrt{m^2 - \Delta u(t, x)} dt + dw(t, x)$$

tənliyinin stasionar həllidir, burada Δ – Laplas operatoru, $w(t, \cdot)$ – L_2 -də Viner prosesi, m^2 – hər hansı fiziki sabitdir (bax, [1]).

3) Coğrafi strukturlu populyasion genetikanın modelləri

$$du(t, x) = \alpha \Delta u(t, x) dt + \sqrt{u(t, x)(1 - u(t, x))} dw(t, x)$$

tip tənliklərə gətirir (bax, [2]), işarələmələr əvvəlki misaldakı kimidir.

Xüsusi törəməli S. d. t.-lərə aid mühüm və maraqlı misallar: diffuzion prosesin filtrasiya sıxlığı üçün *filtrasiya tənlikləri*, diffuzion prosesin həllinin çevirməsi üçün düz tənlik, *Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi* və s.

Adi S. d. t.-lər nəzəriyyəsində olduğu kimi xüsusi törəməli evolyusion S. d. t. üçün də güclü və zəif həllər anlayışları daxil olunur. Güclü həll kimi, bir qədər kobud alınsa da, verilmiş $M(t, \omega)$ semimartinqalı üçün verilən ehtimal fəzasında qurulmuş həll, zəif həll kimi isə hər hansı ehtimal fəzası və bu fəzada hər hansı semimartinqal üçün mövcud olan həll anlaşılır. Başqa sözlə, sonuncu halda, ehtimal fəzası və bu fəzada semimartinqal verilmir, əksinə onları təyin etmək tələb olunur. Xüsusi törəməli tənliklərin deterministik nəzəriyyəsində xüsusi törəməli S. d. t.-ə keçən mühüm anlayışlardan biri ümumiləşmiş həll anlayışıdır: bütün «sınanılan» funksiyalar üçün müəyyən inteqral eyniliyi anlamında S. d. t.-yi ödəyən həll ümumiləşmiş həll deyilir. Bu anlayış deterministik nəzəriyyədə olduğu kimi, klassik mənada həlli olmayan tənlikləri öyrənməyə imkan yaradır.

Xüsusi törəməli S. d. t. nəzəriyyəsində xətti tənliklər daha ətraflı surətdə öyrənilmişdir (bax, məs., [3] – [5]). Bu onunla əlaqədardır ki, diffuzion prosesin filtrasiya sıxlığı üçün tənliklər, tərs diffuziya tənlikləri və digər xüsusi törəməli S. d. t. nəzəriyyəsinin inkişafına səbəb olmuş mühüm tənliklər mehz bu sinfe mənsubdurlar.

Xətti evolyusion tənliklər anlamında xüsusi törəməli S. d. t.-lər nəzəriyyəsinin bəzi əsas problemləri aşağıda illüstrasiya olunur, o cümlədən, ümumiləşmiş həllər və klassik həllər arasında münasibətlər, güclü həllərin varlığı üçün şərtlər, «cırılma» effekti və s. Baş həddi özü-özünə qoşma olan 2-ci tərtib xətti evolyusion tənlik aşağıdakı kimi verilmiş olsun:

$$du(t, x) = \left[\sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(t, x) u_{x_j}(t, x))_{x_i} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^d b_i(t, x) u_{x_i}(t, x) + c(t, x) u(t, x) \Big] dt + \\ + \sum_l \left[\sum_{i=1}^d \sigma_{il}(t, x) u_{x_i}(t, x) + h^l(t, x) u(t, x) \right] dw^l(t), \quad t \leq T.$$

Sadelik üçün fərz olunur ki, w – standart Viner prosesidir və (4) tənliyinin əmsalları məhduddurlar, bu zaman onların təsadüf-dən asılı ola biləcəkləri də (öngörül təsadüfdən) fərz olunur.

(4) tənliyi üçün Koşi məsələsinin və əsas sərhəd məsələlərinin güclü ümumiləşmiş həllinin varlığını təmin edən şərt superparaboliklik (SP) şərtidir: yəni $\delta > 0$ konstantı vardır ki,

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j - \frac{1}{2} \sum_i \left| \sum_j \sigma_{ji} \xi_j \right|^2 \geq \delta \sum_i |\xi_i|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Güclü klassik həllin varlığı üçün əmsalların müəyyən hamarlığı tələb olunur. Həllərin hamarlığının yüksəldilməsi haqqında nəticələr doğrudur və bu nəticələr deterministik nəzəriyyədəki nəticələrə analojiyə. Əmsalların və başlanğıc şərtlərin müəyyən hamarlığı şərtlərində ümumiləşmiş həll hamar modifikasiyaya malik olur və modifikasiya isə klassik mənada həll olur. (4) tənliyi üçün Koşi məsələsinə əmsalların və başlanğıc şərtini müəyyən əlavə hamarlığı şərtində baxdıqda, yeganə güclü ümumiləşmiş həllin varlığını isbat etmək olar, bu halda SP şərti əvəzinə yalnız

$$A_{ij} = a_{ij} + \sum_l \sigma_{li} \sigma_{lj} / 2 \text{ matrisinin mənfi olmayan müəyyən}$$

matris olması tələb olunur.

Sonuncu şərt, adətən, cəbri paraboliklik (P) şərti adlanır. P şərti, demək olar ki, L_2 -dən güclü həllin varlığı üçün zəruri şərtlə yaxındır. SP şərtli tənliklərdən P şərtli tənliyə keçdikdə deterministik parabolik tənliyin cırlaşması effektinə analoji effekt yaranır. Buna görə də, P şərtini ödəyən (4) tipli tənliklərə bəzən, cırlaşmış parabolik S. d. t.-lər deyilir. Əmsalların hamarlığı haqqında təbii fərziyyələrlə SP şərti (4) tipli tənliyin fundamental həllinin varlığını təmin edir, amma P şərti bu hal üçün kifayət etmir və bu halda Hermənder şərtləri tipli əlavə şərtlərin qoyulması tələb olunur. P və SP şərtləri ixtiyari (cüt) tərtib xüsusi törəməli S. d. t.-lər, o cümlədən, qeyri – xətti tənliklər üçün də ümumiləşdirilir (bax, [6]).

Əgər $\mathcal{L}$ və $\mathcal{M}$ operatorlarının konkret təbiətini nəzərə almadan (1) tənliyinə hər hansı vektor fəzasında evolyusion stoxastik tənlik kimi baxılsa (yəni bu fəzada adi stoxastik tənlik kimi), onda hökm etmək olar ki, güclü həllin varlığı və yeganəliyi üçün $\mathcal{L} + 1/2 \cdot \mathcal{M}^2$ operatorunun monotonluq şərti tipli şərt əsas şərtidir. Zəif həllin varlığı üçün bu operatorların yalnız kəsilməzliyi kifayətdir (bax, [2]). P və SP tipli şərtlər uyğun evolyusion stoxastik tənlik üçün monotonluq və koersitivlik şərtlərinin ödənilməsinə təmin edən cəbri şərtlərdir.

Xüsusi törəməli stasionar S. d. t.-in həll olunamlığı nəzəriyyəsi, əsas etibarilə, stasionar sərhəd məsələlərinin deterministik nəzəriyyəsinə paraleldir. Lakin bu nəzəriyyədə həllərin Markov xarakterli olmasına aid mühüm və dərin nəticələrin alınması mümkün olmuşdur (bax, [4]). Evolyusion hal üçün belə nəticələr frakmentar xarakter daşıyır.

Əd.: [1] Hida T., Streit L., «Nagoya Math. J.», 1977, v. 68, № 12, p. 21–34; [2] Viot M., Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques nonlinéaires; Thèse doct. sci. Univ. Pierre et Marie Curie, P., 1976; [3] Grigelionis B., Mikelevičius R., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1983, v. 49, p. 49–88;

[4] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [5] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов, М., 1983; [6] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 71–146.

STOXASTİK DIFFERENSIAL TƏNLİK; xüsusi törəmələrili deterministik tənliklərlə əlaqə « стохастическое дифференциальное уравнение; связь с детерминированными уравнениями с частными производными; **stochastic differential equation;** connection with deterministic partial differential equations » – *stoxastik differensial tənliklərin həlləri* ilə parabolik və elliptik tip 2-ci tərtib törəmələrili tənliklərin həlləri arasında əlaqədir. Məs., əgər $X_{s,x}(t)$

$$dX_{s,x}(t) = a(t, X_{s,x}(t)) dt + \sigma(t, X_{s,x}(t)) dw(t),$$

$$X_{s,x}(s) = x$$

başlanğıc şərtlə verilən S. d. t.-in həlli olarsa, onda bezi şərtlər ödənildikdə

$$u(s, x) = M[\varphi(X_{s,x}(t)) + \int_s^t f(X_{s,x}(\tau)) d\tau]$$

funksiyası $(s, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}^d$ oblastında aşağıdakı Koşi məsələsinin həllidir:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + (a(s, x), u'_x(s, x)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s, x) \sigma^*(s, x) u''_{xx}(s, x)) = -f(s, x),$$

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x) = \varphi(x);$$

burada $a(t, x)$ və $\sigma(t, x)$ – uyğun olaraq, $\mathbb{R}^d$ – qiymətli və $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ – qiymətli, $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ -də təyin olunmuş funksiyalar, $w(t)$, – ölçülü Viner prosesidir.

Göstərilən əlaqə itirəflili xarakter daşıyır: əgər S. d. t.-in əmsalları həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremin şərtlərini ödəyirlərsə və bu halda həm də olduqca hamar olarlarsa, onda başlanğıc verilənləri üzrə S. d. t. həllinin differensiallanıqlı xassəsinin köməyi ilə isbat olunur ki, $u(s, x)$ funksiyası olduqca hamar funksiyadır və yuxarıdakı Koşi məsələsinin həllidir. Bu zaman xüsusilə qeyd olunmalıdır ki, $\sigma \sigma^*$ operatoru cırlaşa bilər. Əksinə, əgər göstərilən Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem varsa (məs., hər hansı Sobolev fəzasından), onda bu teorem əsasında uyğun S. d. t. həllinin varlığı və zəif yeganəliyi haqqında faktı isbat etmək olar.

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

STOXASTİK DIFFERENSIAL TƏNLİK ixtiyari meydanlarda « стохастическое дифференциальное уравнение; в произвольных полях; **stochastic differential equation** in arbitrary fields » –

$$dX(t) = A_t(X, dt) \quad (1)$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir*, burada $A_t(\varphi, h)$ – təsadüfi meydanlıdır. Təsadüfi meydanların ele sinfini seçmək olar ki, bu meydanlar üçün (1) tənliyinə ciddi mənə vermək olar. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$, $t \geq 0$ – stoxastik bazis; $D_T(\mathbb{R}^n)$, $-\infty, T]$ – də təyin olunmuş, sağdan kəsilməz, T nöqtəsində soldan kəsilməz, 2-ci növ kəsilməsi olmayan $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, $D(\mathbb{R}^n)$, $-\infty, \infty$ –da təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası olsun. $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ funksiyaları üçün θ_t operatorunun

$$(\theta_t \varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(t+s), & s < 0, \\ \varphi(t-s), & s = 0 \end{cases}$$

münasibətlə təyin olunduğu fərz olunur.

$$\|\varphi\| = \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|, \quad \|\varphi\|_*^2 = \int_{-\infty}^0 |\varphi(s)|^2 dK(s)$$

olsun; K , $-\infty, 0]$ yarımoxunun Borel çoxluqlarında təyin olunmuş hər hansı sonlu ölçüdür və $K((-\infty, 0]) < \infty$.

$$\begin{aligned} a_t(\varphi, h) &= a(\varphi, t+h) - a(\varphi, t), \\ \beta_t(\varphi, h) &= \beta(\varphi, t+h) - \beta(\varphi, t), \\ \gamma_t(\varphi, h) &= \gamma(\varphi, t+h) - \gamma(\varphi, t) \end{aligned}$$

– $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times D_0(\mathbb{R}^n) \times [0, h_0]$ fəzasında təyin olunmuş, $\mathbb{R}^n$ -dən qiymətlər alan, Borel σ – cəbrlərinin hasilinə nəzərən ölçülən, $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ qeyd olunduğu halda tamamilə ölçülən fərz olunur və φ qeyd olunduqda $a(\varphi, t)$ – məhdud variasiyalı kəsilməz meydan, $\beta(\varphi, t)$ – $\mathcal{A}_t$ axımına nəzərən lokal kvadratik inteqrallanan martinqal, $\gamma(\varphi, t)$ – qeyd olunmuş kəsilməli olmayan öngörül pilləvari təsadüfi meydanlıdır. Bundan başqa, fərz olunur ki, $D_T(\mathbb{R}^n)$ -dən olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $Y(t)$ prosesi boyunca $\int_0^T a_t(\theta_t Y, dt)$, $\int_0^T \beta_t(\theta_t Y, dt)$, $\int_0^T \gamma_t(\theta_t Y, dt)$ – stoxastik əyrizətli inteqralları mövcuddur.

Tərifə görə,

$$\begin{aligned} \int_0^T a_t(\theta_t Y, dt) &= \\ &= \int_0^T a_t(\theta_t Y, dt) + \int_0^T \beta_t(\theta_t Y, dt) + \int_0^T \gamma_t(\theta_t Y, dt). \end{aligned}$$

$A_t(\varphi, h) = A_t(\theta_t \varphi, h)$ təsadüfi meydanlı (1) tənliyinə baxılır. $X(t) = X_0(t)$, $t \leq 0$, $X_0(t) \in D_0(\mathbb{R}^n)$ (sanki yeqin) – «başlanğıc şərtini» ödəyən

$$dX(t) = A_t(\theta_t X, dt) \quad (2)$$

tənliyinin həlli ele $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi anlaşılır ki, bu proses sanki yeqin

$$X(t) = X_0(t), \quad t \leq 0$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha_s(\theta_s X, ds), \quad t \geq 0$$

münasibətlərlə təyin olunur.

Aşağıdakı şərtlərin daxil olunduğu fərz olunur:

1) $B_t(\varphi, \psi, h)$, $-\beta_t(\varphi, h)$, $\beta_t(\psi, h)$ martinqallarının qarşılıqlı xarakteristikası, $\|\cdot\|$ – operator norma olsun; ele kəsilməz artan öngörül $\kappa(t)$ funksiyası vardır ki, bütün $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\begin{aligned} |a_t(\varphi, h)| &\leq |\kappa(t+h) - \kappa(t)| (1 + \|\varphi\|), \\ \|B_t(\varphi, \psi, h)\| &\leq |\kappa(t+h) - \kappa(t)| (1 + \|\varphi\|^2) \end{aligned}$$

berəbersizlikləri doğrudur;

2) ixtiyari $R > 0$ üçün ele artan kəsilməz öngörül $\lambda_R(t)$ funksiyası vardır ki, $\varphi, \psi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün $\|\varphi\| \leq R$, $\|\psi\| \leq R$, $t+h \leq R$ olduqda

$$|a_t(\varphi, h) - a_t(\psi, h)| \leq [\lambda_R(t+h) - \lambda_R(t)] \|\varphi - \psi\|,$$

$$\|B_t(\varphi, \psi, h) - B_t(\varphi, \varphi, h)\| \leq [\lambda_R(t+h) - \lambda_R(t)] \|\varphi - \psi\|^2$$

berəbersizlikləri doğrudur;

3) ele öngörül $\mu(t)$ funksiyası vardır ki, bütün $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ və ixtiyari $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ bölgüsü üçün

$$\sum_k \hat{Z}_{t_k}(\theta_{t_k} \varphi, \Delta t_k) \leq \mu(t)$$

berəbersizliyi ödənilir, burada $\hat{Z}(\varphi, t)$, $-Z(\varphi, t)$ prosesinin $[0, t]$ intervalında sıçrayışları sayıdır.

Əgər 1)–3) şərtləri ödənilərsə və $\|X_0\| < \infty$ olarsa, onda (2) tənliyinin yeganə həlli vardır (bax. [1]).

$$(2) \text{ tənliyinə } a_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} a(\varphi, s) ds, \quad \gamma = 0 \text{ olduğu fərz}$$

olunaraq baxılır. 1), 2) şərtləri ödənildikdə həllin varlığı və yeganəliyi üçün $\|\varphi\|$ -ni $\|\varphi\|_*$ ilə əvəz etmək olar (bax. [2]).

Əd.: [1] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; integro-differensial operator « **стохастическое дифференциальное уравнение**; интегро-дифференциальный оператор; **stochastic differential equation**; integro-differential operator » –

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + B(t, X_t)dw_t + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} f(t, X_{t-}, u)(\mu^{(1)}(dt, du) - \end{aligned}$$

$$- \nu^{(1)}(t, du)dt) + \int_{\mathbb{R}^d} h(t, X_{t-}, u) \mu^{(2)}(dt, du) \quad (*)$$

tənliyi üçün aşağıdakı düsturla təyin olunan L operatorudur:

$$Lv(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + (v'_x(t, x), a(t, x)) + \\ + \text{tr} v''_{xx} B(t, x) B^*(t, x)/2 + \\ + \int_{\mathbb{R}^d} [(v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x) - \\ - (v'_x(t, x), f(t, x, u))) v^{(1)}(t, du) + \\ + \int_{\mathbb{R}^d} [v(t, x + h(t, x, u)) - v(t, x)] v^{(2)}(t, du);$$

burada $a(t, x)$, $-(n \times 1)$ - ölçülü, $B(t, x)$, $-(n \times m)$ - ölçülü $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ fəzasında funksiyalar, $f(t, x, u)$, $h(t, x, u)$, $-(n \times 1)$ - ölçülü $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ fəzasında funksiyalar, w , $-(m \times 1)$ - ölçülü Viner prosesi, $\mu^{(i)}$, $i=1, 2$, $-\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -də kəsişməyən daşıyıcılara malik Puasson ölçüləri. $M\mu^{(i)}(dt, du) = v^{(i)}(t, du)dt$, v , x -ə görə iki tərtib kəsilməz törəməsi və t -yə görə bir tərtib törəməsi olan funksiya, $*$ - transpozisiya işarəsidir, $(*)$ tənliyinin əmsallarının inteqrallananlığı üçün bəzi şərtlər ödənildikdə onun həlli X üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$Mv(t, X_t) = Mv(0, X_0) + M \int_0^t Lv(s, X_s) ds.$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK keçirici sərhədli « стохастическое дифференциальное уравнение с проницаемой границей; stochastic differential equation with a (semi-) permeable boundary » - bax, *Stoxastik differensial tənlik* sərhədləri.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; kiçik parametr üzrə ayrılışlar « стохастическое дифференциальное уравнение; разложения по малому параметру; stochastic differential equation; expansion with respect to a small parameter »; birölçülü

$$dX(t, \varepsilon) = a(t, X(t, \varepsilon))dt + \varepsilon b(t, X(t, \varepsilon))dw(t)$$

diffuzion tənliyi üçün ayrılış $a(t, x)$, $b(t, x)$ funksiyalarının uyğun olaraq, X üzrə m və $m-1$ tərtib törəmələri varsa və bu törəmələr Lipsitz şərtini ödəyirlərsə,

$$X(t, \varepsilon) = Y_0(t) + \varepsilon Y_1(t) + \dots + \varepsilon^m Y_m(t)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, $w(t)$ - standart Viner prosesidir. Y_0 prosesi $Y_0(t) = a(t, Y_0(t))$ tənliyinin həllidir. $Y_1, \dots, Y_m$ prosesləri isə diffuzion proseslərin həlləridir (bax, [1]).

Bu ayrılış yüksək tərtib törəmə olduqda kiçik parametrlili parabolik tənliyin həllinin asimptotikası ilə sıx əlaqəlidir (bax, [2]).

Sıçrayışvari kiçik əlavəli tənlik (bax, [3]) və ikiölçülü zamanlı diffuzion tənliklər üçün ayrılışların ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] Благоевский Ю. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1962, т. 7, в. 2, с. 135–52; [2] Благоевский Ю. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 378–82; [3] Бродский Я. С., «Теория случайных процессов», 1973, в. 1, с. 35–43.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK(yi) kvant « стохастическое дифференциальное уравнение квантовое; quantum stochastic differential equation » - bax, *Kvant stoxastik hesabı*.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; limit teoremləri « стохастическое дифференциальное уравнение; предельные теоремы; limit theorems for stochastic differential equation » - bax, *Limit teoremləri stoxastik differensial tənliklər üçün*.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK(yi) Liuvill « стохастическое дифференциальное уравнение Лувилля; Liouville stochastic differential equation » - bax, *Liuvill stoxastik differensial tənliyi*.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; Markov həlləri « стохастическое дифференциальное уравнение; марковские решения; Markov solutions of a stochastic differential equation »; məhdud kəsilməz əmsallı və ya ölçülən məhdud əmsallı və cırlaşmayan diffuziyalı

$$dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = X$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin zəif yeganəliyindən alınan Markov xassəsidir (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; həllərin zəif yeganəliyi). Hər iki halda zəif yeganəlik olmadıqda həllərin bütün çoxluğundan Markov həllini seçmək olar (Markov həllinin «seleksiyası» haqqında Kntov teoremi). Belə həll kvaziinfinitesimal operatoru

$$L = \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olan kvazidiffuzion prosesdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975; [2] Крылов Н. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 691–708; [3] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [4] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. - [a. o.], 1979.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; müqayisə teoremləri « стохастическое дифференциальное уравнение; теоремы сравнения; comparison theorems for stochastic differential equation » - *stoxastik differensial tənliklərin* həllərinin onların əmsallarından asılılığı haqqında teoremlərdir. X^i , $i=1, 2$, -

$$X_t^i(\omega) = X_0^i(\omega) + \int_0^t f^i(\omega, s, X_s^i(\omega)) da_s(\omega) + \\ + \int_0^t g(\omega, s, X_s^i(\omega)) dm_s(\omega) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{\{|u| \leq 1\}} h(\omega, s, u, X_{s-}^i(\omega)) (\mu - \nu)(ds, du) + \\
& + \int_0^t \int_{\{|u| > 1\}} h^i(\omega, s, u, X_{s-}^i(\omega)) \mu(ds, du) + \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [k^i(\omega, s, u, X_{s-}^i(\omega)) + l^i(\omega, s, u, X_{s-}^i(\omega))] p(ds, du)
\end{aligned}$$

tənliliklərinin həlləri olsun. burada a, m – kəsilməz proseslər, a – artan, m – lokal martinqal; μ, p – hər hansı semimartinqalın sıçrayışlarının doğurduğu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ fəzasında tamqiyəmətlə təsadüfi ölçülər, μ (uyğun olaraq p) – sıçrayışları ilə tamamilə çatılmaz (uyğun olaraq öngörül) anlar, $\nu, -\mu$ ölçüsünün kompensatorudur; $\int g dm, \iint h(\mu - \nu), \iint k^i p$ stoxastik inteqralları lokal martinqallar, $\int f^i da, \iint l^i p$ inteqralları lokal inteqrallanan variasiyalı proseslər, $\iint h^i \mu$ sonlu variasiyalı prosesdir. Fərz olunur ki, bütün inteqralları təyin olunması üçün şərtlər və həm də aşağıdakı şərtlər ödənilir.

$$1) X_0^2 > X_0^1;$$

2) $f^i(s, x); (k^i + l^i)(s, u, x)$ funksiyaları uyğun olaraq $(s, x), (s, u, x)$ üzrə kəsilməzdir və

$$f^2(s, x) > f^1(s, x),$$

$$(k^2 + l^2)(s, u, x) > (k^1 + l^1)(s, u, x);$$

$$3) |g(s, x) - g(s, y)| \leq \rho(|x - y|)G(s),$$

$$|h(s, u, x) - h(s, u, y)| \leq \rho(|x - y|)H(s, u),$$

burada (sadelik üçün) $\rho, -\alpha > 1/2$ üstlü Hölder metrikaçıdır, ixtiyari t üçün

$$\int_0^t G(s) d\langle m \rangle_s < \infty, \int_0^t \int H^2(s, u) \nu(ds, du) < \infty;$$

4) $y \geq x$ üçün

$$h(s, u, y) \geq h(s, u, x),$$

$$y + h^2(s, u, y)I_{|u|>1} \geq x + h^1(s, u, x)I_{|u|>1},$$

$$y + h(s, u, y)I_{|u| \leq 1} + (k^2 + l^2)(s, u, y) \geq$$

$$\geq x + h(s, u, x)I_{|u| \leq 1} + (k^1 + l^1)(s, u, x).$$

Onda $X^2 \geq X^1$ (bax, [3]).

Bu müqayisə teoremini differensial tənliliklər üçün ilk dəfə A. V. Skorokhod ifadə etmişdir (bax, [1]); İto tənlilikləri üçün bu teorem ümumi şəkildə [2]-də verilmişdir.

Gauss prosesləri nəzəriyyəsində de Slepian müqayisə teoremi vardır (bax, [4]). T – separabel metrik kompakt, $X^i(t), t \in T, i = 1, 2$ – kovariasion funksiyaları

$\Gamma_i(t, s) = \mathbf{M}X^i(t)X^i(s)$ olan separabel Gauss prosesləri; $\Gamma_2(t, t) = \Gamma_1(t, t)$ və $\Gamma_2(t, s) \leq \Gamma_1(t, s), t, s \in T$ olsun. Onda ixtiyari həqiqi m üçün

$$\mathbf{P}\{X^2(t, \omega) \leq m, t \in T\} \leq \mathbf{P}\{X^1(t, \omega) \leq m, t \in T\}$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Скорокход А. В., Исследования по теории случайных процессов, К., 1961; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [3] Гальчук Л. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 3, с. 425–33; [4] Ферник К., в сб.: Случайные процессы, М., 1978.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK(yi) Navye – Stoks «стохастическое дифференциальное уравнение Навье–Стокса; Navier–Stokes stochastic differential equation» – bax, Navye – Stoks stoxastik differensial tənliliyi.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK operator «стохастическое дифференциальное уравнение операторное; operator stochastic differential equation» – bax, Operator stoxastik differensial tənlilik.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; parametr üzrə differensiallanma «стохастическое дифференциальное уравнение; дифференцируемость по параметру; stochastic differential equation; differentiability with respect to parameter» –

$$\begin{aligned}
dX_{\alpha}(t) &= a_{\alpha}(t, X_{\alpha}(t))dt + B_{\alpha}(t, X_{\alpha}(t))dw(t) + \\
&+ \int_{\Theta} f_{\alpha}(t, X_{\alpha}(t), \theta)\mu(d\theta \times dt) + \\
&+ \int_{\Theta} g_{\alpha}(t, X_{\alpha}(t), \theta)\nu(d\theta \times dt), X_{\alpha}(\theta) = X_{\alpha}
\end{aligned}$$

stoxastik differensial tənliliyinin həllinin α parametri üzrə differensiallanmasıdır. (*) tənliliyində $w(t)$ m – ölçülü Viner prosesidir, $\mu(d\theta \times dt)$ $\Theta \times \mathbb{R}_+$ -də mərkəzlənmiş Puasson ölçüsüdür və $\mathbf{M}\mu^2(d\theta \times dt) = m_1(d\theta)dt$, $m_1(d\theta) \in \mathbb{C}$ -də σ – sonlu ölçü, $\nu(d\theta \times dt)$ – asılı olmayan artımlı Puasson ölçüsüdür və $\mathbf{M}\nu(d\theta \times dt) = m_2(d\theta)dt$, $m_2(d\theta) \in \mathbb{C}$ -də sonlu ölçüdür, $(\Theta, \mathbb{C})$ hər hansı ölçülən fəzadır. Viner prosesi $w(t)$, mərkəzlənmiş Puasson ölçüsü μ və Puasson ölçüsü ν öz aralarında asılı deyildirlər. α parametri birölçülü hər hansı $[a, b]$ intervalındadır. $a_{\alpha}(t, x), B_{\alpha}(t, x)$ ölçülən funksiyaları hər bir α qiymətində $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ -də təyin olunmuşlar və $\mathbb{R}^n$ və $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ -dən ($\mathbb{R}^m$ -dən $\mathbb{R}^n$ -ə xətti operatorlar fəzası) qiymətlər alırlar. uyğun olaraq, hər bir α qiymətində $f_{\alpha}(t, x, \theta)$ və $g_{\alpha}(t, x, \theta)$ ölçülən funksiyaları $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \Theta$ fəzasında təyin olunmuşlar və $\mathbb{R}^n$ -dən qiymətlər alırlar.

$\partial X_{\alpha}(t)/\partial \alpha$ törəməsi $h \rightarrow 0$ olduqda $(X_{\alpha+h}(t) - X_{\alpha}(t))/h$ nisbətinin ehtimala görə yığıldığı təsadüfi proses kimi anlaşılır. $\partial X_{\alpha}(t)/\partial \alpha$ törəməsi, yalnız və

yalnız, o halda təyin olunmuş sayılır ki, qeyd olunan limit mövcud olsun.

Aşağıdakı şərtlərin daxil olduğu fərz olunur:

1) hər bir $r > 0$ üçün ele lokal məhdud $k_r(\alpha)$ funksiyası vardır ki, $t \leq r$ olduqda bu funksiya üçün

$$\begin{aligned} & \|a_\alpha(t, x)\|^2 + \|B_\alpha(t, x)\|^2 + \\ & + \int_{\Theta} |f_\alpha(t, x, \theta)|^2 m_1(d\theta) \leq k_r(\alpha)(1 + |x|^2) \end{aligned}$$

berəbersizliyi ödənilir. $\|\cdot\|$ – operator normasıdır;

2) uyğun olaraq $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ fəzalarından qiymətlər alan, dəyişənləri topluluğu üzrə lokal məhdud funksiyalar olan

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} a_\alpha(t, x), \frac{\partial}{\partial \alpha} B_\alpha(t, x), \frac{\partial}{\partial x} a_\alpha(t, x), \frac{\partial}{\partial x} B_\alpha(t, x)$$

törəmələri vardır;

3) uyğun olaraq $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -dən qiymətlər alan

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} f_\alpha(t, x, \theta), \frac{\partial}{\partial \alpha} g_\alpha(t, x, \theta), \\ & \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(t, x, \theta), \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha(t, x, \theta) \end{aligned}$$

törəmələri vardır,

$$\int_{\Theta} \left[\left\| \frac{\partial}{\partial \alpha} f_\alpha(t, x, \theta) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(t, x, \theta) \right\|^2 \right] m_1(d\theta)$$

funksiyası α , t , x üzrə lokal məhdud funksiyadır;

4) $r > 0$ üçün

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \bar{\alpha} \\ \delta \rightarrow 0}} \sup_{\substack{|x| \leq r \\ t \leq r}} \sup_{|x-y| < \delta} \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x} a_\alpha(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} a_{\bar{\alpha}}(t, y) \right\| + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{\partial}{\partial x} B_\alpha(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} B_{\bar{\alpha}}(t, y) \right\| + \right. \\ & \left. + \int_{\Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(t, x, \theta) - \frac{\partial}{\partial x} f_{\bar{\alpha}}(t, y, \theta) \right\|^2 m_1(d\theta) + \right. \\ & \left. + \int_{\Theta} \arctg \left\| \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha(t, x, \theta) - \frac{\partial}{\partial x} g_{\bar{\alpha}}(t, y, \theta) \right\| m_2(d\theta) \right\} = 0 \end{aligned}$$

münasibəti ödənilir;

5) X_α təsadüfi kəmiyyəti α üzrə differensiallanandır.

Əgər 1) – 5) şərtləri ödənilərsə, onda bütün $t > 0$ üçün $\partial X_\alpha(t)/\partial \alpha = Y_\alpha(t)$ törəməsi vardır və bu törəmə aşağıdakı xətti tənliyin həllidir (bax, [1]):

$$Y_\alpha(t) = Y_\alpha(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \alpha} a_\alpha(s, X_\alpha(s)) ds +$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \alpha} B_\alpha(s, X_\alpha(s)) dw(s) + \\ & + \int_0^t \int_{\Theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} f_\alpha(s, X_\alpha(s), \theta) \mu(d\theta \times ds) + \\ & + \int_0^t \int_{\Theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} g_\alpha(s, X_\alpha(s), \theta) \nu(d\theta \times ds) + \\ & + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} a_\alpha(s, X_\alpha(s)) Y_\alpha(s) ds + \\ & + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} B_\alpha(s, X_\alpha(s)) Y_\alpha(s) \right] dw(s) + \\ & + \int_0^t \int_{\Theta} \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(s, X_\alpha(s), \theta) Y_\alpha(s) \mu(d\theta \times ds) + \\ & + \int_0^t \int_{\Theta} \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha(s, X_\alpha(s), \theta) Y_\alpha(s) \nu(d\theta \times ds). \end{aligned}$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. К., 1982.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; partlayış kriterisi «стохастическое дифференциальное уравнение; критерий взрыва; explosion criterion for a stochastic differential equation»:

$$dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = X$$

birölcülu stoxastik differensial tənliyin həllinin partlayış anı ξ üçün (yeni $t \uparrow \xi$ olduqda sonlu limitin yoxluğu) $\sigma, b \in C_{loc}$, $\sigma \neq 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\xi = \infty\} = 1$$

Feller kriterisi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{y(x) - y(-\infty)}{|y'(x)\sigma(x)|^2} dy(x) = \int_0^{\infty} \frac{y(\infty) - y(x)}{|y'(x)\sigma(x)|^2} dy(x) = \infty$$

berabərlikləri ödənilsin, burada

$$y(x) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^z \frac{2b(u)}{\sigma^2(u)} du\right) dz.$$

Çoxölcülu analoq da müəyyən olunmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 196–214; [3] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK sərhədlərlərlə «стохастическое дифференциальное уравнение с границами; stochastic differential equation with boundaries» – 1) Sonlu fəza intervalında S.d.t. (bax, [1], fəs. 5). $\sigma(x)$ və $b(x)$ ədədi

funksiyalarının $(0, 1)$ -də təyin olunduğu fərz olunur. Fərz olunur ki, ixtiyari $\varepsilon \in (0, 1)$ üçün $\mathbb{R}^+$ -də σ^ε və b^ε ədədi funksiyaları vardır ki, σ^ε və σ , b^ε və b funksiyalarının $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ -də daralmaları üst-üstə düşür və

$$dX_t^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(X_t^\varepsilon) dw_t + b^\varepsilon(X_t^\varepsilon) dt$$

S. d. t.-nin yeganə həlli vardır. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda hər hansı limit prosesi X alınır. X prosesinin 0 və 1 sərhəd nöqtələrinə çatmasını təyin edən σ və b funksiyaları üzərinə qoyulmuş şərtləri müəyyən şəkildə ifadə etmək olar. Sərhəd nöqtəsinə çatmış prosesi aşağıdakı üsullarla davam etdirmək olar: onu bu nöqtədə saxlamaq (u d u c u s ə r h ə d); onu $(0, 1)$ intervalına sıçrayışla qaytarmaq; onu $(0, 1)$ -ə ya kəsilməz sürətdə bir anda qaytarmaq (a n i ə k s e d i c i s ə r h ə d – rus. мгновенно отражающая граница) və ya sərhəd nöqtəsində müsbət zaman müddətində olaraq $(0, 1)$ intervalına qaytarmaqla (l ə n g i d i c i s ə r h ə d – rus. задерживающая граница).

σ və b funksiyaların terminlərində [1]-də davam olunma üsulunun mümkün üsulu təyin olunur və müxtəlif üsullar üçün müvafiq Kolmogorov ters tənlikləri yazılır.

2) 0 nöqtəsində keçirici sərhədə malik (rus. с проницаемой границей в точке 0) S. d. t.:

$$dX_t = \sigma(X_t) dw_t + b(X_t) dt + a \varphi_t(X_t)$$

tənliyində a sərhədin keçiricilik xassəsini xarakterizə edən ədəd. φ – naməlum X semimartinqalının 0 nöqtəsində simmetrik lokal zamandır. Əgər $|a| \leq 1$, σ və b ölçülən və məhdud olarlarsa, σ müntəzəm müsbət və məhdud variasiyalı olarsa, onda S. d. t.-in yeganə həlli vardır (bax, [2], [3]). $a = 1$ (-1) olduqda proses $(0, \infty)$ -də ($(-\infty, 0)$ -də) tamamilə əks olunur, $|a| < 1$ olduqda isə aralıq hallar olur.

3) $\mathbb{R}^d$ -də əks edici sərhədlə S. d. t. d – ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P}; w)$ -də Viner prosesi və: $D = \{x \in \mathbb{R}^d : x^d > 0\}$ > 0 -də σ , $-(d \times d)$ – matrisi, b , $-d$ – ölçülü vektorunun, $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^d : x^d = 0\}$ -də γ , $-d$ – ölçülü vektoru, $\gamma^d \geq 0$ Borel funksiyalarının verildiyi və $\rho \in \mathbb{R}_+$ fərz olunur. Əksedici sərhədə malik

$$dX_t = I_D(X_t) \sigma(X_t) dw_t + I_D(X_t) b(X_t) dt + I_{\partial D}(X_t) \gamma(X_t) d\varphi_t$$

S. d. t.-in həlli qiymətləri uyğun olaraq, $\bar{D}$ və $\mathbb{R}_+$ -dan olan $\mathbf{P}$ – sanki yəqin kəsilməz $\mathbb{A}$ – uzlaşmış $\mathbb{A}$ üzərinə deyilir ki, φ artan prosesdir, $d\varphi_t = I_{\partial D}(X_t) d\varphi_t$, $I_{\partial D}(X_t) dt = \rho(X_t) d\varphi_t$ və bu həll $\mathbf{P}$ – sanki yəqin aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$X_t = X_0 + \int_0^t I_D(X_s) \sigma(X_s) dw_s +$$

924 STOXAŞTİK

$$+ \int_0^t I_D(X_s) b(X_s) dw_s + \int_0^t I_{\partial D}(X_s) \gamma(X_s) d\varphi_s, t \geq 0.$$

Əgər σ və b Lipsits şərtini ödəyərlərsə, γ^d müsbət müəyyəndirsə, $\gamma \in C_b^2(\partial D)$, onda S. d. t.-in həlli vardır və bu həll yeganədir (bax, [4]). Uyğun zəif həllər [5]-də öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения. К., 1968; [2] Le Gall J. F., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1095, p. 51–82; [3] Веретенников А. Ю., «Теория вероятностей и ее примен.», 1981, т. 26, в. 4, с. 685–701; [4] Lions P. L., Sznitman A. S., «Communs Pure and Appl. Math.», 1984, v. 37, № 4, p. 511–37; [5] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ. М., 1986; [6] Портенко Н. И., Обобщенные диффузионные процессы, К., 1982.

STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK simmetrik « стохастическое дифференциальное уравнение симметрическое; symmetric stochastic differential equation » – bax. *Stoxastik differensial tənlik Stratonoviç formada*.

STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; sonlu-fərqli approksimasiya « стохастическое дифференциальное уравнение; конечноразностная аппроксимация; finite difference approximation to a stochastic differential equation » – *stoxastik differensial tənliyin* həllinin təsadüfi ardıcılıq və ya təsadüfi proseslə zamanın diskretləşdirilməsinə əsaslanan approksimasiyasıdır. Sonluferqli approksimasiyalardan ən sadəsi adi differensial tənliyin həllinin approksimasiyası üçün Eyer metodunun stoxastik variantı olan Maruyama approksimasiyasıdır (bax, [1]).

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dw_t, t \in [0, T], X_0 = x$$

S. d. t. verilmişdir, $w(t)$, $t \in [0, T]$ – Viner prosedir. $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$, $- [0, T]$ intervalının bölgüsü, $|\Delta| = \max |t_{i+1} - t_i|$ olsun. X_t , $t \in [0, T]$ təsadüfi prosesinin (və ya X_t , $t \in \Delta$ təsadüfi ardıcılığının) rekurrent şəkildə aşağıdakı kimi təyin olunduğu fərz olunur:

$$X_0^\Delta = x, X_t^\Delta = X_{t_i}^\Delta + a_i(t - t_i) + b_i(w_t - w_{t_i}),$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], a_i = a(t_i, X_{t_i}), b_i = b(t_i, X_{t_i}).$$

Onda «yaxşı» a və b -lər üçün

$$\mathbf{M} \sup_{t \in T} |X_t - X_t^\Delta|^2 \leq c |\Delta|$$

berəbersizliyi doğrudur, mes., $|\Delta| \rightarrow 0$ olduqda $X^\Delta \rightarrow X$ kvadratik orta menada yığılması ödənilir.

Taylor *stoxastik düsturundan* istifadə edərək, daha dəqiq sonluferqli approksimasiyalar almaq olur və bunlar üçün hər hansı müsbət k qiymətində

$$\mathbf{M} \sup_{t \in \Delta} |X_t - X_t^\Delta|^2 \leq c |\Delta|^k$$

berəbersizliyi doğrudur, K – *approksimasiya tərtibi* adlanır. Mes., 2-ci tərtib sonluferqli approksimasiya –

$$X_0^\Delta = x,$$

$$X_{t_{i+1}}^\Delta = X_t^\Delta + a_i \Delta t_i + b_i \Delta w_i + \frac{1}{2} b_i b_i' (\Delta w_i^2 - \Delta t_i),$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \Delta w_i = w_{t_{i+1}} - w_{t_i},$$

$$b_i' = b_x'(t_i, X_{t_i}).$$

Sonluferqli approksimasiya metodu ixtiyari idareolunan semimartinqalları və təsadüfi ölçüləri S. d. t.-lərin çoxölçülü halı üçün də ümumiləşdirilir. EHM-da Monte – Karlo metodu ilə realizasiya üçün sonluferqli approksimasiya münasib hesab olunur.

Əd.: [1] Maruyama G., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1955, v. 4, p. 48–90; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Platen E., «Lect. Notes Cont. and Inf. Sci.», 1987, v. 96, p. 187–93; [4] Gard T. C., Introduction to stochastic differential equations, N. Y., 1988.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK sonlu fəza intervalında «стохастическое дифференциальное уравнение на конечном пространственном интервале; stochastic differential equation on a bounded space interval» – bax, *Stoxastik differensial tənlik* sərhədləri.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; S. d. t.-in həllərinə uyğun ölçülərin mütləq kəsilməzliyi «стохастическое дифференциальное уравнение; абсолютная непрерывность мер, соответствующая решениям С.д.у.; stochastic differential equation; absolute continuity of measures corresponding to solutions» $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ -də qiymətləri uyğun olaraq $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d$, $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ -dən olan $a_1(t, x)$, $a_2(t, x)$, $\sigma(t, x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur. $w(t)$, d – ölçülü Viner prosesi, X_t^0 – Viner prosesi $w(\cdot)$ -dən asılı olmayan təsadüfi vektor olsun. μ_i Borel çoxluqları $\Lambda \subset C([0, T], \mathbb{R}^d)$ üçün $\mu_i(\Lambda) = \mathbf{P}\{X_t(\cdot) \in \Lambda\}$ düsturu ilə təyin olunan ölçü olsun. $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ fəzasında μ_i , $i = 1, 2$ ölçüsü, başlanğıc şərti $X_t(0) = X_t^0$ olan

$$dX_t(t) = a_1(t, X_t(t)) dt + \sigma(t, X_t(t)) dw(t), \quad t \in [0, T]$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinə müvafiq ölçü olsun ($C([0, T], \mathbb{R}^d)$, $t \in [0, T]$ -də verilmiş və $\mathbb{R}^d$ -dən qiymətlər alan kəsilməz funksiyalar fəzasıdır). μ_1 və μ_2 ölçüləri bezi şərtlərlə bir-birilə ekvivalentdir və

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x(\cdot)) = \rho(x(0)) \exp\{R_T(x(\cdot))\}.$$

$\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{P}\{X_2^0 \in dx\}$ paylanmasının $\mathbf{P}\{X_1^0 \in dx\}$ paylanmasına nəzərən sıxlıq funksiyası (bu paylanmaların ekvivalent olduğu fərz olunur), $R_T(x(\cdot))$ isə aşağıdakı düsturla təyin olunan funksional olsun:

$$R_T(x(\cdot)) = \int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))], dx(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T [b^{-1}(t, x(t)) a_1(t, x(t)), a_1(t, x(t))] - b^{-1}(t, x(t)) a_2(t, x(t)), a_2(t, x(t))] dt,$$

$R_T(x(\cdot))$ -in ifadəsində b^{-1} operatoru $b = \sigma \sigma^*$ operatoruna ters operatorudur, sağ tərəfdəki inteqrallardan birincisi aşağıdakı kimi təyin olunur. $x(t)$ prosesini μ_1 ölçüsünə nəzərən

$$x(t) = \int_0^t a_1(s, x(s)) ds + \eta(t)$$

şəklində yazmaq olar və burada $\eta(t)$ – xarakteristikası

$$\langle \eta \rangle_t = \int_0^t b(s, x(s)) ds \text{ olan, } \mathbb{R}^d \text{-də kvadratik inteqrallanan}$$

martinqaldır. Buna görə də, qeyd olunan inteqral iki inteqralın cəmi kimi anlaşılmalıdır, adi inteqral –

$$\int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))], a_1(t, x(t))) dt$$

və $\eta(t)$ martinqal üzrə kvadratik inteqrallanan stoxastik –

$$\int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))]) d\eta(t)$$

inteqralının cəmi kimi. ($\eta(0)$ vektorunun μ_1 ölçüsünə nəzərən

paylanması X_1^0 vektorunun paylanması kimidir.)

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK Stratonoviç formada; kükrəntilərə nəzərən dayanıqlılıq «стохастическое дифференциальное уравнение в форме Стратоновича; устойчивость по отношению к возмущениям; stochastic differential equation in the Stratonovich form; stability with respect to perturbation» –

$$dX_t = b(X_t) \circ dZ_t, \quad X_0 = x \quad (*)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin idarəedici kəsilməz $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^d)$ semi – martinqalının simmetrik müntəzəm approksimasiyalar adlanan approksimasiyalarına nəzərən kəsilməz asılılığını xarakterizə edən xassəsidir. Burada $b = \|b_{ij}\|$ – «olduqca yaxşı» $b_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$, $x \in \mathbb{R}^n$ funksiyalar matrisidir. Əgər

$$\sup_{i \in I} |Z_i^\delta - Z_i| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

münasibəti hər hansı menada ödənilərsə (sanki yəqin, ehtimala görə və ya L^p menada), $\{Z^\delta, \delta > 0\}$ d – ölçülü kəsilməz semimartinqallar ailəsi Z semimartinqalının

$I = [0, T]$ ($T \leq +\infty$) intervalında müntəzəm approximasiası adlanır. Əgər

$$dX_t^\delta = b(X_t^\delta) \circ dZ_t^\delta, \quad t \in I,$$

$X_0^\delta = x$ tənliklərinin «approximəedici» X^δ , $\delta > 0$ həlləri uyğun mənada X -ə yığılarsa, belə approximasiası (verilən tənlik üçün) simmetrik approximasiası adlanır.

Biröclülü halda ($d = 1$)

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) \circ dZ_t, \quad t \geq 0, X_0 = x$$

tənliyi üçün ixtiyari müntəzəm approximasiası simmetrik approximasiasıdır. Bu fakt ilk dəfə 1965-də E. Uonq (E. Wong) və M. Zakai (M. Zakai) tərəfindən Viner prosesi üçün isbat olunmuşdur. Eyni zamanda İto formasında S. d. t.-in həllinin qeyri-dəyənçilik qeyd olunmuşdur. Buna görə də, oxşar tipli dəyənçilik məsələlərinə, bir qayda olaraq, Stratonoviç formada S. d. t. üçün baxılır.

Çoxöclülü halda ($d > 1$) analogi xassə (ixtiyari müntəzəm approximasiasının simmetrikliliyi) yalnız (*) tənliyinin əmsallarının tam inteqrallananlıq şərti (Frobenius şərti), yəni

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} b_{kj} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} b_{kj} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j, l = 1, \dots, d$$

ödənilərsə halda yerinə yetir. Ümumi halda (bəzi texniki məhdudiyyətlərlə) Z semimartinqalının müntəzəm approximasiası $\{Z^\delta = (Z^{\delta_1}, Z^{\delta_2}, \dots, Z^{\delta_d}), \delta > 0\}$, əgər, məs.,

$$Z^{\delta_i} \circ Z^{\delta_j} - Z^i \circ Z^j \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad i, j = 1, \dots, d$$

münasibəti ödənilərsə, simmetrik approximasiası olur. Burada

$$X \circ Y_t = \int_0^t X_s \circ dY_s \quad \text{Stratonoviç stoxastik inteqralıdır.}$$

Simmetrik approximasiasıya mühüm misal

$$Z_t^\delta = Z * \varphi_t = \int_{t-\delta}^t Z_s \varphi^\delta(t-s) ds, \quad t \geq 0$$

kompozisiya tipli approximasiasıdır, burada

$$\varphi \in L^2[0, 1], \quad \int_0^1 \varphi(s) ds = 1, \quad \varphi^\delta(t) = \delta^{-1} \varphi(t\delta^{-1}), \quad t \in [0, \delta].$$

Qeyri – simmetrik approximasiasıların mühüm sinfini də qeyd etmək lazımdır, belə ki, bu approximasiası üçün

$$Z^{\delta_i} \circ Z^{\delta_j} - Z^i \circ Z^j \rightarrow A_{ij}, \quad \delta \rightarrow 0, \quad i, j = 1, \dots, d$$

münasibəti ödənilir, burada A_{ij} – məhdud variasiyalı proseslərdir. Belə approximasiası üçün approximasiası olunan tənliklərin həlləri X^δ Stratonoviç formada S. d. t.-in həllinə yığılır, bu həll isə (*)-dan «düzəlişlər» fərqlənir, bu düzəlişlər isə A_{ij} prosesləri üzrə inteqrallarla ifadə olunur. Qeyri – simmetrik approximasiasıya misal: $Z^\delta = Z + (Z - \hat{Z})^\delta$, $\delta > 0$, burada

$\hat{Z}$ – qeyd olunmuş semimartinqal, $\{(Z - \hat{Z})^\delta, \delta > 0\}$, –

$(Z - \hat{Z})$ semimartinqalının simmetrik approximasiasıdır. Bu

halda $A_{ij} = \left(\langle \hat{Z}^j, Z^i \rangle - \langle Z^j, \hat{Z}^i \rangle \right) / 2$ prosesləri, ümumiyyətlə,

la, sıfır bərabər deyildirlər. Digər misallar, məs., [1]-də verilir.

Əd.: [1] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [2] Мацкявичюс В., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 4, с. 72–84; [3] Picard J., «Probab. Th. Rel. Fields», 1989, v. 81, № 3, p. 383–452.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK Stratonoviç formasında, simmetrik stoxastik differensial tənlik «стохастическое дифференциальное уравнение» в форме Стратоновича симметрическое стохастическое дифференциальное уравнение; **stochastic differential equation** in the Stratonovich form », –

$$dX_t = b(X_s) \circ dZ_s, \quad X_0 = x \quad (1)$$

şəklində stoxastik differensial tənlikdir, dZ_s -in qarşısında $\circ$

simvolu Stratonoviç stoxastik inteqralının işaresidir, $b = \|b_{ij}\|$

– $b_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$ funksiyalarından ibarət

matrisdir, $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^d)$ – hər hansı stoxastik bazis-də

baxılan d – ölçülü kəsilməz semimartinqaldır, $x \in \mathbb{R}^n$. (1)

tənliyinin həlli ilə $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ təsadüfi prosesinə (semimartinqala) deyilir ki, bu proses üçün

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) \circ dZ_s, \quad t \geq 0$$

ve ya açıq şəkildə

$$X_t^i = x_i + \sum_{j=1}^d b_{ij}(X_s) \circ dZ_s^j, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

sanki yəqin ödənilsin. (2) tənliyi aşağıdakı İto S. d. t.-ne ekvivalentdir:

$$X_t^i = x_i + \sum_{j=1}^d \int_0^t b_{ij}(X_s) dZ_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n b_{kl} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} \right) (X_s) d\langle Z^j, Z^l \rangle_s. \quad (3)$$

Məs., (1) tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi (3) tənliyi üçün də bu məsələyə gətirilir. Buna görə, məs., b_{ij} -lərin 1-ci və 2-ci tərtib məhdud törəmələrinin varlığı kifayətdir. Əgər hər hansı j üçün Z^j məhdud variasiyalı proses olarsa (məs., $Z_s^j = t$), onda uyğun əmsalların yalnız 1-ci tərtib kəsilməz məhdud törəmələrinin varlığını tələb etmək kifayətdir.

Stratonoviç stoxastik inteqralı adi inteqrallara xas olan analogi xassələrə malik olduğundan, Stratonoviç formada S. d. t. de adi differensial tənliklərə xas olan (belə tənliklər üçün idarəolunan Z^j martinqalları məhdud variasiyalı proseslər olur) analogi xassələrə malikdir. Buna görə də, Stratonoviç formada S. d. t.-lərini elə məsələlərdə istifadə əlverişlidir ki, bu məsələlərdə problemin qoyuluşuna görə adi və stoxastik differensial tənliklərə eyni

zamanda baxılır və ya daha ümumi halda, ola bilər ki, müxtəlif martinqal hissələri idarəedici semimartinqalları stoxastik differensial tənliklərə baxılır (məs., stoxastik differensial tənliklərin approksimasiyası, sağ tərəfi təsadüfi olan adi differensial tənliklər üçün limit teoremləri, stoxastik həndəsə, stoxastik variasiya hesabı, stoxastik mexanikada). Stratonoviç formada S. d. t. korrelyasiya müddəti az olan və bəyaz küyə yaxın olan real küylü fiziki sistemlərin yaxşı adekvat modeli kimi tez-tez istifadə olunur (bax, məs., [3]).

Z semimartinqalı kəsilen aşağıdakı tip tənliklərə də baxılır:

$$dX_t = b(X_t) \circ dZ_t.$$

Əd.: [1] Стратонович Р. Л., «Вестник Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1964, т. 1, с. 3-12; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [3] Хорстхемке В., Лефевр Р., Индуцированные шумом переходы, пер. с англ., М., 1987.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; təkrar loqarifm qanunu «стохастическое дифференциальное уравнение; закон повторного логарифма; law of the iterated logarithm for a stochastic differential equation»: əgər X_t məhdud σ , b

əmsalları ($\sigma \in C(\mathbb{R}^1)$), biröçlülük

$$dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt, X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə, onda təkrar loqarifm qanunu doğrudur və

$$P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{|X_t - X_0|}{\sqrt{2t \ln \ln 1/t}} = |\sigma(X_0)| \right\} = 1.$$

Kəsilməz diffuziyalı və məhdud aparlı İto prosesləri üçün analogi bərabərlik doğrudur.

Əd.: [1] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK tərs «стохастическое дифференциальное уравнение обратное; reverse stochastic differential equation» – bax, Ters stoxastik differensial tənlik.

STOXASTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK; zəif həll «стохастическое дифференциальное уравнение; слабое решение; weak solution of a stochastic differential equation»: – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası.

$\mathcal{A}$ -ya daxil olunmuş $(\mathcal{A}_t)$ σ – cəbrlərinin artan axını, $\mathcal{A}_t$ -yə nəzərən Viner prosesi $w(t)$ və

$$P \left\{ X_t = x + \int_0^t b(s, X) ds + \int_0^t \sigma(s, X) dw_s, t \geq 0 \right\} = 1$$

münasibətini ödəyən $(\mathcal{A}_t)$ – uzlaşdırılmış X_t prosesindən ibarət $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{A}_t, w(t), X_t, t \geq 0)$ toplusuna

$$dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dw_t, X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin zəif həlli deyilir. Adətən, qısa şəkildə X_t prosesinin özünə zəif həll deyilir və bu halda ehtimal fəzası və Viner prosesinin qeyd olunmadığı fərz olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [3] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [4] Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., [и др.] в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 45. Теория вероятностей – 3, М., 1989.

STOXASTİK DİNAMİK PROQRAMLAŞDIRMA

«стохастическое динамическое программирование; stochastic dynamic programming» – stoxastik optimal idarəetmə məsələlərinin ardıcıl, mərhələli qərarlar qəbul etmə yolu ilə (idarəedici parametrləri seçmə) həlli metodudur. S. d. p. metodunun əsas ideyasını Bellmanın optimallıq prinsipi təşkil edir (bax, [1]); bu prinsipə görə hər bir addımda bu addımın sanki sonuncu addım olduğu qəbul edilib, optimal surətdə davranılmalıdır ki, məqsəd funksionalı bütün mümkün növbəli idarələr üzrə özünün optimumuna bərabər olsun. n – addımlı S. d. p.-nin tipik məsələsi şərti riyazi gözləmələr terminləri ilə ifadə oluna bilər (bax, [7]); digər operator (ümumi) yanasması [6]-da işlənmişdir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_{n-1} \subseteq \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$, – σ – cəbrlər axını,

A – idarələrin (həllərin) ölçülən fəzası, $\Phi(\omega, a_1, \dots, a_n)$, – $\Omega \times A^n$ -də ölçülən funksional (sadelik üçün məhdud) olsun.

Burada a_t , – t addımında seçilən idarə kimi, $\mathcal{A}_{t-1}$, – a_t -nin seçildiyi anda informasiya kimi interpretasiya olunur. $\mathcal{A}_t$ ilə Ω -nin A -ya ixtiyarı $\mathcal{A}_{t-1}$ – ölçülən inikası işarə olunmuşdur. Bütün $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ inikaları üzrə $M[\Phi(\omega, \alpha_1(\omega), \dots, \alpha_n(\omega)) | \mathcal{A}_0]$ kəmiyyətini maksimallaşdırmaq tələb olunur.

$\sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} M[\Phi | \mathcal{A}_t] = w_t(\omega)$ olsun. Fərz olunarsa ki, supremum götürülməsi ölçülənliyə təsir etmir, $w_t, \mathcal{A}_t$ – ölçüləndir, onda optimallıq prinsipi –

$$w_{t-1}(\omega) = \sup_{\alpha_t} M[w_t(\omega) | \mathcal{A}_{t-1}], \quad t = 1, \dots, n \quad (*)$$

optimallıq tənliyi və belə bir hökmə ifadə olunur, əgər $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ funksiyaları (*)-da supremum təmin edərsə, onda

$$w_0(\omega) = M[\Phi(\omega, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*) | \mathcal{A}_0]$$

bərabərliyi doğrudur. Məsələnin qoyuluşu və optimallıq prinsipi bezi əlavələrlə sonsuzaddımlı sxemlər üçün və α_t funksiyalarının seçilməsi məhdudiyyətli sxemlər üçün ümumiləşdirilir; xüsusi hallarda, metod kəsilməz dəyişən t halı üçün də tətbiq olunur.

«S. d. p.»-nin adı tarixən ən dar sinif məsələlər üçün özünə vəsiqə almışdır ki, bu məsələlərdə $\{\mathcal{A}_t\}$ axını, adətən, Markov prosesi olan diskret zamanlı idarəolunan təsadüfi proseslə doğrulur, Φ funksionalı isə bu prosesdən additiv asılıdır.

Bax, İdarəolunan Markov zənciri.

Əd.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Ховард Р.-А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [3] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [4] Флеминг У., Риншел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [5] Bertsekas D. P., Dynamic

programming and stochastic control, N. Y., 1976; [6] Б е р т с е - к а с Д., Ш р и в С., Стохастическое оптимальное управление, пер. с англ., М., 1985; [7] W h i t t l e P., Optimization over time, v. 1-2, N. Y., 1983.

STOXASTİK EKSPERİMENT « стохастический эксперимент; stochastic experiment » – mümkün olan neticelerinden hansı birinin baş verəcəyi əvvəlcədən məlum olmayan eksperimentə deyilir.

Ehtimal nəzəriyyəsində hər bir stoxastik eksperimentə uyğun müəyyən bir Ω çoxluğu qarşı qoyulur. Bu çoxluğun elementləri baxılan eksperimentin mümkün ola bilən nəticələrini dolğun və tam mənası ilə ifadə edir. Ω çoxluğu *elementar hadisələr fəzası*, onun elementləri isə *elementar hadisələr* adlanır. Elementar hadisələr, adətən, ω ilə işarə olunur. Baxılan stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən hər bir hadisə Ω çoxluğunun müəyyən bir altçoxluğudur.

Ehtimal nəzəriyyəsində müəyyən σ – şərtlər kompleksi ödənilməklə təkrarlana bilən stoxastik eksperimentlər və bu eksperimentlərdə baş verəcək və ya baş verməyəcək təsadüfi hadisələr araşdırılır.

Misallar.

1) Üzerində gərb və şəbəkə qeyd olunmuş «düzgün» metal pul bir dəfə atılır. Bu misalda S. e. metal pulun atılması, σ – şərtlər kompleksi isə metal pulun «düzgün» olması və bir metal pulun bir dəfə atılmasından ibarətdir. Elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{G, Ş\}$ kimi işarə edilir, burada $\{G\}$ – pulun gərb üzünün, $\{Ş\}$ isə şəbəkə üzünün yuxarı olmaqla düşməsi nəticələri – elementar hadisələrdir.

2) Görüş məsələsi. İki şəxs – A və B , $[0, T]$ müddəti ərzində görüşməyi şərtləşmişlər. Bu halda S. e. $[0, T] \times [0, T]$ kvadratinin nöqtələri çoxluğu olacaqdır. x ilə A -nın, y ilə B -nin görüş yerinə gəlmə anları işarə olunarsa, elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ çoxluğu olacaqdır.

3) Braun xotik hərəkəti edən zərrəcik maye, yaxud qaz molekulları ilə toqquşma nəticəsində vəziyyətini dəyişir. Bu halda zərrəciyin Braun xotik hərəkəti S. e.-dir. Müəyyən müddət ərzində müşahidə apararaq, onun hərəkət trayektoriyasını çəkmək olar. Zərrəciyin bütün mümkün ola bilən trayektoriyaları çoxluğu elementar hadisələr fəzası, bir-birilə üst-üstə düşməyən trayektoriyalardan hər biri elementar hadisədir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, 1979.

STOXASTİK EKSPONENT « стохастическая экспонента; stochastic exponential » – *təsadüfi prosesdir* və

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s - dX_s, \quad t \geq 0$$

– xətti stoxastik tənliyinin həllidir; X_t – hər hansı $\{\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t), P\}$ stoxastik bazisində verilmiş semimartinqaldır. Bu tənliyin həlli

$$e_t(X) = \exp \left\{ X_t - X_0 - (1/2) \langle X^C \rangle_t \right\} \times \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$$

prosesidir, $\langle X^C \rangle_t$ – X_t prosesinin kəsilməz martinqal komponentinin (ayrışın kəsilməz martinqal toplanan hədd) kvadratik xarakteristikasıdır, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$. Bu həll semimartinqallar sinfində yeganədir (sanki yaqın fərqlənməmə dəqiqliyiylə) (bax, [1]). Əgər X_t və Y_t semimartinqallar olarsa, onda $e_t(X) e_t(Y) = e_t(X + Y + [X, Y])$, burada $[X, Y]$ – bu proseslərin kvadratik kovariasiyasıdır. Ehtimal ölçülərinin mütləq kəsilməzliyi və semimartinqalların sonluölçülü paylanmalarının asılı olmayan artımlı proseslərin paylanmalarına zəif yığılması məsələlərinin öyrənilməsində S. e. mühüm rol oynayır (bax, [2]). X_t kəsilməz martinqal olduğu halda, bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $e_t(X)$ prosesinin martinqal olması üçün kafi şərt

$M \exp \{ (1/2) \langle X \rangle_\infty \} < \infty$ şərtinin ödənilməsidir. Bu istiqamətdə bir sıra sonrakı nəticələr [3]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Dolean-Dade C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1970, Bd 16, S. 181-94; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [3] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1984, т. 35, в. 3, с. 455-71.

STOXASTİK EKİVALENT TƏSADÜFİ PROSES-LƏR « стохастически эквивалентные случайные процессы; stochastically equivalent random processes » – qiymətləri $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ fəzasından olan, eyni bir parametrik

T çoxluğunda, eyni bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş, ixtiyari $t \in T$ qiymətində $P \{ \zeta_1(t) \neq \zeta_2(t) \} = 0$ şərtini ödəyən $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ *təsadüfi proseslərdir* (bəzən belə də deyilir ki, bunlardan biri digərinin modifikasiyasıdır). Əgər

$$P \left\{ \bigcup_{t \in T} \{ \zeta_1(t) \neq \zeta_2(t) \} \right\} = 0 \text{ olarsa, onda bu iki proses}$$

fərqlənməyən proseslər adlanır.

Bu terminlə yanaşı «geniş mənada stoxastik ekvivalentlik» termini də istifadə olunur: müxtəlif ehtimal fəzalarında, lakin eyni bir parametrik çoxluq və eyni bir fəza fəzasında verilmiş, bütün sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşən təsadüfi proseslər cütü geniş mənada stoxastik ekvivalent proseslər adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

STOXASTİK EKİVALENTLİK « стохастическая эквивалентность; stochastic equivalence » – yalnız sıfır ehtimallı çoxluqda fərqlənən təsadüfi kəmiyyətlər arasında ekvivalentlik münasibətidir. Eyni ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də verilən $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ və $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri $P \{ \omega: \xi_1(\omega) = \xi_2(\omega) \} = 1$ şərtini ödəyərsə, onlar stoxastik ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\zeta_1(\omega, t)$ və $\zeta_2(\omega, t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesləri ixtiyari $t \in T$ qiymətində $P \{ \omega: \zeta_1(\omega, t) = \zeta_2(\omega, t) \} = 1$ şərtini ödəyərsə, onlar stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər adlanır. Əgər $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$, $t \in T$ təsadüfi proseslərinin uyğun sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşərsə, bu halda «geniş mənada S. e.» termini də işlədilir.

STOXASTİK FƏRQLƏNMƏMƏZLİK « стохастическая неразличимость; stochastic indistinguishability »

– $\zeta = (\zeta_t(\omega))_{t \geq 0}$ və $\zeta^* = (\zeta_t^*(\omega))_{t \geq 0}$ təsadüfi proseslərinin xassəsidir və bu xassə belə ifadə olunur: $\{\zeta \neq \zeta^*\} = \{(\omega, t) : \zeta_t(\omega) \neq \zeta_t^*(\omega)\}$ təsadüfi çoxluğu əhəmiyyətsiz çoxluqdur, yəni $P\{\omega : \text{elə } t \geq 0 \text{ vardır ki, } (\omega, t) \in \{\zeta \neq \zeta^*\}\} = 0$. Əgər ζ və ζ^* stoxastik fərqli olmayan proseslədirsə, onda bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\zeta_t = \zeta_t^*$

olur, yəni ζ və ζ^* stoxastik ekvivalent proseslərdir. Lakin tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir, amma sağdan (soldan) kəsilməz proseslər üçün stoxastik ekvivalentlikdən S. f. o. alınır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

STOXASTİK HESAB « стохастическое исчисление; stochastic calculus »

stoxastik analiz, – $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0})$ filtrlənmiş ehtimal fəzasında (stoxastik bazisində) verilmiş modellərin ehtimali analizidir. S. h. bütün araşdırmaların əsasında *stoxastik bazis* anlayışının olduğunu aksiomlaşdırır. Stoxastik bazis onunla səciyyəvidir ki, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ standart ehtimal fəzasında əlavə strukturlu azalmayan σ – cəbrlərin (filtrasiyanın) $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$, $s < t$ axını daxil olunur, burada $\mathcal{A}_t$, adətən, t anına qədər müşahidə olunan hadisələrin σ – cəbri kimi interpretasiya olunur.

S. h.-in əsas anlayışları Markov anları (dayanma anları), opsional və öngörül σ – cəbrlər və proseslər, martinqallar və lokal martinqallar, semimartinqallar və onların lokal xarakteristikaları kimi obyektlərdir. S. h.-da *stoxastik integral nəzəriyyəsi* və *İto dəyişənləri əvəzetmə düsturu* mərkəzi yer tutur.

Təsadüfi hadisə və ya prosesin evolyusiyasının dinamikasını təsvir edən bir obyekt kimi filtrasiyanın daxil olunması təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərinə eyni bir nöqteyi – nəzərdən baxmağa imkan verir. Bu fakt təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinə və bu nəzəriyyənin çoxşaxəli tətbiqlərində səmərəli istifadə olunmuşdur: təsadüfi proseslərin filtrasiyası və idarə olunmasında, stoxastik aproksimasiyada, təsadüfi proseslərin statistikasında, maliyyə riyaziyyatında. Bu tətbiqlər isə öz növbəsində S. h.-in inkişafına mühüm təsir göstərmiş və göstərməkdədir.

S. h.-in əsasları A. N. Kolmoqorovun diffuzion Markov prosesləri nəzəriyyəsi və bu nəzəriyyənin xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi üzrə, K. İtonun (K. Ito) stoxastik integrallama nəzəriyyəsi üzrə, Braun hərəkəti və mərkəzlənmiş Puasson ölçüsü üzrə, C. Dubun (J. Doob) martinqallar nəzəriyyəsi üzrə əsərləri zəminində formalaşmışdır. S. h.-in sonrakı inkişafı martinqallar nəzəriyyəsinin, tənliklərin stoxastik integrallanması və stoxastik differensiallanması ilə paralel olmuşdur. Müasir S. h. nəzəriyyəsi 20-ci əsrin 70-ci illərinin sonunda, təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi və kəsilməz və kəsilməz təsadüfi proseslər üzrə (diskret zaman halı da daxil olmaqla) stoxastik integrallanmanın vahid nəzəriyyəsi yarandığı dövrdə formalaşmışdır.

Əd.: [1] Анулова С. В. [и др.], Стохастическое исчисление, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 45, М., 1989; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [4] Жакд Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., т. 1–2, М., 1994; [5] Jacod J., Calcul stochastique et problems de martingales., B., 1979 (Lecture Notes in Math., v. 714).

STOXASTİK HESABLAMA ALQORİTMİ « стохастический вычислительный алгоритм; stochastic computational algorithm »

– təsadüfi ədədlər üzərində əməliyyatlarla qurulan hesablama alqoritmidir ki, sonda hesablama nəticəsi təsadüfi olur. Təsadüfi proseslər və təzahürlərin ədədi tədqiqində istifadə olunan *statistik modelləşdirmə* alqoritmləri, integralların hesablanması, integral tənliklərin həlli, sərhəd məsələləri kimi determinik məsələlərin həlli üçün istifadə olunan *Monte – Karlo metodu* alqoritmləri stoxastik alqoritmlərdir.

S. h. a.-lərinin əsas sinfini təsadüfi düyünərləri interpolasiya və kvadratur düsturların randomlanmış hesablama prosedurları təşkil edir. Burada randomizasiya, adətən, elə aparılır ki, S. h. a. ilə hesablanma nəticəsinin riyazi gözləməsi axtarılan kəmiyyətə bərabər olsun. Son nəticədə statistik qiymət S. h. a.-nin bir neçə realizasiyalarının orta qiyməti kimi götürülür. Böyük dim. – ölçülü məsələlər üçün randomizasiyadan istifadə etməklə EHM vaxt yaddaşının nəzərə çarpan dərəcədə qənaətinə nail olunur (bax, [1] – [4]). Bu isə 2-ci növ integral tənliklərin həlli üçün sonlu cəmlərin randomlanmış metodunun statistik qiymətlərinin çətinliklə qurulduğunu göstərir (bax, [4]). Eyni zamanda alqoritm bir neçə realizasiyasını qurmağa imkan verən çox prosessorlu hesablama sistemlərindən istifadə edildikdə belə, S. h. a.-ləri xüsusilə effektivdir.

Çoxdəyişənli funksiyanın global ekstremumunun təsadüfi axtarışının realizasiyasında xüsusi S. h. a.-ləri qurulur. Belə alqoritmlər funksiyanın qiyməti təsadüfi xəta ilə təyin olunduğu halda olduqca effektivdir.

Əd.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Соболев И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [4] Михайлов Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте – Карло, Новосибир., 1974; [5] Пастригин Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

STOXASTİK HƏNDƏSƏ « стохастическая геометрия; stochastic geometry »

– həndəsə və ehtimal nəzəriyyəsinin qovuşmasında özünə yer tutmuş tətbiqi riyazi fəndir. S. h.-nin riyazi aparatı *integral həndəsə və həndəsi ehtimallar* haqqında məsələləri əhatə edir; *təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi metodları*, xüsusilə də, *nöqtəvi təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsi metodlarının və ideyalarının S. h.-yə daxil olunması S. h.-nin səciyyəvi xüsusiyyətidir.

S. h.-də çoxelementli həndəsi obyektlərin stoxastik modelləşdirilmə yolu ilə araşdırılmasında statistik metodlar tətbiq olunur. Bu halda fərz olunur ki, araşdırılan obyekt seçilmiş təsadüfi *həndəsi prosesin* realizasiyasıdır (və ya realizasiyanın bir hissəsidir). Obyektlər olduqca mürəkkəb ola bilər, məs., bioloji liflər, geoloji parçalanmalar, metalların səpələnməsi və s. strukturlu. Bu obyektlərin koordinat təsviri ədədi verilənlərin «ağlaşıqmaz» çoxluğunun üzərində işləmə tələb edir, bu halda isə hər hansı bir qanunauyğunluğu aşkar etmək çətinidir. Bununla belə, stoxastik modelləşdirmə nəzəriyyədən məlum olan qanunauyğunluqları aşkar etməyə, baxılan strukturları az sayda parametrlərlə təsvir etməyə imkan verir; məs., nöqtələrin, düzxətlərin, müstəvilərin və s. stasionar Puasson prosesi halında bir parametrin – intensivliyin olması kifayətdir. Özünün sadəliyinə görə S. h.-nin əsas modelləri kimi Puasson prosesləri və ikinci dərəcəli proseslər, yeni Puasson prosesinin doğurduğu proseslər, məs., *təsadüfi mozaikalar*, *Bul modelləri* hesab edilir.

S. h.-nin əsas xüsusiyyəti «əsas» fəzada təsir edən qruplara nəzərən invariant paylanmalara malik həndəsi proseslərə maraqdır. Paralel yerindəyişmələr qrupu, Evklid hərəkətləri qrupu və $\mathbb{R}^n$ fəzasının affın çevirmələri qrupu ən çox baxılan qruplardır.

S. h.-nin üç əsas inkişaf istiqamətini qeyd etmək olar: 1) həndəsi prosesləri öyrənən nəzəri istiqamət; 2) verilən stoxastik modelə baxılan realizasiyanın uzlaşma kriterisini və həmçinin modelin parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi metodlarını öyrənən statistik istiqamət (bax, [3]); 3) S. h.-nin nəticələrinin astrofizika, arxeologiya, biologiya və s. məsələlərində tətbiqi ilə məşğul olan tətbiqi istiqamət (bax, [4]). Sonuncu istiqamətdə alınmış işlərdən C. Kendallın və b. araşdırmalarında, *təsədüfi şeyp* anlayışı Lends – Endde (İngiltərə) sanki xətti yerləşmiş üç qədim daşın, yüksək faizlə, olması haqqında məsələnin həllində tətbiq olunur.

S. h. *riyazi steorologiya*, həndəsi statistika (bax, [6]), *təsədüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi* (bax, [1]), məs., kesri dim. – ölçülü təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi (bax, [7]), çoxobrazlılar prosesləri (bax, [8]), riyazi morfologiya və təsvir analizi (bax, [9]) kimi sahələrlə *çuğlaşır*.

Əd.: [1] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Сто́ян Д., Кендалл В., Меске́е Ж., Stochastic geometry and its applications, В., 1987; [3] Geometrical probability and biological structures, В. – [a. o.], 1978; [4] Кендалл Д. Г., Кендалл В. С., «Advances Appl. Probab.», 1980, v. 12, p. 380-424; [5] Рипле́й Б. Д., Spatial statistics, N. Y. – [a. o.], 1981; [6] Мандельброт Б. В., Fractals. From, chance dimension, S. F., 1977; [7] Меске́е Ж., «Probab and Math. Statist.», 1981, v. 2, p. 31-35; [9] Сегге́ра Ж., Image analysis and mathematical morphology, N. Y., 1982.

STOXASTİK XƏTTİ CƏBR « **стохастическая линейная алгебра; stochastic linear algebra** » – xətti cəbrin eməlləri ilə uzlaşdırılmış, yeni cəbr elementlərinin topla- ma və vurma əməlləri və cəbr elementinin meydan elementinə vurulma əməli ilə uzlaşdırılmış ehtimal strukturlu, xətti cəbrdir (meydan üzərində).

S. x. c. anlayışı qiymətlərini xətti cəbrdən alan təsadüfi kəmiyyətlərlə əlaqədar olaraq təbii surətdə yaranır. Bu anlayışa ilk dəfə [1]-də U. Qrenanderin kitabında təsadüf edilir.

S. x. c.-in mühüm hali

$$\Xi = \{m_{ij}\}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$$

təsədüfi kvadrat matrislər cəbri halıdır. Əgər belə matrislər üçün norma

$$\|\Xi\| = \max_i \sum_j |m_{ij}|$$

düsturu ilə təyin olunarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{M} \log \|\Xi_1 \Xi_2 \dots \Xi_n\|$$

limiti vardır (bax, [2]) və limit sonlu olarsa, o,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Xi_1 \Xi_2 \dots \Xi_n\|$$

limitinə bərabərdir. Təsədüfi xətti tənliklər nəzəriyyəsi (bax, *Cəbri təsadüfi tənlik*) S. x. c.-in bir hissəsidir.

Xətti cəbrdə iki binar əməl – toplama və vurma əməlləri olduğundan, ehtimal ölçülərinin kompozisiyasının iki tipinə baxmaq olar: bunlardan birincisi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminə, ikincisi onların hasilinə uyğundur. Xətti cəbr üzərinə qoyulan müəyyən məhdudiyyətlərlə additiv və multiplikativ hallara uyğun limit qanunları arasında əlaqə müəyyənləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Фурстенберг Н., Кестен Н., «Ann. Math. Statist.», 1960, v. 31, № 2, p. 457-69.

930 STOFASTİK

STOXASTİK XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİK ikinci tərtib « **стохастическое линейное параболическое уравнение второго порядка; stochastic linear parabolic equation of second order** » – bax, *Xətti stoxastik parabolik tənlik* ikinci tərtib.

STOXASTİK XƏTTİ REQULYATOR « **стохастический линейный регулятор; stochastic linear controller** » – $w = (w_i)_{i \geq 0}$ vektor Viner prosesinə nəzərən

$$dX_t = (a(t)X_t + c(t)U_t)dt + b(t)dw_t$$

İto differensialı ilə $X = (X_t)_{t \geq 0}$ vektor diffuzion prosesinin idarə olunma məsələsində $U_t = L(t)X_t$ olan $U = (U_t)_{t \geq 0}$ idarəetmə prosesi ilə təsvir olunan anlayışdır.

$$h > 0, H(t) \geq 0, R(t) > 0,$$

$$V_T(U) = \mathbf{M} \left(X_T^* h X_T + \int_0^T (X_t^* H(t) X_t + U_t^* R(t) U_t) dt \right)$$

keyfiyyət funksionalı olarsa (* – transponirəetmə işarəsidir), S. x. r.-un optimal güclənmə əmsalı $L^0(t)$

$$L^0(t) = -R^{-1}(t)c^*(t)P(t)$$

düsturu ilə verilir, burada $P(t)$ –

$$\begin{aligned} -\frac{dP(t)}{dt} &= a^*(t)P(t) + P(t)a(t) + H(t) - \\ &- P(t)c(t)R^{-1}(t)c^*(t)P(t), P(t) = h \end{aligned}$$

Rikkati matris tənliyinin həllidir.

Əd.: [1] Медитч J. С., Stochastic optimal linear estimation and control, N. Y., 1970; [2] Красовский Н. Н., Лидский Э., «Автоматика и телемеханика», 1961, т. 22, № 11, с. 1425-31.

STOXASTİK İNTEQRAL « **стохастический интеграл; stochastic integral** » – ələ inteqraldır ki, ən ümumi halda, semimartinqal olan proseslər üçün «yaxşı» təyin olunur. Fərz olunur ki, $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}(\mathcal{A}_t), \mathbf{P})$ stoxastik bazisində

$H = (H_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesi və $X = (X_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$

semimartinqalı verilmişdir. H təsadüfi prosesinin X semimartinqalı üzrə stoxastik inteqralı

$$\int_0^t H_s dX_s = \left(\int_0^t H_s dX_s \right)_{t \geq 0}$$

və ya

$$H \cdot X = (H \cdot X_t)_{t \geq 0}$$

şəklində işarə olunan və aşağıdakı kimi konstruksiya olunan prosese deyilir. H prosesi $H = YI_{[0]}$ şəklində sadə proses (burada Y , – $\mathcal{A}_0$ – ölçülən məhdud funksiyadır) və ya $H = YI_{[r, s]}$, $r < s$ (burada Y , – $\mathcal{A}_r$ – ölçülən məhdud təsadüfi kəmiyyətdir) olsun; $[0] = \{(\omega, t) : t = 0\}$, $[r, s] = \{(\omega, t) : r < t \leq s\}$. Onda $\mathcal{B}$ stoxastik bazisində verilmiş $X = (X_t)_{t \geq 0}$ semimartinqalı üçün $H \cdot X$ S. i.-i

$$H \cdot X_t = \begin{cases} 0, & \text{əgər } H = Y I_{[0]} \\ Y(X_{s \wedge T} - X_{s \wedge T}), & \text{əgər } H = Y_{[r, s]} \text{ olarsa,} \end{cases} \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur. Sadə təsadüfi H funksiyası üçün (*) düsturu ilə təyin olunan $H \rightarrow H \cdot X$ inikası aşağıdakı xassələrə malik olan, bütün lokal məhdud öngörül H prosesləri üçün genişləndirilə bilər (yene də $H \cdot X$ kimi işarə olunan və H -in X üzrə S. i.-i adlanan):

1) $H \cdot X$ – trayektoriyaları D fəzasından olan (sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalar fəzası) üzvləşdirilmiş prosesdir;

2) $H \rightarrow H \cdot X$ xətti inikasdır, yeni $(aH + K) \cdot X$ və $aH \cdot X + K \cdot X$ prosesləri bir-birindən fərqlənməyən proseslərdir;

3) əgər $(H^n)_{n \geq 1}$ H prosesinə nöqtəvi yığılan öngörül proseslər ardıcılığı, K lokal məhdud öngörül proses olduqda $|H^n| \leq K$ olarsa, onda bütün $t \in \mathbb{R}_+$ üçün $H^n \cdot X_t \rightarrow H \cdot X_t$ ehtimala görə yığılması və hətta $\sup_{s \leq t} |H^n \cdot X_s - H \cdot X_s| \xrightarrow{P} 0$ münasibəti də ödənilir;

4) $H \rightarrow H \cdot X$ inikası stoxastik əhəmiyyətsizlik dəqiqliyi ilə yeganədir, yalnız o halda ki, $H \rightarrow \alpha(H)$ əvvəlki xassələri ödəyən digər, genişləndirilmiş S. i. olduqda, $\alpha(H)$ və $H \cdot X$ S. i.-ləri bir-birindən fərqlənməsinlər.

X – lokal martinqal olduğu halda verilən tərif lokal martinqal üzrə *stoxastik inteqralın* tərfi ilə üst-üstə düşür. Əgər X lokal məhdud variational proses olarsa, onda $H \cdot X$ stoxastik əhəmiyyətsizlik dəqiqliyi ilə, ayrı-ayrı trayektoriyalar üzrə $\int_0^t H_s dX_s$

Stilyes inteqralı ilə üst-üstə düşür.

H -dan X semimartinqalı üzrə $H \cdot X$ S. i.-i da semimartinqaldır; $(H \cdot X)_0 = 0$, $H \cdot X = H \cdot (X - X_0)$, $\Delta(H \cdot X) = H \Delta X$; əgər $X^T = X_0 + I_{[0, T]} \cdot X$ olarsa, onda bütün dayanma anları T üçün $(H \cdot X)^T = (H I_{[0, T]}) \cdot X$ olur; $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$; əgər T öngörül an, $Y \in \mathcal{A}_T$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $(Y I_{[T]}) \cdot X = Y \Delta X_T I_{[T, \infty]}$; əgər $X = X_0 + M + A$ semimartinqalın lokal məhdud variational A prosesi və lokal kvadratik inteqrallanan M martinqalı ilə ayrılışı olarsa, onda ixtiyari lokal məhdud öngörül H prosesi üçün $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$ bərabərliyi doğrudur.

Təbii ki, konkret X prosesləri üçün $H \cdot X$ S. i.-i təyin olunmuş H proseslərinin sinfi lokal məhdud öngörül proseslər sinfindən daha geniş ola bilər. Məs., $w = (w_t)_{t \geq 0}$ – Viner

prosesi halında $\int_0^t H_s dw_s$, $t \geq 0$ S. i.-i İto stoxastik inteqralı adlanır və bu inteqral hər bir $t > 0$ üçün:

$$P \left\{ \int_0^t H_s^2 ds < \infty \right\} = 1 \text{ şərtini ödəyən adaptasiya olunmuş}$$

$H = (H_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ prosesləri üçün təyin olunmuşdur. Əgər $M = (M_t, \mathcal{A}_t)$ lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olarsa,

$$\text{onda } \int_0^t H_s dM_s, \quad t \geq 0 \text{ S. i.-i ele öngörül } H = (H_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$$

prosesləri üçün təyin olunur ki, bunlar üçün $\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s$,

$t \geq 0$ prosesi lokal inteqrallanan proses olur.

$X_0 = 0$, $MX_t = 0$ şərtini ödəyən kvadratik inteqrallanan təsadüfi $X = (X_t)_{t \geq 0}$ prosesləri halında asılı olmayan artımları

proseslər (*AOAP*) sinfi, $\mathcal{M}^2$ martinqalları və ortoqonal artımlı proseslər (*OAP*) sinfi arasında belə əlaqə vardır:

$(AOAP) \subseteq \mathcal{M}^2 \subseteq (OAP)$. Təbii ki, $X \in (OAP)$ prosesi

üzrə $H \cdot X$ S. i.-ni təyin etdikdə H üzərinə $X \in \mathcal{M}^2$ üçün qoyulan şərtlərlə müqayisədə daha ciddi şərtlər qoyulmalıdır. Məs., geniş mənada stoxastik proseslərin L^2 – nezeriyyəsində $H \cdot X$ S. i. ele determinik $H = H(t)$, $t \geq 0$ funksiyaları üçün

$$\text{təyin olunur ki } [X \in (OAP) \text{ halında}] \int_0^t H^2(s) F(ds) < \infty$$

şərtini ödəmiş olsun; $F(s, t) = M[X_t - X_s]^2$.

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ – semimartinqalları halında İto dəyişənləri əvəzləmə düsturu mühüm rol oynayır: bu düstur $Y_t = f(X_t)$

($f = f(x)$ ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyadır) olan $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ prosesi üçün ifadə almağa imkan verir. Bax,

Semimartinqal.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK İNTEQRAL çoxqat «стохастический интеграл кратный; multiple stochastic integral» – bax, Çoxqat Viner inteqralı.

STOXASTİK İNTEQRAL əyrixətli «стохастический интеграл криволинейный; stochastic line integral» – bax, *Stoxastik inteqral* təsadüfi meydanda əyri üzrə.

STOXASTİK İNTEQRAL genişləndirilmiş «стохастический интеграл расширенный; extended stochastic integral» – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı*.

STOXASTİK İNTEQRAL Hilbert fəzasında «стохастический интеграл в гильбертовом пространстве; stochastic integral in Hilbert space» – qiymətləri $\mathfrak{H}$ Hilbert fəzasında olan X

semi – martinqalı üzrə H öngörül prosesinin $\int H_s dX_s$ integralıdır; H_s – $\mathcal{X}$ -dən $\mathcal{F}$ -ya xətti kəsilməz operatorların $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ fəzasından qiymətlər alır. Əgər $\|H_s\|$ prosesi lokal məhdud proses olarsa, S. i. Hilbert fəzasında təyin olunmuşdur. Hilbert fəzasında S. i. skalyar haldakı kimi qurulur və onun xassələri skalyar stoxastik integralın xassələrinə analojiçdir.

Hilbert fəzasında S. i.-in mühüm xüsusi halı kvadratik integrallanan martinqal üzrə Hilbert fəzasında izometrik S. i.-dir. Əgər X $\mathcal{X}$ -də martinqaldırsa və ixtiyari t qiymətində $\mathbf{M}\|X_t\|^2 < \infty$ olarsa, onda ele artan öngörül $\triangleleft X \triangleright_t$ prosesi təyin olunmuşdur ki, bu proses üçün $\|X_t\|^2$ – $\triangleleft X \triangleright_t$ – martinqaldır. Bundan başqa, qiymətləri nüvə operatorları fəzasından olan ele öngörül Q_t prosesi vardır ki, ixtiyari $x, y \in \mathcal{X}$ üçün kvadratik variasiya aşağıdakı düsturla sanki yəqin təyin olunur:

$$\langle (X, x), (X, y) \rangle_t = \int_{[0, t]} \langle Q_s x, y \rangle d\triangleleft X \triangleright_s,$$

Q_t mənfə deyildir və bütün t qiymətlərində öz-özünə qoşmadır.

$\mathcal{Q}_{Q_t}$ – bütün xətti B operatorlarının çoxluğu olsun; bu operatorlar $Q_t^{1/2} \mathcal{X}$ -də təyin olunmuşlar və $Q_t^{1/2} \mathcal{X}$ -i $\mathcal{F}$ -ya köçürən ele operatorlardır ki, $BQ_t^{1/2}$ Hilbert – Şmidt operatorudur. $\|\cdot\|$ Hilbert – Şmidt operatorları fəzasında norma olsun. Əgər ixtiyari t üçün $H_t \in \mathcal{Q}_{Q_t}$ və ixtiyari t üçün

$$\mathbf{M} \int_{[0, t]} \|H_s Q_s^{1/2}\|^2 d\triangleleft X \triangleright_s < \infty$$

olarsa, onda Hilbert fəzasında S. i. $\mathcal{F}$ -də kvadratik integrallanan martinqaldır və o, ixtiyari t üçün

$$\int H_s d\triangleleft X \triangleright_t = \int_{[0, t]} \|H_s Q_s^{1/2}\|^2 d\triangleleft X \triangleright_s$$

«izometriya» xassəsini (sanki yəqin) ödəyir.

Əd.: [1] Metivier M., Semimartingales. A course on stochastic processes, B. – N. Y., 1982.

STOXASTİK İNTEQRAL lokal martinqal üzrə «стохастический интеграл по локальному мартингалу; stochastic integral with respect to local martingale» – aşağıdakı kimi təyin olunan təsadüfi prosesdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinin qeyd olunduğu fərz olunur. $H = (H(t))_{t \geq 0}$ öngörül funksiyasının $M = (M_t)_{t \geq 0}$ lokal martinqalı üzrə

$$H \cdot M_t = \int H(s) dM_s$$

stoxastik integralı – lokal martinqal olan, H və M -in xassələrindən asılı olaraq müxtəlif qaydalarla təyin olunan $H \cdot M = (H \cdot M_t)_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinə deyilir.

932 STOXASTİK

a) Əgər M -in lokal integrallanan variasiyalı trayektoriyaları olarsa və

$$\mathbf{M} \int_0^\infty |H(s)| d\text{var}(M)_s < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda $H \cdot M_t$ S. i. $\int_0^t H(s) dM_s$ Lebeq –

Stilyes integralı ilə üst-üstə düşür. Bu halda $H \cdot M$ trayektoriyaları integrallanan variasiyaya malik müntəzəm integrallanan martinqaldır və

$$\mathbf{M} \sup_{t \geq 0} |H \cdot M_t| \leq \mathbf{M} \text{var}(H \cdot M)_\infty \leq \mathbf{M} \int_0^\infty |H(s)| d\text{var}(M)_s$$

münasibəti doğrudur. Bu tənif

$$\left(\int_0^t |H(s)| d\text{var}(M)_s \right)_{t \geq 0}$$

– artan prosesinin lokal integrallanan olduğu halında doğrudur. Bu halda $H \cdot M$ trayektoriyaları lokal integrallanan variasiyaya malik lokal martinqaldır.

b) əgər M lokal kvadratik integrallanan martinqaldırsa, $\langle M \rangle$ onun kvadratik xarakteristikası və H sadə funksiyadırsa, yeni $0 < t_1 < t_2 \dots$ olduqda λ_i ele $\mathcal{A}_{t_i}$ – ölçülən funksiyalar olarsa ki,

$$\mathbf{M} \int_0^\infty H^2(s) d\langle M \rangle_s < \infty$$

şərti ödənilsin və bu halda

$$H(t) = \lambda_0 \mathbf{I}_{[0, \infty)}(t) + \sum_i \lambda_i \mathbf{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

olarsa, onda $H \cdot M$ müntəzəm kvadratik integrallanan martinqaldır və bu martinqal üçün

$$H \cdot M_t = \sum_i \lambda_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \quad \text{və}$$

$$H \cdot M_\infty = \sum_i \lambda_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

düsturları doğrudur (bərabərliyin sağ tərəfindəki cəm kvadratik orta menada yığılır). Əgər H öngörül funksiya və

$$\mathbf{M} \int_0^\infty H^2(s) d\langle M \rangle_s < \infty$$

olarsa, onda

$$\mathbf{M} \int_0^\infty (H^n(s))^2 d\langle M \rangle_s < \infty, \quad n \geq 1,$$

$$\lim_n \mathbf{M} \int_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2 d\langle M \rangle_s = 0$$

şertlerini ödeyen H^n , $n \geq 1$ sade fonksiyalar ardıcılığını göstermek olar ve yalnız H -dan asılı olan ve yaklaşım edici H^n , $n \geq 1$ ardıcılığından asılı olmayan

$$(H \cdot M)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} H^n \cdot M_\infty$$

tesadüfi kemiyetini tayin etmek mümkündür. Onda

$$H \cdot M = (H \cdot M_t)_{t \geq 0}$$

S. i. –

$$H \cdot M_t = \mathbf{M}((H \cdot M)_\infty | \mathcal{A}_t)$$

S. i. ile muntazem kvadratik integrallanan martinqual kimi tayin olunur. Beley tayin olun S. i. aşğıdaki xasseye malikdir.

$$\lim_n \mathbf{M} \sup_{t \geq 0} (H \cdot M_t - H^n \cdot M_t) = 0;$$

bu xasseye esasen isbat olunur ki, ixtiyari Markov momenti T için $H \cdot M^T = (H \cdot M)^T$ beraberliyi doğrudur, burada X^T , – $(X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ prosesinin işaresidir. Bu sonuncu xasseye esasen

$$\left(\int_0^t H^2(s) d\langle M \rangle_s \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi yalnız lokal integrallanan proses olduğu halda, $H \cdot M$ S. i.-ni tayin etmek olur. Bu halda $H \cdot M$ kvadratik karakteristikası

$$\langle H \cdot M \rangle_t = \int_0^t H^2(s) d\langle M \rangle_s, \quad t \geq 0$$

olan lokal kvadratik integrallanan martinqualdır.

c) eger M trayektoriyaları lokal integrallanan variasiyası olan lokal kvadratik integrallanan martinqual ve H ele öngöröl fonksiya olarsa ki,

$$\left(\int_0^t H^2(s) d\langle M \rangle_s + \int_0^t |H(s)| d \text{var}(M)_s \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi lokal integrallanan proses olsun, onda a) ve b)-de tayin olunmuş S. i.-lar üst-üste düşür.

ç) Eger M lokal kvadratik integrallanan martinqual, $[M, M]$ onun kvadratik variasiyası, H öngöröl fonksiya ve

$$\mathbf{M} \left(\int_0^\infty H^2(s) d[M, M]_s \right)^{1/2} < \infty$$

olarsa, onda

$$\mathbf{M} \int_0^\infty (H^n(s))^2 d\langle M \rangle_s < \infty, \quad n \geq 1$$

ve

$$\lim_n \mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2 d[M, M]_s \right)^{1/2} = 0$$

şertlerini ödeyen H^n , $n \geq 1$ öngöröl fonksiyalar ardıcılığını göstermek mümkündür.

Her bir $n \geq 1$ qiymetinde $H^n \cdot M$ S. i.-i tayin olunmuşdur ve bu S. i. muntazem kvadratik integrallanan martinqualdır ve demeli, $H^n \cdot M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} H^n \cdot M_t$ limiti vardır. $H^n \cdot M_\infty$, $n \geq 1$ tesadüfi

kemiyetler ardıcılığı H -dan asılı, yaklaşım edici H^n , $n \geq 1$ ardıcılığından ise asılı olmayan $(H \cdot M)_\infty$ tesadüfi kemiyetine orta menada yığılır. $H \cdot M$ S. i. $H \cdot M_t = \mathbf{M}((H \cdot M)_\infty | \mathcal{A}_t)$ ile verilen muntazem integrallanan martinqual kimi anlaşılır. Beley tayin olunan S. i. aşğıdaki xasseye malikdir:

$$\lim_n \mathbf{M} \sup_{t \geq 0} |H \cdot M_t - H^n \cdot M_t| = 0;$$

bu xasseye esasen isbat olunur ki, ixtiyari Markov momenti T için $H \cdot M^T = (H \cdot M)^T$ beraberliyi ödenilir. Bu xasseye göre

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s) d[M, M]_s \right)_{t \geq 0} \right)^{1/2}$$

artan prosesi lokal integrallanan proses olduğu halda $H \cdot M$ S. i.-ni tayin etmek olur. Bu halda $H \cdot M$ lokal martinqualdır.

d) Eger M trayektoriyaları lokal integrallanan variasiyalı lokal martinqual olarsa, $[M, M]$ onun kvadratik variasiyası ve H ele öngöröl fonksiya olarsa ki,

$$\mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H^2(s) d[M, M]_s) \right)^{1/2} < \infty$$

şertini ödesin, onda öngöröl fonksiyaların

$$\mathbf{M} \int_0^\infty |H^n(s)| d \text{var}(M)_s < \infty, \quad n \geq 1,$$

$$\lim_n \mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2 d[M, M]_s \right)^{1/2} = 0$$

şertlerini ödeyen H^n , $n \geq 1$ ardıcılığını göstermek olar. Her bir $n \geq 1$ qiymetinde $H^n \cdot M$ S. i. tayin olunmuşdur ve o, muntazem integrallanan martinqualdır ve demeli, $H^n \cdot M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} H^n \cdot M_t$ limiti vardır. $H \cdot M$ S. i. bu halda ç) halındaki kimi tayin olunur.

e) Eger M lokal martinqualdırsa, onda $M = M^1 + M^2$ ayrılışı doğrudur, burada M^1 – trayektoriyaları lokal integrallanan variasiyaya malik lokal martinqual, M^2 – lokal kvadratik integrallanan martinqualdır. Bu halda $H \cdot M$ S. i. ele öngöröl H fonksiyaları için tayin olunur ki,

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s) d[M, M]_s \right)^{1/2} \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi $H \cdot M = H \cdot M^1 + H \cdot M^2$ kaydası ile lokal integrallanan proses olur. Beşe tanım iki faktı esaslanır:

1) H -in gösterilen xassesinde

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s) d[M^i, M^i]_s \right)^{1/2} \right)_{t \geq 0}, \quad i = 1, 2$$

artan prosesleri lokal integrallanan proseslerdir;

2) $H \cdot M$ prosesi $M = M^1 + M^2$ ayrılışının şeklinden aslı deyildir, yeni diger $M = \tilde{M}^1 + \tilde{M}^2$ ayrılışında

$$H \cdot M^1 + H \cdot M^2 = H \cdot \tilde{M}^1 + H \cdot \tilde{M}^2$$

berabərliyi doğrudur.

ə) Əgər M lokal martinqaldırsa, onda $M = M^c + M^d$

ayrılışı vardır, burada M^c – kəsilməz trayektoriyalarlı lokal kvadratik integrallanan martinqal, M^d – sıf kəsilen lokal martinqal-dır. $H \cdot M$ S. i. bu halda ele öngörül H funksiyaları üçün təyin olunur ki,

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s) d[M, M]_s \right)^{1/2} \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi

$$H \cdot M = H \cdot M^c + H \cdot M^d$$

kaydası ile lokal integrallanan prosesdir, bu halda $H \cdot M^d$ -ni ele sıf kəsilen lokal martinqal kimi təyin etmək olar ki,

$$\Delta(H \cdot M^d)_t = H(t) \Delta M_t, \quad t > 0$$

şertini ödəsin: $\Delta X_t = X_t - \lim_{s \uparrow t} X_s$.

Bu tanım və e)-dəki tanım eyni S. i. təyin edir.

$H \cdot M$ lokal martinqalı öngörül H funksiyasının lokal M martinqalı üzrə S. i. adlanır və o, aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1) \quad H \cdot M^T = (H \cdot M)^T,$$

$$2) \quad \Delta(H \cdot M)_t = H(t) \Delta M_t,$$

3) M və $H \cdot M$ – lokal kvadratik integrallanan martinqallar olduğu halda

$$\langle H \cdot M \rangle_t = \int_0^t H^2(s) d\langle M \rangle_s, \quad t > 0,$$

4) $H \cdot M = (H \cdot M)^c + (H \cdot M)^d$ ayrılışında kəsilməz $(H \cdot M)^c$ və sıf kəsilen $(H \cdot M)^d$ komponentləri aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

934 STOXAŞTİK

$$(H \cdot M)^c = H \cdot M^c, \quad (H \cdot M)^d = H \cdot M^d$$

5) Əgər M, N lokal martinqallardırsa və bunlar üçün $H \cdot M$ və $H \cdot N$ S. i.-ları təyin olunmuşdursa, onda

$$H \cdot M + H \cdot N = H \cdot (M + N),$$

$$6) \quad [H \cdot M, H \cdot M]_t = \int_0^t H^2(s) d[M, M]_s, \quad t > 0.$$

Əd.: [1] Ito K., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1944, v. 20, p. 519–24; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Meyer P.-A., «Lect. Notes in Math.», 1967, № 39, p. 72–162; [4] Courtege P. H., «C. r. Acad. Sci.», 1963, t. 256, p. 867–70; [5] Kunita H., Watanabe S., «Nagoya Math. J.», 1967, v. 30, p. 209–45; [6] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [8] Лип-пер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория martinгалов, М., 1986; [9] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXAŞTİK İNTEQRAL martinqal ölçüsü üzrə «стохастический интеграл по martinгальной мере; stochastic integral with respect to martingale measure» – aşağıdakı kimi təyin olunan təsadüfi prosesdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – stoxastik bazis, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{A})$, – $\Omega \times \mathbb{R}_+$ -da öngörül σ – cəbr, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, – $\mathbb{R}_+$ -da Borel σ – cəbri, $(E, \mathcal{E})$ – Luzin fəzası (kompakt metrik fəzanın Borel altçoxlğu E , $\mathcal{E}$ – Borel σ – cəbri ilə), $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R} \times E$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ və $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ -də

$$\mathbf{M} \int_{\tilde{\Omega}^n} \mu(\omega, dt, dx) < \infty, \quad \tilde{\Omega}^n \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad n \geq 1$$

xassəsinə malik $\mu = \mu(\omega, dt, dx)$ tamqiymətli təsadüfi ölçüsü verilmişdir və $\tilde{\Omega}^n \uparrow \tilde{\Omega}$. Beşe μ ölçüsünün kompensatoru $\nu = \nu(\omega, dt, dx)$ ($\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$)-də öngörül təsadüfi ölçüdür. $\mu - \nu = (\mu - \nu)(\omega, dt, dx)$ təsadüfi ölçüsü martinqal ölçü adlanır.

Sıf kəsilen lokal martinqal olan

$$U^*(\mu - \nu) = (U^*(\mu - \nu))_{t \geq 0}$$

təsadüfi prosesinə $\mu - \nu$ martinqal ölçüsü üzrə $\mathcal{P}$ – ölçülən $U = U(\omega, t, x)$ funksiyasının $U^*(\mu - \nu)$ stoxastik integralı deyilir. Əgər

$$\int_E |U(\omega, t, x)| \nu(\omega, \{t\}, dx) < \infty$$

olarsa, sıf kəsilen lokal martinqal $U^*(\mu - \nu)$ özünün sıçrayışları –

$$\Delta(U^*(\mu - \nu))_t = \int_E U(\omega, t, x) (\mu - \nu)(\omega, \{t\}, dx)$$

üzrə, artan proses $\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta(U^*(\mu - \nu))_s)^2 \right)_{t \geq 0}$ lokal

inteqrallanan olduğu halda qurulur. Bu sonuncu şərt $G(U) = (G_t(U))_{t \geq 0}$ artan prosesində (ω simvolu sadəlik üçün qeyd olunmamışdır)

$$G_t(U) = \int_0^t \int_E \frac{(U(s, x) - \hat{U}(s))^2}{1 + |U(s, x) - \hat{U}(s)|} \nu(ds, dx) + \sum_{0 < s \leq t} \frac{\hat{U}^2(s)}{1 + |\hat{U}(s)|} (1 - \nu(\{s\}, E))$$

olarsa, ödənilir, burada $\hat{U}(s) = \int_E U(s, x) \nu(\{s\}, dx)$. $G(U)$

ilə yanaşı

$$G'(U) = (G'_t(U))_{t \geq 0}$$

artan proseslərinə də baxılır,

$$G'_t(U) = \int_0^t \int_E |U(s, x) - \hat{U}(s)| \nu(ds, dx) + \sum_{0 < s \leq t} |\hat{U}(s)| (1 - \nu(\{s\}, E)),$$

bu proseslərin lokal inteqrallananlığı $G(U)$ -nin lokal inteqrallananlığını doğrurur.

Sırf kesilən lokal martinqal $U^*(\mu - \nu)$ aşağıdakı xassələrə malikdir.

1)

$$\begin{aligned} [U^*(\mu - \nu), U^*(\mu - \nu)]_t &= \\ &= \int_0^t \int_E (U(s, x) - \hat{U}(s))^2 \mu(ds, dx) + \\ &+ \sum_{0 < s \leq t} \hat{U}^2(s) (1 - \mu(\{s\}, E)), \end{aligned}$$

2) ixtiyari T Markov anı üçün

$$(U^*(\mu - \nu))^T = U \mathbf{I}_{[[0, T]]^c}(\mu - \nu),$$

$[[\cdot, \cdot]]$ – stoxastik intervaldır.

3) eger $G^1(U)$ lokal inteqrallanan proses olarsa, $U^*(\mu - \nu)$ lokal martinqalının lokal inteqrallanan variasiyası olan trayektoriyaları vardır.

4) eger $G^2(U)$ lokal inteqrallanan proses olarsa, onda $U^*(\mu - \nu)$ lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır və $\langle U^*(\mu - \nu) \rangle = G^2(U)$ onun kvadratik xarakteristikasıdır.

Əd.: [1] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [2] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., «Матем. сб.», 1978, т. 107, с. 364–415; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [4] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK İNTEQRAL martinqal üzrə «стохастический интеграл по мартингалу; stochastic integral with respect to martingale» – bax, *Martinqal*.

STOXASTİK İNTEQRAL; paylanmanın qiymətləri «стохастический интеграл; оценки распределения; distribution estimators for a stochastic integral»:

$$\|\sigma_s\| + |b_s| \leq K, \quad \inf_{\omega, s} \lambda^* \sigma_s \sigma_s^* \lambda \geq \nu |\lambda|^2, \quad (\nu > 0)$$

şərtləri d – ölçülü İto prosesi

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dw_s + \int_0^t b_s ds$$

üçün və ixtiyari ölçülən $f(t, x)$, $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$ və $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ funksiyaları üçün aşağıdakı Krilov statistik qiymətləri doğrudur:

$$M \int_0^T g(X_s) ds \leq N \|g\|_{L_d}(\mathcal{D}), \quad (1)$$

$$M \int_0^T f(s, X_s) ds \leq N \|f\|_{L_{d+1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)}$$

$$N = N(\nu, d, K, T) > 0, \quad (2)$$

burada $\mathcal{D}$, $\mathbb{R}^d$ -də oblast, $\tau = \inf(t \geq 0: X_t \notin \mathcal{D})$. (2) statistik qiymətdən sanki bütün $t > 0$ qiymətlərində X_t prosesinin

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T p(t, y)^{(d+1)/d} dy dt \right)^{d/(d+1)} \leq N$$

qiymətləndirmə ödəyən paylanma sıxlığının varlığı alınır.

Diffuziyası cırlaşan və yox olmağa məruz proseslər üçün daha ümumi statistik qiymətlər, həm də sıçrayışları proseslər üçün analogi statistik qiymətlər doğrudur (bax, [2]). (1), (2) şəklində statistik qiymətləri xüsusi törəməli tənliklər təminlərinde A. D. Aleksandrov statistik qiymətlərinə ekvivalentdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Анулова С., Прагараускас Г., «Литов. матем. сб.», 1977, т. 17, № 2, с. 5–26; [3] Крылов Н. В., Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка, М., 1985.

STOXASTİK İNTEQRAL semimartinqal üzrə «стохастический интеграл по семимартингалу; stochastic integral with respect to semimartingale» – bax, *Semimartinqal*.

STOXASTİK İNTEQRAL simmetrik «стохастический интеграл симметрический; symmetric stochastic integral» – bax, *Semimartinqal*.

STOXASTİK İNTEQRAL(1) Stratonoviç «стохастический интеграл Стратоновича; Stratonovich stochastic integral» – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqral*.

STOXASTİK İNTEQRAL təsadüfi meydanda əyri üzrə «стохастический интеграл вдоль линии в случайном поле; **stochastic line integral**» – inteqrallanma əyrisi – $X(t)$ təsadüfi prosesi inteqrallanma əyrisi və inteqrallanan $\alpha_t(\varphi, h)$ funksiyası – təsadüfi meydan ilə verilən, qiymətləri inteqrallanma əyrisi boyunca baxılan *stoxastik inteqraldır*.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$, $t \geq 0$ – stoxastik bazis, Φ – funksional fəza olsun. Trayektoriyaları Φ -dən olan n – ölçülü $X(t)$ təsadüfi prosesinin $\mathcal{A}_t$ – ölçülən proses olduğu fərz olunur. $\alpha_t(\varphi, h)$ təsadüfi meydanı $\Omega \times \Phi \times \mathbb{R}_+ \times [0, h_0]$ fəzasında təyin olunmuşdur və $\mathbb{R}^n$ -dən qiymətlər alır, dəyişənlərin toplusuna görə ölçülən meydandır (Φ fəzasında σ – cəbr təyin olunmuşdur). $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\max_k \Delta t_k \rightarrow 0$ olduqda

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{t_k}(X, \Delta t_k)$$

inteqral cəmlərinin ehtimala görə limiti varsa, bu limite təsadüfi meydanda əyri üzrə stoxastik inteqral (stoxastik əyri xətti inteqral) deyilir və bu inteqral

$$\int_0^T \alpha_t(X, dt)$$

kimi yazılır. $D_T(\mathbb{R}^n)$, $-\infty, T$ -də təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz, T nöqtəsində isə soldan kəsilməz, $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, $D(\mathbb{R}^n)$, $-\infty, \infty$ -də təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan sağdan kəsilməz, T nöqtəsində soldan kəsilməz, $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, D_s – oturmaqları $[0, s]$ üzərində olan silindrik çoxluqların doğurduğu, D -də σ – cəbr, $\lambda(t)$ – kəsilməz $\mathcal{A}_t$ – ölçülən kəsilməz artan funksiya, $\Lambda(\varphi, \psi)$, $-D_0^2(\mathbb{R}^n)$ -də təyin olunmuş, mənfi olmayan, dəyişənləri toplusu üzrə $D_0(\mathbb{R}^n)$ topologiyasında kəsilməz funksiya və $\Lambda(\varphi, \varphi) = 0$ olsun. $\varphi \in D$ üçün θ_t operatoru aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$(\theta_t \varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(t+s), & s < 0, \\ \varphi(t-0), & s = 0. \end{cases}$$

θ_t operatoru $\varphi \in D$ funksiyasını $\theta_t \varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ funksiyasına çevirir. Belə hesab olunur ki, $\Phi = D_0(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_t(\varphi, h)$ meydanı φ qeyd olunduqda tamamilə ölçülən meydandır və $\alpha_t(\varphi, h) = \alpha(\varphi, t+h) - \alpha(\varphi, t)$.

Stoxastik əyri xətti inteqral təsadüfi proseslər və meydanların aşağıdakı sinifləri üçün mövcuddur.

936 STOXASTİK

I. Məhdud variasiyalı kəsilməz meydan.

Əgər φ qeyd olunduqda $\alpha(\varphi, t)$ meydanı məhdud variasiyalı kəsilməz proses olarsa və bütün $t > 0$ qiymətlərində

$$|\alpha_t(\varphi, h) - \alpha_t(\psi, h)| \leq (\lambda(t+h) - \lambda(t))\Lambda(\varphi, \psi)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda qiymətləri $D_T(\mathbb{R}^n)$ -dən olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən proses üçün

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)$$
 əyri xətti inteqralı

mövcuddur (bax, [1]).

$D_T(\mathbb{R}^n)$ -dən olan, $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$, $Y(t)$ prosesləri üçün

$$\left| \int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt) - \int_0^T \alpha_t(\theta_t Y, dt) \right| \leq \int_0^T \Lambda(\theta_t X, \theta_t Y) d\lambda(t)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Məsələn kimi

$$\alpha_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} a(s, \theta_{-s} \varphi) dK(s)$$

meydanına baxmaq olar. Burada $K(s)$ məhdud variasiyalı kəsilməz funksiya, $a(s, \varphi)$ funksiyası $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times D$ fəzasında təyin olunmuşdur, ölçüləndir, qeyd olunmuş $\varphi \in D$ halında öngörül funksiya, s qeyd olunduqda $\mathcal{A}_s \times \mathcal{D}_s$ -ə nəzərən ölçüləndir, D topologiyasında s -ə nəzərən φ üzrə müntəzəm kəsilməzdir. Bu meydan üçün

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt) = \int_0^T a(t, X(\cdot)) dK(t)$$

– əyri xətti inteqralı vardır.

II. Kəsilməz xarakteristikaya malik lokal kvadratik inteqrallanan təsadüfi meydan.

$\alpha_t(\varphi, h)$, $-h$ -in funksiyası kimi $\mathcal{A}_{t+h}$ axınına nəzərən lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olsun. $B_t(\varphi, \psi, h)$, $-\alpha_t(\varphi, h)$ və $\alpha_t(\psi, h)$ -in qarşılıqlı xarakteristikası olsun. Əgər

$$\|B_t(\varphi, \psi, h) - B_t(\varphi, \varphi, h)\| \leq (\lambda(t+h) - \lambda(t))\Lambda(\varphi, \psi)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $D_T(\mathbb{R}^n)$ -dən olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi üzrə

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)$$
 əyri xətti inteqralı

mövcuddur; $\|\cdot\|$ – xətti operator normasıdır. Yuxarı limit funksiyası kimi bu inteqral kəsilməz xarakteristikaya malik lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır (bax, [1]).

Məs.,

$$\alpha_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} \sigma(s, \theta_{-s} \varphi) d\beta(s) +$$

$$+ \int_t^{t+h} \int_Y c(s, \theta_{-s} \varphi, y) \gamma(dy \times ds)$$

meydanı üçün $\gamma(dy \times ds)$, $-Y \times \mathbb{R}_+$ fəzalar hasilində martinqal ölçü, $\beta(s)$ – kəsilməz martinqal olduğu halda, $\sigma(s, \varphi)$ və $c(s, \varphi, y)$ ($y \in Y$ qeyd olunduqda) ölçülən funksiyaları isə $a(s, \varphi)$ funksiyasının əvvəlki bənddə ödədiyi xassələrə malikdirsə, onda

$$\int_0^T \alpha_t(\theta, X, dt) = \int_0^T \sigma(t, X(\cdot)) d\beta(t) + \int_0^T \int_Y c(t, X(\cdot), y) \gamma(dy \times dt)$$

eyri xətti integralı mövcuddur.

III. Qeyd olunan kəsilmələri olmayan öngörül pilləvari meydanlar.

$\alpha(\varphi, h)$ meydanının hər birinin bir sıçrayışı olan meydanlar cəmi olduğu fərz olunur:

$$\alpha(\varphi, h) = \sum_n \alpha^{(n)}(\varphi, h),$$

$\tau_n(\varphi)$ – sıçrayış anları olsun. Aşağıdakı şərtlər daxil olunur.

1) $V_n(t) = \{(\omega, \varphi) : \sup_{t \leq T} \alpha^{(n)}(\theta, \varphi, T) = 0\}$ çoxluğu üçün

bütün $T > 0$ qiymətlərində $\mathbf{P} \left\{ (\omega, X) \subset \bigcup_n V_n(T) \right\} = 1$.

2) $\tau_n(\varphi)$ funksiyası bütün n qiymətlərində aşağıdakı xassələrə malikdir. İxtiyari $\varphi \in D$, $T > 0$ üçün ələ $\varepsilon > 0$ göstərmək olar ki, bütün $t \leq T$ üçün $\sup_{t \leq T} |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon$

olduqda $\tau_n(\theta, \varphi) = \tau_n(\theta, \psi)$; əgər $\varphi_m \in D_0(\mathbb{R}^n)$ və $\varphi_m \rightarrow \varphi$ D -də ödənilirsə, onda hər hansı m -dən başlayaraq,

$$\tau_n(\varphi_m) = \tau_n(\varphi)$$

berəbərliliyi ödənilir.

3) $X(\cdot)$ -in ixtiyari stoxastik kəsilmə nöqtəsi s və bütün $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbf{P} \{ s \leq \tau_n(\varphi) < s+h | \mathcal{A}_s \} = 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir.

1)–3) şərtləri ödənildikdə

$$\int_0^T \alpha_t(\theta, X, dt)$$

eyri xətti integralı D -yə aid olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi üzrə mövcuddur. Yuxarı limitin funksiyası kimi bu integral sağdan kəsilməz öngörül pilləvari prosesdir (bax, [1]).

$$\alpha_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} \int_Y f(s, \theta_{-s} \varphi, y) \delta(dy \times ds)$$

meydanı, $f(s, \varphi, y)$ funksiyası $c(s, \varphi, y)$ -in xassələrinə malik olduğu halda, $\delta(dy \times ds)$ hər bir t üçün $Y \times [0, t]$ -də sonlu sayda atomları olan, $(Y, \mathbb{R}_+)$ -də nöqtəvi ölçü olarsa, bu bənddə qeyd olunmuş şərtləri ödəyir və

$$\int_0^T \alpha_t(\theta, X, dt) = \int_0^T \int_Y f(s, X(\cdot), y) \delta(dy \times ds).$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

STOXASTİK İNTEQRAL təsadüfi ölçü üzrə «стохастический интеграл по случайной мере; stochastic integral with respect to random measure» – $(X, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında ortoqonal qiymətləri təsadüfi μ ölçüsü üzrə təsadüfi olmayan $f(x)$ funksiyasının integralıdır. $F(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}$ – struktur μ ölçüsü, $L^2(dF)$, $-X$ -də F ölçüsü üzrə kvadratı ilə integrallanan funksiyaların Hilbert fəzası olsun. Təsadüfi ölçü üzrə S. i. əvvəlcə $L^2(dF)$ -dən olan

$$f(x) = \sum_k c_k I_{A_k}(x), \quad A_k \in \mathcal{B}$$

sade funksiyası üçün

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \sum_k c_k \mu(A_k)$$

berəbərliliyi vasitəsilə təyin olunur; sağ tərəfdəki cəm kvadratik orta menada yığılır (bax, [1]). $L^2(dF)$ -dən olan ixtiyari funksiyalar üçün $L^2(dF)$ -dən olan ələ $f_n(x)$ sade funksiyalar ardıcılığı vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\int_X [f(x) - f_n(x)]^2 F(dx) \rightarrow 0.$$

Onda $f_n(x) \mu(dx)$ ($x \in X$) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının kvadratik orta limiti vardır və bu limit $\{f_n(x)\}$ -in seçilməsindən asılı deyildir. Tərifə görə

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \text{l.i.m.} \int_X f_n(x) \mu(dx).$$

Belə təyin olunmuş S. i. adi additivlik və xətilik xassələrindən başqa,

$$\mathbf{M} \int_X f_1(x) \mu(dx) \int_X f_2(x) \mu(dx) = \int_X f_1(x) f_2(x) F(dx)$$

xassəsinə də malikdir. $f(x)$ funksiyasının μ təsadüfi ölçüsü üzrə integrallanması üçün $f(x)$ və μ üçün xüsusi fərziyyələr tələb olunur; bu halda S. i.-in konstruksiyası olduqca çətinləşir (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, М., 1985; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Protter P. H., Stochastic integration and differential equations, B., etc., 1990; [4] Nualart D., Malliavin P., Calcul and related topics, B., etc., 1995; [5] Malliavin P., Stochastic Analysis, B., etc., 1997.

STOXASTİK İNTEGRAL TƏNLİK; martinqal və təsadüfi ölçü üzrə «стохастическое интегральное уравнение по мартингалу и случайной мере; stochastic integral equation with respect to a martingale and a random measure»:

$$\begin{aligned} X_t(\omega) = & N_t(\omega) + \int_0^t a(\omega, s, X_{s-}(\omega)) dK_s(\omega) + \\ & + \int_0^t b(\omega, s, X_{s-}(\omega)) dM_s(\omega) + \\ & + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} f(\omega, s, u, X_{s-}(\omega)) (\mu - \nu)(\omega, ds, du) + \\ & + \int_0^t \int_{|u| > 1} g(\omega, s, u, X_{s-}(\omega)) \mu(\omega, ds, du) \end{aligned}$$

şəklində tənlidir, burada N – verilmiş uzlaşdırılmış proses, K – sonlu variyasiyalı öngörül proses, M – kəsilməz lokal martinqal, μ – tamqiymətli təsadüfi ölçü, ν – μ ölçüsünün kompleksatorudur. M və $\mu - \nu$ üzrə inteqrallar stoxastik inteqrallar, K və μ üzrə inteqrallar Lebeq – Stilyes inteqrallandır. Əgər $a(\omega, s, x)$, $b(\omega, s, x)$, $f(\omega, s, u, x)$ əmsalları x dəyişəni üzrə Lipşits şərtini ödəyərlərsə, onda həll (güclü) vardır və yeganədir. Bu nəticə əmsallar «öngörül» surətdə keçmişdən asılı olduqda da [məs., $a = a(\omega, s, X(\omega))$] doğrudur.

Bu şəkildə tənlilərə (təsadüfi μ və ν ölçülərsiz və əmsalları ω -dan asılı olmadığı halda) ilk dəfə [1] – [2]-də, təsadüfi ölçüli və ω -dan asılı əmsallar halında [3]-də baxılmışdır. «Keçmişdən» asılı əmsallar halı [4] – [5]-də araşdırılmışdır. Zəif həllər [6]-də daxil olunmuşdur. Belə tənliliklər hilbertqiymətli martinqallar üçün [7]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Doleans-Dade C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 36, № 2; [2] Protter P., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 2; [3] Гальчук Л. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 5; [4] Мельников А. В., «Матем. сб.», 1979, т. 110 (152), № 3 (II); [5] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1979, v. 714; [6] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1981, v. 851; [7] Metivier M., Semimartingales, B. – N. Y., 1982.

STOXASTİK İNTERVAL «стохастический интервал; stochastic interval» – aşağıdakı şəkildə verilən intervallardan biridir:

$$\begin{aligned} [[\sigma, \tau]] = & \{(\omega, t) : t \geq 0, \sigma(\omega) \leq t \leq \tau(\omega)\}, \\ [[\sigma, \tau]] = & \{(\omega, t) : t \geq 0, \sigma(\omega) \leq t < \tau(\omega)\}, \\]]\sigma, \tau]] = & \{(\omega, t) : t \geq 0, \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}, \\]]\sigma, \tau]] = & \{(\omega, t) : t \geq 0, \sigma(\omega) < t < \tau(\omega)\}; \end{aligned}$$

burada $\sigma = \sigma(\omega)$ və $\tau = \tau(\omega)$ iki Markov anı olub, $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuşlar, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ azalmayan ailəsi isə bu fəzada $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ alt σ – cəbrləri üzrə təşkil olunmuşdur.

Əd.: [1] Делашерн К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

STOXASTİK KƏSİLMƏZ KEÇİD FUNKSIYASI «стохастически непрерывная переходная функция; stochastically continuous transition function» – bax, Keçid funksiyası Markov prosesi üçün.

STOXASTİK KƏSİLMƏZ TƏSADÜFİ PROSES

«стохастически непрерывный случайный процесс; stochastically continuous random process» – parametrik T çoxluğu və fəza fəzası $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ ilə $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş ele $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir ki, $\zeta(t)$ -nin təsadüfi elementləri $t \rightarrow t_0$ olduqda $\zeta(t_0)$ təsadüfi elementinə ehtimalla görə yığılırlar. Fərz olunur ki, T və $\mathcal{M}$ metrik fəzalardır. $\mathcal{B}$ – $\mathcal{M}$ -in Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir. Bu tərif S. k. t. p.-in t_0 nöqtəsində kəsilməzliyi tərifdir.

Başqa sözlə, əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ üçün ele $\gamma > 0$ tapılsa ki, $\rho(t, t_0) < \gamma$ (r və ρ – uyğun olaraq, $\mathcal{M}$ və T -də metrika işarələmələridir) şərtini ödəyən bütün $t \in T$ üçün

$$P\{r(\zeta(t), \zeta(t_0)) > \delta\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənilsin, onda $\zeta(t)$ prosesi $t_0 \in T$ nöqtəsində stoxastik kəsilməz təsadüfi prosesdir, deyilir.

Əgər proses $T' \subseteq T$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində stoxastik kəsilməz olarsa, onda bu proses T' çoxluğunda stoxastik kəsilməz proses adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

STOXASTİK KONVOLYUSION ümumiləşmiş «стохастическая свертка обобщенная; generalized stochastic convolution» – bax, Ümumiləşmiş stoxastik konvolysiya.

STOXASTİK MATRİS «стохастическая матрица; stochastic matrix» – elementləri menfi olmayan ele kvadrat matrisdir ki, onun hər bir sətir elementlərinin cəmi 1-ə bərabərdir. $n \times n$ – ölçülü ixtiyari P S. m. n sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən hər hansı $X(t)$ Markov zəncirinin keçid ehtimalları matrisidir. S. m.-in bir çox cəbri xarakteristikaları ehtimali interpretasiya ifadə olunur.

P S. m.-nin bütün məxsusi qiymətləri $\{|z| \leq 1\}$ dairəsində yerləşir: vahid ixtiyari P S. m.-nin məxsusi qiymətidir; 1 məxsusi qiymətinin tam bölünmə ədədi $X(t)$ Markov zəncirinin final siniflərinin sayı ilə üst-üstə düşür. Əgər $X(t)$ Markov zəncirinin bütün vəziyyətləri periodu $d \geq 1$ olan əlaqəli vəziyyətlərin yeganə sinfini təşkil edərsə, onda P S. m.-nin bütün xarakteristik ədədlərinin çoxluğu $e^{2\pi i/d}$ -yə vurulmaya nəzərən invariantdır.

1 məxsusi qiymətinə uyğun $P = \|p_{ij}\|$ S. m.-nin hər bir sol məxsusi menfi və sıfır olmayan $\pi = \{\pi_j\}$ vektoru, yeni bütün j -lər üçün

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \quad (*)$$

şərt ilə verilən π vektoru $X(t)$ Markov zəncirinin stasionar ölçüsünü təyin edir. 1 məxsusi qiymətinə uyğun P S. m.-nin hər bir sağ məxsusi mənfəi və sıfır olmayan π vektoru, yeni bütün i -lər üçün

$$\pi_i = \sum_j p_{ij} \pi_j$$

şərt ilə verilən π vektoru $X(t)$ Markov zəncirinin harmonik funksiyasını təyin edir.

Əgər Markov zənciri $X(t)$ erqodikdirsə, onda 1 məxsusi qiymətinin tam bölünmə ədədi 1-ə bərabərdir, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi$ limiti vardır, burada Π – bütün sətirləri π vektoru ilə üst-üstə düşən, (*) və $\sum_i \pi_i = 1$ şərtlərini ödəyən matrisdir. Qeyd olunan yığıl-

manın sürətini məxrəci ixtiyari ρ olan və bu ρ -nun isə P S. m.-nin 1-dən fərqli bütün məxsusi qiymətlərinin modullarından böyük olması şərt ilə, həndəsi silsilə ilə yuxarıdan qiymətləndirmək mümkündür.

Hər bir sətir elementlərinin cəmi 1-i aşmayan, kvadrat mənfəi olmayan P^* matrisi *substoxastik* və ya *semi-stoxastik* matris adlanır. Belə matrisi elə kvadrat P stoxastik matrisinə qədər tamamlamaq olar ki, o, uducu E vəziyyəti olan $X(t)$ Markov zəncirinə uyğun olsun, P^* matrisinə isə, bu halda, qırılan $X(t)$ Markov zəncirinin keçid ehtimallının matrisi kimi baxmaq olar ki, bu zəncir $X(t)$ zənciri ilə onun E vəziyyətinə düşdüyü ana qədər üst-üstə düşür.

Bax, *İkizəstoxastik matris*.

Əd.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [2] Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., М., 1969; [3] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [4] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949.

STOXASTİK MƏHDUDLUQ « стохастическая ограниченность; stochastic boundedness » – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilən təsadüfi kəmiyyətlərin $\mathcal{M}$ çoxluğunun, – ehtimala görə yığılma topologiyası ilə verilən, bütün təsadüfi kəmiyyətlərin topoloji vektor fəzası $L_0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -də $\mathcal{M}$ -in məhdudluğudur. Başqa sözlə, əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $\beta > 0$ tapılsa ki, bütün $X \in \mathcal{M}$ üçün

$$P\{\omega: \Omega: |X(\omega)| > \beta\} < \varepsilon$$

ödənilsin, onda $\mathcal{M}$ çoxluğu *stoxastik məhdud* və ya *ehtimala görə məhdud çoxluq* adlanır.

STOXASTİK MODEL; dayanıqlılıq « стохастическая модель; устойчивость; stability of a stochastic model » – bax, *Dayanıqlılıq (ğı) stoxastik modelin*.

STOXASTİK MODELƏR « стохастические модели; stochastic models » hidrologiyada – hidroloji təzahürlərin elə modelləridir ki, bunları bəzi *təsadüfi proseslər* formasında ifadə edir. Ola bilsin ki, hidrologiyada ilk S. m. çay axarındakı illərarası dəyişmələri təsvir etmək üçün daxil olun-

muşdur (bax, [1]). Hidravlik proseslər zaman üzrə bir ildən bir addımla, əksər hallarda, avtoregressiv – sürüşən orta (çox böyük olmayan tərtilə) qarışıq prosesləri kimi (əksər hallarda) təsvir olunur (bax, [2] – [4]). Belə hidravlik proseslərin spektrləri, adətən, tezlik artdıqca yavaş-yavaş azalır və əksər hallarda mühüm əhəmiyyət kəsb edən maksimumlara malik olmur (bax, [5], [6]). Hidrologiyada S. m. kimi sonsuz yaddaşlı proseslər (bax, *Hörst fenomeni*) və sədd avtoregressiyası (rus. пороговой авторегрессии) tipli təsadüfi proseslərin qeyri – xətti modelləri tətbiq olunur (bax, [7]).

Hidroloji proseslər, bir qayda olaraq, Qauss prosesləri olmadıqdan, əksər hallarda bu proseslərin özlərinin modelləri deyil, onların bəzi funksiyaları, məs., loqarifmi və ya təminatlı üçün modeller qurulur (bax, *Təminatlı ehtimalı hidrologiyada*); bu funksiyaların ehtimal paylanmaları isə Qauss paylanmalarına çox yaxındır. Rus ədəbiyyatında «ümumiləşdirilmiş modellər» adlandırılan modellərdə bunların ümumi şəkli əvvəlcədən verilir, parametrlərin qiymətləri isə ya müşahidədən alınan verilənlər üzrə və ya digər mülahizələr əsasında təyin olunur (bax, məs., [8], [9]).

Bir çox hidroloji proseslər, məs., çay axarı kəmiyyətlərinin variational, nəzərə çarpan mövsüm gedisinin olması ilə xarakterizə olunur, bunun hesabında isə Boks və Cenkins multiplikativ modellərinin (bax, [10]) və ya onların modifikasiyalarının istifadəsi tələb olunur (bax, [2], [11]).

Əd.: [1] Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Расчеты речного стока, М. – Л., 1934; [2] Applied modelling of hydrologic time series, Littleton (Colo.), 1980; [3] Bras R., Rodriguez-Iturbide I., Random functions and hydrology, Reading (Mass.), 1985; [4] Mc Neil L., Umphrey G., (eds.), «Adv. Statist. Sci.», 1987, v. 4; [5] Yevjevich V., «Hydrology Papers», 1977, № 94; [6] Привалский В. Е., Климатическая изменчивость, М., 1985; [7] Tong H., Thanoon B., Gudmundsson G., «Water Research Bull.», 1985, v. 21, № 4, p. 651–61; [8] Раткович Д. Я., Многолетние колебания речного стока, Л., 1976; [9] Музылев С. В., Привалский В. Е., Раткович Д. Я., Стохастические модели в инженерной гидрологии, М., 1982; [10] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [11] Сванидзе Г. Г., Математическое моделирование гидрологических рядов, Л., 1977.

STOXASTİK MODELƏR(i) iqlimin « **стохастические модели климата; climatic stochastic models** » – r fəza koordinatları və t zaman parametrlərindən asılı hər hansı $Y(r, t) = \{Y_i(r, t)\}$, $i = 1, \dots, m$ iqlim xarakteristikaları üzrə differensial tənliklər və ya sistem tənliklər (adi və ya xüsusi törəməli) vasitəsilə, bu tənliklərin isə bəzi əmsalları (deməli, onların həlləri) *təsadüfi funksiyalar* olduğu halda, təsvir edilmiş fiziki – riyazi modellər sinfidir. Tənliklərə daxil olan iqlim xarakteristikaları kimi okean və atmosferin temperaturu, atmosfer təzyiqi, yağıntı miqdarı, buz örtüyünün sahəsi və s. kimi kəmiyyətlərin, fəzanın böyük bir oblası üzrə (məs., bütün yer kürəsi üzrə və ya müəyyən en zonaları üzrə) və zaman üzrə (məs., ay üzrə, mövsüm və ya il üzrə) orta qiymətlərinə baxılır. Bu xarakteristikaların zaman üzrə dəyişmələri həm xarici faktorlardan (Günəşin şüa saçmasından, Yer in orbitinin parametrlərinin fluktuasiyalarından, vulkan püskürmələrindən), həm də hava şəraitindən, yeni zaman üzrə və fəzada sürətlə dəyişən və «küy» rolunu ifadə edən meteoroloji, okeanoloji və hidroloji $X(r, t) = \{X_j(r, t)\}$, $j = 1, \dots, n$ xarakteristikalarından asılıdır. İqlimin S. m.-inə baxılması bu və ya digər, olduqca sadə fiziki modellərdən istifadəyə əsaslanır, belə ki, bu modeller Y iqlim

dəyişənlərinin X «hava» dəyişənlərindən asılılığını təqribən təsvir etməyə imkan verir. Bu halda, mühüm bir faktdan istifadə olunur: X – «hava» dəyişənlərinin seçiyəvi zaman miqyasları τ_X , Y – iqlim dəyişənlərinin zaman miqyasları τ_Y -dən olduqca kiçik olur, yəni $\tau_X \ll \tau_Y$. Buna görə də, fərz etmək olur ki, Y vektoru X vektorunun konkret realizasiyasından o qədər də asılı olmayıb, X -in zaman üzrə ortalanmış hər hansı xarakteristikalarından asılı olur (orta qiymətin hesablandığı T müddəti ele seçilir ki, $\tau_X \leq T \leq \tau_Y$ şərti ödənilsin) (bax, [3]). Orta qiymətləri ilə götürülən qeyd olunan xarakteristikalar $X(r, t)$ vektorunun ehtimal paylanması üzrə təyin olunmuş uyğun ehtimali orta qiymətlərin statistik qiymətləridir (T uzunluğunun realizasiyası üzrə qurulmuş). Çox vaxt $\tau_X \ll \tau_Y$ bərabərsizliyinə əsaslanaraq sadələşdirmə aparılır və bu sadələşdirmə nəticəsində τ_Y -in tərtibinin zaman miqyasları üçün $X(r, t)$ -nin «süretli» dəyişənləri t -nin funksiyası kimi bəyaz küy olur (ehtimal paylanması, ümumiyyətlə, r və t -dən asılı ola bilən). $X(r, t)$ -nin bu növ «süretli» dəyişənləri (təsadüfi qüvvələr) $Y(r, t)$ üçün makroskopik «dinamik tənliyə» daxil olur. Hava fluktuasiyalının təsirini imitasiya edən təsadüfi qüvvələrin parametrləri, müşahidə verilənləri əsasında, bezi doğruxaoxşar hipotezlər əlavə edilərək qiymətləndirilir. Müəyyən şərtlərlə alınan S. m.-in həlli $Y(r, t)$ vektor Markov prosesi olur, bu prosesin çoxölçülü ehtimal sıxlığı $\{p_i(r, t), i = 1, \dots, m\}$ isə *Kolmoqorov tənliklərini* (düz və tərs) ödəyir.

Iqlim S. m.-ne ən sadə misal

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda Y(t) + X(t) \quad (1)$$

– sadələşdirilmiş, istilik balans tənliyinə əsaslanır, burada Y , məs., okean səthinin temperaturu, X – havanın dəyişikliklərindən tez-tez fluktuasiyaya uğrayan isti hava axınına təsvir edən, orta qiyməti sıfıra bərabər olan təsadüfi funksiyadır. Mənfi tərs əlaqəni xarakterizə edən sabit $\lambda > 0$ parametri verilən sistemin xarici mühitlə istilik mübadiləsi əmsalının effektiv istilik tutumuna nisbəti mənasını daşıyır. Əgər $X(t)$ stasionar təsadüfi prosesdirsə, onda $Y(t)$ də spektral sıxlığı $f_Y(\omega) = f_X(\omega)/(\lambda^2 + \omega^2)$ olan stasionar təsadüfi prosesdir. Burada $f_X(\omega)$, – $X(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır və əgər $X(t)$ bəyaz küy olarsa, o sabitə bərabər olur (bax, [1], [3], [4]).

Daha mürəkkəb xətti enerji balans modelləri

$$\frac{dY_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} Y_j + X_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

tənliklər sistemləri ilə təsvir olunurlar, burada $Y_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), – i -ci zona üçün temperaturun qiyməti (və ya temperaturun global meydanının hər hansı bazis üzrə ayrılışının i -ci həddi), λ_{ij} – sistemin müxtəlif komponentləri arasında istilik mübadiləsini xarakterizə edən əmsallar, $X_i(t)$ – fluktuasiya edən isti hava axınlarıdır (bunlar, adətən, i -dən asılı intensivliyə malik bəyaz küylər hesab edilir) (bax, [4]).

(1) və (2) tipli modellərdən, bəzən, nəzərə cərpacaq dərəcədə kiçik miqyaslı kükrentilərin təsiri ilə geniş miqyaslı axınlara kiçik fluktuasiyaların analizində istifadə olunur (məs., küləyin sürətindən yaranan dəyişikliklərin yaratdığı güclü okean axınlının fluktuasiyaları; bax, [2], [4]). (2) tipli xətti S. m.-lərə dəniz buzları sahəsinin evolyusiyası modeli də aid olunur, bu sahələrə buzlaşma və ya ərimə sürətinin fluktuasiyaların təsiridir (bax, [5]).

Iqlim xarakteristikalarının onların müasir qiymətlərindən böyük təsadüfi yayınmalarının analizində qeyri – xətti S. m.-lər tətbiq olunur. Məs., Şimal yarımkürəsinin energetik balansının modeli aşağıdakı stoxastik differensial tənliklər sistemi ilə təsvir oluna bilər:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_\Sigma(t)}{dt} &= v_1(T_\Sigma, T_\Delta) + f_\Sigma(t), \\ \frac{dT_\Delta(t)}{dt} &= v_2(T_\Sigma, T_\Delta) + f_\Delta(t), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

burada T_Σ – yer yarımkürəsi səthinin temperaturu, T_Δ – ekvator-qütb temperaturları fərqi, v_1, v_2 , – T_Σ, T_Δ dəyişənlərinin bezi qeyri – xətti funksiyaları, f_Σ, f_Δ – istilik axınlının sinoptik pulsasiyalarını təsvir edən «təsadüfi qüvvələrdir». Bu model üçün müasir iqlimə müvafiq bir tarazlıq vəziyyətinin ətrafından kükrentisiz (3) tənliklərinin digər mümkün stasionar həllərinin ələfinə təsadüfi keçid müddətinin riyazi gözləməsinin statistik qiyməti alınmışdır. Bu tipli modellərdə kobud statistik qiymətlərin alınması üçün dinamik sistemlərin böyük fluktuasiyaları nəzəriyyəsinin asimptotik metodları tətbiq olunur. Digər analogi qeyri – xətti modellərlə tanışlıq üçün bax, [6], [7].

Əd.: [1] С в и р к у н о в Н. П., Статистические модели климата Земли. Обзор. Сер. Метеорология, в. 4. Обнинск, 1982; [2] Д е м - ч е н к о П. Ф., «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1983, т. 19, № 12, с. 1259–66; [3] H a s s e l m a n n K., «Tellus», 1976, v. 28, № 6, p. 473–85; [4] F r a n k i g n o u l C., «Dynamics of Atmosphere and Oceans», 1979, v. 3, № 2–4, p. 465–79; [5] L e m - k e P., T r i n k l E. W., H a s s e l m a n n K., «J. of Physical Oceanography», 1980, v. 10, № 12, p. 2100–20; [6] S a l t z m a n B., S u t e r a A., E v e n s o n A., «J. of Atmospheric Sci.», 1981, v. 38, № 3, p. 494–503; [7] E g g e r J., «J. of Atmospheric Sci.», 1981, v. 37, № 12, p. 2606–18.

STOXASTİK MÜƏYYƏN PROSES « стохастически определенный процесс; stochastically defined process » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu.

STOXASTİK / EHTİMALİ NÜVƏ « стохастическое ядро; stochastic kernel » – x nöqtəsi və B çoxluğunun ele $K(x, B)$ funksiyasıdır ki, x qeyd olunduqda $K(x, B)$ B üzrə ehtimal paylanmasıdır və qeyd olunmuş ixtiyari B intervalı üçün $K(x, B)$ x -ə görə Ber funksiyasıdır (bax, [1], səh. 188, 240). Bu tərif hətta ümumi fəzalar üçün də doğrudur. K nüvəsinin bütün fəzada təyin olunması sərt deyildir. Əgər x və B Ω çoxluğunun altçoxluqları olarsa, onda K Ω -da topalanmışdır, deyilir. Bəzən qeyri – məxsusi (defektli) paylanmalar olduğu zəruriliyi fərz olunarsa, bu halda S. n. substoxastik nüvə adlanır. S. n. bəzən

$$K(x, B) = \int_B k(x, y) dy \quad (1)$$

integralı ilə də ifadə olunur; bu halda (1) integralındakı $K(x, y)$ funksiyası stoxastik nüvənin sıxlığı adlanır

(ciddi deyilişdə, k Lebeq ölçüsünə və ya uzunluğa nəzərən sıxlıqdır); μ ixtiyari ölçü olarsa, $K(x, dy) = k(x, y) \mu(dy)$ götürülür. Dekart vəziyyətlər fəzaları (və ya daha ümumi) hallarında diskret Markov zəncirləri üçün keçid ehtimalı sırtları ehtimal paylanmaları, elementləri p_{ij} olan *stoxastik matris* ilə verilir. Bu halda x nöqtəsindən hər hansı interval və ya B çoxluğuna keçidə $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında baxılır. Məs., Ω çoxluğu ya bütün fəzanın özü və ya K nüvəsinin toplanıldığı çoxluq ilə üst-üstə düşərsə, x nöqtəsindən B çoxluğuna iki addıma keçid ehtimalını tərifə əsasən

$$K^{(2)}(x, B) = \int_{\Omega} K(x, dy) K(y, B) \quad (2)$$

berabərliyi ilə ifadə etmək olar. (2) münasibəti birinci addımda x nöqtəsindən hər hansı y nöqtəsinə keçid, ikinci addımda isə y nöqtəsindən B çoxluğuna keçid olduğunu ifadə edir. Burada əsas fərziyyə ondan ibarətdir ki, aralıq y nöqtəsi verildikdə keçmiş gələcək keçidləri təsiri yoxdur. n addımda keçid ehtimalı $K^{(n)}$ haqqında analogi mühakimə etmək olar. Əgər $K^{(1)} = K$ götürülərsə, onda m və n -in ixtiyari tam qiymətlərində

$$K^{(m+n)}(x, B) = \int_{\Omega} K^{(m)}(x, dy) K^{(n)}(y, B) \quad (3)$$

düsturu doğrudur. $m = n = 1$ olduqda (3) düsturu (2) düsturu olur. $m = 1$ və $n = 1, 2, \dots$ olduqda keçid ehtimalları $K^{(n)}$ -lər (3) düsturu ilə ardıcıl təyin olunur. x nöqtəsində toplanmış ehtimal paylanmasını $K^{(0)}$ ilə işarə etdikdə (3) düsturu bütün $m \geq 0, n \geq 0$ tam qiymətlərində doğrudur; $K^{(0)}$ Kroneker nüvəsi adlanır. Nüvələr üzərində (3) əməli (ehtimal nəzəriyyəsinə fərqli digər nəzəriyyələrdə də təsadüf olunan) nüvələrin kompozisiyası adlanır. Bu əməl bütün cəhətlərlə matrislərin vurulmasına oxşardır.

$K^{(n)}$ S. n.-lərdir. Əgər K nüvələrinin də sıxlıqları varsa, onda bütün $K^{(n)}$ nüvələrinin də sıxlıqları vardır və

$$k^{(m+n)}(x, z) = \int_{\Omega} k^{(m)}(x, y) k^{(n)}(y, z) dy.$$

Bax, *Ehtimal; keçid ehtimalı, Markov zənciri*.

Əd.: [1] Феллер В. Теория вероятностей и ее приложения. т. 2, пер. с англ., М., 1984; [2] Ловин М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

STOXASTİK OPTİMAL İDARƏETMƏ diskret zamanlı «стохастическое оптимальное управление с дискретным временем; discrete time optimal stochastic control» – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

STOXASTİK ÖLÇÜ «стохастическая мера; stochastic measure» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

STOXASTİK PROSES «стохастический процесс; stochastic process» – bax, *Təsadüfi proses, Stoxastik ardıcılıq*.

STOXASTİK SEMİ – Qrup «стохастическая полугруппа; stochastic semigroup» – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, hər hansı topoloji G semi – qrupundan qiymətlər alan və

$$0 \leq s \leq \tau \leq t \leq T < \infty: X_s^t X_\tau^t = X_s^t, X_t^t = I \pmod{P} \quad (1)$$

təyinedici evolyusional tənliyini ödəyən, ikiparametrlili X_s^t , $0 \leq s \leq t \leq T < \infty$ *təsadüfi kəmiyyətlər* sistemidir, burada $I, -G$ semi – qrupunun vahididir. S. s. [1]-də daxil olunmuş və təsadüfi operatorların stoxastik semi – qrupu kimi öyrənilmişdir. S. s.-un əsas xassələri [1]-də, $0 \leq s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t \leq T$, $\delta_n = \max(t_k - t_{k-1})$ olduqda

$$D(X)_s^t = Y_s^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (X_{t_{k-1}}^{t_k} - I), \delta_n \rightarrow 0$$

münasibətlə təyin olunan, bu semi – qrupun özünün infinitezimal semi – qrupu vasitəsilə öyrənilmişdir.

X_s^t S. s.

$$X_s^t = I + \int_s^t X_s^\tau dY_0^\tau \quad (2)$$

evolyusional stoxastik integral tənliyinin həlli kimi də təyin oluna bilər.

Bu halda mühüm məsələ (2) tənliyinin həllinin $Y_s^t = V_s^t + W_s^t$ kükrəntili halında ifadə olunması haqqında məsələdir, yəni o halda ki, təyinedici infinitezimal V_s^t semi – qrupu digər, ondan asılı olmayan infinitezimal W_s^t semi – qrupu ilə kükrəntiyə məruz qalır. Bu halda (2) tənliyinin ümumi həlli uyğun olaraq, V_s^t və W_s^t üçün onun xüsusi – U_s^t və Z_s^t həllərinin qarışıq hasilii şəklində alınır,

$$X_s^t = (U \boxtimes Z)_s^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n U_{t_{k-1}}^{t_k} Z_{t_{k-1}}^{t_k}, \delta_n \rightarrow 0.$$

S. s. terminləri ilə asılı olmayan artımları $X^{-1}(t_{k-1}) \times X(t_k) = X_{t_{k-1}}^{t_k}$ olan $X(t)$ multiplikativ təsadüfi prosesinin ümumi nəzəriyyəsini, bu prosesin klassik haldakı Levi – Xinqin ifadəsinə uyğun ayrılışının alınmasına qədər, lakin uyğun komponentlərin qarışıq hasiləri terminləri ilə qurmaq olar. (1) tənliyində vurma əməlini operatorların ardıcıl tətbiqi kimi qəbul edərək, S. s. anlayışını evolyusion tipli qeyri – xətti stoxastik tənliklərin həlli üçün istifadə etmək olar (bax, [3], [4]).

Əgər kəsilməzlik şərti ödənilmərsə və ya U_s^t və Z_s^t semi-qrupları asılı ola bilsələrse, sıçrayışlar və ya onların asılılığı üzərinə bezi əlavə şərtlərlə $(U \boxtimes Z)_s^t$ qarışıq hasilii də mövcuddur. Bu halda infinitezimal semi – qrup üçün düstur

$$Y_s^t = D(U \boxtimes Z)_s^t = V_s^t + W_s^t + (V \boxplus W)_s^t$$

şəklində olur, burada

$$(V \boxplus W)_s^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n V_{t_{k-1}}^{t_k} W_{t_{k-1}}^{t_k}, \delta_n \rightarrow 0, \quad (*)$$

tərifə görə (*) V_s^t və W_s^t semi – qruplarının qarışıq cəmi adlanır.

Əd.: [1] Буцаев Г. П., Стохастические полугруппы, К., 1977; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [3] Далекний Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1962, т. 15, в. 5, с. 3–115; [4] Скороход А. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 157–83.

STOXASTİK TÖRƏMƏ « стохастическая производная; stochastic derivative » – Viner prosesini w -nin funksionalları fəzasının $H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ fəzasına hamar funksionallarda adi differensiallama ilə üst-üstə düşən xətti inikasdır. Genişlənmiş stoxastik integral nəzəriyyəsi və Mallyavin hesabında mühüm rola malikdir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A} = \sigma\{w\}$, $\eta \in L^2(\Omega)$ olsun.

I_n – çoxqat Viner inteqralları, $f_n = L^2(\mathbb{R}_+^n, \mathbf{P})$ fəzasından olan simmetrik funksiyalar olduqda, İto teoreminə əsasən (bax, [1])

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(t_1, \dots, t_n)).$$

Stoxastik Skoroxod törəməsi – təyin olunma oblastı

$$\mathcal{D}(D) = \{f_n : \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! n^2 \|f_n\|_n^2 < \infty\}$$

olan,

$$D\eta(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, \cdot))$$

ifadəsilə təyin olunan, $L^2(\Omega)$ -dan H -ə qapalı xətti D operatorudur (bax, [2], [3]).

Əgər $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $L^2(\mathbb{R}_+)$ -da skalyar hasildirsə, onda $D_h \eta = \langle D\eta, h \rangle$ $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ elementində $D\eta$ təsadüfi xətti funksionalının qiymətidir. $D_h \eta$ kəmiyyəti (Mallyavin stoxastik törəməsi adlanan; bax, [4])

$$\sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(\langle f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, \cdot), h(\cdot) \rangle)$$

sırası yığılan bütün η -lar üçün də təyin oluna bilər. Mallyavin S. t.-si istiqamət üzrə differensiallama ilə aşağıdakı qaydada bağlıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – Viner ölçülü kəsilməz funksiyalar fəzası, $w(\omega) = \omega$, $x_t = \int_0^t h_s ds$ olsun, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda

$\varepsilon^{-1}(\eta(\omega + \varepsilon x) - \eta(\omega))$ limiti $L^2(\Omega)$ mənasında vardır və ξ -yə bərabərdir. Onda Mallyavin S. t.-si vardır və o, ξ ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] İто К., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, p. 157–69; [2] Скороход А. В., «Теория вероятностей и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–37; [3] Кабанов Ю. М., Скороход А. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов. (Друскининкай, 25–30 ноября 1974), ч. 1, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [4] Nuallart D., Zakai M., «Probab. Th. Rel. Fields», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80.

942 STOXAŞTİK

STRATEGİYA « стратегия; strategy / policy » – oyunlar nəzəriyyəsi, optimal idarəetmə nəzəriyyəsi, emeliyyatların tədqiqində əsas terminlərdən və fundamental anlayışlardan biridir. Plan, proqramlar, atılacaq addımlar ardıcılığı, atılacaq addımlar üçün qaydalar, dayanma, idarəetmə, qərar qaydaları kimi anlayışlar, xüsusilə də, çoxaddımlı (dinamik) proseslər üçün geniş mənada sinonim kimi istifadə olunur.

S. üçün dəqiq təriflər riyazi nəzəriyyənin uyğun bölməsi kontekstində verilir. Məs., oyunlar nəzəriyyəsində S., strateji oyunun qaydalarına uyğun olaraq, oyunçunun atacağı addımın və ya atacağı addımlar koalisiyasının mümkün davranış qaydasıdır. S. anlayışının istifadə olunduğu sahələrə aid mühüm misal idarəolunan Markov zəncirləri nəzəriyyəsidir (qərarlar qəbulatmanın Markov prosesləri nəzəriyyəsi). Bunlar üçün S. $h = (x_0, a_1, x_1, \dots, a_n, x_n)$ tarixlərindən asılı, idarəetmələr fəzası

A -da $\pi_n(da|h)$ ehtimal ölçüləri ardıcılığıdır, burada x_i – idarəolunan Markov zəncirinin vəziyyəti, a_i – i anında istifadə olunan idarəetmədir.

Bu və ya digər kriteriyə nəzərən optimal və sanki optimal S.-lann varlığı; əsas etibarilə, *optimallıq tənlikləri* (Bellman tənlikləri) və uduş funksiyaları (dəyər) terminləri ilə zəruri və kafi optimallıq şərtləri; optimal və sanki optimal və o cümlədən, ədədi S.-lann qurulması; müxtəlif S.-lar siniflərinə baxılması – S.-nin öyrənilməsi ilə bağlı əsas məsələlərdir.

Bir qayda olaraq, n anında sistemin bu andan sonrakı vəziyyətləri haqqında informasiyadan istifadə etməyən qeyri-antitsipativ funksiya S.-lara baxılır. Ən çox baxılan strategiyalar sinifləri aşağıdakılardır: *randomlanmış* [idarəolunan Markov zəncirləri üçün S. – hər bir n və h üçün uyğun $\pi_n(da|h)$ ölçüləri cırlaşan olduğu halda randomlanmış strategiya adlanır] strategiyalar sinfi; oyunlar nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan *randomlanmış strategiyalar* sinfi; idarəedici təsirin seçilməsi yalnız baxılan an və cari vəziyyətdən asılı olan və sistemin keçmişindən asılı olmayan Markov strategiyalar sinfi; idarəedici təsirin seçilməsi yalnız sistemin cari vəziyyətindən asılı stasionar strategiyalar sinfi; bu və ya digər çoxluqda stasionar strategiyalar sinfi.

Ənənəvi olaraq, ekstremumu bütün mümkün olan S.-lar üzrə ekstremumla üst-üstə düşən S. sinifləri öyrənilir. Məs., müsbət dinamik proqramlamada, yeni additiv mənfəət olmayan funksionalın maksimizasiyası məsələlərində stasionar S.-lar sinfi belə xassəyə malikdir. Son zamanlar bu və ya digər üstünlükləri olan daha dar S.-lar siniflərini axtarmağa maraq artmışdır. Bu və ya digər sinifdə bütün başlanğıc nöqtələri və ya hətta bütün aradakı nöqtələr üzrə müntəzəm optimal (sanki optimal) S.-lann varlığı da mühüm bir məsələdir. Belə S.-lann varlığı baxılan S. sinfi üzrə ekstremum kimi anlaşılan uduş funksiyası üçün optimallıq tənliyinin doğruluğunu təmin edir.

Görülən işlərin ekseriyyəti S.-nin konstruktiv qurulması məsələlərinə, onların optimal strategiyalara yaxınlığının qiymətləndirilməsinə və s.-yə həsr olunmuşdur (bax, məs., [3]). Prinsipial yeni S.-lar sinifləri adaptiv idarəetmə nəzəriyyəsində öyrənilir. İqtisadi dinamika modellərində bu və ya digər mənada stasionar və effektiv trayektoriyalara (magistrallara) gətirən S.-lann varlığına böyük diqqət yetirilir.

Əd.: [1] Юшкевич А. А., Читаев Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [2] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [3] Federgruen A., Markovian control problems, Amst., 1983.

STRATEGİYA; tam sinif « стратегия; полный класс; complete class of strategies » – strategiyaların (həddəci funksiyaların) ələ sinfidir ki, bu sinfə aid olmayan ixtiyari strategiya üçün ələ strategiya tapmaq olar ki, o,

bu sınıftan olsun və ilkin strategiyadan heç də pis olmasın (bax, *Oyunu, iki şəxs. Statistika oyunu*).

STRATONOVİÇ STOXAŞTİK İNTEQRALI « Стратоновича стохастический интеграл; Stratonovich stochastic integral », simmetrik stoxastik integral, – H semimartinqalının X semimartinqalı üzrə $\int H \circ dX$ integralıdır və bu integral üçün adi differensiallama qaydaları doğrudur.

$$\int_0^t H_{s-} \circ dH_s$$

(və ya $H \circ H_t$ və ya $\int_{(0,t)} H_{s-} \circ dX_s$) – Stratonoviç stoxastik integralı, tərifə görə,

$$\int_0^t H_{s-} dX_s + \frac{1}{2} [H^c, X^c]_t \quad (1)$$

cəminə bərabərdir. Bu cəmin sağ tərəfindəki toplanan İto stoxastik integralıdır, $[H^c, X^c] = \langle H^c, X^c \rangle$, – H və X semimartinqallarının uyğun olaraq, kəsilməz martinqal hissələrinin (qarşılıqlı kvadratik xarakteristikası) kvadratik kovariasiyasıdır. Kəsilməz H və X semimartinqalları üçün S. s. i. –

$$\int_0^t H_{s-} \circ dX_s = \int_0^t H_s \circ dX_s$$

aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\begin{aligned} & \text{l.i.p.} \sum_{|\Delta| \rightarrow 0} H_{s_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \\ & = \text{l.i.p.} \sum_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{1}{2} (H_{t_i} + H_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), \end{aligned} \quad (2)$$

burada $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$, – $(0, t]$ intervalının ixtiyari bölgüsü, l.i.p. – ehtimal üzrə limit, $|\Delta| = \max |t_{i+1} - t_i|$,

$s_i = (t_i + t_{i+1})/2$ [$\int_0^t H_s dX_s$ adi stoxastik integralı

l.i.p. $\sum_{|\Delta| \rightarrow 0} H_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ kimi ifadə olunur, müqayisə et].

(2)-də ikinci limit, bəzən, kəsilməz H və X semimartinqalları üçün simmetrik stoxastik integral adlandırılır. Belə tərif verildikdə bu integral

$$\int_0^t H_{s-} dX_s + \frac{1}{2} [H, X]_t$$

kimi ifadə olunur.

Əgər $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ n – ölçülü semimartinqallar olarsa, onda

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^n \int_0^t D_k f(X_{s-}) \circ dX_s^k +$$

$$+ \sum_{0 < s \leq t} \left(f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{k=1}^n D_k f(X_{s-}) \Delta X_s^k \right)$$

bərabərliyi (S. s. i. üçün İto düsturu) doğrudur, məs., $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$, $D_k f(x) = \partial f(x) / \partial x_k$ olduqda

$$\int_0^t X_{s-} \circ dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \circ dX_{s-} - \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$$

olur, yəni S. s. i. üçün, məhdud variasiyalı proseslər üçün olduğu kimi, differensiallama və hisse-hissə integrallama düsturları doğrudur.

(2)-də S. s. i.-nin tərfi birici limit kimi xüsusi hallarda R. L. Stratonoviç və D. Fisk (D. Fisk) tərəfindən bir-birindən asılı olmadan verilmişdir. Buna görə də, S. s. i. bəzən Fisk integralı və ya Fisk–Stratonoviç integralı da adlandırılır. Yuxarıda verilən formal tərif P. Meyera (P. Meyer) və kəsilməz semimartinqallar üçün K. İtoya (K. Itô) məxsusdur.

S. s. i.-ni H funksiyalarının daha geniş sinfi üçün də təyin etmək olur. Məs., əgər $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ olduqda,

$H_t = f(Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^n)$, Y^k semimartinqallar olarsa, onda

kvadratik kovariasiya $[H^c, X^c]$ təyin oluna bilər və (1) cəmi də « yaxşı » xassələrin ödənilməsi ilə S. s. i.-nin təyin olunması üçün yenə də tətbiq oluna bilər (bax, [2]). S. s. i.-nin əsas çatışmayan cəhəti Stratonoviç məna integrallanan proseslər sinfinin İto məna integrallanan proseslər sinfindən dar olmasıdır. Lakin bəzi hallarda S. s. i. daha təbiidir və daha üstün hesab edilir. Ümumiyyətlə isə, İto və ya Stratonoviç integralından hansına üstünlük verilməsi konkret məsələ üçün konkret fərziyyələrə görə belə mənə daşır. Əksər hallarda hər iki integraldan eyni zamanda istifadə olunur, bu isə onunla əlaqədar olur ki, baxılan anda S. s. i.-nin həndəsi və ya analitik xassələrindən və İto integralının ümumiliyindən hansına üstünlük verilir.

Əd.: [1] Стратонович П. Л., «Вестн. Моск. ун-та», 1964, № 1, с. 3–19; [2] Meyer P. A., «Lect. Notes in Math.», 1967, v. 511, p. 245–400; [3] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

λ – **СТРУКТУРА**(u) ehtimali metrikanın « λ – структура вероятностной метрики; λ – structure of a probabilistic metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

ξ – **СТРУКТУРА**(u) ehtimali metrikanın « ξ – структура вероятностной метрики; ξ – structure of a probabilistic metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

СТРУКТУРА ФУНКСИЯ(s_1) « структурная функция; structure function » $X(t)$ heqiqi təsadüfi prosesinin və ya meydanının – $X(t)$ -nin iki nöqtədəki qiymətləri fərqi kvadratının orta qiymətidir, yəni

$$D(t, s) = \mathbf{M}[X(t) - X(s)]^2$$

funksiyasıdır ($t \in \mathbb{R}^1$ və ya $t \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$). Əgər bütün t -lər üçün $\mathbf{M}[X(t)]^2 < \infty$ olarsa, onda

$$D(t, s) = B(t, t) + B(s, s) - 2B(t, s)$$

berabərliyi doğrudur, burada $B(t, s) = \mathbf{M}X(t)X(s)$, $X(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyasıdır. S. f. birinci tərtib stasionar artımlı təsadüfi proseslərin və lokal bircins təsadüfi meydanların (yeni bircins artımlı təsadüfi meydanların) öyrənilməsində tez-tez istifadə olunur; bunlar üçün $D(t, s) = D(t - s)$. Geniş mənada stasionar artımlı təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və geniş mənada lokal bircins təsadüfi meydanların korrelyasion nəzəriyyəsində $X(t)$ təsadüfi funksiyasının əsas statistik xarakteristikası – onun $\Delta_u X(t) = X(t + u) - X(t)$ artımlarının korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M} \Delta_u X(t) \Delta_v X(s) = D(t - s; u, v)$$

bəzən $X(t)$ funksiyasının ümumi struktur funksiyası da adlandırılan funksiyadır. Bu funksiya

$$D(t; u, v) = [D(t + u) + D(t - v) - D(t + u - v) - D(t)]/2 \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilər, odur ki, burada yalnız ən sadə $D(t)$ S. f.-na baxmaq kifayətdir.

Stasionar artımlı proseslərin S. f.-ları $D(t)$ -lər sinfi aşağıdakı şəkildə spektral ayrılığı mümkün olan funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos t\lambda) dF(\lambda) + at^2, \quad (2)$$

burada $a \geq 0$, $F(\lambda)$, λ -nın monoton azalmayan əl funksiyasıdır ki, ixtiyari $\lambda_0 > 0$ üçün

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} dF(\lambda) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \lambda^2 dF(\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\infty} dF(\lambda) < \infty. \quad (3)$$

(1) və (2)-dəki təsadüfi funksiyaların ortoqonal ifadə olunması haqqında Karunen teoreminin köməyiylə stasionar artımlı prosesin özünün spektral ayrılığı çıxandır. $\mathbb{R}^k$ fəzasında lokal bircins təsadüfi meydanların S. f.-ları üçün (2) və (3)-ə analoji düsturlar doğrudur [lakin skalyar dəyişən λ üzrə inteqrallama vektor dəyişən $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ üzrə inteqrallama ilə əvəz olunmalıdır] (bax, [6], [7]).

Stasionar artımlı çoxölçülü proses və ya lokal bircins meydan $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ üçün S. f. $D(t)$ rolunu qarşılıqlı struktur funksiyalar matrisi (başqa sözlə, struktur matris) ifadə edir, yeni

$$D(t) = \|D_{jk}(t)\|_1^n = \|\mathbf{M}[X_j(t+s) - X_j(s)][X_k(t+s) - X_k(s)]\|_1^n.$$

$D_{jk}(t)$ – qarşılıqlı S. f.-ları da (2) ayrılığına yaxın spektral ayrılığa ifadə oluna bilər. Lakin çoxölçülü halda ümumi qarşılıqlı struktur funksiyası –

$$D_{jk}(t; u, v) =$$

$$= \mathbf{M}[X_j(t+s+u) - X_j(t+s)][X_k(s+v) - X_k(s)]$$

bu halda artıq daha sadə $D_{jk}(t)$ funksiyaları ilə ifadə oluna bilər, yalnız əlavə bir şərtlə: $D_{jk}(t; u, v) = D_{kj}(t; u, v)$ şərti ödənilməlidir, bu şərt isə tətbiqdə əksər hallarda ödənilir (bax, məs., [6], [7]).

S. f. anlayışı A. N. Kolmogorov tərəfindən 1940-da daxil olunmuşdur (bax, [1]); stasionar artımlı təsadüfi prosesin S. f.-nın spektral ayrılığı – (2), (3) düsturlarında o alınıb. Başqa bir əlavəliklə bu nəticə 1941-də C. Neyman və İ. Şönberq tərəfindən [3]-də tapılmışdır. A. N. Kolmogorov [2]-də 1941-də vektor lokal bircins təsadüfi meydanların S. f.-larını özünün inkişaf etdirdiyi lokal izotrop turbuləntlik nəzəriyyəsində geniş istifadə etmişdir. «S. f.» terminini A. M. Obuxov daxil etmişdir (bax, [4], [6]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математика и механика. Избранные труды, М., 1985, с. 269–73, 274–77; [2] Колмогоров А. Н., Математика и механика. Избранные труды, М., 1985, с. 281–87, 290–93; [3] Neumann J., Schoenberg I. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 50, № 2, p. 226–51; [4] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.», 1949, т. 13, № 1, с. 58–69; [5] Обухов А. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 67, № 4, с. 643–46; [6] Яглом А. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–337; [6] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967, § 13.

СТРУКТУР ФУНКСІЯ(СИ) sistemin «структурная функция системы; structural function of system» – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

СТРУКТУР МАТРИС «структурная матрица; parastrophic / structure matrix» – ixtiyari

$t_1, t_2 \in T$ üçün $\mathbf{M}[\zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 < \infty$ şərtini ödəyən $\{\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_r(t)\}, t \in T \subseteq \mathbb{R}^1\}$ çoxölçülü kompleks-qiyəmetli təsadüfi prosesinin artımlarının cüt-cüt kovariasiyalarından təşkil olunmuş matrisdir; daha dəqiq,

$$D(t_1, t_2, t_3, t_4) = \|D_{ik}(t_1, t_2, t_3, t_4)\|_{i,k=1}^r$$

struktur matris adlanır, burada

$$D_{ik}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \mathbf{M}\{\zeta_i(t_2) - \zeta_i(t_1) - m_i(t_1, t_2)\} \times \\ \times [\zeta_k(t_4) - \zeta_k(t_3) - m_k(t_3, t_4)].$$

$$m(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(s) - \zeta(t)] = [m_1(t, s), \dots, m_r(t, s)].$$

Stasionar artımlı təsadüfi proseslər üçün $D(t_1, t_2, t_3, t_4)$ və $m(t, t_2)$ funksiyaları arqumentlərin yerindəyişməsindən asılı deyildir. Həqiqi təsadüfi proseslər üçün $D(t_1, t_2, t_3, t_4)$ funksiyası $D(t_1, t_2) = D(t_1, t_2, t_1, t_2)$ funksiyası ilə ifadə oluna bilər.

Əgər $\mu(\Delta) = (\mu_1(\Delta), \dots, \mu_r(\Delta))$ hər hansı T çoxluğunun altçoxluqlarının semi – halqası $\mathfrak{M}$ -də təyin olunmuş ele elementar vektor ortoqonal təsadüfi ölçüdürsə ki,

$$1) \mathbf{M}|\mu(\Delta)|^2 = \mathbf{M} \sum_{k=1}^r |\mu_k(\Delta)|^2 < \infty, \mu(\emptyset) = 0;$$

$$2) \text{ əgər } \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M} \text{ olarsa,}$$

$$\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) \pmod{P};$$

$$3) \quad \mathbf{M}\mu_j(\Delta)\mu_k(\Delta) = m_{jk}(\Delta_1 \cap \Delta_2), \quad \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}, \\ j, k = 1, \dots, r,$$

şərtlərini ödəmiş olsun, onda

$$m(\Delta) = \left\| m_{jk}(\Delta) \right\|_{j,k=1}^r = \mathbf{M}\mu(\Delta)\mu^*(\Delta)$$

matrisi də S. m. adlanır.

Bax, *Struktur funksiya*.

Əd.: [1] Я г л о м А. М., «Успехи матем. науки», 1952, т. 7, в. 5, с. 3–168; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

STRUKTUR MÜNASİBƏTLƏR ANALİZİ
«структурный соотношений анализ; structure relation analysis» – çoxölçülü statistik analizin bölməsidir, burada aşağıdakı tip modelin qurulması ilə bağlı məsələlərin həllərinin statistik metodları cəmlənmişdir. Fərz olunur ki, iki

tesadüfi $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ və $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ vektorları $\mathbf{w} = \lambda_0 + \Lambda \mathbf{v}$ xətti münasibətlə əlaqədirlər, burada λ_0 və Λ uyğun olaraq, $(n+1)$ – vektor və naməlum əmsalların $(n \times m)$ – matrisidir. $\mathbf{w}$ və $\mathbf{v}$ vektorlarının qiymətləri əvəzinə $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ və $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ təsadüfi vektorlarının qiymətləri müşahidə olunur və bu vektorlar aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_x,$$

burada $\mathbf{e}_y = (e_{y_1}, \dots, e_{y_n})^T$ və $\mathbf{e}_x = (e_{x_1}, \dots, e_{x_m})^T$ – ölçmə xətalannın təsadüfi vektorlarıdır. Fərz olunur ki, xətalannın təsadüfi vektoru $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_y^T, \mathbf{e}_x^T)^T$ riyazi gözləməsi sıfır bərabər olan, naməlum diaqonal kovarians $(n+m) \times (n+m)$ – matrisi Ψ^2 ilə verilən çoxölçülü normal paylanmaya malikdir və bu paylanma $\mathbf{v}$ -dən asılı deyildir, yəni $\mathbf{M}(\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = 0$. Xətalannın dispersiyalannın sonlu fərqli olduqları fərz olunur, lakin xüsusi hallarda dispersiyalann bəzilərini bərabər olması və ya sıfır bərabər olması mümkündür. Bütün müşahidələr üçün ümumi hesab edilən λ_0 , Λ

və Ψ^2 parametrləri struktur parametrləri, $\mathbf{v}$ vektorunun $\mathbf{x}$ və $\mathbf{y}$ vektorlarının müşahidələrinin ayrı-ayrı qiymətləri ilə əlaqədar «əsl» qiymətləri təsadüfi parametrlər adlanır.

Struktur münasibətlərinin modelinin qurulması ilə bağlı əsas məsələlərə modelin varlığı və identifikasiyası (yeganəliyi), naməlum parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi və onlann alqoritmik təyini, modelin müşahidə olunan verilənlərə adekvatlığı haqqında hipotezlərin statistik yoxlanılması, struktur parametrlərinin qiymətləri və s. kimi məsələlər aiddir.

$n < m$ şərti ödəniləndə struktur münasibətlər modeli identifikasiya olunur. Modelin identifikasiyası üzrə nəticələr (modelin yeganəliyi üçün zəruri və kafi şərtlər) alınmışdır (bax, [1]).

$(y'_1, x'_1), \dots, (y'_N, x'_N)$ – seçimi verilənləri və ya seçimi ifadə edən asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi vektorlar ardıcılığı olsun. μ_x , λ_0 üçün statistik qiymətlər kimi uyğun olaraq

$$\bar{x} = (1/N) \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{və} \quad \bar{y} = \hat{\Lambda} \bar{x} \quad \text{statistikalarını seçmək olar.}$$

Λ və Ψ^2 struktur parametrlərinin matrislərinin qiymətləndirilməsi müəyyən şəkildə tam ümumiləşmiş problemin məxsusi

qiymətlərinə optimizasiya məsələlərinin həllinə gətirilir. İsbat olunmuşdur ki, belə həll nəticəsində alınan $\hat{\Lambda}$ və $\hat{\Psi}^2$ statistik qiymətləri ciddi tutarlılıq xassəsinə malik olurlar (yəni $N \rightarrow \infty$

olduqda uyğun olaraq, Λ və Ψ^2 parametrlərinə vahid ehtimalla yığılırlar), bu şərtlə ki, bəzi zəif fərziyyələr tələb olunur (məs., $(y', x')^T$ -nin paylanması haqqında fərziyyə irəli sürülmür). Modelin təsadüfi parametrləri üçün tutarlı statistik qiymətlər də vardır (bax, [1]).

Əd.: [1] Б а н н и к о в В. А., в кн.: Статистика. Вероятность. Экономика, М., 1985, с. 20–31.

STRUKTUR ÖLÇÜ «структурная мера; structure measure» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

STRUKTUR PARAMETR «структурный параметр; structure parameter» – bax, *Struktur münasibətlər analizi, Faktor analiz*.

STYUDENT KRİTERİSİ «Стьюдента критерий; Student's test», t – kriteri – normal paylanmaların dispersiyaları naməlum olduğu halda, paylanmaların orta qiymətləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriteridir. Birseçimli və ikiseçimli S. k.-lərindən birseçimli S. k. normal paylanmalı ümumi çoxluqdan təsadüfi seçimin orta qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması üçün kriteridir. İkiseçimli S. k. eyni dispersiyalı normal paylanmalarlı ümumi çoxluqdan iki seçimin orta qiymətlərinin fərqi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün kriteridir.

Birseçimli S. k. n həcmli $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ seçimi hər biri normal qanunla paylanmış, riyazi gözləməsi μ və dispersiyası σ^2 olan n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdən ibarət olsun.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n, \quad s_X^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1),$$

$$t(X) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) / s_X$$

və $C_l(\alpha)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı l -ə bərabər Styudent paylanmasının $1 - \alpha$ səviyyəli kvantili olsun.

$H_1: \mu > \mu_0$ alternativinə qarşı $H_0: \mu \leq \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$t(X) > C_{n-1}(\alpha) \quad (1)$$

münasibətlə təyin olunur.

$H'_1: \mu \neq \mu_0$ alternativinə qarşı $H'_0: \mu = \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$|t(X)| > C_{n-1}(\alpha/2) \quad (2)$$

münasibətlə təyin olunur, burada $t(X) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) / s_X$.

(1) münasibətlə ifadə olunan kriteri birtərəfli S. k., (2) münasibətlə ifadə olunan kriteri ikitərəfli S. k. adlanır. Hər iki kriteri $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (cx_1, \dots, cx_n)$, $0 < c < \infty$ çevirməsinə nəzərən müntəzəm ən güclü invariant kriterilərdir və müntəzəm ən güclü meyilsiz kriterilər, ən ciddi kriterilərdir. $\alpha \geq 1/2$ olduqda birtərəfli S. k. müntəzəm ən güclü kriteridir.

İkiseçimli S. k. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ və $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ – normal paylanmalarlı ümumi çoxluqdan dispersiyaları naməlum

seçimler, X_i və Y_i – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $MY_i = \xi$, $MY_j = \eta$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ və

$$t(X, Y) = \frac{(\bar{Y} - \bar{X})\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2} \sqrt{1/n + 1/m}}$$

olsun.

$H_1: \eta - \xi > 0$ ($H'_1: \eta - \xi \neq 0$) alternativinə qarşı

$H_0: \eta - \xi \leq 0$ ($H'_0: \eta - \xi = 0$) hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$t(X, Y) > C_{n+m-2}(\alpha) \quad (|t(X, Y)| > C_{n+m-2}(\alpha/2))$$

münasibətilə təyin olunur. Hər iki kriteri müntəzəm en güclü meylsiz kriterilərdir və

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \rightarrow \\ & \rightarrow (ax_1 + b, \dots, ax_n + b; ay_1 + b, \dots, ay_m + b), \\ & 0 < a < \infty, \quad -\infty < b < \infty \end{aligned}$$

çevirməsinə nəzərən invariant kriterilərdir.

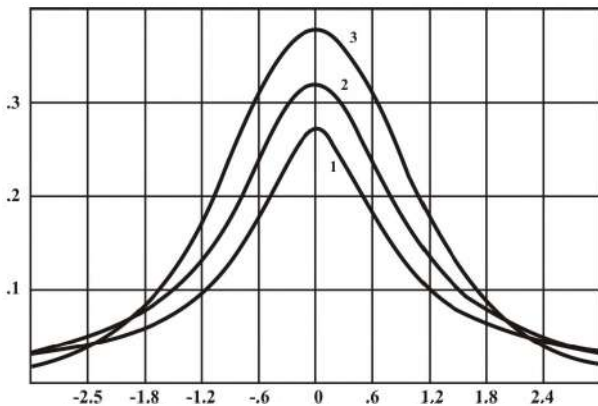
«S. k.» adı onunla bağlıdır ki, U. S. Gosset (W. S. Gosset) Styudent (Student) təxəllüsü ilə ilk dəfə $X_1, \dots, X_n$ asılı olmayan, riyazi gözləməsi sıfır bərabər və dispersiyaları σ^2 olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda $\sqrt{n} \bar{X}/s_X$ statistikası üçün paylanma almışdır.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] «Биометрика», 1908, в. 6, р. 1–25.

STYUDENT PAYLANMASI «Стьюдента распределение; Student's distribution», sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Styudent paylanması, t – paylanma – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil)

$$p(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(-\infty, \infty)$ -da toplanmış kəsilməz ehtimal paylanmasıdır.



Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyaları : (1) $n = 0,5$; (2) $n = 1$, $n = 5$

946 STYUDENT

S. p. –

$$t_n = \xi / \sqrt{\chi_n^2/n}$$

təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır, burada ξ , – $(0, 1)$ parametrləri standart normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət, χ_n^2 , – ξ -dən asılı olmayan, sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər χ^2 – kvadrat paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyətdir. t_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$\begin{aligned} P\{t_n \leq x\} &= S_n(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^x (1 + \xi^2/n)^{-(n+1)/2} d\xi \end{aligned}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Xüsusi halda, $n = 1$ olarsa, onda

$$S_1(x) = 1/2 + \pi^{-1} \arctg x$$

– Koshi paylanmasının paylanma funksiyasıdır. S. p.-nin sıxlıq funksiyası sıfır görə simmetrikdir, buna görə də, ixtiyari $t \in R$ üçün $S_n(t) + S_n(-t) = 1$ olur. S. p.-nin momentləri $m_r = M t_n^r$ yalnız $r < n$ qiymətlərində mövcuddur, bu halda tekterib momentlər sıfır bərabərdir. t_n -in riyazi gözləməsi sıfır bərabərdir.

Cütterib momentlər aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$m_{2r} = n^r \frac{\Gamma(r/2 + 1/2) \Gamma(n/2 - r)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)}, \quad 2 \leq 2r < n;$$

məs., t_n -in dispersiyası $n/(n-2)$ -yə bərabərdir. t_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $S_n(x)$ beta – paylanma funksiyası terminləri ilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$S_n(x) = 1 - B_{n/2, 1/2}(n/(n^2 + x^2))/2.$$

burada $B_{a,b}(z)$, $0 \leq z \leq 1$ – natamam beta – funksiyadır.

S. p. – *Pirson paylanmaları* ailesinin xüsusi – VII tip halıdır. Əgər $n \rightarrow \infty$ olarsa, S. p. standart normal qanuna yığılır, yeni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

M i s a l. $X_1, \dots, X_m$, – a, σ parametrləri normal qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; a və σ naməlumdur. Onda

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$$

statistikaları uyğun olaraq, a və σ parametrləri üçün ən yaxşı meylsiz statistik qiymətlərdir və $\bar{X}$ ilə s^2 stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\sqrt{m}(\bar{X} - a)/\sigma$ normalanmış təsadüfi kəmiyyəti standart normal qanuna tabe olduğundan,

$$\frac{m-1}{\sigma^2} s^2 = \chi_{m-1}^2$$

tesadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $n = m - 1$ -ə bərabər xi – kvadrat qanunu ilə paylandığından və bu tesadüfi kəmiyyətlər asılı olmadıqlarından,

$$\frac{\sqrt{m}(\bar{X} - a)/\sigma}{\sqrt{\chi_m^2/(m-1)}} = \frac{\sqrt{m}(\bar{X} - a)}{s}$$

kesri sərbəstlik dərəcəsi sayı $n = m - 1$ olan S. p.-na tabedir. $t_n(P)$ və $t_n(1 - P) = -t_n(P)$

$$S_{m-1} \left(\frac{\sqrt{m}(\bar{X} - a)}{s} \right) = \begin{cases} P, & 0.5 < P < 1 \\ 1 - P, & n = m - 1 \end{cases}$$

tenliklərinin həlləri olsun. Onda $\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{m}} t_n(P)$ və

$\bar{X} + \frac{s}{\sqrt{m}} t_n(P)$ statistikaları $N(a, \sigma^2)$ normal qanununun

naməlum riyazi gözləməsi üçün etibarlı çoxluğun mehz aşağı və yuxarı sərhədləridir; bu etibarlı çoxluğun etibarlılıq əmsali $2P - 1$ -ə bərabərdir, yəni

$$P \left\{ \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{m}} t_n(P) < a < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{m}} t_n(P) \right\} = 2P - 1.$$

S. p. ilk dəfə 1908-də Student (Student) təxəllüsü ilə yazan U. S. Gosset (W. S. Gosset) tərəfindən istifadə olunmuşdur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] «Student» (Gosset W.), «Biometrika», 1908, v. 6, p. 1-25.

STUDENTLƏNDİRİLMİŞ QALIQ « стьюдентизированный остаток; studentized residual » – regression eksperimentin qalığının onun dispersiyasının meyilsiz statistik qiymətinin kvadrat kökünə nisbətidir. S. q.-a görə seçiləsi (ayırıl olunası) ölçmələrin varlığı haqqında nəticə çıxılır.

SUBADDİTİV ERQODİK TEOREM « субаддитивная эргодическая теорема; subadditive ergodic theorem » – diskret zamanlı subadditiv tesadüfi proses təşkil edən, həqiqi qiymətli tesadüfi kəmiyyətlərin ailəsi – $\{X_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$ üçün asimptotik müddədir, burada $\tilde{X}_{ij}$ tesadüfi kəmiyyətləri aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [1]):

1) $X_{ij} = X_{ik} + X_{kj}$, $i \leq k \leq j$;

2) $\{X_{ij}\}$ tesadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari sonlu toplusunun çoxölçülül (birgə) paylanması $\{X'_{ij}\}$ toplusunun paylanması ilə üst-üstə düşür, burada $X'_{ij} = X_{i+1, j+1}$;

3) $m_j = M(X_{ij})$ riyazi gözləməsi vardır və $\inf j^{-1} m_j = C > -\infty$. Onda $X = \lim_{j \rightarrow \infty} j^{-1} X_{0,j}$ limiti sanki yəqin vardır və $MX = C$. C. Kinqmenin [2]-də isbat etdiyi bu teorem, xüsusi halda, individual erqodik teoremi (Birkhof – Xinqin teoremini) ümumiləşdirir. Subadditiv proseslər sızma nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərində, kombinatorikada, tesadüfi operatorların hasillərinin asimptotikasında təsadüf olunur. Kəsilməz zamanlı

proseslərə, tesadüfi meydanlara və s. aid olan ümumiləşdirilmiş S. e. t.-lər mövcuddur (bax, [5]).

Əd.: [1] Hammersley J., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, № 4, p. 652-80; [2] Kingman J., «Ann. Probab.», 1973, v. 1, № 6, p. 883-909; [3] Derriennic G., «C. r. Acad. sci.», 1975, t. 281 A, p. 985-88; [4] Katznelson G., Weiss B., «Isr. J. of Math.», 1982, v. 42, № 4, p. 291-96; [5] Akcoghlu M., Krengel U., «J. für reine und angew. Math.», 1981, Bd. 323, S. 53-67; [6] Krengel U., Ergodic theorems, B. – N. Y., 1985.

SUB-MARKOV İNİKASI « субмарковское отображение; sub-Markov mapping » – bax, Markov inikası.

SUB-MARKOV KEÇİD FUNKSİYASI « субмарковская переходная функция; sub-Markov transition function » – bax, Keçid funksiyası Markov prosesi üçün.

SUB-MARKOV SEMİ – QRUPU « субмарковская полугруппа; sub-Markov semigroup » – bax, Markov semi – qrupu.

SUBMARTİNQAL « субмартингал; submartingale » – $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, P)$ stoxastik bazisində təyin olunmuş həqiqi qiymətli $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$, $T = \{0, 1, \dots\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$ tesadüfi prosesidir. $\mathcal{B}$ stoxastik bazisi aşağıdakı kimi təyin olunur; $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in T$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$, $s \leq t$, σ – cəbrlərin azalmayan seçilmiş ələ ailəsidir ki $(\mathbb{A}$ əksər hallarda filtrasiya və axın kimi də adlandırılır), ζ prosesi $\mathbb{A}$ – uzlaşan prosesdir (yeni ζ_t , $\mathcal{A}_t$ – ölçüləndir, $t \in T$);

$$M[\zeta_t | \mathcal{A}_s] < \infty, t \in T;$$

$$M[\zeta_t | \mathcal{A}_s] \geq \zeta_s \quad (P - \text{sanki yəqin}), \quad s \leq t \quad (*).$$

$\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ tesadüfi prosesi submartinqal ($\mathbb{A}$ axını və P ölçüsünə nəzərən) adlanır.

Martinqal və supermartinqal anlayışlarının tərifləri (*) münasibətində $\geq$ işarəsinin uyğun olaraq $=$ və $\leq$ işarələrlə əvəz olunması ilə alınır.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Мейер П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

SUBSTOXASTİK MATRİS « полустохастическая / субстохастическая матрица; substochastic matrix » – bax, Stoxastik matris.

SUBSTOXASTİK NÜVƏ « субстохастическое ядро; substochastic kernel » – bax, Stoxastik / ehtimali nüvə.

SUDAKOV – DADLI TEOREMİ « Судакова – Дадли теорема; Sudakov – Dudley theorem » – bax, Tesadüfi proses; trayektoriyaanın requlyarlığı.

SUPEREFFEKTİV STATİSTİK QİYMƏT « сверхэффективная / суперэффективная оценка; super-efficient estimator » – dəqiqliyi statistik qiymətlərin hər hansı $\mathcal{B}$ sinfində effektiv statistik qiymətin dəqiqliyindən az olmayan, parametrin bəzi qiymətlərində isə effektiv statistik qiymətin

dəqiqliyindən də üstün *statistik qiymətdir*. Qiymətləndirmə dəqiqliyi, adətən, keyfiyyət kriterisi $R(\hat{\theta}, \theta)$ ilə ölçülür. Bu funksiya qiymətləndirilən θ parametrinin qiymətlərinə və ixtiyari $\hat{\theta}$ statistik qiymətinə qarşı $\geq$ münasibəti qaydası ilə təyin olunmuş hissəvi nizamlanmış hər hansı çoxluqda bir qiymət qoyur. Fərz olunur ki, statistik qiymətlərin hər hansı bir $\mathcal{G}$ sinfi üçün $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinin qurşayıcısı, yeni $R(\theta) = \inf \{R(\hat{\theta}, \theta) / \hat{\theta} \in \mathcal{G}\}$ funksiyası vardır. Əgər $R(\hat{\theta}, \theta) \equiv R(\theta)$ olarsa, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $\mathcal{G}$ sinfində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən effektiv statistik qiymətdir. Əgər $R(\hat{\theta}, \theta) \leq R(\theta)$ bərabərsizliyi bütün θ -lar üçün ödənilərsə, $R(\hat{\theta}, \theta) < R(\theta)$ bərabərsizliyi isə θ qiymətlərinin boş olmayan çoxluqda, $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin *supereffektivlik çoxluğu* adlandırılan çoxluqda ödənilərsə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $\mathcal{G}$ statistik qiymətlər sinfi və $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən *supereffektiv statistik qiymət* adlanır.

$X_1, \dots, X_n$ – sıxlığı $R(x, \theta)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $R(x, \theta)$, $-\theta \in \Theta$ ($\Theta, -\mathbb{R}^p$ -də oblasıdır) parametrindən olduqca hamar asılı funksiya və $R_n(\hat{\theta}_n, \theta) = M_{\theta} w(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta))$, $-\theta$ parametrinin ixtiyari statistik qiyməti $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ üçün risk funksiyası olsun; w mərkəzi-simmetrik mənfi olmayan kvaziqabarıq funksiyadır. Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində θ -nın statistik qiyməti kimi ixtiyari $\hat{\theta}_n = \{\hat{\theta}_n\}$ ardıcılığı, keyfiyyət kriterisi kimi isə

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_n(\hat{\theta}_n, \theta)$$

limit risk funksiyası istifadə olunur.

$\xi(\theta)$, $-\mathbb{R}^p$ -də verilmiş, orta qiyməti sıfıra bərabər, kovariasion matrisi

$$I(\theta) = \|I_{\theta}(\theta)\| = \left\| M \frac{\partial f(X, \theta) / \partial \theta_i \partial f(X, \theta) / \partial \theta_j}{f^2} \right\|$$

– Fişer informasiya matrisinə tərs kovariasion matris olan Gauss təsadüfi kəmiyyəti olsun. Statistik qiymətlərin müxtəlif təbii sinifləri üçün [məs., $f(x, \theta)$ sıxlığının doğurduğu $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ kəmiyyətinin paylanması limit paylanmasına yığılması θ üzrə lokal müntəzəm olan statistik qiymətlər sinfi üçün, yaxud $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ vektorunun hər bir komponentinin limit paylanmasının medianı və ya orta qiyməti sıfıra bərabər statistik qiymətlər sinfi üçün] $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinin qurşayıcısı $R(\theta) = M[\xi(\theta)]$ funksiyasıdır.

Baxılan halda ixtiyari statistik qiymətin ($\hat{\theta}$) supereffektivlik çoxluğunun ölçüsü sıfıra bərabərdir (bax, [1]).

$R(\theta)$ funksiyası modifikasiya olunmuş

$$r(\hat{\theta}, \theta) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta' - \theta| < \delta} R_n(\hat{\theta}_n, \theta')$$

948 SUPERMARTİNGAL

kriterisi üçün də qurşayıcıdır. $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən S. s. q., ümumiyyətlə, mövcud deyildir. Bundan başqa, hər bir komponenti $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən θ vektorunun uyğun komponentinin effektiv statistik qiyməti olan statistik qiymətlər sinfində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən də S. s. q. yoxdur (bax, [2]).

S. s. q.-ə aid ilk misal Hodcse (Hodges, bax, [1]) məxsusdur. X_i – riyazi gözlemləri θ olan, dispersiyaları 1-ə bərabər Gauss təsadüfi kəmiyyətləri olsun, $\bar{X}_n = n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$.

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \bar{X}, & \text{əgər } |\bar{X}| > n^{-1/4}, \\ \alpha \bar{X}, & \text{əgər } |\bar{X}| \leq n^{-1/4}, \quad |\alpha| < 1 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan Hodcse statistik qiyməti $\theta = 0$ nöqtəsində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən supereffektiv kriteridir [lakin $r(\hat{\theta}, \theta)$ -ya nəzərən effektiv deyildir].

Əgər X_i orta qiymətləri θ , kovariasion matrisi cırlaşmayan matris olan, $\mathbb{R}^p$ -də verilmiş Gauss təsadüfi vektorları olarsa, onda $p > 2$ olduqda $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən effektiv, eyni zamanda da $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən supereffektiv kriterilər vardır. Belə statistik qiymətlərə misal Ceyms – Steyn statistik qiymətidir.

Əd.: [1] L e C a m L., «Univ. California Publ. Statist.», 1953, v. 1, p. 277–330; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

SUPERMARTİNGAL «супермартингал; supermartingale» – $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində təyin olunmuş, həqiqi qiymətli $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesidir. (T – elementlərinin arasında $\leq$ qaydası ilə nizamlanmış zaman anları çoxluğudur); $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in T$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$, $s \leq t$, $-\sigma$ – cəbrlərin azalmayan seçilmiş ailəsidir (bəzən filtrasiya və a x i n kimi də adlandırılan) ($T = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$).

Əgər ζ prosesi $\mathbb{A}$ – uzlaşan proses (yeni ζ_t , $-\mathcal{A}_t$ – ölçüləndirir, $t \in T$);

$$M[\zeta_t | \mathcal{A}_s] < \infty, t \in T;$$

$$M[\zeta_t | \mathcal{A}_s] \geq \zeta_s \quad (\mathbf{P} \text{ – sanki yəqin}), \quad s \leq t \quad (*)$$

olarsa, $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesinə *supermartinqal* ($\mathbb{A}$ axını və $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) deyilir.

Martinqal və submartinqal anlayışlarının tərifləri (*) münasibətində $\leq$ işarəsinin uyğun olaraq, $=$ və $\geq$ işarələrlə əvəz olunması ilə alınır.

Əd.: [1] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] М е й е р П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

SUPERPOZİSİYA METODU «суперпозиции метод; randomization method» – bax, Modelləşdirilməsi təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.

SUPPORT(u) ölçünün « **суппорт меры; support of a measure** » – bax, *Daşıyıcısı* ölçünün. **SUSLİN FƏZASI** « **суслинское пространство; Suslin space** » – bax, *Ölçü*.

SÜRƏT; kod sürəti « **скорость кода; code rate** » – bax, *Blok kod, Konvolusion kod*.

SÜRƏTLİ FURYE ÇEVİRMƏSİ « **быстрое преобразование Фурье; fast Fourier transform** » –

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) W_N^{nj}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (*)$$

diskret Furiye çevirməsinin effektiv hesablanması üçün alqoritmlər seriyasıdır, burada $x(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, – kompleks və ya həqiqi ardıcılıqdır, $W_N = \exp\{-2\pi i/N\}$ (bax, [1]). [2]-nin dərindən sonra S. F. ç. alqoritmlərinə böyük maraq yarandı.

(*) düsturu ilə S. F. ç.-nin hesablanması çox sayda emeliyyat apanmasını – kompleks ədədlər üzərində texminən N^2 sayda toplama və vurma eməllərinin apanmasını tələb edir və bu, N -in böyük qiymətlərində çətin həyata keçirilə bilər. S. F. ç. alqoritmlərinin meydana gəlməsi bu emeliyyatların sayını kəskin surətdə azaltmağa imkan yaradı.

S. F. ç. alqoritmlərinin müxtəlif formaları mövcuddur və bunların hamısı N uzunluqlu çevirmələrin hesablanması üçün qısa uzunluqlu çevirmələrin hesablanmasına gətirilməsi mümkünlüyü ilə bağlıdır. Ən populyar alqoritmlər 2 əsas üzrə S. F. ç. alqoritmləridir, yəni hər hansı tam l qiyməti üçün $N = 2^l$ olduqda,

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j) W_{N/2}^{nj} + W_N^n \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j+1) W_{N/2}^{nj},$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

(zaman üzrə seyrəklənən alqoritm) və

$$a(2n) = \sum_{j=0}^{N/2-1} [x_1(j) + x_2(j)] W_{N/2}^{nj},$$

$$a(2n+1) = \sum_{j=0}^{N/2-1} \{ [x_1(j) - x_2(j)] W_N^{j/2} \} W_{N/2}^{nj},$$

$$n = 0, \dots, N/2-1$$

(tezlik üzrə alqoritm) münasibətlərinə əsaslanan alqoritmlərdir, burada $x_1(j) = x(j)$, $x_2(j) = x(j + N/2)$, $j = 0, \dots, N/2-1$.

Bu hallarda N uzunluqlu çevirmənin hesablanması $N/2$ uzunluqlu iki çevirmənin hesablanmasına gətirilir ki, bunlardan hər birini $N/4$ – nöqtəvi çevirmələrlə ifadə etmək olur və s., beləliklə, nəticədə diskret Furiye çevirməsinin hesablanması üçün tələb olunan emeliyyatlar sayı N/l dəfə azalır.

Ümumi halda S. F. ç. alqoritmlərinin əsas hissəsi diskret Furiye çevirməsinin aşağıdakı iki ifadəsinə əsaslanır:

$$a(n_1 N_2 + n_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{j_1 n_1} W_N^{j_1 n_2} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{j_2 n_2} x(j_1 + j_2 N_1),$$

burada $0 \leq n_1 \leq N_1-1$, $0 \leq n_2 \leq N_2-1$, $N = N_1 + N_2$ və

$$a(n) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{N_k-1} W_{N_1}^{j_1 n} \dots W_{N_k}^{j_k n} \hat{x} \left(j_1 \frac{N}{N_j} + \dots + j_k \frac{N}{N_k} \right),$$

burada $n = n_l \pmod{N_l}$, $0 \leq n_l \leq N_l-1$, $l = 1, \dots, k$,

$N = N_1, \dots, N_k$ – qarşılıqlı sadə ədədlərdir və $\hat{x}(j)$, – $x(j)$ – un N periodlu periodik davamıdır. Bu düsturlarla hesablamalar aparmaq üçün texminən $(N_1 + \dots + N_k)/N$ sayda vurma eməlini aparmaq zəruridir, burada $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_k$.

S. F. ç.-ni apanan proqramlar, adətən, kiçik uzunluqlu baza çevirmələrinin seriyasına (məs., 2, 3, 4, 5, 7, 8, 16 uzunluqlu) gətirilir və bunlardan hər biri maksimal effektiv surətdə reallaşır.

Çevirmənin uzunluğu N üzərində qoyulan məhdudiyyətlər S. F. ç. alqoritmlərinin tətbiq olunma oblastını olduqca daraldır, cüt N -lər üçün (*) münasibətini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) W_N^n = \sum_{j=0}^{N/2} x(j) W_{N/2}^{2nj} =$$

$$= W_{N/2}^{n^2} \sum_{j=0}^{N-1} W_{N/2}^{j^2} x(j) W_{N/2}^{(j-n)^2},$$

bu ifadə isə $W_{N/2}^{j^2} x(j)$ və $W_{N/2}^{(j-n)^2}$ ardıcılıqlarının kompozisiyasıdır

və onu 2 əsasına görə S. F. ç.-nin köməyiylə hesablamaq olur (bax, [3]). [1], [2]-də Fortran – IV-də faydalı proqramlar verilmişdir.

Əd.: [1] Н у с б а у э р Г., Быстрое преобразование Фурье в алгоритм вычисления свертки, пер. с англ., М., 1985; [2] М о н - р о Д., «Applied Statist.», 1975, v. 24, № 1, p. 153–60; 1976, v. 25, № 2, p. 166–72; [3] М о н р о Д., В р а н ч Ж., «Applied Statist.», 1977, v. 26, № 3, p. 351–61.

SÜRÜŞƏN / QEYD OLUNMUŞ EHTİYATDA SAX-LAMA « **скользящее / фиксированное резервирование; sliding / fixed redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

SÜRÜŞƏN ORTA METODU « **скользящего среднего метод; moving average method** ». *trendin ayırd olunması*, – zaman sıralarının statistik analizində *trendin* ayırd olunma metodudur. Bu metodun ideyası ondan ibarətdir ki, müşahidə olunan zaman sırasının qiymətlərinin hər hansı $Y_t, \dots, Y_{t+2m+1}$ qrupu çoxhədli ilə hamarlanır və bu qrupun

orta $t+m+1$ nöqtəsində trendin qiyməti kimi çoxhədlinin qiyməti götürülür. Sonra bu prosedur, eynilə, $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+m+2}$ qrupu üçün təkrarlanır. t nöqtəsində trendin faktiki təyini

$$\sum_{i=t-m}^{t+m} a_i Y_i$$

– sürüşən ortanın hesablanmasına gətirilir, burada a_i əmsalları yalnız m -dən və hamarlayıcı çoxhədlinin seçilmiş dərəcəsinə əsaslı olur və birdefələk hesablanıla bilər. Məs., 3 – tərtib hamarlayıcı çoxhədli və yeddi nöqtə üzrə sürüşən orta üçün a_i əmsallarının qiymətləri aşağıdakı kimi alınır.

$$-\frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{6}{21}, \frac{7}{21}, \frac{6}{21}, \frac{3}{21}, -\frac{2}{21}.$$

S. o. m. ilə trendin ayrılma olunması ilkin sıranın təhriflərinə səbəb olur (bax, *Slutski – Yul effekti*). Məsələn, S. o. m.-nin tətbiqi nəticəsində trendə aşağı tezlikli təsadüfi rəqslər əlavə olunur. Buna görə də, trendi xaric etdikdə spektral sıxlığın kiçik tezliklərinə uyğun komponentləri kiçilir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

SÜRÜŞƏN ORTA MODELİ « скользящего среднего модель; moving average model » – ümumi halda skalyar kompleksqıymətli, $X(t) = b_0 Z(t-1) + \dots + b_q Z(t-q)$ tənliyini ödəyən $\{X(t), t \in T\}$, $T = \{0, \pm 1, \dots\}$ təsadüfi prosesinin modelidir, burada $b_0, b_1, \dots, b_q$ – həqiqi ədədlər, $\{Z(t), t \in T\}$ – standart, ümumi halda kompleksqıymətli qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, yəni ehtimal kəmiyyətlər ardıcılığıdır ki, $MZ(t) = 0$, $MZ(s)Z(t) = \delta_{st}$, $s, t \in T$. q – S.o.m.-in tərtibi adlanır.

S. o. m. *avtoregressiv model* və *qanşq avtoregressiv – sürüşən orta (ARSO)* modeli ilə birlikdə diskret zamanlı və kəsirəşən spektral sıxlığa malik stasionar skalyar kompleksqıymətli modellər sinfini təşkil edir. S. o. m. praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərin adekvat stoxastik modelidir.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [2] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

SÜRÜŞƏN ORTA PROSESİ « скользящего среднего процесс; moving average process / MA-process », $SO - proses$ – qeyri – korrelyar qiymətli prosesə (yeni bəyaz küy prosesinə) hər hansı xətti çevirmənin tətbiqindən sonra alın bilən *stasionar təsadüfi prosesdir* (geniş mənada). $t = 0, \pm 1, \dots$ diskret zamanlı,

$$X(t) = Y(t) + b_1 Y(t-1) + \dots + b_q Y(t-q) \quad (1)$$

şəklində ifadə olunan, daha xüsusi olan $X(t)$ prosesi də çox vaxt S. o. p. adlandırılır, burada $MY(t) = 0$, $MY(t)Y(s) = \sigma^2 \delta_{ts}$, δ_{ts} – Kroneker simvoludur [$Y(t)$ – spektral sıxlığı $\sigma^2/2\pi$ olan bəyaz küy prosesidir], q – hər hansı tam müsbət ədəd, $b_1, \dots, b_q$ – sabit əmsallardır. Belə S. o. p.-in skalyar sıxlığı $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = (\sigma^2/2\pi) |\Psi(e^{i\lambda})|^2,$$

$$\Psi(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q, \quad b_0 = 1$$

düsturu ilə təyin olunur, onun korrelyasiya funksiyası $r(k) = MX(t)X(t-k)$ isə aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$r(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|k|} b_j b_{j+|k|}, \quad |k| \leq q \text{ olduqda.}$$

$$r(k) = 0, \quad |k| > q \text{ olarsa.}$$

Əksinə, diskret t zamanlı stasionar $X(t)$ prosesinin korrelyasiya funksiyası belə bir xassəyə malik olarsa ki, hər hansı tam müsbət q üçün $|k| > q$ olduqda $r(k) = 0$ olsun, onda $X(t)$, $-q$ tərtib S. o. p.-dir, yəni o, (1) şəklində ifadə oluna bilər və bu halda $Y(t)$ bəyaz küydür (bax, məs., [1], §5, 7).

(1) şəklində ifadə olunan sonlu q tərtib S. o. p. ilə yanaşı diskret zamanlı sonsuz tərtib iki tip S. o. p. də vardır: $Y(t)$ bəyaz küy olduqda

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y(t-j) \quad (2)$$

şəklində ifadə oluna bilən birtərəfli S. o. p., bu halda (2)-nin sağ tərəfindəki sıra kvadratik orta mənada yığılır (və deməli, $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$); daha ümumi, ikitərəfli S. o. p.-ləri ki, bu proseslər

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j) \quad (3)$$

şəklində ifadə olunur, burada $Y(t)$ – bəyaz küy,

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$, ikitərəfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan $X(t)$ stasionar proseslər sinfi ilə, birtərəfli S. o. p.-lər isə spektral sıxlığı $f(\lambda)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$$

şərtini ödəyən proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [1] – [3]). Kəsilməz zamanlı birtərəfli və ya ikitərəfli S. o. p. uyğun olaraq,

$$X(t) = \int_0^{\infty} b(s) dY(t-s), \quad \int_0^{\infty} |b(s)|^2 ds < \infty$$

və ya

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(s) dY(t-s), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |b(s)|^2 ds < \infty$$

şəklində ifadə olunan stasionar $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ prosesinə deyilir, burada $M[dY(t)]^2 = \sigma^2 dt$, yeni $Y'(s)$ – ümumiləşmiş bəyaz küy prosesidir. Kəsilməz zamanlı ikitərəfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan stasionar $X(t)$ prosesləri sinfi ilə, kəsilməz zamanlı birtərəfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-1} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$$

şərtini ödəyən proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3] – [5]).

Bax, *Xətti filtr*.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 215–55;

[3] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956;
[4] К а р г у н е н К., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. Phys.», 1947, № 37, p. 3–79; [5] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

SÜZGƏCLƏYİCİ EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI «отсеивающих экспериментов планирование; design of screening experiment»

– ölçmələrin paylanması haqqında çox saylı hipotezlərin fərqləndirilmə (diskriminasiya) xətasının ehtimalının minimizasiyası metodlarını öyrənən, *eksperimentlərin planlaşdırılmasının* bölməsidir.

S. e. p.-nin aşağıdakı modeli daha çox öyrənilmiş modeldir. Fərz olunur ki, $\mathcal{X}$ planı – $\mathbf{x} = (x(1), \dots, x(t))$ vektorunun məqbul qiymətlərinin toplusu $(x_1, \dots, x_N)$ qeyd olunmuşdur; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_s \leq t$ şərtini ödəyən natural ədədlər toplusu, $\mathbf{x}(\lambda) = (x(\lambda_1), \dots, x(\lambda_s))$, $f(\cdot)$ ya məlum və ya hər hansı F çoxluğuna aid funksiya, Y isə $\eta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}(\lambda))$ şəklində bütün funksiyanın sinfi olarsa, $\eta(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ funksiyanın z_i qiyməti (ola bilər ki, təsadüfi xətalara) ölçülür. Xəta üçün əvvəlcədən verilmiş ehtimalla λ s – toplusunun və $f(\cdot)$ funksiyanın (əgər o naməlumdursa), ölçmələr sayı N -in mümkün olduqca az olması şərtlə tapılması tələb olunur. Bu aşağıdakı səmərəli fərziyyənin bir ifadəsidir; araşdırılan hadisə və ya prosedürə təsiredən çoxsaylı faktorlardan yalnız azsaylı «mühüm» hissə olduqca təsir edir, digər faktorların təsiri isə ölçmə xətalara ilə müqayisə olunur.

M i s a l. t sayda donorun (t böyük ədəddir) qanını fərdi sürətdə müayinə etmək əvəzinə donorların müəyyən qruplarının birgə qanı çox nadir bir xəstəliyi aşkar etmək məqsədilə yoxlanılır. Bu müayinə nəticəsində qrupda heç olmasa bir xəstənin olması aşkar oluna bilər. Əgər xəstəlik aşkar olunarsa, yalnız bu xəstəlik aşkar olunan qruplardan olan donorların qanı tam müayinə olunur. t böyük ədəd, xəstələrin sayı s isə nisbətən çox olmazsa, bu plan qənaəti olur. Bu halda S. e. p. aşağıdakı qaydada aparılır.

Donorların 1-dən t -yə qədər, qan yoxlamalarının 1-dən N -ə qədər nömrələndiyi, yoxlama nəticələrinin isə əgər xəstəlik aşkar olunmuşsa 1, əks halda 0 ədədləri ilə işarələndiyi fərz olunur. Bu misalda $\mathcal{X}_t$ planı $x_i(j)$ elementlərindən təşkil olunmuş $(N \times t)$ – matrisdir: əgər j -ci donorun qanı i -ci yoxlamada iştirak etmişse, $x_i(j) = 1$, əks halda isə $x_i(j) = 0$ götürülür. Əgər i -ci x_i seti $\eta_i^{(t-1)} = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{i,t-1})$ -dən asılı olarsa, plan ardıcıl plan, əks halda (yeni asılı olmazsa), statik plan olur (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*). Xəstə donorlar $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ nömrələri ilə işarələnsə, onda

$$\eta_i = \text{sign} \sum_{j=1}^s x_i(\lambda_j),$$

və ya η_i $x_i(\lambda_j)$ -lərin ($j = 1, \dots, s$) dizyunksiyası olur. Belə model *dizyunkt model* adlanır. $\mathcal{X}_t$ planının sürəti $R(\mathcal{X}) = \ln t / N$ nisbətə təyin olunur. Əgər λ toplusunun çoxluğu A qeyd olunarsa və əgər müxtəlif $\lambda \in A$ toplusuna ehtimal müxtəlif η_i^N toplusu uyğun olarsa ki, η_i^N məlum olduqda $\lambda \in A$ toplusunu bərpa etmək mümkün olsun, onda $\mathcal{X}$ A – *ayırıcı plan* adlanır. Adətən, $A = \Lambda(s, t)$ – ya s –

toplular çoxluğu və ya $A = T(s, t) = \bigcup_{i=1}^s \Lambda(i, t)$ olur. Arzu

olunur ki, A – ayırıcı planın sürəti ən böyük olsun. $R \leq 1/s$ sürətli ardıcıl $T(s, t)$ – ayırıcı planı olduqca asan qurulur (məs., $t = 10^3$, $s = 10$, $N \leq 10^2$ olduqda). Baxılan məsələnin çox faydalı ümumiləşməsi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Simmetrik şərti paylanması (yeni sonlu Z çoxluğunda yalnız $\sum_{j=1}^s x_j(\lambda_j)$ cəmindən asılı) verilmiş $\mathbf{P}\{z_i | x_i(\lambda)\}$ olan, asılı olmayan y_i kəmiyyətləri ölçülür, $x_i(j) \in B = \{0, 1\}$, $\Lambda = \Lambda(s, t)$ -də isə aprior Q paylanmasının verildiyi fərz olunur. $\mathcal{X}$ planı və ixtiyari $d : Z_1^N \rightarrow \Lambda$ həllinə xəta ehtimalının orta qiyməti –

$$\mathbf{P}\{\mathcal{X}, d, Q\} = \sum_{\lambda \in \Lambda, z \in Z(\lambda)} Q(\lambda) \prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{z_i | x_i(\lambda)\}$$

uyğun olur, burada $Z(\lambda) = \{z_1^N : d(z_1^N) \neq \lambda\}$. Onda

$$|\mathbf{P}\{\mathcal{X}, d, Q\} - \mathbf{P}\{\mathcal{X}, d, \tilde{Q}\}| \leq \sum_{\lambda} |\tilde{Q}(\lambda) - Q(\lambda)|$$

$$\min \mathbf{P}\{\mathcal{X}, d, Q\} = \mathbf{P}\{\mathcal{X}, \delta, Q\},$$

burada δ – ən böyük aposterior ehtimalı olan həldir (qərardır). Ən böyük asimptotik sürət $\epsilon C(s)$ ədədidir ki, ixtiyari Q_i və $R < C(s)$ üçün ixtiyari, olduqca böyük t qiyməti, $R(\mathcal{X}_t) \leq R$ və hər hansı $\alpha = \alpha(R) > 0$ üçün $\mathbf{P}\{\mathcal{X}_t, \delta, Q_i\} \leq t^{-\alpha}$ olan $\mathcal{X}_t$ planları mövcuddur, lakin $R(\mathcal{X}_t) > C(s)$ olduqda və olduqca böyük t qiymətində $\mathbf{P}\{\mathcal{X}_t, \delta, U_i\} > \gamma > 0$ olur, burada U_i – Λ -da müntəzəm paylanmadır.

n -ci ölçmə nəticəsi ξ və təsadüfi ξ setinin birgə paylanmasının $B^t \times Z$ hasilində təyin olunduğu fərz olunur:

$$\mathbf{P}_B\{\xi = \mathbf{x}, \zeta = \mathbf{z}\} = P_B(\mathbf{x}) \mathbf{P}\{\mathbf{z} | \mathbf{x}(s)\}.$$

burada $P_B(\mathbf{x}) = \prod_j p(\mathbf{x}(j))$, $p(1) = 1 - p(0) = \beta$,

$s = (1, \dots, s)$ və

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_B(\zeta \wedge \xi(s)) = \mathbf{M}_{P_B} \ln[\mathbf{P}_B\{\zeta | \xi(s)\} / P_B\{\zeta\}]$$

Şennon informasiyası olsun. Onda $C(s) = \max_{0 < \beta < 1} \mathbf{I}_B$.

Şerti Şennon informasiyası vasitəsilə maksimal asimptotik sürət üçün sonlu daşıyıcıya malik məlum $\mathbf{P}\{x(\lambda)\}$ ehtimalları halında da qeyri – simmetrik modellər, s -in paylanmaları üçün daha mürekkəb ifadələr tapılmışdır. Bu nəticələr çoxgirişli rabitə kanalının ötürücülük qabiliyyəti oblastının tapılmasına yaxın olur (bax, [2]).

δ həlli (qərar) bütün $\lambda \in \Lambda(s, t)$ üçün $\mathbf{P}\{\cdot | \mathbf{x}(\lambda)\}$ ehtimal-larının müqayisəsindən təqribən $\text{const} \cdot t^s \ln t$ sayda emeliyyat apanmasını tələb edir, bu halda t -nin böyük, s -in nisbətən böyük olmayan qiymətlərində EHM-dan heç istifadə etmək belə olmur. Hər bir faktor üzrə f həlli üçün $\text{const} \cdot t \ln t$ sayda emeliyyatın az tərtiblə seçilməsi tələb olunur; hər bir faktor üzrə həll – hər bir faktorun ölçmə nəticəsinə təsirinin mühümlüyünü, digər faktorların təsirinin isə təsadüfi fon olduğunu fərz etməklə, yoxlayır (bax, [1], [3]). $t \rightarrow \infty$ olduqda ehtimal xətasının sıfıra yaxınlaşmasını təmin edən statistik planların maksimal sürəti

$$\max_{\mu \in [0,1]^*} \max_{k \in s} \int \mathbf{I}_{P_\beta}(\zeta \wedge \xi(k)) \mu(d\beta)$$

ilə ifadə olunur, $[0,1]^*$, – $[0,1]$ üzərində ölçülər fəzasıdır. Bəzən mühüm faktor prinsipial olaraq bu metoddla ayırd oluna bilinmir və ya digər mühüm faktordan fərqlənə bilinmir. Bu hallar üçün $\mathbf{P}\{\cdot | \cdot\}$ ehtimalı terminlərində ekvivalent şərtlər alınmışdır.

Sürəti və $\mathbf{P}\{\mathcal{X}_t, \delta, Q\}$ verilmiş olan planların varlığı haqqında teoremlər təsadüfi planlaşdırma metodu ilə isbat olunur: bu teoremlər xəta ehtimalının orta qiymətinin (planların lazım olan ansamblı üzrə) müəyyən edilmiş statistik qiymətindən alınır. $R(\mathcal{X})$ üçün yuxarı nezeri – informasiya sərhədlər asılı olmayan ölçmələr üçün və $\mathbf{P}\{\mathcal{X}_t, \delta, U_t\}$ üçün Fano bərabərsizliyinin variantları üçün Şennon informasiyasının additivliyindən alınır.

Aşağıdakı xüsusi nəticələri də qeyd etmək düzgün olardı. $\mathcal{X}_A$ – ayıncı planları üçün $\mathbf{P}\{\mathcal{X}_t, \delta, \cdot\} \equiv 0$ təsadüfi planlaşdırma metodu ilə tapılmış statistik qiymət kobud olur. Burada maksimal asimptotik sürətin ifadəsi tapılmamışdır və yalnız informasiya nezeriyyəsindən məlum olan

$$z = \sum_{i=1}^s \mathbf{x}(\lambda_i) \pmod{p}, \quad p - \text{sade ededdir.}$$

halı istisna olunmaqla.

A – ayıncı planların sürəti üçün yuxarı sərhədlər bəzi modeller üçün xüsusi kombinator metodlarla tapılmışdır. Məs., dizyunkt modeldə $T(s, t)$ – ayıncı $\mathcal{X}_t$ planları üçün

(bax, misal) $\overline{\lim} R(\mathcal{X}_t) \leq K_s \leq 2(\ln s)/(s-1)^2$, additiv

modelin $(z = \sum_{i=1}^s \mathbf{x}(\lambda_i)) T(2, t)$ – ayıncı planı üçün

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} R(\mathcal{X}_t) \leq 3/5 \text{ olur.}$$

S. e. p. nezeriyyəsi daha elementar kombinator axtarış nezeriyyəsinin inkişafına səbəb olur, bu nezeriyyədə, məs., bir mühüm faktor axtarışında mümkün ola bilən strategiyaların bircins sinifləri öyrənilirdi. Bu nezeriyyənin nəticələrindən biri ikilik $(N \times t)$ – matrisinin bütün sütunlarının müxtəlif olduğu halında, hər bir sətrində K -dan çox vahidi olmayan sətrilərin minimal sayı N axtarılır.

$(\ln 2)/s$ -ə bərabər maksimal asimptotik sürətdən asimptotik əhəmiyyətsiz kəmiyyət qədər fərqlənən sürətli dizyunkt model üçün ardıcıl $T(s, t)$ – ayıncı planları qurulmuşdur. Hər bir elementi digərlərindən asılı olmadan verilən ehtimalla qüsurlu olan t sayda elementin qruplu yoxlanılması üçün qruplu yoxlanma sayının orta qiyməti haqqında bir sıra teoremlər vardır (bax, [1]).

$z_i = \theta^T f(\mathbf{x}_i)$ xətti regression eksperimenti üçün (θ komponentlərindən sıfırdan fərqli olanların sayı s -dən çox deyildir) $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ statik planının iki xassəsi ekvivalentdir: 1) $(f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N))$ matrisinin ixtiyari $2s$ sətrinin rangı $2s$ -ə bərabərdir və 2) θ -nın mühüm komponentlərinin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nömrələrinin müxtəlif toplularına müxtəlif $(z_1, \dots, z_N)$ topluları uyğun olur. 1) və 2) xassələrinə malik olan bəzi regression eksperimentlərin planlarının maksimal asimptotik sürətləri üçün yuxarı və aşağı statistik qiymətlər alınmışdır (bax, [1]).

Əd.: [1] Математическая теория планирования экспериментов, М., 1983, гл.15; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Малутов М. Б., Матеев П. С., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 1, с. 109–27.



ŞAXƏLƏNƏN PROSES « ветвящийся процесс; branching process »

– təbiətdə baş verən bir çox real təsadüfi prosesləri təsvir edən hər hansı obyektlərin (məs., fizikada hissəciklərin, kimyada molekulların, hər hansı populyasiyada fərdlərin, genetikada genlərin) artması, «ölümü», çevrilməsini ifadə edən *təsadüfi prosesdir*. Təsadüfi proseslərin ümumi anlayışından Ş. p. sinfini fərqləndirən əsas riyazi fərziyyə hissəciklərin bir-birindən asılı olmayaraq artmasıdır.

Ş. p.-in ən ümumi modeli *Bellman – Harris prosesidir*; γ hissəciklərindən (hər hansı bir nömrələmədəki) hər biri paylanma funksiyası $G(t) = P\{\tau_\gamma \leq t\}$, $G(-0)=0$, $G(\infty)=1$ olan

τ_γ təsadüfi zaman ərzində yaşayaraq, sonda doğuran funksiyası

$h(s) = M s^{N_\gamma}$ olan N_γ təsadüfi kəmiyyəti sayda yeni hissəciklər yaradır. Fərz olunur ki, τ_γ və N_γ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və (τ_γ, N_γ) küllüyyatca asılı olmayan cütlerdir.

Yeni yaranmış hissəciklər də eyni ehtimal qanunu ilə çoxalır. $\zeta(t)$ – Bellman – Harris prosesinin t anındakı hissəciklərinin

sayı olsun. $\zeta(0)=1$ olduğu halda və $t=0$ anında mövcud olan hissəciyin yaşama müddəti (yaşı) sıfıra bərabərsə, $\zeta(t)$ prosesinin doğuran funksiyası $\Psi(t, s) = M s^{\zeta(t)}$

$\Psi(t, s) =$

$$\Psi(t, s) = \int_0^t h(\Psi(t-u; s)) dG(u) + s(1-G(t)), |s| \leq 1, t \geq 0 \quad (1)$$

qeyri – xətti integral tənliyini ödəyir.

Bellman – Harris prosesi (G, h) – p r o s e s i adlanır.

Əgər $G(t) = M_\lambda(t) = (1 - e^{-t})$, $t \geq 0$ olarsa, onda (M_λ, h) – p r o s e s i Markov prosesidir: bu proses kəsilməz zamanlı şaxələnən proses adlanır. Bu halda, (1) tənliyi başlanğıc şərti $\Psi(0; s) = s$ olan

$$\frac{\partial \Psi(t, s)}{\partial t} = \lambda [h(\Psi(t; s)) - \Psi(t, s)], |s| \leq 1, t \geq 0$$

differensial tənliyi ilə eynigüclüdür. Əgər

$$G(t) = E(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

olarsa, onda (E, h) prosesi $\zeta(t)$ – *Galton – Watson prosesi* adlanır. $\zeta_n = \zeta(n)$ ardıcılığı Markov zənciri təşkil edir; bu halda $\Psi(n; s)$ doğuran funksiyaları $\Psi(s) = \Psi(1; s)$ funksiyasının iterasiyalan kimi ifadə olunur:

$$\Psi(n+1; s) = \Psi(\Psi(n; s)), \Psi(0; s) = s.$$

Ümumi halda (G, h) – prosesi Markov prosesi deyildir.

(E, h) – prosesinə ilk dəfə F. Galton (F. Galton) və G. Watson (G. Watson) 1873-də baxmışlar. A. N. Kolmoqorov və N. A. Dmitriyev 1947-də (M_λ, h) – prosesinin modelini vermişlər (bax, [1]). Ş. p.-in qeyri – Markov modelini R. Bellman və T. Harris 1948-də qurmuşlar (bax, [3]).

Bellman – Harris prosesində hissəciklərin riyazi gözləməsi – $A(t) = M \zeta(t)$

$$A(t) = A \int_0^t A(t-u) dG(u) + 1 - G(t)$$

berpa tip tənliyini ödəyir, burada $A = h'(1)$.

Əgər $A < \infty$ olarsa, onda t -nin böyük qiymətlərində

$$A(t) \sim C_0 e^{\alpha t}$$

olur, burada α

$$1 = A \int_0^\infty e^{-\alpha u} dG(u) \quad (2)$$

tənliyinin köküdür. Bu tənlik $A \geq 1$ olduqda həmişə $\alpha \geq 0$ kökünə malikdir; $\alpha = 0$ olanda $A = 1$. $A < 1$ olduqda, əgər

$1 - G(t)$ funksiyası t artdıqca eksponensial olaraq azalarsa, onda (2) tənliyinin həlli vardır. Bu halda $\alpha < 0$. Beləliklə, t -nin

böyük qiymətlərində Ş. p.-in ne şəkildə cərəyan etməsi A parametrisinin qiymətindən olduqca asılı olur. (M, h) və (E, h) –

prosesləri üçün (2) tənliyi aşkar şəkildə həll olunur. Birinci halda $\alpha = \lambda(A-1)$, ikinci halda $\alpha = \ln A$ olur. Ş. p.: əgər $A < 1$

olarsa, *kritikalı şaxələnən proses*, $A > 1$ olarsa, *kritiküstü*

şaxələnən proses, $A = 1$ və $h(s) \neq s$ olarsa, *kritik şaxələnən*

proses adlanır.

Əgər $A < \infty$ olarsa, (1) tənliyinin yeganə həlli vardır. Əgər $A = \infty$ olarsa, (1) tənliyinin həllinin yeganəliyi müəyyən şərtlər

daxilində – sıfır ətrafında $G(t)$ üzərinə qoyulan şərtlər və vahid ətrafında $h(s)$ üzərinə qoyulan şərtlər daxilində

mümkündür; bu şərtlər Ş. p.-in *requlyarlıq şərtləri* adlanır (bax, *Şaxələnən proses, requlyarlıq*). Requlyar

Ş. p.-lər üçün $P\{\zeta(t) < \infty\} \equiv 1$ eyniliyi bütün $t \geq 0$ qiymətləri üçün ödənilir; qeyri – requlyar Ş. p.-lər üçün bütün

$t > 0$ qiymətlərində $P\{\zeta(t) < \infty\} < 1$ bərabərsizliyi ödənilir.

Bu halda, sonlu t müddəti ərzində hissəciklərin sayı $\zeta(t)$ müsbət ehtimalla sonsuzluğa bərabər olur, yeni «partlayış» baş verir.

Kritikaltı və kritik $\mathcal{S}$. p.-lər vahid ehtimalla cırlaşan proseslər olur, yeni bu proseslər üçün $q = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta'(t) = 0\} = 1$. Kritiküstü

$\mathcal{S}$. p.-in cırlaşma ehtimalı $q < 1$ olur. Markov kritikaltı $\mathcal{S}$. p.-ində $\mathcal{S}$. p.-in davam olunması ehtimalı $Q(t) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\}$, əlavə – $\mathbf{M}\zeta \log \zeta_t < \infty$ şərti daxilində asimptotik olaraq eksponensial azalır:

$$Q(t) \sim Ke^{\alpha t}, \quad (3)$$

burada α , – (2) tənliyinin köküdür.

Markov kritik $\mathcal{S}$. p.-ində $\mathbf{D}\zeta_t < \infty$ olduqda

$$Q \sim 2/\mathbf{D}\zeta_t, \quad t \rightarrow \infty \quad (4)$$

olur, bu halda (E, h) – prosesində $\mathbf{D}\zeta_t = Bt$, $B = h''(1)$ və (M, h) – prosesində $B = \lambda h''(1)$ olur.

$\zeta(t)$ Markov $\mathcal{S}$. p.-nin $t \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik evolyusiyası daha ətraflı öyrəniləndə aydın olur ki,

$$S_t(x) = \mathbf{P}\left\{ \frac{\zeta(t)}{\mathbf{M}\{\zeta(t) | \zeta(t) > 0\}} \leq x | \zeta(t) > 0 \right\}$$

şərti paylanma qanunu $t \rightarrow \infty$ olduqda limit paylanması $S(x)$ -ə zəif yığılır:

$$S_t(x) \rightarrow S(x), \quad (5)$$

bu şərtlə ki, $\zeta(t)$ -nin bezi momentləri sonludur.

Kritikaltı $\mathcal{S}$. p.-də limit paylanması $S(x)$ diskret paylanmadır, digər hallarda isə mütləq kəsilməz paylanmadır. Limit paylanması $S(x)$ üstlü paylanma, yeni

$$S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0 \quad (6)$$

olan kritik $\mathcal{S}$. p. xüsusilə seçilir. (6) paylanması kritik $\mathcal{S}$. p.-lərə yaxın $\mathcal{S}$. p.-lər üçün də limit paylanmasıdır. $t \rightarrow \infty$ olduqda yaranan kritik $\mathcal{S}$. p.-lərə yaxın fenomenlər keçid fenomenləri adlanır (bax, Şaxələnen proses; keçid fenomenləri).

(3)–(6) nəticələri bir neçə istiqamətdə ümumiləşdirilir.

$\zeta(t)$ Markov $\mathcal{S}$. p.-nin N_γ anları daha zəif məhdudiyyətlərlə götürüldükdə və $t \rightarrow \infty$ olduqda $Q(t)$ və $S_t(x)$ üçün asimptotik düsturlar alınmışdır. Xüsusi halda, $0 < \alpha \leq 1$ və $L(u) u \downarrow 0$ olduqda asta dəyişən funksiyadırsa (yeni $L(tx)/L(t) \rightarrow 1$ münasibəti $t \rightarrow \infty$ və ixtiyari $x > 0$ üçün ödənilirsə, bax, [7]) və kritik Markov $\mathcal{S}$. p. üçün $h(1-u) = 1-u+u^{1+\alpha}L(u)$ olarsa, onda $Q(t) \sim t^{-1/\alpha}L_1(t)$, $t \rightarrow \infty$ olur, burada $L_1(t)$, $t \rightarrow \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır, $S(x)$ limit paylanmasının Laplas çevirməsi isə $1 - \lambda(1 + \lambda^\alpha)^{1/\alpha}$ -dır.

954 ŞAXƏLƏNƏN

Bellman – Harris $\mathcal{S}$. p. halında bu nəticələrin digər ümumiləşməsi alınır. Əgər $1 - G(t)$ funksiyası $t \rightarrow \infty$ olduqda olduqca sürətlə azalırsa, onda $\mathcal{S}$. p.-in limit halı Markov $\mathcal{S}$. p. halındakı xarakterli olur. Lakin $1 - G(t)$ «qalıq» paylanmasının asta azalması yeni hallar yaranır. Məs., kritik $\mathcal{S}$. p.-lərdə bezi hallarda sıfırdan fərqli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) = K | \zeta(t) > 0\}$$

limit ehtimalları yalnız kritikaltı $\mathcal{S}$. p.-lər üçün Markov $\mathcal{S}$. p.-lərinde olduğu kimi $\zeta(t)$ -nin artan normalanması olmadan alınır.

$\mathcal{S}$. p.-in aşağıdakı ümumiləşmiş modelində n sayda müxtəlif $T_1, T_2, \dots, T_n$ tipli hissəciklərin artım və ölüm prosesi araşdırılır. Bu halda eynitipli hissəciklər eyni bir qanunla evolyusiya edir. Fərz olunur ki, i -ci tip hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyası $G_i(t)$ -dir və i -ci tip hissəciyin ömrünün sonunda $T_1, T_2, \dots, T_n$ tipli hissəciklərə çevrilməsi çoxölçülü doğuran funksiya $h_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari T_i tipli hissəciyin yaratdığı nesildə müsbət ehtimalla digər T_j tipli hissəcik olarsa, onda $\mathcal{S}$. p. *ayrılmaz şaxələnen proses* adlanır. Ayrılmayan şaxələnen proseslər məlum dərəcədə özlerini eynitipli hissəcikləri $\mathcal{S}$. p.-lərə analogi cərəyan edir. *Ayrılan şaxələnen proseslər* ümumi halda bir qədər az araşdırılmışdır, lakin *immigrasiyalı şaxələnen proseslər* istisna olunur; bu halda hissəciklərin artması ilə yanaşı müəyyən asılı olmayan təsadüfi mexanizm nəticəsində kənardan hissəciklər immigrasiya olunur. Nəticədə bir çox yeni asimptotik proseslər yaranır.

$\mathcal{S}$. p.-in belə bir modelinə də baxılır ki, bu modeldə (τ_δ, N_γ) cütündə hissəciklərin sayı N_γ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu «ana» hissəcik τ_γ -nin yaşama müddətindən asılıdır. *Ümumi şaxələnen proseslərdə* (bunlar Kramp – Mod – Yagers və ya N – proseslər adlanır) hissəcik özünün yaşama müddəti ərzində bir neçə nesil yaradır. Bu model bioloji artım proseslərinin qanunauyğunluqlarını ən yaxşı əks etdirən modeldir.

$\mathcal{S}$. p.-in digər mürekkəb forması hissəciklərin fəzada vəziyyətlərindən asılılığı ilə əlaqədar alınır. Məs., fərz olunur ki, hissəciklər bir-birindən asılı olmadan sərhədi uducu ∂G olan r – ölçülü G oblastında Braun hərəkəti edirlər. G oblastı daxilindəki hissəcik $\Delta t \rightarrow 0$ müddəti ərzində $p_n \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimalı ilə n , $n \neq 1$ hissəyə çevrilərək, bir-birindən asılı olmayaraq bu hissəciklər hərəkətini başladığı nöqtədən Braun trayektoriyaları üzrə dolaşmağa başlayırlar. Əgər hər hansı bir hissəcik 0 başlanğıc anında $x \in G$ nöqtəsində olubsa, onun t anında yaratdığı, A çoxluğundan olan hissəciklərin sayı $\mu_{x_t}(A)$ olsun. Bu halda

$$\Psi(t, x, s(\cdot)) = \mathbf{M} \exp \left[\int_G \ln s(y) \mu_{x_t}(dy) \right]$$

doğuran funksionalı başlanğıc şərti $\Psi(0, x, s(\cdot)) = s(x)$ və sərhəd şərti $\Psi(t, x, s(\cdot))|_{x \rightarrow \partial G} = 0$ olan

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + f(\Psi)$$

kvazixətti parabolik tənliyini ödəyir, burada $\Delta = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ –

Laplas operatoru, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s^n - s)$. Ş. p.-in ümumi mode-

linde fərz olunur ki, yeni yaranan hissəciklər hansısa parametrlərlə xarakterizə olunurlar, bunları isə hissəciyin yaşı, onun fəzadakı vəziyyəti və s. kimi interpretasiya etmək olar. Belə proseslər doğuran funksiyalar və ya doğuran funksionallar vasitəsilə öyrənilir. Bunlar üçün isə qeyri – xətti differensial və integral tənliklər daxil olunur. Ş. p.-in belə modellərinin olduqca ümumi təsviri aşağıdakı kimi verilir.

Hissəciklərin bir-birindən asılı olmadan hər hansı X fəza fəzasında Markov prosesi qanunu ilə dolaşması (hərəkəti) fərz olunur. Hər bir hissəciyin təsadüfi yaşama müddətinin Markov anı olduğu da fərz olunur. Hissəcik ömrünün sonunda yeni hissəciklər yaranır və bu hissəciklər X fəza fəzasında müəyyən bir ehtimal qanunu ilə paylanır. Yeni yaranan hissəciklər analoji qaydada bir-birindən asılı olmayaraq evolyusiya edir. X -in altçoxluqlarında hissəciklərin sayları ilə təyin olunan tamqiymətli ölçülər fəzasında bu qayda ilə verilən Ş. p. Markov prosesidir. Lakin Ş. p.-lərdə bir çox hallarda daha sadə redüslənmiş fəzalarda baxılır. Belə hallarda bu proseslərin bir çoxu Markov prosesi olur. Bax, *Şaxələnen təsadüfi dolaşma, Şaxələnen təsadüfi meydan, Şaxələnen proses dolaşmalı*.

Yuxarıda qeyd olunan modellərin əksəriyyəti proseslərin kritik-altı, kritik və kritiküstü bölmələri üçün öz mənasını itirir. Bu halda daha mürəkkəb şəraitdə belə sadə Ş. p. üçün müəyyən olunmuş bir çox xassələr öz qüvvəsində qalır. Məs., kritik Ş. p.-də limit paylanması kimi üstü paylanma yaranır.

Ş. p.-lər müxtəlif real: bioloji, genetik, fiziki, kimyəvi proseslərin araşdırılmasında tətbiq olunur. Məs., genetikada Ş. p.-in köməyi ilə mutasiya ilə bağlı proseslər araşdırılır. Sonlu sayda hissəcikli *şaxələnen proses* zəncirvari reaksiyaların tədqiqində bir model kimi istifadə olunur; *diffuzion – şaxələnen proses* nüvə reaksiyalarında neytron proseslərin modelidir və s.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 1, с. 7–10; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Bellman R., Harris T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601–04; [4] Athreya K. B., Ney P. E., Branching Processes; B. – Hdlb. – N. Y., 1972; [5] Ватутин В. А., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 3, с. 440–52; [6] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–45, ч. II – «J. Sov. Math.», 1993, v. 67, № 6, p. 3407–85; [7] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1967.

Ф – ŞAXƏLƏNƏN PROSES «Ф – ветвящийся процесс; Ф – branching process» – bax, *Fi – şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES ayrılan «ветвящийся процесс разложимый; decomposable branching process» – bax, *Ayrılan şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES аугітмауап «ветвящийся процесс неразложимый; non-decomposable branching process» – bax, *Ayrılmayan şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES бинар «ветвящийся процесс бинарный; binary branching process» – bax, *Binar şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES сирлашан «ветвящийся процесс вырождающийся; degenerating branching process» – t anındakı hissəciklərinin sayı $\zeta(t)$ sıfıra bərabər olan *şaxələnen prosesdir*. $\zeta(t)=0$ olduqda şaxələnen proses t anı üçün *сирлашmışdır*, deyilir. Ümumiyyətlə,

prosesin *сирлашması* hər hansı t anından sonrakı bütün anlarda $\zeta_{t+1} = \zeta_{t+2} = \dots = 0$ olduğu kimi nəzərdə tutulur, çünki,

$$P\{\zeta_{t+1} = 0 \mid \zeta(t) = 0\} = 1;$$

burada $\zeta_t = \zeta(t)$,

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_{t+1} = \begin{cases} \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_{\zeta_t}(t), & \zeta_t > 0; \\ 0, & \zeta_t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\{\zeta_t, t = 0, 1, \dots\}$ *təsadüfi prosesi şaxələnen prosesdir*, $\xi_k(t)$, $k = 1, \dots, n, \dots$, $t = 0, 1, \dots$ mənfi olmayan eyni qanunla paylanmış tamqiymətli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır.

(1) düsturunun birinci bərabərliyindən aydındır ki, ixtiyari t anında $\zeta_t > 0$ olarsa, şaxələnen prosesin $t+1$ anındakı ümumi hissəciklərinin sayı onun t anındakı ümumi hissəciklərinin sayı ζ_t ilə ifadə olunur, yəni

$$\zeta_{t+1} = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_{\zeta_t}(t). \quad (2)$$

(2) bərabərliyi *şaxələnmə şərti* adlanır.

$$P\{\zeta_t = 0\} \text{ və } q = P\left\{\bigcup_{t=1}^{\infty} \{\zeta_t = 0\}\right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\zeta_t = 0\} \text{ сир-}$$

лашма ehtimalları adlanır. $q=1$ olduqda şaxələnen proses *сирлашmış şaxələnen proses* adlanır; *Kritikaltı şaxələnen proseslər* ($M\zeta_1 = \psi'(1) < 1$; ψ – prosesin doğuran funksiyasıdır) *сирлашmış proseslərdir*. $\psi(s)$ bir hissəciyin yaratdığı neslin doğuran funksiyasıdır, onda *сирлашма ehtimalı* q , – $s = \psi(s)$ tənliyinin ən kiçik mənfi olmayan kökünə bərabərdir.

$q < 1$ olduqda *şaxələnen proses сирлашmayan prosesdir*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; сирлашма «ветвящийся процесс; вырождение; branching process; extinction of» – *şaxələnen prosesdə* hissəciklər sayı $Z(t)$ -nin sıfıra bərabər olması hadisəsidir. $P\{Z(t)=0\} = P_0(t)$ ehtimalı $q = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t)$ limitinin *сирлашма ehtimal-ları* adlanır. Əgər $\varphi(s)$ bir hissəciyin varisləri sayının doğuran funksiyasıdır, onda *сирлашма ehtimalı* q , – $s = \varphi(s)$ tənliyinin ən kiçik mənfi olmayan kökünə bərabərdir. $q=1$ olan Ş. p. *сирлашан* Ş. p., $q < 1$ şərtini ödəyən Ş. p. isə *сирлашmayan* Ş. p. adlanır.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES daxil edilmiş «ветвящийся процесс вложенный; embedded branching process» – bax, *Daxil edilmiş şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES diffuzion «ветвящийся процесс диффузионный; diffusion branching process» – bax, *Diffuzion proses şaxələnen*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES dolaşmalı « ветвящийся процесс с блужданием; branching process with random walk » – *şaxələnen proses* (diskret zamanlı və ya kəsilməz zamanlı, bir və ya bir neçə tipli hissəcikləri) modelidir və bu prosesdə hissəciklər hər hansı oblast daxilində çoxalmaqla yanaşı yerlərini təsadüfi dəyişə bilər. Belə yerdəyişməni, *şaxələnen diffuzion prosesin* hissəciklərindən fərqli olaraq, dolaşmalı Ş. p.-in hissəciyi yalnız bir dəfə – yarandığı anda edir.

Əd.: [1] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, B. – Hdib. – N. Y., 1972; [2] Biggirs I., Classical and Modern branching processes, IMA volumes in Math. and its Appl., v. 84, B., 1997, p. 19-40.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES emiqrasiyalı « ветвящийся процесс с эмиграцией; branching process with emigration » – *Fi-şaxələnen prosesin* xüsusi halıdır. Emiqrasiyalı Ş. p.-də fərz olunur ki, evolyusiya prosesində hissəciklərin müəyyən hissəsi prosesi ya yarandığı andan və ya təsadüfi zaman intervalından sonra tərk edə bilər.

Əd.: [1] Ватулин В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 3, с. 482-97; [2] Винокуров Г. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 2, с. 378-82.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES enerjili « ветвящийся процесс с энергией; cascade process » – hər bir hissəciyinə bu hissəciyin bilavasitə varisləri arasında təsadüfi qaydada paylanan müsbət kəmiyyət uyğun gələn *şaxələnen prosesdir*. Belə kəmiyyət, məs., hissəciyin ölçüsü, kütləsi, enerjisi və s. ola bilər. Kritiküstü şaxələnen proses halında enerji səviyyəsi verilən həddən böyük enerjili hissəciklər sayının paylanması loqarifmik normal paylanmaya yığılır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99-101; [2] Филиппов А. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 3, с. 299-318; [3] Севастьянов Б. А., Ветвящийся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; final ehtimalları « ветвящийся процесс; финальные вероятности; branching process; final probabilities » – hissəciklər tiplərinin sayı $n > 1$ olan *ayrılan şaxələnen prosesdə* final tipli hissəciklər sayının limit paylanmasıdır. (Hissəcik sanki yəqin özü tipli bir hissəcik doğurursa, belə hissəcik final tipli hissəcikdir.) $\zeta_{ik}(t)$, $t=0$ anında mövcud olan T_i tip bir hissəciyin t anında doğurduğu T_k tip hissəciklərin sayı;

$$\Psi_i(s_1, \dots, s_n) = M s_1^{\zeta_{i1}(1)} \dots s_n^{\zeta_{in}(1)}$$

T_i tip hissəciyin bilavasitə varisləri sayının paylanma funksiyasının doğuran funksiyası, $i=1, \dots, n$; $\varphi_i(s_1, \dots, s_n)$ – final ehtimallarının, yeni T_i tip bir hissəciyin doğurduğu final tip hissəciklər sayının limit paylanmasının doğuran funksiyası olsun. $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ toplusu

$$\varphi_i(s_1, \dots, s_n) =$$

$$= \Psi_i(\varphi_1(s_1, \dots, s_n), \dots, \varphi_n(s_1, \dots, s_n)), i=1, \dots, n \quad (*)$$

tənliklər sisteminin həllidir. Ş. p.-in trayektoriyalarının bezi additiv funksionallarının limit paylanmalarını tapmaq üçün köməkçi final tip hissəciklər daxil etdikdə (*) tənliyindən istifadə etmək olur (məs., T_k tip hissəciklərə malik və ya bilavasitə varislərinin sayı

verilmiş edədə bərabər olan, cırlaşdığı ana qəder mövcud olduğu bütün müddətdə prosesdə əmələ gələn hissəciklər sayını).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящийся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES hissəcikləri qarşılıqlı təsirli « ветвящийся процесс с взаимодействием частиц; branching process with interaction of particles » – *şaxələnen prosesin* ele modelidir ki, burada hissəciklər yalnız onların bölünməsi nəticəsində deyil, həmçinin hissəciklərin bezi qruplarının qarşılıqlı təsiri nəticəsində də yaranır. Zaman üzrə bircins. hissəcikləri qarşılıqlı təsirli Ş. p. kəsilməz zamanlı, vəziyyətləri çoxluğu hesabı Markov prosesinin xüsusi halıdır. Prosesin vəziyyəti $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t))$ təsadüfi vektoru ilə təsvir olunur; bu vektorun k -cı komponenti $\zeta_k(t)$ t anında T_k tipli hissəciklərin sayını göstərir. $P_{\alpha\beta}(t)$ keçid ehtimallarının sıxlıqları

$$a_{\alpha\beta} = \left. \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right|_{t=0}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \text{ aşağıdakı kimi təyin olunur.}$$

$A \in \{\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{N}^n$ sonlu çoxluğu verilmişdir. Fərz olunur ki, ε_k üzrə T_k , $k=1, \dots, n$, $\varepsilon \in A$ tipli hissəcik daxil olan hissəciklərin ixtiyari toplusu $\Delta t \downarrow 0$ müddəti ərzində $\lambda_\varepsilon \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimalı ilə bir-birinə qarşılıqlı təsir göstərir, bir neçə belə qrup isə Δt müddəti ərzində bir-birilə $o(\Delta t)$ ehtimalı ilə qarşılıqlı təsirdə ola bilər. Qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklər əvəzinə β vektoruna uyğun hissəciklər qrupu $p_{\alpha\beta}$ ehtimalı ilə yaranır, $\sum_{\beta} p_{\alpha\beta} = 1$,

$p_{\varepsilon\varepsilon} = 0$. Bu halda $\alpha \neq \beta$ olduqda

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\varepsilon \in A} C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \lambda_\varepsilon p_{\varepsilon, \beta - \alpha + \varepsilon},$$

$$a_{\alpha\alpha} = - \sum_{\varepsilon \in A} C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \lambda_\varepsilon.$$

$$s = (s_1, \dots, s_n), |s_k| \leq 1,$$

$$k=1, \dots, n, s^\beta = s_1^{\beta_1} \dots s_n^{\beta_n}, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

olsun.

$$\Psi_\alpha(t, s) = \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \varphi_\beta(t, s) = \sum_{\alpha} \frac{s^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t),$$

$$f_\varepsilon(s) = \lambda_\varepsilon \left(\sum_{\beta} p_{\varepsilon\beta} s^\beta - s^\varepsilon \right)$$

doğuran funksiyalarından istifadə edərək, hissəcikləri qarşılıqlı təsirli Ş. p. üçün düz və tərs Kolmoqorov tənlikləri aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\frac{\partial \Psi_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{\varepsilon \in A} \frac{f_\varepsilon(s)}{\varepsilon!} \frac{\partial^\varepsilon \Psi_\alpha(t; s)}{\partial s^\varepsilon}, \Psi_\alpha(0; s) = s^\alpha;$$

$$\frac{\partial \varphi_\beta(t; s)}{\partial t} = \sum_{\varepsilon \in A} \frac{s^\varepsilon}{\varepsilon!} f_\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \varphi_\beta(t; s), \varphi_\beta(0; s) = \frac{s^\beta}{\beta!};$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s^{\beta}} = \frac{\partial \beta^{+} + \beta_n}{\partial s_1^{\beta} \dots \partial s_n^{\beta}},$$

$$f_{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \lambda_{\varepsilon}\left(\sum_{\beta} p_{\varepsilon\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s^{\beta}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial s^{\varepsilon}}\right).$$

Hissəcikləri qarşılıqlı təsirli Ş. p.-in bəzi modelləri üçün final hissəciklərin sayı üçün limit teoremləri vardır, bu teoremlər asılı olmayan hissəcikləri Ş. p.-lər üçün limit teoremlərinə analoji (bax. [4]). Bax. *Epidemik proses*.

Əd.: [1] Леонтович М. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1935, т. 5, № 3/4, с. 211–31; [2] Баруча – Рид К., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Севастьянов Б. А., Калинин А. В., «Докл. АН СССР», 1982, т. 264, № 2, с. 306–08; [4] Калинин А. В., «Докл. АН СССР», 1983, т. 268, № 6, с. 1362–64; 1983, т. 269, № 6, с. 1309–12.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES hissəciklərinin tipləri sayı sonlu «ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц; **branching process** with finite number of particle types» – hissəciklərinin çevrilmə qanunları aid olduğu tiptən asılı olan və hissəcikləri tiplərinə görə fərqlənən *şaxələnən proses* modelidir. Markov zənciri vəziyyətlərinin təsnifatı ilə analoji olaraq hissəciklər tiplərinin təsnifatı aparılır. Əgər i -ci tip hissəciyin varisinin j -ci tip ola bilməsi ehtimalı müsbət olarsa, j tipi i tiptən sonra yaranır ($i \rightarrow j$). Hissəciklərin tipləri çoxluqları tiplərin kəsişməyən siniflərinə ayrılır (bax. [1], s. 133–43). Əgər i və j tipləri bir sinifdən olarsa, onda $i \rightarrow j$ və $j \rightarrow i$ olur. Əgər verilən sinifə aid olan tiptən sanki yəqin hər bir hissəciyi özünün bilavasitə varisləri arasında öz sinfindən olan yalnız bir varisə malik olarsa, belə tiplərin sinfi **final sinif** adlanır. Hissəciklərinin tipləri sayı sonlu Ş. p.-in $t \rightarrow \infty$ olduqda asimptotikası *ayrılmayan şaxələnən proseslər* və *ayrılan şaxələnən proseslər*lə müqayisədə olduqca fərqlidir.

İmmiqrasiyalı *şaxələnən proseslərin* tədqiqi hissəciklərinin sayı sonlu Ş. p.-ə gətirilə bilər. Hissəciklərinin tipləri sayı sonlu Ş. p. atmosferdə kaskad leysan yağışlarının araşdırılmasında (bax. [2], [5]), nüvə reaktorlarında baş verən prosesləri təsvir etdikdə tətbiq olunur (bax. [3], [5]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Калмыков Н. Н., Чистяков В. П., «Изв. АН СССР. Сер. физич.», 1965, т. 29, № 9, с. 1702–05; [3] Золотухин В. Г., Могильнер А. И., «Атомная энергия», 1963, т. 15, № 1, с. 11–16; [4] Ватутин В. А., Телевинова Т. М., Чистяков В. П., Вероятностные методы в физических исследованиях, М., 1985; [5] Дорогов В. И., Чистяков В. П., Вероятностные модели превращения частиц, М., 1988.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES *immigrasiyalı «ветвящийся процесс с иммиграцией; branching process with immigration»* – şaxələnən prosesdə yeni hissəcikləri yalnız hissəciklərin bölünməsi nəticəsində deyil, «xarici» mənbədən immiqrasiya nəticəsində də təzahür olunan *şaxələnən proses* modelidir. Məs., immiqrasiyalı *şaxələnən Qalton – Watson prosesini*

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta(t+1) = \zeta_{t,1} + \dots + \zeta_{t,\zeta(t)} + \xi_t, \quad t \geq 0$$

münasibətlərlə təyin etmək olar, burada $\zeta(t)$, – t anında hissəciklərin sayı, $\zeta_{t,i}$, – t -ci nəslin i -ci hissəciyinin varisləri sayı,

ξ_t , – $(t+1)$ -ci nəsle immiqrasiya etmiş hissəciklər sayıdır; $\zeta_{t,i}$ və ξ_t asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$\Psi(s) = M s^{\zeta_{t,1}}, \quad \Psi^*(s) = M s^{\xi_t}, \quad t \geq 0, \quad i \geq 1$$

uyğun olaraq, bu təsadüfi kəmiyyətlərin doğuran funksiyalarıdır.

$$\tilde{\Psi}_t(s) = M \{ s^{\xi(t)} / \xi(0) = 0 \}$$

doğuran funksiyaları

$$\tilde{\Psi}_0(s) \equiv 1, \quad \tilde{\Psi}_{t+1}(s) = \Psi^*(s) \tilde{\Psi}_t(\Psi(s))$$

rekurrent münasibətlərini ödəyirlər.

$\zeta(t)$ ardıcılığı *Markov zənciridir*, əgər $M \zeta_{t,i} < 1$ və $M \ln(1 + \xi_t) < \infty$ və ya $M \zeta_{t,i} = 1$ və $B = D \zeta_{t,i} > 2C = 2M \xi_t$ olarsa, bu zəncir qayıdışlı zəncirdir və əgər $M \zeta_{t,i} = 1$ və $B < 2C$ və ya $M \zeta_{t,i} > 1$ olarsa, qayıdışsız zəncirdir. Əgər $M \ln(1 + \xi_t) < \infty$ olarsa, onda $A = M \zeta_{t,i} < 1$ olduqda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \zeta(t) = k \} = p_k, \quad p_0 + p_1 + \dots = 1$$

limitləri vardır, $A = M \zeta_{t,i} > 1$ olduqda isə elə W təsadüfi kəmiyyəti və elə c_t ədədlər ardıcılığı vardır ki,

$$P \{ 0 < W < \infty \} = 1, \quad c_t / c_{t+1} \rightarrow A,$$

$$P \{ \lim_{t \rightarrow \infty} c_t \zeta(t) = W \} = 1$$

münasibətləri ödənilir. Əgər $M \zeta_{t,i} = 1$, $B = D \zeta_{t,i} > 0$, $C = M \xi_t < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2 \zeta(t)}{Bt} \leq x \right\} = \frac{1}{\Gamma(2C/B)} \int_0^x y^{2(C/B)-1} e^{-y} dy, \quad x \geq 0$$

münasibəti doğrudur. Hissəciklərin sayı yenidən sıfıra bərabər olan ən yaxın ana qədr hissəciklərin sayı müsbət olan andan keçən zaman müddətinə *yaşama müddəti* deyilir. Yaşama müddəti uzunluğu vahid ehtimalla, yalnız və yalnız, o halda sonludur ki, immiqrasiyalı Ş. p. qayıdışlı proses olsun. Yaşama müddəti uzunluğunun paylanma funksiyasının xassələri (bax. [4]), t anına qədər yaşama müddəti sona çatmadığı halda $t \rightarrow \infty$ olduqda hissəciklər sayı üçün limit paylanmalar öyrənilmişdir (bax. [5], [6]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching process, B. – Hldb. – N. Y., 1972; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [4] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 179–88; [5] Ватутин В. А., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 5, с. 727–36; [6] Ivanoff B. G., Seneta E., «J. Appl. Probab.», 1985, v. 22, № 1, p. 223–27.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; keçid fenomenləri « ветвящийся процесс; переходные явления; branching process; transient phenomena/heavy-traffic approximation » – kritik $\mathcal{S}$. p.-lərə yaxın *şaxələnen proseslərin* asimptotik xassələridir. Bir hissəciyin varisləri sayının dispersiyası sonlu b -yə bərabər kritik $\mathcal{S}$. p. $\mu(t)$ -nin şərti paylanması $\mu(t)/bt$, $t \rightarrow \infty$ və $\mu(t) > 0$ olduqda üstlü paylanma olur (bax, *Kritik şaxələnen proses*). Kritikaltı və kritiküstü $\mathcal{S}$. p.-lər üçün limit teoremləri hissəciklərin sayının digər normalaşdırılmaları ilə bağlıdır, limit paylanmaları isə bir hissəciyin varisləri sayının paylanmasıdır olduqca asılı olur. Lakin, məs., $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots$ ele $\mathcal{S}$. p.-lər ardıcılığı olarsa ki, $\mu_n(t)$ prosesində bir hissəciyin varislərinin orta qiyməti $n \rightarrow \infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşsın, $\mu_n(t)$ prosesinin bir hissəciyin varisləri sayının dispersiyası isə b_n olsun, onda olduqca geniş şərtlərlə $\mu_n(t)/b_n t$ -nin limit şərti paylanması da $t \rightarrow \infty$ və $n \rightarrow \infty$ və $\mu_n(t) > 0$ şərtləri ödənildikdə üstlü paylanma olur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritik « ветвящийся процесс критический; critical branching process » – bax, *Kritik şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritikaltı « ветвящийся процесс докритический; subcritical branching process » – bax, *Kritikaltı şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; kritiklik « ветвящийся процесс; критичность; branching process; criticality of » – *şaxələnen prosesdə* hissəciklərin artma intensivliyini təyin edən və hər hansı kritiklik parametrinin qiymətindən asılı olan bir xassədir. Məs., *Galton – Watson prosesində* $A = MZ(t)$ belə parametrdir, burada $Z(t)$, t anındakı hissəciklər sayıdır, bu parametrin kritik qiyməti $A_0 = 1$. $A < 1$ olduqda proses kritikaltı prosesdir və $MZ(t) \rightarrow 0$, $A > 1$ olduqda proses kritiküstü prosesdir və $MZ(t) \rightarrow \infty$ və $A = 1$ olduqda proses kritik prosesdir və $MZ(t) \equiv 1$.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritiküstü « ветвящийся процесс надкритический; supercritical branching process » – bax, *Kritiküstü şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES qeyri-requlyar « ветвящийся процесс нерегулярный; irregular branching process » – bax, *Şaxələnen proses; requlyarlıq*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES məhdud « ветвящийся процесс ограниченный; bounded branching process » – bax, *Məhdud şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES miqrasiyalı « ветвящийся процесс с миграцией; branching process with migration » – *şaxələnen prosesin* (diskret və ya kəsilməz zamanlı, hissəciklərinin bir və ya bir neçə tipləri olan) ele bir modelidir ki, hər hansı «xarici» mənbədən daxil olan

hissəciklərlə (bax, *Şaxələnen proses immiqrasiyalı*) və prosesdə artmaqda olan hissəciklərlə yanaşı hissəciklərin müəyyən hissəsinin xarici mühitə emiqrasiyası mümkündür.

Əd.: [1] Нагаев С. В., Хан Л. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 523–54; [2] Янев Н. М., Митов К. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 3, с. 458–67; [3] Каверин С. В., «Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук», 1985, № 3, с. 22–27.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES redüslənmiş « ветвящийся процесс редуцированный; reduced branching process » – bax, *Redüslənmiş şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES requlyar « ветвящийся процесс регулярный; regular branching process » – bax, *Şaxələnen proses; requlyarlıq*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; requlyarlıq « ветвящийся процесс; регулярность; branching process; regularity of » – ixtiyari zaman anında hissəciklərin sayının 1 ehtimalla sonlu olmasını təmin edən, *şaxələnen proses* xassəsidir. *Bellman – Harris prosesində* t anında hissəciklər sayı $\zeta(t)$ -nin doğuran funksiyası $\Psi(t, s)$ ixtiyari $|s| < 1$ üçün

$$\Psi(t, s) = \int_0^t h \Psi(t-u, s) dG(u) + s(1-G(t))$$

qeyri – xətti integral tənliyinin yeganə həllidir, burada $G(t)$ – hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyasıdır, $h(s)$ – bir hissəciyin bilavasitə sayının doğuran funksiyasıdır. *Requlyar şaxələnen proses* üçün

$$\lim_{s \uparrow 1} \Psi(t, s) = 1$$

münasibəti, qeyri – requlyar şaxələnen proses üçün

$$\lim_{s \uparrow 1} \Psi(t, s) < 1, t > 0$$

münasibəti doğrudur. Əgər hər hansı $t_0 > 0$, $\alpha > 0$ üçün $0 \leq t \leq t_0$ olduqda $G(t) \approx t^\alpha$ olarsa, onda prosesin *requlyarlıq* üçün

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-1/\alpha}(1-h(1-x))^{1/\alpha}}$$

integralının dağılması zəruri və kafi şərtidir, bu prosesin *requlyarlıq şərti* adlanır.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Ватутин В. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 1, с. 15–18.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES tənzimlənən « ветвящийся процесс регулируемый; controlled branching process » – bax, *Tenzimlənən şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES təsadüfi mühitdə « ветвящийся процесс в случайной среде; branching process in random environment » – artmaqda olan bir hissəciyin t anındakı varisləri sayının paylanması bu anda təsadüfi ζ_t , «mühit» – prosesindən asılı olan *şaxələnen prosesdir*. $\{\zeta_t\}$ -nin trayektoriyası qeyd olunduğu halda, təsadüfi mühitdə $\mathcal{S}$. p. zaman üzrə qeyri – bircins

şaxələnen proses kimi inkişaf edir. Təsadüfi mühitdə $\{\zeta_t\}$ Ş. p.-i eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olduğu hal üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]). Sonralar (bax, məs., [2]) kəsilməz zaman halı üçün erqodik $\{\zeta_t\}$ prosesi hallarına da baxılmışdır. Əgər $m(x)$ $\zeta_t = x$ olan anda artmağa başlayan hissəciyin varisləri sayının niyəyi gözleməsindərsə, onda $M \log m(\zeta_t) < 0$ olarsa, təsadüfi mühitdə Ş. p. kritikaltı, $M \log m(\zeta_t) = 0$ olarsa – kritik, $M \log m(\zeta_t) > 0$ olarsa – kritik üstü Ş. p. adlanır. Təsadüfi mühitdə Ş. p.-in hissəcikləri sayı $Z(t)$ üçün $t \rightarrow \infty$ anında limit teoremlərində, bir qayda olaraq, hökm olunur ki, $\{\zeta_t\}$ «mühit» – prosesinin hər bir trayektoriyası üçün uyğun qeyri – bircins Ş. p.-in limit teoreminin analoqu doğrudur (bax, məs., [2]). «Təsadüfi mühitin» qeyri – trivial təsiri, məs., təsadüfi mühitdə kritik cırlaşmayan şaxələnen prosesin olması ehtimalının xassələrində özünü biruzə verir (bax, [3], [4]): təsadüfi mühitdə kritik şaxələnen proses üçün $e_1, C_2, C_3 > 0$ ədədləri vardır ki, $Z(0) = 1$ olduqda

$$C_1 t^{-1/2} \leq P\{Z(t) > 0\} \leq C_2 t^{-1/2},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{C_3 t^{-1/2} | \ln P\{Z(t) > 0\} | \{\zeta_t\}_{t=0}^t\} < x\} = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-v^2/2} dv.$$

Əd.: [1] Smith W. L., «Ann. Math. Stat.», 1968, v. 39, № 6, p. 2136–2140; [2] Athreya K. B., Karlin S., «Ann. Math. Stat.», 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520; № 6, p. 1843–58; [3] К о з - л о в М. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 4, с. 813–25; [4] Берестова Н. А., «Докл. АН СССР», 1982, т. 267, № 1, с. 18–22.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES ü m u m i « ветвящийся процесс общий; general branching process » – bax, *Ümumi şaxələnen proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES yaşından asılı « ветвящийся процесс с зависимостью от возраста; age-dependent branching process », Sevast'yanov prosesi, (G, h_n) – proses – *elə şaxələnen prosesdir* ki (eynitipli və ya bir neçə tip hissəcikləri), hissəciyin çevrilmə anındakı varislər sayının paylanması bu hissəciyin yaşından (ömründən) asılıdır. Yaşından asılı Ş. p. modeli [4]-də *Bellman – Harris prosesinin* ümumiləşməsi kimi təklif olunmuşdur. Eynitip hissəcikləri, yaşından asılı Ş. p.-də hər bir hissəcik yaşama müddəti τ təsadüfi kəmiyyəti və uyğun $G(t) = P\{\tau \leq t\}$ paylanma funksiyasına malikdir. Baxılan hissəcik ömrünün sonunda yaşı sıfıra bərabər ξ_τ sayda hissəciyə çevrilir. $h(u, s) = M[s^{\xi_\tau} | \tau = u]$, $\zeta(t)$, – t anında prosesdə hissəciklərin sayı olsun; fərz olunur ki, proses $t = 0$ anında yaşı sıfıra bərabər hissəcikdən başlanmışdır. $\Psi(t, s) = M s^{\zeta(t)}$ doğuran funksiyası

$$\Psi(t, s) = \int_0^t h(u, \Psi(t-u, s)) dG(u) + s(1-G(t))$$

integral tənliyini ödəyir. $A = M\xi_\tau$, $B = M\xi_\tau(\xi_\tau - 1)$ olsun. Əgər $A < 1$ olarsa, yaşından asılı Ş. p. kritikaltı, $A = 1$ və

$B > 1$ olarsa, kritik, $A > 1$ olarsa, kritik üstü Ş. p. adlanır.

Əgər α prosesin Maltus parametri olarsa, yəni $\alpha M e^{-\alpha \tau} \xi_\tau = 1$ tənliyinin kökü olarsa və $M e^{-\alpha \tau} \xi_\tau < \infty$ şərti ödənilərsə, onda

$$M \zeta(t) \sim c e^{\alpha t}, \quad c > 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (1)$$

münasibəti doğrudur.

Yaşından asılı kritikaltı və kritiküstü Ş. p.-lər sanki yəqin cırlaşan proseslərdir və kritikaltı proses üçün (Maltus parametri olduğu halında) $Q(t) = P\{\zeta(t) > 0\}$ kəmiyyətinin $t \rightarrow \infty$ olduqda eksponensial yığılma sürəti səciyyəvi xüsusiyyətdir, kritik halda isə

$$Q(t) \sim \frac{1}{Bt} M \tau \xi_\tau. \quad (2)$$

Kritikaltı prosesdə $\zeta(t)$ kəmiyyətinin $t \rightarrow \infty$ olduqda və t anında prosesin cırlaşmayacağı şərtlərində limit paylanması diskret paylanmadır. Kritik proses halında, $t \rightarrow \infty$ olduqda, bir qayda olaraq,

$$P\left\{\frac{\zeta(t)}{M[\zeta(t) | \zeta(t) > 0]} < x | \zeta(t) > 0\right\} \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad x > 0 \quad (3)$$

(bax, *Kritik şaxələnen proses*). Kritiküstü proseslərdə

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \zeta(t) \quad (4)$$

limiti sanki yəqin təyin olunmuşdur.

(1)–(4) müddələrinin analoqları bir neçə tipli hissəcikləri proseslər halında da doğrudur.

Əd.: [1] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [2] К о в а л е н - к о И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983; [3] Севастьянов Б. А., «Вестн. Моск. ун-та», 1948, № 3, с. 13–34; [4] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES zaman üzrə qeyri – bircins « ветвящийся процесс неоднородный во времени; temporally non-homogeneous branching process » – bax, *Qeyri – bircins şaxələnen proses, zaman üzrə*.

ŞAXƏLƏNƏN TƏSADÜFİ DOLAŞMA « ветвящееся случайное блуждание; branching random walk » – hər bir hissəciyinin vəziyyəti verilmiş X fəzasından olan *şaxələnen prosesdir*; bu prosesdə çevrilmə nəticəsində yaranan nəsil – hissəciklərin tutduğu vəziyyətlərin valideyn – hissəciyə görə yerdaışmasının paylanması verilir. Ş. t. d.-nin asimptotik xassələri araşdırılarkən, $t \rightarrow \infty$ anında $A, C \subset X$ oblastında hissəciklər sayının paylanması, empirik paylanma funksiyasının $t \rightarrow \infty$ olduğu hal, $t \rightarrow \infty$ anındakı hissəciklərin vəziyyətlərinin xətti örtüyünün müəyyənləşdirilməsi və s. tədqiq olunur.

Əd.: [1] Biggins J. D., «Lect. Notes in Biomath.», 1980, v. 38, p. 57–67; [2] Erickson K. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 66, H. 1, S. 129–40.

ŞAXƏLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « ветвящееся случайное поле; branching random field » – bir-birindən asılı olmayaraq *şaxələnən təsadüfi dolaşma* doğuran, hər biri vəziyyəti verilmiş S fəzasından olan sonsuz sayda hissəciklər toplusunun evolyusiyasını təsvir edən *təsadüfi prosesdir*. Verilən $A_t \subset S$ çoxluğundan olan hissəciklərin sayı üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda limit teoremlərinin ifadələri bir hissəciyin bilavasitə varislərinin paylanması, valideyn – hissəciyə nəzərən varis – hissəciklərin yerdəyişməsinin paylanması S fəzasının dim. – ölçüsü ilə A_t çoxluğunun dəyişmə xarakteri arasında münasibətlərdən asılıdır. Ümumi halda, stasionar Ş. t. m.-nin varlığı və ifadəsi haqqında sual qeyri – trivialdır (artım və yerdəyişmə qanunları verilmiş olduğu halda). Qalton – Vatson şaxələnən proseslərindən Jirina şaxələnən proseslərinə keçidə analogi keçid qiymətləri ölçülər fəzasından olan S fəzasında verilən şaxələnən proseslərə gətirir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ. М., 1982; [2] Dawson D. A., Gorostiza L. G., «Math. Nachr.», 1984, Bd 118, S. 19–46; [3] Fleischman J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 239, p. 353–89; [4] Ivano ff B. G., «Lect. Notes. Math.», 1986, v. 1212, p. 187–94.

* **ŞAXƏLƏNMƏ ŞƏRTİ « условие ветвления; branching condition »** – bax, *Şaxələnən proses cirlaşan*.

ŞAXƏLƏR VƏ EHTİMALİ SƏRHƏDLƏR METODU « ветвей и вероятностных границ метод; branch and probability bounds method » – bax, *Multi-ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ŞARLYE PAYLANMASI « Шарлье распределение; Charlye distribution » – sıxlığı *Qram – Şarlye sırası* ilə verilən paylanmanın çox az istifadə olunan adıdır.

ŞENNON DÜSTURU « Шеннона формула; Shannon formula » – bax, *Signal /küy nisbət*.

ŞENNON ENTROPİYASI « Шеннона энтропия; Shannon entropy » – bax, *İnformasiya ölçü*.

ŞENNON İNFORMASIYASI « Шеннона информация; Shannon information » – bax, *Süzgəçləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ŞENNON TEOREMİ « Шеннона теорема; Shannon theorem » – *informasiya nəzəriyyəsinin* K. Şennon tərəfindən 1974-də alınmış əsas teoremidir (bax, [5]). Ş. t. verilmiş rabitə *kanalı* ilə və məlumatların bərpa olunma dəqiqliyi üçün verilmiş şərtlərlə verilmiş məlumatlar mənbəsindən hasil olunan məlumatların ötürülməsinin mümkün olub-olmaması şərtlərini müəyyən edir. Hal-hazırda Ş. t. bir çox müxtəlif məlumatlar mənbələri və rabitə kanalları sinifləri üçün məlumatların bərpa olunma dəqiqliyinin müxtəlif şərtlərində isbat olunmuşdur. Ş. t.-nin digər formaları *İnformasiya nəzəriyyəsi* məqaləsində şəhr olunmuşdur. *Təsadüfi dolaşma qrupda* məqaləsinə də bax.

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ. М., 1967; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ. М., 1974; [3] Добирушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ. М., 1963, с. 243–332.

960 ŞEPPARD

ŞEPPARD DÜZƏLİŞİ diskretizasiya üçün «Шеппарда поправка на дискретность; Sheppard's correction for discreteness» – momentlərin, semiinvariantların və faktorial momentlərin hesablanmasında yuvarlaqlaşdırma xətalının təsirini azaltmaq məqsədilə kəsilmez təsadüfi kəmiyyətlərin diskretizasiyası üçün düzəlişdir.

İlk dəfə [1]-də təklif olunmuşdur. X – paylanma sıxlığı $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ olan kəsilmez paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun;

fərz olunur ki, $p(x)$ -in $\mathbb{R}^1$ -də m tərtib hər yerdə kəsilmez törəməsi $p^{(m)}(x)$ vardır və hər hansı $\delta > 0$ üçün $x \rightarrow \infty$

olduqda $p^{(m)}(x) = O(|x|^{-1-\delta})$ və $m_k = \mathbf{M}X^k$ ($k \geq 2$).

Daha sonra fərz olunur ki, müşahidə nəticələrinin yuvarlaqlaşmaları sistemi (yəni başlanğıc y_0 və h addımı verilmişdir, $h > 0$) verilmişdir, bu sistemin seçilməsi ilə ilkin kəsilmez X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları əvəzinə əslində $Y = y_0 + h[(X - y_0)/h + 1/2]$ diskret təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları $y_n = y_0 + nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ müşahidə olunur, burada $[a]$, – a ədədinin tam hissəsidir. X təsadüfi kəmiyyətinin momenti $m_i^* = \mathbf{M}Y^i$ aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$m_i^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^i \mathbf{P}\{Y = y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^i \int_{y_n}^{y_{n+1/2}} p(x) dx, \\ i = 1, \dots, k$$

Ümumiyyətlə, $m_i \neq m_i^*$ və deməli, X və Y -in uyğun mərkəzi momentləri $\mu_i = \mathbf{M}(X - m_i)^i$ və $\mu_i^* = \mathbf{M}(Y - m_i^*)^i$ bir-birindən fərqlənir. Bununla əlaqədar belə sual yaranır: μ_i^* momentlərini nə şəkildə salmalı ki, bunlar μ_i momentləri üçün «yaxşı» yaxınlaşmalar versin? Analogi suallar X təsadüfi kəmiyyətinin semi – invariantları $\varkappa_i$ və faktorial momentləri $\mu_{[i]}$ -lərin Y diskret təsadüfi kəmiyyətinin uyğun semi – invariantları və faktorial momentlərinin vasitəsilə hesablanmasında da yaranır və uyğun düzəlişlər diskretizasiya üçün Şep-pard düzəlişləri adlanır.

$g(t)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası, $f(t)$, – Y təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası və

$$\varphi(t) = \mathbf{M}e^{itY^*} = \frac{2}{th} \sin \frac{th}{2}$$

– Y^* təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası olsun, $Y^* - [-h/2, h/2]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır və X -dən stoxastik asılı deyildir. Bu şərtlərlə kiçik h -lar üçün

$$f(t) = g(t)\varphi(t) + O(h^{m-1})$$

münasibəti doğrudur. Y diskret təsadüfi kəmiyyətinin momentləri $O(h^{m-1})$ dəqiqliyinə qədər $X + Y^*$ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri ilə üst-üstə düşür və $O(h^{m-1})$ dəqiqliyinə qədər aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_1^*, & \mu_4 &= \mu_4^* - \frac{1}{2}\mu_2^* h^2 + \frac{7}{240}h^4, \\ \mu_2 &= \mu_2^* - \frac{1}{12}h^2, & \mu_5 &= \mu_5^* - \frac{5}{6}\mu_3^* h^2 + \frac{7}{48}\mu_1^* h^4, \\ \mu_3 &= \mu_3^* - \frac{1}{4}\mu_1^* h^2, \\ \mu_6 &= \mu_6^* - \frac{5}{4}\mu_4^* h^2 + \frac{7}{16}\mu_2^* h^4 - \frac{31}{1344}h^6,\end{aligned}$$

Bu bərabərliklərdə Y təsadüfi kəmiyyətinin $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*$ momentlərinə diskretizasiya üçün Şeppard düzəlişləri vardır. Y təsadüfi kəmiyyətinin semi-invariantlarının və faktorial momentlərinin diskretizasiyası üçün Ş. d. analoji qaydada hesablanır.

Əd.: [1] Sheppard W. F., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1898, v. 29, p. 353–80; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределения, пер. с англ., М., 1966; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

ŞEPPARD DÜZƏLİŞİ qruplaşdırma üçün «Шенпарда поправка на группировку; Sheppard's correction for grouping» – qruplaşdırılmış verilənlər üzrə hesablanmış seçimi dispersiyanın meylini aradan qaldıran düzəlişdir. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun və fərz olunur ki, $m_1 = M X_1$ və $m_2 = M X_1^2$ sonludur və $\sigma^2 = D X_1 = m_2 - m_1^2$ X_1 -in dispersiyasıdır. Onda

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

statistikaları X_1 təsadüfi kəmiyyətlərinin m_1 meylsiz riyazi gözləməsi və σ^2 dispersiyasının meylsiz statistik qiymətləridir. Fərz olunur ki, $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları deyil, bu realizasiyaların əvvəlcədən verilmiş qruplaşdırılma intervalları $[x_k - h/2, x_k + h/2]$ intervallarından olma tezlikləri v_k -lər ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hər hansı müsbət sabitdir) müşahidə olunur.

Bu halda m_1 və σ^2 üçün statistik qiymətlər kimi

$$\bar{\bar{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_k v_k x_k \quad \text{və} \quad s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_k v_k (x_k - \bar{\bar{X}}_n)^2$$

statistik qiymətlərini götürmək olar. v_k tezlikləri üzrə hesablanmış $\bar{\bar{X}}_n$ statistikasi m_1 üçün meylsiz statistik qiymət olur ($\bar{\bar{X}}_n$ statistik qiyməti üçün olduğu kimi). s_0^2 statistik qiyməti isə σ^2 dispersiyası üçün meylli statistik qiymət olur. Bu halda

$$S_0^2 = s_0^2 - h^2/12$$

statistikası σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət olur. $h^2/12$ müşahidələrin qruplaşdırılmasına Şeppard düzəlişi adlanır. Yüksək tərtibli momentlər, semiinvariantlar və faktorial momentlər üçün də qruplaşdırılmada Ş. d. analoji qurulur. Bax, Şeppard düzəlişi diskretizasiya üçün.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределения, пер. с англ., М., 1966.

ŞERMAN PAYLANMASI «Шермана распределение; Sherman distribution» – vahid ölçülü parçanın asılı olmayan müntəzəm qanunla paylanmış nöqtələrlə bölgüsündən alınan parçaların uzunluqları ilə bağlı ehtimal paylanmasıdır. $Z_1, \dots, Z_n, \dots$ – $[0, 1]$ parçasında eyni müntəzəm qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ – bu təsadüfi kəmiyyətlərdən təşkil olunmuş variasion sıra, $X_1 = Z_{(1)}$, $X_2 = Z_{(2)} - Z_{(1)}, \dots, X_{n-1} = Z_{(n)} - Z_{(n-1)}$, $X_n = 1 - Z_{(n)}$ olsun. Onda

$$X = \sum_{j=1}^{n+1} |X_j - 1/(n+1)| / 2$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Şerman paylanması adlanır.

ŞEYP «шейп; shape» – bax, Təsadüfi şeyp.

ŞƏBƏKƏ(sı) ölçülərin «сеть мер; net of measures» – istiqamətlənmiş çoxluğun ölçülər fəzasına inikasıdır. Θ çoxluğunun ixtiyari θ_1 və $\theta_2 \in \Theta$ cütü üçün $\theta \in \Theta$ olarsa ki, $\theta_1 \leq \theta$ və $\theta_2 \leq \theta$ şərtlərini ödəsin, yeni bu çoxluqda $\leq$ münasibəti qismən $\leq$ qaydası ödəsin ki, $\theta \in \Theta$ θ_1 və θ_2 -dən sonra olsun, onda Θ istiqamətlənmiş çoxluq adlanır. Θ -dan ölçülər fəzasına inikas ölçülər şəbəkəsi adlanır və $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ və ya (P_θ) simvolu ilə işarə olunur. Γ qismən $\leq$ qaydası ilə istiqamətlənmiş çoxluq və φ Γ -dən Θ -ya $\leq$ inikas olarsa ki, bu inikas: hər bir $\theta \in \Theta$ üçün $\gamma \in \Gamma$ olarsa ki, $\gamma \leq \gamma_1$ olduqda $\theta \leq \varphi(\gamma_1)$ xassəsinə malik olsun, onda $(P_{\varphi(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ şəbəkəsi $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ şəbəkəsinin alt şəbəkəsi adlanır.

Əgər $\Theta = \mathbb{N}$ natural ədədlər çoxluğu özünün təbii qaydasındakı kimi olarsa, onda $\mathbb{N}$ -in ölçülər fəzasına inikası adi ölçülər ardıcılığı olur. Paylanmalar üçün limit teoremləri ilə əlaqədar konkret məsələlərdə həmişə ölçülər ardıcılığına baxmaq kifayətdir. Lakin ehtimal ölçülərinin və təsadüfi proseslərin zəif yığılmasının ümumi şərtlərinin öyrənilməsində əksər hallarda şəbəkələrin yığılmasına baxmaq münasibdir.

Əd.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Боровков А. А., Ресерски Е. А., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ŞƏBƏKƏ(sı) paylanmaların «сеть распределения; net of distributions» – bax, Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün.

ŞƏBƏKƏVARİ XƏTTİ KOD «решетчатый линейный код; linear trellis code» – bax, Konvolusion kod.

ŞƏBƏKƏVARİ KOD «решетчатый код; trellis code» – bax, Konvolusion kod.

ŞƏBƏKƏVARİ MODEL(i) statistik mexanikanın «решетчатая модель статистической механики; lattice model in a statistical mechanics» – bax, Statistik mexanika.

ŞƏBƏKƏVARI PAYLANMA « решетчатое распределение; lattice distribution » – $h > 0, -\infty < a < \infty,$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olduqda $a + nh$ qiymətlərini alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır. h addı ξ p.-nin addımı adlanır. $a = 0$ olduqda ξ p. arifmetik paylanmadır. Puasson paylanması və binomial paylanma ξ p.-lərdir. ξ p. diskret paylanmaların ən mühüm, çox təsadüf olunan və tətbiq olunan paylanmalarındandır. Əgər a_1 və $h_1 > h$ kəmiyyətlərinin heç bir qiymətlərində ξ p. $a_1 + nh_1, n = 0, \pm 1, \dots$ şəkilli nöqtələr çoxluğunda toplanmamışdırsa, ξ p.-nin addımı h maksimal addım adlanır. ξ p.-lar sinfi xarakteristik funksiyalar terminləri ilə də təsvir olunur: xarakteristik funksiyası $f(t)$ olan ehtimal paylanmasının ξ p. olması üçün hər hansı $t_0 \neq 0$ üçün $|f(t_0)| = 1$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir və h addımı, yalnız və yalnız, o halda maksimal addım olur ki, $|f(2\pi/h)| = 1$ və $0 < t < 2\pi/h$ olduqda isə $|f(t)| < 1$ münasibətləri ödənilsin. ξ p. üçün çevirmə düsturu

$$p_n = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| < \pi/h} e^{-it(a+nh)} f(t) dt$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $p_n = P\{\xi = a + nh\}$. İki ξ p.-nin kompozisiyası, ümumiyyətlə, ξ p. olmaya bilər, iki ξ p.-nin kompozisiyası, yalnız və yalnız, o halda ξ p.-dir ki, h_1/h_2 nisbəti rəasional eded olsun, burada h_1 və h_2 – paylanmaların addımlarıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [2] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

***ŞƏBƏKƏVARI PAYLANMA unimodal « решетчатое распределение унимодальное; unimodal lattice distribution »** – bax, Unimodal / təkizveləli paylanma, Puasson paylanması, Binomial paylanma, Həndəsi paylanma.

ŞƏRTİ BEYES RİSKİ « условный байесовский риск; conditional Bayesian risk » – bax, Aposterior risk.

ŞƏRTİ DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI « условная функция правдоподобия; conditional likelihood function » – bax, Doğruyaoxşarlıq funksiyası.

ŞƏRTİ EHTİMAL « условная вероятность; conditional probability », aposterior ehtimal, – 1) hadisəyə nəzərən ξ e. – iki hadisənin bir-birilə bağlılığı xarakteristikasıdır. Əgər A və B təsadüfi hadisələr və $P(B) > 0$ olarsa, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən (və ya B şərtində) ξ e. $P(A|B)$ [və ya $P_B(A)$] –

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Asılı olmayan A və B hadisələri üçün $P(A|B)$ ξ e. ilə $P(A)$ şərtsiz ehtimalı üst-üstə düşür.

Daha dəqiq, ξ e.-in tərfi aşağıdakı kimi verilir. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ehtimal fəzası, $A, B \in \mathfrak{B}, P(B) > 0$ olsun. B hadisəsinin baş verməsi şərti ilə A hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A \cap B)/P(B)$ nisbətinə deyilir.

ξ e.-in bu tərfi və ehtimalın xassələrindən ξ e.-in aşağıdakı xassələri bilavasitə alınır:

- 1) $P(A/B) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega/B) \equiv 1$;
- 3) $P(B/B) \equiv 1$;
- 4) əgər $\{A_i\}$ cüt-cüt uyuşmayan ($i \neq j, i = 1, 2, \dots$ olduqda $A_i \cap A_j = \emptyset$) hadisələr ardıcılığı olarsa, onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_i P(A_i | B).$$

Bu xassələr asanlıqla isbat olunur.

$\mathfrak{B}_B$ ilə $A \cap B$ tipli ($A \in \mathfrak{B}, B \in \mathfrak{B}$) bütün çoxluqlar cəbri işarə olunarsa, 1) – 4) xassələrindən aydındır ki, $(B, \mathfrak{B}_B, P(\cdot|B))$ – ehtimal fəzasıdır. $B \in \mathfrak{B}$ qeyd olunarsa, $P(A|B)$ $\mathfrak{B}_B$ σ – cəbrində təyin olunmuş çoxluq funksiyasıdır, bu halda $P(A|B)$ -nin funksiya kimi arqumenti A çoxluğudur. Hadisələrin şərti və şərtsiz ehtimalları haqqında Bayes düsturu, Tam ehtimal düsturu meq.-inə bax.

2) A hadisəsinin $\mathfrak{B}$ – cəbrinə nəzərən ξ e. – ixtiyari $B \in \mathfrak{B}$ üçün

$$\int_B P(A|\mathfrak{B}) P(d\omega) = P(A \cap B)$$

şərtini ödəyən, $\mathfrak{B}$ – e nəzərən ölçülən $P(A|\mathfrak{B})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir. σ – cəbrə nəzərən ξ e. ekvivalentlik dəqiqliyi ilə təyin olunur.

Əgər $\mathfrak{B}$ σ – cəbri müsbət ehtimallı, hesabi sayda, kəsişməyən və birləşməsi Ω -ya bərabər $B_1, B_2, \dots$ (tam qrup əmələ gətirən) hadisələrin doğurduğu σ – cəbr olarsa, onda

$$P(A|\mathfrak{B}) = P(A|B_k), \quad \omega \in B_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

A hadisəsinin $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ξ e. A indikatorunun şərti riyazi gözləməsi $M(I_A|\mathfrak{B})$ kimi təyin oluna bilər.

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A}$, – $\mathfrak{B}$ -nin alt σ – cəbri olsun. Əgər ele $p(\omega, A), \omega \in \Omega, A \in \mathfrak{B}$ funksiyası varsa ki:

- 1) ω qeyd olunduqda $p(\omega, A)$ $\mathfrak{B}$ σ – cəbrində ehtimaldır,
- 2) $P(A|\mathcal{A}) = P(\omega, A)$ bərabərliyi vahid ehtimalla doğrudur,

onda $P(A|\mathcal{A})$ ξ e. requlyar şərti ehtimal adlanır.

Requlyar ξ e.-lar üçün şərti riyazi gözləmələr ξ e.-li inteqrallarla ifadə olunur, bu halda şərti riyazi gözləmələr ölçü kimi anlaşılır.

ξ təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən ξ e. ξ -nin doğurduğu σ – cəbrə nəzərən ξ e. kimi təyin olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Лозе М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

***ŞƏRTİ ENTİMAL PAYLANMASI** « условное распределение вероятностей; conditional probability distribution, a posteriori distribution » – bax, *A posteriori paylanma*.

ŞƏRTİ ENTROPİYA « условная энтропия; conditional entropy » ξ təsadüfi kəmiyyətinin η təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti entropiyası. –

$$H(\xi|\eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{k|j} \log p_{k|j}$$

kəmiyyətinə deyilir, burada ξ və η , – $x_1, x_2, \dots$ və $y_1, y_2, \dots$ qiymətlərini alan diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}, q_j = \mathbf{P}\{\eta = y_j\}, k=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots$$

$$p_{k|j} = \mathbf{P}\{\xi = x_k | \eta = y_j\}, \sum p_{k|j} = 1.$$

ξ və η ixtiyari diskret təsadüfi kəmiyyətlər olarsa:

a) $H(\xi|\eta) \leq H(\xi)$ münasibəti doğrudur və bərabərsizlik işarəsi, yalnız və yalnız, ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda ödənilir;

b) $H(\xi\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta) + H(\eta|\xi) + H(\xi)$ xassələri doğrudur, burada

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k,$$

$$H(\eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \log q_j.$$

Bax, *Entropiya*.

ŞƏRTİ ENTROPİYA(SI) bölgünün « условная энтропия разбиения; conditional entropy of a partition » –

$$H(\xi|\eta) = \int [-\ln \mu(C_\xi(x)|C_\eta(x))] d\mu(x)$$

ədədidir (və ya ∞ -dur), burada ξ, η , – μ – ölçülü Lebeq fəzasının ölçülən bölgüləridir; $C_\xi(x), C_\eta(x)$, – ξ və η -nin x -i özündə saxlayan elementlərdir. Bölgünün ξ e.-si

$$H(\xi|\eta) = \int H(\xi|C_\eta(x)) d\mu(x)$$

şəklində də yazıla bilər, burada $\xi|C_\eta(x)$, – η bölgüsünün $C_\eta(x)$ elementində ξ -nin doğurduğu bölgüdür.

ŞƏRTİ FAYDALILIQ « условная полезность; conditional utility » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ŞƏRTİ İNFORMASIYA MİQDARI « условное количество информации; conditional information » – bax, *İnformasiya miqdarı*.

ŞƏRTİ KRİTERİ « условный критерий; conditional test » – hər hansı statistikanın verilmiş qiymətində seçimin şərti paylanması parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılmasının köməkçi məsələsində statistik kriteridir. X naməlum $\omega \in \Omega$ parametridən asılı paylanması $\mathbf{P}_\omega$ olan

təsadüfi seçim olsun. X üzərində aparılmış müşahidə nəticəsi x -ə görə $H_1: \omega \in \Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0: \omega \in \Omega_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, Ω_0 və Ω_1 Ω -nin kəsişməyən, boş olmayan altçoxluqlardır. $T = T(X)$ hər hansı statistika və $\mathbf{P}_\omega^{X|T}(\cdot|t)$ T statistikasının verilmiş $T=t$ qiymətində X seçiminin şərti paylanması olsun. İlkin məsələ ilə yanaşı T statistikasının hər bir t qiymətində paylanması $\mathbf{P}_\omega^{X|T}(\cdot|t)$ olan X təsadüfi seçiminin x müşahidəsi üzrə H_0 və H_1 hipotezlərinin fərqlənməsi (şərti) köməkçi məsələsinə də baxmaq olar. Ümumi halda, t qiymətindən asılı olan $\varphi(x|t)$ kriterisi (bu məsələdə) şərti kriteri adlanır. Sonradan $\varphi(x|t)$ ξ k.-nin köməyi ilə qurulan $\psi(x) = \varphi(x|T(x))$ ilkin məsələdə kriteri (şərtsiz) kimi istifadə oluna bilər.

ξ k.-dən ilkin məsələdə kriterilərin qurulması üsulu kimi istifadə olunması o hallarda məqsəduyğundur ki, köməkçi şərti məsələ bu və ya başqa mənada ilkin məsələdən sadə olsun (məs., engelleyici parametrlə məsələlərdə bu parametr üçün kafi T statistikasi vardır, şərti məsələyə keçdikdə engelleyici parametri xaric etmək olar). Bəzən köməkçi məsələlərdə (t -nin hər bir qiymətində) ya arzuolunan və ya optimal xassələri (məs., oxşar, meylsiz, müntəzəm ən güclü və s.) $\varphi(x|t)$ ξ k.-ni seçmək olur və sonradan isə isbat etmək olur ki, $\varphi(x|t)$ ξ k.-nin köməyi ilə qurulmuş şərtsiz $\varphi(x|T(x))$ kriterisi də analoji xassələrə malikdir.

M i s a l. $\mathbf{P}_\omega \equiv \mathbf{P}_{\xi, \theta}$ naməlum $\omega \equiv (\xi, \theta)$ parametridən asılı, hər hansı $\mathbf{P}$ ehtimal paylanmasına görə

$$\frac{d\mathbf{P}_{\xi, \theta}}{d\mathbf{P}}(x) = B(\xi, \theta) \exp \{ \xi' U(x) + \theta' T(x) \} \quad (1)$$

sıxlığı ilə təyin olunan, paylanmaların eksponensial ailəsi olsun; burada $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^k$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ və $\Omega = \Xi \times \Theta$, – (1) ailəsinin natural parametrik fəzasının altçoxluğu olsun. H_0 və H_1 hipotezlərinin $\Omega_0 = \{(0, \theta); \theta \in \Theta\}$ və $\Omega_1 = \{(\xi, \theta); \xi \in \Xi \setminus \{0\}; \theta \in \Theta\}$ çoxluqları ilə təyin olunduğu fərz olunur; θ parametri baxılan məsələdə engelleyici parametrdir. $T(x)$ statistikasına nəzərən $\mathbf{P}_\xi^{X|T}(\cdot|t)$ şərti paylanmalar ailəsi də eksponensial ailedir və ω parametridən yalnız ξ komponenti vasitəsilə asılıdır (T statistikasının θ üçün kafi statistika olduğuna əsasən);

$$\frac{d\mathbf{P}_\xi^{X|T}(\cdot|t)}{d\mathbf{P}^{X|T}(\cdot|t)}(x) = B_t(\xi) \exp \{ \xi' U(x) \}, \quad (2)$$

burada

$$B_t(\xi) = \left(\int \exp \{ \xi' U(x) \} \mathbf{P}^{X|T}(dx|t) \right)^{-1}.$$

Bununla da, şərti köməkçi məsələ (2) paylanması ilə x müşahidəsi üzrə $\bar{H}_0: \xi = 0$ və $\bar{H}_1: \xi \in \Xi \setminus \{0\}$ hipotezlərinin fərqləndirilməsindən ibarətdir; bu halda engelleyici θ parametri xaric olunmuş olur.

$k=1$ olduqda və birtərəfli alternativlərdə ($\Xi = \{\xi \geq 0\}$) köməkçi məsələdə α həddüldü müntəzəm ən güclü $\varphi_1(x|t)$ Ş. k.-si vardır və bu kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi_1(x|t) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } U(x) < C_0(t), \\ \gamma_0(t), & \text{əgər } U(x) = C_0(t), \\ 1, & \text{əgər } U(x) > C_0(t) \text{ olarsa,} \end{cases} \quad (3)$$

burada $C_0(t)$ və $\gamma_0(t)$

$$\int \varphi_1(x|t) P^{X|T}(dx|t) = \alpha$$

şərtindən təyin olunur.

İkiterəfli alternativlərdə ($\Xi = \mathbb{R}^1$) köməkçi məsələdə aşağıdakı şəkildə ifadə olunan, müntəzəm ən güclü meyilsiz $\varphi_2(x|t)$ Ş. k.-si vardır:

$$\varphi_2(x|t) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } C_1(t) < U(x) < C_2(t), \\ \gamma_i(t), & \text{əgər } U(x) = C_i(t), \quad i=1, 2, \\ 1, & \text{əgər } U(x) < C_1(t) \text{ və } U(x) > C_2(t) \text{ olarsa} \end{cases} \quad (4)$$

burada $C_i(t)$ və $\gamma_i(t)$, $i=1, 2$ kəmiyyətləri

$$\int \varphi_2(x|t) P^{X|T}(dx|t) = \alpha,$$

$$\int U(x) [\varphi_2(x|t) - \alpha] P^{X|T}(dx|t) = 0$$

şərtlərdən təyin olunur.

(3) və (4) Ş. k.-ləri vasitəsilə qurulan şərtsiz $\varphi_i(x|T(x))$, $i=1, 2$ kriteriləri ilkin məsələdə, uyğun olaraq, müntəzəm ən güclü oxşar və müntəzəm ən güclü oxşar meyilsiz kriterilərdir (bax, [1], [5], həm də Neyman strukturu, Oxşar kriteri).

$k \geq 1$ olduqda Ş. k.-yə keçid kriterilərin tam siniflərinin qurulmasından [6]-da istifadə olunmuşdur; daha ümumi halda, şərti köməkçi məsələlərdən istifadə edilməklə kriterilərin tam siniflərinin qurulması probleminə [7]-də baxılmışdır.

İxtiyari tip P_{ξ_0} paylanmaları ailələrinin (mehz (1) şəklində eksponensial olmayanda) parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində de Ş. k.-lərdən istifadə olunur. Məs., $k=1$ olduqda Ş. k.-nin köməyi [8]-də birtərəfli alternativlərdə lokal ən güclü oxşar kriterilər və ikiterəfli alternativlərdə lokal ən güclü oxşar meyilsiz kriterilər qurulur, [9]-də Ş. k.-yə keçid, ξ parametri ixtiyari dim. – ölçülü olduqda, kriterilərin asimptotik tam siniflərini almaq üçün istifadə olunmuşdur.

Müəkkəb statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində Ş. k.-nin istifadə olunması statistik nəticənin çıxarılmasında ümumi şərtlilik prinsipinin tətbiqinə konkret misaldır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [5] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [6] Matthes T. K., Truax D. R., «Ann.

Math. Statist.», 1978, v. 6, № 4, p. 820–27; [8] Neyman J., «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1937, v. 236, № A 767, c. 333–80; [9] Бернштейн А. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, c. 3–18.

ŞƏRTİ MARKOV PROSESİ «условный марковский процесс; conditional Markov process» – [1]-də aşağıdakı sxemlə bağlı daxil olunmuş termindir. Fəzalar hasilində (X_t, Y_t) Markov prosesinə baxılır; birinci koordinatı müşahidə etmək mümkündür; ikincisini isə yox. $P\{Y_t \in C | X_s,$

$t_0 \leq s \leq t\}$, xüsusi halda, $P\{Y_t \in C | X_s, t_0 \leq s \leq t, t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t\}$ şərti paylanmalarına və $P\{Y_{t_2} \in C | Y_{t_1} | X_s, t_0 \leq s \leq t, t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t\}$

şərti keçid ehtimallarına baxılır. İkinci koordinat qeyd olunduğu halda birinci koordinatın şərti paylanmaları məlum olduqda, riyazi statistika ilə bağlı bir sıra optimal qiymətləndirmə və təsadüfi proseslərin qeyri – xətti filtrasiyası məsələlərini həll etmək mümkündür. Məs., məlum parametrlərin qiymətləndirilməsinin klassik məsələsi üçün, müşahidə olunan koordinatın zamandan asılı olmadığı, yeni $Y_t \equiv Y$ və müəyyən aprior paylanmaya malik olduğu hala baxılır.

[1]-də diskret Markov zəncirləri halında şərti paylanmalar və şərti keçid ehtimalları üçün tənlilər verilmişdir, bunlar xətti tənlilər deyildir, lakin istisna hal müşahidə olunan koordinatın ayrıca Markov prosesi əmələ gətirdiyi halda. Bu halda müşahidə intervalı t -nin ucu t_2 -dən sağda olarsa, şərti keçid ehtimalları

t -nin ucundan asılı olmur; lakin riyazi baxımdan ən sadə olan bu hal, praktiki cəhətdən mühüm halları əhatə edə bilmir (məs., müşahidə olunan parametrlər sabit olduqda). Kəsilməz zaman halı riyazi korrekt şəkildə [1], [2]-də araşdırılmışdır; lakin alınmış düsturlardan aydın olur ki, əgər (X_t, Y_t) diffuzion proses olarsa, şərti keçid ehtimalları xüsusi təoremi (qeyri – xətti) stoxastik tənlilərin həlləri ola bilər.

R. Ş. Liptser və A. N. Şirayevin işlərində (bax, [9]) kəsilməz zaman halında qeyri – xətti filtrasiya tənlilərinin riyazi korrekt çıxarılışı verilmişdir. Hər bir xüsusi halda, (X_t, Y_t) prosesi

$$dX_t = [A_0(t, x) + A_1(t, x) Y_t] dt +$$

$$+ B_1(t, x) dw_1(t) + B_2(t, x) dw_2(t),$$

$$dY_t = [a_0(t, x) + a_1(t, x) Y_t] dt +$$

$$+ b_1(t, x) dw_1(t) + b_2(t, x) dw_2(t)$$

şəkilli stoxastik tənlilərdə təsvir olunduğu halda optimal xətti filtrasiyanı (Kalman – Byusi filtrinin ümumiləşmiş hali) effektiv apara bilən metod verilir.

Əd.: [1] Стратонович Р. Л., «Теория вероятностей и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 172–95; [2] Стратонович Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., 1966; [3] Лян Чжи-шунь, «Теория вероятностей и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 227–28; [4] Лян Чжи-шунь, «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, в. 5, с. 694–707; [5] Вентцель А. Д., «Теория вероятностей и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 390–93; [6] Бежаева З. И., «Теория вероятностей и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 437–45; [7] Бежаева З. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 4, с. 761–63; [8] Бежаева З. И., «Теория вероятностей и ее примен.», 1974, т. 19, в. 3, с. 547–57; 1982, т. 27, в. 1, с. 57–66; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы, М., 1974.

ŞƏRTİ ORTA «условное среднее; conditional mean» – bax, Statistika(sı) qeyri-ədədi təbiətli obyektlərin.

ŞƏRTİ PAYLANMA « условное распределение; conditional distribution » – elementar hadisə və Borel çoxluğunun ələ bir funksiyasıdır ki, hər bir qeyd olunmuş elementar hadisədə ehtimal *paylanması*, hər bir qeyd olunmuş Borel çoxluğunda *şərti ehtimaldır*. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası,

$\mathfrak{B}$ – ədəd oxunda Borel çoxluqlarının σ – cəbri, X – $(\Omega, \mathcal{A})$ -da təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət, $\mathfrak{F}$ – $\mathcal{A}$ -nın alt σ – cəbri olsun. Əgər:

- a) qeyd olunmuş $B \in \mathfrak{B}$ üçün $Q(\omega, B)$ $\mathfrak{F}$ – ölçülən funksiya.
- b) ω qeyd olunduqda $Q(\omega, B)$ funksiyası vahid ehtimalla $\mathfrak{B}$ -də ehtimal ölçüsü,
- c) hər bir $F \in \mathfrak{F}$ üçün

$$\int_F Q(\omega, B) P(d\omega) = P\{(X \in B) \cap F\}$$

olarsa, $\Omega \times \mathfrak{B}$ fəzasında təyin olunan $Q(\omega, B)$ funksiyası X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən (regular) *şərti paylanması* adlanır. İxtiyari $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasından qiymətləri alan, $\mathfrak{F}$ -in təsadüfi elementinin $\mathfrak{F}$. p.-sı analoji təyin olunur. Əgər $\mathfrak{X}$ tam separabel metrik fəza, $\mathfrak{B}$ Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olarsa, $\mathfrak{F}$ -in təsadüfi elementinin hər hansı $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ($\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$) $\mathfrak{F}$. p. vardır.

$F_X(x|\mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$ funksiyasına X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən *şərti paylanma funksiyası* deyilir.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən $\mathfrak{F}$. p. (*şərti paylanma funksiyası*) X -in Y təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu σ – cəbrə nəzərən $\mathfrak{F}$. p. (*şərti paylanma funksiyası*) kimi təyin olunur.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən *şərti paylanma funksiyası* $F_X(x|Y)$ Y -in Borel funksiyasıdır; $Y = y$ olduqda onun $F_X(x|Y = y)$ qiyməti Y -in qeyd olunmuş qiymətində X -in *şərti paylanma funksiyası* adlanır. $f_Y(y)$ Y -in paylanma sıxlığı olarsa, onda

$$F_X(x|Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial}{\partial y} F_{XY}(x, y)$$

olur, burada $F_{XY}(x, y)$, – X və Y -in birgə paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Лозэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Гнхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

ŞƏRTİ PAYLANMA FUNKSİYASI « условная функция распределения; conditional distribution function » – bax, *Şərti paylanma*.

ŞƏRTİ RİYAZİ GÖZLƏMƏ « условное математическое ожидание; conditional expectation », *təsadüfi kəmiyyətin şərti riyazi gözləməsi* – hər hansı σ – cəbrə nəzərən təsadüfi kəmiyyəti xarakterizə edən, elementar hadisə funksiyasıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, X – bu fəzada verilmiş sonlu riyazi gözləməyə malik təsadüfi

kəmiyyət, $\mathfrak{B}$, – σ – cəbr, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}$ olsun. X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən *şərti riyazi gözləməsi* $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən ələ $M(X|\mathfrak{B})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir ki, hər bir $B \in \mathfrak{B}$ üçün

$$\int_B X P(d\omega) = \int_B M(X|\mathfrak{B}) P(d\omega) \quad (*)$$

münasibətini ödəsin. Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonsuzluqdursa (təyin olunmamışdırsa), yeni $MX^+ = M \max(0, X)$ və ya $MX^- = -M \min(0, X)$ kəmiyyətlərindən yalnız biri sonludursa, onda (*) vasitəsilə $\mathfrak{F}$. r. g.-nin tərifinin mənası vardır, lakin $M(X|\mathfrak{B})$ sonsuz qiymətlər ala bilər.

$\mathfrak{F}$. r. g. ekvivalentlik dəqiqliyi ilə birqiymətli təyin olunur. Riyazi gözləmədən fərqli olaraq (ədədi qiymətlər alan) $\mathfrak{F}$. r. g. funksiyadır (təsadüfi kəmiyyətdir).

$\mathfrak{F}$. r. g.-nin xassələri riyazi gözləmənin xassələrinə analojiçdir:

- 1) əgər $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ sanki yəqin ödənilərsə,

$$M(X_1|\mathfrak{B}) \leq M(X_2|\mathfrak{B})$$

berabərsizliyi doğrudur;

- 2) ixtiyari həqiqi c üçün $M(c|\mathfrak{B}) = c$;

- 3) ixtiyari həqiqi α və β üçün

$$M(\alpha X_1 + \beta X_2|\mathfrak{B}) = \alpha M(X_1|\mathfrak{B}) + \beta M(X_2|\mathfrak{B});$$

- 4) $|M(X|\mathfrak{B})| \leq M(|X||\mathfrak{B})$,

- 5) qəbənq $g(x)$ funksiyaları üçün

$$g(M(X|\mathfrak{B})) \leq M(g(X)|\mathfrak{B}).$$

$\mathfrak{F}$. r. g. üçün aşağıdakı spesifik xassələr doğrudur:

- 6) əgər $\mathfrak{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ trivial σ – cəbr olarsa, onda

$$M(X|\mathfrak{B}) = MX;$$

- 7) $M(X|\mathcal{A}) = X$;

- 8) $M(M(X|\mathfrak{B})) = MX$;

- 9) əgər X , $\mathfrak{B}$ σ – cəbrindən asılı deyildirsə, onda $M(X|\mathfrak{B}) = MX$;

- 10) əgər Y $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndirsə, onda

$$M(XY|\mathfrak{B}) = Y M(X|\mathfrak{B}).$$

$\mathfrak{F}$. r. g. işarəsi altında yığılma haqqında teorem belə ifadə olunur: əgər $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $|X_n| \leq Y$, $n = 1, 2, \dots$, $MY < \infty$ olarsa və $X_n \rightarrow X$ münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, onda $M(X_n|\mathfrak{B}) \rightarrow M(X|\mathfrak{B})$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən $\mathfrak{F}$. r. g. X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu σ – cəbrinə nəzərən $\mathfrak{F}$. r. g. kimi təyin olunur.

$\mathfrak{F}$. r. g.-nin xüsusi halı *şərti ehtimaldır*.

Bax, həm də, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Невё Ж.,

Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Л о в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

ŞƏRTİ SİXLİQ « условная плотность; conditional density » – *şerti paylanmanın sıxlığıdır.* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, $\mathfrak{B}$ – ədəd oxunun Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathfrak{F}$ – $\mathcal{A}$ -nin alt σ – cəbri,

$$Q(\omega, B) = P\{X \in B | \mathfrak{F}\}, \omega \in \Omega, B \in \mathfrak{B}$$

– X -in $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən *şerti* paylanması və

$$F_X(x | \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$$

– X -in $\mathfrak{F}$ -ə nəzərən *şerti* paylanma funksiyası olsun. Əgər

$$F_X(x | \mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^x f_X(y | \mathfrak{F}) dy$$

olarsa, onda $F_X(x | \mathfrak{F})$ X -in paylanmasının $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən *şerti sıxlığı* adlanır.

Əgər X və Y təsadüfi kəmiyyətlər, $f_Y(y)$ Y -in paylanma sıxlığı, $f_{XY}(x, y)$ isə X və Y -in birgə paylanma sıxlığıdırsa,

$$F_X(x | Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} f_{XY}(x, y)$$

düsturu Y -in qeyd olunmuş qiymətində X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının $\mathfrak{F}$ -ni təyin edir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

ŞİBATA KRİTERİSİ « Шибата критерий; Shibata criterion » – bax, *Parametrik model: tərtibin seçilməsi*.

ŞOKE TUTUMU « Шоке емкость; Choquet capacity » – təsadüfi çoxluğun *paylanması* verən funksiyadır. $\mathfrak{S}$. t. ele T tutumudur ki, o, separabel Hausdorff lokal kompakt topoloji E fəzasının bütün altçoxluqlarının çoxluğu $\mathcal{P}(E)$ -də verilmişdir və əlavə aşağıdakı xassəyə də malikdir: əgər $K, K_1, K_2, \dots$ E -də ixtiyari kompaktlar və

$$S_1(K; K_1) = T(K \cup K_1) - T(K),$$

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) =$$

$$= S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1}), n \geq 2$$

olarsa, onda bütün n , K və K_1 üçün $S_n(K; K_1, \dots, K_n)$ kəmiyyətləri mənfi deyildirlər. $\mathfrak{S}$. t. təsadüfi çoxluğun verilməsi üçün əsas vasitələrdən bəndir, məs., təsadüfi qapalı çoxluğun *müşayiətedici funksionalı* $\mathfrak{S}$. t.-dur və o, təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının analoqudur. Əksinə, $\mathfrak{S}$. t. $T(\emptyset) = 0$,

$0 \leq T \leq 1$ xassəsinə malik olarsa, onda o, hər hansı təsadüfi qapalı çoxluğun müşayiətedici funksionalıdır. Əgər $\mathfrak{S}$. t. $T(\emptyset) = 0$, $T(K) < \infty$ (bütün K kompaktları üçün) xassəsinə malik olarsa, onda $1 - \exp(-T)$ ifadəsi *sonsuz bölünən təsadüfi çoxluğun* müşayiətedici funksionalını təyin edir.

Bax, *Tutum*.

966 ŞOKE

Əd.: [1] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

ŞOVENE KRİTERİSİ « Шовене критерий; Chauvenet test » – bax, *Ekstremal qiymətlər paylanması. Fərqli ölçmələrin xaric olunması*.

ŞÖNBERQ TEOREMİ « Шёнберга теорема; Schoenberg theorem » – 1) Hilbert fəzasında kəsilməz müsbət müəyyən, yalnız $\|\cdot\|$ normasından asılı funksiyaların

ümumi şəklini təsvir edən teoremdir. $f: \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(0) = 1$ – hər hansı kəsilməz funksiya, H – Hilbert fəzası olsun. H – sonluölçülü, $\dim H = n$ olsun. Onda

$$f(\|h\|), \quad h \in H \quad (*)$$

şəklində funksiyanın H -də müsbət müəyyən funksiya olması üçün f -in

$$f(t) = \Gamma(n/2) \int_{\mathbb{R}^+} \exp(2/ts) (t-s)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(ts) dv(s), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

şəklində olması zəruri və kafidir, burada $v, - \mathbb{R}^+$ -də hər hansı ehtimal ölçüsü, Γ – Eylər qamma – funksiyası, $J_{(n-2)/2}$ – $(n-2)/2$ tərtib Bessel funksiyasıdır. Əgər H sonsuzölçülən fəza olarsa, onda $(*)$ şəklində funksiyanın H -də müsbət müəyyən funksiya olması üçün f -in

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp\{-t^2 s^2 / 2\} dv(s), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

şəklində olması zəruri və kafidir, burada $v, - \mathbb{R}^+$ -də hər hansı ehtimal ölçüsüdür.

2) Müsbət müəyyən və mənfi müəyyən funksiyalar arasında əlaqəni müəyyən edən teoremdir (bax, *Mənfi müəyyən funksiya*).

ŞRÖDİNGER TƏNLİYİ təsadüfi potensiallı « Шредингера уравнение со случайным потенциалом; Schrödinger equation with random potential » – $L^2(\mathbb{R}^d)$ -də $\Delta + q(x)$ özü-özünə qoşma operatoru və ya onun diskret analoqu ilə təyin olunan tənlikdir; Δ – laplasian, q – erqodik təsadüfi meydanıdır. Burada əsas məsələ q -nün təsadüfliliyin dərəcəsi və xarakterindən asılı olaraq spektrin təbiəti, əsas yeni effekt özündə sıx nöqtəvi spektrin varlığı və məxsusi funksiyaların eksponensial azalmasıdır (vəziyyətlərin lokalizasiyası). Belə spektrin varlığı haqqında hipotezi fiziklər irəli sürmüşlər və onun varlığı $d=1$ və hamar Markov potensialı halında isbat olunmuşdur (bax, [5]) (bütün spektr sıfır nöqtəvidir), $d=3$ olduqda diskret halda, asılı olmayan potensialla, hamar sıxlığa malik halda da isbat olunmuşdur.

Əd.: [1] Гольдшейд И. Я., Молчанов С. А., Пастур Л. А., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, в. 1, с. 1–10; [2] Лившиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А., Введение в теорию неупорядоченных систем, М., 1982; [3] Пастур Л. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математич. статистика. Теоретич. кибернетика, т. 25, М., 1987, с. 3–67; [4] Fröhlich J., Martinelli F., Scoppola E., Spencer T., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 101, p. 21–46; [5] Martinelli F., Scoppola E., «Rivista Nuovo Cimento», 1987, v. 10, № 10, p. 2–90.

ŞTEYNER SİNFİ « Штейнера класс; Steiner class » – *tesadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinde yaranan, Evklid fəzasının kompakt altçoxluqlarının ələ xüsusi sinfidir ki, bu sinfin elementi hər bir qabanq (sıfır nəzərdən) simmetrik ələ A kompaktıdır ki, onun dayaq funksiyası $f(x) = \sup_{a \in A} (x, a)$ vahid radiuslu Ω*

sferasında hər hansı müsbət $P(d\omega)$ ölçüsü üzrə (x, ω) -nin integralı şəklində göstərilə bilər. Məs., Ω -nın elementləri ω_k -ların və müsbət p_k çəkirlərinin ixtiyari toplusu üçün $\left\{ \sum_k t_k \omega_k : |t_k| \leq p_k \right\}$ kompaktı (parçaların vektor cəmi) Ş. s.-

ne daxildir, belə ki, onun dayaq funksiyası $\sum_k |(x, \omega_k)| p_k \omega_k$

elementlərində toplanmış P atomar ölçüsü ilə tələb olunan şəkildə ifadə oluna bilər. İsbat etmək olur ki, bu şəkildə kompaktlara Ş. s.-ne aid ixtiyari kompaktlar müəyyən mənada yaxınlaşır.

Müstəvidə Ş. s. bütün qabanq simmetrik kompaktlar sinfi ilə üst-üstə düşür, lakin $\mathbb{R}^3$ -də belə olmur. Kontrmisal: dayaq funksiyası $f(x) = \sup_k |x_k|$ olan $|a_1| + |a_2| + |a_3| \leq 1$ oktaedridir.

Ş. s.-nin tərifindəki integral ifadənin yeganəliyi onun mühüm xassəsidir, onun ehtimalı ifadəsi, məs., belə bir faktıdır ki, üçölçülü fəzada düz xətlərin bircins Puasson ansamblı özlərinin ikiölçülü kəsiklərinin intensivlikləri ilə tamamilə təyin olunurlar.

J. Materonun daxil etdiyi (bax, [1]) Ş. s. qabanq analizində klassiki Y. Şteynerin (J. Steiner) adını daşıyır.

Əd.: [1] М а т е р о н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

ŞTRASSEN İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ « Штрассена принцип инвариантности; Strassen's strong invariance principle » – bax, *İnvariantlıq prinsipi* sənki yəqin.

ŞTRASSEN TEOREMİ « Штрассена теорема; Strassen theorem » – 1) *Levi – Proxorov metrikaçı* K_i – *Fan metrikaçı* üçün *minimal metrikaçdır*. Məğzine görə verilən müddəaya ekvivalent, lakin formaca fərqli müddəa [1]-də F. Ştrassen tərəfindən isbat olunmuşdur.

2) Bax, *Bir ehtimal fəzası metodu, Kolmoqorov teoremi* seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında.

ŞTRASSEN TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « Штрассена закон повторного логарифма; Strassen's law of the iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* empirik ölçülər üçün.

ŞUR İFADƏSİ MATRİSİN « Шурa представление матрицы; Schur's representation of matrix » – bax, *Qeyri – simmetrik təsadüfi matris*.

ŞVARS BƏRABƏRSİZLİYİ « Шварца неравенство; Schwarz inequality » – bax, *Bunyakovski bərabərsizliyi*.

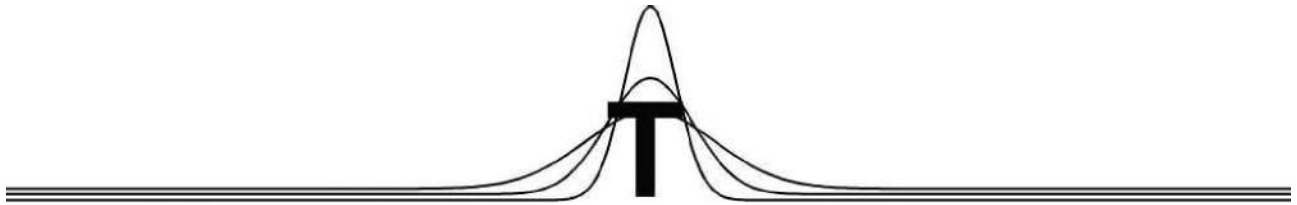
ŞVARS – RİSSANEN KRİTERİSİ « Шварца – Риссанена критерий; Schwarz – Rissanen criterion » – bax, *Parametrik model; tərtibin seçilməsi*.

ŞVİNGER FUNKSİYASI « Швингера функция; Schwinger function » Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində – fəzanın müxtəlif nöqtələrində meydanın qiymətlərinin orta qiymətidir. Daha dəqiq.

$$\left\langle \xi_{a_1}(\varphi_1) \cdot \dots \cdot \xi_{a_n}(\varphi_n) \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(\mathbb{R}^4)^n} S_{a_1, \dots, a_n}(x_1, \dots, x_n) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) d^4 x_1 \dots d^4 x_n$$

şəklində yarıxətəti formalar nisbətən artan $S_{a_1, \dots, a_n}$ ümumiləşmiş funksiyalarını təyin edir və bu funksiyalar $\{\xi_\alpha(x), x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})\}$ Evklid fəzasının Şvinger funksiyaları adlanır, burada α – spinor və ya vektor indeksidir. Burada $\xi_\alpha(\varphi)$, – $\mathfrak{A}$ meydan cəbrinin (və ya supercəbrinin) doğuranıdır, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\langle \cdot \rangle$, – $\mathfrak{A}$ -da Evklid meydanını verən vəziyyətdir. Ş. f. $S_{a_1, \dots, a_n}(x_1, \dots, x_n)$ -in $x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$ dəyişənləri üzrə xəyali oxla davamı $\mathcal{M}^4$ Minkovski fəzasında uyğun kvant meydanının *Uaytman funksiyaları* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] С а й м о н Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Г л и н м Д. Ж., Д ж а ф ф е А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984.



TABE STATİSTİKA « подчиненная статистика; subordinate statistic » – digər statistikanın funksiyası olan statistikadır. T. s. həmin statistikaya tabedir. Mes., minimal kafi statistikaya ixtiyari kafi statistikaya nəzərən T. s.-dir.

T. s. termini olduqca az istifadə olunan termdir.

TAM AİLƏSİ, PAYLANMALARIN « полное семейство распределений; complete family of distributions » – ehlə paylanmalar ailəsidir ki, bu ailə üçün sıfırın qeyri – trivial meylsiz statistik qiyməti yoxdur. Paylanmaların məhdud T. a. ehlə paylanmalar ailəsidir ki, bu ailə üçün sıfırın qeyri – trivial məhdud meylsiz statistik qiyməti yoxdur.

Əgər $T: (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ -da paylanmalar ailəsi $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ üçün kafi statistikadırsa və bu statistikanın doğrduğu, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ -də paylanmalar ailəsi $\mathcal{Q}$ P. t. a.-dirsə, onda $\mathcal{P}$ ailəsi T -yə nəzərən paylanmaların tam ailəsi, T isə $\mathcal{P}$ ailəsi üçün tam statistikadır, deyilir. T -yə nəzərən P. t. a. üçün yalnız T -dən asılı statistik qiymətlər sinfində verilən parametrik funksiyasının ən böyük meylsiz statistik qiyməti birdən artıq deyildir. odur ki, belə ailə üçün Rao – Blekuell teoremi ən yaxşı meylsiz qiymətləndirmə məsələsini tamamilə həll edir. T -yə nəzərən məhdud P. t. a. üçün oxşar oblast Neyman strukturudur, yeni onun indikatoru kafi T statistikasından asılı deyildir (bax, [1]).

Kobud deyildikdə, T kafi statistikasının dim. – ölçüsü Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsünə bərabər olarsa, onda $\mathcal{P}$ T -yə nəzərən P. t. a.-dır, adətən, birinci dim. – ölçü böyük olur. P. t. a. konsepsiyası E. Leman və Q. Şeffe tərəfindən [2]-də daxil olmuşdur.

Bax, Eksponensial ailəsi, paylanmaların.

Əd.: [1] Леман Э. Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Lehman E. L., Scheffé H., «Sankhya», 1950, v. 10. № 4, p. 305–40; 1955, v. 15. № 3, p. 219–36.

TAM BEYES YANAŞMASI « полный байесовский подход; full Bayes approach » – bax, Bayes kriterisi.

TAM BLOK PLANI « полный блочный план; complete block design » – bax, Dispersion analiz.

TAM EHTİMAL DÜSTURU « полная вероятности формула; total probability formula » – hadisənin şərtsiz ehtimalını bölgü təşkil edən hadisələrə nəzərən hesablamaq üçün münasibətdir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{A}$ – aşağıdakı şərtləri ödəyən hadisələr olsun:

1) $i \neq j$ olduqda $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

2) $\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$ (yəqin hadisə) və bütün k -lar üçün

$\mathbf{P}(H_k) > 0$ olsun. Onda ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A|H_k) \cdot \mathbf{P}(H_k)$$

düsturu tam ehtimal düsturu adlanır. T. e. d. $H_1, H_2, \dots$ hadisələri sonsuz sayda olduqda da doğrudur.

Riyazi gözlemələr üçün də tam ehtimal düsturu vardır. $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ -də təsadüfi kəmiyyət olsun. $\mathbf{M}X$ – onun riyazi gözleməsi, $\mathbf{M}(X|H_k)$ – bölgü təşkil edən H_k hadisələrinə nəzərən şərti riyazi gözlemələr olsun. Onda

$$\mathbf{M}X = \sum_k \mathbf{M}(X|H_k) \mathbf{P}(H_k).$$

TAM EHTİMAL FƏZASI « полное вероятностное пространство; complete probability space » – bax, Ehtimal fəzası.

TAM FAKTOR EKSPERİMENT « полный факторный эксперимент; complete factorial experiment » – bax, Faktor eksperiment.

TAM FAKTOR PLAN « полный факторный план; complete factorial design » – bax, Planlaşdırılması, eksperimentin.

TAM İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ « полная суммарная наработка; complete working time » – bax, Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.

TAM QƏRƏZSİZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIĞI « абсолютно беспристрастная последовательность случайных величин; absolutely impartial sequence of random variables » – $\mathbf{M}\xi_1 = 0$

və ixtiyari $n = 1, 2, \dots$ qiymətləri üçün $\mathbf{M}(\xi_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$

şərtlərini ödəyən, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığına deyilir. T. q. t. k. a.-nın xüsusi cəmləri $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ martinqal təşkil edir. $\{\xi_n\}$ və $\{S_n\}$ ardıcılıqları arasında aşağıdakı qaydada əlaqə yaradılır: $\{\xi_n\}$ tam

qərəzsiz ardıcılıq olarsa, $\{S_n^*\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri isə, yalnız və yalnız, $S_n^* = \xi_1 + \dots + \xi_n + c$

($n = 1, 2, \dots$ və $c = \mathbf{M}S_1^*$ – sabitdir) münasibətilə təyin olunarsa, $\{S_n^*\}$ ardıcılığı martinqal təşkil edir. Beləliklə, bütün martinqallar müəyyən T. q. t. k. a.-larının xüsusi cəmləri ilə əlaqədardır.

Riyazi gözleməsi sıfır olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı T. q. t. k. a.-na sadə bir misaldır. Rus ədəbiyyatında

«беспристрастная» termini ilə yanaşı qərəzsiz oyunlarla bağlı «безобидная» termini də işlədilir.

Əd.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977.

*** TAM QƏRƏZSİZLİK** « абсолютная беспристрастность; absolute impartiality » – $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $M\xi_1 = 0$ və ixtiyari $n=1, 2, \dots$ qiymətlərində $M(\xi_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ münasibətlərlə ifadə olunan xassəyə deyilir, bu halda, $\xi_1, \xi_2, \dots$ tam qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı adlanır (bax, *Tam qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı*).

TAM QRUPU, HADİSƏLƏRİN « полная группа событий; partition complete set of disjoint events » – elementar hadisələrin fəzasının bölgüsüdür (bax, *Uyuşmayan hadisələr*).

TAM LATIN KVADRATI « полный латинский квадрат; complete Latin square » – bax, *Latin kvadratı*.

TAM ÖLÇÜ « полная мера; complete measure » – bax, *Davam olunması, ölçünün*.

TAM p – PLAN « полный p – план; complete p – design » – bax, *Dispersion analiz*.

TAM RANDOMLANDIRILMIŞ PLAN « полный рандомизированный план; complete randomized design » – bax, *Blok planı*.

TAM RİSK « полный риск; total risk » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

TAM SİNİF(fi) kriterilərin « полный класс критериев; complete class of tests » – bax, *Statistik kriteri; tam sinif*.

TAM STATİSTİKA « полная статистика; complete statistic » – sıfırın trivial meyilsiz statistik qiymətlərini doğuran statistikadır. Daha dəqiq, əgər $\theta \in \Theta$ olduqda $M_\theta \psi(T) \equiv 0$ (və ψ -nin məhdud olduğu halda $\psi = 0$) bərabərliyi P_θ – sanki yaqın ödənilsə, T statistikası $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün tam statistikadır (məhdud tam statistika) deyilir. Həmçinin $\mathcal{P}$ T -yə nəzərən paylanmaların tam ailəsidir, deyilir.

T statistikasının tamlığı konsepsiyası T kafi statistika olduqda səmərəli olur. $\mathcal{P}$ ailəsinin tam (məhdud tam) kafi statistikaya malik olması bu ailə üçün iki mühüm məsələni həll etməyə imkan verir: 1) Rao – Blekuell teoreminin köməyi ilə verilən parametrik funksiyanın (əgər bu funksiyanın hər hansı meyilsiz statistik qiyməti olarsa) ən yaxşı meyilsiz statistik qiymətini qurmaq və 2) bütün oxşar oblası təsvir etmək.

Əgər kafi statistika tam statistikadırsa, onda o, həm də minimal kafi statistikadır, odur ki, bu statistika vasitəsilə seçimi verilənlər maksimal mümkün olan surətdə reduksiya olunur (sadeləşdirilir).

T s. konsepsiyası E. Leman və H. Seffeyə məxsusdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Lehmann E. L., Theory of point estimation, v. 1–2, N. Y., 1983; [3] Lehmann E. L., Scheffé H., «Sankhya», 1950, v. 10, № 4, p. 305–40; 1955, v. 15, № 3, p. 219–36.

TAM STOXAŞTİK BAZİS « полный стохастический базис; complete stochastic basis » – bax, *Stoxastik bazis*.

TAM VARIASIYA « полная вариация; total variation » – bax, *Variasiya(sı)* ölcünün.

TAM VARIASIYA METRİKASI « полный вариацион метрика; total variation metric » – sadə ehtimal metrikasıdır və

$$\sigma(X, Y) = \sup \{ |P_X(A) - P_Y(A)| : A \in \mathcal{B} \}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada P_X – hər hansı separabel (U, d) metrik fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması, $\mathcal{B}$ – U -nün bütün Borel çoxluqlarının sistemidir. T v. m.-nin ən mühüm xassələri:

1) T v. m. təsadüfi kəmiyyətlərin eyni çoxluq üçün təyin olunmuş indikator metrikasına nəzərən minimal metrikadır.

2) ixtiyari ölçülən $\Psi : U \rightarrow U$ inikası və ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\sigma(\Psi(X), \Psi(Y)) \leq \sigma(X, Y) \quad (*)$$

və Ψ qarşılıqlı birqiymətli inikas olduqda (*)-da bərabərsizlik işarəsi bərabərlik işarəsi ilə əvəz olunur.

3) T v. m. Levi – Proxorov metrikası ilə $\pi \leq \sigma$ bərabərsizliyi ilə əlaqəlidir.

4) $U = \mathbb{R}^n$ olduğu halda T v. m.-nin

$$\sigma(X, Y) = \frac{1}{2} \int |dF_X(x) - dF_Y(x)|$$

kimi ifadələri məlumdur, F_X – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. $\sigma(X, Y) = \sup \{ |Mg(X) - Mg(Y)| : g \text{ – kəsilməzdir, } 0 \leq g \leq 1 \}$; X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyalar terminlərində yuxarı qiymətləri (Berling bərabərsizlikləri)

$$\sigma^2(X, Y) \leq \int (|a(t)|^2 + |a'(t)|^2) dt,$$

$$\sigma(X, Y) \leq \int_0^\infty t |da'(t)|$$

bərabərsizlikləri ilə təyin olunur, burada $a(t) = f_X(t) - f_Y(t)$.

T v. m.-nin konstruksiyası müxtəlif güclü topologiyalar doğuran metrikaların geniş toplusunu almağa imkan verir. Bu $\mathcal{B}$ -nin çoxluqlarının o qədər də zəngin olmayan sistem ilə əvəz olunması sayəsində həyata keçirilir. Məs., $U = \mathbb{R}^1$ olduqda $\mathcal{B}$ -ni $\{t < x : x \in \mathbb{R}^1\}$ yarımoxlar sistemi ilə əvəz etdikdə *müntəzəm metrika* alınır.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Современная теория суммирования случайных величин, М., 1986.

TAM YİĞİLMƏ « полная сходимость; complete convergence » – bax, *Yığılma* tamamilə.

TAMAMİLƏ ADDİTİV ÇOXLUQLAR FUNKSİYASI « вполне аддитивная функция множеств; completely additive set function » – adətən, *hesabi – additiv çoxluqlar funksiyası* kimi təyin olunur. Lakin ölçü nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərində T a. ç. f. anlayışına bəzən ayrı mənə verilir. Daha dəqiq, α – ixtiyari sonsuz kardinal ədəd, μ – hər hansı (müsbət) σ – sonlu ölçü olsun. Əgər indekslərinin çoxluğunun gücü

α -nı aşmayan [yeni $\text{card}(\mathbf{I}) \leq \alpha$] μ – ölçülən $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ çoxluqlarının dizyunt ailəsinin nə cür olmasından asılı olmayaraq

$$\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbf{I}} X_i \right) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu(X_i)$$

bərabərliyi doğru olarsa, onda μ α -additiv ölçü adlanır. Baxılan $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ ailəsinin birləşməsinin μ – ölçülən çoxluq olduğu həmişə fərz olunur. Nəhayət, ixtiyari sonsuz kardinal α ədədi üçün μ ölçüsü (çoxluq funksiyası kimi baxılan) α -additiv ölçü olarsa, μ tamamilə additiv ölçü adlanır.

Tamamilə additiv ölçülərə (baxılan mənada) ən sadə misallar Dirak ölçüləridir. Bu ölçülər aşağıdakı kimi təyin olunur. X – boş olmayan əsas bazis fəzası, x – X -in ixtiyari nöqtəsi olsun. X fəzasının bütün hissələrinin çoxluğunda

$$\delta_x(Y) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x \in Y, \\ 0, & \text{əgər } x \notin Y \end{cases} \quad (Y \subset X)$$

münasibətilə δ_x funksionalı təyin olunur. Onda δ_x funksionalı tamamilə additiv ehtimal ölçüsüdür və δ_x – $x \in X$ nöqtəsinə müvafiq Dirak ölçüsü adlanır.

T. a. ç. f. anlayışını Bul cəbrləri üçün də daxil etmək olar (bu anlayış tam Bul cəbrləri nəzəriyyəsində xüsusi əhəmiyyətə malik olur).

TAMAMİLƏ ADDİTİV ÖLÇÜ « вполне аддитивная мера; completely additive measure » – bax, *Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası*.

TAMAMİLƏ KƏSİLƏN additiv funksional « вполне разрывный аддитивный функционал; totally discontinuous additive functional » – bax, *Markov prosesləri*; additiv funksional.

TAMAMİLƏ MÜSBƏT İNİKAS « вполне положительное отображение; completely positive mapping » – C^* – cəbri $\mathfrak{A}$ -nın C^* – cəbri $\mathfrak{B}$ -yə, ixtiyari natural n və ixtiyari $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{A}$, $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{B}$ üçün

$$\sum_{i,j=1}^n Y_i^* \Phi(X_i^* X_j) Y_j \geq 0$$

şertini ödəyən inikasıdır. Əgər $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$ kommutativ cəbrlərdirsə, tamamilə müsbət inikası müsbət inikası ekvivalentdir: əgər $X \geq 0$ olarsa, $\Phi(X) \geq 0$. Müsbət inikası olan, lakin T. m. i.

olmayan inikası misal: bütün kompleks kvadrat matrislərin $*$ – cəbrində transponirlənmədən alınan inikasıdır. T. m. i.-in strukturu belə bir teoremlə aydın olur: hər bir T. m. i. $*$ – homomorfizmi və şərti riyazi gözləmənin kompozisiyasıdır (bax, [1]). Bu fakt *kvant dinamik semi-qruplarının* qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində genişləndirilmiş konstruksiyasının əsasını təşkil edir (bax, [2]). Tamamilə müsbətlik anlayışı *kvant təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Stinespring W., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, p. 211–16; [2] Størmer E., «Acta math.», 1963, v. 110, № 3/4, p. 233–78.

970 TAMAMİLƏ

TAMAMİLƏ NORMAL FƏZA « совершенно нормальное пространство; completely normal space » – $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ topoloji fəzasıdır ki, ixtiyari $G \in \mathfrak{G}$ açıq çoxluğu üçün $\mathcal{X}$ -də ele kəsilməz f funksiyası vardır ki, bu funksiya üçün $G = \{x: f(x) > 0\}$. Bu tərif «adi» topoloji fəzalar və σ – topoloji fəzalar üçün də eynidir. Aşağıdakı müddə yalnız σ – topoloji fəzalar üçün doğrudur. Əgər $\mathfrak{G}$ ixtiyari $\mathcal{X}$ çoxluğunda funksiyaların hər hansı sinfidirsə və $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}$ -dən olan bütün funksiyaların kəsilməz olduğu ən zəif σ – topologiyadırsa, onda $(\mathcal{X}, \mathfrak{G})$ T. n. f.-dir.

Əd.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

TAMAMİLƏ ÖLÇÜLƏN PROSES « вполне измеримый процесс; well measurable / optional process », *optional proses*, – tamamilə ölçülən çoxluqların σ – cəbrinə nəzərən ölçülənlik xassəsinə malik olan *təsadüfi proses*dir. Bu proses aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ –

tam ehtimal fəzası, $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz axını olsun. $A \in \mathcal{A}_0$ olduqda $\{0\} \times A$ şəkilli və $0 \leq s < t$,

$A \in \mathcal{A}_s$ olduqda $[s, t) \times A$ şəkilli bütün çoxluqları özündə saxlayan $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbri tamamilə ölçülən çoxluqların σ – cəbri adlanır və $\mathfrak{M}$ simvolu ilə işarə olunur. Bu σ – cəbr progressiv ölçülən çoxluqların σ – cəbrinə daxildir və: 1) $[\sigma, \tau]$ tipli bütün stoxastik intervalları özündə saxlayan, $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbri ilə; 2) bütün həqiqi, uzlaşdırılmış sağdan kəsilməz və sol limitləri olan proseslərin ölçülənliyi $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə nəzərən təmin olunan σ – cəbr ilə üst-üstə düşür. $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikası $X(\cdot, \cdot)$ proses olarsa, $(M, \mathfrak{B})$ fəza fəzasında $(X(t))_{t \geq 0}$ proses *tamamilə ölçülən proses* adlanır.

Bax, *Martinqal*.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкость в случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985.

TAMAMİLƏ ÖLÇÜLƏN PROYEKSİYASI, PROSESİN « вполне измеримая проекция процесса; optional / well measurable projection of a process », $X(t)$ prosesinin (həqiqi, məhdud və ya mənfii olmayan, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ tam σ – cəbrlərinin sağdan kəsilməz axını ilə verilən və bu axınla uzlaşmayan da ola bilən) tamamilə ölçülən proyeksiyası – $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən tamamilə ölçülən ${}^0X(t)$ prosesidir ki, hər bir Markov momenti τ üçün

$$\mathbf{M}X(\tau) I_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbf{M}^0 X(\tau) I_{\{\tau < +\infty\}}$$

bərabərliyi doğrudur.

Məhdud (və ya mənfii olmayan) P. t. ö. p. vardır və birqimətli təyin olunur. Bu halda ixtiyari Markov momenti τ üçün

$${}^0X(\tau)I_{\{\tau < +\infty\}} = M\{X(\tau)I_{\{\tau < +\infty\}} | \mathcal{A}_\tau\}$$

berəbərliliyi doğrurdu.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

TAMAMİLƏ TƏSADÜFİ ARDICILLIQ « абсолютно случайная последовательность; absolutely random sequence » – bax, *Diskret bəyaz küy*.

TAMAMLANMA « пополнение; completion » – bax, *Minkovski əməlləri*.

TAMAMLANMA(sı) ehtimal fəzasının « пополнение вероятностного пространства; completion of a probability space » – bax, *Ehtimal fəzası*.

TAMAMLANMA(sı) ölçünün « пополнение меры; completion of a measure » – əvvəlcədən verilmiş ixtiyari bir ölçünün təyin olunma oblastını genişləndirərək, genişləndirilmiş oblastda bu ölçünü tam ölçüyə qədər davam etdirmək üçün tətbiq edilən elə konstruktiv prosesdir ki, verilmiş ölçünün təyin olunma oblastının genişləndirilməsi hər birinin əvvəlki ölçüsü sıfıra bərabər olan bütün çoxluqlar hesabına aparılır.

(X, S, μ) ölçülü fəza olsun; $\bar{S}$ isə əsas bazis çoxluğu X -in hissələrindən təşkil olunmuş elə sinifdir ki, onun elementləri $(A \cup A_1) \setminus A_2$ şəklindədir, belə ki, $A \in S$, A_1 və A_2 elə $N_1 \in S$ və $N_2 \in S$ çoxluqlarının hissələridir ki, bunlar üçün $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$. İxtiyari $(A \cup A_1) \setminus A_2$ şəklində çoxluğu həm $B \cup B_1$ və həmçinin $C \Delta C_1$ şəklində göstərmək mümkündür, burada $B \in S$, $C \in S$, B_1 və C_1 elə $N_3 \in S$ və $N_4 \in S$ çoxluqlarının altçoxluqlarıdır ki, bu çoxluqlar üçün $\mu(N_3) = \mu(N_4) = 0$. X əsas bazis çoxluğunun hissələrinin $\bar{S}$ sinfi σ – halqadır və ilkin S σ – halqasını özündə saxlayır. $\bar{S}$ σ – halqasında $\bar{\mu}[(A \cup A_1) \setminus A_2] = \mu(A)$ bərabərliyi vasitəsilə, korrekt surətdə, heqiqiyyətli $\bar{\mu}$ funksionalı təyin olunur və $\bar{\mu}$ tam ölçü olub, ilkin μ ölçüsünün davamıdır. $\bar{\mu}$ -nün tam ölçü olması belə anlaşılar ki, $Y \in \bar{S}$ & $\mu(Y) = 0$ & $Z \subset Y$ münasibətindən $Z \in S$ & $\bar{\mu}(Z) = 0$ münasibəti həmişə alınır.

$\bar{\mu}$ ölçüsü μ ölçüsünün tamamlanması, yuxarıda şərh olunmuş proses isə μ ölçüsünün standart tamamlanma prosesi adlanır.

Ehtimalın konstruksiyasına əsasən, ehtimal yalnız Borel çoxluqlarında təyin olunmuş ölçüdür. Hər bir Borel çoxluğunun isə, ümumiyyətlə, çoxlu sayda Borel çoxluğu olmayan altçoxluqları vardır. Ehtimalı sıfır olan çoxluğu – sıfır çoxluğu, adətən, nəzərə almamaq olar (sıfır çoxluqda bir-birindən fərqli təsadüfi kəmiyyətlər praktik olaraq «üst-üstə düşür» və bu təsadüfi kəmiyyətlər formal olaraq «ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər» adlanır). Deməli, sıfır çoxluğun elə altçoxluqları ola bilər ki, bu altçoxluqlarda ehtimallar təyin olunmamışdır və bu zaman təbiidir ki, sıfır çoxluğunun hər bir altçoxluğunun da sıfır çoxluq olduğunu gözlemək olar. Bu uyğunsuzluğu aradan qaldırmaq məqsədilə, belə bir postulat daxil etmək olar: eger $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ və $P\{\mathbb{B}\} = 0$ olarsa, onda $P\{\mathbb{A}\} = 0$.

Verilmiş $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasının *Lebeq tamamlanması* – Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{F}$ σ – cəbrinin bütün

çoxluqlarını və bu çoxluqların bütün sıfır altçoxluqlarını (heç olmasa) özündə saxlayan minimal $\mathcal{F}_1$ σ – cəbrinə qədər genişləndirilməsidir; bu yuxarıda qeyd olunmuş postulata əsaslanır. Yeni A çoxluğu $\mathcal{F}_1$ -ə, yalnız və yalnız, o vaxt daxildir

ki, bu çoxluq hər hansı bir $A^\circ \in \mathcal{F}$ olan A° Borel çoxluğundan sıfır çoxluqla fərqlənsin. Başqa sözlə, $A \setminus (A \cap A^\circ)$ və $A^\circ \setminus (A \cap A^\circ)$ çoxluqlarının hər ikisi eyni bir sıfır çoxluğun tərkibində olsun. Bu halda ehtimalın təyin olunma oblastını $\mathcal{F}$ -dən $\mathcal{F}_1$ -ə qədər davam etdirmək olur: sadəcə olaraq, ixtiyari $A \in \mathcal{F}_1$

üçün $P(A) = P(A^\circ)$ qəbul edilir. Asanlıqla isbat olunur ki, bu qayda ilə alınmış ölçü $\mathcal{F}_1$ -də yeganə və additiv ölçü olur.

Beləliklə, klassik Lebeq ölçüsünə (l -ə) klassik Borel ölçüsünün (b -nin) tamamlanması kimi baxmaq olar. Məs., $\mathcal{B}$ heqiqi oxun bütün Borel çoxluqları sinfi, $\mathcal{L}$ heqiqi oxun Lebeq mənaada ölçülən bütün çoxluqları sinfi olarsa, onda $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{L}$ və $\bar{b} = l$ yazmaq olar.

Bax, *Davamlanması, ölçünün*.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984.

TAMAMLANMA PRİNSİPİ « дополнительности принцип; complementarity principle » – bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*.

TAMAMLAYICI HADİSƏ A hadisəsinə « дополнительное событие к событию A ; complement (negation) of the event A » – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisədir. A hadisəsinə T , h., A hadisəsinə əks olan hadisə kimi də adlanır və hadisə $\bar{A}$ kimi işarə olunur. $\bar{A}$ A -nın inkarı kimi oxunur. $A \subset \Omega$ olduqda $\bar{A} \subset \Omega$, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ olduğundan

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

münasibəti həmişə doğrurdu.

TAMGİRİŞLİ XİDMƏT SİSTEMİ « полнодоступная система обслуживания; fully accessible queueing system » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

TAMLIĞI, FUNKSİYALAR SINFININ Hausdorfa görə « полнота класса функций по Хаусдорфу; Hausdorff completeness of a class of functions » – funksiyalar sinfini müntəzəm yığılmaya nəzərən qapalı vektor cəbrinə və vektor şəbəkəsinə çevirən xassədir. X çoxluğunda verilən funksiyalar sinfi $\mathcal{S}$

1) $\text{const} \in \mathcal{S}$;

2) $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ olduqda, $g_1 + g_2 \in \mathcal{S}$, $g_1 g_2 \in \mathcal{S}$ və eger bütün $x \in X$ -lər üçün $g_2(x) \neq 0$ olarsa, onda $g_1/g_2 \in \mathcal{S}$;

3) $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ olduqda, $\max\{g_1(x), g_2(x)\} \in \mathcal{S}$;

4) eger $g_n \in \mathcal{S}$ və $g_n \rightarrow g$ münasibəti X -də müntəzəm ödənilərsə, $g \in \mathcal{S}$;

şərtlərini ödəyərsə, $\mathcal{S}$ sinfi Hausdorffa görə tam sinif adlanır.

Hausdorffa görə tam siniflərin əsas xassəsi *Hausdorff teoremi*lə təyin olunur.

Əd.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с англ., М. – Л., 1937; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

TANINILMASI / MÜƏYYƏN OLUNMASI, OBRAZLARIN «распознавание образов; pattern recognition» – tədqiq olunan obyektə bilavasitə ölçülən xarakteristikaların (əlamətlərin, dəyişənlərin) qiymətləri toplusu üzrə verilən obyektin hər hansı siniflər (obrazlar) çoxluğundan hansı sinfə mənsub olmasını müəyyənləşdirmək üçün prosedurdur. O. t. *helledici qayda* vasitəsilə aparılır, bu prosedur *çoxölçülü müşahidələrin* nömrələr çoxluğuna və ya siniflərin (obrazların) adları çoxluğuna inikasından ibarətdir.

TAUBER TEOREMLƏRİ «Тауберовы теоремы; Tauberian theorems», Tauber tipli teoremlər, – hər hansı bir funksiyanın Laplas çevirməsi üzrə onun asimptotikasının təyin olunması kimi interpretasiya oluna bilən müddəalar toplusudur. T. t. *Abel teoremlərinə* nəzərən tərs teoremlərdir. «T. t.» termini Q. Hardi (G. Hardy) və C. Litvud (J. Littlewood) tərəfindən daxil olunmuşdur və bu növ ilk teorem A. Tauberə məxsusdur (bax, [1], həm də aşağıda misal 2).

Misal 1. $\alpha > 0$, $s > 0$ olsun. Onda

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\alpha-1} dx = \Gamma(\alpha) / s^{\alpha}$$

bərabərliyi doğrudur. $f(x)$ – mənfii olmayan, ixtiyari sonlu intervalda mütləq inteqrallanan, ixtiyari s qiymətində Laplas çevirməsi –

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

təyin olunmuş funksiya olsun. Məlumdur ki, $s \downarrow 0$ olduqda

$$L(s) \sim \Gamma(\alpha) / s^{\alpha} \quad (1)$$

münasibəti doğrudur. $x \rightarrow \infty$ olduqda $f(x)$ haqqında nə cür mülahizə yürütmək olar? sualını qoymaq olar.

f -in monoton olması haqqında əlavə fərziyyə edilərsə, onda (1)-dən

$$f(x) \sim x^{\alpha-1}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2)$$

münasibəti alınır. Bu əlavə fərziyyə yerinə yetirilməyə, onda yalnız hökm etmək olar ki, $x \rightarrow \infty$ olduqda

$$\int_0^x f(u) du \sim \int_0^x u^{\alpha-1} du = x^{\alpha} / \alpha \quad (3)$$

münasibəti doğrudur. Bu hökmlərin hər ikisi T. t.-nə misaldır.

Misal 2.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

olsun, belə ki, bərabərliyin sağ tərəfindəki sıranın $|z| < 1$ olduqda yığıldığı fərz olunur. Məlumdur ki, $z \uparrow 1$ olduqda

$$g(z) \rightarrow A. \quad (4)$$

Əgər a_n -lər mənfii olmazlarsa, onda (4)-dən alınır ki, $\sum a_n$ sırası yığılır və onun cəmi A -ya bərabərdir.

$$g(z) = 1/(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

funksiyası bir misal olaraq onu göstərir ki, a_n əmsalları ardıcılığına heç bir məhdudiyyət olmasa $\sum a_n$ sırasının yığılması mümkün olmaya bilər [T. t.-nin qüvvət üstlü sıralar haqqında ilkin variantında $na_n = o(1)$ fərziyyəsindən istifadə edilmişdi].

Misal 2 ilə misal 1 arasında əlaqə aşağıdakı kimi müəyyən oluna bilər. $0 < z < 1$ olduqda $z = e^{-s}$ götürərək və $x \geq 0$ olduqda

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

bərabərliyi ilə $G(x)$ funksiya daxil edərək, ilkin fərziyyəni aşağıdakı şəkildə yazmaq olar: $s \downarrow 0$ olduqda

$$f(e^{-s}) = s \int_0^{\infty} e^{-sx} G(x) dx \rightarrow A.$$

(1)-dəki mülahizəyə uyğun olaraq (a_n -lərin mənfii olmadığı halında), $x \rightarrow \infty$ olduqda $G(x) \rightarrow A$ münasibəti ödənilir, bu isə $\sum a_n$ sırasının A -ya yığılmasını ifadə edir.

T. t. və onların ehtimal nəzəriyyəsində tətbiqi [2]-nin 13-cü fəslində ətraflı müzakirə olunur. Bu fəslə girişdə doğru olaraq qeyd olunmuşdur ki, əsas T. t.-nə «tam hüquqla» «riyazi analiz

incisi» kimi baxmaq olar. Yeri gəlmişkən qeyd olunmalıdır ki, «sade ədədlərin paylanması» asimptotik qanunu» adlandırılan qanunun isbatı məhz T. t.-indən birinə əsaslanır (bax, [3]).

T. t.-in isbatı, adətən, olduqca çətindir. Bu halda aydınlıq gətirən mümkün variantlardan biri ölçülərin zəif yığılma anlayışının istifadə edilməsidir. Misal 1-in şərtlərində bunu aşağıdakı kimi etmək olar. İlkin fərziyyəni aşağıdakı kimi yazaraq: yeni $s \rightarrow 0$ olduqda

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \sim \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\alpha-1} dx \quad (5)$$

və sonra bu münasibətdə $sx = (m+1)/n$ qəbul edərək (m – mənfii olmayan qeyd olunmuş tam ədəddir), $n \rightarrow \infty$ götürərək və x dəyişənini $e^{-x/n} = u$ qaydası ilə u dəyişəni ilə əvəz edərək (yeni $x = n \ln 1/u$ götürərək) nəticə kimi aşağıdakı müddəanı almaq olar: ixtiyari $m = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərində və $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\int_0^1 u^m P_n(du) \rightarrow \int_0^1 u^m P(du), \quad (6)$$

burada P_n və P , $– [0, 1]$ parçasında sonlu ölçülərdir və bunların sıxlıqları uyğun olaraq, $(1/n^{\alpha-1}) f(n \ln 1/u)$ və $(\ln 1/u)^{\alpha-1}$ funksiyalarıdır. (6) momentlərinin yığılmasından P_n ölçülərinin

P -yə zəif yığılması, bu yığılmadan isə integralları yığılması, yəni

$$\int_0^1 g(u) P_n(du) \rightarrow \int_0^1 g(u) P(du) \quad (7)$$

münasibəti – ixtiyari məhdud sanki kəsilməz $g(u)$ funksiyasına P ölçüsünə görə yığılma alınır. $0 \leq u < 1/e$ olduqda $g(u) = 0$, $1/e \leq u \leq 1$ olduqda isə $g(u) = 1/u$ götürərək, x dəyişənini qaytdıqda, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\int_0^n f(x) dx \sim \int_0^n x^{\alpha-1} dx = n^{\alpha}/\alpha$$

münasibəti alınır. Aydındır ki, bu sonuncu münasibəti n -in tam qiymətlərindən digər ixtiyari qiymətlər üçün də almaq olar.

Əd.: [1] Tauber A., «Monats. Math. und Physik», 1897, Bd 8, S. 273–77; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые ее приложения, пер. с англ., М., 1963.

TAY « **двойник; alias** » – bax. *Tezliklərin üst-üstə yüklənməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzing*.

TELEQRAF PROSESİ « **телеграфный процесс; telegraph process** » – bax. *Təsədüfi teleqraf siqnalı*.

TELEQRAF SİQNALI « **телеграфный сигнал; telegraph signal** » – iki: +1 və –1 qiymətlərini alan Markov stasionar təsadüfi prosesidir.

TERMODİNAMİK ENTROPİYA « **термодинамическая энтропия; thermodynamical entropy** » – tarazlıqlı statistik sistemdə istifadə olunan, xüsusi enerji və hissəciklərinin sıxlığının qeyd olunmuş qiymətlərlə «sistemin vəziyyətlərinin sayını» xarakterizə edən, termodinamik sistemlərdən biridir.

d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin sonlu Λ oblastında yerləşən N sayda hissəcikdən ibarət və qarşılıqlı təsir enerjisi $H_{\Lambda,N}(x)$ ilə təsvir olunan klassik şəbəkəvari qaz halında

$$S(\Lambda, N, E) = \ln(\#\{x \in \Lambda : H_{\Lambda,N}(x) < E\}) \quad (*)$$

kəmiyyəti belə qazın Λ -da entropiyası adlanır, burada $H_{\Lambda,N}(x)$, $x \in \Lambda$, – N hissəciyin Λ -da konfigurasiyasıdır,

$\#B$ – sonlu B çoxluğunun elementlərinin sayıdır. Hissəciklərin qarşılıqlı təsirinə nəzərən, bəzi olduqca ümumi fərziyyələrlə, sonsuz qazın T. e.-si { x ü s u s i T. e. – rus. удельной } adlanan,

$$S(\rho, e) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d, N/|\Lambda| \rightarrow \rho, E/|\Lambda| \rightarrow e} \frac{1}{|\Lambda|} S(\Lambda, N, E)$$

termodinamik limiti mövcuddur ($|\Lambda| = \# \Lambda$). Klassik kəsilməz və həm də kvant qazları üçün T. e. analogi təyin olunur: birinci halda (*) tərifində konfigurasiyaların sayını qazın faza fəzasının uyğun oblastının həcmi ilə, ikinci halda isə məxsusi qiymətləri E -ni aşmayan $\hat{H}_{\Lambda,N}$ enerji operatorunun xətti asılı olmayan məxsusi vektorlarının sayı ilə əvəz etmək lazımdır.

Əd.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964.

TERMODİNAMİK LİMİT KEÇİDİ « **термодинамический предельный переход; thermodynamical limit approach** » – baxılan sistemin yerləşdiyi qabın tutumunun sonsuzluğa yaxınlaşması ilə bağlı olan, Gibbs təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində və statistik mexanikada əsas rol oynayan limit keçididir. Bu halda qabın tutumu – diskret argumentli sistemlər üçün tutumun nöqtələrinin sayı və nöqtəvi sistemlər üçün Lebeq ölçüsü nəzərdə tutulur. Qeyd olunmuş althəcmələrdə Gibbs paylanması və sərbəst enerji ilə doğurulan sonluölçülü paylanmaların, korrelyasiyon funksiyaların limitlərinə baxılır. Qabların Λ_n , $n = 1, 2, \dots$ baxılan ardıcılığı üzərinə, adətən, əlavə şərtlər qoyulur, bu isə onu ifadə edir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda, bu qabların sərhədləri, nəzərə cərpacaq qədər kəsik-kəsik olmur. Məs., Van – Hov teoremində Van – Hopf şərtləri beledir.

TEMPERATUR QRİN FUNKSİYASI « **температурная функция Грина; temperature Green function** » – bax. *Qrın funksiyası*.

TEST « **тест; test** » statistik – bax. *Statistik kriteri*.

TEYLOR STOXASTİK DÜSTURU « **Тейлора стохастическая формула; stochastic Taylor formula** » – *stochastic differensial tənliyin həllini*

$$X_t = X_s + P_n(X_s, s, t) + R_n(X(\cdot), s, t), \quad t > s \geq 0$$

cəmi şəklində ifadəsədir, burada P_n və R_n – idarəedici semi-martinqallar üzrə (əksər hallarda Viner prosesi və zaman üzrə) tərtibi n -dən çox olmayan çoxqat stoxastik integralları sonlu cəmləridir. Bu halda P_n – baxılan $[s, t]$ zaman parçasının başlanğıc nöqtəsində yalnız X_s -in qiymətindən, R_n isə bütün X_u , $s \leq u \leq t$ trayektoriyasından asılıdır. P_n və R_n üçün rekurrent münasibətlər nisbətən böyükdürlər (bax, məs., [1]). T. s. d.-da qalıq həddi kimi interpretasiya olunan R_n nəzərə alınmadıqda (yeni R_n -siz) stoxastik differensial tənliklərin sonluferqlərli approksimasiyasını ixtiyari yığılma sürəti ilə qurmaq mümkündür.

Əd.: [1] Platen E., Wagner W., «Probab. and Math. Statist.», 1982, v. 3, fasc 1, p. 37–51.

TEZLİK « **частота; frequency** » – *zaman sıralanının spektral analizində istifadə olunan, rəqslərin perioduna tərs mütənəsis kəmiyyətdir. Tezliklər oblastında stasionar təsadüfi proseslərin tədqiqi təsadüfi prosesin spektral sıxlığının öyrənilməsindən ibarətdir, spektral sıxlıq isə müxtəlif T.-lər üzrə prosesin dispersiyasının paylanmasını xarakterizə edir. Beləliklə, T. stasionar təsadüfi prosesin argumenti kimi üzə çıxır. Normalanmadan asılı olaraq, tsiklik və bucaq tezlikləri anlayışları daxil edilmişdir. Vahid zaman ərzindəki tsikllərin sayını xarakterizə edən və rəqslərin perioduna tərs kəmiyyətə tsiklik tezlik deyilir. Əgər α tsiklik T.-dirsə, onda $2\pi\alpha$ kəmiyyəti bucaq tezliyi adlanır.*

TEZLİK; blok tezliyi « **частота блоковая; block frequency** » – bax. *Səçimi bloklar*.

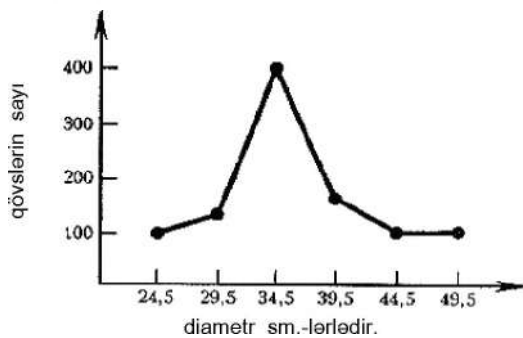
TEZLİK(yi) təsadüfi hadisənin « **частота случайного события; frequency of a random event** ». A hadisəsinin tezliyi – eyni şərtlər yerinə yetirilməklə aparılan n sayda sınaqda A hadisəsinin baş vermə

sayı – m ədədinə deyilir. m/n nisbatına A hadisəsinin nisbi tezliyi deyilir. Asılı olmayan və birinci sınaqlar şərtlərində nisbi tezliklərin statistik dayanıqlılığı kimi qanunauyğunluq müşahidə olunur ki, bu zaman sınaqların müxtəlif seriyalarında nisbi tezlik m/n -in eyni bir ədəddən çox az fərqlənməsi ilə müşahidə olunur. Bu ədəd A hadisəsinin ehtimalı adlanır və $P(A)$ ilə işarə olunur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

TEZLİK – ZAMAN SPEKTRAL SİXLİĞİ « частотно – временная спектральная плотность; frequency – time spectral density » – bax, *Spektral nəzəriyyələri* qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

TEZLİKLƏR POLİQONU « частот полигон; frequency polygon » – eksperimental verilənlərin grafik təsviri növlərindən biridir. *Histogramın* qurulmasında olduğu kimi mütləq kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin bütün müşahidə olunmuş qiymətləri diapozonu k sayda $[x_i, x_{i+1})$ intervallarına bölünür $i = 1, \dots, k$, bu intervalların ortalarından $m_i / (x_{i+1} - x_i)$ və ya $h_i / (x_{i+1} - x_i)$ hündürlüklü perpendikulyarlar qaldırılır və bunların təpələri birləşdirilir. Şəkilde histogramın qurulmasında alınmış T. p.-nın grafiki verilir:



Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün də T. p. qurulur. Bu halda intervalların orta nöqtələri əvəzinə absis oxu üzrə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri qeyd olunaraq, bu nöqtələrdən verilmiş qiymətin alınmasının nisbi tezliyinə və ya mütləq tezliyinə bərabər olan hündürlüklü perpendikulyar qaldırılır və bu perpendikulyarların təpələri birləşdirilir. T. p.-nın grafiki sıxlıq grafikinə qeyri-parametrik statistik qiymətlidir və o, histogramdan yaxşı sayılır. Belə ki, qruplama intervallarının məqbul seçilməsi nəticəsində T. p.-nın sıxlıq grafikindən yayınmasını, L^2 metrikasında, $n^{-2/3}$ tərtiblə almaq olur (bax, [1]). C metrikasında yığılma alınmışdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [2] Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., 1970.

TEZLİKLƏRİN DƏYİŞDİRİLMƏSİ / ELAYZINQ « подмена частот; aliasing » – bax, *Tezliklərin üst-üstə düşməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzing*.

974 TEZLİKLƏR

TEZLİKLƏRİN ÜST-ÜSTƏ DÜŞMƏSİ / TEZLİKLƏRİN DƏYİŞDİRİLMƏSİ / ELAYZINQ « наложение частот, подмена частот, элайзинг; aliasing » – $t = \dots, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ nöqtələrinin diskret ardıcılığında $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ stasionar təsadüfi prosesinin müşahidə olunduğu zaman yaranan təzahürdür. Stasionar təsadüfi prosesin spektral ifadəsinin aşağıdakı şəkildə olduğu məlumdur:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda). \quad (1)$$

$\zeta(t)$ prosesini Δ zaman intervalından bir müşahidə etdikdə (1) ifadəsi aşağıdakı kimi dəyişir:

$$\begin{aligned} \zeta(k\Delta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k\Delta} d\varphi(\lambda) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda k\Delta + i\frac{2\pi}{n}k\Delta} d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta). \end{aligned} \quad (2)$$

(2)-dən aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k\Delta} d\varphi(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda k\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta). \quad (3)$$

$$d\varphi_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta), \quad M d\varphi_1(\lambda) = 0$$

münasibətlərlə verilən ölçü ele ortoqonal təsadüfi ölçüdür ki, bu ölçü

$$M |d\varphi_1(\lambda)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M |d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta)|^2$$

bərabərliyini ödəyir.

(3) bərabərliyi onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesi üçün tezlikləri λ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ olan harmoniklər bir-birindən fərqlənmirlər. Əgər $\zeta(t)$ həqiqi stasionar prosesdirsə, onda tezlikləri $-\lambda$ və λ olan harmoniklər bir-birindən fərqlənmirlər və buna görə də, λ tezlikli harmoniki $\pm\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezlikləri harmoniklərdən fərqləndirmək olmur. $-\lambda + 2n\pi/\Delta$ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezlikləri – müşayiətçi tezliklər adlanır. λ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $0 \leq \lambda \leq \pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezliklərinə tay tezliklər (rus. «двойники») deyilir, λ isə baş tay tezlik adlanır.

E.-in effekti $F_\Delta(\lambda)$ ardıcılığının spektral funksiyaları $F(\lambda)$ prosesi arasında aşağıdakı əlaqə düsturu ilə daha yaxşı təsvir olunur:

$$F_\Delta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F(\lambda + 2n\pi/\Delta) - F((2n-1)\pi/\Delta)];$$

bu düstur $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının varlığı halında aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$f_\Delta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2n\pi/\Delta)$$

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1, М., 1971; [3] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

TEZLİKLİ – MODULYAR OSSİLYASIYA « частотно – модулированное колебание; frequency – modulated oscillation » –

$$X(t) = A \sin \left[\int_0^t \psi(s) ds \right] \quad (*)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada $\psi(s)$ – təsadüfi siqnaldir, adətən, stasionar fərz olunur. (*) şəklində T. – m. o. radio-texnikada geniş istifadə olunur, burada $\psi(s) = \omega_0 + a(s)$, ω_0 – yüksək aparıcı tezlik, $a(s)$ – T. – m. o.-nin keçirdiyi informasiyanı özündə daşıyan, aşağıtezlilikli təsadüfi siqnaldir. Tezlikli modulyasiyada modulyasiyalanmış $X(t) = A \sin[\psi(t)]$ rəqsinin ani $\psi'(t)$ tezliyinin pulsasiyalanı, modulyasiyalayıcı $a(t)$ siqnalının qiymətlərilə təyin olunduğu halda, bucaq modulyasiyasının formalarından biridir, yəni $\psi(t)$ funksiyasının pulsasiyalanının hər hansı bir modulyasiyalayıcı $a(t)$ siqnalının köməyiylə idarə olunmasıdır; digər belə forma faza modulyasiyasıdır.

Əd.: [1] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, т. 2, пер. с англ., М., 1962; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 1, М., 1974; [3] Ван Трис Гарри Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [4] Парoulis А., Probability, random variables, and stochastic processes, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1984.

TEZLİKLİ MODULYASIYA « частотная модуляция; frequency modulation » – bax, *Tezlikli modulyar ossilyasiya*.

TƏBİİ SƏRHƏD « естественная граница; natural boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya; sərhədlərin təsnifatı*.

TƏDQIQI STATİSTİK ANALİZ(i) verilənlərin « разведочный статистический анализ данных; exploratory data statistical analysis » – verilənlər üzərində statistik yenidən işlənilmə mərhələsidir, bu analiz o halda tətbiq olunur ki, çoxölçülü verilənlər cədvəli tədqiqatçıya məlum olsun, digər tərəfdən isə bu verilənlərin generasiyasının fiziki (səbəb) mexanizmi haqqında apriori informasiya ya olmasın və ya tam olmasın. Bu halda T. s. a. tədqiqatçıya verilənlərin strukturunu kompakt və aydın təsvir etməyə (məs., bu strukturun vizual görüntüsü formasında və ya bu strukturun yayınmalar formasında) yardımçı ola bilər. Belə təsvirə əsaslanan tədqiqatçı artıq «məqsədyönlü» şəkildə malik olduğu verilənlərin daha ətraflı araşdırılması məsələsinə qarşısına qoya bilər və bu araşdırmada statistik analiz bu və ya digər bölməsindən istifadə edərək, statistik hipotezlərin yoxlanılması aparatının köməyiylə verilənlərin alınmış strukturunu əsaslandıraraq, hətta verilənlərin səbəbiyyət modeli haqqında bəzi nəticələr də çıxara bilər. Bu mərhələ verilənlərin təsdiqedicisi analizi adlanır.

T. s. a. vasitəsilə verilənlərin strukturunun aşkar edilməsi bəzən, bu analizdə yekunlaşdıncı mərhələ də ola bilər. Digər tərəfdən, T. s. a.-in bir sıra metodlarına verilənlərin növbəti statistik yenidən işlənilməsi üçün hazırlıq metodları kimi də baxmaq olar, bu halda növbəti mərhələlərdə verilənlər strukturu haqqında məlumat öyrənilməsi tələb olunur. Bu halda T. s. a. mərhələsi verilənlərin yenidən kodlaşdırılması və çevrilməsi kimi müəyyən bir mərhələ rolunu oynayır (məs., dim. – ölçünün kiçildilməsi yolu

ilə), bu da növbəti analiz üçün münasib formanın alınmasına səbəb olur.

T. s. a.-in metodlarının hansı hallarda tətbiq olunmasına baxmayaraq əsas məsələ, ilkin verilənlərdə olan informasiyanın mühüm aspektlərinin olduqca tam şəkildə qorunub saxlanılması şərtlə, verilənlərin kompakt təsvirinə keçiddir. Bu təsvirin isə istifadə edən üçün aydın olması da mühümdür.

TƏDRİCİ DONMA / FEYDİNQ « медленное затухание; slow fading » – bax, *Feyding / donmalar kanalı* da.

TƏDRİCİ MARKOV XASSƏSİ « умеренно марковское свойство; moderate Markov property » ikinci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz Markov prosesi üçün – qabaqcadan bildirilən ixtiyari τ anı üçün τ anında prosesin sol limitinin məlum X_τ qiymətində «keçmişin» və «gələcəyin» şərti asılı olmamalıdır. Daha dəqiq, fərz olunur ki, $X = (X_t, \mathcal{A}_t, P_x)$ trayektoriyaları sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan bircins Markov prosesidir. Əgər $\tau_n < \tau_{n+1}$ və $\tau_n \uparrow \tau$ şərtlərini ödəyən τ_n Markov momentləri ardıcılığı varsa, τ qabaqcadan bildirilən Markov momenti adlanır, bu halda fərz olunur ki, $\mathcal{A}_\tau = \bigvee_n \mathcal{A}_{\tau_n}$ (σ – cəbrinin tərifinə görə) üçün bax, «Ciddi Markov xassəsi» məq.-nə). Əgər ixtiyari qabaqcadan bildirilən Markov momenti τ və ixtiyari $h > 0$ üçün

$$P_\mu \{X_{\tau+h} \in \Gamma | \mathcal{A}_\tau\} = P_{X_\tau} \{X_n \in \Gamma\} \quad P_\mu - \text{sanki yəqin}$$

ödənilərsə, X prosesi tədrici Markov xassəsinə malikdir, deyilir. T. M. x. [1]-də K. Çjun və J. Uolş tərəfindən daxil olunmuşdur. Rey prosesləri və Hant prosesləri T. M. x.-sinə malikdirlər. T. M. x. $r_2(X_\tau, \Gamma)$ təsadüfi proseslərinin soldan sanki yəqin kəsilməzlik xassəsi ilə əlaqədardır, burada r_λ – X prosesinin rezolventidir.

Əd.: [1] Chung K. L., Walsh J. B., «Acta Math.», 1969, № 3/4, p. 225–51; [2] Chung K. L., Glover J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, S. 237–48; [3] Engelbert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 111–30, 235–66; [4] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

TƏDRİCİ YAYINMALAR ZONALARI « умеренных отклонений зоны; zones of moderate deviations » – bax, *Normal yığılma zonası*.

TƏHRİF ÖLÇÜSÜ « искажения мера; distortion measure » – bax, *İnformasion dayanıqlılıq, Məlumatlar mənbəi*.

TƏKMİL EHTİMAL FƏZASI « совершенное вероятностное пространство; perfect probability space » – bax, *Ehtimal fəzası*.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « повторного логарифма закон; law of the iterated logarithm » – ehtimal nəzəriyyəsinin böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun dəqiqləşdirilməsi olan limit teoremidir. $X_1, X_2, \dots$ – təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

olsun. $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ədədi ardıcılıqlar olduğu halda, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu haqqında teoremlərdə $n \rightarrow \infty$ olduqda $(S_n - a_n)/b_n \rightarrow 0$ münasibətlərinin sanki yaqin (yeni 1 ehtimalla) ödənilməsi üçün şərtlər verildiyi halda, T. I. q. haqqında teoremlərdə $\{a_n\}$ və $\{c_n\}$ ədədi ardıcılıqları götürülür ki,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - a_n}{c_n} = 1 \quad (1)$$

və ya

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - a_n|}{c_n} = 1 \quad (2)$$

münasibətləri sanki yaqin ödənilsin. (1) münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P} \{ S_n - a_n > (1 + \varepsilon) c_n \text{ sonsuz dəfə} \} = 0$$

və ya

$$\mathbf{P} \{ S_n - a_n > (1 - \varepsilon) c_n \text{ sonsuz dəfə} \} = 0$$

berəberlikləri ilə eynigüclüdür.

T. I. q.-nın effekti ilk dəfə 1924-də A. Ya. Xinqin tərəfindən, $\{X_n\}$ Bemulli qanununa tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halı araşdırarkən aşkar olunmuşdur (bax, [1]).

T. I. q. haqqında ümumi tip ilk teorem 1929-da A. N. Kolmoqorovun nəşr olunmuş aşağıdakı nəticəsidir (bax, [2]): $\{X_n\}$ – riyazi gözləmələri sıfıra bərabər, sonlu dispersiyalara malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı. $B_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}X_k^2$ olsun.

Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $B_n \rightarrow \infty$ olarsa və $\{c_n\}$ müsbət sabitlər ardıcılığı $\{C_n\}$ olarsa ki,

$$|X_n| \leq C_n \text{ və } C_n = o((B_n / \ln B_n)^{1/2})$$

münasibətləri ödənilsin, onda $a_n = 0$ və $c_n = (2B_n \ln B_n)^{1/2}$ olduqda (1) və (2) münasibətləri ödənilir.

Əgər $\{X_n\}$ $\{X_n\}$ ele asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olarsa ki, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$ şərtlərini ödəsin, onda $a_n = 0$, $c_n = (2nb \ln \ln n)^{1/2}$ olduqda, (1) və (2) münasibətləri doğrudur, burada $b = \mathbf{M}X_1^2$ (bax, [3]).

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının geniş sinfi üçün T. I. q.-nın ümumiləşmələrini U. Feller [4]-də, F. Ştrassen [5]-də, A. İ. Martikaynen [6]-də və b. (bax, [7]) almışlar. T. I. q. haqqında teoremlər T. I. q.-nın asılı təsadüfi kəmiyyətlər vektorları ardıcılıqları və təsadüfi proseslərə tətbiqi üçün çoxsaylı araşdırmalara zəmin olmuşdur.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Избранные труды по теории вероятностей, М., 1955, с. 12–24; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 34–44; [3] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1941, v. 63, p. 169–76; [4] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 373–402; [5] Strassen V., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211–26; [6] Мартиканен А. И., «Теория вероятн.

и ее примен.», 1985, т. 30, в. 4, с. 694–705; [7] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Banax fəzasında «повторного логарифма закон в банаховом пространстве: law of the iterated logarithm in Banach space» – Banax fəzasında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün (yeni təsadüfi elementlər üçün) *təkrar loqaritm qanununun* ümumiləşməsidir. Sonsuzölçülü fəza halında məhdud T. I. q. (MTLQ) və kompakt T. I. q. (KTLQ) qanunları fərqləndirilir. Skalılar və sonluölçülü hallarda T. I. q.-nın bu formaları üst-üstə düşür. Maraqlı doğuran hallardan birincisi $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ separabel Banax fəzası B -də eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlər olduğu halıdır.

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, a_n = (2n \ln \ln n)^{1/2}, n = 3, 4, \dots$$

olsun. Əgər

$$\sup_n \|S_n\|/a_n < \infty$$

münasibəti sanki yaqin ödənilərsə, onda X təsadüfi elementi MTLQ-nu ödəyir, deyilir və $X \in \text{MTLQ}(B)$ yazılır. Əgər S_n/a_n ardıcılığı sanki yaqin B -də nisbi kompaktdırsa, X elementi KTLQ-nu ödəyir deyilir və $X \in \text{KTLQ}(B)$ yazılır.

1. Məhdud təkrar loqaritm qanunu. Əgər $B = \mathbb{R}^1$ olarsa, onda $X \in \text{MTLQ}(B)$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\sigma^2 = \mathbf{M}X^2 < \infty$ və $\mathbf{M}X = 0$ olsun. Əgər bu şərtlər ödənilərsə, onda (S_n/a_n) ardıcılığının limit nöqtələrinin çoxluğu sanki yaqin $[-\sigma, +\sigma]$ intervalı ilə üst-üstə düşür (Hartman–Vintner–Ştrassen teoremi). Bu teoremdən Banax fəzasında MTLQ-nun doğruluğu üçün zəruri şərtlər alınır. Doğrudan da, əgər $X \in \text{MTLQ}(B)$ olarsa, onda

a) hər bir $b^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionalı üçün $\mathbf{M}[b^*(X)]^2 < \infty$ olur, yeni X zəif ikinci tərtibə malikdir və deməli, R_X kovariasion operatoru haqqında mülahizə yürütmək olar.

b) $\mathbf{M}X = 0$.

Bundan əlavə, əgər $X \in \text{MTLQ}(B)$ olarsa, onda

c) $\mathbf{M}\|X\|^2 / L(L\|X\|) < \infty$, burada $L(t) = \max(1, \ln t)$, $t > 0$, xüsusi halda, $0 < p < 2$ şərtini ödəyən hər bir p üçün $\mathbf{M}\|X\|^p < \infty$. Lakin əgər B sonsuzölçülü olarsa, onda $X \in \text{MTLQ}(B)$ vardır ki, $\mathbf{M}\|X\|^2 = \infty$.

a), b), c) şərtlərindən MTLQ alınır. $C[0, 1]$ fəzasının vahid radiuslu küresində toplanmış və Gauss kovariasiyasına malik X təsadüfi elementi MTLQ-na tabe deyildir. 2 tip fəza üçün (bax, Banax fəzası p tip) MTLQ məsələsi tamamilə həll olunmuşdur. Əgər X 2 tip fəzada təsadüfi elementdirsə, onda X MTLQ-na, yalnız və yalnız, o halda tabedir ki, a), b), c) şərtləri ödənilsin (bax, [2]). Ümumi Banax fəzaları üçün

aşağıdaki nəticə doğrudur: $X \in \text{MTLQ}(B)$, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, a), b), c) şərtləri ödənilsin və $\{\|S_n\|/a_n\}$ ardıcılığı stoxastik məhdud olsun (bax, [2]).

2. Kompakt təkrar loqarifm qanunu. Aydın ki, KTLQ MTLQ-nu doğurur. Əgər $X \in \text{KTLQ}(B)$ olarsa, a), b), c) şərtlərindən başqa, aşağıdakı şərtlər də ödənilir:

- ç) kovariasion R_X operatoru kompaktdır, yeni $R_X\{b^* \in B^* : \|b^*\| \leq 1\}$ çoxluğu B fəzasının nisbi kompakt altçoxluğudur;
- d) $\|S_n\|/a_n \xrightarrow{P} 0$.

KTLQ -nda sanki hər bir (S_n/a_n) ardıcılığı üçün konstruktiv olaraq $e_k \subset B$ kompaktını göstərmək olar ki, bu kompakt bu ardıcılığın limit nöqtələrinin çoxluğu ilə üst-üstə düşsün. Doğrudan da, əgər $X \in \text{KTLQ}(B)$ olarsa, onda $K = A\{h \in H : \|h\| \leq 1\}$, burada A – hər hansı Hilbert fəzası H -dan B -yə təsir edən və $R_X = AA^*$ faktorizasiyasında iştirak edən operatorudur. Bundan əlavə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\rho(S_n/a_n, K) \rightarrow 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $\rho(x, K)$, x nöqtəsindən K çoxluğuna qədər məsafədir.

MTLQ kimi KTLQ da 2 tip Banax fəzaları üçün kifayət qədər öyrənilmişdir. Belə B fəzasının X təsadüfi elementi üçün, $X \in \text{KTLQ}(B)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, a), b), c), ç) şərtləri ödənilmiş olsun. Ümumi halda, bu şərtlərə d) şərtlərini də əlavə etmək lazımdır (bu şərt X -in paylanması təminatlarında aşkar ifadə olunur) (bax, [2]).

Əgər B 2 kotip Banax fəzası olarsa və əgər X a), b) şərtlərini ödəyərsə və Qauss kovariasiyasına malik olarsa, onda $X \in \text{KTLQ}(B)$ (bax, [1], [4]).

Banax fəzasında mərkəzi limit teoremi (MLT) ilə KTLQ arasında əlaqə vardır. Əgər $X \in \text{MLT}(B)$ olarsa və b) şərti ödənilərsə, onda $X \in \text{KTLQ}(B)$ ödənilir (bax, [3]). Məsələn, hər bir Qauss təsadüfi elementi üçün KTLQ ödənilir. Digər tərəfdən, ixtiyari sonsuzölçülü Banax fəzasında e_k təsadüfi X elementi vardır ki, $X \in \text{KTLQ}(B)$, lakin $X \notin \text{MLT}(B)$.

Əd.: [1] Pisier G., «Seminaire Maurey - Schwartz», 1975–76, exp. 3, 4; [2] Ledoux M., Talagrand M., «Ann. Probab.», 1988, v. 16, № 3, p. 1242–64; [3] Heinkel B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, № 2, S. 211–20.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU empirik ölçülər üçün «повторного логарифма закон для эмпирических мер: law of the iterated logarithm for empirical measures» – empirik ölçülər üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununu dəqiqləşdirən müddədir. $P_n = P_n(C)$ – ölçülən $(\mathcal{B}, \mathfrak{A})$ fəzasında paylanması $P = P(C)$ olan n həcmli seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma olsun, $C \in \mathfrak{A}$ və $\mu_n(C) = (P_n(C) - P(C))/\sqrt{n}$. $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{A}$ – çoxluqların qeyd olunmuş sinfi, $D(\mathcal{B})$ – məhdud $\Psi = \Psi(C)$ funksiyalarının fəzası olsun, $C \in \mathcal{B}$.

Adeten, T. l. q.-nın iki tipi fərqləndirilir: Birinci tip (m e h d u d T. l. q. – MTLQ) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{B}} \sup \frac{|\mu_n(C)|}{\sqrt{\ln \ln n}} = A \quad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $A = A(P, \mathcal{B}) < \infty$ – konstantdır. İkinci tip (T. l. q. Ştrassen formasında) : $\mu_n / \ln \ln n$ ardıcılığının limit «nöqtələri» çoxluğu $K = K(P, \mathcal{B})$, $\Psi \in D(\mathcal{B})$ funksiyalarının təsadüfi olmayan, kompakt çoxluğu ilə sanki yəqin üst-üstə düşür. Ştrassen formasında T. l. q.-ndan məhdud T. l. q. alınır və bu halda

$$A = \sup_{\Psi \in K} \sup_{C \in \mathcal{B}} |\Psi(C)|.$$

Məs., əgər P $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanma olarsa (bax, [2]), $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \equiv \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ üçün Ştrassen formasında T. l. q. ödənilir; bu halda

$$K = \left\{ \Psi(C) \in D(\mathcal{B}_1) : \Psi(C) = \int_C h(t) dt, \frac{1}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq 1 \right\}$$

$\mathbb{R}^k$ -da kəsilməz paylanmalar üçün Ştrassen formasında T. l. q. analojiidir şəkildədir (bax, [3]).

T. l. q.-nın hər iki variantı Banax fəzasında *təkrar loqarifm qanununun* xüsusi hallandır, burada toplananlar rolunu mərkəzlənmiş indikator funksiyalar oynayır.

Əgər bu $\mathcal{B}$ sinfinin müəyyən entropik xarakteristikaları olduqca böyük olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{B}} \sup \frac{|\mu_n(C)|}{\sqrt{\ln \ln n}} = \infty$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir və (*) tip müddəanın doğruluğu üçün başqa normalayıcı ardıcılıq götürmək lazımdır (bax, [4]).

T. l. q. empirik proseslər üçün də araşdırılmışdır (bax, *Yığılma(sı)* empirik ölçülərin və empirik proseslərin və [5]).

T. l. q. variantlarının isbatında empirik ölçülər üçün böyük yayınmalar ehtimallarının kobud (loqarifmik) asimptotikası əsas götürülür (bax, [6]).

T. l. q.-nın digər variantı (Çjun forması) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf p(\mu_n) \sqrt{\ln \ln n} = B$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada p , $-D(\mathcal{B})$ -də semi-norma, B – konstantdır. Məs., $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanma

üçün $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, $p(\Psi) = \sup_{C \in \mathcal{B}} |\Psi(C)|$ halında $B = \pi/\sqrt{8}$

olan T. l. q. Çjun formasında doğrudur (bax, [7]).

Əd.: [1] Kuelbs J., Dudley R., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, № 3, p. 405–18; [2] Finkelstein H., «Ann. Math. Statist.», 1971, v. 42, p. 607–15; [3] Richter H., «Manuscripta Math.», 1974, v. 11, p. 291–303; [4] Борисов И. С., «Сиб. матем. ж.», 1985, т. 26, № 1, с. 12–22; [5] Колчинский В. И., «Теория вероятн. и матем. статист.», 1981, т. 25, с. 40–47; [6] Боровков А. А., Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26; [7] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 2, с. 399–407.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Markov zəncirləri üçün «повторного логарифма закон для цепи Маркова; law of the iterated logarithm for Markov chains»: X_n , $n=0,1,\dots$ – müsbət olan vəziyyətlərinin çoxluğu hesabı olan, bircins Markov zənciri; f – həqiqi funksiya;

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-1} f(X_j), \quad \pi_i = P\{X_0 = i\};$$

$\tau_v(i)$, i vəziyyətinə v -cü çatım anı;

$$J_v(i) = [\tau_v(i), \tau_{v+1}(i)];$$

$$M = \pi_i \mathbf{M} \left\{ \sum_{j \in J_v(i)} f(X_j) \right\};$$

$$B = \pi_i \mathbf{M} \left\{ \sum_{j \in J_v(i)} (f(X_j) - M)^2 \right\}$$

olsun. Əgər

$$\mathbf{M} \left\{ \sum_{j \in J_v(i)} 1 \right\} < \infty, \quad \mathbf{M} \left\{ \sum_{j \in J_v(i)} |f(X_j)|^2 \right\} < \infty \quad \text{və}$$

$B > 0$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $(S_n - nM)/(2Bn \ln \ln n)$ ardıcılığının limit nöqtələrinin çoxluğu $[-1, 1]$ ilə üst-üstə düşür (bax, [1]).

T. l. q. $\xi(t)/(2t \ln \ln t)^{1/2}$ üçün $t \rightarrow \infty$ olduqda isbat olunmuşdur, $\xi(t)$, $t \geq 0$ stoxastik differensial tənliyin həllidir (bax, [2]). Markov zəncirləri üçün T. l. q.-nın funksional variantı vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, М., 1954; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] Friedman A., «Trans. Amer. Math. Soc. verw. Geb.», 1972, v. 170, p. 359–84; [4] Bhattacharya R. N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, S. 185–201.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Viner prosesi üçün «повторного логарифма закон для винеровского процесса; law of the iterated logarithm for Wiener process» – $w(t)$, $t \geq 0$ standart Viner prosesinin sanki bütün trayektoriyalarının asimptotikasını təsvir edən bir sıra müddəaların ümumi adıdır. Adi T. l. q.-nın ən yayılmış forması (Xinçin forması) aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər

$$L(t) = (2t \ln |\ln t|)^{1/2}$$

olarsa,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} w(t)/L(t) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} w(t)/L(t) = 1 \quad (*)$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur. Lokal T. l. q.: $t w(t^{-1})$ prosesi də standart Viner prosesi olduğundan, (*) münasibəti $t \rightarrow 0$ olduqda da doğrudur. Belə ifadə olunmuş T. l. q. ümumi funksional T. l. q.-nın nəticəsidir (Strassen for-

ması). $K, -C[0, 1]$ -də, $f(0) = 0$ şərtini ödəyən mütləq kəsilməz $f(x)$ funksiyalarından ibarət çoxluq və

$$\alpha(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 1$$

olsun. $[K - \text{Hilbert fəzasında, özündə quran nüvəsi } \min(s, t) \text{ olan vahid radiuslu küre, yeni } W_n(t) = w(nt)/L(t), 0 \leq t \leq 1$ Viner prosesinin kovariasiyası olsun]. Onda $\{W_n(t)\}$ funksiyalar ardıcılığı $C[0, 1]$ -də nisbi kompaktıdır və bu ardıcılığın limit nöqtələri çoxluğu K kompaktı ilə üst-üstə düşür (n kəsilməz olaraq da dəyişə bilər). $W_n(t)$ -in $f \in K$ funksiyalarına necə «yaxın» ola biləcəyini göstərmək olur: əgər, məs., f' məhdud variational funksiya olarsa, onda $\alpha(f) < 1$ olduqda

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_n(t) - f(t)| \ln \ln n = \frac{\pi}{4} (1 - \alpha(f))^{-1/2}$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur ($f = 0$ olduqda bu T. l. q.-nın Çin formasıdır).

Viner prosesinin funksionallarının asimptotikası üçün T. l. q.-nın spesifik variantları mövcuddur. Məs., əgər $w^*(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |w(s)|$ və $v(t)$ bu maksimuma çatım anıdırsa, yeni $w^*(t) = |w(v(t))|$ olarsa, onda

$$(t^{-1}(\ln \ln t)^2 v(t); t^{-1/2}(\ln \ln t)^{1/2} w^*(t)), t \rightarrow \infty$$

ailesinin limit nöqtələrinin çoxluğu

$$\{(x, y): x \geq \pi^2/4, y > 0, y^2/2x + \pi^2/8y^2 \leq 1\}$$

– genişlənən zolaqla üst-üstə düşür.

Qiymətləri ümumi fəzalardan olan və çoxölçülü zamanlı Viner prosesi halı üçün ümumiləşmələr mövcuddur (bax, [3], [5]).

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Fundam. Math.», 1924, t. 6, p. 9–20, (в кн.: Избранные труды по теории вероятностей, М., 1955, с. 12–24); [2] Levy P., Theorie de l'addition des variables aleatoires, 2 ed., P., 1954; [3] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [4] Stout W. F., Almost sure convergence, N. Y. – [a. o.], 1974; [5] Bingham N. H., «Bull. London Math. and verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211–26; [7] Csaki E., Foldes A., Révész P., «Probab. Theory Relat. Fields», 1987, v. 76, № 4, p. 477–97.

TƏKRARLANMALAR təsadüfi ardıcılıqlarda «повторения в случайных последовательностях; matchings in random sequences» – təsadüfi ardıcılıqlarda ya tamamilə və ya qismən üst-üstə düşən elementlər toplusıdır. Təsadüfi $\{X_t\}_{t=1}^N$ ardıcılıqlarında T.-a aid: s – zəncirlər T.-ını, yəni bəzi $0 \leq t < u \leq N - s$ qiymətlərində

$$X_{t+j} = X_{u+j}, \quad j = 1, \dots, s \quad (1)$$

şərtlərinin ödənilməsinə; natamam s – zəncirlər T.-ını (1) sisteminde verilmiş $k < s$ ədədindən az olmamaqla bərabərlik ödənilməsi halda $\{X_t\}_{t=1}^N$ və $\{Y_t\}_{t=1}^M$ ardıcılıqlarının altardıcılıqlarının T.-ını, yəni

$$X_{ij} = Y_{uj}, \quad j = 1, \dots, s \quad (2)$$

şərtlərinin bəzi $1 \leq t_1 < \dots < t_s \leq N$; $1 \leq u_1 < \dots < u_s \leq M$ qiymətlərində ödənilməsinə misal göstərmək olar.

$X_1, \dots, X_N$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $p_2 = P\{X_1 = X_2\}$ olsun; $\sigma(N, s)$, – (1) şərtlərini ödəyən (t, u) , $0 \leq t < u \leq N - s$ cütllərinin sayı, $\sigma^*(N, s)$ – (1) şərti və bu şərtə başqa $X_i \neq X_u (t > 0)$ şərtini ödəyən belə cütllərin sayı olsun. Onda $N \rightarrow \infty$ olduqda, $C_N^2 p_2^s (1 - p_2) \rightarrow \lambda > 0$, $p_2 \rightarrow \rho \in [0, 1]$ olduqda,

$$Mz^{\sigma^*(N, s)} \rightarrow e^{\lambda(z-1)},$$

$$Mz^{\sigma(N, s)} \rightarrow \exp\{\lambda(z-1)/(1-pz)\}$$

münasibətləri doğrudur; eğer $\tau(s) = \min\{N : \sigma(N, s) > 0\}$ – ilk T. anıdırsa, onda $p_2^s \rightarrow 0$ olduqda

$$P\left\{\tau(s)\sqrt{(1-p_2)p_2^s} < x\right\} \rightarrow 1 - e^{-x^2/2}, \quad x > 0;$$

eğer $\mu(N) = \max\{s : \sigma(N, s) > 0\}$ – təkrarlanan s – zəncinin maksimal uzunluğu olarsa, onda $N \rightarrow \infty$, $p_2 \rightarrow \rho \in (0, 1)$ olduqda

$$P\{\mu(N) - [2 \log_{1/p_2} N] < k\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{1-\rho}{2} \rho^{k-(2 \log_{1/p_2} N)}\right\}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

münasibəti doğrudur, burada $[x]$ və $\{x\}$ – uyğun olaraq, x ədədinin tam və kəsr hissələridir.

(1) və ya (2) şəklində hadisələrin indikatorlarının çoxluqları asılı təsadüfi kəmiyyətlər toplusuna təbii, lakin qeyri – trivial misallardır, $\sigma(N, s)$ və $\sigma^*(N, s)$ tipli təsadüfi kəmiyyətlər isə U – statistikaların xüsusi hallarıdır.

Əd.: [1] Зубков А. М., Михайлов В. Г., «Теория вероятностей и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 173–81; 1979, т. 24, в. 2, с. 267–79; [2] Михайлов В. Г., «Теория вероятностей и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 880–84; [3] Chvatal V., Sankoff D., «J. Appl. Probab.», 1975, v. 12, № 2, p. 306–15; [4] Arratia R., Waterman M. S., «Adv. Math.», 1985, v. 55, № 1, p. 13–23.

TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA «одновершинное распределение; unimodal distribution» – bax, *Unimodal / tekzirveli paylanma*.

TƏMİNLİK EHTİMALI «обеспеченность; accumulated probability», təminlik əyrisi, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı x kritik sərhədini aşması ehtimalına (bu ehtimal bəzən $G(x)$ ilə işarə olunur) x -in funksiyası kimi baxılan ehtimalın adlandırıldığı təmindir. T. e. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası (integral qanunu) ilə belli olan $G(x) = 1 - F(x)$ münasibəti ilə ifadə olunur. $G(x)$ -ə müvafiq $G^*(x)$ empirik asılılığı sonlu sayda müşahidələr üzərində aparılan işlənmələr nəticəsində alınır və $G^*(x)$ empirik təminlik funksiyası adlanır. T. e. anlayışı tətbiqi iqlimşünaslıq (klimatologiya) sahəsində, aqrometeorologiyada,

hidrologiyada statistik araşdırmalarda geniş istifadə olunur (məs., temperatur və ya yağıntıların müəyyən cəmlərinin T. e., çay axarının miqdarı, məhsulun miqdarının T. e. kimi). Bəzi işlərdə T. e. $F(x)$ ilə eyniləşdirilir.

Əd.: [1] Брукс К., Карузерс Н., Применение статистических методов в метеорологии, пер. с англ., Л., 1963; [2] Рождественский А. В., Чеботарев А. И., Статистические методы в гидрологии, Л., 1974.

TƏMİNLİK EHTİMALI hidrologiyada «обеспеченность в гидрологии; accumulated probability in hydrology» – paylanma funksiyasının vahidə tamamlayıcısıdır. Hidrotexniki qurğular siniflərinə görə, axarın (rus. сток) və digər hidroloji xarakteristikaların müxtəlif normativ T. qiymətləri üçün layihələşdirilir (bax, [1]). Hidrologiyada illik axarın təsviri üçün çox vaxt III tip Pirsон paylanması (o cümlədən, iki- və üçparametrlı gamma – paylanmalar) və üçparametrlı Kritski və Menkelin [2] üstlü gamma – paylanması

$$p(x) = H^{\alpha/\beta} \frac{\bar{x}^{\alpha/\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\beta\bar{x}} \exp\{-(\bar{x}H)^{1/\beta}\}, \quad x > 0$$

sıxlığı ilə istifadə olunur, burada $\bar{x}$ – paylanmanın orta qiyməti, $\bar{x} = x/\bar{x}$, $H = \Gamma(\alpha + \beta)/\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$ – gamma – funksiya-
dır. Qumbel, Conson, loqnormal və b. paylanmalardan da istifadə olunur (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Гидротехнические сооружения, М., 1983; [2] Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Гидрологические основы управления речным стоком, М., 1981; [3] Раткович Д. Я., Многолетние колебания речного стока, Л., 1976; [4] Сванидзе Г. Г., Математическое моделирование гидрологических рядов, Л., 1977.

TƏMİRƏYARARLILIQ «ремонтпригодность; repairability» – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

***TƏMİRƏYARARLILIQ GÖSTƏRİCİLƏRİ, SİSTE-
MİN** «ремонтпригодности показатели системы; indices of repairability of system» – verilmiş müddət ərzində sistemin işəqabiliyyətli vəziyyətinin bərpa ehtimalı və işəqabiliyyətli vəziyyətinin bərpasına sərf olunan orta müddət kimi əsas göstəricilərdir. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin, Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

TƏNZİMLƏNƏN ŞAXƏLƏNƏN PROSES «регулируемый ветвящийся процесс; controlled branching process» – hissəciklərinin çoxalma qanunları əvvəlcədən nəzərdə tutulan sürətdə prosesin əvvəlcə nə cür cərəyan etməsindən və vəziyyətdən asılı olan, *şaxələnen proses* modifikasiyasıdır. T. ş. p.-lərə fi – şaxələnen prosesləri, idarəolunan şaxələnen prosesləri və s. misal göstərmək olar (bax, [1]). T. ş. p.-lərin mümkün modifikasiyalarının müxtəlifliyində bu prosesləri əhatə edən ümumi nəzəriyyə yoxdur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Зубков А. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 15–25; [2] Лабков-ский В. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 71–83; [3] Бойко Р. В., «Укр. матем. ж.», 1982, т. 34, № 6, с. 681–87.

TƏRS BƏRABƏRSİZLİYİ, KOLMOQOROVUN «обратное неравенство Колмогорова; reverse Kolmogorov inequality» – bax, *Kolmogorov bərabərsizliyi*.

TƏRS FUNKSIYALAR METODU «обратных функций метод; invers distribution function method» – bax, *Modelələşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*.

TƏRS STOXAŞTİK DIFFERENSİAL TƏNLİK
« обратное стохастическое дифференциальное уравнение; backward stochastic differential equation » – elə tənlikdir ki,

$$X_{x,s}(t) = x + \int_{[s,t]} b(\tau, X_{x,s}(\tau)) d\tau + \int_{[s,t]} \sigma(\tau, X_{x,s}(\tau)) dw(\tau)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli $X_{x,s}(t)$ -nin hamar modifikasiyası bu tənliyi ödəyir: burada w – Viner prosesidir, w -ya t -nin qeyd olunmuş qiymətində x, s -in funksiyası kimi baxılarsa, T. s. d. t. aşağıdakı şəkildə, xüsusi törəmələri stoxastik differensial tənlik üçün ters Koşi məsələsidir:

$$-dv(s, x) = \left[\frac{1}{2} \text{tr} \sigma \sigma^*(s, x) \mathcal{Q}_{xx} v(s, x) + b(s, x) \mathcal{Q}_x v(s, x) \right] ds + \sigma(s, x) \mathcal{Q}_x v(s, x)^* dw(s),$$

$$s < t; \quad v(t, x) = x,$$

burada uyğun stoxastik integral ters İto integralı kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1983.

TƏRS TƏNLİYİ, DİFFUZİYANIN « обратное уравнение диффузии; backward diffusion equation » – bax, *Stoxastik differensial tənlik xüsusi törəmələri*.

TƏRS TƏNLİYİ, KOLMOQOROVUN « обратное уравнение Колмогорова; backward Kolmogorov equation » – bax, *Diffuzion proses. Kolmoqorov tənlikləri, Təsadüfi proses asılı olmayan artımlarla, Stoxastik differensial həndesə*.

TƏSADÜFİ AĞAC « случайное дерево; random tree » – ağacların hər hansı T çoxluğunun *təsadüfi elementidir* ki, T -də müntəzəm paylanma qanununa tabedir, yəni T -dən ixtiyari bir qiyməti eyni ehtimalla alır. T. a.-ın ədədi xarakteristikaları təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T_n – k ö k adlanan tepəsinə görə seçilmiş bütün kök – ağacların və n sayda $1, 2, \dots, n$ ədədləri ilə nömrələnmiş köksüz tepələri ağacların çoxluğu olsun.

T -dən olan T. a.-ın ən təbii xarakteristikaları: $\mu_r(T_n)$, – r misilli tepələrin sayı, $\mu(t, T_n)$, – t hündürlüklü tepələrin sayı, ağacın hündürlüyü – $\tau(T_n) = \max\{t: \mu(t, T_n) > 0\}$ kimi kəmiyyətlərdir.

Əgər $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda ixtiyari $r = 0, 1, \dots$ qeyd olunmuş qiymətlərində

$$P\{\mu_r(T_n) = k\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi n}} e^{-u^2/2} (1 + o(1))$$

bərabərliyi $u = (k - np_r) / (\sigma_r \sqrt{n})$ -nin ixtiyari sonlu intervalda yerləşməsinə təmin edən tam K -lara görə müntəzəm ödənilir; burada $\sigma_r^2 = p_r(1 - p_r - (1 - r)^2 p_r)$ və $p_r = e^{-1/r!}$.

980 TƏSADÜFİ

İxtiyari qeyd olunmuş müsbət tam $k_1, \dots, k_r$ qiymətlərində $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\mu(1, T_n) = k_1, \dots, \mu(t, T_n) = k_r\} \rightarrow P\{1 + \xi_1 = k_1\} \times \\ \times P\{1 + \xi_1 + \dots + \xi_{k_1} = k_2\} \dots P\{1 + \xi_1 + \dots + \xi_{k_{r-1}} = k_r\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\xi_1, \xi_2, \dots$, – $P\{\xi_1 = r\} = e^{-1}/r!$, $r = 0, 1, \dots$ ehtimalları ilə verilən, asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər n və t $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$ münasibətini $t \rightarrow \infty$ olduqda ödəyirlərsə, onda ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$P\{2\mu(t, T_n)/t \leq x\} \rightarrow 1 - e^{-x} - xe^{-x}$$

münasibəti ödənilir.

Qeyd olunmuş ixtiyari $x > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\tau(T_n)/\sqrt{n} \leq x\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2) e^{-k^2 x^2/2}$$

münasibəti doğrudur.

R , – $\{0, 1\}$ ilə üst-üstə düşməyən, 0 daxil olan tam mənfi olmayan ədədlər çoxluğu; $T_{n,R}$, – T_n çoxluğunun tepələrinin bölünənləri R -dən qiymətlər alan bütün ağaclarının altçoxluğu, $\xi_R(\lambda)$ isə paylanma qanunu

$$P\{\xi_R(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k! P(\lambda, R)}, \quad k \in R,$$

$$P(\lambda, R) = \sum_{k \in R} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Elə λ_R vardır ki, $M\xi_R(\lambda_R) = 1$. $B_R = D\xi_R(\lambda_R)$ olsun. Bölünmə əlaməti üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər T. a.-ın xassələrinin T -dən olan T. a.-larla müqayisədə mühüm dəyişkenliyinə səbəb olmur. Məs., $\tau(T_n)\sqrt{n}$ və $\tau(T_{n,R})\sqrt{B_R}/n$ -in limit paylanmaları üst-üstə düşür, burada $\tau(T_{n,R})$, – $T_{n,R}$ çoxluğundan olan T. a.-ın hündürlüyüdür.

$\mu_r(t, T_{n,R})$ – tepələrinin hündürlüyü t -yə bərabər, r misilli tepələrin sayı; $\mu(t, T)$ – bir hissəciklə başlayan $t = 0, 1, \dots$, diskret zamanlı birinci Qalton – Watson şaxələnmə prosesi olsun, bu prosesdə bir hissəciyin varisləri sayının paylanması $\xi_R(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə eynidir. $\mu_r(t, R)$ bu prosesdə t anında r sayda varisi olan hissəciklərin sayı, $\nu(R)$ prosesin evolyusiyası ərzindəki bütün hissəciklərin sayı olsun, $\|\mu_r(t, T_{n,R})\|$, $\|\mu_r(t, R)\|$, $t, r = 0, \dots, n$ matrisləri üçün və bunlarla eyni ölçülü M matrisi üçün ixtiyari $\lambda > 0$ qiymətində

$$P\{\|\mu_r(t, T_{n,R})\| = M\} = \\ = P\{\|\mu_r(t, R)\| = M \mid \nu(R) = n + 1\}$$

münasibəti ödənilir.

Bu münasibət $T_{n,R}$ -dən olan T . a.-ın bir sıra xarakteristikalarının paylanması öyrənilməsinə $\mu(t, R)$ şəxələnen prosesin uyğun xarakteristikalarının şərti paylanmalarının öyrənilməsinə gətirir.

Digər çoxluqlarda olan T . a.-ların xassələri az öyrənilmişdir (məs., təpələri nömrələnmiş köksüz ağaclar çoxluğu, «yastı» ağaclar çoxluğu və s. kimi).

Əd.: [1] Колчин В. Ф. Случайные отображения, М., 1984; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978.

***TƏSADÜFİ AXIN «случайный поток; random flow»**, təsadüfi çoxluğun doğurduğu – təsadüfi çoxluğun doğurduğu təsadüfi kəmiyyətlər sistemidir. T – parametrik fəza, $\{T, \mathcal{F}_T\}$, – $t \in T$ parametrinin qiymətlərinin ölçülən fəzası olsun; $\mathcal{F}_T$ – ölçülən çoxluqların σ – cəbri dir. $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P)$, $\omega \in \Omega$ – elementar hadisələrinin ilkin ehtimal fəzasıdır. Əgər ixtiyari $\Delta \in \mathcal{F}_T$ üçün $s_\alpha = s_\alpha(\omega) \in T$ nöqtələrinin çoxluğu $S_\omega = \{s_\alpha\}$ ilə Δ -nın kəsişməsi – $S_\omega \cap \Delta$ çoxluğunun nöqtələri sayı $\eta(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyət olarsa, S_ω təsadüfi (nöqtəvi) çoxluq adlanır. $\eta(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{F}_T$ təsadüfi kəmiyyətləri $0, 1, \dots, \infty$ tam qiymətlərini alır və əgər $i \neq j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ olarsa,

$$\eta \left(\bigcup_i \Delta_i \right) = \sum_i \eta(\Delta_i)$$

additivlik xassəsinə malikdirlər. $\eta(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyətlər sistemine S_ω təsadüfi çoxluğunun doğurduğu təsadüfi axın deyilir. Məs., $N_u(s, t)$, – $S_\omega = \{s: \xi(s) = u\} \cap (s, t)$ təsadüfi çoxluğunun nöqtələri sayı olsun. Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin, fərqlinin və limitinin (vahid ehtimalla yığılma mənasında) təsadüfi kəmiyyətlər olduğu faktına əsasən, göstərmək olar ki, ixtiyari Δ Borel çoxluğu üçün $\{s: \xi(s) = u\} \cap \Delta$ çoxluğunun nöqtələri sayı $N_u(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyətdir.

Əgər $\eta(\Delta) \in \{T, \mathcal{F}_T\}$ ölçülən fəzasında T . a.-dırsa, onda hər bir $\Delta \in \mathcal{F}_T$ çoxluğuna

$$\mu(\Delta) = \mathcal{E} \eta(\Delta) \quad (1)$$

funksiyasını qarşı qoymaq olar.

$\mu(\Delta) \geq 0$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\Delta_i \in \mathcal{F}_T$ olduqda

$\mu \left(\bigcup_i \Delta_i \right) = \sum_i \mu(\Delta_i)$ olduğundan, $\mu(\Delta)$ funksiyası ölçü-

dür. Əgər $\mu(\Delta) \in v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz σ – sonlu ölçü olarsa, onda Radon – Nikodim teoreminə əsasən,

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \mu(t) v(dt). \quad (2)$$

$\mu(\Delta)$ ölçüsü $\eta(\Delta)$ axınının apancı ölçüsü adlanır. $\mu(\Delta)$ σ – sonlu ölçü olarsa, $\eta(\Delta)$ finit axın adlanır. (2) bərabərliyini ödəyən $\mu(t)$ funksiyasına $\eta(\Delta)$ axınının $v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən intensivlik funksiyası deyilir. $\mu(t)$ -nin t nöqtəsində qiymətinə axının t nöqtəsində intensivliyi deyilir.

Apancı ölçü və ya intensivlik funksiyasının bilavasitə hesablanması bir çox hallarda böyük çətinliklə bağlı olur. Bu nöqtəyi – nəzərdən, A. Ya. Xinqin (bax, [2]) tərəfindən verilmiş və parametrlər anlayışını ümumiləşdirən axının parametrik ölçüsü anlayışının daxil edilməsi faydalı olmuşdur.

$\mathcal{P}(\Delta)$, – $\Delta \in \mathcal{F}_T$ çoxluğunun bütün mümkün ola bilən bölgələrinin sinfi olsun. $\Delta \in \mathcal{F}_T$ çoxluq funksiyasının

$$\lambda(\Delta) = \sup_{d(\Delta) \in \mathcal{P}(\Delta)} \sum_{\Delta_\alpha \in d(\Delta)} P\{\eta(\Delta_\alpha) > 0\} \quad (3)$$

bərabərliyi təyin olunduğu fərz olunur. İsbat etmək olar ki, $\lambda(\Delta)$, $\mathcal{F}_T$ -də təyin olunmuş ölçüdür və $\lambda(\Delta) \leq \mu(\Delta)$; burada $\mu(\Delta)$, – (1) bərabərliyi ilə təyin olunan apancı ölçüdür. Beləliklə, əgər axın finit axındırsa və $\mu(\Delta)$ ölçüsü $v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdirsə, onda

$$\lambda(\Delta) = \int_\Delta \lambda(t) v(dt). \quad (4)$$

(3) düsturu ilə təyin olunan $\lambda(\Delta)$ ölçüsü $\eta(\Delta)$ T . a.-nın parametrik ölçüsü adlanır. (4) bərabərliyini ödəyən $\lambda(t)$ funksiyasına $\eta(\Delta)$ T . a.-nın $v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən parametrlər funksiyası deyilir. $\lambda(t)$ -nin t nöqtəsində qiyməti axının t nöqtəsində parametri adlanır.

S_ω təsadüfi çoxluğunun $\{T, \mathcal{F}_T\}$ -da doğurduğu təsadüfi axının $v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən intensivlik funksiyası $\mu(t)$ -nin varlığının zəruri və kafi şərti $v(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən $\lambda(t)$ parametrlər funksiyasının varlığıdır.

Təsadüfi axınlar və ya digər terminologiyada nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsi əsas etibarilə kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələləri, sayğaclarla bağlı məsələlərlə əlaqədar olaraq inkişaf etmişdir. Daha ətraflı tanışlıq məqsədilə D. R. Koks və V. Smitin (bax, [3]) kitabına müraciət etmək olar.

Əd.: [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Хинчин А. Я., Работы по теории массового обслуживания, М., 1963; [3] Кокс Д. Р., Смит В., Теория восстановления, М., 1967.

TƏSADÜFİ AX TARİŞ «случайный поиск; random search» – determinik və stoxastik təbii ekstreml məsələlərin həll metodudur ki, ekstremum nöqtəsinin təyin edilməsindəki iterasiya prosesi süni olaraq təsadüflilik daxil olunmasına (randomizasiyaya) əsaslanır. Iterasiya prosesində n -ci yaxınlaşmadan $(n+1)$ -ci yaxınlaşmaya keçdikdə təsadüflilik daxil etmə üçün hərəkət istiqaməti, addımın ölçüsü və s. kimi xarakteristikalar təsadüfi seçilə bilər. T . a. stoxastik аппроксимация nəzəriyyəsi çərçivəsində nəzəri əsaslandırılmışdır.

Əd.: [1] Пастригин Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

TƏSADÜFİ ARDICILLIQ «случайная последовательность; random sequence» diskret zamanlı təsadüfi proses, zaman sırası – fəza fəzaları $(E_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 0, 1, \dots$, ümumiyyətlə, müxtəlif olan, eyni $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş X_k , $k = 0, 1, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığıdır.

Təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi üçün T . a. sinfinin mühümlüyü iki cəhəti ilə izah olunur: birincisi, nəzəri – ehtimali

məsələlərin bir çoxu bilavasitə T. a. anlayışına gətirir. İkincisi texniki cəhətdən diskret zaman kəsilməz zaman halından olduqca sadədir, odur ki, hər bir yeni problemi öyrəndikdə (təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi çərçivəsində), adətən, onun diskret analoguna baxılır.

$X_0, X_1, \dots$ ardıcılığının ehtimali xassələri $(E_0 \times E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ fəzasında $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçülərinin ardıcılığı ilə bir qiymətli təyin olunur:

$$\mathbf{P}_n(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbf{P}\{X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\}$$

burada $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$. Müxtəlif n -lər üçün $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçüləri, təbii olaraq, uzlaşma şərti:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1}(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times E_{n+1}) = \\ = \mathbf{P}_n(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

berabərliyi ilə əlaqədirlər.

Əgər bütün $(E_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 0, 1, \dots$ fəza fəzaları Borel fəzaları olarsa, onda Kolmogorov teoreminə hökm olduğu kimi $(E_0 \times \dots \times E_n, \mathcal{A}_0 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ fəzasında təyin olunmuş, uzlaşma şərtini ödəyən $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçülərinin ixtiyari ardıcılığı hər hansı X_n , $n = 0, 1, \dots$ T. a.-na uyğun olur.

Əgər $\mathbf{P}_n$ ölçüləri şərti paylanmaların hasilı kimi verilərsə, onda fəza fəzalarının Borel fəzaları olması şərti bu son hökmə nəzərən alınmaya bilər. Dəqiq ifadə aşağıdakı hökmdən aydın olur.

Ionesku Tulçi teoremi:

$$\mathbf{P}_n(dx_0 \times \dots \times dx_n) = \mathbf{P}_0(dx_0) \prod_{k=1}^n Q(x_0, \dots, x_{k-1}; dx_k)$$

olsun, burada $Q_k(x_0, \dots, x_{k-1}; A)$ hər bir qeyd olunmuş $A \in \mathcal{A}_k$ üçün $E_0 \times \dots \times E_{k-1}$ fəzasında $(\mathcal{A}_0 \times \dots \times \mathcal{A}_{k-1})$ – ölçülən funksiyadır, bütün mümkün ola bilən qeyd olunmuş $x_0, \dots, x_{k-1}$ qiymətlərində $(E_k, \mathcal{A}_k)$ -da ehtimal ölçüsüdür. Onda ehtimal $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və X_k , $k = 0, 1, \dots$ T. a. tapılar ki, bütün $n \geq 0$, $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$ üçün

$$\mathbf{P}_n(A_0 \times \dots \times A_n) = \mathbf{P}\{X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n\}$$

berabərliyi doğrudur. Borel fəza fəzaları üçün bu teorem Kolmogorov teoremi ilə eyni olur, belə ki, Borel fəzalarının hasilində ixtiyari ehtimal ölçüsü şərti paylanmaların hasilı kimi ifadə olunur.

TƏSADÜFİ AVTOMAT « случайный автомат; stochastic automaton » – bax, *Ehtimali avtomat*.

TƏSADÜFİ BÖLGÜ « случайное разбиение; random partition » – X_n çoxluğunun kəsişməyən altçoxluqlara bölgüləri çoxluğunda qiymətlər alan təsadüfi obyektir. Sonlu gücə malik çoxluqların bölgüləri və natural ədədlərin bölgüləri bölgülərə misaldır.

n müxtəlif elementdən ibarət X_n çoxluğunun bölgüləri sayı T_n -ə bərabərdir, burada T_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – Bell ədədləri adlanır və

982 TƏSADÜFİ

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{t^n}{n!} = \exp\{e^t - 1\}$$

münasibətlə təyin olunurlar.

$\xi_n, - X_n$ -in T. b.-dəki altçoxluqların (blokları) sayı, η_n – altçoxluqların müxtəlif ölçüləri sayı olsun. Əgər T. b.-lərin hamısı bərabərehtimallı olarsa, onda

$$\mathbf{M}x_n^j = \frac{1}{T_n} \sum_{j=0}^n \sigma(n, j) x^j$$

berabərliyi doğrudur, burada $\sigma(n, j)$ – ikinci növ Stirling ədədləridir, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\xi_n \sim \frac{n}{\ln n}, \quad \mathbf{D}\xi_n \sim \frac{n}{(\ln n)^2}, \quad \mathbf{M}\eta_n \sim e \ln n$$

münasibətləri doğrudur.

$$(\mathbf{D}\xi_n)^{-1/2} [\xi_n - n/\ln n]$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır və $\eta_n(\mathbf{M}\eta_n)^{-1} \rightarrow 1$ ehtimala görə yığılmır.

Blokların ölçülərinə məhdudiyyətlər olmayan sonlu çoxluqların bərabərehtimallı T. b.-ləri – T. b.-nin ümumi ehtimalı – kombinator sxeminin xüsusi halıdır (bax, [1]). Belə sxemdə bölgülərin bloklarının ölçüləri $A \subseteq \{1, 2, \dots\}$ ardıcılığının elementləri olmalıdır, bu şərti ödəyən hər bir bölgüyə isə $(T_n^A)^{-1}$ ehtimalı qarşı

qoyulur, burada T_n^A , $- X_n$ -in bölgülərinin ümumi sayıdır. Bu blokların ölçüləri A -da yerləşir.

Natural n ədədinin bölgüsü $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ cəmi şəklində n ədədinin ifadəsidir və bu cəmin bütün toplananları natural ədədlərdir və $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$. n ədədinin bölgüləri çoxluğu ilə müxtəlif elementlərdən ibarət X_n çoxluğunun bölgüləri çoxluğu arasında qarşılıqlı bir qiymətli uyğunluq vardır. Əgər $p(n)$ n ədədinin bütün bölgülərinin sayıdırsa, onda

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-1}$$

berabərliyi doğrudur.

ζ_n və θ_n – uyğun olaraq n ədədinin T. b.-dəki toplananların sayı və müxtəlif toplananların sayı olsun. Əgər bütün bölgülər bərabərehtimallı olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\zeta_n \sim \frac{2}{3\pi} \sqrt{n \ln n}, \quad \mathbf{M}\theta_n \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{6n}$$

münasibətləri doğrudur.

Əd.: [1] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [2] E r d ö s P., L e h n e r J., «Duke Math. J.», 1941, v. 8, № 2, p. 335–45; [3] O d l y z k o A. M., R i c h - m o n d L. B., «J. Comb. Theory», ser. A, 1985, v. 38, № 2, p. 170–81.

TƏSADÜFİ BUL FUNKSIYASI « случайная булева функция; random Boolean function » – $z = f(x_1, \dots, x_n; \omega)$ şəklində funksiyadır. x_i , z – Bul dəyişənləridir, yəni 0 və 1 qiymətlərini alan dəyişənlərdir, ω –

elementar hadisələrdir. T. B. f. $(P_f, f \in F)$ ehtimal paylanmaları vasitəsilə verilə bilər; burada F – n sayda dəyişəndən asılı 2^n sayda bütün Bul funksiyalarının çoxluğu. T. B. f.-nin ehtimal xassələri kimi [məs., $|f| = \sum_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$ «çeki-

sinin» paylanması, x_i dəyişənləri üzrə f -in monotonluq ehtimalı], məntiqi sxemlərlə verilən T. B. f.-lərinin reallaşdırılması da öyrənilir. İsbat olunmuşdur ki, $(P_f, f \in F)$ ehtimal paylanmalarının eyni olduğu halda ikidəyişənli Bul funksiyalarının superpozisiyalan sinfində $2^n/n$ nisbəti $n \rightarrow \infty$ olduqda ehtimala görə 1-ə yığılır. $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ təsadüfi vektoru hər hansı təsadüfi inikas təyin edir, burada f_i – T. B. f.-dir.

TƏSADÜFİ CƏM «случайная сумма; random sum» – təsadüfi sayda *təsadüfi kəmiyyətlər* cəmidir. N ,

$\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni ehtimal fəzasında verildiyi, N -in isə yalnız natural qiymətlər aldığı fərz olunur. Onda $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ *təsadüfi cəmdir*. T. c.-lər etibarlılıq nəzəriyyəsi, biologiyanın, sığortanın riyazi nəzəriyyəsində bir çox obyektlərin riyazi modelləridir.

T. c.-in *momentləri*. Əgər hər bir $n \geq 1$ qiymətində $\{N \leq n\}$ hadisəsi və $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin

doğruduğu σ – cəbr asılı olmazsa və $\sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\}$

$M|\xi_n| \leq \infty$ olarsa, onda

$$MS_N = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\} M\xi_n$$

düsturu doğrudur. Əgər $N, \xi_1, \xi_2, \dots$ küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $m_j = M\xi_j, \sigma_j^2 = D\xi_j < \infty, j \geq 1$ olarsa, onda

$$DS_N = M(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2) + D(m_1 + \dots + m_N)$$

düsturu doğrudur.

T. c. üçün *böyük ədədlər qanunu*. $\xi_1, \xi_2, \dots$ – riyazi gözləmələri $M\xi_1 = m \neq 0$ olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Müəyyənlik üçün fərz olunur ki, $m > 0$. Fərz olunur ki, natural qiymətli $\{N_k\}_{k \geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətləri hər bir $k \geq 1$ qiymətində $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ ardıcılığından asılı deyildir, $N_k \rightarrow \infty$ münasibəti ehtimala görə yığılmadır, $F(x)$ isə ixtiyari paylanma funksiyasıdır. Onda

$$P\left\{\frac{1}{km} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j < x\right\} \rightarrow F(x)$$

yığılmasının ($k \rightarrow \infty$ olduqda zəif yığılma) ödənilməsi üçün

$$P\{N_k < kx\} \rightarrow F(x) \quad (k \rightarrow \infty \text{ olduqda zəif yığılma})$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

T. c. üçün *mərkəzi limit teoremi*: $\xi_1, \xi_2, \dots$ – riyazi gözləmələri $M\xi_j = 0, j \geq 1$ olan, Lindeberq şərtini ödəyən, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $0 < \sigma_j^2 = D\xi_j < \infty, j \geq 1$ və $B_k^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2, k \geq 1, \{d_k\}_{k \geq 1}$ – qeyri – məhdud artan müsbət ədədlər ardıcılığı, $F(x)$ – ixtiyari paylanma funksiyası, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası olsun. Fərz olunur ki, $k \rightarrow \infty$ olduqda ehtimala görə $N_k \rightarrow \infty$ (ehtimala görə yığılma).

$$P\left\{\frac{1}{d_k} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j < x\right\} \rightarrow F(x)$$

($k \rightarrow \infty$ olduqda zəif yığılma)

münasibətinin ödənilməsi üçün ehtimala görə mənfəi olmayan U təsadüfi kəmiyyətinin varlığı zəruri və kifayətdir ki, bu təsadüfi kəmiyyət üçün $F(x) = M\Phi(x/U), x \in \mathbb{R}$ olsun və

$$B_{N_k}/d_k \rightarrow U \quad (k \rightarrow \infty \text{ olduqda zəif yığılma})$$

münasibəti ödənsin.

Köçürmə teoremi (теорема переноса). $\{\xi_{nj}\}_{j \geq 1}, n = 1, 2, \dots$ – hər bir seriyada eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin seriyalar ardıcılığı, $\{N_n\}_{n \geq 1}$ – natural qiymətli təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun; hər bir $n \geq 1$ qiymətində $N_n, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunur. $\{k_n\}_{n \geq 1}$ – natural ədədlər ardıcılığı, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ və $\{c_n\}_{n \geq 1}$ – həqiqi ədədlər ardıcılığı olsun. Fərz olunur ki, ehtimala görə Y, U və V təsadüfi kəmiyyətləri vardır ki,

$$\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj} - a_n \rightarrow Y \quad (n \rightarrow \infty \text{ olduqda zəif yığılma})$$

$N_n/k_n \rightarrow U$ və $a_n N_n/k_n - c_n \rightarrow V \quad (n \rightarrow \infty \text{ olduqda zəif yığılma})$ münasibətləri ödənilir. Onda

$$\sum_{j=1}^{N_n} \xi_{nj} - c_n \rightarrow Z \quad (n \rightarrow \infty \text{ olduqda zəif yığılma})$$

münasibəti doğrudur, burada Z – xarakteristik funksiyası $f(t) = M[h^U(t) \exp\{itV\}]$ olan təsadüfi kəmiyyətdir; $h(t) = Me^{itY}$. Qeyd etmək lazımdır ki, U və ya V kəmiyyətlərinin heç olmasa biri cırlaşmış təsadüfi kəmiyyət olmalı, ya da ki, müəyyən a və ya b həqiqi ədədləri üçün $P\{V = aU + b\} = 1$ bərabərliyi ödənilməlidir.

Əd.: [1] М о г о р о д и Я., «Acta Math. sci. hung.», 1966, t. 17, p. 401–09; [2] Б и л л и н г с л и П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] К р у г л о в В. М., К о р о л е в В. Ю., Предельные теоремы для случайных сумм, М., 1990; [4] G n e d e n k o В. В., К о р о л е в В. Ю., Random summation: Limit theorems and applications, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

TƏSADÜFİ ÇOXGİRİŞLİLİK « случайный множественный доступ; random multiple access » – ele münaqişəli çoxgirişlilikdir ki, xidmət gözləyən tələblər, bu münaqişənin həllində, resurs təsadüfi zaman müddətlərindən bir daxil olmağa cəhd edirlər.

T. ç.-in tipik ehtimal məsələlərindən biri aşağıdakı kimidir. $[0, L]$ parçasında intensivliyi λ -ya bərabər X , $0 \leq x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq L$ – təsadüfi nöqtəvi Puasson prosesi verilir. B , – $[0, L]$ parçasının bütün altcoxluqlarının çoxluğu olsun. $B_0, B_1, \dots, B_{t-1}$, – B -nin hər hansı elementləri, ω_i , – X prosesinin B_i -dən olan $x^{(i)}$ nöqtələrinin sayı,

$$\theta_i = \begin{cases} \omega_{i-1}, & \omega_{i-1} \leq 1 \text{ olduqda,} \\ 2, & \omega_{i-1} \geq 2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

olsun. T_i , – $\theta(t) = (\theta_1, \dots, \theta_t)$ təsadüfi vektorunun qiymətlər çoxluğu, f_i , – $f_i: T_i \rightarrow B$ inikası olsun. $\theta(t)$ -yə təsir edən f_i inikasının qiyməti $B_i \in B$ təsadüfi çoxluğudur. B_0 və f_i , $i = 1, 2, \dots$ toplusu f T. ç. alqoritmı adlanır. $A_i = \bigcup B_i$ (burada birləşmə – $\{i: 0 \leq i \leq t-1, \theta_{i+1} \leq 1\}$ üzrə götürülür), – t anına kimi f alqoritmı ilə araşdırılmış çoxluq adlanır.

f alqoritmının gecikməsi (rus. задержка алгоритма)

$$D_f = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} M\Omega(L)$$

kəmiyyətinə deyilir, burada $\Omega(L) = \tau(L) - L$, $\tau(L) = \min\{t: [0, L] \subset A_t\}$ [$\tau(L)$ – araşdırmanın dayandığı anır].

$\lambda = 1$ olduqda f alqoritmının sürəti

$$R_f = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} [L/M\tau(L)]$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Əgər $R_f > 0$ olarsa, f alqoritmı dayanıqlı alqoritm adlanır.

Alqoritm sürəti

$$R_{f_0} = C = \max_f R_f$$

olan f_0 alqoritmı optimal alqoritm adlanır, burada maksimum bütün mümkün ola bilən f T. ç. alqoritmı üzrə götürülür. T. ç. məsələsi optimal və ya bu alqoritmə yaxın alqoritm axtarılmasından, bu alqoritm üçün alqoritm gecikməsi D_f -in, $R_f = C$ sürətinin və digər daha mürekkəb xarakteristikaların hesablanması ibarətdir. T. ç. üçün məlum alqoritmaların sürətlərindən $R_f = 0,375$ olan ağacvari alqoritm, $R_f = 0,409$ olan stek – alqoritm, $R_f = 0,487$ olan parçalama alqoritmı məlumdur. C sürəti üçün $0,487 \leq C \leq 0,568$ sərhədləri doğrudur.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979; [2] Бертсекас Д., Галлагер Р.,

Сети передачи данных, пер. с англ., М., 1989; [3] Ts y b a - k o v B. S., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1985, v. 31, № 2, p. 143–65.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « случайное множество; random set » – ixtiyari $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasının elementar nəticələri ailəsinin, elementləri çoxluqlar olan, hər hansı $\mathcal{M}$ fəzasına ölçülən A inikasıdır. Məs., $\mathcal{M}$ topoloji fəzadırsa, ölçülənlik Borel mənada anlaşılır.

T. ç. $\mathcal{M}$ -dən asılı olaraq müxtəlif surətdə təyin olunur:

1) $\mathcal{M} = \mathcal{F}$ hər hansı baza topoloji fəza S -in qapalı çoxluqlarının topoloji fəzasıdır, onda T. ç. qapalı təsadüfi çoxluqdur, 2) $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ açıq çoxluqların topoloji fəzasıdır, onda

T. ç. açıq təsadüfi çoxluqdur, 3) $\mathcal{M} = \mathcal{K} - (\hat{D}, \bar{D})$ cütlerinin

topoloji fəzasıdır, burada $D \subset S$, S – baza topoloji fəza, $\hat{D}$ və $\bar{D}$ uyğun olaraq, D -nin daxili və tamamlayıcısıdır, bu halda təsadüfi fiziki müxtəlif çoxluqlar adlanan termin işlənir (bax, [4]); 4) $\mathcal{M} = \mathcal{K}$ (və ya $\mathcal{K}'$) kompakt çoxluqların (uyğun olaraq boş olmayan kompakt) topoloji fəzasıdır, bu halda təsadüfi (boş olmayan) kompakt çoxluq alınır, 5) $\mathcal{M} = \text{conv}(\mathcal{K})$ $\mathcal{K}$ -nin (və ya $\mathcal{K}'$ -in) qabarıq elementlərinin altfəzası olarsa, onda təsadüfi qabarıq çoxluq alınır.

Təsadüfi qapalı çoxluğun paylanması verilmiş üçün müşayiətedici funksionaldan istifadə olunur, bu terminlə T. ç.-un bir çox xassələrini ifadə etmək rahat olur. Açıq təsadüfi çoxluqlar və təsadüfi fiziki müxtəlif çoxluqlar nəzəriyyələri təsadüfi qapalı çoxluqlar nəzəriyyəsindən standart dəyişdirilmələr vasitəsilə alınır.

Bəzi məsələlərin həllində sonlu çoxluqlarda müşayiətedici funksionalın qiymətlərindən istifadə etmək kifayətdir; sonlu çoxluqlarda müşayiətedici funksionalın qiymətləri təsadüfi çoxluğun nöqtəvi paylanma qanunu adlanan paylanmanı təyin edir; bu qanun isə ümumi halda T. ç.-un paylanmasını birqiymətli təyin etmir. Lakin əla separabel T. ç.-lar sinfi vardır ki, bu çoxluqlar üçün nöqtəvi qanun paylanmanı tamamilə təyin edir: bu əla T. ç.-lardır ki, $A = \hat{A} \cap \bar{D}$ xassəsini ödəyir, burada D çoxluğu S -də hesabı və hər yerdə sıx çoxluqdur.

T. ç.-ların mühüm olan xüsusi sinifləri: sonsuz bölünən təsadüfi çoxluqlar, Gauss təsadüfi çoxluqları, izotrop təsadüfi çoxluqlar, semimarkov təsadüfi çoxluqlar, stasionar təsadüfi çoxluqlar, dayanıqlı təsadüfi çoxluqlar sinifləndir.

T. ç.-un digər – əvvəlcədən topologiya (baza topologiyasının) verilməsini fərz etməyən üsullarla təyin edən halları mövcuddur; bunlardan ən mühümləri: Kendall üsulu (bax, [1]); təsadüfi funksiyalara gətirilmə üsulu (məs., qabarıq çoxluqlar halında da-yaq funksiyalarına gətirilmə); Kolmoqorov – Hemminq metrikasını (çoxluqların simmetrik fərqlərinin ölçüsünü) istifadə edən üsulu qeyd etmək olar. Sonlu təsadüfi çoxluq xüsusi müxtəlif halları ilə seçilir.

T. ç. nəzəriyyəsinin ən inkişaf etmiş bölmələri təsadüfi çoxluqlar statistikasi, təsadüfi çoxluqlar üçün limit teoremləri, paylanmaların müxtəlif xarakteristikalarının hesablanması üsulları (bax, Riyazi gözlemə(si) təsadüfi çoxluğun, Dispersiya(si) təsadüfi çoxluğun, Orta qiymət(i) təsadüfi çoxluğun) kimi bölmələrdir.

Əd.: [1] Kendall D. G., в кн.: Stochastic geometry, N. Y., 1974; [2] Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1953–54, t. 5, p. 131–293; [3] Michael E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 71, p. 152–82; [4] Матеро́н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ açıq « случайное множество » открытое; open **random set** » – bax, *Açıq təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; böyük ədədlər qanunu « случайное множество; закон больших чисел; law of large numbers for **random set** » – bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ dayanıqlı « случайное множество устойчивое; stable **random set** » – bax, *Dayanıqlı təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; dispersiya « случайное множество; дисперсия; variance of a **random set** » – bax, *Dispersiya(sı) təsadüfi çoxluğun*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ izotrop « случайное множество изотропное; isotropic **random set** » – bax, *Izotrop təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ qabarıq « случайное множество выпуклое; **random convex set** » – bax, *Təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ qapalı « случайное множество замкнутое; closed **random set** » – bax, *Qapalı təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ(ğ) Gauss « случайное множество гауссовское; Gaussian **random set** » – bax, *Gauss təsadüfi çoxluğu*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; limit teoremləri « случайное множество; предельные теоремы; limit theorems for **random set** » – bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ nöqtəvi « случайное множество точечное; **random point set** » – bax, *Təsadüfi axın*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; nöqtəvi paylanma qanunu « случайное множество; точечный закон распределения; point law of distribution of **random set** » – bax, *Nöqtəvi paylanma qanunu təsadüfi çoxluğun*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; orta qiymət « случайное множество; среднее значение; mean value of a **random set** » – bax, *Orta qiymət(i) təsadüfi çoxluğun*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; paylanma « случайное множество; распределение; distribution of a **random set** » – bax, *Müşayiətedici funksional*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; proyeksiya « случайное множество; проекция; projection of a **random set** » – bax, *Proyeksiya(sı) təsadüfi çoxluğun*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; riyazi gözləmə « случайное множество; математическое ожидание; expectation of a **random set** » – bax, *Riyazi gözləmə(sı) təsadüfi çoxluğun*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ(ğ) semi-Markov « случайное множество полумарковское; semi-Markov **random set** » – bax, *Semi-Markov təsadüfi çoxluğu*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ sonlu « случайное множество конечное; finite **random set** » – bax, *Sonlu təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ sonsuz bölünən « случайное множество безгранично делимое; infinitely divisible **random set** » – bax, *Sonsuz bölünən təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ stasionar « случайное множество; стационарное; stationary **random set** » – bax, *Stasionar təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; statistika « случайное множество; статистика; statistics of a **random set** » – bax, *Statistika(sı) təsadüfi çoxluqların*.

TƏSADÜFİ DETERMINANT « случайный детерминант; random determinant » – n tərtib $\Xi = \|\xi_{ij}\|$

kvadrat təsadüfi matrisinin determinantıdır və $(-1)^i \xi_{1i} \dots \xi_{ni}$ şəklində bütün elementlərin cəminə bərabərdir, burada $(i_1, \dots, i_n)$, $-1, \dots, n$ ədədlərinin yerdeyişməsidir, $i, - (i_1, \dots, i_n)$ yerdeyişməsinin inversiyalarının sayıdır.

T. d. ilk dəfə çoxölçülü statistik analizdə öyrənilməyə başlanmışdı və burada belə bir müddəə alınmışdı: əgər x_k , $k = 1, \dots, n$, $-N(a, R)$ normal qanunu ilə paylanmış m – ölçülü ξ təsadüfi vektorunun asılı olmayan müşahidələri nəticələndirərsə, $n > m$, onda

$$\det \hat{R} \approx \det R \prod_{i=n-m}^{n-1} \chi_i^2 (n-1)^{-m}$$

münasibəti doğrudur, burada $\hat{R}$ – empirik kovariasion matris, χ_i^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı i -yə bərabər χ^2 – paylanma qanununa tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$\|\eta_i^j\|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n-1$ təsadüfi matrisinin determinantına Vandermond təsadüfi determinantı deyilir. Aşağıdakı nəticələr isbat olunmuşdur:

Meta teoremi (Mehta M. L.): η_i , $i = 1, 2, \dots, -N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda ixtiyari $n \geq 2$ və $k = 0, 1, 2, \dots$ üçün

$$M \prod_{\substack{i > j \\ i, j = 1, \dots, n}} |\eta_i - \eta_j|^k = [\Gamma(1+k/2)]^{-n} \prod_{j=1}^n \Gamma(1+kj/2)$$

bərabərliyi doğrudur.

θ_i , $i = 1, \dots, n$, $-(0, 2\pi)$ intervalında müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda ixtiyari $k \geq 0$ tam ədədi üçün

$$\mathbf{M} \prod_{\substack{p \neq l; \\ p, l = 1, \dots, n}} |e^{i\theta p} - e^{i\theta l}|^k = \Gamma(1 + kn/2) [\Gamma(1 + k/2)]^{-n}$$

berabərliyi doğrudur.

T. d. təsadüfi matrisin elementlərinin funksiyası kimi, onun ehtimal nəzəriyyəsinin analitik metodları ilə araşdırılması baxımından, olduqca çətin olduğundan, T. d.-in paylanmalarının öyrənilməsi üçün əksər hallarda

$$\pi^{n/2} \det A_n^{-1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(A_n \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)] \prod_{i=1}^n d\mathbf{x}^i (*)$$

ifadəsindən istifadə olunur [A_n , - n tərtib müsbət müəyyən matris, $\mathbf{x}_n = (x^1, \dots, x^n)$ - vektordur]; (*) vasitəsilə bir çox limit teoremlərinin isbatları olduqca sadələşir. Ξ_n , - n tərtib heqiqi kvadrat təsadüfi matrislər ardıcılığı olsun.

T. d. üçün mərkəzi limit teoremi aşağıdakı şəkildə ifadə olunan ixtiyari hökmə deyilir: a_n və b_n sabitlərinin hər hansı seçilmiş qiymətlərində və Ξ_n matrisinin elementləri üzərinə qoyulan bəzi şərtlərdə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ b_n^{-1} [\ln |\det \Xi_n| - a_n] < x \} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

münasibəti doğrudur. Loqarifmik funksiyanın normalayıcı funksiya kimi seçilməsi ona əsaslanır ki, $\ln |\det \Xi_n|$ Ξ_n təsadüfi matrisinin məxsusi qiymətlərinin modullarının loqarifmlərinin cəminə bərabərdir və bu faktıdan belə nəticə çıxarmaq olur ki, belə cəmlərin müvafiq normalaşmasından sonra mərkəzi limit teoremini almaq mümkündür.

T. d. üçün mərkəzi limit teoreminin isbatının üç metodu müəyyənləşdirilmişdir: kükrəntilər metodu (rus. метод возмущений), ortoqonallaşdırma metodu, inteqral ifadələr metodu. Kükrəntilər metodu

$$\ln |\det A| - \ln |\det B| = \ln |\det [I + B^{-1}(A - B)]|$$

düsturuna əsaslanır, burada A , B - kvadrat matrislərdir, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Bu düsturun köməyi ilə $\ln |\det \Xi_n|$ -i bəzi hallarda, zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi ifadə etmək olur ki, bunlara mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək olur (bax. [1]).

Ortoqonallaşdırma metodu aşağıdakı məlum nəticəyə əsaslanır: Əgər $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^n$ təsadüfi matrisinin vektor setirləri asılı olmaydırlarsa, onda bəzi ortoqonal çevirmələrlə $\ln \det \Xi_n^2$ -ni n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi ilə ifadə etmək olur ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərə mərkəzi limit teoremi tətbiq olunur. Bu metodun köməyi ilə aşağıdakı hökm isbat olunmuşdur: fərz olunur ki, n -in hər bir qiymətində $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^n$ təsadüfi matrisinin elementləri asılı olmayan təsadüfi elementlərdir, $\mathbf{M} \xi_{ij}^{(n)} = 0$, $\mathbf{D} \xi_{ij}^{(n)} = 1$, $\mathbf{M} [\xi_{ij}^{(n)}]^4 = 3$, $i, j = 1, \dots, n$ və hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1, \dots, n} \mathbf{M} \left| \xi_{ij}^{(n)} \right|^{4+\delta} < \infty$$

berəbersizliyi doğrudur, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\ln \det \Xi_n^2 - \ln(n-1)!}{\sqrt{2 \ln n}} < x \right\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

İnteqral ifadələr metodu (*) düsturuna əsaslanır. Bu düstur vasitəsilə $\ln |\det A|$ -ni zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəmi kimi ifadə etmək olur, bu təsadüfi kəmiyyətlərə isə mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək olur (bax. [1]).

Kükrəntilər metodunu $\mathbf{M} \Xi_n^2$, $n = 1, 2, \dots$ riyazi gözləməsinin varlığı halında tətbiq etmək münasibdir. Ortoqonallaşdırma metodu o halda yaxşı nəticələr verir ki, Ξ_n təsadüfi matrislərinin elementləri asılı olmayan və $(0, 1)$ normal qanununun cazibə oblastına daxil olsunlar. İnteqral ifadələr metodu, əsas etibarilə, $(I + \Xi_n)$ matrislərinin T. d.-ləri üçün.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ |\det(I + \Xi_n)| \geq h \} = 0$$

şərti ödəniləndikdə tətbiq olunur. Bu metodun köməyi ilə bəzi T. d.-lərin paylanmalarının sonsuz bölünən qanuna zəif yığılması isbat olunmuşdur (bax. [1]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA «случайное блуждание; random walk» - xüsusi növ təsadüfi prosesdir. prosesi hər hansı təsadüfi mexanizmin təsiri ilə hər hansı fəza fəzasında hissəciyin yerindəyişməsinin riyazi modeli kimi interpretasiya etmək mümkündür. Fəza fəzası kimi, adətən, d - ölçülü Evklid fəzası və ya bu fəzada tamqiymətli şəbəkə götürülür. Təsadüfi mexanizmlər müxtəlif ola bilər; əksər hallarda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənilməsi və ya Markov zəncirləri ilə doğrulmuş dolaşmalara baxılır. «T. d.» termini qruplarda Markov proseslərinin işarə edilməsi üçün də istifadə olunur.

T. d.-nin dəqiq ümumi qəbul edilmiş tərif yoxdur.

$d = 1$ halında ən sadə T. d.-nin trayektoriyaları

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

cəmləri ardıcılığı və başlanğıc vəziyyəti $S_0 = 0$ ilə təsvir olunur, bu halda X_i -lərin asılı olmayan və

$$\mathbf{P} \{ X_i = 1 \} = p, \quad \mathbf{P} \{ X_i = -1 \} = 1 - p = q, \quad p \in (0, 1)$$

ehtimalları ilə Bernulli paylanması ilə paylanan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur. S_n -in aldığı qiyməti n partiyadan ibarət oyunda iki oyunçudan birinin uduşu kimi interpretasiya etmək olar; uduş oyunçunun hər partiyada p ehtimalı ilə udməsi, $q = 1 - p$ ehtimalı ilə uduzması fərz olunur.

Əgər oyun simmetrik pulun atılması ilə aparılırsa, onda $p = 1/2$ götürülür (simmetrik dolaşma). Fərz olunur ki, oyun başlayan anda birinci oyunçunun ilkin kapitalı b , ikinci oyunçunun ilkin kapitalı a -ya bərabərdir. Bu şərtlərlə oyun o halda sona çatmış hesab olunur ki, koordinatları $S_1, S_2, \dots$ olan «dolaşan hissəcik» ilk dəfə a və ya b səddinə çatmış olsun. Belə anda oyunçulardan biri iflas olur. Bu klassik iflas məsələsidir və bu

halda, a və b nöqtəsindəki baryerlərə uducu sərhədlər kimi baxmaq olar.

Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi ilə bağlı təbiiqlərdə hissəcik a və b sərhədləri yaxınlığında özünü başqa cür də apara bilər, məs., $a = \infty$, $b = 0$ olarsa, onda dolaşan hissəciyin $n+1$ anında vəziyyəti Z_{n+1} olarsa, (1)-ə uyğun olaraq,

$$Z_{n+1} = \max(0, Z_n + X_{n+1}) \quad (2)$$

münasibəti ilə təsvir olunur və 0 nöqtəsində baryeri gecikdirici sərhəd adlandırmaq olar. Baryerlərin yaxınlığında hissəciyin özünü aparmasının digər halları da vardır.

$a = \infty$ olduqda birsərhədli təsadüfi dolaşma,

$a = b = \infty$ halında qeyri-məhdud təsadüfi dolaşma məsələləri alınır. Belə T. d.-lərin öyrənilməsi, adətən, diskret Markov zəncirləri aparatı vasitəsilə, məs., sonluferqlərlə uyğun tənlikləri araşdırmaq yolu ilə aparılır.

Birsərhədli T. d. ($a = \infty$) (2) münasibətləri ilə təsvir olunduqda, $p < q$ və $n \rightarrow \infty$ olduqda, Z_n təsadüfi kəmiyyətinin $S = \sup_{k \geq 0} S_k$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşən stasionar paylanması vardır; bu halda

$$\mathbf{P}\{S \geq k\} = (p/q)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Qeyri – məhdud T. d.-ni təsvir edən qanunlar S_n , $n = 1, 2, \dots$ cəmlər ardıcılığı üçün limit teoremlərindən alınır. Bu qanunların birində hökm olunur ki, simmetrik T. d. üçün ($p = 1/2$) hissəcik qeyd olunmuş ixtiyari a nöqtəsinə sanki yəqin çatır (özü də ki, sonsuz dəfə). $p < 1/2$ olduqda T. d. sanki yəqin sola istiqamətlənir, bu halda S təsadüfi kəmiyyəti [(3) düsturundan] sanki yəqin sonludur.

Simmetrik T. d. üçün hissəciyin müsbət yarımoxda keçirdiyi τ_n müddəti ($S_1, \dots, S_n$ ardıcılığındakı müsbət hədlərin sayı) böyük ehtimalla $n/2$ -yə deyil, 0 və ya n -ə yaxın olacaqdır. Bu arksinus qanunu adlanan qanundan aydın olur; bu qanuna əsasən n -in böyük qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\tau_n/n < x\} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

münasibəti ödənilir (bax, [1]). Bu münasibətdən aydındır ki, məs.,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\tau_n/n - 1/2\right| < 1/4\right\} = 1 - 2\mathbf{P}\{\tau_n < n/4\} \approx 1/3$$

və hissəcik bir tərəfdə, 0,2 ehtimalı ilə, bütün vaxtın 97, 6%-dən az olmayaraq olur.

Sərhədlər məlum olduqda T. d. ilə qeyri – məhdud T. d.-ni bir-birilə əlaqələndirən münasibətlər mövcuddur. Məs., əgər $Y(x) = \min\{k : S_k \geq x\}$ götürülsə, onda

$$\mathbf{P}\{Y(x) = n\} = \frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\}$$

bərabərliyi doğrudur (bax, [2]).

Qeyri – məhdud T. d. üçün dolaşan hissəciyin vəziyyəti S_n n -in böyük qiymətlərində böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi ilə ifadə olunur.

Əgər ± 1 qiymətini alan sıçrayış kəmiyyətlərini Δ kiçik olduğu halda $\pm \Delta$ ilə əvəz edib, $p = (1 + \alpha \Delta)/2$ qəbul edilərsə, onda

$n = t/\Delta^2$ sayda sıçrayışdan sonra hissəciyin vəziyyəti S_n , təqribi olaraq, ($\Delta \rightarrow 0$) t anında diffuziya prosesini – aparı əmsalı α , diffuziya əmsalı 1-ə bərabər olan və a və $-b$ sərhədlərində uyğun vəziyyətlərə malik (əgər S_n T. d.-sı üçün bunlar verilərsə) olan prosesi təsvir edir.

Baxılan T. d.-lərin bir çox ümumiləşmələri vardır. $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ fəzasında ən sadə T. d.-lər aşağıdakı kimi təyin olunur. Hissəcik başlanğıc vəziyyətindən çıxaraq bir addımlı sıçrayışla, koordinat oxlarına paralel $2d$ sayda istiqamətdən biri ilə hərəkət edir.

Beləliklə, dolaşan hissəciyin mümkün vəziyyətləri $\mathbb{R}^d$ -nin tamqiymətli koordinatlara malik olan bütün nöqtələridir. T. d.-ni təyin etmək üçün, müxtəlif keçidlərə uyğun $2d$ sayda ehtimallardan

hər biri 2^{-d} -yə bərabər olarsa, simmetrik T. d. alınır. Çoxölçülü halda, T. d. üçün sərhəd məsələləri olduqca mürəkkəb olur, belə ki, $d > 1$ olduqda sərhədlərin forması olduqca mürəkkəbləşir (bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*).

Ən sadə T. d.-lərin digər mümkün ümumiləşməsi ondan ibarətdir ki, (1)-də baxılan asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari qanunla paylandığı fərz olunur. Bu halda qeyri – məhdud T. d.-lər və sərhədlərlə verilən dolaşmalar üçün əsas keyfiyyət qanunauyğunluqları dəyişmir. Məs., dolaşan hissəcik a və ya $-b$ sərhədlərindən birinə sanki yəqin çatır. Əgər $a = \infty$ və $\mathbf{M}X_i \leq 0$ olarsa, hissəcik $-b$ sərhədinə sanki yəqin çatır. Əgər X_i -lər tamqiymətli və $\mathbf{M}X_i = 0$ olarsa, onda hissəcik sanki yəqin başlanğıc vəziyyətinə qaydır. $\mathbf{M}X_i = 0$ olan ixtiyari paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər halında, bu müddəə, yalnız o halda doğrudur ki, hissəciyin qayıdışı nöqtəyə deyil, intervallara qayıdış olsun.

T. d.-nin $(-b, a)$ intervalının sərhədlərindən kənara çıxması ilə bağlı məsələlərin həlli ümumi halda olduqca çətin olur. Bununla belə, bu tip məsələlərin riyazi statistikada, sığorta işlərində, xidmət sistemləri nəzəriyyəsində çoxsaylı təbiiqləri (ardıcıl analiz) vardır. Bunların tədqiqatında əsas müəyyənəşdirici rol təsadüfi dolaşmalar üçün *sərhəd məsələləri* metodları oynayır. Bu metodlardan əsas hesab olunanları *faktorializasiya metodları* (bax, [3]), integral – fərqlər tənlikləri ilə, kiçik parametrlili tənliklərin həllinin Vişik və Lüsternik metodları və s. ilə bağlı olan metodlardır (bax, [4]). Bu tənliklərin araşdırılması baxılan məsələlərin potensial nəzəriyyəsi ilə dərin əlaqəsini aşkar edir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğurduğu T. d.-lər haqqında nəticələrin əksəriyyəti S_n təsadüfi kəmiyyətləri Markov zənciri ilə bağlı olduğu hal, sıçrayışları asılı təsadüfi kəmiyyətlər olan T. d., həm də $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ -də çoxölçülü T. d. halları üçün də doğrudur (bax, [5]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Спирер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA çoxölçülü «случайное блуждание» многомерное; multidimensional random walk – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA; qayıdışlılıq « случайное блуждание; возвратность; persistence / recurrence of random walk » – faza fəzasından təsadüfi dolaşma hərəkətinə başlayan hissəciyin faza fəzasının müəyyən məhdud çoxluqlarına vahid ehtimalla, heç olmazsa bir dəfə qayıdışı xassəsidir. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – ümumi paylanma funksiyası F olan eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_n = \xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 1$ olsun. Fərz olunur ki, $\{S_n\}$ təsadüfi dolaşması $\mathbb{R}^1$ -də S_n , $n \geq 1$ cəmlərinin doğurduğu dolaşmadır. Əgər

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \{S_n \in I\} = \infty \quad (*)$$

şerti F şəbəkəvari olmayan paylanma halında ixtiyari I intervalı üçün və 1 addımlı arifmetik paylanma halında k nöqtəsini (k – tam ədəddir) özündə saxlayan ixtiyari I intervalı üçün ödənilirsə, $\{S_n\}$ T. d. qayıdışlı təsadüfi dolaşma olur.

$m = \mathbf{M}_{\xi_k}$ riyazi gözləməsi olan paylanma üçün $m = 0$ olduqda paylanma qayıdışlı, $m \neq 0$ olduqda isə qayıdışsız paylanma olur.

$\mathbb{R}^d$ -də T. d.-nin qayıdışlılıq xarakteri analojiidir. Riyazi gözləmələri sıfır bərabər, sonlu dispersiyalı ikiölçülü paylanma qayıdışlı paylanmadır. Hər bir üçölçülü cırlaşmayan T. d. qayıdışsız dolaşmadır. Əgər T. d. vəziyyətləri çoxluğu hesabı Markov zənciridirsə, onda T. d.-nin qayıdışlılığı zəncirin vəziyyətlərinin qayıdışlılığı ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [2] Спitzer Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA qrupda « случайное блуждание на группе; random walk on a group » – diskret və ya kəsilməz zamanlı əla xüsusi Markov prosesidir ki, onun Markov keçid operatoru vəziyyətlər fəzasında tranzitiv və sərbəst təsir edən qrupla kommutasiya edir. Diskret zaman halında qrupda sağ təsadüfi dolaşma əla bircins Markov prosesidir ki, onun vəziyyətləri fəzası G qrupudur, bir addıma keçid operatoru $\mathbf{P}(x, A) = \mathbf{P}(e, x^{-1}A) = \mu(x^{-1}A)$ düsturu ilə G -də μ ehtimal ölçüsü ilə verilir; e – qrupun vahididir. Əgər G diskret olarsa, onda $p(h|g) = \mu(g^{-1}h)$ olur. Qrupda sol təsadüfi dolaşma üçün, uyğun olaraq, $p(h|g) = \mu(hg^{-1})$ bərabərliyi doğrudur.

$\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində və ya $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında adi T. d. yaxşı öyrənilmiş ən sadə Markov prosesi olub, qrupda T. d.-nin xüsusi halıdır. Daha ümumi hala (məs., matrislər qrupu halına) baxılması onunla bağlıdır ki, birincisi, bu halda müxtəlif təbiqlərə (təsadüfi mühitlər, dalğa ötürücülər üçün təsadüfi potensiallı Şredinqer tənliyi) baxılır, ikincisi, qruplarda ümumi harmonik analiz (potensial nəzəriyyəsi, istilikkeçirmə tənliyi və qruplarda və bircins fəzalarda diffuziya) aparılır və nəhayət, onunla bağlıdır ki, qruplarda T. d. ən ümumi şəkili Markov proseslərində təsadüf olunan effektləri modeləşdirə bilər. Bundan başqa, aydın olmuşdur ki, qruplarda T. d.-nin öyrənilməsi bu qrupların özlərinin və onların cəbri invariantlarının öyrənilməsi üçün səmərəlidir.

Qruplarda T. d. nəzəriyyəsinin əsas məsələsi trayektoriyaların sonsuzluqda nə cür olacağı məsələsidir. Qeyri Abel halında qeyri – trivial sərhəd yarana bilər. G – diskret qrup, μ – bu qrupda

ölçü, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – T. d., $y_0 = e$, $\mathfrak{A}_n^{\infty} = \{y_k\}_n^{\infty}$ dolaşmasına nəzərən ölçülən hadisələr σ – cəbri, $\mathfrak{A} = \bigcap_n \mathfrak{A}_n^{\infty}$ – qalıq σ –

cəbr olsun; ν realizasiyalar fəzasında ölçünün faktor ölçüsü olarsa, $\mathfrak{A}$ -ya uyğun (Γ, ν) fəzası sərhəd – çıxış adlanır. Əgər $\mathfrak{A}$ trivial σ – cəbr olarsa, onda Γ birmöqtəvi olur və trivial sərhəd adlanır. Əgər G Abel qrupudursa, nilpotentdirsə və ya sözlərin sayının subeksponensial artımına malikdirsə, onda Γ trivial sərhəddir. Əksinə, klassik semisade qruplar, sərbəst qruplar və hətta bezi lokal sonlu qruplar üçün sərhəd qeyri – trivialdır. Sərhəd – çıxış Puasson sərhədi ilə, Martin sərhədinin aktiv hissəsi ilə və bir sıra hallarda stasionar sərhədlə üst-üstə düşür. Bununla da sərhədin aşkar hesablanması bütün məhdud

$$\int_G f(gx) d\mu(x) = f(g), \quad |f(g)| \leq K$$

harmonik funksiyalarının tapılması, yeni Qrin funksiyasının sonsuzluqda asimptotikasının tapılması ilə eynigüclüdür. Klassik qruplar üçün sərhəd simmetrik fəzalar nəzəriyyəsi mənasında sərhədlə sıx əlaqədardır. Məs., $SL(2, \mathbb{R})$ qrupunun altqruplarının geniş sinfi üçün T. d.-nin sərhədi Lobaçevski müstəvisinin absolyutudur. Amenabel qrupunda T. d.-sı trivial sərhədə malik olan ölçü həmişə vardır, lakin əla ölçülər də vardır ki, onlar üçün T. d.-nin qeyri – trivial sərhədi vardır. Əksinə, qeyri – amenabel qruplarda cırlaşmayan ölçülü T. d.-nin sərhədi həmişə qeyri – trivialdır. Γ sərhədinin hər bir nöqtəsi zaman üzrə bircins, fəza üzrə isə bircins olmayan (yəni qrupda T. d. olmayan) şərti Markov prosesi doğurur. Onun sərhədi trivialdır və bu proses üçün mərkəzi limit teoreminin tətbiqi və onun deqiqləşdirilmələri haqqında adi suallar qoymaq mümkündür.

Sərhədlərin öyrənilməsi üçün qrupda T. d.-nin entropiyası anlayışı faydalıdır. μ – G -də sonlu entropiyaya malik ölçü; μ^n – μ -nün n -ci konvolusiyonu olsun, yeni y_n T. d.-nin paylanması olsun. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mu^n) = h_{\mu}$$

limiti vardır və bu limit qrupda təsadüfi dolaşmanın entropiyası adlanır. $h_{\mu} = 0$ şərti sərhədin trivial olması ilə eynigüclüdür. Sanki bütün trayektoriyalar üçün

$$\frac{1}{n} \ln \mu^n(y_n) \rightarrow h_{\mu}$$

münasibəti ödənilir, bu Şennon teoremidir. Sərhədin digər triviallıq şərti, müntəzəm paylanma terminləri, ixtiyari $g \in G$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^{n-1}(gy_n)}{\mu^n(y_n)} = 1$$

münasibətinin ehtimala görə ödənilməsidir.

$GL(k, \mathbb{R})$ matrislər qrupunda T. d.-lər Lyapunov göstəriciləri ilə əlaqədardır: Oseledts teoremində hökm olunur ki, ixtiyari $x \in \mathbb{R}^k$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|y_n x\| = \lambda(x)$$

limiti sanki yəqin vardır, burada $\{y_n\}$, $GL(k, \mathbb{R})$ -də T. d.-dir;

$\lambda(\cdot)$ qrupda T. d. üçün Lyapunov göstəricisi adlanır; bu göstəricilər dinamik sistem nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərində və s. tətbiq olunur. Fundamental qrupda T. d.-nin sərhədi örtük çoxoxbranlı diffuzion prosesin sərhədi ilə əlaqədardır. Qruplarda T. d.-lər haqqında bir sıra məsələlər qruplar nəzəriyyəsi ilə bağlıdır. Məs., Kesten amenabellik kriterisi qruplarda T. d. terminləri ilə ifadə olunur: simmetrik μ ölçülü T. d.-nin n -ci addımda vahidə qayıdış ehtimalı $\mu^n(e)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu^n(e) = 0$$

şərtini, yalnız və yalnız o halda ödəyir ki, qrup amenabel qrupu olsun.

Əd.: [1] Сазанов В. В., Тутубалин В. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 3–55; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Теоремы и задачи о процессах Маркова, М., 1967; [3] Маргулис Г. А., «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, с. 1054–57; [4] Kesten H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, p. 336–54; [5] Furstenberg H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 108, p. 377–428; [6] Kaimanovich V., Vershik A., «Ann. Probab.», 1983, v. 11, № 3, p. 457–90.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA qrupda: lokal teoremlər «случайное блуждание на группе; локальные теоремы; local theorems for a random walk on a group» – *tesadüfi dolaşmanın* n addımda lokal kompakt qrupun qeyd olunmuş oblastına keçməsi ehtimalını qrupun xassələri, oblastın həndəsi xarakteristikaları və n ədədi terminləri ilə ifadə edən müddəalardır.

Lokal teoremlər anlayışı əvvəlcə heqiqi ədədlərin additiv qrupu halı üçün, sonra isə $\mathbb{R}^d$ halı və integral teoremlərlə eyni zamanda yaranmışdır. Lakin $\mathbb{R}^1$ və $\mathbb{R}^d$ -də daha incə teoremlər bir qədər gec. xarakteristik funksiyalar nəzəriyyəsi metodlarının inkişafı və statistik mexanikada ədədlər nəzəriyyəsinin additiv məsələlərinin tətbiqi ilə alınmışdır.

Hal-hazırda lokal teoremlərin klassik nəzəriyyəsini əsasən başa çatmış hesab etmək olar (bax, [1]). Xüsusilə də, qeyd etmək lazımdır ki, kəsilməz və diskret paylanmalar halları, paylanma daşıyıcılarının arifmetik təbiətinin müxtəlifliyinə görə, bir-birindən asılı olmadan, lakin paralel inkişaf edirdi. Lakin bu iki halı birləşdirən çox gözəl bir nəticə alınmışdır: əgər F_1 paylanması $\mathbb{R}^d$ -də şəbəkəvari paylanma deyilsə, yəni $\theta \neq 0$,

$$\left| \int e^{i\theta x} dF_1(x) \right| < 1$$

olarsa, B_n və A_n konstantlar ardıcılığı ilə olarsa ki, $F_n(B_n(x + A_n)) \rightarrow F$ münasibəti ödənilsin. F_1 – sıxlığa malik və F -in cazibə oblastından olan paylanma, F_n – F_1 -in n -tərtib kompozisiyası və

$$P(x, h) = F(x + h) - F(x), \quad P_n(x, h) = F_n(x + h) - F(x)$$

olarsa, onda

$$P_n(B_n(x + A_n), B_n h) = P(x, h) + o_n(1)(h^d + B_n^{-d})$$

münasibəti doğrudur (bax, [2]).

Qrup halı üçün lokal teoremlərin bir neçə tipinə baxılır:

1) klassik tip teoremlər, yəni paylanma sıxlıqları və ehtimallar (diskret hal) haqqında lokal teoremlər; 2) iki müxtəlif, lakin qeyd olunmuş oblasta keçmə ehtimallarının nisbətləri haqqında lokal

teoremlər, belə ki, bu nisbətlər limitdə bu oblastların invariant ölçülərinin nisbətinə yaxınlaşır (bunlar nisbi invariant lokal teoremlər adlandırılır); 3) baxılan qrupun işlək olduğu bircins fəzalarda lokal teoremlər. Bunlar həm klassik, həm də nisbi lokal teoremlər ola bilər.

Kommutativ qruplar halında, məs., $\mathbb{R}^1$ və $\mathbb{R}^d$ üçün 1) və 3) tipli lokal teoremlər üst-üstə düşür. belə ki, bu hallarda bircins fəza qrup ilə üst-üstə düşür. Lokal teoremlərin spesifikasiyası xüsusilə qeyri – kommutativ hallarda aşkar olur.

Qeyri – kommutativ halda lokal teoremlər əvvəlcə kompakt qruplar və belə qrupların bircins fəzaları üçün alınmışdır. Bu halda integral və lokal limit teoremləri faktiki olaraq ekvivalentdirlər və bunların lokal və integral hallarına ayrılması məsələnin qoyuluşu və yanaşmadan asılıdır. Nisbi lokal teoremlərə aid işlərin böyük əksəriyyəti diskret qruplara həsr olunmuşdur. Teoremlərin bu qrupunda əsas fakt diskret qrupun ixtiyari elementinin eyni ehtimalılıqına aiddir (bax, [4]). Qeyri – kommutativ lokal kompakt qruplar üçün lokal teoremlər Evklid hərəkətləri qrupu misalında araşdırılmışdır. Bu istiqamətdə ilk nəticə: A – müstəvinin qeyd olunmuş nöqtəyə görə 2π ilə ölçülməyən bucaq qədər dönməsi,

B – müstəvinin ixtiyari yerindəyişməsi olduqda, A, B, A^{-1}, B^{-1} kimi sonlu və bərabərpaylanmalı daşıyıcıları olan eyni bir paylanmaların kompozisiyası üçün nisbi lokal invariant limit teoremidir (bax, [5]). Bir az sonra paylanmasının ifadəsi daha ümumi olan eyni ölçülərin kompozisiyası üçün d – ölçülü Evklid fəzasının hərəkətlərinin qrupu $M(d)$ üçün nisbi invariant lokal teorem alınmışdır (bax, [6]).

Evklid hərəkətləri qrupunda verilən, konvolusiyaya olunan paylanmaların ikinci momentlərinin sonlu olduğu şərtində ən başa çatdırılmış lokal limit teoremi formasında nəticə [7]-də alınmışdır, bu teorem [2]-də Ç. Stoun tərəfindən təklif olunmuşdur. Bu teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – eyni ν paylanmasına tabe, $M(d)$ – qiymətlərli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, ν – $SO(d)$ -dən olan dönmə paylanması, F_ν – $\mathbb{R}^d$ -də yerindəyişmələr paylanması olsun. Əgər: a) ν -nin n -ci kompozisiyası ν^{*n} , $n \rightarrow \infty$ olduqda $SO(d)$ -də müntəzəm paylanmaya zəif yığılarsa; b) $\mathbb{R}^d$ -də F_ν paylanmasının sonlu ikinci tərtib momentləri varsa; c) $n_0 > 0$ tam ədədi və $K, K \subset SO(d)$ çoxluğu, $\nu(K) > 0$ ölçüləri varsa ki, hər bir $\alpha \in K$ üçün $\nu_{n_0}^*(\alpha)$ paylanmasının daşıyıcısı hipermüstəvilərin sonlu birləşməsindən deyildirsə [burada $\nu(\alpha)$, $\alpha \in K$ qeyd olunduqda ν -nün şərti paylanmasıdır], onda ixtiyari məhdud Jordan – ölçülən $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^d$ oblastı üçün

$$P\{\mathcal{Z}_n \in \mathcal{Q}\} = c \text{mes}(\mathcal{Q}) n^{-d/2} + o(n^{-d/2})$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\mathcal{Z}_n = X_1 X_2 \dots X_n$ hasilinin yerindəyişməsinin təsadüfi komponenti, $\text{mes}(\mathcal{Q})$ – $\mathcal{Q}$ oblastının Lebeq ölçüsü, c – oblastdan asılı olmayan və $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{Z}_n$ üçün limit paylanmasının sıxlığının sıfırdakı qiymətinə bərabər konstantdır.

Bu teoremdən sonlu dispersiyalı paylanmalar üçün $M(d)$ qrupunda bütün məlum nisbi invariant teoremlər alınır, məs., [5].

[6]-da şərh olunmuş nəticələr. İnteqral limit teoremində $M(d)$ qrupunda dayanıqlı paylanmaya yığılma olduğu hal üçün analogi nəticə alınmışdır (bax, [8]).

Əd.: [1] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [2] Stone C. B. J., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 546–51; [3] Арнольд В. И., Крылов А. Л., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 1, с. 9–12; [4] Guivarch Y., Kean M., Roynette B., «Lect. Notes in Math.», 1977, v. 624; [5] Каждан Д. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 299–305; [6] Baldi P., Bougerol Ph., Crepel P., «C. r. Acad. sci.», ser. A, 1976, t. 283, p. 53–55; [7] Maximov V. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1980, Bd 51, S. 27–38; [8] Хохлов Ю. С., «Докл. АН СССР», 1981, т. 260, № 2, с. 295–99.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA(sı) Markov «случайное блуждание марковское; Markov random walk» – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA özü-özünü kəsməyən «случайное блуждание без самопересечений; self-avoiding random walk» – trayektoriyaları şəbəkənin hər bir nöqtəsindən bir dəfədən artıq keçməyən *təsadüfi dolaşmadır*. n uzunluqlu özü-özünü kəsməyən T. d. – $\mathbb{Z}^d$, $d > 1$ tamqiymətli şəbəkəsinin ele $X_n = \{x(0), x(1), \dots, x(n)\}$ nöqtələr ardıcılığına deyilir ki, bu nöqtələr $x(0) = 0$, $i \neq j$ olduqda $x(i) \neq x(j)$, $|x(i) - x(i+1)| = 1$ şərtlərini ödəsin. $\nu(n)$, – n uzunluqlu bele müxtəlif T. d.-nin sayı olsun. Bütün X_n ardıcılıqlarının ehtimalları eyni $1/\nu(n)$ ədədinə bərabər olarsa, onda özü-özünü kəsməyən bütün T. d.-lər çoxluğunda ehtimal ölçüsü təyin olunmuşdur. $\langle \cdot \rangle_n$ – bu ölçü üzrə ortalama simvolu və $d(n) = \langle x^2(n) \rangle_n$.

$Y_n(t, X_n) = d_n^{-1/2} x([n, t])$, $t \in (0, 1)$ olsun. Özü-özünü kəsməyən T. d.-lər nəzəriyyəsinin əsas məsələləri $n \rightarrow \infty$ olduqda $\nu(n)$ və $d(n)$ funksiyalarının asimptotikalının araşdırılması və $n \rightarrow \infty$ olduqda $Y_n(t, X_n)$ təsadüfi prosesinin limit paylanması öyrənilməsidir.

Bele T. d.-lərlə bağlı problemlər fiziki ədəbiyyatda fiziki polimerlərin məsələləri ilə əlaqədar aktiv tədqiq olunur. Bu halda fərz olunur ki (bu ümumi qəbul edilmiş hal hesab edilir),

$$\nu(n) \sim \text{const} \cdot \beta(d)^n n^{\tau(d)-1}, \quad d(n) \sim \text{const} \cdot n^{\tau(n)}.$$

$d > 4$ olduqda kritik indekslər $\gamma(d), \tau(d)$ $\gamma(d) = \tau(d) = 1$ şərtini ödəyir və $Y_n(t, X_n)$ -in paylanması $\mathbb{R}^d$ -də standart Viner ölçüsünə zəif yığılır. $d = 4$ olduqda da Viner ölçüsünə yığılma vardır, lakin bu halda $\nu(n)$ və $d(n)$ -in asimptotikalarda loqarifmik düzəlişlər olur. $d = 2, 3$ hallarında T. d. Gauss xüsusiyyətli olmur və Viner ölçüsünə yığılma da olmur. Hesablamalar nəticəsində $\tau(2) = 1,5$, $\tau(3) = 1,17$ olduğu alınmışdır.

Özü-özünü kəsməyən T. d. haqqında ciddi riyazi nəticələr çox deyildir. Məs., isbat olunmuşdur ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)^{1/n} = \beta(d)$ limiti vardır (bax, [1]); olduqca böyük dim. – ölçülər üçün Viner

ölçüsünə yığılma olur və kritik indekslər $\gamma(d) = \tau(d) = 1$ şərtini ödəyir (bax, [2]); özü-özünü itələyən (rus. самоотталкивающий) T. d. və ya özü-özünü kəsməyən T. d.-lər üçün Viner prosesinə zəif yığılma vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Kesten H., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 1128–37; [2] Slade G., «Comm. Math. Phys.», 1987, v. 110, p. 661–83; [3] Brydges D., Spencer T., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 97, p. 125–48.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA; sərhəd funksionalı «случайная блуждание; граничный функционал; boundary functional of a random walk» – *təsadüfi dolaşma* trayektoriyasının ele funksionalıdır ki, bu funksional, bu trayektoriyanın hər hansı çoxluğun sərhədinə çatması ilə əlaqədardır. Birölçülü $X_0, X_1, X_2, \dots$ təsadüfi dolaşması üçün ən sadə sərhəd funksionalları aşağıdakılardır: x səddinə ilk çatma müddəti –

$$\eta(x) = \min \{k : X_k \geq x\},$$

T. d.-nin maksimal qiymətləri –

$$\bar{X}_n = \max_{k \leq n} X_k \quad \text{və} \quad X = \sup_{k < \infty} X_k,$$

dolaşmanın x səddindən eksses və defekt (çatım və ölüm) kəmiyyətləri –

$$\chi(x) = X_{\eta(x)} - x, \quad \gamma(x) = x - X_{\eta(x)-1}$$

və s.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA təsadüfi mühitdə «случайное блуждание в случайной среде; random walk in random environment» – keçid ehtimalları (diskret zamanlı dolaşma halında) və keçid intensivlikləri (kəsilməz zamanlı dolaşma halında) hər hansı təsadüfi meydanın realizasiyaları olan təsadüfi dolaşmadır. Fiziki nöqtəyi – nəzərdən təsadüfi mühitdə T. d. biricins olmayan mühitdə diffuziya prosesinə uyğundur. Ən sadə halda, $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ şəbəkəsi üzrə dolaşmada, şəbəkənin qonşu nöqtələrinə keçidlər mümkün olduğu halda, keçid ehtimalları $p(x, x \pm e_\alpha) = p_{\pm\alpha}(x)$ düsturu ilə, $\{p_{\pm\alpha}(x), x \in \mathbb{Z}^d, \alpha = 1, \dots, d\}$ təsadüfi meydanı ilə təyin olunur; burada e_α , – α istiqamətinin vahidi vektorudur.

Adətən, fərz olunur ki, $p_{\pm\alpha}(x)$ müxtəlif x -lər üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və ya korrelyasiyaların azalması üçün müəyyən şərtlərin ödənilməsinə təmin edir. $p_{\pm\alpha}(x) = 1/2d + \varepsilon q_{\pm\alpha}(x)$ olduqda və ε kiçik olduğu halda, bir T. d.-nin kiçik təsadüfi kükrəntisi (rus. малое случайное возмущение) anlaşılır. Təsadüfi mühitdə T. d., adətən, ya mühitə və ümumiyyətlə uyğun ehtimal fəzalarının hasilində təyin olunmuş ümumi təsadüfi proses kimi öyrənilir və ya mühit qeyd olunduqda, yeni bu prosesin şərti ehtimalları keçid ehtimallarının qeyd olunmuş realizasiyası şərtində öyrənilir. Əgər mühitin sanki bütün realizasiyalarında T. d.-nin asimptotik xassələri dəyişmirsə, onda təsadüfi mühitdə T. d. özü-özünü ortalama xassəsinə (rus. свойство самоусреднения) malikdir, deyilir. Təsadüfi mühitdə simmetrik, qeyri – simmetrik (və ya ümumi) T. d. növləri vardır.

1. Təsadüfi mühitdə simmetrik T. d. ele T. d.-ya deyilir ki, bu dolaşma üçün $p(x, y) = p(y, x)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ və ya $p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(x + e_\alpha)$ şərti sanki yeqin ödənilsin. Bu halda mühitin sanki bütün realizasiyaları üçün bir addıma Markov keçid operatoru özü-özünə qoşma operatorudur. Olduqca geniş şərtlər fərziyyələrində (bax, [1], [2]) təsadüfi mühitdə simmetrik T. d.

kovariasiyalar matrisi təsadüfi olmayan (özü-özünə ortalanmış) asimptotik normal T. d. olur. Mahiyyət etibarilə, şərtlər ele müəyyənləşdirilir ki, keçid ehtimalları $p_{\pm\alpha}(x)$ sıfırdan seçilir. Əgər bu şərtlər ödənilərsə, onda təsadüfi mühitin sanki bütün realizasiyaları üçün $\frac{1}{\sqrt{n}} \dot{X}([nt])$, $t \in [0, 1]$ təsadüfi prosesi

yığılan sıra şəklində ifadəsi alınmış, α kovariasiyalannın təsadüfi olmayan cırlaşmayan matrisi olan Viner prosesinə zəif yığılır, burada $\dot{X}(\tau)$ – dolaşan hissəciyin τ anında vəziyyətidir. Simmetriklik şərti $p_{\alpha}(x) = p_{-\alpha}(x + e_{\alpha})$ başqa şərtlərlə əvəz oluna bilər. Məs., $p_{\alpha}(x) = p_{-\alpha}(x)$ və ya $p_{\alpha}(x - e_{\alpha}) = p_{-\alpha}(x + e_{\alpha})$ şərti ilə, yəni bir nöqtədən əks istiqamətlərə çıxış ehtimallarının bərabər olması və ya əks istiqamətlərdən nöqtəyə daxil olma ehtimallarının bərabər olması şərti ilə əvəz oluna bilər. Bu hallarda təsadüfi mühitdə T. d. kovariasion matrisi təsadüfi olmayan asimptotik normal dolaşma olur.

2. Təsadüfi mühitdə qeyri-simmetrik T. d. $d=1$ olduğu hal üçün olduqca tam şəkildə öyrənilmişdir. Ən sadə hallarda yalnız bir addıma keçidlərə baxılır və

$$p(x, x+1) = 1/2 + \varepsilon p(x), \quad p(x, x-1) = 1/2 - \varepsilon p(x)$$

götürülür, burada $p(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ – asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Dolaşmada aparlıq xassəsinin olmaması şərti $M \ln \frac{1/2 + \varepsilon p(x)}{1/2 - \varepsilon p(x)} = 0$ şəklində

ifadə olunur (bax, [3]). Bu hal [4]-də ətraflı öyrənilmişdir. Aydın olmuşdur ki, keçid ehtimallarının fluktuasiyası nəticəsində şəbəkədə, anomal olaraq, onların çox müddət qaldığı xüsusi qapalanan oblaslar (quyular) əmələ gəlir. Hissəcik uyğun quyuya yaxınlığında uzun müddət qalır, sonra tez sıçrayaraq digər quyuya keçib orda uzun müddət qalır və s. Bu halda n müddəti ərzində hissəcik $\log^2 n$ tərtib, lakin diffuziyada olduğu kimi $\sqrt{n}$ tərtib deyil, məsafə ilə yerini dəyişir. Quyuların vəziyyəti $p(x)$ təsadüfi prosesinin realizasiyasından asılı olduğundan, bu mənada özü-özünü ortalama baş vermir. Quyuların vəziyyəti ilə bağlı ehtimal paylanması öyrənilmişdir (bax, [5]); məs., aydın olmuşdur ki, quyuya daxilində olan hissəcik dispersiyası sabitdir. Əvvəlki nəticələr sonlu sayda addımlarla keçidlərə malik T. d. halı üçün ümumiləşdirilir.

$d > 1$ dim. – ölçülər halı üçün ümumi riyazi ciddi nəticələr yoxdur. Fiziki ədəbiyyatda hesab olunur ki, $d \geq 2$ olduqda bircins T. d.-nin olduqca kiçik təsadüfi kükrəntilərinə qapalı oblaslar diffuziyanın mühüm yavaşmasına səbəb olur və $\frac{1}{\sqrt{n}} \dot{X}_n([nt])$, $t \in [0, 1]$ təsadüfi prosesi kovariasiyalar matrisi təsadüfi olmayan Viner prosesinə zəif yığılır. $d=2$ olduqda $\sqrt{n}$ -lə normalanmada loqarifmik düzəlişlər mümkündür.

Əd.: [1] Anshelevich V., Khanin K., Sinai Ya., «Comm. Math. Phys.», 1982, v. 85, p. 449–70; [2] Козлов С. М., Молчанов С. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 278, № 3, с. 531–34; [3] Kesten H., Kozlov S., Spitzer F., «Compos. Math.», 1975, v. 30, p. 145–68; [4] Синай Я. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, № 2, с. 247–58; [5] Голосов А. О., «Успехи матем. наук», 1986, т. 41, в. 2, с. 189–90.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA, AŞAĞIDAN KƏSİLMƏZ « непрерывное снизу случайное блуждание; random walk continuous from below » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA, YUXARIDAN KƏSİLMƏZ « непрерывное сверху случайное блуждание; random walk continuous above » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

TƏSADÜFİ EHTİMAL ÖLÇÜSÜ « случайная вероятностная мера; random probability measure » Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbri $\mathcal{A}$ -da – $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında bütün ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ -da təsadüfi elementdir, yəni $\mathcal{A}$ -da verilmiş bütün normalanmış mənfə olmayan hesabı – additiv çoxluq funksiyalarının koordinat fəzasına daxil olunmuş ($\text{card } \mathcal{A} \geq \aleph$ olduqda hesabı ölçüsü olmayan fəzaya) ehtimal paylanmalarının çoxluğunda təsadüfi elementdir. Ehtimal paylanmaların ailəsinin $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ – ölçülənlik nəzəriyyəsi [1] və [2]-də qurulmuşdur, burada $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ σ – cəbri $\text{cap}(\Omega, \mathcal{A})$ -nın

$\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ -ya daxil edilməsi ilə doğurulan σ – cəbrdir. Əgər τ paylanması $\mathbf{P}_{\tau}(\cdot)$ olan seçim üzrə naməlum ehtimal paylanma qanunu $\mathbf{P}_{\varepsilon} \in \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_t, t \in T\}$, $\mathbf{P}_{\varepsilon}$ -in parametrlərinin statistik qiymətidirsə, onda $\mathbf{P}_{\varepsilon}(\cdot)$ qanununun özünün statistik qiyməti $\mathbf{P}_{\varepsilon}(\cdot)$ qeyd olunan mənada T. e. ö.-dür.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, с. 53–55; [2] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972, §31.

TƏSADÜFİ ELEMENT « случайный элемент; random element » – təsadüfi kəmiyyət anlayışının ümumiləşməsidir. Belə fərz olunur ki, «T. e.» termini [1]-də M. Freşe tərəfindən daxil olunmuşdur, o qeyd etmişdir ki, ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafı və onun tətbiq oblastının genişlənməsi – eksperimentin təsadüfi nəticələrinin ədədlə və ya ədədlərin sonlu toplusu ilə təsvir olunma sxemlərindən eksperimentin nəticələri, məs., sıralar, funksiyalar, əyrilər, çevirmələr və s. ilə təsvir olunduğu sxemlərə keçilməsi zərurətinə səbəb olmuşdur.

Sonradan «T. e.» termini, əsas etibarilə, hər hansı xətti topoloji fəzanın, ilk növbədə Hilbert və Banax fəzalarının «təsadüfi qaydada» seçilmiş elementləri üçün istifadə olunmağa başlamışdır. Məs., Banax fəzası B -də ξ T. e.-nin dəqiq tərfi təsadüfi kəmiyyətin tərfini xatırladır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, B – Banax fəzası, B^* , – B fəzasına qoşma fəza olsun. Ω fəzanın ω elementar hadisələrinin B fəzasına $\xi = \xi(\omega)$ inikası (bu halda əgər ixtiyari xətti kəsilməz $x^*(\xi(\omega))$ funksionalı təsadüfi kəmiyyət, yəni $\mathcal{A}$ – ölçülən funksiya olarsa) təsadüfi element adlanır.

$\mathcal{L}$ ele minimal σ – cəbr olsun ki, bütün kəsilməz xətti funksionallar bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən funksionallar olsun. $\mathcal{L}$ σ – cəbrinin bütün çoxluqlarının tam proobrazları, yalnız və yalnız, $\mathcal{A}$ – ölçülən olduğu halda, ξ təsadüfi elementdir. B separabel fəza olduqda, $\mathcal{L}$ σ – cəbri B -nin Borel altçoxluqlarının σ – cəbri ilə üst-üstə düşür.

Ehtimal nəzəriyyəsinin bütün əsas anlayışları, məs., xarakteristik funksiya, riyazi gözləmə, kovariasiya və s. kimi anlayışlar T. e. üçün də təyin olunur; əgər ixtiyari kəsilməz xətti $x^*(\xi)$

funksionalının ehtimal paylanması normal paylanma olarsa, ξ T. e. normal (Gauss) element adlanır. Asılı olmayan T. e.-lər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu, təkrar loqarifm qanunu, mərkəzi limit teoremi və digər ehtimal müddəaları da təyin olunur. Bu teoremlərin öz klassik formasında Banax fəzaları halı üçün ifadə forması fəzanın həndəsəsi ilə sıx bağlıdır. Xüsusilə qeyd etmək lazımdır ki, bu bağlılıq qarşılıqlı xarakter daşıyır, belə ki, ehtimali xassələr, əslində, ehtimali – həndəsi xassələr olur və onların Banax fəzasında doğruluğu yalnız fəzanın həndəsi xassələri ilə təyin olunmur, bu bağlılığın özü isə elə bu xassələri təyin edir. Məs., riyazi gözləmələri sıfıra bərabər,

$M\|\xi_i\|^2 < \infty$ şərtini ödəyən, qiymətlərini B -dən alan asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış $\xi_1, \xi_2, \dots$ T. e.-nin ixtiyari ardıcılığı üçün $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}}$ normalanmış cəmlərinin paylan-

masının normal qanunla paylanmış T. e.-in paylanmasına zəif yığılması üçün B Banax fəzasının 2 tip fəza olması zəruri və kafidir (bax, [4]).

Əd.: [1] Fréchet M., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1948, v. 10, p. 215–310; [2] Mourier E., Elements aleatoires dans un espace de Banach (Thèse), P., 1955; [3] Hoffman-Jorgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587–89.

TƏSADÜFİ ƏDƏD «случайное число; random number» – bax, *Təsadüfi və psevdotesadüfi ədədlər*.

TƏSADÜFİ ƏVƏZETMƏ «случайная подстановка; random / permutation substitution» – n dərəcəli bütün əvəzetmələrin çoxluğu S_n -in *tesadüfi elementi* σ -dir, yəni $X_n = \{1, \dots, n\}$ çoxluğunun

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

cədvəl şəklində özünə təsadüfi qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır. σ_k – təsadüfi σ inikasında k elementinin obrazıdır, $k = 1, \dots, n$. Bu cədvəlin aşağı setri X_n çoxluğunun *tesadüfi yerdəyişməsidir*. σ T. e.-nə tepələri çoxluğu X_n olan, n sayda (k, σ_k) , $k = 1, \dots, n$ tilli Γ_n *tesadüfi qrafı* uyğundur. Γ_n qrafının əlaqəlilik komponentləri tsikllərdir. $S \subseteq S_n$ altçoxluğundan olan T. e. kimi, adətən, ixtiyari $s \in S$ üçün $P\{\sigma = s\} = |S|^{-1}$ bərabərliyi ödənilən σ T. e.-si anlaşılır, burada $|S|$ – S çoxluğunun elementləri sayıdır.

$\alpha_r(S)$, – r uzunluqlu tsikllərin sayı, $\nu(S)$ – tsikllərin ümumi sayı, $\eta(S)$, – S -dən olan T. e.-nin maksimal tsiklində tepələr sayı olsun, $O_n(S)$ isə S -dən olan T. e.-nin tertibi olub, S_n simmetrik qrupunun elementi kimi anlaşılır. S_n -dən olan T. e. üçün bu xarakteristikalar ən tam surətdə araşdırılmışdır (bax, məs., [1]). Əgər tam mənfəi olmayan $m_1, \dots, m_n$ ədədləri $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$ münasibətini ödəyərlərsə, onda

$$P\{\alpha_r(S_n) = m_r, r = 1, \dots, n\} = \prod_{r=1}^n \frac{1}{m_r! r^{m_r}}$$

düsturu doğrudur; digər hallarda $P\{\alpha_r(S_n) = m_r, r = 1, \dots, n\} = 0$ olur. İxtiyari $N = 1, \dots, n$ üçün

$$P\{\nu(S_n) = N\} = \frac{1}{N!} \sum \frac{1}{k_1 \dots k_N}$$

bərabərliyi doğrudur; cəmləmə $k_1 + \dots + k_N = n$ şərtini ödəyən tam müsbət $k_1, \dots, k_N$ ədədləri üzrə aparılır. $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\nu(S_n) = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} e^{-u^2/2} (1 + o(1))$$

bərabərliyi $u = (N - \ln n) / \sqrt{\ln n}$ -nin ixtiyari sonlu intervala daxil olmasını təmin edən tam N -lər üzrə müntəzəm ödənilir; ixtiyari qeyd olunmuş $r = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots$ qiymətlərində

$$P\{\alpha_r(S_n) = k\} \rightarrow \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{r}\right)^k e^{-1/r}$$

münasibəti doğrudur; $\eta(S_n)/n$ təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanması olduqca mürəkkəbdir:

$$\left(\ln O_n(S_n) - \frac{1}{2} \ln^2 n \right) / \sqrt{\frac{1}{3} \ln^3 n}$$

tesadüfi kəmiyyəti $n \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik olaraq $(0, 1)$ parametrləri normal qanunla paylanır (bax, [2]).

S_n -də müntəzəm paylanmadan fərqli olan, paylanması ilə təyin olunan T. e.-nin analogi xarakteristikalarının tədqiqatı mühüm çətinliklərlə bağlıdır (bax, [3], [4]) (məs., tsikllərin uzunluğuna qoyulan məhdudiyyətləri T. e.-lər).

Əgər P_n S_n -dən olan τ_1 və τ_2 asılı olmayan T. e.-lərinin doğruduğu qrupun ya S_n , ya da dəyişənşərsəli A_n qrupu ilə üst-üstə düşməsi ehtimaldırsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $P_n \rightarrow 1$ (bax, [5]).

S_n -dən olan T. e.-lərin generallaşdırma alqoritmləri vardır.

Əd.: [1] Гончаров В. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, № 1, с. 3–48; [2] Erdős P., Turán P., «Acta Math. Acad. sci. hung.», 1967, v. 18, № 3–4, p. 309–20; [3] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [4] Павлов А. И., «Матем. сб.», 1984, т. 124, № 4, с. 536–56; [5] Dixon J. D., «Math. Z.», 1969, Bd 110, № 3, S. 199–205; [6] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 3, М., 1978; [7] Степанов В. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 4, с. 639–53; [8] Колчин В. Ф., Случайные отображения, М., 1984.

TƏSADÜFİ FENOMEN «случайное явление; random phenomenon» – təsadüfi hadisə, proses, təzahür, – spontan cərəyan edən, baş verən və ya eksperimentin gedişatında yaranan müşahidə olunan hadisə və ya prosesdir ki, onun nəticəsi onun müşahidəsi çərçivəsində (və ya eksperimentin qoyuluşunda) əvvəlcədən təyin olunmur.

Ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqlərində baxılan əsas obyekt – tsikllərin dayanıqlılıq xassəsi olan kütləvi hadisə və ya proseslər, təzahürlər üçün riyazi modeldir.

Her bir T. f. Kolmoqorov üzrə özünün ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ilə təsvir olunur; Ω – müşahidənin ağlabatan nəticələri ω -ların çoxluğudur, Ω – elementar hadisələr fəzası adlanır, $\mathcal{A}$ – Ω -nın $A \subseteq \Omega$ altçoxluqlarının hər hansı hadisələr σ – cəbri. Hər hansı ω elementar hadisəsi müşahidə olunduqda bütün $A \ni \omega$ hadisələri baş vermiş olur. Bimöqtəvi $\{\omega\}$ çoxluqlarının $\mathcal{A}$ -ya element kimi daxil olması postulatlaşdırılır. T. f.-in kəmiyyət xarakteristikası – $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında təsadüfi hadisə və ya prosesin nəticələrinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü ilə təyin olunur. $\mathbf{P}(A)$ ehtimalı n sayda asılı olmayan sınaqlar (T. f.-nin müşahidələri) ardıcılığında təsadüfi A hadisəsinin baş vermə tezliyi $\nu(A)/n$ -i təqribi olaraq apriori təyin edir. $\nu(A)/n \approx \mathbf{P}(A)$ təqribi bərabərliyinin dəqiqliyi və etibarlılığı ciddi surətdə yalnız ehtimal dilində xarakterizə oluna bilər (bax, *Boyük ədədlər qanunu*).

TƏSADÜFİ FUNKSİYA «случайная функция; random function» – ixtiyari t arqumentinin ələ funksiyasıdır ki (onun qiymətlərinin T çoxluğunda verilən, ya ədədi qiymətlər və ya hər hansı vektor fəzasından daha ümumi olan qiymətlər alan), onun qiymətləri hər hansı sınağın köməyiylə təyin olunur, bu qiymətlər üçün isə müəyyən ehtimal paylanması vardır. Ehtimal nəzəriyyəsində əsas diqqət, adətən, ədədi $X(t)$ T. f.-na (yeni skalyar) verilir. $X(t)$ vektor T. f.-na $X_\alpha(t)$ skalyar funksiyalarının toplusu kimi baxılır, burada α – $\mathbf{X}$ vektorunun komponentlərinin sonlu və ya hesabi A çoxluğundan qiymətlər alır, yeni $X(t)$ -yə $t \in T$, $\alpha \in A$. (t, α) cütlerinin yeni $T_1 = T \otimes A$ çoxluğunda verilən ədədi funksiya kimi baxılır.

Əgər T sonlu çoxluq olarsa, onda T -də verilən $X(t)$ T. f.-sı təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu toplusudur, onu paylanma funksiyası ilə xarakterizə olunan bir çoxölçülü (vektor) təsadüfi kəmiyyətlər kimi hesab etmək olar. Sonsuz T -də verilən T. f.-lardan t ədədi (heqiqi) qiymətlər alan hal ən çox öyrənilmişdir, bu halda əksər hallarda t arqumenti zamandır, $X(t)$ T. f.-sı isə burada *təsadüfi proses* adlanır (əgər t zaman olaraq yalnız tam qiymətlər alarsa, onda T. f. həm də *təsadüfi ardıcılıq* və ya *zaman sırası* da adlandırılır).

Əgər t arqumentinin qiymətləri hər hansı çoxölçülü çoxobrazlının nöqtələri olarsa (məs., k – ölçülü $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasının), onda $X(t)$ T. f.-sı – *təsadüfi meydan* adlanır.

Sonsuz T çoxluğunda təyin olunmuş $X(t)$ T. f.-nin qiymətlərinin ehtimal paylanmasını T -nin elementlərinin bütün mümkün sonlu $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ altçoxluqlarına müvafiq $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ təsadüfi kəmiyyətlərin qrupları üçün sonluölçülü ehtimal paylanmalarının toplusu ilə, yeni

$$F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}}(x_1, \dots, x_n, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

uzlaşma şərtlərin ödəyən uyğun $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sonluölçülü paylanma funksiyalarının toplusu ilə xarakterizə etmək olar, burada $i_1, \dots, i_n = 1, \dots, n$ indekslərinin ixtiyari yerdeyişməsidir. $X(t)$ T. f.-nin ehtimal paylanmalarının bu

şəkildə verilməsi yalnız t arqumentinin qiymətlərinin sonlu çoxluqlarında $X(t)$ -nin qiymətlərindən asılı hadisələrə baxıldığı bütün hallarda kifayət edir. Lakin T. f.-nin bu şəkildə verilməsi t tip qiymətlərin sonsuz çoxluğunda T. f.-nin qiymətlərindən asılı xassələrinin ehtimallarını təyin etməyə kifayət etmir, məs., T. f.-nin kəsilməzliyi və ya differensiallanan olması ehtimallarını, və ya $X(t)$ T. f.-nin t -nin qiymətlərinin kəsilməz çoxluğunda $X(t) < a$ bərabərsizliyini ödəməsi ehtimallarını (bax, *Təsadüfi proses, Separabel proses*).

T. f.-nin daha ümumi şəkildə verilməsi – onun T çoxluğunun bütün mümkün nöqtələrində eyni $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $X = X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusunun təsviri ilə bağlıdır (burada Ω – ω nöqtələrinin boş olmayan çoxluğu, $\mathcal{A}$ – Ω -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{P}$ – $\mathcal{A}$ verilmiş ehtimal ölçüsüdür). Belə yanaşmada T çoxluğunda T. f. – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, iki $t \in T$ və $\omega \in \Omega$ dəyişənlərinin $X(t, \omega)$ funksiyası anlaşılır, bu funksiya t -nin hər bir qeyd olunmuş qiymətlərində $\mathcal{A}$ – ölçülən funksiyadır [yeni t qeyd olunduqda $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətə çevrilən bir funksiya]. ω arqumentini qeyd etdikdə, yeni $\omega = \omega_0$, $X(t, \omega)$ funksiyasından T -də $X(t, \omega_0)$ ədədi funksiyası alınır, bu funksiya $X(t)$ T. f.-nin *realizasiyası* (və ya *seçimi funksiyası*) və ya t – zaman dəyişəni olarsa, T. f.-nin *trayektoriyası* adlanır; $\mathcal{A}$ σ – cəbri və $\mathbf{P}$ ölçüsü, bu halda, altçoxluqların σ – cəbrini və $x(t)$ realizasiyalarının $\mathbb{R}^T = \{x(t), t \in T\}$ funksional fəzasında bu σ – cəbrdə təyin olunmuş ehtimal ölçüsünü doğurur və bu ölçünün verilməsi ilə T. f.-nin verilməsinin ekvivalent olduğunu hesab etmək olar. T. f.-nin bütün mümkün $x(t)$ realizasiyalarının $\mathbb{R}^T$ funksional fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbrində təyin olunmuş ehtimal ölçüsü kimi verilməsinə ümumi şəkildə T. f.-nin verilməsinin ikideyişənli $X(t, \omega)$ funksiyası kimi xüsusi hal kimi baxmaq olar [burada ω – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasındandır], bu xüsusi hal

$\Omega = \mathbb{R}^T$ şərtinə müvafiq haldır, yeni elementar hadisələr (ilkini ehtimal fəzasının ω nöqtələri) evvelcedən $X(t)$ T. f.-nin $x(t)$ realizasiyaları ilə eyniləşdirilir; digər tərəfdən, hətta göstərmək olar ki, $\mathbb{R}^T$ -də ehtimal ölçüsünün göstərilməsi ilə T. f.-nin bu şəkildə verilməsi $X(t)$ T. f.-nin verilməsinin bütün digər qaydaları da gətirilir. Məsələn, uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında Kolmoqorovun fundamental teoreminə əsasən (bax, *Ehtimal fəzası*), (1) və (2) uzlaşma şərtlərini ödəyən bütün mümkün sonluölçülü $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ paylanma funksiyalarının toplusunun verilməsi $\{x(t) : x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \in B^n\}$ şəklində silindirik çoxluqların toplusunun doğurduğu $\mathbb{R}^T = \{x(t), t \in T\}$ funksional çoxluğunun altçoxluqlarının σ – cəbrində ehtimal ölçüsü təyin edir, burada n – ixtiyari tam müsbət ədəd, $B^n [x(t_1), \dots, x(t_n)]$ – vektorlarının n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari Borel çoxluğudur.

Əd.: bax, «Təsadüfi proses» meq-nə.

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; dar mənada xassə «случайная функция; свойство в узком смысле; narrow sense property of a random function» – $\zeta(t), t \in T$ təsadüfi funksiyasının xassəsidir, bu prosesin realizasiyalannın funksional fəzası ehtimal paylanmalarla ilə təyin olunaraq və ona yaxın, lakin geniş mənada bir qədər az məhdudiyyətlə, yalnız ilk iki tərtib moment funksiyaları – $M\zeta(t) = m(t)$ və $M\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ ilə təyin olunan xassəyə qarşı qoyulur.

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; geniş mənada xassə «случайная функция; свойство в широком смысле; wide sense property of a random function» – $\zeta(t), t \in T$ təsadüfi funksiyasının xassəsidir və $\zeta(t)$ ilk iki tərtib momentləri – $M\zeta(t) = m(t)$ və $M\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ funksiyaları ilə təyin olunan (yeni təsadüfi funksiyaların korelyasion nəzəriyyəsinə aid olan) ona yaxın xüsusi dar mənada, yəni $\zeta(t)$ kəmiyyətlərinin bütün çoxölçülü paylanmalarla ilə təyin olunan xassəyə qarşı qoyulur. Məs., $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin geniş mənada stasionarlığı və $\mathbb{R}^k$ -da təsadüfi $\zeta(t)$ meydanının geniş mənada bircinsliyi uyğun olaraq, $m(t+a) = m(t)$ və $B(t+s, s+a) = B(t, s)$ bərabərliklərinin ixtiyari həqiqi ədəd və ya a vektoru üçün ödənilməsidir; təsadüfi prosesin geniş mənada Markov xassəli olması – $t' \leq s < t, \zeta(t')$ vektorları üzərinə çəkilmiş H_ζ fəzasının altçoxluluğuna $\zeta(t)$ vektorunun proyeksiyası (bu barədə bax, *Korelyasion nəzəriyyə(s)*) təsadüfi funksiyaların $\zeta(t)$ -nin $\zeta(s)$ -ə proyeksiyası ilə üst-üstə düşür və s. Adətən, geniş mənada hər hansı xassəyə malik $\zeta(t)$ Gauss T. f.-ları dar mənada uyğun xassəyə malik olur; buna görə də, geniş mənada sinfi hər hansı xassəyə malik T. f.-lar sinfinin öyrənilməsi dar mənada uyğun xassəyə malik T. f.-lar sinfinin öyrənilməsi ilə sıx əlaqəlidir.

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; korelyasion nəzəriyyə «случайная функция; корреляционная теория; correlation theory of random function» – bax, *Korelyasion nəzəriyyə(s)* təsadüfi funksiyaların.

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; modeləşdirmə «случайная функция моделирование; generation/simulation of a random function» – bax, *Modeləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; spektral ayrılış «случайная функция; спектральное разложение; spectral decomposition/representation of a random function» – bax, *Spektral ayrılış.*

TƏSADÜFİ FUNKSIYA; spektral ölçü «случайная функция; спектральная мера; spectral measure of a random function» – bax, *Spektral ayrılış.*

994 TƏSADÜFİ

TƏSADÜFİ FUNKSIYA(sı) zamanın «случайная функция времени; random function of time» – *təsadüfi prosesin digər adıdır.*

TƏSADÜFİ HADİSƏ «случайное событие; random event» – hər hansı *stoxastik eksperimentin* mümkün nəticələrinin (elementar hadisələrinin) ixtiyari ele kombinasıyasıdır ki, onun baş verməsi müəyyən ehtimalla malikdir.

Misal 1. İki düzgün zərin bir dəfə atılması stoxastik eksperimentində mümkün ola bilən nəticələrdən hər birini (i, j) cütü ilə işarə etmək olar ki, i – «birinci» zərin üst üzündə düşən xallar sayı, j – «ikinci» zərin üst üzündə düşən xallar sayı olsun, $i, j = 1, 6$. Bu halda stoxastik eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(i, j): i, j = \overline{1, 6}\}$ kimi ifadə oluna bilər, (i, j) elementar hadisədir, «Düşən xallar cəmi 8-ə bərabərdir» – təsadüfi hadisədir və bu T. h. – $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ nəticələrinin kombinasıyasıdır, yəni bu hadisə A ilə işarə edilərsə, $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ çoxluğu olur.

Misal 2. İki nöqtənin $[0, 1]$ parçasına ixtiyari qaydada atılması stoxastik eksperimentində mümkün olan nəticələr çoxluğu, başqa sözlə elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kvadratı olacaqdır, x – birinci nöqtənin koordinatı, y – ikinci nöqtənin koordinatıdır. « x və y -i birləşdirən parçanın uzunluğu α -dan kiçikdir, $0 < \alpha < 1$ » hadisəsi – elementar hadisələr çoxluğu kimi – kvadratın bütün ele nöqtələrinin çoxluğudur ki, bunlar koordinat başlanğıcından keçən diaqonaldan $\alpha/\sqrt{2}$ -dən az məsafədə yerləşən nöqtələrdir.

Ümumi qəbul olunmuş ehtimal nəzəriyyəsi aksiomatikası (Kolmogorov aksiomatikası, bax, [1]) çərçivəsində ehtimal modelinin əsası *ehtimal fəzası* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüyüdür; burada Ω – elementar hadisələr fəzası, yəni stoxastik eksperimentin bütün mümkün olan yeganə mümkün, bir-birini inkar edən nəticələri çoxluğu, $\mathcal{A}$, – Ω -nın altçoxluluqlarından təşkil olunmuş σ -cəbr, P , – $\mathcal{A}$ sinfində təyin edilmiş ehtimal ölçüsüdür, təsadüfi hadisələr $\mathcal{A}$ sinfinə daxil olan çoxluqlardır (Ω -nın altçoxluluqları).

Yuxarıda verilən misal 1-də $\mathcal{A}$ sinfindəki müşahidə oluna bilən bütün hadisələrin sayı $2^{N(\Omega)}$ -ya bərabərdir, burada Ω , – 36 elementdən ibarət sonlu çoxluqdur. $\mathcal{A}$, – Ω -nın 2^{36} sayda bütün altçoxluluqlarının sinfidir (Ω və $\emptyset$ – yaqın hadisə və qeyri – mümkün hadisə də daxil olmaqla), hər bir $A \in \mathcal{A}$ üçün $P(A) = m/36$ -ya bərabərdir, m , – A T. h. üçün əlverişli elementar hadisələrin sayı, başqa sözlə, A -nın elementlərinin sayıdır. Misal 2-də Ω – tərifi vahid uzunluqlu kvadratın nöqtələri çoxluğudur, $\mathcal{A}$, – Ω -nın bütün Borel altçoxluluqları sinfi, P , – $\mathcal{A}$ -da adi Lebeq ölçüsüdür (sade fiqurlar üçün onların sahəsi ilə üst-üstə düşən).

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzası ilə bağlı hadisələr sinfi $\mathcal{A}$ simmetrik fərq $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ və kəsişmə $A \cap B$ əməllərinə görə vahidi Ω olan Bul halqasıdır, yəni Bul cəbridir $(A, B \in \mathcal{A})$. Bu Bul cəbrində təyin olunan $P(A)$ funksiyası

normanın bütün xassələrinə, lakin $P(A)=0$ bərabərliyinin $A=\emptyset$ hadisəsinə doğrudanmı xassə istisna olunmaqla, malikdir. Bu halda hadisələrin simmetrik fərqlərin ölçüsü P sıfıra bərabər olarsa, bu hadisələri ekvivalent hadisələr kimi qəbul edərək, A hadisələri əvəzinə $\tilde{A}$ ekvivalentlik siniflərinə baxaraq, $\tilde{A}$ siniflərinin normalanmış Bul cəbri $\mathcal{A}$ -nı almaq olur. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatikasına digər mümkün yanaşma, baxılan stoxastik eksperimentlə bağlı olaraq, ehtimal fəzası ilkin anlayış kimi götürülməyən, T. h.-lərin normalanmış Bul cəbrinə əsaslanır (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, 1917–47, М. – Л., 1948; [3] Колмогоров А. Н., в кн.: VI Zjazd Matematyków Polskich, Krakow (1948), 1950, p. 22–90; [4] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

TƏSADÜFİ XƏTƏ «случайная ошибка; random error» – sistematik xarakter daşımayan, müşahidə olunan kəmiyyətin orta qiymətindən sağa və ya sola yayınmalarla seçiyənlənən, ən diqqətli ixtiyari ölçmələrdə belə müxtəlif və naməlum səbəblər nəticəsində yaranan, aradan qaldırılması heç bir vaxtla mümkün olmayan *xetələrə* deyilir. Ehtimal nəzəriyyəsi baxımından bu xetələr riyazi gözlemlərinin sıfıra bərabər olması ilə seçiyəvidir. Əgər hər hansı a kəmiyyətinin ölçülmə nəticəsinə hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi baxılarsa, onda $X - a$ fərqlə eksperimentin xətası, $b = M(X - a)$ kəmiyyətinə sistematik xəta deyilir. $\delta = X - a - b$ təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi xəta adlanır. Aydın ki, $M\delta = 0$. Baxılan sxemdə xəta X -in müşahidəsi ölçülən a kəmiyyətinin özü, sistematik xəta b və T. x. δ -nin cəmi $- X = a + b + \delta$ şəklində ifadə olunur.

Bax, *Müşahidə xətası, Ən kiçik kvadratlar metodu, Xetələr nəzəriyyəsi, Sistematik xəta*.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR «случайный линейный оператор; random linear operator» – aşağıdakı kimi təyin olunan xətti operatorudur. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, X – həqiqi ədədlər üzərində separabel Hilbert fəzası, $L(X)$ – X -dən X -ə məhdud xətti operatorların fəzası ($A \in L(X)$ olduqda $\|A\| = \sup \|Ax\|$) olsun. Ω -dan $L(X)$ -ə $A(\omega)$ inikası bütün $x, y \in X$ ($A(\omega)x, y$) üçün $\mathcal{A}$ – ölçülən olarsa, məhdud təsadüfi xətti operator adlanır. Belə inikaslar çoxluğu məhdud T. x. o.-lar çoxluğu adlanır və $L(\Omega, X)$ ilə işarə olunur. Lakin belə obyekt bir çox konkret hallarda istifadə üçün olduqca «kasıb»dır: $L(\Omega, X)$ -də əlavə məhdudiyyətlər qoyulmadan, limite keçmə emelini aparmaq olmaz [məs., eht. $A_n(\omega) \in L(\Omega, X)$ ardıcılığı göstərmək olar ki, ixtiyari $x \in X$ üçün X – qiymətli $A_n(\omega)x$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığı ehtimala görə yığılır, lakin limit obyekt $L(\Omega, X)$ -ə «yerləşmir». Bununla əlaqədar olaraq, «ümumiləşmiş» (zəif və güclü) operatorlar çoxluqlarına baxmaq zərurəti yaranır.

$X(\Omega)$ – Ω -dan X -ə ölçülən funksiyalar çoxluğu olsun (X fəzasının Borel çoxluqlarının σ – cəbri ilə verildiyi fərz

olunur) və X -dən $X(\Omega)$ -ya $A(\omega)x$ inikasının aşağıdakı (s) şərtlərini ödədiyi fərz olunur:

1) $A(\omega)x$ – xətti inikasdır:

ixtiyari $x_1, x_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ üçün

$$P\{A(\omega)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(\omega)x_1 + \alpha_2 A(\omega)x_2\} = 1.$$

2) $A(\omega)x$ X -də ehtimala görə kəsilməzdir:

ixtiyari $\varepsilon > 0$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \rightarrow x$ üçün

$$\lim_{x_n \rightarrow x} P\{|A(\omega)x_n - A(\omega)x| > \varepsilon\} = 0.$$

Belə inikaslar güclü təsadüfi xətti operatorlar adlanır və bu operatorların çoxluğu $L_s(\Omega, X)$ ilə işarə olunur.

Ümumiləşmiş təsadüfi operatorların daha geniş sinfi zəif təsadüfi operatorlardır [bunların çoxluğu $L_w(\Omega, X)$ ilə işarə olunur].

$R(\Omega)$ – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu olsun. $X \times X$ -dən $R(\Omega)$ -ya $(A(\omega)x, y)$ inikası aşağıdakı (ω) şərtlərini ödəyirsə, $(A(\omega)x, y)$ zəif təsadüfi xətti operator adlanır; (ω) şərtləri aşağıdakılardır:

1') $(A(\omega)x, y)$ – xətti inikasdır:

ixtiyari $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ üçün

$$P\{A(\omega)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j (A(\omega)x_i, y_j)\} = 1.$$

2') $(A(\omega)x, y)$, $X \times X$ -də ehtimala görə kəsilməzdir:

ixtiyari $\varepsilon > 0$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $(x_n \rightarrow x)$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $(y_n \rightarrow y)$ üçün

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y}} P\{|(A(\omega)x_n, y_n) - (A(\omega)x, y)| > \varepsilon\} = 0.$$

İxtiyari məhdud T. x. o. $A(\omega)$ -ya güclü T. x. o. kimi baxmaq olar [$A(\omega)$ -nın X -dən olan elementlərə təsirinə baxmaq lazımdır].

İxtiyari güclü T. x. o. $A(\omega)x$ -ə isə zəif T. x. o. kimi baxmaq olar [$A(\omega)x$ skalyar hasilinə $y \in X$ elementləri kimi baxmaq lazımdır, yəni $(A(\omega)x, y)$ kimi], odur ki, yuxarıda qeyd olunan mənada $L(\Omega, X) \subset L_s(\Omega, X) \subset L_w(\Omega, X)$ münasibətləri doğrudur, həm də bu daxilolmaların hamısı ciddi.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные линейные операторы, К., 1978.

TƏSADÜFİ İNİKAS «случайное отображение; random mapping» – $X_n = \{1, \dots, n\}$ çoxluğunun özü-nə bütün birqiymətli inikasları çoxluğu Σ_n -in *təsadüfi elementi* σ -dır. Təpələri çoxluğu X_n olan, σ inikasında k təpəsi σ_k obrazı ilə qövslə birləşən Γ_n *təsadüfi qrafı* T. i.-ə uyğun qrafdır;

$k = 1, \dots, n$. Γ_n təsadüfi qrafının hər bir realizasiyasının bağlılıq komponenti yalnız bir kontura malikdir; konturlara aid olan təpələr tsiklik təpələr adlanır. $\Sigma \subseteq \Sigma_n$ -dən olan T. i. kimi, adətən, ehtimal σ T. i. anlaşılar ki, bu σ üçün $P\{\sigma = s\} = |\Sigma|^{-1}$ bərabərliyi ixtiyari $s \in \Sigma$ üçün ödənilir. $|\Sigma|$ – Σ -nin elementlərinin sayıdır. $\alpha_r(\Sigma)$ – r sayda təpəsi olan komponentlərin sayı, $\nu(\Sigma)$ – komponentlərin ümumi sayı, $\lambda(\Sigma)$ – Σ -dan olan T. i.-dəki tsiklik təpələrin sayıdır. Əgər Γ_n -də tsiklik təpələri birləşdirən qövslər götürülsə, onda Γ_n «meşəyə» çevrilir. $\mu_r(\Sigma)$ – meşədə yalnız r sayda təpəli «ağacların» sayı, $\tau(\Sigma)$ – bu meşənin ağaclarının maksimal hündürlüyünə bərabər inikasin hündürlüyü olsun. Σ_n -dən olan T. i.-lərin xarakteristikaları tam surətdə öyrənilmişdir. İxtiyari $N = 1, \dots, n$ tam qiyməti üçün

$$P\{\lambda(\Sigma_n) = N\} = N(n-1)/(n-N)! n^N$$

bərabərliyi doğrudur. Əgər $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda $z = N/\sqrt{n}$ -nin ixtiyari $0 < z \leq c < \infty$ şəkilli intervalda yerləşməsinə təmin edən bütün tam N qiymətləri üzrə, müntəzəm olaraq

$$\sqrt{n} P\{\lambda(\Sigma_n)/\sqrt{n} = z\} = ze^{z^2/2}(1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur.

Tsiklik təpələr Γ_n -də *təsadüfi əvəzetmə* təşkil edir. buna görə də, komponentlərin sayı $\nu(\Sigma_n)$, $n \rightarrow \infty$ olduqda, asimptotik olaraq, orta qiyməti və dispersiyası $\frac{1}{2} \ln n$ -ə bərabər olan normal qanunla paylanır. İxtiyari qeyd olunmuş $r = 0, 1, \dots$ qiymətində $\alpha_r(\Sigma_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması limitdə $\lambda_r = \frac{e^{-r}}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r^k}{k!}$ parametrlı Puasson paylanması olur. Əgər $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş $r = 0, 1, \dots$ qiymətində $z = k/(p_r \sqrt{n})$ -in ixtiyari $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$ şəkilli intervalda yerləşməsinə təmin edən bütün tam k qiymətləri üzrə, müntəzəm olaraq,

$$p_r \sqrt{n} P\{\mu_r(\Sigma_n)/(p_r \sqrt{n}) = z\} = ze^{-z^2/2}(1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $p_r = (r+1)^{r-1} e^{-r+1}/r!$. $n \rightarrow \infty$ olduqda, ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$P\left\{\frac{\tau(\Sigma_n)}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 x^2/2}$$

münasibəti doğrudur.

R – özündə 0 saxlamayan və $\{0, 1\}$ ilə üst-üstə düşməyən tam mənfi olmayan ədədlər çoxluğu olsun. $\Sigma_{n,R}$, X_n -in hər bir

elementinin proobrazlarının sayı R -dən qiymət alan, Σ_n -dən olan bütün inikaslarnı altıoxluğudur. Proobrazların sayına məhdudiyyətlər T. i.-in xassələrinin mühüm dəyişikliyinə səbəb olmur. Məs., B_r hər hansı sabit olarsa, $\tau(\Sigma_{n,R})/\sqrt{B_r/n}$ üçün limit paylanması $\tau(\Sigma_n)/\sqrt{n}$ -in limit paylanması ilə üst-üstə düşür.

Ümumi halda T. i.-də $1, \dots, n$ elementlərinə uyğun $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ σ – obrazları məhz $(X_n)^n$ -də ixtiyari birgə paylanması olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Σ_n -dən olan T. i. üçün $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunlar X_n -dən ixtiyari qiyməti eyni ehtimalla alırlar. $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda T. i. üçün bir sıra nəticələr alınmışdır, məs., belə T. i.-in qrafının yalnız bir komponentli olması ehtimalı üçün düstur alınmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Случайные отображения, М., 1984; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Степанов В. Е., «Теория вероятностей и ее примен.», 1969, т. 14, в. 1, с. 64–77; [4] Калугин И. Б., «Матем. заметки», 1983, т. 34, № 5, с. 757–71.

***TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT «случайная величина; random variable»** – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. T. k. və onun riyazi gözləməsi anlayışlarının rolunu ilk dəfə aydın surətdə P. L. Çebışev qiymətləndirmişdir (1867, bax, [1]). T. k. anlayışının ümumi funksiya anlayışının xüsusi halı olduğu faktı xeyli müddətdən sonra anlaşılmışdır. Ölçü nəzəriyyəsi əsasında ehtimal nəzəriyyəsinin əsasları tamamilə və hər bir artıq məhdudiyyətlər olmadan A. N. Kolmoqorov tərəfindən verilmişdir (1933, bax, [2]); bu şərhdən tamamilə aydın oldu ki, T. k. məhz hər hansı *ehtimal fəzasında* ölçülən funksiyadır. Bu faktı, hətta ehtimal nəzəriyyəsinin ilk şərhində belə, nəzərə almaq olduqca mühümdür. Dərslik ədəbiyyatında, bu nöqtəyi – nəzər, ardıcıl surətdə ilk dəfə V. Feller tərəfindən şərh olunmuşdur [burada (bax, [3]-ə ön söz) şərh, elementar hadisələr fəzası anlayışına görə olub, qeyd olunur ki, yalnız bu halda T. k. anlayışı haqqında təsəvvür dolğun və məzmunlu olur].

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası olsun. Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və x -in bütün həqiqi qiymətlərində

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (*)$$

şərtini ödəyən birqiymətli ixtiyari $\xi = \xi(\omega)$ həqiqi funksiyasına *təsadüfi kəmiyyət* deyilir. ξ hər hansı təsadüfi kəmiyyət və $\mathcal{A}_\xi$ ehtimal $A \subset \mathbb{R}^1$ çoxluqlarının sinfi olsun ki, bunlar üçün $\{\omega: \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$; onda $\mathcal{A}_\xi$ σ – cəbrdir.

Bu halda $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun bütün Borel altıoxluqlarının sinfi $\mathcal{B}_1$ hər halda $\mathcal{A}_\xi$ σ – cəbrinin tərkibində olacaqdır. $P_\xi(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}_1$ bərabərliyi ilə, $\mathcal{B}_1$ -də təyin olunan P_ξ ölçüsünə $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *ehtimal paylanması* deyilir. Bu ölçü $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanması funksiyasını* birqiymətli təyin edir, yəni

$$F_\xi(x) = P_\xi\{(-\infty, x)\} = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

funksiyası üzrə ξ -nin paylanma funksiyasını. $P\{\omega: \xi(\omega) \in A\}$, $A \in \mathcal{A}_\xi$ ehtimallarının qiymətləri (yeni P_ξ ehtimallarının $\mathcal{A}_\xi$ σ – cəbrinə davamı olan ölçünün

qiymətləri F_ξ paylanma funksiyasına görə, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur (belə birqiymətlik üçün kafi şərt – P ölçüsünün mükəmməl ölçü olmasıdır, bax, *Mükəmməl ölçü* və [4]). Bunu həmişə nəzərdə saxlamaq lazımdır (məs., T. k.-in paylanması onun *xarakteristik funksiyası* ilə birqiymətli təyin olunur kimi müddəanın isbatında).

T. k., yaxud T. k.-lər sisteminin doğurduğu təsadüfi hadisələr haqqında aşağıdakı teorem asanlıqla isbat olunur (bax, [6]):

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, $\xi(\omega)$ – bu fəzada təyin olunmuş T. k. olsun. Onda Ω çoxluğunun aşağıdakı altçoxluqlarından hər biri *təsadüfi kəmiyyətdir*, yəni

$$\{\omega: \xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) > x\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$

$$\text{ixtiyari } a < b \in \mathbb{R}^1$$

$$\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}, \quad \{\omega: a < \xi(\omega) \leq b\}.$$

Əgər $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lərdirsə, onda

$$\{\omega: \xi(\omega) < \eta(\omega)\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) > \eta(\omega)\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq \eta(\omega)\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

münasibətləri onu ifadə edir ki, « $\in$ » münasibəti ödənilir, sol tərəfdəki ifadələr doğrudur və bu çoxluqlar $\mathcal{A} \cap \sigma$ – cəbrindən olan təsadüfi hadisələrdir. Daha sonra,

$c \cdot \xi(\omega)$, $\xi(\omega) + c$, $|\xi(\omega)|$, $\xi(\omega) \pm \eta(\omega)$, $\xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$ və $P\{\omega: \eta(\omega) \neq 0\}$ olarsa, $\xi(\omega)/\eta(\omega)$ T. k.-lərdir (bax, [5]).

Əgər $\{\xi_n(\omega), n \geq 1\}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lər ardıcılığıdırsa,

$$\sup_n \xi_n(\omega), \inf_n \xi_n(\omega), \overline{\lim} \xi_n(\omega), \underline{\lim} \xi_n(\omega) - \text{T. k.-lərdir (bax, [6]).}$$

Əgər $f(x)$ $\mathbb{R}^m$ -də təyin olunmuş Borel funksiyası, $\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lərdirsə, onda $f(\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega))$ – T. k.-dir (bax, [5]).

Əgər ξ T. k. sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt müxtəlif $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətlərini, uyğun olaraq, $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ehtimalları ilə alırsa, $p_n = P\{\omega: \xi(\omega) = x_n\}$, onda onun paylanması *diskret paylanma* adlanır və bu ehtimal paylanması

$$P_\xi(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər elə $p_\xi(x)$ funksiyası varsa ki,

(ehtimal sıxlığı funksiyası), ixtiyari $B \subset \mathbb{R}^1$ intervalı üçün (ixtiyari Borel çoxluğu B üçün),

$$P_\xi(B) = \int_B p_\xi(x) dx$$

olsun, onda $\xi = \xi(\omega)$ T. k.-nin paylanması *kəsilməz* (və ya *mütləq kəsilməz*) *paylanma* adlanır. Adi riyazi analiz terminologiyasında, bu $P_\xi(\cdot)$ -nin $\mathbb{R}^1$ -də Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzliyidir.

Misal 1. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – düzgün metal pulun bir dəfə atılması eksperimentinə uyğun ehtimal fəzası olsun. Bu halda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, elementar hadisələr fəzası, $\mathcal{A} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \emptyset, \Omega\}$, – hadisələr cəbri, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/2$ olur.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ -1, & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

funksiyası Ω -da təyin olunmuş funksiya olsun. Onda aydındır ki,

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq -1 \\ \{\omega_2\}, & -1 < x \leq 1 \\ \Omega, & x > 1 \end{cases}$$

olduğundan, ixtiyari $x \in (-\infty, \infty)$ üçün $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ münasibəti ödənilir, deməli, $\xi = \xi(\omega)$ T. k.-dir. Bu halda, $\xi = \xi(\omega)$ inikasının doğurduğu ehtimal fəzası $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}, P)$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$; $\mathcal{B} = \{(-\infty, 1]; (-1, 1]; (1, +\infty); (-1, +\infty); (-\infty, -1] \cup (1, +\infty); \mathbb{R}^1, \emptyset\}$; və ixtiyari $B \in \mathcal{B}$ Borel çoxluğu üçün

$$P(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}.$$

Aydındır ki, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur.

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1/2, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(Ətraflı tanışlıq üçün bax, [6]).

T. k.-in ehtimal paylanmasının bir sıra ümumi xassələri onun ədədi xarakteristikaları ilə tam mənasında təsvir olunur. Bu halda, *median* və *kvantil* kimi ədədi xarakteristikaların əlverişliliyi vardır ki, bunlar ixtiyari paylanmalar üçün hesablanılır, lakin bunlarla müqayisədə ən çox istifadə olunan *riyazi gözləmə* M^ξ və *dispersiya* D^ξ -dir. Bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* məq.-nə.

ξ kompleks T. k. –

$$\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$$

düsturu ilə, həqiqi ξ_1 və ξ_2 T. k.-lər cütü ilə təyin olunur. $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ və $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ – eyni $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal

fəzasında verilmiş T . k.-lərdir. Kompleksqiymətli $\xi = \xi(\omega)$ T . k.-nin riyazi gözləməsi ξ_1 və ξ_2 T . k.-lərinin riyazi gözləmələri $(M\xi = M(\xi_1 + i\xi_2) = M\xi_1 + iM\xi_2)$ düsturu ilə təyin olunur.

Nizamlanmış $(\xi_1, \dots, \xi_s)$ toplusuna qiymətləri $\mathbb{R}^s$ -dən olan təsadüfi vektor kimi baxmaq olar.

Sonsuz ölçülü hal üçün T . k. anlayışı *təsadüfi element* anlayışına ekvivalentdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, riyazi analiz bir sıra məsələlərinde və ədədlər nəzəriyyəsində istifadə olunan funksiyalara məqbul sayılan ehtimal fəzalarında təyin olunmuş T . k.-lər kimi baxmaq məqsəduyğun olur.

Əd.: [1] Чебышев П. Л., О средних величинах, в кн.: Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [5] Кач М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [6] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; çevirmə «случайная величина; преобразование; transformation of a random variables» – paylanma ehtimalları verilmiş xassələrə malik olan təsadüfi kəmiyyətlər funksiyalarının qurulmasıdır. Məs., X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası kəsilməz və ciddi artan $F(x)$ olsun, onda $Y = F(X)$ təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ -də müntəzəm qanunla, $Z = \Phi^{-1}(F(x))$ isə $(0, 1)$ parametrləri normal qanunla paylanır. Burada $\Phi(\cdot)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. Əksinə, $X = F^{-1}(\Phi(Z))$ düsturundan Z normal qanuna tabe olduğu halda, paylanma funksiyası verilən $F(x)$ olan X kəmiyyəti alınır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin çevirmələri riyazi statistikada yüksək dəqiqlikli sadə asimptotik düsturların qurulmasında bir əsas kimi istifadə olunur (bax, *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi*, *Yaxşılaşdırıcı çevirmə yığılması*, *Approksimasiyası, müəkkəb paylanmaların daha sadələşdirilməsi*).

Əd.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с.136–49; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT kəsik «случайной величина усеченная; truncated random variable» – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət*.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; modelləşdirmə «случайная величина; моделирование; generation / simulation of random variable» – bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyət və funksiyaların*.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT normalanmış «случайная величина нормированная; normed random variable» – bax, *Normalanmış təsadüfi kəmiyyət*.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; sərhədlərin qiymətləndirilməsi «случайная величина; оценивание границ estimation of bounds of random variable» – kəsilməz *təsadüfi kəmiyyətinin* müşahidə-

lər nəticəsində alınmış qiymətlərdən $H = \{X_i\}$, $i = 1, \dots, N$ təkrar seçimi üzrə yuxarı sərhədi olan (aşağı sərhəd analoji təyin olunur) $M = \text{vrai sup } X$ parametrinin statistik qiymətinin qurulmasıdır. Fərz olunur ki, M kəmiyyəti sonludur. $F(v) = 1 - F(M - 1/v)$, $v > 0$ funksiyası hər hansı α , $0 < \alpha < \infty$ göstəricisi ilə sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiyadır. Burada F , – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Göstərilən şərtlər ödənildikdə $(M - X_{(N)}) / (M - \theta_N)$ T . k.-lər

ardıcılığı paylanma funksiyası $\Phi_\alpha(t) = \exp\{-(-t)^\alpha\}$, $t < 0$ olan T . k.-ə, $N \rightarrow \infty$ olduqda zəif yığılır, bu halda $F(\theta_N) = 1 - N^{-1}$, $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(N)}$, – H seçiminə uyğun qaydalı statistiklardır. M parametrinin xətti statistik qiymətləri

$M_{N,k} = \sum_{i=0}^k a_i X_{(N-i)}$ -lərin sinfi daha çox yayılmışdır, bu halda

$N \rightarrow \infty$ olduqda $k^2/N \rightarrow 0$, $M_{N,k}$ statistik qiymətlərinin tutarlı

statistik qiymətlər olması üçün $\sum_{i=0}^k a_i = 1$ şərtinin ödənilməsi

zəruridir. $\hat{M}$ statistik qiymətinin keyfiyyəti $M(\hat{M} - M)^2$ kəmiyyəti ilə ölçülür. Asimptotik optimal xətti statistik qiymətlərin aşkar ifadələri məlumdur (bax, [1]). Bu statistik qiymətlər asimptotik normal və asimptotik effektivdir (onların asimptotik dispersiyası asimptotik normal bütün statistik qiymətlər çoxluğunda minimaldır).

Əd.: [1] Жигляевский А. А., Математическая теория глобального случайного поиска, Л., 1985, гл. 7.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT sonlu qrupda «случайная величина на конечной группе; random variable in a finite group» – təsadüfi kəmiyyət sonlu qrupdan qiymətlər aldığı halda təsadüfi kəmiyyət anlayışının ümumləşdirilməsidir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimal fəzası, $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ – sonlu qrup olsun. G -dən qiymətlər alan ixtiyari $\mathcal{A}$ – ölçülən $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ funksiyasına G qrupunda təsadüfi kəmiyyət deyilir. G -də ξ T . k.-nin paylanması $p_i = P\{\omega: \xi(\omega) = g_i\}$, $i = 1, \dots, s$ ehtimallar toplusu ilə verilir. G -də təyin olunmuş, iki paylanmadan biri müntəzəm olan (yəni $p_i = 1/s$, $i = 1, \dots, s$) paylanmaların kompozisiyası G -də müntəzəm paylanmadır. Limit teoremləri nəzəriyyəsində G -də paylanmaların kompozisiyası üçün müntəzəm paylanma T . k.-lərin cəmlənmə nəzəriyyəsində ədəd oxunda normal paylanmanın oynadığı rolunu ifadə edir. G -də təyin olunmuş paylanmaları həqiqi ədədlər meydanı üzərində qrup cəbri U -nun elementləri ilə eyniləşdirmək münasibdir (x_i , $i = 1, \dots, s$ həqiqi ədədlər olduğu halda U -nun elementləri bütün mümkün ola bilən $x_1 g_1 + \dots + x_s g_s$ xətti formalıdır); bu eyniləşdirmə aşağıdakı qayda üzrə aparılır: $P\{\xi = g_i\} = p_i$, $i = 1, \dots, s$ kimi verilən paylanmaya U -nun $p_1 g_1 + \dots + p_s g_s$ -ə bərabər elementi qarşı qoyulur. Bu halda G -də paylanmaların kompozisiyasına U -nun uyğun elementlərinin hasili uyğun olur (bax, [1]). G -də paylanmaların U -nun elementləri ilə ifadə olunmasından G -də paylanmaların kompo-

zisiyalannın yığılması üçün zəruri və kafi şərtləri müəyyən-
ləşdirdikdə istifadə olunmuşdur (bax, [2]. [3]).

G -də $T. k.$ üçün xarakteristik funksiya anlayışı daxil olun-
muşdur (bax, [4]). Bu anlayış aşağıdakı şəkildə verilir.

$M^{(r)}(g)$, $r = 1, \dots, t$, – G qrupunun unitar ayrılmayan bir-
birinə ekvivalent olmayan bütün ifadələri olsun; $M^{(r)}(g)$
ifadələrinin qiymətləri hər hansı $M^{(r)}(g_i)$, $i = 1, \dots, s$ matrisləri
olacaqdır (bax, [5]). G -də ξ $T. k.$ -nin xarakteristik
funksiyası t sayda

$$\sum_{i=1}^s M^{(r)}(g_i) p_i, \quad r = 1, \dots, t \quad (*)$$

matrislərinin toplusu kimi anlaşıdır. Əgər G Abel qrupudursa,
onda (*)-da $t = s$, $M^{(r)}(g)$, – G -nin modulu 1-ə bərabər
kompleks ədədlərin multiplikativ qrupuna homomorf inikasıdır.
Məs., s modulu üzrə çıxıqların $Z_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ qrupu
üzrə

$$M^{(r)}(g_{j+1}) = M^{(r)}(j) = \exp(2\pi i \frac{jr}{m}),$$

$$j = 0, \dots, s-1, \quad r = 1, \dots, s.$$

(*) xarakteristik funksiya ədəd oxunda $T. k.$ -in xarakteristik
funksiyasının bir çox xassələrinə malikdir, bu xüsusiyyət, G -də
paylanmaların kompozisiyasının araşdırılmasında onu istifadə
etməyə imkan yaradır (bax, [6]. [7]).

G -də ξ $T. k.$ üçün ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları-
ndan riyazi gözləmə və dispersiyanın daxil edilməsi aydın deyil-
dir. Belə ki, G -də ξ $T. k.$ üçün riyazi gözləmə və dispersiyanın
aksiomatik qurulması ədəd oxunda riyazi gözləmə və disper-
siyanın əsas xassələrinə əsasən təyin olunur və bu halda bunları
özünəməxsus xüsusiyyətləri şərtləşdirilmir (bax, [2]. [8]).
Məs., $C_2 = \{e, g\}$ qrupunda (e – qrupun vahidi, $g^2 = e$)
paylanmış ξ $T. k.$ üçün $P\{\xi = e\} = p_1$, $P\{\xi = g\} = p_2$,
 $p_1 \neq p_2$ olduğu halda, $p_1 > p_2$ olduqda riyazi gözləmə e ,
 $p_1 < p_2$ olduqda isə g -yə bərabər olur. Qeyd etmək lazımdır ki,
 $G = \{e\}$ və G_2 qrupunun düzünə dərəcəsinə izomorf qruplar
riyazi gözləməsi olan sonlu qrupların yeganə sinifləridir, bu isə bu
anlayışın praktiki dəyərini azaldır.

Qruplarda təsadüfi proses, təsadüfi dolaşma kimi anlayışlar
haqqında (bunlar qrupda $T. k.$ anlayışı ilə sıx əlaqədirlər) bax,
[9] və [10].

Əd.: [1] Schwarz S., «Чехосл. матем. ж.», 1963, т. 13, с. 372–
426; [2] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.»,
1967, т. 12, в. 4, с. 678–97; [3] Максимов В. М.,
«Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 295–307;
[4] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.»,
1970, т. 15, в. 2, с. 228–42; [5] Максимов В. М., «Докл.
АН СССР», 1972, т. 203, № 3, с. 524–27; [6] Кэртис Ч., Рай-
нер И., Теория представлений конечных групп и ассоциа-
тивных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [7] Воробьев Н. Н.,
«Матем. сб.», 1954, т. 34, № 1, с. 89–126; [8] Kawada Y.,
Ito K., «Proc. Phys. Math. Soc. Japan», 1940, v. 22, p. 977–98;
[9] Bore W., «J. reine und angew. Math.», 1959, Bd 201, № 3–4,
S. 150–56; [10] Takacs L., «Acta Sci. Math.», 1983, v. 45, № 1–4,
p. 395–408.

**TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT, GƏLƏCƏKDƏN ASILI
OLMAYAN «случайная величина не завися-
щая от будущего; random variable independing
of future»** – bax, *Təsadüfi zaman anı*.

***TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR** limite görə sabit
«случайные величины предельно постоян-
ные; limitly constant random variables» – bax,
Böyük ədədlər qanunu.

TƏSADÜFİ KƏSİK(γi) çoxüzlünün «случай-
ное сечение многогранника; random section of
a polyhedron» – çoxüzlünü təsadüfi müstəvi ilə kəsme
neticesində alınan çoxüzlüdür. Təsadüfi müstəvinin paylanması
əksər hallarda hərəkətlər qrupuna nəzərən invariant olan
müstəvilər ölçüsünün daralmasına münasib götürülür. $T. k.$ riyazi
strategiyada istifadə olunur.

Kombinator integral həndəsədə rahat hesablama düsturları
alınmışdır; $T. k.$ -in bucaqların sayı n -in paylanmaları $\{p_n\}$ ikiüzlü
bucaqların açılan (rus. *растворы углов*) və tillərin və diaqonalla-
rın uzunluğu ilə ifadə olunur. Hündürlüyü h -a, perimetri H -a
bərabər, oturacağı N bucaqlı olan düzgün prizmalar üçün

$$Mn = 4 + (N - 4) \frac{k}{h + H/2}.$$

Düzbucaqlı paralelepipedlər sinfində

$$Mn = 4, \quad p_4 > p_3 > p_5 > p_6$$

olduğu alınmışdır, kub üçün p_3 , p_5 , p_6 ehtimalları maksimum,
 p_4 isə minimum qiymətlərini alır.

**TƏSADÜFİ KODLA(N)MA «случайное коди-
рование; random coding»** – *kodlama* metodlarından
birdir, mənbənin hasil etdiyi məlumatların hər bir mümkün qi-
ymətinə, rabitə kanalının girişində, signalın ixtiyari təsadüfi seçilmiş
qiyməti qarşı qoyulur. Bu halda mümkün kodlar çoxluğunda
(kanalın girişində signalın qiymətlər toplusunda) hər hansı
ehtimal paylanması (kodlar ansambli adlandırıl-
ırları) verilir. Əksər hallarda fərz olunur ki, kodun hər bir elementi
(yəni məlumatın verilən qiymətinə uyğun olan girişdəki signalın
qiyməti) digərlərindən asılı olmadan və verilən ehtimal pay-
lanmalarına uyğun olaraq seçilir. $T. k.$ bəzən e təyin edilir ki,
 $T. k.$ -nin hər bir realizasiyası xətti kod olsun (bax, *Block kod*).

$T. k.$ -ya baxılmanın mühümlüyü onunla bağlıdır ki, *səhv dekod-
lama ehtimalının* bütün realizasiyalar üzrə orta qiyməti optimal
kodun *səhv dekodlama ehtimalı* üçün araşdırılan yuxarı sərhədi
nisbətən asan tapmağa imkan verir (bax, *Təsadüfi kodla(n)ma:
sərhəd*). $T. k.$ *mənbələr və kanallar şəbəkələrinin* kodlan-
ması üçün də istifadə edilir və çoxkomponentli kanalların ötürü-
cülük qabiliyyəti oblastının hesablanmasında əsas metod hesab
olunur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь,
пер. с англ., М., 1974; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем.
наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Колесник В. Д., Пол-
тырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1985; [4] Чи-
сар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985;
[5] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике,
пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

**TƏSADÜFİ KODLA(N)MA; sərhəd «случай-
ное кодирование; граница; bound of random
coding»** – yaddaşsız kanal üzrə məlumatların ötürülməsində

səhv dekodlama ehtimalı üçün yuxarı sərhəddir. Fərz olunur ki, giriş əlifbası Y , çıxış əlifbası $\tilde{Y}$ olan, keçid ehtimalları $p(\tilde{y}|y)$ -lər çoxluğu ilə diskret stasionar yaddaşsız kanal üçün təsadüfi kodlama eksponentinin göstəricisi $E_r(R)$, $R \geq 0$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$E_r(R) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} \max_q [E_0(\rho, q) - \rho R], \quad (*)$$

burada $q = \{q(y), y \in Y\}$, $-Y$ -də ixtiyari ehtimallar paylanmasıdır. $E_0(\rho, q)$ – Gallager funksiyası adlanan, aşağıdakı düsturla ifadə olunan funksiyadır:

$$E_0(\rho, q) = -\ln \sum_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \left[\sum_{y \in Y} q(y) (p(\tilde{y}|y))^{1/(1+\rho)} \right]^{1+\rho}.$$

Onda səhv dekodlama ehtimalının orta qiyməti sürəti R -ə bərabər, N uzunluqlu optimal blok kodunun köməyi ilə verilən kanalla ötürülmədə yuxarıdan qiymətləndirilir (təsadüfi kodlama sərhədinə malikdir): $P_e^{\text{opt}} \leq \exp\{-NE_r(R)\}$.

T. k. sərhədinə verilmiş kanalın etibarlılıq funksiyası $E(R)$ üçün aşağı sərhəd kimi interpretasiya etmək olar: $E(R) \geq E_r(R)$.

Məlumdur ki, əgər bütün keçid ehtimalları $p(\tilde{y}|y)$ -lər müsbət olarsa, onda (*) düsturu ilə təyin olunan $E_r(R)$ funksiyası müsbət, $\cup$ qabarıq, $0 \leq R < C$ olduqda monoton azalan funksiyadır. Əgər bəzi $\tilde{y}, y$ cütləri üçün $p(\tilde{y}|y) = 0$ olarsa, onda ola bilər ki, $C_0 > 0$ var ki (səhv sıfıra bərabər olduqda kanalın ötürücülük qabiliyyəti adlanan), $0 \leq R < C_0$ olduqda $E_r(R) = \infty$ olsun.

R_{cr} , $-R$ -in ən kiçik qiyməti olsun; R_{cr} üçün qabarıq $E_r(R)$ əyrisinə dayaq xəttinin meyli bucağının tangensinin -1 -ə bərabər olduğu fərz olunur (R_{cr} kritik sürət adlanır). Onda $R_{\text{cr}} \leq R < C$ olduqda $E_r(R) = E_{\text{sp}}(R)$ bərabərliyi doğrudur, burada E_{sp} – kürevi qablaşdırma göstəricisidir (bax, Sıx yerləşmə sərhədi) və o, E_r -in yuxarı sərhəddir. Beləliklə, $R_{\text{cr}} \leq R < C$ olduqda $E(R)$ -in dəqiq qiyməti məlumdur, yeni optimal səhv dekodlama ehtimalı P_e^{opt} üçün baş hədlərdə üst-üstə düşən asimptotik yuxarı və aşağı sərhədlər məlumdur.

T. k. sərhədinin digər formaları da vardır (bax, [1]). T. k. sərhədinin dəqiqləşdirilməsi haqqında bax, [2].

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

TƏSADÜFİ KOMPAKT ÇOXLUQ «случайное компактное множество; compact random set» – bax, Təsadüfi çoxluq.

TƏSADÜFİ KÜKRƏNTİ(si) dinamik sistemin «случайное возмущение динамической системы: random perturbation of a dynamical system» – dinamik sistemin bu və digər təsadüfi prosesin (adətən, orta qiyməti sıfır olan) təsirindən yaranan kükrəntisidir, məs.,

bəyaz küynün təsirilə. Dinamik sistemlərin kiçik T. k.-ləri 20-ci əsrin 30-cu illərində öyrənilməyə başlanılmışdır. Sonsuz parçada və ya kükrəntilər azaldıqca sonsuz artan zaman parçasında kükrəntiyə məruz qalmış sistemin evolyusiyası ilə bağlı məsələlərdən əsasları: invariant ölçünün asimptotikası haqqında, kükrəntisiz sistemin trayektoriyalarının çıxmıdığı oblastdan çıxış yeri və müddətinin limit paylanması və s. haqqında məsələlərdir. Bu halda ən sadə, lakin mühüm nəticə ondan ibarətdir ki, kükrəntilər azaldıqca kükrəntiyə məruz qalmış sistemin invariant ölçüsünün limiti kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin invariant ölçüsüdür. Bu halın xarakteristikalarını öyrənmək üçün kükrəntiyə məruz qalmış sistemin kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin trayektoriyalarından zamanın sonlu parçalarında böyük yayınmalarının ehtimallarının asimptotikası mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Kiçik bəyaz küylü $x(t) = b(x(t))$ dinamik sistemlərinin zaman üzrə bircins T. k.-lərinin sxemi daha çox öyrənilmişdir, bu sistemlər kiçik ε parametrimə mütənasib diffuziyaya malik diffuzion proseslərə gətirir, yuxarıda şərh olunan məsələlər yüksək tərtib törəmələri

$$\sum_i b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

münasibətilə ifadə olunduqda kiçik parametrlə 2-ci tərtib operatorla bağlı olan elliptik və parabolik terminlərlə təbii olaraq ifadə olunur.

Kükrəntiyə məruz qalmış sistemin trayektoriyası $x^\varepsilon(t)$ -nin, kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin trayektoriyası $x(t)$ -dən $[T_1, T_2]$ sonlu parçasında böyük yayınmalarının ehtimalları hərəkət funksionalı adlandırılır

$$\varepsilon^{-1} S(\varphi) = \varepsilon^{-1} S_{T_1, T_2}(\varphi)$$

funksional ilə xarakterizə olunur, burada

$$S_{T_1, T_2}(\varphi) = S_{T_1}^{T_2} \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(t)) (\varphi^i(t)) - b^i(\varphi(t)) (\varphi^j(t)) - b^j(\varphi(t))$$

(a_{ij} matrisi a^{ij} -yə tərs matrisdir). Daha dəqiq: $x^\varepsilon(t)$ -nin $[T_1, T_2]$ parçasında $\varphi(t)$ funksiyasına ε -nün kiçik qiymətlərində yaxın olması ehtimalı, təqribi olaraq, $\exp\{-\varepsilon^{-1} S_{T_1, T_2}(\varphi)\}$ -yə bərabərdir (bu halda $x_{T_1}^\varepsilon = \varphi_{T_2}$ olduğu fərz olunur). Kiçik ε -lu $x^\varepsilon(t)$ prosesinin zamanın böyük parçalarında qalması üçün dinamik sistemin verildiyi fəzanın nöqtələri arasında ekvivalentlik münasibətinin olması mühümdür: əgər ($S(\varphi)$ və $S(\psi)$ -nin ən kiçik qiymətləri olması şərtlə) x -i y ilə və y -i x ilə birləşdirən φ və ψ funksiyaları varsa (yeni $\varphi_0 = x$, $\varphi_{T_1} = y$, $\psi_0 = y$, $\psi_{T_2} = x$), onda $x \sim y$. Əgər bir-birinə ekvivalent nöqtələrdən ibarət və kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin bütün ω limit nöqtələrini də özündə saxlayan sonlu sayda K_i kompaktları varsa, kükrəntiyə məruz qalmış sistem zamanın böyük parçalarında, müəyyən mənada, ε parametridən asılı və keçid ehtimalları $\exp\{-\varepsilon^{-1} V_{ij}\}$ tərtib sonlu Markov zəncirinə oxşardır, burada V_{ij} , $-i$ -ci kompaktı j -ci kompaktla birləşdirən funksiyalar üzrə S funksionalının aşağı sərhəddir. «Ümumi vəziyyət» halında bu

$\varepsilon \downarrow 0$ olduqda invariant ölçünün hansı K_i kompaktında toplanacağını göstərməyə və kükrəntiyə məruz qalmış sistemin trayektoriyalarının oblastdan çıxması ilə bağlı məsələləri həll etməyə imkan yaradır (bax, [2]). Əgər limit kompaktında kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin normalanmış invariant ölçüsü birdən çoxdursa, onda kükrəntiyə məruz qalmış sistemin invariant ölçüsünün bunlardan hansına yığılması haqqında sual doğur. Bu sual, xüsusilə də, o halda maraqlıdır ki, kükrəntiyə məruz qalmamış sistem güclü qarışma xassələrinə malik olur və özü-özünə «stoxastik» olması ilə xarakterizə olunur. Bu halda invariant ölçünün limitinə aid nəticələr (diskret zamanlı dinamik sistemlər üçün) [3]-də əks olunmuşdur, son zamanlarda isə kəsilməz zaman sxemi üçün bu növ nəticələr alınmışdır.

Digər – kiçik kükrəntilər sxemi – parametrdən asılı olmayan, lakin zaman keçdikcə azalan kükrəntilər sxemində stoxastik approssimasiya prosedurlarına əlavələrlə [4]-də baxılmışdır.

Əd.: [1] Понтягин Л., Андронов А., Витт А., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1933, т. 3, № 3, с. 165–80; [2] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [3] Кифер Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, т. 38, № 5, с. 1091–115; [4] Коростелев А. П., Стохастические рекуррентные процедуры. Локальные свойства, М., 1984.

TƏSADÜFİ KVADRATUR DÜSTUR « случайная квадратурная формула; random quadrature formula » –

$$\int f(x) \mu(dx) \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

şəklində düsturdur, burada kvadratur cəmin düyünləri və çəkiliəri hər hansı kvadratur cəmlər çoxluğu K -də təyin olunmuş ehtimal ölçüsünə uyğun olaraq K çoxluğundan təsadüfi seçilir. Bir qayda olaraq, bu halda kvadratur cəm inteqralın n üzrə meylsiz və ya asimptotik meylsiz statistik qiymətidir. T. k. d.-lardan təsadüfi düyünləri *kvadratur düsturları* daha çox yayılmışdır.

Əd.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

TƏSADÜFİ QABARIQ ÇOXLUQ « случайное выпуклое множество; random convex set » – bax, Təsadüfi çoxluq.

TƏSADÜFİ QRAF « случайный граф; random graph » – qrafların hər hansı çoxluğu $\mathcal{G}$ -nin *təsadüfi elementidir*. $\mathcal{G}$ -dən olan qrafların seçiyəvi əlamətləri onların «T. q» adına da əlavə olunur. Belə qraflara misal istiqamətlənmiş, istiqamətlənməmiş, zirvələri bir-birindən fərqlənən və fərqlənməyən təsadüfi ağaclar, təsadüfi meşələr və s. kimi adlandırılmış T. q.-lardır. Əgər $\mathcal{G}$ sonlu sinif olarsa və $\mathcal{G}$ -nin bütün qraflarına eyni bir ehtimal qarşı qoyulmuşdursa, bu halda qraf bərabər-ehtimallı T. q. adlanır. n sayda fərqlənən zirvəli və N sayda ilgeksiz və paralel tilləri bərabər-ehtimallı $\mathcal{G}_{n,N}$ T. q. hər birinə

$$\left(\frac{n}{2} \right)^{-1} \frac{1}{N}$$

çoxluğu ilə təyin olunur.

T. q.-ların mühüm T. q.-lar tipi verilən $G=(V, E)$ qrafından onun bəzi tillərinin təsadüfən, asılı olmayaraq xaric olunması ilə alınan qraflardır, bu xaric olunma aşağıdakı kimi aparılır: $e \in E$ tili $q(e)$ ehtimalı ilə G -dən xaric olunur, $p(e)=1-q(e)$

ehtimalı ilə orda qalır. Əgər $G=K_n$ tam n – zirvəli qrafdırsa və $p(e) \equiv p$ olarsa, onda uyğun T. q. $\mathcal{G}_{n,p}$ ilə işarə olunur.

T. q.-lar nəzəriyyəsinin əsas məsələsi T. q.-ın quruluşunu xarakterizə edən təsadüfi kəmiyyətlərin – əlaqə komponentlərinin sayı, diametrin, xromatik ədədin və s.-nin paylanmalarının öyrənilməsi, həmçinin xüsusi bir hal kimi T. q.-ın bu və ya digər xassəyə malik olması ehtimalının tapılmasıdır. Bərabər-ehtimallı T. q.-lar üçün bu məsələlər bu və ya digər tip qrafların sayının hesablanması haqqında kombinatorikanın uyğun məsələləri ilə eynigüclüdür. T. q.-lar nəzəriyyəsinin fərqləndirən cəhət uyğun təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmaları haqqında, seçiyəvi parametrlər (məs., zirvələr sayının) sonsuzluğu yaxınlaşdığı halda məsələnin qoyuluşu və həllidir. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-larının quruluşu ən tam şəkildə araşdırılmışdır.

$\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-larının quruluşu əsas etibarilə $\mathcal{G}_{n,N}$ üçün $t=2N/n$ parametri ilə və ya $\mathcal{G}_{n,p}$ üçün $t=(n-1)p$ parametri ilə təyin olunur. Ümumi hallarda t T. q.-ın ixtiyari zirvəsinin qüvvət üstünün orta qiyməti kimi interpretasiya olunur. t «zaman» kimi interpretasiya olunduqda, n -in dəyişməz, t -nin isə artması şərtlərində $\mathcal{G}_{n,N}$ T. q.-nın quruluşunun dəyişməsinə bu qrafların zaman üzrə evolyusiyası kimi interpretasiya etmək olar. $t \rightarrow \infty$ olduqda $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-ları eyni bir t anında əsas etibarilə asimptotik olaraq eyni quruluşlu olur. T. q.-ın hər hansı xassəyə malik olması haqqında bütün müddəalar $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-larının evolyusiyasının aşağıdakı təsvirində uyğun hadisənin ehtimallarının $n \rightarrow \infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşması kimi anlaşılmalıdır.

$0 < t < 1$ olduqda T. q.-ın bütün komponentlərinin tsikli birdən artıq olmur; komponent – ağacların sayı orta qiyməti $\sim n(1-t/2)$ olan asimptotik normal qanunla, bir tsikli komponentlərin sayı parametri $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-t} - t - t^2/2$ olan Puasson qanunu ilə paylanır; maksimal komponentdə zirvələrin sayının tertibi $\sim (t - \ln t - 1)^{-1} \ln n$ -dir.

$1 < t < \infty$ olduqda T. q.-da yeganə «nəhəng» komponent əmələ gəlir ki, onun zirvələri sayı orta qiyməti $\sim n(1-\theta/t)$ olan asimptotik normal qanunla paylanır. Burada $\theta = \theta(t e^{-t})$ və

$$\theta(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} w^k, \quad w = z e^{-z}$$

yanın baş hissəsidir. «Nəhəng» komponentdən fərqli komponentin maksimal ölçüsünün tertibi $\sim (\theta - \ln \theta - 1)^{-1} \ln n$ -dir və belə komponentlərin hamısı ya ağaclarıdır, ya da ki, bir tsikli komponentlərdir; komponent – ağacların sayı orta qiyməti $\sim n\theta(1-\theta/2)/t$ olan asimptotik normal qanunla paylanır, bir

$$\text{tsikli komponentlərin sayı isə parametri } \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\theta} - \theta - \frac{\theta^2}{2}$$

olan Puasson qanunu ilə paylanır. Yuxarıda qeyd olunan normal paylanmaların dispersiyalarının tertibi n -ə bərabərdir, lakin $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-ları üçün bu dispersiyalar müxtəlifdir.

$t=1$ olduqda $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-nı xarakterizə edən bir sıra təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmalarının parametrləri $t=1$ olduqda ∞ -a çevrilir, bu isə bu T. q.-lann t -dən 1 qiymətinə keçində quruluşundakı xüsusiyyətlərdən irəli gəlir (bax. [3]).

T. q.-lann əlaqəlilik ehtimalı (rus. вероятность связности) da öyrənilmişdir. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-lari üçün $t = \ln n + x$, $x = O(1)$, $n \rightarrow \infty$ olduqda əlaqəlilik ehtimalı

$$P_{\text{əl}} = \exp(-e^{-x})(1 + o(1))$$

düsturu ilə təyin olunur. İxtiyari $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q. üçün ixtiyari $p = 1 - q$ qiymətində

$$P_{\text{əl}} \leq (1 - q^{n-1})^{n-1}$$

bərabərsizliyi ödənilir, $n \rightarrow \infty$ və $q^n \leq c < 1$ olduqda isə bu ehtimal

$$P_{\text{əl}} = (1 - q^n + q^n \ln q^n)(1 - q^n)^{n-1}(1 + o(1))$$

düsturu ilə təyin olunur. Əgər $t = (\ln n + r \ln \ln n) \rightarrow \infty$ olarsa, T. q. til və zirvə əlaqəli $(r+1)$ - əlaqəli qrafdır. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-lari evolyusiyasının daha gec anlarda qurulması haqqında [4]-ə bax.

Əd.: [1] Erdős P., Rényi A., «Magyar tud. Akad. Mat. Kutató intez. közl.», 1960, v. 5, № 1-2, p. 17-61; [2] Степанов В. Е., «Теория вероятностей и ее примен.», 1972, т. 17, в. 2, с. 238-52; [3] Боллобас В., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1984, v. 286, № 1, p. 257-74; [4] Коршунов А. Д., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 107-73.

TƏSADÜFİ QRAF; əlaqəlilik ehtimalı «случайный граф; вероятность связности; probability of connectedness of a random graph» - bax, *Təsadüfi qraf*.

TƏSADÜFİ MATRİS «случайная матрица; random matrix» - m sətir və n sütundan ibarət

$$\Xi = \left\| \xi_{ij} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \xi_{11} \dots \xi_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ \xi_{m1} \dots \xi_{mn} \end{array} \right\|$$

düzbucaqlı cədvəlidir. ξ_{ij} - hər hansı K çoxluğundan qiymətlər alan *təsadüfi elementlərdir*. Əgər $m = n$ olarsa, onda Ξ , - n tərtib kvadrat T. m. adlanır. Ən mühüm hallarda K çoxluğu heqiqi ədədlər meydanı, kompleks ədədlər meydanı, çoxhədlilər halqası, kvaternionlar cismi ola bilər. T. m. anlayışı çoxölçülü statistik analizdə və statistik fizikada meydana gəlmişdir.

(X, B) , - n - tərtib Ξ kvadrat T. m.-lərinin ölçülən fəzası, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ - ehtimal fəzası olsun. Ξ T. m.-nin paylanması X çoxluğundan qiymətlər alan $\mathbf{P}\{\omega: \Xi(\omega) \in R \subset B\} = \mu(R)$ ölçüsünə deyilir. Əgər X matrislərin kompakt qrupudursa və $\mu(R)$ X qrupunda normalanmış Haar ölçüsüdürsə, onda Ξ matrisi Haar ölçüsü μ üzrə paylanmışdır və invariant paylanmaya malikdir, deyilir. Əgər X -də

elə ν ehtimal ölçüsü varsa ki, $q(X)$ X -də ölçülən mənfi olmayan funksiya olduqda

$$\mu(R) = \int_R q(X) \nu(dx)$$

bütün $R \in B$ üçün mövcud olsun, onda $q(X)$ - Ξ T. m.-nin μ paylanmasının ν ölçüsünə nəzərən sıxlığı adlanır. T. m.-lərin əsas tipləri: *Qauss təsadüfi matrisi, qeyri - simmetrik təsadüfi matris, ortoqonal təsadüfi matris, simmetrik təsadüfi matris, universal təsadüfi matrisdir*. T. m.-in ən çox öyrənilən funksiyaları: təsadüfi determinant, məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar, ters matrisdir.

T. m. əsas etibarilə çoxölçülü statistik analizdə tətbiq olunur, burada

$$\hat{R} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})^T, \quad \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

empirik kovariasion matrisləri öyrənilir, x_k , - m - ölçülü ξ vektoru üzərində müşahidələrdir. Əgər ξ vektoru $N(a, R)$ normal qanunu ilə paylanmış olarsa, $\hat{R}$ matrisinin paylanması Uışart paylanması adlanır. T. m.-lərin paylanmalarının dim. - ölçüləri böyük olduğu hallarda bu paylanmalar da olduqca böyük şəkildə ifadə olunur, bu halda T. m.-lər üçün onların tərtibi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda *limit teoremləri* böyük maraq doğrudur.

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980; [3] Дайсон Ф., Статистическая теория энергетических уровней сложных систем, пер. с англ., М., 1963; [4] Mehta M. L., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. - L., 1967.

TƏSADÜFİ MATRİS(i) Hermit «случайная матрица эрмитова; Hermit random matrix» - bax, *Hermit təsadüfi matrisi*.

TƏSADÜFİ MATRİS(i) Gauss «случайная матрица гауссовская; Gaussian random matrix» - bax, *Qauss təsadüfi matrisi*.

TƏSADÜFİ MATRİS qeyri-simmetrik «случайная матрица несимметричная; non-symmetric random matrix» - bax, *Qeyri - simmetrik təsadüfi matris*.

TƏSADÜFİ MATRİS; limit teoremləri «случайная матрица; предельные теоремы; limit theorems for random matrix» - bax, *Limit teoremləri təsadüfi matrislər üçün*.

TƏSADÜFİ MATRİS ortoqonal «случайная матрица ортогональная; orthogonal random matrix» - bax, *Ortoqonal təsadüfi matris*.

TƏSADÜFİ MATRİS simmetrik «случайная матрица симметрическая; symmetric random matrix» - bax, *Simmetrik təsadüfi matris*.

TƏSADÜFİ MATRİS; спектрал funksiya «случайная матрица спектральная функция; spectral function of a random matrix» - bax, *Spektral funksiya(sı) təsadüfi matrisin*.

TƏSADÜFİ MATRİS unitar «случайная матрица унитарная; unitary random matrix» - bax, *Unitar təsadüfi matris*.

TƏSADÜFİ MEŞƏ « случайный лес; random forest » – meşələrin hər hansı F çoxluğunun təsadüfi elementidir, F -də müntəzəm paylanma qanununa tabedir, yeni F -dən ixtiyari qiyməti bərabər ehtimallarla alır. T . m.-nin ədədi xarakteristikaları təsadüfi kəmiyyətlərdir. $F_{n,N}$ – N sayda kök ağaclardan ibarət bütün meşələrin çoxluğu olsun; bu ağacların kökləri $1, \dots, N$ ədədləri, digər (köksüz) ağacların n sayda zirvələri $1, 2, \dots, n$ ədədləri ilə nişanlanmışdır. $F_{n,N}$ çoxluğun-

dakı meşələrin sayı $N(n+N)^{n-1}$ ədədinə bərabərdir. Belə meşələr sonlu çoxluğun özünə təsadüfi inikasının qrafına daxildir və bunların xassələrindən təsadüfi inikasların öyrənilməsində istifadə olunur. $F_{n,N}$ -dən olan T . m.-lərin ən təbii xarakteristikaları: köksüz zirvələrinin sayı yalnız r -ə bərabər ağacların sayı $\mu_r(F_{n,N})$; hündürlüyü t -yə bərabər olan zirvələrin sayı $\mu(t, F_{n,N})$ kimi xarakteristikalardır (zirvənin hündürlüyü zirvə ilə kökü birləşdirən yeganə yolu təşkil edən tillərin sayına bərabərdir), bu zaman meşənin hündürlüyü $\tau(F_{n,N}) = \max \{t: \mu(t, F_{n,N}) > 0\}$ bərabərliyi ilə təyin olunur; T . m.-nin ağacında kökü olmayan zirvələrin maksimal sayı $\eta(F_{n,N})$ -dir. Bu təsadüfi kəmiyyət üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda və n ilə N parametrləri arasında müxtəlif münasibətlərlə limit paylanmaları məlumdur. Məs., meşənin hündürlüyü $\tau(F_{n,N})$ üçün aşağıdakı müddəalar doğrudur. Əgər $n \rightarrow \infty$ və $n/N^2 \rightarrow \infty$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$P \{ \tau(F_{n,N}) / \sqrt{n} \leq x \} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2) e^{-k^2 x^2 / 2}$$

münasibəti doğrudur.

$N=1$ olduqda bu hökmdən təsadüfi ağacın hündürlüyünün limit paylanması alınır.

$n, N \rightarrow \infty$ olsun. Əgər bu halda $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş x üçün

$$P \left\{ \tau(F_{n,N}) \ln \left(1 + \frac{N}{n} \right) - \ln \frac{2N^2}{n} \leq x \right\} \rightarrow e^{-e^{-x}}$$

münasibəti doğrudur; əgər $n/N \rightarrow b$ olarsa və $t = t(n, N)$ tam ədədləri ele seçilsə ki, $N\lambda \rightarrow \beta$ ödənilsin (b, β müsbət sabitlərdir, $\lambda = n/(n+N)$), onda ixtiyari qeyd olunmuş m üçün

$$P \{ \tau(F_{n,N}) < t + m \} \rightarrow \exp \{ -\beta K(b/(1+b))^m \}$$

münasibəti doğrudur, burada K – hər hansı müsbət sabitdir; əgər $n/N \rightarrow 0$ olarsa və tam $t = t(n, N)$ ədədləri ele seçilsə ki, γ mənfə olmayan sabit, $\lambda = n/(n+N)$ olduqda $N\lambda' \rightarrow \infty$, $N\lambda'^{t+1} \rightarrow \gamma$ münasibətləri ödənilsin, onda

$$P \{ \tau(F_{n,N}) = t \} \rightarrow e^{-\gamma}, P \{ \tau(F_{n,N}) = t+1 \} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}$$

münasibətləri doğrudur.

Analoji nəticələr, qismən $F_{n,N}(R)$ çoxluğundan olan T . m.-lərin xarakteristikaları üçün alınmışdır. Bu $F_{n,N}(R)$ çoxluğu $F_{n,N}$ -dən olan bütün ağacları özündə saxlayır və bu ağacların zirvələrinin tam bölünmə sayı tam mənfə olmayan və sıfır özündə saxlayan $\mathbb{R}$ -dən qiymətlər alır. $F_{n,N}(R)$ -dən olan T . m. ilə N hissəcikdən başlayan şaxələnen proses arasında əlaqə vardır və bu əlaqə təsadüfi ağac ilə bir hissəcikdən başlayan şaxələnen proses arasındakı əlaqəyə analojiyə.

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Случайные отображения, М., 1984; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Павлов Ю. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 3, с. 449–57.

TƏSADÜFİ MEYDAN « случайное поле; random field » – çoxölçülü zamanlı və ya çoxölçülü parametrlili təsadüfi proses, – hər hansı çoxölçülü fəzanın nöqtələr çoxluğunda verilmiş təsadüfi funksiyadır. T . m. müxtəlif tətbiqlərdə tez-tez təsadüf olunan təsadüfi funksiyaların mühüm bir tipidir. Üç fəza koordinatı – x, y, z -dən (həm də zaman parametri t -dən) asılı T . m.-a komponentləri qaz və ya mayenin turbulent axınının sürəti, təzyiq və temperatur olan meydanları misal göstərmək olar (bax, [1]) və s.

Ümumi şəkildə T . m. nəzəriyyəsi faktiki olaraq təsadüfi funksiyaların ümumi nəzəriyyəsinə fərqlənir; daha məzmunlu konkret nəticələri yalnız əlavə xassələrə malik olan T . m.-lərin bir sıra xüsusi sinifləri üçün almaq olur; bu xassələr T . m.-lərin araşdırılmasını müəyyən qədər sadələşdirir. Belə mühüm siniflərdən biri çevirmələr qrupu G ilə verilən bircins S fəzasında verilmiş bircins təsadüfi meydanlar sinfidir; bu meydanlar belə xassələrə malikdirlər ki, S fəzasının nöqtələrinin ixtiyari sonlu qrupunda meydanın qiymətlərinin ehtimal paylanmaları və ya meydanın orta qiyməti və nöqtələr cütlerinde meydanın qiymətinin ikinci momentləri meydanın arqumentlərinə G qrupunun hər hansı çevirməsinin tətbiqi nəticəsində dəyişmir. $\mathbb{R}^k$, $k=2, 3, \dots$ Evklid fəzasında və ya $\mathbb{R}^k$ -nin tamqiymətli

koordinantlara malik nöqtələrinin $\mathbb{Z}^k$ şəbəkəsində bircins təsadüfi meydanlar (bu meydanlar G qrupu kimi bütün mümkün ola bilən (və ya bütün tamqiymətli) paralel köçürmələr çoxluğunun seçilməsinə uyğundur) stasionar təsadüfi proseslərin təbii ümumiləşməsidir və belə proseslər üçün isbat olunmuş nəticələrin ekseriyyəti bu ümumiləşmələr üçün də alınır.

Tətbiq üçün maraq doğuran təsadüfi meydanlar $\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{R}^3$ -də bircins və izotrop təsadüfi meydanlardır, bunlar uyğun fəzanın bütün mümkün olan izometrik çevirmələrinin çoxluğu G qrupunun seçilməsinə uyğun olur. Bircins T . m.-lərin mühüm xüsusiyyəti bu meydanların özlərinin və həm də korrelyasiyon funksiyalarının xüsusi şəkildə spektral ayrılıqlarının olmasıdır (bax, [3], [4]).

T . m.-lərin digər, çox diqqət cəlb edən sinfi $\mathbb{R}^k$ fəzasının hər hansı $\mathcal{X}$ oblastında verilən Markov təsadüfi meydanları sinfidir. $U(x)$ T . m. üçün Markov xassəsinə malik olma, bir qədər kobud deyimdə belə anlaşılır: sərhədi Γ olan açıq çoxluqların olduqca geniş çoxluğu Q üçün Γ sərhədinin ε – ətrafı Γ^ε -də U meydanının qiymətlərinin qeyd olunması ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\{U(x), x \in Q \setminus \Gamma^\varepsilon\}$ və $\{U(x), x \in T \setminus \Gamma^\varepsilon\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ailələrinin asılı olmamazlığını (və ya geniş mənada Markov xassəsinə malik olma halında qarşılıqlı qeyri – korrelyarlığını;

bax, məs., [5]) təyin edir, burada T , $-Q$ çoxluğunun qapayıcısının $\mathcal{H}$ -da tamamlayıcısıdır. Markov təsadüfi meydan anlayışının ümumiləşməsi L – Markov təsadüfi meydan anlayışdır ki, bu meydan üçün yuxarıda qeyd olunan asılı olmamazlıq (və ya qeyri – korrelyarlıq) yalnız Q oblastının Γ sərhədinin xüsusi şəkildə müəyyən qalınlaşdırılmış $\Gamma + L$ sərhəd ilə əvəz olunmasında mənə kəsb edir. Markov T. m.-ları və L – Markov təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin kvant meydanlarının fiziki nəzəriyyəsi və statistik fizikada bir sıra mühüm tətbiqləri vardır (bax, [6], [7]). T. m.-ların statistik fizika məsələlərində yaranan daha bir maraqlı sinfi *Gibbs təsadüfi meydanları* sinfidir ki, bu meydanların ehtimal paylanması Gibbs T. m.-larının verilməsi üçün münasib üsul – sonlu oblastda meydanın qiymətlərinin şərti ehtimal paylanmalarının toplusu vasitəsilə onların verilməsindən ibarətdir; bu şərti ehtimal paylanmaları bu sonlu oblastdan kənarda onun qeyd olunmuş bütün qiymətlərinə uyğun seçilmiş fərz olunur. S – hamar çoxoxobrazlısında T. m.-a ümumiləşmiş təsadüfi meydanın xüsusi halı kimi baxmaq, əksər hallarda, münasibdir, bu meydan üçün verilən bir nöqtədə onun qiymətləri olmaya bilər, lakin hamar əsas $\varphi(x)$ funksiyalarının hər hansı D fəzasında təyin olunmuş

təsadüfi xətti funksionallar olan hamar $U(\varphi)$ qiymətlərinin mənası vardır. Ümumiləşmiş T. m.-lar (xüsusilə də, ümumiləşmiş Markov T. m.) fiziki tətbiqlərdə geniş istifadə olunur, yalnız $\int \varphi(x) dx = 0$ şərtini ödəyən $\varphi(x)$ funksiyalarını götürərək ümumiləşmiş T. m. nəzəriyyəsində stasionar artımlı lokal bircins (və lokal bircins və lokal izotrop) təsadüfi proseslərə yaxın T. m.-ları asanlıqla təyin etmək olur, bunlar isə statistik turbulentlik nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır (bax, məs., [1], [9]).

Əd.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А., Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход), М., 1975; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ядренко М. И., Спектральная теория полей, К., 1980; [5] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [6] Саймон Б., Модель $P(\phi_2)$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [8] Малешиев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [9] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins «случайное поле однородное; homogeneous random field» – bax, *Bircins təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins artımlı «случайное поле с однородными приращениями; random field with homogeneous increments», lokal bircins təsadüfi meydan, – sonluölçülü $\mathbb{R}^n = \{s: s = (s_1, \dots, s_n)\}$ fəzasında verilmiş və aşağıdakı xassələri ödəyən

$$X(s) = \{X_1(s), \dots, X_k(s)\}$$

təsadüfi meydanıdır (ümumiyyətlə, çoxölçülü və kompleks): ya

$$1) X(s_2) - X(s_1), X(s_4) - X(s_3), \dots, X(s_{2m}) - X(s_{2m-1})$$

1004 TƏSADÜFİ

fərqlərinin ixtiyari toplusunun ehtimal paylanması $2m$ sayda $s_1, s_2, \dots, s_{2m}$ nöqtələrinin paralel köçürülməsində dəyişmir və ya

2) həm $X_i(s_2) - X_i(s_1)$, $i = 1, \dots, k$ və həm də $[X_i(s_2) - X_i(s_1)][X_j(s_4) - X_j(s_3)]$, $i, j = 1, \dots, k$ fərqlərinin hasillərinin riyazi gözləmələri s_1, s_2 nöqtələr cütlerinin və ya uyğun olaraq s_1, s_2, s_3, s_4 dördlülüklerinin ixtiyari paralel köçürülməsi nəticəsində dəyişmir. 1) halında $X(s)$ meydanı dar mənada bircins artımlı (və ya lokal) təsadüfi meydan, 2) halında isə analogi, lakin geniş mənada təsadüfi meydan adlanır.

Bircins artımlı T. m. anlayışı $n=1$ olduqda onun çevrildiği stasionar artımlı təsadüfi proses anlayışının ümumiləşməsidir. Bircins artımlı, geniş mənada T. m.-nın əsas statistik xarakteristikaları – meydanın komponentlərinin artımlarının orta qiymətləri

$$M[X_i(s+r) - X_i(s)] = m_i(r), \quad i = 1, \dots, k$$

və

$$M[X_i(s_1 + r_1) - X_i(s_1)][X_j(s_2 + r_2) - X_j(s_2)] = D_{ij}(s_1 - s_2; r_1, r_2), \quad i, j = 1, \dots, k$$

struktur funksiyalarıdır. Həqiqi birölçülü bircins artımlı $X_1(s)$ T. m. halında $D_{11}(s; r_1, r_2) = D(s; r_1, r_2)$ funksiyası, sadəcə olaraq, birdeyişənli $M[X_1(s+r) - X_1(s)]^2 = D(r)$ funksiyası vasitəsilə ifadə oluna bilər (bax, *Struktur funksiya*). Kvadratik orta mənada kəsilməz bircins artımlı T. m. üçün $m_i(r)$, $i = 1, \dots, k$ funksiyaları həmişə vektor argument r -in bircins xətti funksiyalarıdır, $X(s)$, $D_{ij}(s; r_1, r_2)$ və $D(r)$ funksiyaları isə özlərinin Furye – Stilyes integrallarını da daxil edən spektral ifadələri və $\mathbb{R}^n$ -də bircins T. m.-ların spektral ifadələrini və onların korrelyasion funksiyalarını ümumiləşdirən spektral ifadələri ilə verilə bilər (bax, [1] – [4]).

Əd.: [1] Яглом А. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Яглом А. М., Correlation theory of stationary and related random functions, v. 1–2, N. Y. – [a.o.], 1987.

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins və izotrop «случайное поле однородное и изотропное; homogeneous and isotropic random field» – bax, *Bircins və izotrop təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ MEYDAN; böyük ədədlər qanunu «случайное поле; закон больших чисел; law of large numbers for random field» – bax, *Большой закон случайных полей* təsadüfi meydanlar üçün.

TƏSADÜFİ MEYDAN harmonikləşən «случайное поле гармонизируемое; harmonizable random field» – bax, *Harmonikləşən təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ MEYDAN izotrop « случайное поле изотропное; isotrop random field » – bax, *izotrop təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ MEYDAN izotrop artımlı « случайное поле с изотропными приращениями; random field with isotropic increments », lokal izotrop meydan – $s = (s_1, \dots, s_n)$

nöqtələrinin, $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında verilmiş

$$X(s) = \{X_1(s), \dots, X_k(s)\}$$

təsadüfi meydan (ümumiyyətlə, çoxölçülü və kompleks olan) və bu meydan aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1) X(s_2) - X(s_1), X(s_4) - X(s_3), \dots, X(s_{2m}) - X(s_{2m-1})$$

fərqlərinin ixtiyari toplusunun ehtimal paylanması $\mathbb{R}^n$ fəzasının $s_1, s_2, \dots, s_{2m}$ nöqtələri çoxluğunun ixtiyari paralel köçürmə, fırlanma və ya güzgü əksətləməsi – g çevirməsi nəticəsində dəyişmir, bu halda g çevirməsi ona müvafiq $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin xətti U_g çevirməsi ilə müşayiət olunur, U_g – bütün mümkün izometrik g çevirmələrinin G qrupunun hər hansı k – ölçülü $\mathcal{W}$ təsvirində $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin g çevirməsinə müvafiq xətti çevirməsidir və ya

$$2) \text{ həm } X_i(s_2) - X_i(s_1), i = 1, \dots, k \text{ fərqlərinin və}$$

$$[X_i(s_2) - X_i(s_1)][\overline{X_j(s_4) - X_j(s_3)}]$$

həmçinin fərqlər hasilərinin riyazi gözləmələri, s_1, s_2 cütlərinin və uyğun olaraq, s_1, s_2, s_3, s_4 dördlülüklerinin $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin xətti U_g çevirməsilə müşayiət edilən birgə ixtiyari g çevirməsində dəyişmir. 1) halında $X(s)$ meydanı

$\mathbb{R}^n$ fəzasının g çevirmələri (məs., müəyyən rəngli tenzorlar və ya skalyarlar, vektorlar) nəticəsində $\mathcal{W}_G$ təsviri üzrə çevrilən X kəmiyyətlərinin dar mənada izotrop artımlı (və ya lokal izotrop) təsadüfi meydanı adlanır; onda X meydanı dar mənada izotrop artımlı tenzor və ya skalyar, vektor T. m. olacaqdır. 2) halında bu meydan analogi, lakin geniş mənada adlanır. İzotrop artımlı T. m. həmçinin, bircins və izotrop artımlı təsadüfi meydan (və ya da ki, lokal bircins və lokal izotrop təsadüfi meydan) da adlanır. Belə halda yuxarıda təyin edilmiş $G = \{g\}$ qrupu qeyd olunmuş O nöqtəsi ətrafında fırlanmaların daha dar qrupu ilə və O nöqtəsini özündə saxlayan müstəvilərə nəzərən əksətləmələr ilə əvəz olunmaqla təyin olunan meydan da bəzən izotrop artımlı meydan adlanır (bax, *izotrop təsadüfi meydan*).

İzotrop artımlı T. m. üçün $M[X_i(s_2) - X_i(s_1)]$ orta qiymətləri geniş şərtlərlə eynilik kimi sıfır bərabər olur; buna görə də, geniş mənada izotrop artımlı T. m.-nin mühüm statistik xarakteristikaları

$$M[X_i(s_1 + r_1) - X_i(s_1)][\overline{X_j(s_2 + r_2) - X_j(s_2)}] = D_{ij}(s_1 - s_2; r_1, r_2)$$

düsturu ilə ifadə olunan struktur funksiyalarıdır. İzotrop artımlı $X_1(s) - X_2(s)$ olan bircins (yəni skalyar) T. m. üçün $D_{11}(s; r_1, r_2) = D(s; r_1, r_2)$ funksiyası spektral ifadəsi

$$D(r) = \int_0^\infty (1 - \cos kr) d\Phi(k) + Ar^2 \quad (1)$$

ola bilsin, $M[X(s + r) - X(s)]^2 = D(r)$, $r = |r|$ skalyar arqumentinin funksiyası vasitəsilə ifadə oluna bilər, burada $A \geq 0$, $\Phi(k)$, –

$$\int_0^\infty \frac{k^2}{1+k^2} d\Phi(k) < \infty \quad (2)$$

şərtini ödəyən, $(0, \infty)$ yarımxunda azalmayan funksiyadır (bax, [1] – [4]). Geniş mənada izotrop artımlı vektor T. m.-nin struktur tenzoru –

$$D_{ij}(s; r_1, r_2) =$$

$$= M[X_i(s_1 + s + r_1) - X_i(s_1 + s)][X_j(s_1 + r_2) - X_j(s_2)]$$

funksiyası eyni r dəyişəninin iki mənfi olmayan, həm də (1)-ə yaxın olan spektral ifadəsi ola bilər, lakin (2) tipli şərti ödəyən iki azalmayan $\Phi_1(k)$ və $\Phi_2(k)$ funksiyalarını daxilinə alan funksiyalarla ifadə olunur. Mühüm xüsusi hallarda, $X(s)$ vektor meydanı ya solenoidal və ya potensial olduğu halda bu funksiyalardan biri eyniliklə sıfır çevrilir.

İzotrop artımlı T. m. ilk dəfə Kolmogorovun lokal izotrop turbuləntlik nəzəriyyəsində yaranmışdır ki, burada belə meydanlar (həm skalyar, həm də vektor) mühüm rol oynayır (bax, [5] və [2]-də 6.8-ci fəsillər).

Əd.: [1] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Гельфанд И. М., Вилленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Яглом А. М., Correlation theory of stationary and related random functions, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1987; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303 (Избр. тр. Математика и механика, М., 1984, с. 281–87).

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal bircins « случайное поле локально однородное; locally homogeneous random field » – bax, *Təsadüfi meydan bircins artımlı*.

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal izotrop « случайное поле локально изотропное; locally isotropic random field » – bax, *Təsadüfi meydan izotrop artımlı*.

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal kompakt qrupda « случайное поле на локально компактной группе; random field on a locally compact group » – arqumentləri lokal kompakt qrupda dəyişən *təsadüfi funksiyadır*. Lokal kompakt qrupda T. m.-lənən çox öyrənilmiş sinfi bircins meydanlardır. Əgər G qrupunun elementlərinin ixtiyari $g_1, \dots, g_n \in G$ toplularında ixtiyari $s \in G$ üçün bu elementlərin $g_i \rightarrow sg_i$ ($g_i \rightarrow g_i s$) sol (sağ)

yerindəyişmələrində meydanın qiymətlərinin paylanması dəyişmə, $X(g)$, $g \in G$ meydanı G qrupunda dar mənada sol (sağ) bircins T. m. adlanır; eger $M[X(g)]^2 < \infty$ və $X(g)$ meydanının orta qiyməti və ikinci momenti meydanın argumentlərinin bütün sol (sağ) yerindəyişmələrinə nəzərən invariant olarsa, $X(g)$ meydanı G qrupunda geniş mənada sol (sağ) bircins meydan adlanır.

1 tip separabel lokal kompakt G qrupunda $M.X(g)=0$ şərtini ödəyən sol bircins geniş mənada kvadratik orta mənada kəsilməz $X(g)$ meydanı və onun korrelyasion funksiyası $B_0 = M.X(sg)X(s)$ spektral ayrılıqla ifadə oluna bilinir, yəni

$$X(g) = \int_G \text{tr}[U_g(\lambda) Z(d\lambda)],$$

$$B(g) = \int_G \text{tr}[U_g(\lambda) F(d\lambda)],$$

burada $\hat{G}$, $-G$ qrupunun dual obyekt, $Z(d\lambda)$ və $F(d\lambda)$, $- \hat{G}$ -də Makki σ - cəbrində ele ölçülərdir ki, bunların qiymətləri, uyğun olaraq, təsadüfi və mənfi olmayan təsadüfi olmayan xətti operatorlardır və bu operatorlar $H(\lambda)$ Hilbert fəzalarında, G qrupunun kəsilməz ayrılmaz unitar $g \rightarrow U_g(\lambda)$ təsviri kimi təsir edir, belə ki, iz $\text{tr} F(\hat{G}) < \infty$ şərtini ödəyir və ixtiyari $x_1, x_2, y_1, y_2 \in H(\lambda)$ üçün

$$M(Z(\Delta_1)x_1, x_2)(\overline{Z(\Delta_2)y_1, y_2}) = \\ = (x_1, y_1)(F(\Delta_1 \cap \Delta_2)y_2, x_2)$$

münasibəti doğrudur (bax, [1]). Bircins geniş (dar) mənada $X(g)$, $g \in G$ meydanları üçün statistik individual erqodik teoremlər isbat olunmuşdur və bu teoremlər oxşar müddəaları stasionar təsadüfi proseslər üçün ümumiləşdirir (bax, [2], [3]).

Bircins geniş mənada meydanlara yaxın lokal kompakt qrupda T. m. sinifləri sanki bircins meydanlardır; ortalanmış spektrə malik meydanlar, həmçinin Abel qruplarında harmonikləşən meydanlar da belələrindəndir (bax, [4] - [6]). Lokal kompakt qruplarda ümumiləşmiş funksiyaların inkişaf etmiş nəzəriyyəsi lokal kompakt qrupda ümumiləşmiş T. m.-lərə baxmağa imkan yaradır (bax, [7]), bu meydanlar isə, uyğun qruplarda, əsas funksiyalar fəzalarında xətti kəsilməz təsadüfi funksionallardır (bax, [8]).

Əd.: [1] Yaglom A. M., в кн.: Proceeding of the 4-th Berkeley Symposium Mathematical Statistic and Probability, v. 2, Berk. - Los Ang., 1961, p. 593-622; [2] Темпельман А. А., «Литов. матем. сб.», 1962, т. 2, № 1, с. 195-233; [3] Темпельман А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1972, т. 26, с. 95-132; [4] Пономаренко А. И., «Докл. АН СССР», 1982, т. 262, № 6, с. 1316-18; [5] Vo-Khae Kboan A., «Bull. Soc. math. France», mémoire 6, 1966, p. 2-175; [6] Weron A., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1985, Bd 68, № 4, S. 473-91; [7] Maurin K., General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups, Warsz., 1968; [8] Пономаренко А. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1983, в. 29, с. 100-09.

TƏSADÜFİ MEYDAN nöqtəvi «случайное поле точечное; point random field» - Nöqtəvi təsadüfi meydan.

1006 TƏSADÜFİ

TƏSADÜFİ MEYDAN(1) Puasson «случайное поле пуассоновское; Poisson random field» - bax, Puasson təsadüfi meydan.

TƏSADÜFİ MEYDAN rəqulyar «случайное поле регулярное; regular random field» - bax, Rəqulyar təsadüfi meydan.

TƏSADÜFİ MEYDAN; statistik analiz «случайное поле; статистический анализ; statistical analysis of random field» - bax, Statistik analiz(i) təsadüfi meydanların.

TƏSADÜFİ MEYDAN şaxələnən «случайное поле ветвящееся; branching random field» - bax, Şaxələnən təsadüfi meydan.

TƏSADÜFİ MEYDAN ümumiləşmiş «случайное поле обобщенное; generalized random field» - bax, Ümumiləşmiş təsadüfi meydan.

TƏSADÜFİ MOZAIKA «случайная мозаика; random tessellation» - $\mathbb{R}^n$ -də çoxüzülülərin təsadüfi prosesi, onun realizasiyalarındakı çoxüzülülərin daxili hissələri vahid ehtimalla kəşisir və onların tamamlayıcılarının birləşməsi bütün $\mathbb{R}^n$ -i verir.

Misallar. 1) Hipermüstəvilərin proseslərinin doğurduğu - T. m. (mes., invariant ölçü ilə idareolunan Puasson prosesləri); 2) Voronoy mozaikalari (bax, [1]) T. m.-lərdir. Bu mozaikalar aşağıdakı qaydada qurulur: $\mathbb{R}^3$ -də ζ_i təsadüfi nöq-

təvi prosesi verilir; prosesin hər bir nöqtəsinə $\mathbb{R}^3$ -ün bütün ele nöqtələrinin çoxluğu qarşı qoyulur ki, bu nöqtələrdən həmin nöqtəyə qədər olan məsafə prosesin ixtiyari digər nöqtəsinə qədər olan məsafədən azdır (əksər hallarda, ζ_i bircins Puasson prosesi götürülür). T. m. ilə əlaqədar ehtimali məsələlər mozaikanın «tipik» çoxüzülüsünün təsviri ilə; onun təpələrinin, tillərinin və s.-nin sayının verilməsi və ya mozaikanın «tipik» düyünlərinin təsviri ilə verilir. Tam mənası ilə təsvirə yalnız nadir hallarda müyəsər olunur, əksərən bu kəmiyyətlərin momentlərini tapmaq olur.

Əd.: [1] Stochastic geometry, L., - [a. o.], 1974; [2] Stochastic geometry, geometric statistic, stereology, Lpz., 1984; [3] Санта-ло Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [4] «Acta Appl. Math.», 1987, v. 9, № 1-2.

TƏSADÜFİ NÖQTƏVİ PROSES «случайный точечный процесс; random point process» - bax, Nöqtəvi proses.

TƏSADÜFİ ÖLÇÜ «случайная мера, заряд; random measure», stokastik ölçü, təsadüfi yük, - çoxluqların additiv təsadüfi funksiyasıdır. X - hər hansı çoxluq, $\mathcal{B}$, - X -in altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ - cəbr olsun. Hər bir $B \in \mathcal{B}$ çoxluğu üçün təyin olunmuş, cüt-cüt kəşirməyən $B_n \in \mathcal{B}$ çoxluqlarının ixtiyari $\{B_n\}$ ardıcılığı üçün

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \quad (1)$$

xassəsini ödəyən $\mu(B)$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusuna $(X, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında təsadüfi ölçü deyilir.

T. ö.-lərin müxtəlif siniflərinə baxılarkən fərz olunur ki, (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıranın müxtəlif xarakterli yığılmalara ola bilər (ehtimala görə, kvadratik orta mənada, sanki

yaqın kimi yığılmalar). $\mu(B)$ üçün $+\infty$ və $-\infty$ simvolu kimi qiymətlər də nəzərdə tutulur. Bir çox tətbiqi məsələlərdə T. ö. təbii surətdə ifadə olunur; məs., $\mu(B)$, $-B$ sahəsində yetişdirilmiş məhsul. B oblastındakı mineral ehtiyatı, B oblastında yerləşən ulduzların sayı kimi interpretasiya oluna bilər.

$D_1, \dots, D_n$ – genişləndirilmiş düzxəldə ($+\infty$ və $-\infty$ simvolunun elavə olunması ilə kompaktlaşdırılmış) Borel çoxluqları olsun.

$$p(B_1, \dots, B_n; D_1, \dots, D_n) = \mathbf{P}\{\mu(B_1) \in D_1, \dots, \mu(B_n) \in D_n\} \quad (2)$$

ehtimallar toplusu μ T. ö.-nün ehtimal paylanması adlanır. μ T. ö. müəyyən təbii uzlaşma şərtlərini ödəyir (bax, [5], s. 396). Uzlaşma şərtlərini ödəyən hər bir sonluölçülü paylanma toplusu üzrə ehtimal T. ö. qurmaq olar ki, bu toplu ehtimal ölçüsü olur. T. ö.-lərin ən mühüm siniflərinə aşağıda baxılır.

Əgər $\mathcal{B}$ -nin ixtiyari cüt-cüt kəsişməyən $B_1, \dots, B_n$ çoxluqları üçün $\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, μ T. ö.-sü asılı olmayan qiymətlərli ölçü adlanır. Asılı olmayan qiymətlərli T. ö.-nün paylanma qanunu birölçülü $\mathbf{P}\{\mu(B) \in D\} = p(B, D)$ paylanmaları ilə birqiymətli təyin olunur.

Əgər $\mathcal{B}$ -nin ixtiyari $B_1, \dots, B_n$ çoxluqları toplusu üçün $\{\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)\}$ təsadüfi vektoru Qauss paylanmasına malik olarsa, μ T. ö. Q a u s s ölçüsü adlanır. μ Qauss T. ö.-nün ehtimal paylanması $m(B) = \mathbf{M}\mu(B)$ və $Q(B_1, B_2) = \mathbf{M}\mu(B_1)\mu(B_2)$ funksiyaları ilə təyin olunur. $m(B)$ funksiyası $\mathcal{B}$ -də ölçü, $Q(B_1, B_2)$ funksiyası $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ fəzasında müsbət müəyyən nüvə, $Q(B_1, B_2)$ B_1 (B_2) çoxluğu qeyd olunduğu halda $\mathcal{B}$ -də B_1 (B_2) üzrə ölçüdür.

Əgər $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n$ şərtini ödəyən $\mathcal{B}$ -nin altçoxluqları $B_1, \dots, B_n$ -lərin ixtiyari sonlu monoton ardıcılığı üçün $\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)$ təsadüfi kəmiyyətləri Markov zənciri təşkil edərsə, μ T. ö.-sü Markov ölçüsü adlanır.

Kompleksqiymətli μ T. ö. $\mathbf{M}\mu(B) = 0$, $\mathbf{M}|\mu(B)|^2 < +\infty$ şərtlərini ödəyərsə və əgər $\mathcal{B}$ -də ehtimal olmayan ədədi $F(\Delta)$ ölçüsü olarsa ki,

$$\mathbf{M}\mu(B_1)\overline{\mu(B_2)} = F(B_1 \cap B_2)$$

[bu xassə xüsusi halda onu ifadə edir ki, kəsişməyən B_1 və B_2 çoxluqları üçün $\mu(B_1)$ və $\mu(B_2)$ təsadüfi kəmiyyətləri ortoqonaldır] xassəsini ödəsə, onda μ T. ö.-sü ortoqonal qiymətlərli ölçü adlanır; $F(\Delta)$ struktur ölçü adlandırılır. Ortoqonal qiymətlərli T. ö. təsadüfi proseslər və meydanların spektral nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır (bax, *Spektral ayrılış*) (təsadüfi funksiyaların).

$X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$, $-\mathbb{R}^n$ -in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. Kompleksqiymətli μ T. ö.-sü üçün

$$a) \text{ bütün } B \in \mathcal{B} \text{ çoxluqları üçün } \mathbf{M}|\mu(B)|^2 < +\infty;$$

b) bütün $x = \mathbb{R}^n$ və bütün $A, B \in \mathcal{B}$ üçün

$\mathbf{M}(r_x B) = \mathbf{M}\mu(B)$, $\mathbf{M}\mu(r_x A)\mu(r_x B) = \mathbf{M}\mu(A)\mu(B)$ şərtləri ödənilərsə, μ təsadüfi ölçüsü bircins ölçü adlanır (burada $r_x A = \{y + x : y \in A\}$).

İxtiyari bımöqtəvi $\{x\}$ çoxluğu üçün $\mu(\{x\}) = 0$ olarsa, μ T. ö.-sü rəqulyar (səpələnmiş diffuz) ölçü adlanır.

T. ö.-yə aid mühüm misallar.

P u a s s o n təsadüfi ölçüsü ehtimal olmayan qiymətlərli tamqiymətli ehtimal T. ö.-dür ki, hər bir $B \in \mathcal{B}$ üçün $\mu(B)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $m(B)$ parametrlili Puasson paylanmasıdır, yəni

$$\mathbf{P}\{\mu(B) = k\} = \frac{m^k(B)}{k!} e^{-m(B)}. \quad (3)$$

Əgər asılı olmayan qiymətlərli tamqiymətli μ T. ö. üçün ehtimal $m(B)$ ədədi ölçüsü olarsa ki, o,

$$a) \lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{\mu(B) = 1\}}{m(B)} = 1;$$

$$b) \lim_{m(B) > 0} \frac{\mathbf{P}\{\mu(B) > 1\}}{m(B)} = 0$$

şərtlərini ödəmiş olsun, onda T. ö. hökmən Puasson T. ö.-dür (bax, [2]). a) və b) şərtlərini ödəyən Markov tamqiymətli T. ö.-ləri [2]-də verilmişdir.

$X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$, $-\mathbb{R}^n$ -in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $|\Delta|$, $-\Delta$ ($\Delta \in \mathcal{B}$) çoxluğunun Lebeq ölçüsü olsun.

$$\mathbf{M}\mu(B) = 0, \mathbf{M}\mu(B_1)\mu(B_2) = |B_1 \cap B_2|$$

şərtlərini ödəyən qiymətləri asılı olmayan μ Qauss T. ö.-ne $\mathcal{B}$ -də V i n e r təsadüfi ölçüsü deyilir.

X -də təsadüfi nöqtəvi prosesin verildiyi fərz olunur, yəni fərz olunur ki, X -ə təsadüfi x_i nöqtələri $i = 1, 2, \dots$, ixtiyari surətdə atılmışdır və hər bir nöqtəyə s bölünənliyi qarşı qoyulmuşdur.

$$\mu(B) = \sum_{x_i \in B} \Phi(\{x_i\})$$

T. ö.-ne nöqtəvi prosesin sayıcı ölçüsü deyilir (bax, [4], [8]).

ξ , $-X$ -də təsadüfi element, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\xi \in B)$, $-\xi$ -nin ehtimal paylanması, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – paylanmaları $\mathbf{P}(B)$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

$$\mu_n^*(B) = \frac{k_n(B)}{n}$$

ölçüsünə empirik təsadüfi ölçü deyilir, burada $k_n(B)$, $-B$ çoxluğuna aid olan ξ_i -lərin sayıdır. μ_n^* T. ö. Markov T. ö.-dür.

T. ö.-nün öyrənilməsində xarakteristik funksionallar aparatı mühüm rola malikdir.

$$C(f) = M \exp \left\{ i \int_X f(x) \mu(dx) \right\}$$

μ T. ö.-nün xarakteristik funksionalı adlanır, burada $f(x)$ – X -də həqiqi məhdud funksiya,

$\int_X f(x) \mu(dx)$, – μ T. ö.-sü üzrə stoxastik inteqraldır. μ

T. ö.-sünün ehtimal paylanmaları sadə funksiyalarda $C(f)$ -in qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunur (bax, [5]).

T. ö.-lərin ümumi nəzəriyyəsi A. Prekopenin və A. V. Skoroxodun işlərində öyrənilməyə başlanmışdır (bax, [1], [2]). Asılı olmayan qiymətli T. ö.-lər [2], [3], [8], [9]-də öyrənilmişdir; ən tam şərh [9]-də öz əksini tapmışdır. Markov ölçüsü A. V. Skoroxod tərəfindən [2]-də daxil olunmuşdur və burada regular Markov T. ö.-ləri və tamqiymətli Markov ölçülərinin bezi sinifləri də verilmişdir.

[4]-də T. ö. nəzəriyyəsi ilə təsadüfi nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsinin əlaqəsi verilmişdir (bax, [7], [8], [10]).

T. ö. nəzəriyyəsinin əsas müddəalarının sisteməti şərti [5]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Prekopa A., «Acta. math. Acad. sci. hung.», 1956, v. 7, p. 215–63; 1957, v. 8, p. 337–400; [2] Skoroxod A. V., «Вісник Київськ. ун-ту. Сер. астр. матем., механ.», 1958, № 1, в. 1, с. 105–14; [3] Kingman J., «Pacif. J. of Math.», 1967, v. 21, № 1, p. 59–78; [4] Беляев Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 333–37; [5] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [6] Thorntott M. L., «Stochastic processes and their appl.», 1979, v. 8, p. 323–34; [7] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [8] Kallenberg O., Random measures, 3 ed., В., 1983; [9] Skoroxod A. V., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [10] Karr A., Point processes and their statistical inference, N. Y. – Basel, 1986.

TƏSADÜFİ PARAMETR «случайный параметр; random parameter» – bax, *Faktor analiz*.

TƏSADÜFİ PLAN(ı) eksperimentin «случайный план эксперимента; random design of experiment» – bax, *Dispersion analiz*.

TƏSADÜFİ PLANLAŞDIRILMA «случайное планирование; random design» – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlerin planlaşdırılması*.

TƏSADÜFİ PROSES «случайный процесс; random / stochastic process». stoxastik proses, ehtimali proses, təsadüfi zaman funksiyası. – ümumi nöqtəyi – nəzərdən zaman etibarilə cərəyan edən və ehtimal qanunları ilə idarə olunan ixtiyari prosesdir. T. p.-ə tipik misal *Braun hərəkəti prosesidir*. Cərəyan gücünün nizamlanmamış fluktuasiyaları və gerginlik ilə (küylərlə) müşayiət olunan elektrik dövrəsində cərəyanın keçməsi prosesi; radiosiqnalların meteoroloji və ya digər əngəllər nəticəsində təsadüfi itməsi (feydinqlər) hallarında radiodalğaların yayılması, turbulentlik (yeni maye və ya qazın turbulent axını) T. p.-lərə aid olan praktiki mühüm misallardandır. T. p.-lərə təsadüfi fluktuasiyalarla müşayiət olunan bir çox istehsalat proseslərini, geofizikada təsadüf edilən sıra prosesləri (məs., yerin maqnit sahəsinin variasiyaları, mikroseymləri – Yer səthinin səviyyəsinin yüksəklikli nizamsız dəyişmələrini), biofizikada beynin elektroensefaloqramda qeyd olunan bioelektrik potensial-

ların dəyişikliklərini, iqtisadiyyat proseslərini misal göstərmək olar.

T. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsi araşdırılan sistemin ani vəziyyətinə faza fəzasının (vəziyyətlər fəzası) hər hansı bir nöqtəsi kimi baxır; bu zaman T. p. qiymətləri R -dən olan t zaman arqumentinin funksiyası $\zeta(t)$ (və ζ_t) kimi anlaşılar. Adətən,

R -in vektor fəzası olduğu fərz olunur, həm də, tətbiqi nöqtəyi – nəzərdən, ən mühüm hesab olunan, ən az sahəni əhatə edən hal – R -in nöqtələrinin bir və ya bir neçə ədədi parametrlərlə (sistemin ümumiləşmiş koordinatları ilə) verildiyi haldır, odur ki, T. p.-ə, sadəcə, ya təsadüfdən asılı olaraq müxtəlif qiymətlər alan zamanın ədədi funksiyası $\zeta(t)$ kimi, yeni müxtəlif $x(t)$ realizasiyaları ilə müşahidə olunan (birölçülü təsadüfi proses) funksiya kimi, yaxud uyğun $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_k(t)\}$ vektor funksiyası (çoxölçülü və ya vektor təsadüfi proses) kimi baxmaq olar. Çoxölçülü T. p.-lərin öyrənilməsinə birölçülü proseslərin öyrənilməsinə $\zeta(t)$ prosesindən

$$\zeta_a(t) = (\zeta(t), a) = \sum_{j=1}^k a_j \zeta_j(t)$$

– köməkçi prosesinə keçməklə gəlmək olur, burada $a = (a_1, \dots, a_k)$ – ixtiyari k – ölçülü vektordur; buna görə də, birölçülü $\zeta(t)$ proseslərinin araşdırılması T. p.-lər nəzəriyyəsinə mərkəzi yer tutur. t parametri, adətən, ya ixtiyari həqiqi qiymətlər və ya həqiqi $\mathbb{R}^1$ oxunun hər hansı intervalından qiymətlər (bu halda kəsilməz zamanlı təsadüfi proses anlaşılar) alır, lakin t yalnız tam qiymətlər də ala bilər ki, bu halda $\zeta(t)$ – diskret zamanlı təsadüfi proses (və ya təsadüfi ardıcılıq və ya zaman sırası) adlanır. $\zeta(t)$ T. p.-nin bütün mümkün realizasiyalarının sonsuzölçülü fəzasında ehtimal paylanmalarının verilməsi ehtimal nəzəriyyəsinin klassik metodları çərçivəsinə sığmır və buna görə də, xüsusi riyazi aparatın qəbul olunması tələb olunur. Ehtimali xarakter yalnız $\zeta(t) = \zeta(t, Y)$ funksiyasının tamamilə sonluölçülü $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ təsadüfi vektorundan asılılığı olan T. p.-lərin xüsusi sinifləri üçün istisna haldır; çünki, bu halda $\zeta(t)$ prosesinin bu və ya digər tərzdə cərəyan etməsi yalnız Y vektorunun sonluölçülü paylanmasından asılıdır. Belə T. p.-ə praktiki mühüm misal amplitudmodulyasiya olmuş harmonik rəqs – $\zeta(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$ prosesidir, burada ω – qeyd olunmuş ədəd, A və Φ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T. p. üçün ehtimal paylanmalarının geniş sinfi arqumentin qiymətlərinin bütün mümkün sonlu $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ altçoxluqlarına müvafiq $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorlarının bir-birilə uzlaşdırılmış sonluölçülü ehtimal paylanmalarının sonsuz çoxluqları (topluları) ilə xarakterizə oluna bilər (bax, *Təsadüfi funksiya*). Lakin bütün bu paylanmaların verilməsi belə, t -nin qiymətlərinin sonsuz fəzasında $\zeta(t)$ -nin qiymətlərindən asılı hadisələrin ehtimallarının təyin olunması üçün kifayət etmir, yeni $\zeta(t)$ T. p. birqiymətli təyin oluna bilər.

Misal. $\zeta(t) = \cos(\omega t + \Phi)$, $0 \leq t \leq 1$ – təsadüfi fəzası Φ olan harmonik rəqs, Z , – $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun; $\zeta_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, T. p. –

$$\zeta_1(t) = \begin{cases} \zeta(t), & t \neq Z \text{ olduqda,} \\ \zeta(t) + 3, & t = Z \text{ olduqda} \end{cases}$$

münasibətilə verilir. Qeyd olunmuş ixtiyari sonlu nöqtələr qrupu $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ üçün $\mathbf{P}\{Z = t_1 \text{ və ya } Z = t_2 \text{ və ya } \dots Z = t_n\}$ olduğundan, $\zeta(t)$ və $\zeta_1(t)$ T. p.-lərinin bütün sonluölçülülüyə paylanmaları eynidir. Lakin bununla belə, $\zeta(t)$ və $\zeta_1(t)$ prosesləri bir-birindən fərqlənir: məs., $\zeta(t)$ prosesinin bütün realizasiyaları kəsilməzdir (sinusoid formasına malikdir), amma $\zeta_1(t)$ -nin bütün realizasiyaları kəsilmə nöqtələrinə malikdir; $\zeta_1(t)$ -nin bütün realizasiyaları 1 ədədini aşmır. $\zeta_1(t)$ -nin heç bir realizasiyası bu xassəyə malik deyildir. Sonluölçülülük ehtimal paylanmalarının verilən sistemində T. p.-in müxtəlif uyğun modifikasiyaları ola bilər və yalnız sonluölçülülük paylanmalara əsaslanmaqla T. p.-in realizasiyasının kəsilməz olduğu ehtimalını, hər hansı qeyd olunmuş sabitlə məhdud olduğu ehtimalını müəyyən etmək olmur.

Lakin, əksər hallarda, sonluölçülülük ehtimal paylanmaları toplusunun verilməsi ilə bu sonluölçülülük paylanmalara malik realizasiyaları 1 ehtimalla kəsilməz funksiyalar olan (və ya, məs., differensiallanan və ya verilmiş sabitlə heç yerdə aşmayan) heç olmazsa bir təsadüfi prosesin varlığı və ya da ki, belə $\zeta(t)$ T. p.-lərinin mövcud olub-olmadığını müəyyən etmək olur. 1 ehtimalla realizasiyaları kəsilməz olan və verilmiş sonluölçülülük paylanmalara malik $\zeta(t)$ T. p.-nin varlığını təmin edən ümumi şərtə tipik misal, Kolmoqorov şərtidir: əgər $[a, b]$ intervalında təyin olunmuş $\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülülük paylanmaları üçün müəyyən $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $C < \infty$ və bütün kifayət qədər kiçik h qiymətlərində

$$\mathbf{M}|\zeta(t+h) - \zeta(t)|^\alpha < C|h|^{1+\delta} \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə (aydındır ki, yalnız $\zeta(t)$ -nin ikiölçülülük paylanmalarına məhdudiyyətlər qoyan), onda $\zeta(t)$ T. p. 1 ehtimalla kəsilməz realizasiyaları modifikasiyaya malikdir (bax, məs., [1] – [6]). $\zeta(t)$ -nin Gauss prosesi olduğu xüsusi halda, (1) şərti, müəyyən $\alpha_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, $C_1 < \infty$ qiymətlərində daha zəif

$$\mathbf{M}|\zeta(t+h) - \zeta(t)|^{\alpha_1} < C_1|h|^{\delta_1} \quad (2)$$

şərti ilə əvəz olunur: $\alpha_1 = 2$, $\delta_1 = 1$ olduqda (2) şərti ödənilir, məs., Viner prosesi və Ornşteyn – Ulenbek prosesi üçün. Sonluölçülülük ehtimal paylanmaları verildiyi halda ehtimal $\zeta(t)$ T. p. varsa ki, onun realizasiyaları 1 ehtimalla kəsilməz funksiyalardır (və ya, məs., differensiallandı və ya $|B|$ sabiti ilə məhdudurlar), onda bu prosesin digər modifikasiyalarına baxılmaz, lakin bununla belə $\zeta(t)$ T. p.-nin hər hansı daha ümumi requlyarlıq şərtlərini ödəməsi tələb olunur, bu da tətbiqi məsələlərdə praktik olaraq, yerinə yetirilən hesab olunur (bax, Separabel proses).

$\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülülük ehtimal paylanmalarının sonsuz çoxluğunu vermək əvəzinə,

$$\psi[l] = \mathbf{M} \exp\{il[\zeta(t)]\} \quad (3)$$

uyğun karakteristik funksionalının qiymətini göstərməklə də T. p. təyin etmək olur, burada $l[\zeta(t)]$, – $\zeta(t)$ -dən asılı xətti funk-

sionalların kifayət qədər geniş sinfində deyisir. Əgər $\zeta(t)$, $a \leq t \leq b$ ehtimala görə kəsilməz T. p.-dirsə [yeni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $h \rightarrow 0$ olduqda $\mathbf{P}\{|\zeta(t+h) - \zeta(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$], $g(t)$ isə $[a, b]$ -də məhdud variasiyalı funksiyadırsa, onda

$$\int_a^b \zeta(t) dg(t) = I^{(g)}[\zeta(t)]$$

təsadüfi kəmiyyət olacaqdır: bu zaman (3) düsturunda $I[\zeta] = I^{(g)}[\zeta]$ hesab etmək olar (belə ki, burada $\psi[I^{(g)}]$ -ni $\psi[g]$ simvolu ilə əvəz etmək məsləhətdir). Bir çox hallarda $I[\zeta]$ xətti funksionallarının baxılan sinfini daraltmaq mümkündür, buna görə yalnız

$$\int_a^b \zeta(t) \varphi(t) dt = I_\varphi[\zeta]$$

şəklində funksionallarla kifayətlənmək olur, burada $\varphi(t)$, – t -nin sonsuz differensiallanan finit funksiyasıdır ($[a, b]$ intervalı sonsuz da ola bilər). Geniş requlyarlıq şərtlərində $\psi[I_\varphi] = \psi[\varphi]$ qiymətləri $\zeta(t)$ T. p.-nin bütün sonluölçülülük ehtimal paylanmalarını birqiymətli təyin edir, çünki

$$\varphi(t) \rightarrow \theta_1 \delta(t - t_1) + \dots + \theta_n \delta(t - t_n)$$

olduqda,

$$\psi[\varphi] \rightarrow \psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

olur, burada $\psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, – $\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyasıdır [burada $\delta(t)$ – Dirak δ – funksiyasıdır, yığılma isə ümumiləşmiş funksiyaların yığılması mənasında anlaşılır]. Əgər belə limit yaxınlaşmasında $\psi[\varphi]$ funksionalı sonlu limitə yığılmırsa, deməli, qeyd olunmuş nöqtədə $\zeta(t)$ T. p.-nin sonlu qiymətləri mövcud deyildir və yalnız $I_\varphi[\zeta]$ – hamarlanmış qiymətlər mənasında anlaşılır, yeni $\psi[\varphi]$ xarakteristik funksionalı adi («klassik») $\zeta(t)$ prosesini deyil, $\zeta = \zeta(\varphi)$ ümumiləşmiş təsadüfi prosesini təyin edir.

$\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülülük ehtimal paylanmaları toplusunun verilməsi o hallarda olduqca sadələşir ki, bütün bu toplular yalnız bezi aşağı tərtib paylanmalarla birqiymətli təyin olunsun. Bütün çoxölçülülük paylanmaları $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birölçülülük paylanmaları ilə təyin oluna bilən T. p.-lərin mühüm sinfi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır (diskret zamanlı T. p.-lərin xüsusi bir sinfi olan). Olduqca xüsusi belə T. p.-lər klassik ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsində öyrənilə bilər, lakin mühüm cəhət odur ki, T. p.-lərin bezi mühüm sinifləri $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcılığının funksiyası şəklində də effektiv surətdə verilə bilər. Məs., olduqca maraqlı doğuran T. p.-lər –

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y_j(t-j) \quad \text{və ya} \quad \zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j),$$

prosesleridir, burada $t = 0, \pm 1, \dots$, (bax, *Sürüşən orta prosesi*) və

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j h_j(t), \quad a \leq t \leq b$$

prosesidir, burada $h_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, $- [a, b]$ intervalında funksiyanın verilmiş sistemidir (bax, *Karunən – Loev ayrılığı*).

T. p.-lərin aşağıdakı dörd sinfi olduqca mühüm siniflərdir (ilk üç sinif üçün bütün sonluölçülülük paylanmalar $\zeta(t)$ -nin qiymətlərinin birölçülülük paylanmaları və $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2)\}$ cütlerinin ikiölçülülük paylanmaları ilə təyin olunur).

1) *Asılı olmayan artımlı təsadüfi $\zeta(t)$ prosesləri sinfi*: bu halda $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ olduqda $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ və $\zeta(t_4) - \zeta(t_3)$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Burada $[a, b]$ parçasında $\zeta(t)$ T. p.-nin verilməsi üçün $\zeta(a)$ və $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun paylanma funksiyaları olan $F_a(x)$ və $\Phi_{t_2, t_1}(z)$ -dən istifadə etmək məqsədə uyğun olur; aydındır ki, $\Phi_{t_2, t_1}(z)$ funksiyası

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{t_2, t_1}(z - u) d\Phi_{t_2, t_1}(u) = \Phi_{t_2, t_1}(z), \quad (4)$$

$$a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$$

funksional tenliyini ödəməlidir. (4)-dən istifadə edərək göstərmək olar ki, əgər $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ehtimala görə kəsilməz prosesdirsə, onda onun xarakteristik funksionalı $\psi[g]$,

$$\psi[g] = \exp \left\{ i \int_a^b \gamma(t) dg(t) - \frac{1}{2} \int_a^b \beta(t) [g(b) - g(t)] dg(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \left[e^{iy[g(b) - g(t)]} - 1 - \frac{iy[g(b) - g(t)]}{1 + y^2} \right] \frac{1 + y^2}{y^2} dt \Pi_t(dy) \right\}$$

kimi ifadə oluna bilər, burada $\gamma(t)$ – kəsilməz funksiyadır, $\beta(t)$ ələ azalmayan kəsilməz funksiyadır ki, $\beta(a) \geq 0$ və $\Pi_t(dy) - \mathbb{R}^1$ -də azalmayan, t -yə görə kəsilməz ölçüdür və bütün bunlar asılı olmayan $\zeta(t)$ T. p.-ni təyin edir.

2) *$\zeta(t)$ Markov prosesləri sinfi*: bu proseslər üçün $t_1 < t_2$ olduqda $\zeta(t)$ prosesinin bütün qiymətlərinin $t_1 \leq t_2$ qiymətlərində verildiyi şərtinə nəzərən $\zeta(t_2)$ -nin şərti ehtimal paylanması, yalnız $\zeta(t_1)$ -dən asılı olur. $\zeta(t)$, $a \leq t \leq b$ Markov prosesinin verilməsi üçün $\zeta(a)$ -nin paylanma funksiyası $F_a(x)$ və $t_1 < t_2$ olduqda $\Phi_{t_2, t_1}(x, z)$ keçid funksiyasından istifadə etmək məqsədəuyğundur. $\Phi_{t_2, t_1}(x, z)$ $\zeta(t_1) = x$ şərtinə nəzərən $\{\zeta(t_2) < z\}$ hadisəsinin şərti ehtimalıdır.

1010 TƏSADÜFİ

$\Phi_{t_2, t_1}(x, z)$ funksiyası (4)-ə yaxın Kolmoqorov – Çepmen funksional tenliyini ödəməlidir, bu da bu funksiyayı təyin etmək üçün daha sadə olan Kolmoqorov düz və tərs tenliklərini müəyyən şərtlər daxilində almağa imkan verir.

3) *$\zeta(t)$ Qauss prosesləri sinfi*: bu proseslər üçün $\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorlarının bütün çoxölçülülük paylanmaları Qauss (normal) paylanmalarıdır. Normal qanunlar özlərinin birinci və ikinci momentləri birqiyəmetli təyin olunduğundan, $\zeta(t)$ Qauss prosesinin verilməsi üçün $M\zeta(t) = m(t)$ və $M\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ funksiyalarının qiymətlərini göstərmək kifayətdir, burada $B(t, s)$ ələ müsbət müəyyən nüvə olmalıdır ki, $b(t, s) = B(t, s) - m(t)m(s)$ funksiyası da müsbət müəyyən nüvə olsun. $\zeta(t)$, $a \leq t \leq b$ Qauss prosesinin xarakteristik funksionalı $\psi[g]$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\psi[g] = \exp \left\{ i \int_a^b m(t) dg(t) - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b b(t, s) dg(t) dg(s) \right\}.$$

4) T. p.-lərin mühüm siniflərindən biri də $\zeta(t)$ *stasionar təsadüfi proseslər* sinfidir ki, bu proseslərin statistik xarakteristikaları zaman üzrə dəyişmir, yəni bu proseslər $\zeta(t) \rightarrow \zeta(t + a)$ (a – ixtiyari qeyd olunmuş ədəddir) çevirməsinə nəzərən invariantdirlər. Ümumi stasionar $\zeta(t)$ T. p.-nin çoxölçülülük ehtimal paylanmaları sadə şəkildə təsvir oluna bilinmir, lakin belə proseslərlə əlaqədar olan bir çox məsələlər üçün yalnız $M\zeta(t) = m$ və $M\zeta(t + s)\zeta(t) = B(s)$ birinci və ikinci momentlərini bilmək kifayətdir [belə ki, burada yalnız geniş mənada stasionarlıq haqqında fərziyyə lazım olur, yəni $M\zeta(t)$ və $M\zeta(t + s)\zeta(t)$ momentlərinin t -dən asılı olmamalıdır fərziyyəsi]. Mühüm cəhət odur ki, ixtiyari stasionar (və ya heç olmasa geniş mənada stasionar) T. p.

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad (5)$$

spektral ayrılığı şəklində ifadə oluna bilər, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlı təsadüfi prosesdir; xüsusi halda buradan

$$B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} dF(\lambda) \quad (6)$$

olduğu alınır, $F(\lambda)$, $-\zeta(t)$ T. p.-nin monoton azalmayan spektral funksiyasıdır. (5) və (6) spektral ayrılıqlı stasionar təsadüfi proseslərin ən yaxşı (xətanın kvadrat orta mənasında) xətti ekstrapolyasiya, interpolasiya və filtrasiya məsələlərinin həllərinin əsasını təşkil edir.

T. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsi yuxarıda qeyd olunmuş T. p. siniflərinin altsinifləri sırasına aid bir çox nəticələri və əksinə, yuxarıda qeyd olunmuş T. p. siniflərinin ümumiləşmələrinə aid nəticələri də əhatə edir (məs., *Markov zəncirlərinə, diffuzion proseslərə, şəxələnən proseslərə*, hər hansı tərtibli stasionar artımlı *təsadüfi proseslərə, martinqallara* aid).

Əd.: [1] Случайный Е. Е., Избранные труды, М., 1960, с. 269–80; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию

случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1-3, М., 1971-75; [5] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [6] В е н т ц е л ь А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975; [7] Р о з а н о в Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979; [8] И т о К., Вероятностные процессы, пер. с япон., в. 1-2, М., 1960-63; [9] С к о р о х о д А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964; [10] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [11] И б р а г и м о в И. А., Р о з а н о в Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [12] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

TƏSADÜFİ PROSES; arifmetik modelleşdirmə «случайный процесс; арифметическое моделирование; arithmetic simulation of a random process» – bax, *Arifmetik modelleşdirilmə(si) təsadüfi prosesin.*

TƏSADÜFİ PROSES artan «случайный процесс» возрастающий; increasing random process» – bax, *Artan təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlı «случайный процесс с независимыми приращениями; random process with independent increments» – eht. $X(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, ixtiyari natural n və prosesin təyin olunma oblasından argumentin ixtiyari $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ qiymətlərində $X(t_0)$,

$X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ *təsadüfi kəmiyyətləri* asılı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlərdir*. Asılı olmayan artımlı T. p.-in faza fazası additiv qrup olmalıdır. Adətən, ədədi və ya vektor qiymətləri proseslərə baxılır. Prosesin sonluölçülü paylanmalarını vermək üçün onun birölçülü paylanmalarını, həm də prosesin artımlarının paylanmalarını vermək kifayətdir. Əgər $\varphi_t(z)$ $X(t)$ -nin xarakteristik funksiyası, $\psi_{s,t}(z)$, $s < t$ olduqda $X(t) - X(s)$ artımının xarakteristik funksiyasıdır, onda bu funksiyalar $\varphi_t(z) = \varphi_s(z) \psi_{s,t}(z)$ münasibətilə əlaqədirlər, $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ kəmiyyətlərinin birgə xarakteristik funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\begin{aligned} & \varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \\ & = \varphi_{t_0}(z_0 + z_1 + \dots + z_n) \psi_{t_0, t_1}(z_1 + \dots + z_n) \dots \psi_{t_{n-1}, t_n}(z_n). \quad (1) \end{aligned}$$

Levi ayrılığı. Faza fazası M – sonluölçülü Ekvilid fazası olsun. Onda asılı olmayan artımlı hər bir T. p.

$$X(t) = a(t) + X_1(t) + X_2(t)$$

aynılığı ilə ifadə oluna bilinir, burada $a(t)$ – *təsadüfi olmayan* funksiya, $X_1(t)$ – asılı olmayan artımlı diskret T. p., $X_2(t)$ – asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz T. p.-dir, bu proseslər bir-birilə asılı olmayan proseslərdir. Asılı olmayan artımlı diskret T. p. aşağıdakı kimi qurulur. Əgər T prosesin təyin olunma oblası, $\bar{T}$ onun qapanmasıdır, onda eht. $T_0 \subset \bar{T}$ hesabı altçoxluluğu və qiymətləri M -dən olan, küllüyyatca asılı olmayan kəmiyyətlərin toplusu $\{\xi_s^+, \xi_s^-, s \in T_0\}$ vardır ki,

$$X_1(t) = \sum_{s \in T} \xi_s^- + \sum_{s > t} \xi_s^+$$

(sağ tərəfdəki sıralar sanki yəqin yığılır və bu sıraların cəmləri onların cəmlənmə qaydasından asılı deyildir).

Asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz $X_2(t)$ prosesi üçün aşağıdakı funksiyalar mövcuddur: qiymətləri M -dən olan $a_1(t)$, M -dən M -ə təsir edən mənfii olmayan xətti operatorların fəzası $L_+(M)$ -dən qiymətlər alan $B(t)$ funksiyası, M -də sıfırda atomları olmayan sonlu Borel ölçülərinin fəzasında $\Pi_t(dx)$; prosesin artımının xarakteristik funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \psi_{s,t}(z) = & \exp \left\{ i(z, a_1(t) - a_1(s)) - \frac{1}{2}((B(t) - B(s))z, z) + \right. \\ & \left. + \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} [\Pi_t(dx) - \Pi_s(dx)] \right\}, \\ & s < t, \quad (2) \end{aligned}$$

bu halda $a_1(t)$, $B(t)$, $\Pi_t(\cdot)$ funksiyalar kəsilməzdir (Π – variasiya üzrə kəsilməzdir), $B(t)$ və $\Pi_t(\cdot)$ monoton azalmayan funksiyalardır. (2) düsturundan aydındır ki, asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz T. p.-in artımları sonsuz bölünən paylanmaya malikdir. $a_1(t)$ və $B(t)$ funksiyalar prosesin artımlarının paylanmaları üzrə birqiymətli təyin olunur.

Asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz T. p. üçün sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan modifikasiya həmişə mövcuddur. $\mathbb{R}_+$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan $X(t_-)$, asılı olmayan artımlı $X(t)$ T. p.-nin təyin olunma oblası olsun. $t \in \mathbb{R}_+$ üçün *təsadüfi ölçü*

$$\nu_t(A) = \sum_{s \leq t} I_A(X(s) - X(s_-))$$

olsun, burada A , $-M$ -in Borel çoxluğu; cəmlənmə $X(t)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri üzrə aparılır (bunlar hesabı çoxluğu aşmır). Bu ölçü prosesin sıçrayışlarının ölçüsüdür və o, aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $\nu_t(A)$ ölçüsü $O \in X$ nöqtəsindən müsbət məsafədə yerləşən bütün A -lar üçün sonludur;

2) $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \emptyset$ şərtini ödəyən ixtiyari $A_1, A_2, \dots, A_m$ çoxluqları üçün $\nu_t(A_1), \dots, \nu_t(A_m)$ *təsadüfi prosesləri* asılı olmayan proseslərdir;

3) əgər A çoxluğu O nöqtəsindən müsbət məsafədə yerləşərsə, onda $\nu_t(A)$ asılı olmayan artımlı prosesdir və $\nu_t(A)$ kəmiyyəti Puasson paylanması ilə paylanır və $G_t(A) = M \nu_t(A)$ funksiyası X -də A üzrə sonlu Borel ölçüsüdür və

$$G_t(A) = \int_A \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \Pi_t(dx),$$

burada $\Pi_t(A)$, – (2) düsturundakı ölçüdür;

$$4) X_d(t) = \int x \left[\nu_t(dx) - \frac{1}{1+|x|^2} G_t(dx) \right]$$

– asılı olmayan artımları T. p. təyin olunmuşdur (sağda stoxastik integral yazılmışdır), bu proses belə bir xassəyə malikdir ki, $X(t) - X_s(t) = X_c(t)$ – asılı olmayan artımları kəsilməz T. p.-dir, bu proses $X_s(t)$ -dən asılı deyildir. Asılı olmayan artımları ixtiyari kəsilməz T. p.-in artımlarının paylanması Gauss paylanmasıdır, buna görə də, belə $X_c(t)$ prosesi üçün $X_c(t) - X_c(0)$ artımının paylanması riyazi gözlemə və korrelyasion operatorla tamamilə təyin olunur. $X_c(t) = X(t) - X_s(t)$ prosesi üçün

$$\mathbf{M}(X_c(t) - X_c(0)) = a_1(t),$$

$z \in \mathbf{M}$ olduqda

$$\mathbf{M}(X_c(t) - X_c(0) - a_1(t), z)^2 = (B(t)z, z),$$

burada $a_1(t)$ və $B(t)$, –(2) düsturundakı funksiyalardır.

Asılı olmayan artımları T. p. kəsilmə nöqtələri arasında sabit olarsa, o, pilləvari təsadüfi proses adlanır; hər bir sonlu çoxluqda belə kəsilmə nöqtələrinin sayı sonludur. Əgər $X(t)$ asılı olmayan artımları pilləvari T. p.-dirsə, onda $X(0) = 0$. Bu prosesin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M} \exp \{ i(z, X(t)) \} = \exp \left\{ \int_0^t (e^{i(z,x)} - 1) G_t(dx) \right\}$$

berəbertiyi ilə təyin olunur, burada $G_t(\cdot)$, – M -də sonlu ölçüdür.

$M = \mathbb{R}_+$ olsun. Asılı olmayan artımları $X(t)$ T. p.-nin ($X(0) = 0$) azalmayan modifikasiyasının olması üçün onun xarakteristik funksiyasının

$$\mathbf{M} \exp \{ iz, X(t) \} = \exp \{ iz\gamma(t) + \int_0^t (e^{i(z,x)} - 1) G_t(dx) \}$$

şəklində ifadə olunması zəruri və kafidir, burada $\gamma(t)$ – azalmayan kəsilməz funksiyadır, $\gamma(0) = 0$, $G_t(dx)$ isə onun üçün

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x} G_t(dx) < \infty$$

şerti ödənilən ölçüdür. M sonluölçülü fəza olsun. Asılı olmayan artımları $X(t)$ T. p.-nin xarakteristikası

$$\mathbf{M} \exp \{ i(z, X(t)) \} =$$

$$= \exp \{ i(z, a(t)) + \int_0^t (e^{i(z,x)} - 1) G_t(dx) \}$$

şəklində ifadə olunarsa, bu prosesin lokal məhdud variasiyalı modifikasiyası mövcuddur, burada $a(t)$ məhdud variasiyalı kəsilməz funksiya, $G_t(dx)$ isə onun üçün

$$\int \frac{|x|}{1+|x|} G_t(dx) < \infty$$

şerti ödənilən ölçüdür. Bu halda $V(t) = \text{var}_{[0,t]} X(\cdot)$ (bu $X(\cdot)$ funksiyasının $[0, t]$ parçasında variasiyasıdır) asılı olmayan

1012 TƏSADÜFİ

artımları birölçülü stoxastik kəsilməz T. p.-dir, $V(t)$ -nin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M} \exp \{ i\lambda V(t) \} =$$

$$= \exp \left\{ i\lambda \text{var}_{[0,t]} a(\cdot) + \int_0^t (e^{i\lambda|x|} - 1) G_t(dx) \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Asılı olmayan artımları T. p. keçid ehtimalı

$$\mathbf{P}(s, x, t, B) = \mathbf{P}\{X(t) - X(s) \in B - x\},$$

$$0 \leq s \leq t, x \in M, B \in \mathcal{B}$$

olan Markov prosesidir. $(B - x)$, $x + y \in B$ şərtini ödəyən y -lərin çoxluğudur. Bu isə onu ifadə edir ki, $X(t)$ prosesi Markov prosesi kimi fəza üzrə bircins prosesdir.

Asılı olmayan artımları stoxastik kəsilməz $X(t)$ T. p. $t \in \mathbb{R}_+$ qiymətlərində təyin olunmuşdursa, $X(0) = 0$ şərtini ödəyirsə və $X(t+h) - X(t)$ artımının paylanması t -dən asılı deyildirsə, $X(t)$ asılı olmayan artımları bircins proses adlanır. Bu halda $X(t)$ həm də bircins Markov prosesi olur.

Sonluölçülü M Ekvilid fəzasında asılı olmayan artımları bircins T. p. üçün ələ $a \in M$, $B \in L_+(M)$ və $\mathcal{B}$ -də $G(dx)$ ölçüsü vardır ki, bu ölçü üçün

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} G(dx) < \infty$$

şerti ödənilir, prosesin xarakteristik funksiyası $\varphi_t(z)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\varphi_t(z) = \exp \{ t K(z) \},$$

burada

$$K(z) = i(z, a) - \frac{1}{2}(Bz, z) + \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1+|x|} \right) G(dx),$$

$K(z)$ prosesin kumulyantası adlanır.

Markov prosesi olan asılı olmayan artımları bircins T. p. ilə Kolmoqorov tənliyi arasında əlaqə varmı? $f(x)$, – M -dən olan, ikiqat kəsilməz differensiallanan, $\mathbb{R}$ -də birinci və ikinci tərtib məhdud törəmələrə malik funksiya olsun. $u(t, x) = \mathbf{M}f(x + X(t))$ olsun. Onda $u(t, x)$ funksiyası parabolik tip

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x) \quad (3)$$

inteqro – differensial tənliyini ödəyir, burada

$$L f(x) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \int \left[f(x+y) - f(x) - \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} y_i \frac{1}{1+|x|^2} \right] G(dy),$$

$x_i, a_i, -x$ və a vektorlarının koordinatlarıdır, $b_{ik}, -M$ fəzasının hər hansı ortonormalanmış bazisində B matrisinin elementləridir. (3) tənliyi $u(0, x) = f(x)$ başlanğıc şərtlə həll olunmalıdır. (3) Kolmoqorovun tərs tənliyi adlanır.

Asılı olmayan artımlı bircins T. p. bircins Markov prosesidir. L bu prosesin ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyalar sinfində doğuran operatorudur. Əgər $P(t, x, B)$ prosesin keçid ehtimalıdır, onda onun rezolventi

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, B) dt$$

aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$R_\lambda(x, B) = r_\lambda(B - x),$$

burada

$$\int e^{i(z, x)} r_\lambda(dx) = \frac{1}{\lambda - K(z)} = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t} \int (e^{i(z, x)} - 1) P\{X(t) \in dx\} dt \right\},$$

yəni $\frac{1}{\lambda} r_\lambda(B)$ sonsuz bölünən paylanmaya malikdir.

$S \in M$ - hamar sərhədli birləşikli oblast, $\tau, -x + X(t)$ prosesinin S oblastında ilk çıxış anı, $v(t, x) = Mf(X(\tau))I_{\{\tau < t\}}$ olsun. Əgər $v(t, x)$ funksiyası x üzrə iki dəfə differensiallandırsa, onda bu funksiya

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = L v(t, x), \quad x \in S$$

tənliyini və $v(t, x) = f(x), \quad x \in [S], \quad v(0, x) = 0, \quad x \in S$ şərtlərini ödəyir.

$g(x), -M$ -dən olan ikiqat kəsilməz differensiallanan $\mathbb{R}$ -də birinci və ikinci tərtib məhdud törəmələrə malik funksiya olsun;

$$\Phi_x(t) = \int_0^t g(X(s) + x) ds$$

$-X(t)$ prosesinin integral tipli additiv funksionalı olsun. Bu funksionalın paylanması tapmaq üçün $\Phi_x(t)$ kəmiyyətinin Laplas çevirməsi üçün aşağıdakı tənlikdən istifadə etmək olar. $w(t, x) = M \exp\{\lambda \Phi_x(t)\}$ olsun. Onda $w(t, x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = L w(t, x) + \lambda g(x) w(t, x), \quad t > 0$$

tənliyini və $w(0, x) = 1$ başlanğıc şərtlərini ödəyir.

Əgər asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz T. p.-in xarakteristik funksiyasını (2) düsturu ilə təyin edən $a_1(t), B(t), \Pi_t(B)$ funksiyaları t -yə görə differensiallandırsaq, asılı olmayan artımlı stoxastik kəsilməz T. p. lokal bircins T. p. adlanır.

$$a_1(t) = \int_0^t a^*(s) ds, \quad B(t) = \int_0^t B^*(s) ds,$$

$$\Pi_t(A) = \int_0^t \Pi_s^*(A) ds$$

olsun, burada $a^*(s), B^*(s), \Pi_s^*(A)$ - ölçülən və lokal inteqrallanan funksiyalardır; $L_t f, -M$ -dən $\mathbb{R}$ -ə təsir edən iki dəfə differensiallanan funksiyalar üzərində inteqro - differensiallanan operatorudur, $a_i^*, x_i, B_{ik}^*, -$ uyğun olaraq, a^*, x vektorlarının koordinatları və B^* operatorunun matrisinin elementləridir:

$$L_t f = \sum_i a_i^*(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} B_{ik}^*(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \int \left[f(x+y) - f(x) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i \frac{1}{1+|x|^2} \right] \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \Pi_t^*(dx).$$

Bircins proseslər üçün yuxarıda verilən nəticələr lokal bircins proseslər üçün də doğrudur.

$f(x)$ - iki dəfə kəsilməz differensiallanan funksiya, $f'_x, f''_{x_i x_j}$ məhdud,

$$u_t(s, x) = M f(x + X(t) - X(s)),$$

$$v_t(s, x) = M \exp \left\{ \lambda \int_s^t f(x + X(t) - X(s)) ds \right\}$$

olsun. Onda $0 < s < t$ olduqda bu funksiyalar

$$\frac{\partial}{\partial s} u_t(s, x) + L_s u_t(s, x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} v_t(s, x) + L_s v_t(s, x) + \lambda f(x) v_t(s, x) = 0$$

tənliklərini və $u_t(t, x) = f(x), v_t(t, x) = 1$ başlanğıc şərtlərini ödəyir.

$S \subset M$ - hamar sərhədli birləşikli oblast, $\tau_s, -X(t) - X(s) + x$ prosesinin $(t \geq s)$ S -dən ilk çıxış anı olsun. Onda $w_t(s, x) = P\{\tau_s < t\}$ funksiyası (bu funksiyanın x -ə görə olduqca hamar olduğu fərz olunur)

$$\frac{\partial}{\partial s} w_t(s, x) + L_s w_t(s, x) = 0, \quad x \in S$$

tənliyini və əlavə $w_t(s, x) = 1, \quad x \notin S, \quad 0 \leq s < t, w_t(t, x) = 0, \quad x \in S$ şərtlərini ödəyir.

$\mathbb{R}_+$ -da asılı olmayan artımlı bircins T. p.-lər. Belə proseslər üçün pillə funksionalları əsas rol oynayır. $X(t)$ - belə proses, $x > 0, \tau_x$ - prosesin (x, ∞) intervalına ilk dəfə daxil olduğu an olsun, $\gamma_x = X(\tau_x) - x$, bu kəmiyyətlər uyğun olaraq x -i ötürmə anı və ötürmə müddəti adlanır (bax, Eksses(i) dolaşmanın, Ötürmə müddəti).

$$Q_+(t, x) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \leq t} X(s) < x \right\} = \mathbf{P} \{ \tau_x > t \},$$

$$q_+(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_+(t, x) dt,$$

$$\tilde{q}_+(\lambda, x) = \int e^{izx} d_x q_+(\lambda, x)$$

olsun. Onda

$$\tilde{q}_+(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda} \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^\infty (e^{izx} - 1) d_x F_t(x) dt \right\},$$

burada $F_t(x) = \mathbf{P} \{ X(t) < x \}$. $\tilde{q}_+(\lambda, z)$ funksiyası üzrə $q_+(\lambda, x)$ funksiyasını, deməli, τ_x -in paylanmasını təyin etmək mümkündür; τ_x , $x < 0$, $-\infty < x$ intervalına ilk dəfə daxil olma anı kimi təyin olunur. $\gamma_x = X(\tau_x) - x$. Əgər

$$Q_-(t, x) = \mathbf{P} \left\{ \inf_{s \leq t} X(s) > x \right\} = \mathbf{P} \{ \tau_x < t \},$$

$$q_-(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_-(t, x) dt,$$

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \int_0^\infty e^{izx} d_x q_-(\lambda, x)$$

olarsa, onda

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda} \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^\infty (e^{izx} - 1) d_x F_t(x) dt \right\}.$$

$X_+ = \sup_{t \geq 0} X(t)$ (ola bilər ki, $X_+ = +\infty$) olsun;

$\mathbf{P} \{ X_+ < \infty \} = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki,

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P} \{ X(t) > 0 \} dt < \infty$$

şərti ödənilsin, bu halda

$$\mathbf{M} e^{tX_+} = \exp \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty (e^{itz} - 1) d_x F_t(x) dt \right\},$$

$$\mathbf{P} \{ X_+ = 0 \} = \mathbf{P} \left\{ \sup_t X(t) \leq 0 \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P} \{ X(t) > 0 \} dt \right\}.$$

Əgər

$$n(\lambda, y, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t \mathbf{P} \{ \tau_x < t, \gamma_x \geq y \}, x > 0, y > 0$$

olarsa, onda

1014 TƏSADÜFİ

$$n(\lambda, y, x) =$$

$$= \lambda \int_0^x \left(\int_{-\infty}^0 G([x+y-u-z, \infty]) \right) dq_-(\lambda, z) dq_+(\lambda, z).$$

Analoji düstur $x < 0$, $y < 0$ (q_- və q_+ yerlərini dəyişir) olduqda doğrudur. $x > 0$, $y > 0$ və $x < 0$, $y < 0$ üçün $n(\lambda, y, x)$ -lə birlikdə

$$\Gamma(x, dt, dy) = \mathbf{P} \{ \tau_x \in dt, X(\tau_x) \in dy \}$$

ölçüsünü təyin etmək olar (əgər $x > 0$ olarsa, onda Γ ölçüsü $\mathbb{R}_+ \times [x, \infty)$ -də, əgər $x < 0$ olarsa, $\mathbb{R}_+ \times (-\infty, x]$ -də toplanmışdır). Əgər $a < 0 < b$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$, $F_t(\alpha, \beta) = \mathbf{P} \{ \alpha < X(t) < \beta \}$ olduqda

$$Q(t; a, b, \alpha, \beta) =$$

$$= \mathbf{P} \left\{ \inf_{s \leq t} X(s) \geq a, \sup_{s \leq t} X(s) \leq b, \alpha < X(t) < \beta \right\}$$

işarələməsi qəbul edilərsə, onda

$$Q(t; a, b, \alpha, \beta) =$$

$$F_t(\alpha, \beta) - \sum_{k=0}^\infty \left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_{k+1} < t} \int \Gamma(b, dt_1, dy_1) \times \right. \\ \times \Gamma(a - y_1, dt_2, dy_2) \dots \Gamma(c_{k+1} - y_k, dt_{k+1}, dy_{k+1}) \times \\ \times F_{t-t_k}(\alpha - y_{k+1}, \beta - y_{k+1}) + \Gamma(a, dt_1, dy_1) \times \\ \times \Gamma(b - y_1, dt_2, dy_2) \dots \Gamma(c_k - y_k, dt_{k+1}, dy_{k+1}) \times \\ \left. \times F_{t-t_{k+1}}(\alpha - y_{k+1}, \beta - y_{k+1}) \right],$$

burada k cüt olarsa, $c_k = a$, k tek olduqda isə $c_k = b$.

Asılı olmayan artımları semikəsilməz bircins T. p.-lər ele proseslərdir ki, ya bunların müsbət sıçrayışları yoxdur (ya da ki, bunlar aşağıdan semikəsilməzdir). Əgər prosesin müsbət sıçrayışları yoxdursa, onda onun xarakteristik funksiyası aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\varphi_t(z) = \exp \{ t K(z) \},$$

$$K(z) = iaz - \frac{1}{2} bz^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) G(dx).$$

$K(z)$ asılı olmayan artımları bircins T. p.-in kumulyantası adlanır. $\operatorname{Im} z < 0$ olduqda kumulyanta analitik funksiyadır. Bütün $x > 0$ qiymətlərində $\mathbf{P} \{ \tau_x < \infty \} = 1$ olsun, bu şərt, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki,

$$a - \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} G(dx) \geq 0$$

münasibəti ödənilsin. Semikəsilməzliyə əsasən $X(\tau_x) = x$. τ_x funksiyasına $\mathbb{R}_+$ -də x -in təsadüfi funksiyası kimi baxmaq olar; τ_x T. p. kimi asılı olmayan artımları bircins T. p.-dir, bu

azalmayan prosesdir və onun Laplas çevirməsi aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\mathbf{M} \exp \{-\lambda \tau_x\} = \exp \{-x B(\lambda)\}, \quad \lambda > 0.$$

$B(\lambda)$ funksiyası $K(-iB(\lambda)) = \lambda$ bərabərliyindən təyin olunur.

Belə proses üçün τ_x -in paylanması və $X(t)$ aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir:

$$\frac{d}{ds} \int_0^x \mathbf{P} \{\tau_y < s\} dy = \frac{1}{s} \int_0^x y d_y \{X(s) < y\},$$

bu münasibət bərabərliyin sağ tərəfi s -ə görə kəsilməz olan bütün $s > 0$ qiymətləri üçün ödənilir. $x < 0$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \inf_{s \leq t} X(s) < x \right\} &= \mathbf{P} \{X(t) < x\} + \\ &+ \frac{d}{dx} \int_0^t \frac{1}{s} \mathbf{M}[X(s) \vee 0] \mathbf{P} \{X(t-s) < x\} ds. \end{aligned}$$

Prosesin sonsuzluqda artım sürəti. Əgər $X(t)$, $-\mathbb{R}$ -də simmetrik bircins prosesdirsə (yəni $X(t)$ -nin paylanması $-X(t)$ -nin paylanması ilə üst-üstə düşsə), $\varphi(t)$, $-\mathbb{R}_+$ -də kəsilməz artan funksiya və bu funksiya üçün $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$, $t > 0$, $s > 0$ şərti ödənilirsə, onda

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(t)} X(t) \leq 1 \right\} = 1$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P} \{X(t) > \varphi(t)\} dt < \infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir. Əgər $X(t)$ $\mathbb{R}$ -də bircins prosesdirsə və $\mathbf{M}X(t) = 0$, $\mathbf{D}X(t) = bt$ olarsa, onda təkrar loqarifm qanunu ödənilir:

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2bt \ln \ln t}} \right\} = 1.$$

Bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımları; asimptotik xassələr; *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımları; lokal xassələr.

Asılı olmayan artımlar anlayışı P. Levi (1934) tərəfindən verilmişdir. Asılı olmayan artımlarlı T. p.-lərdən Puasson və Braun prosesləri o zaman yeganə məlum proseslər idi və bunlar fiziki məsələlərin tədqiqatı nəticəsində yaranmışdı. Asılı olmayan artımlarlı proses termini praktiki olaraq, yalnız parametrlər kəsilməz olduğu halda istifadə olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı asimptotik xassələr «случайный процесс с независимыми приращениями; асимптотические свойства; asymptotic properties of random process with independent increments» – asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi prosesin* $t \rightarrow 0$ və ya $t \rightarrow \infty$

olduqda nə cür cərəyan etməsinə xarakterizə edən xassələrdir. $t \rightarrow \infty$ olduqda bircins proseslər üçün alınmış asimptotik xassələr t -nin hər hansı digər sonlu zaman anına yaxınlaşdığı hal üçün də doğrudur. Asılı olmayan artımlarlı proseslərin asimptotik xassələri haqqında müddəalar böyük ədədlər qanunları və ya təkrar loqarifm qanunları kimidir.

Aşağıdakı müddəa seçiyyəvidir: əgər $\zeta(t)$ bircins prosesdirsə və $\mathbf{M}\zeta(1)$ riyazi gözləməsi varsa, onda

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t)/t = \mathbf{M}\zeta(1) \right\} = 1.$$

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; çatım anı və ötüm (eksses) kəmiyyətinin paylanması «случайный процесс с независимыми приращениями; распределение момента достижения и величины перескока; random process with independent increments; distribution of the first passage / hitting / crossing time and of the overshoot / excess» – asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ *təsadüfi proses* üçün $x \geq 0$ səddini ötüm kəmiyyəti və çatım anının paylanmasıdır; τ_x^+ , $-x$ səddinə çatım anı, γ_x^+ (eksses) kəmiyyətləri aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$\tau_x^+ = \inf \{t : \zeta(t) > x\}, \quad \gamma_x^+ = \zeta(\tau_x^+) - x, \quad x \geq 0.$$

τ_x^+ -in paylanması $\zeta^+(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} \zeta(u)$ -nin paylanması ilə

$$\mathbf{P} \{\tau_x^+ > t\} = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) < x\}$$

bərabərliyi ilə bağlıdır. Bircins təsadüfi proseslər üçün τ_x^+ və γ_x^+ funksionallarının birgə paylanması ikinci faktorizasiya eyniliklə ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\exp \{-\lambda \tau_{\theta_\mu}^+ - u \gamma_{\theta_\mu}^+\}, \tau_{\theta_\mu}^+ < \infty] &= \\ &= \frac{\mu}{\mu - u} \left[1 - \frac{\mathbf{M} \exp \{-\mu \zeta^+(\theta_\lambda)\}}{\mathbf{M} \exp \{-u \zeta^+(\theta_\lambda)\}} \right], \quad \lambda > 0, \mu > 0, u > 0. \end{aligned}$$

$\theta_\lambda, \theta_\mu$ – parametrləri uyğun olaraq, λ və μ olan üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Mənfi $x < 0$ səddini ötüm kəmiyyəti və çatım anının paylanması da analogi təyin olunur.

Mənfi sıçrayışlarlı semikəsilməz $\zeta(t)$ *təsadüfi proses* üçün

$$\mathbf{M}[e^{-\lambda \tau_x^+}, \tau_x^+ < \infty] = \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_\lambda) > x\} = e^{-x\rho(\lambda)} \quad (x > 0)$$

münasibəti doğrudur, burada $\rho(\lambda)$, $-\psi(i\rho) = \lambda$, $\lambda > 0$ tənliyinin yeganə müsbət köküdür, ψ , $-\zeta(t)$ prosesinin kumulyantasıdır.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; dayanıqlı «случайный процесс с независимыми приращениями; устойчивый; stable random process with independent increments» – bax. *Dayanıqlı təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; izotrop «случайный процесс с независимыми приращениями изотропный; isotropic random process with independent increments» – bax. *İzotrop təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; xarakteristik funksiya «случайный процесс с независимыми приращениями; характеристическая функция; characteristic function of a random process with independent increments» – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ -dən olan stoxastik kəsilməz asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ *təsadüfi prosesi* üçün

$$\varphi(t, u) = M \exp\{i(u, \zeta(t))\}, u \in \mathbb{R}^m$$

düsturu ilə təyin olunan funksiyadır. $\zeta(t_0) = 0$, burada $(\cdot, \cdot)$, – $\mathbb{R}^m$ -də skalyar hasilidir. $\varphi(t, u)$ – sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasıdır və *Levi kanonik ifadəsinin* düsturuna əsasən

$$\ln \varphi(t, u) = i(u, a(t)) - \frac{1}{2} (B(t)u, u) + \int_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \left(e^{i(u, x)} - 1 - \frac{i(u, x)}{1 + |x|^2} \right) \Pi(t, dx),$$

$a: T \rightarrow \mathbb{R}^m$ funksiyası kəsilməzdir, $B(t)$ kəsilməzdir və $\mathbb{R}^m$ -də öz-özünə qoşma mənfəi olmayan operatorların çoxluğunda qiymətlər alan funksiya kimi azalmayıdır. $\Pi(t, A) \geq 0$ təyin olunmuş, kəsilməz və $\inf\{|x|: x \in A\} > 0$ münasibətini ödəyən hər bir $A \in \mathbb{R}^m$ Borel çoxluğunda t üzrə azalmır, hər bir t qiymətində A üzrə hesabı – additivdir və

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}} |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} \Pi(t, dx) < \infty.$$

a , B və Π funksiyaları birqiymətli təyin olunur və asılı olmayan artımlarlı separabel proses üçün aşağıdakı mənanı daşıyır: $a(t)$, $\zeta(t)$ prosesinin təsadüfi olmayan «apan»-sını

təyin edir [əgər $a(t) - \int x(1 + |x|^2)^{-1} \Pi(t, dx)$ funksiyasına

bərabər olan integral varsa], $B(t)$, – $\zeta(t)$ -nin diffuzion komponentinin kovariasion operatorudur, Π – sıçrayışlar ölçüsüdür: $\Pi(t, A)$ – prosesin t anına qədər baş vermiş və A çoxluğuna düşən sıçrayışların sayının riyazi gözləməsinə bərabərdir (yeni ele sıçrayışların ki, bunlar $\zeta(s+0) - \zeta(s-0) \in A$ şərtini ödəsin).

Bu halda $\zeta(t)$ -nin trayektoriyası sanki yəqin:

1016 TƏSADÜFİ

1) kəsilməzdir, lakin yalnız $\Pi(t, A) \equiv 0$ olarsa [ζ riyazi gözləməsi $a(t)$ -yə bərabər, diffuzion operatoru isə $B(t)$ olan Gauss prosesi olduqda];

2) yalnız a məhdud variasiyaya malik olarsa, $B(t) \equiv 0$ və

$$\int_{0 < |x| < 1} |x| \Pi(t, dx) < \infty;$$

məhdud variasiyaya malikdir,

3) əgər, yalnız və yalnız, $a(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv 0$,

$\Pi(t, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) < \infty$, $t \in T$ olarsa, pilləvaridir;

4) yalnız $B(t) \equiv 0$, $\Pi(t(-\infty, 0)) \equiv 0$ olduqda azalmayırdır ($\zeta(t) \in \mathbb{R}^1$ halı) və $a(t) - \int x(1 + x^2)^{-1} \Pi(t, dx)$ funksiyası azalmır.

Bircins asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ prosesi üçün [$\zeta(t+h) - \zeta(t)$ fərqlinin paylanması yalnız h -dan asılı olduqda] $a(t) \equiv a$, $B(t) \equiv B$ və $\Pi(t, A) \equiv t \Pi(A)$ olur.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; Levi ayrılığı «случайный процесс с независимыми приращениями; разложение Леви; Lévi decomposition of a random process» – bax. *Levi ayrılığı* asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; lokal xassələr «случайный процесс с независимыми приращениями; локальные свойства; local properties of a random process with independent increments» – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesi* və onun artımları – $\zeta(s+t) - \zeta(s)$ fərqlərinin $t \rightarrow 0$ olduqda asimptotikasını xarakterizə edən xassələrdir. Asılı olmayan artımlarlı bircins T. p.-lər üçün s qeyd olunduğu halda $\zeta(s+t) - \zeta(s)$ fərqlərinin asimptotikasının araşdırılması prosesin sıfırda asimptotikasının öyrənilməsinə gətirilir. Asılı olmayan artımlarlı bircins ədədi T. p.-in lokal artım sürətini integral kriterisi (A. Ya. Xinqin, B. V. Qnedenko) vasitəsilə qiymətləndirmək münasibdir: əgər $\varphi(t)$ ele mənfəi olmayan kəsilməz artan funksiyadırsa ki, bu funksiya üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\lim_{n \downarrow 1} \sup_t \left| 1 - \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)} \right| = 1,$$

$$P\{\zeta(t) > -\varepsilon \varphi(t)\} \geq q_\varepsilon > 0$$

münasibətləri ödənilsin, onda

$$P\left\{\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \zeta(t)/\varphi(t) \leq 1\right\} = 1,$$

münasibəti o halda ödənilir ki,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t} P\{\zeta(t) > \varphi(t)\} dt < \infty$$

olsun və

$$P\left\{\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \zeta(t)/\varphi(t) \geq 1\right\} = 1$$

münasibəti isə $I = \infty$ olduqda ödənilsin.

Asılı olmayan artımlı T. p.-lərin konkret tipləri üçün lokal artımın dəqiq yuxarı sərhədi göstərmək olur. Viner prosesi üçün təkrar loqarifm qanunu və aşağıdan semikəsilməz dayanıqlı proseslər üçün onun analogları bunlara misaldır (bax, [1]). Gauss komponenti olmayan proseslər üçün

$$P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \zeta(t) / \sqrt{t \ln |\ln t|} = 0 \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. Əgər asılı olmayan artımlı T. p üçün Levi ölçüsü G şərtini ödəyirsə, onda

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1/\gamma} |\zeta(t)| = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \gamma > \rho, \\ \infty, & \text{əgər } \gamma < \rho \end{cases}$$

burada

$$\rho = \inf \left\{ \alpha : \int_{-1}^1 |y|^\alpha G(dy) < \infty \right\}.$$

Dayanıqlı proseslər üçün ρ dayanıqlı qanunun parametri $\alpha \in (0, 2)$ ilə üst-üstə düşür.

Parametri $\alpha \in [0, 2]$ olan dayanıqlı prosesin artımının aşağı sərhədi üçün $0 < c_\alpha < \infty$ olduqda

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (\ln |\ln t| / t)^{1/\alpha} \sup_{0 \leq s \leq t} |\zeta(s)| = c_\alpha \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. $\alpha = 2$ olduqda (Viner prosesi) $c_2 = \pi / \sqrt{8}$. Artan proseslər üçün

$$\lim_{t \rightarrow 0} \zeta(t) / \psi(t) = \text{const}$$

münasibətini ödəyən ψ funksiyanın ifadəsi məlumdur (bax, [2]).

Kəsilməzliyin müntəzəm modulu yalnız Viner prosesi üçün vardır. Lakin fərqlərin artımlarının müntəzəm aşağı sərhədlərini semikəsilməz dayanıqlı proseslər üçün də göstərmək mümkündür; məs., $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$ olduqda

$$P \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\substack{0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \varepsilon}} \frac{\zeta(s+t) - \zeta(s)}{t^{1/\alpha} (2 |\ln t|)^{(\alpha-1)/\alpha}} = d_\alpha \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur, burada $0 < \alpha < 1$ olarsa, $0 < d_\alpha < \infty$ və $1 < \alpha < 2$ olarsa, $-\infty < d_\alpha < 0$ götürülür.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Fristedt B. E., Pruitt W. E., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1971, Bd 18, № 3, S. 167–82; [3] Mijneer J. L., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 27, № 2, S. 153–70; [4] Samorodnitsky G., Taggu M. S., Stabl non-Gaussian random process. Stochastic models with infinite variance, L., 1994.

***TƏSADÜFİ PROSES** asılı olmayan artımlı; ordinar bircins «случайный процесс с независимыми приращениями; ординарно однородный; random process with independent increments; ordinary homogeneous» – asılı olmayan artımlı ele tamqıymətli və mənfi olmayan bircins $\{X_t, t \geq 0\}$ T. p.-idir ki (bax, Təsadüfi proses asılı olmayan artımlı), bu proses üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1) X(\omega; 0) = 0;$$

$$2) 0 < \lambda < \infty, h \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

$$P \{ X_h = 0 \} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P \{ X_h = 1 \} = \lambda h + o(h),$$

$$P \{ X_h \geq 2 \} = o(h),$$

burada $X_t = X(\omega; t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$. Ordinar bircins prosesin qeyd olunan anda vahid uzunluqlu iki və ya ikidən çox sıçrayış alması ehtimalı sıfıra yaxın olur.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, М., 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1973.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlı; rezolvent «случайный процесс с независимыми приращениями; резольвента; resolvent of a random process with independent increments» – xüsusi halı asılı olmayan artımlı təsadüfi proses olan Markov prosesinin rezolventidir. Bircins asılı olmayan artımlı $\zeta(t)$ T. p.-nin rezolventi

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P \{ \zeta(t) + x \in B \} dt = r_\lambda(B - x)$$

düsturu ilə təyin olunur. $\zeta(t)$ prosesinin kumulyantası $K(z)$ olarsa,

$$\int e^{t(z, x)} r_\lambda(dx) = \frac{1}{\lambda - K(z)}.$$

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlı; yuxarı və aşağı sədlərin paylanması «случайный процесс с независимыми приращениями; распределение верхней и нижней границ; random process with independent increments; distribution of the upper and lower bounds» – asılı olmayan artımlı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin yuxarı səddi

$$\zeta^+(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} \zeta(u)$$

və aşağı səddi

$$\zeta^-(t) = \inf_{0 \leq u \leq t} \zeta(u)$$

funksionallarının paylanmasıdır. Bircins $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin xarakteristik funksiyası

$$M e^{i\alpha \zeta(t)} = e^{t\psi(\alpha)}$$

münasibətilə təyin olunur və sonsuz bölünənlik xassəsinə malikdir, bu halda $\psi(\alpha)$ kumulyantası Levi – Xinqin ifadəsi ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2} \sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x \delta(|x| < 1)] d\Pi(x),$$

$$\int_{-1}^1 |x| d\Pi(x) < \infty, |a| < \infty, \sigma^2 > 0.$$

Bircins prosesler üçün onların paylanmaları sonsuz bölünən faktorisasiya eyniliyinin komponentləri ilə təyin olunur:

$$\mathbf{M} e^{i\alpha\zeta^{\pm}(\theta_{\lambda})} = \mathbf{M} e^{i\alpha\zeta^+(\theta_{\lambda})} \mathbf{M} e^{i\alpha\zeta^-(\theta_{\lambda})}; \quad (*)$$

$$\ln \mathbf{M} e^{i\alpha\zeta^{\pm}(\theta_{\lambda})} = \pm \int_0^{\pm\infty} (e^{i\alpha x} - 1) dN_{\lambda}^{\pm}(x),$$

$$\mathbf{P}\{\theta_{\lambda} > t\} = e^{-\lambda t},$$

$$N_{\lambda}^{+}(x) = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{-1} \mathbf{P}\{\zeta(t) \geq x\} dt, \quad x > 0,$$

$$N_{\lambda}^{-}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{-1} \mathbf{P}\{\zeta(t) < x\} dt, \quad x < 0.$$

Birinci (*) faktorisasiya eyniliyi sonsuz bölünən faktorisasiya eyniliyi adlanır. $\zeta^{\pm}(\theta_{\lambda})$ üçün xarakteristik funksiyaları təyin edən münasibət Polloçek – Spitsers eyniliyinin analoqudur. $\zeta(t)$ prosesinin bütün sərhəd funksionallarının demək olar ki, hamısının paylanması $\zeta^{\pm}(\theta_{\lambda})$, $\lambda > 0$ paylanmalarının terminləri ilə ifadə olunur.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları yalnız bir işarəli olarsa (belə proseslər semikəsilməz proseslər adlanır), onda $\zeta^+(\theta_{\lambda})$ və $\zeta^-(\theta_{\lambda})$ funksionallarının paylanması üstlü paylanma olur. Məs., əgər $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları yalnız mənfi sıçrayışlar olarsa ($d\Pi(x) \equiv 0$, $x > 0$ olduqda), onda

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_{\lambda}) > x\} = e^{-x\rho(\lambda)}, \quad x > 0;$$

$\rho(\lambda)$, $-\psi(ip) = \lambda$ ($\lambda > 0$) tənliyinin yeganə müsbət köküdür.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [3] Братийчук Н. С., Гусак Д. В., Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями, К., 1990.

TƏSADÜFİ PROSES; bixətli model «случайный процесс; билинейная модель; bilinear model of random process» – bax, Bixetti model(i) təsadüfi prosesin.

TƏSADÜFİ PROSES бинар «случайный процесс бинарный; binary random process» – bax, Binar təsadüfi proses.

TƏSADÜFİ PROSES çoxölçülü parametrlili «случайный процесс с многомерным параметром; random process with multidimensional parameter» – bax, Təsadüfi meydan.

TƏSADÜFİ PROSES çoxölçülü zamanlı «случайный процесс с многомерным временем; random process with multidimensional time» – bax, Təsadüfi meydan.

1018 TƏSADÜFİ

TƏSADÜFİ PROSES; differensiallama «случайный процесс; дифференцирование; differentiation of a random process» – $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin törəməsinin hesablanması üçün emeldir; bu törəmə

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h} = \zeta'(t)$$

limiti kimi təyin olunur. Əgər limit kvadratik orta yığılma mənada (1 ehtimalla) anlaşılsa, onda $\zeta(t)$ -nin kvadratik orta mənada differensiallanması (1 ehtimalla) nəzərdə tutulur.

Kovariasion funksiyası $B(t, s)$ olan $\zeta(t)$ prosesinin kvadratik orta mənada differensiallanması üçün

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{B(t+h, t+h') - B(t+h, t) - B(t, t+h') + B(t, t)}{hh'}$$

limitinin varlığı zəruri və kafidir.

Bu halda

$$\mathbf{M} \zeta'(t) \zeta'(s) = \frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s}, \quad \mathbf{M} \zeta(t) \zeta'(s) = \frac{\partial B(t, s)}{\partial s}$$

(qeyd olunan xüsusi törəmələrin varlığı fərz olunur).

Əgər $\zeta(t)$ prosesi kvadratik orta mənada differensiallandırsa və $\zeta''(t)$ prosesi kvadratik orta mənada kəsilməzdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesinə stoxastik ekvivalent, 1 ehtimalla differensiallanan təsadüfi proses vardır. Gauss prosesləri üçün bu şərt həm də zəruridir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

TƏSADÜFİ PROSES dioxotomik «случайный процесс дихотомический; binary random process» – bax, Binar təsadüfi proses.

TƏSADÜFİ PROSES diskret komponentli «случайный процесс с дискретной компонентой; stochastic process with discrete component» – ümumi $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında ele $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\}$ təsadüfi proseslər cütüdür ki, bunlardan biri (məs., birincisi) sıçrayışvari prosesdir, bu cütə faza fəzalarının hasil $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ fəzasında vahid bir proses kimi baxılır, burada $(E_i, \mathcal{A}_i)$, $-\zeta_i(t)$ prosesinin faza fəzasıdır, $i=1,2$. Bu növ obyektlərə maraq onunla izah olunur ki,

sıçrayışvari $\zeta_1(t)$ prosesinə əlavə $\zeta_2(t)$ komponentlərini əlavə edərək, onu əksər hallarda bircins Markov prosesi etmək olur. Tipik misal *semi-Markov prosesidir*. Buna görə də, bu mövzu ilə əlaqədar işlərin əksəriyyəti diskret komponentli bircins Markov proseslərinə həsr olunmuşdur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı «случайный процесс с дискретным временем; discrete time random process» – bax, Təsadüfi ardıcılıq.

TƏSADÜFİ PROSES; doğruyaoxşarlıq nisbəti «случайный процесс; отношение правдоподобия; random process; likelihood ratio» – bax, Statistik məsələlər(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

TƏSADÜFİ PROSES ергодик « случайный процесс эргодический; ergodic random process » – bax, *Erqodik təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; filtrasiya « случайный процесс; фильтрация; filtering of a random process » – $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin qiymətinin cari t anında, bu proseslə əlaqədar digər təsadüfi prosesin qiymətləri üzrə, qiymətləndirilməsi məsələsidir. Məs., $\zeta(t)$ stasionar prosesinin bu proseslə stasionar əlaqədar $X(s)$, $s \leq t$ stasionar prosesinin qiymətləri üzrə qiymətləndirilməsi belə məsələlərdəndir (bax, [1]). Adətən, kvadratik orta xətası $M \left[\hat{\zeta}(t) - \zeta(t) \right]^2$ minimal olan $\hat{\zeta}(t)$ statistik qiymətinin tapılması nəzərdə tutulur. «Filtrasiya» termini signal və təsadüfi küyün «qanışığından» signalın ayrılması məsələsi ilə əlaqədar yaranmışdır, bu məsələnin mühüm modifikasiyalardan biri $\zeta(t)$ və $X(t)$ arasında əlaqə

$$dX(t) = \zeta(t) dt + dw(t), \quad t > t_0$$

differensial tənliyi ilə verildiyi halda uyğun sxemdə optimal filtrasiya məsələsidir, burada $\zeta(t)$ -dən asılı olmayan küy $w(t)$ standart Viner prosesi ilə ifadə olunmuşdur.

Xətti stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan $\zeta(t)$ proseslərinə tətbiq olunan filtrasiya metodu (K a l m a n – B y u s i m e t o d u) tətbiqdə geniş yayılmışdır. Məs., yuxanda göstərilən sxemdə sıfır başlanğıc şərtlərlə

$$d\zeta(t) = a(t)\zeta(t)dt + dY_1(t)$$

olarsa, onda

$$\hat{\zeta}(t) = \int_{t_0}^t c(t, s) dX(s)$$

olur, burada çəki funksiyası $c(t, s)$ aşağıdakı tənliklərdən tapılır:

$$\frac{d}{dt} c(t, s) = [a(t) - b(t)] c(t, s), \quad t > s, \quad c(s, s) = b(s),$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = 2a(t)b(t) - [b(t)]^2 + 1, \quad t > t_0, \quad b(t_0) = 0;$$

bu metodun qeyri – xətti tənliklərə ümumiləşməsi filtrasiyanın ümumi stoxastik tənliklərinə gətirir (bax, [2]).

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^n c_k \zeta_k(t)$$

prosesi naməlum $c_1, \dots, c_n$ parametrlərindən asılı olduqda, bu parametrləri $x(s)$, $s \leq t$ üzrə qiymətləndirərək $\hat{\zeta}(t)$ -nin interpolasiya statistik qiymətini vermək olur, burada ən kiçik kvadratlər metodu və onun ümumiləşmələrini tətbiq etmək olur (bax, məs., [3]).

Əd.: [1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970.

TƏSADÜFİ PROSES harmonikləşən « случайный процесс гармонизируемый; harmonizable random process » – bax, *Harmonikləşən təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES xətti ifadə olunan « случайный процесс линейно представимый; linearly filter of a random process » – bax, *Spektral nəzəriyyələri(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin*.

TƏSADÜFİ PROSES idarəolunan « случайный процесс управляемый; controlled random process » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES ikiqat stasionar « случайный процесс двично стационарный; dyadic stationary random process » – bax, *Spektral nəzəriyyələri(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin*.

TƏSADÜFİ PROSES ikinci növ kəsilmələri olmayan « случайный процесс без разрывов второго рода; stochastic process without discontinuities of the second kind; CADLAG stochastic process ». $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, T – heqiqi oxun sonlu və ya sonsuz intervalı, E – metrik fəza, $\mathcal{B}$ – onun Borel altçoxlqlarının σ – cəbri, $\zeta_t, t \in T$ – qiymətləri $(E, \mathcal{B})$ fəza fəzasından olan *təsadüfi proses* olsun. Əgər elə $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ hadisəsi tapılsa ki, $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$ və bütün $\omega \in \Omega_1, t \in T$ üçün birtərəfli sol və sağ $\lim_{s \downarrow t} \zeta_s(\omega)$ və $\lim_{s \uparrow t} \zeta_s(\omega)$ limitləri olarsa,

$\zeta_t, t \in T$ prosesi ikinci növ kəsilmələri olmayan *təsadüfi proses*dir, deyilir. Əgər T intervalının sol (sağ) ucu ona daxil olarsa və t həmin bu ucla üst-üstə düşərsə, onda yalnız sol (sağ) limitin varlığı tələb olunur.

İkinci növ kəsilmənin olmaması üçün bir sıra kriterilər mövcuddur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

TƏSADÜFİ PROSES impulsal « случайный процесс импульсный; impulse random process » – bax, *Impulsal təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; integrallanma « случайный процесс; интегрирование; integration of random process » – *təsadüfi prosesin* integralını hesablama əməlidir. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş, kovariasion funksiyası $B(t, s)$ olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi-nin integralı –

$$\int_a^b \zeta(t) dt, \quad (*)$$

integral cəmlərinin kvadratik orta menada limiti kimi təyin oluna bilər, bu şərtlə ki, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ bölgüsündəki intervalların boyları kiçilməlidir, burada $s_k, - t_k$ və t_{k+1} arasında

ixtiyari (təsadüfi olmayan) nöqtədir. $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} (t_{k+1} - t_k)$ olsun. (*) integralının varlığı üçün

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} B(s_k, s_r) (t_{k+1} - t_k)(t_{r+1} - t_r)$$

limitinin varlığı zəruri və kafidir.
Xüsusi halda, əgər

$$\iint_{a,b} B(t, s) dt ds$$

Riman mənada ikiqat integralı varsa, (*) integralı da vardır.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyanı $[a, b]$ parçasında Riman (Lebeq) mənada sanki yəqin integrallandırsa, (*) integralını prosesin ayrıca götürülmüş realizasiyasının Riman (Lebeq) integralını hesablamaqla təyin etmək olar.

Əd.: [1] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов. 2 изд., М., 1996.

TƏSADÜFİ PROSES; interpolasiya «случайный процесс; интерполяция; interpolation of random process» – (a, b) intervalından kənarda $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin müşahidələri nəticəsində alınan qiymətlər üzrə $\zeta(t)$ prosesin qiymətlərinin hər hansı $a < t < b$ intervalında qiymətləndirilməsi haqqında məsələdir. Adətən, interpolasiya statistik qiymət kimi $\hat{\zeta}(t)$ nezdə tutulur və bu qiymət üçün interpolasiyanın kvadratik orta xətası digər statistik qiymətlərlə müqayisədə minimal olur:

$$\mathbf{M} \left| \hat{\zeta}(t) - \zeta(t) \right|^2 = \min.$$

Interpolasiya xətti statistik qiymətlərlə məhdudlanırsa, o, xətti interpolasiya adlanır. İlk məsələlərdən biri kimi stasionar ardıcılığın $\zeta(0)$ qiymətinin xətti interpolasiyası məsələsi qoyulmuş və həll olunmuşdur; bu məsələnin analoqu aşağıdakı kimi verilir: $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ parçasında kvadratı ilə integrallanan funksiyalar fəzası L^2 -də $\varphi(\lambda) \in L^2$ funksiyasının $e^{i\lambda k} \varphi(\lambda)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ funksiyaları ilə doğurulmuş alt fəzaya proyeksiyasını tapmaq tələb olunur; bu məsələ stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində geniş surətdə ümumiləşdirilmişdir (bax, [1], [2]). Təbii üçün l tərtib xətti differensial L operatorlu və sağ tərəfində bəyaz küy $Y(t)$, $t > t_0$ olan $L\zeta(t) = Y(t)$ sisteminde yaranan T. p.-in interpolasiya məsələsinə baxmaq olar, burada $\zeta^k(t_0)$, $k = 0, \dots, l-1$ başlanğıc qiymətlərinin bəyaz küydən asılı olmadığı halda, $a < t < b$ intervalında ən yaxşı interpolasiya statistik qiyməti $\hat{\zeta}(t)$, $a < t < b$, – $L^* L\zeta(t) = 0$ uyğun sərhəd məsələsinin həllidir, burada L^* – formal qoşma operatorudur; sərhəd şərtləri isə $s = a, b$ sərhəd nöqtələrində

$$\hat{\zeta}^{(k)}(s) = \zeta^{(k)}(s), \quad k = 0, \dots, l$$

bərabərlikləri ilə verilir.

Stoxastik differensial tənliklər sistemi üçün müəyyən komponentlərin qiymətləri üzrə interpolasiya məsələsi, uyğun interpolasiya tənliklərinə gəlir (bax, [3]).

1020 TƏSADÜFİ

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 2215–55; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES; invariantlıq prinsipi «случайный процесс; принцип инвариантности; invariance principle for random process» – bax, *invariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES; kanonik ifadə «случайный процесс; каноническое представление; canonical representation of a random process» – sonlu və ya sonsuz $T = (A, B)$ intervalında (A ya həqiqi ədəd və ya $-\infty$, B isə A -dan böyük həqiqi ədəd və ya $+\infty$) aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan təsadüfi ölçülər üzrə integralları cəmi şəklində verilən $X(t)$ təsadüfi prosesinin ifadəsidir; bu təsadüfi ölçülər $X(t)$ prosesinin gələcək artımlarının strukturunu təyin edən, yeniləşdirici adlandırılan komponentlərinin keçmiş qiymətlərlə və prosesin bu yeniləşdirici komponentlərlə korrelyar olmayan, keçmiş qiymətlərlə təyin olunan ölçülərdir.]

Fərz olunur ki, $X(t)$, $t \in T$, – $\mathbf{M} X(t) = 0$, $\mathbf{M} |X(t)|^2 < \infty$ şərtlərini ödəyən ele kompleks T. p.-dir ki, bu proses üçün hər bir $t \in T$ qiymətində $X(t-0) = \lim_{h \downarrow 0} X(t-h)$ və

$X(t+0) = \lim_{h \downarrow 0} X(t+h)$ limitləri (kvadratik orta mənada) vardır və $X(t-0) = X(t)$. H – sonlu dispersiyalı kompleks

Y təsadüfi kəmiyyətlərinin $(Y_1, Y_2) = \mathbf{M} Y_1 \bar{Y}_2$ skalyar hasilı ilə verilmiş Hilbert fəzası, $H_X(t)$, – H fəzasının $X(s)$, $s \leq t$ vektorlarını örten altfəzası olsun; $X(t)$ isə $\bigcap_{t \in T} H_X(t) = 0$

şərtini ödəyən requlyar (yeni tamamilə determinik olmayan) proses olsun. Bu halda $X(t)$, $t \in T$ prosesi ilə birqiymətli təyin olunan ele minimal N nömrəsi (tam müsbət ədəd və ya sonsuzluğa bərabər) vardır ki, $t \in T$ olduqda $X(t)$ T. p.-nin aşağıdakı şəkildə kanonik ifadəsi vardır:

$$X(t) = \sum_{n=1}^N \int_A^B g_n(t, u) dZ_n(u),$$

burada $Z_n(u)$, $n = 1, \dots, N$ – qeyri – korrelyar artımlarlı, qarşılıqlı korrelyar olmayan proseslərdir. Bu halda $\mathbf{M} dZ_n(u) dZ_m(v) = \delta_{nm} \delta(u-v) dF_n(u) dv$, $F_n(u)$, $n = 1, \dots, N$ monoton azalmayan, soldan kəsilməz ele funksiyalardır ki, bunlar üçün $dF_n(u)$ ölçüsü bütün əvvəlki $dF_m(u)$, $m < n$ ölçülərinə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür; $g_n(t, u)$ – təsadüfi olmayan

$$\sum_{n=1}^N \int_A^B |g_n(t, u)|^2 dF_n(u) < \infty$$

şərtini ödəyən funksiyalardır və $H_X(t)$ fəzası ixtiyari $t \in T$ qiymətində $Z_n(s) - Z_n(A)$, $s \leq t$ vektorları üzərini örten, qarşılıqlı

ortoqonal $H_{Z_n}(t)$ altfəzalarının düz cəmidir, yeni $H_X(t) = H_{Z_1}(t) \oplus \dots \oplus H_{Z_N}(t)$. $Z_n(u)$, $n=1, \dots, N$ prosesləri, $X(t)$ prosesinin yeniləşdirici komponentləri **ə r i**. $Z(u) = \{Z_n(u), n=1, \dots, N\}$ $X(t)$ prosesi üçün yeniləşdirici proses, N isə $X(t)$ -nin təkrarlıq sayıdır.

T. p.-in kanonik ifadəsi diskret zamanlı stasionar $X(t)$ prosesinin Vold ifadəsinin və bu ifadəyə yaxın $(-\infty, \infty)$ oxunda requlyar stasionar $X(t)$ prosesinin birtərəfli sürüşən orta prosesi şəklində ifadəsinin təbii ümumiləşməsidir. İxtiyari T. p.-in $N=1$ olan təkrarlıq sayı vardır. Lakin harmoniklənən T. p.-lərin daha ümumi sinfinə təbii N ixtiyari (sonlu və sonsuz) qiymət ala bilər (bax, [1]).

T. p.-in kanonik ifadəsi üzrə $A < t' \leq s < t$ qiymətlərində məlum olan $X(t')$ qiymətləri üzrə $X(t)$ -nin qiymətinin **ə n** yaxşı xətti proqnozu $\hat{X}(t)$ asanlıqla təyin olunur:

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^N \int_A^s g_n(t, u) dZ_n(u).$$

T. p.-in kanonik ifadəsini T. Hida [2]-də Gauss T. p. $X(t)$ -yə təbiiqə almışdır; ixtiyari requlyar $X(t)$ prosesləri halını H. Kramer araşdırmışdır (bax, məs., [1], [3]).

Çoxölçülü $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_m(t)\}$ (vektor) prosesləri və təsadüfi funksiyaların daha ümumi bezi sinifləri üçün kanonik ifadə ümumiləşdirilmişdir (bax, [4], [5]).

Əd.: [1] C r a m e r H., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 193–204; [2] H i d a T., «Mém. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A», 1960, v. 33, № 1, p. 109–55; [3] C r a m e r H., Structural and statistical problem for a class of stochastic process, Princeton, 1971; [4] K a l l i a n p u r G., M a n d r e k a r V., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 614–44; [5] Р о з а н о в Ю. А., Теория обновляющихся процессов, М., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES; kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər «случайный процесс; канонические корреляции и величины; canonical correlations and variables of a random process» – $\{X(t), t \in T\}$ və $\{Y(s), s \in S\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin iki çoxluğu üçün kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlərdir, burada $X(t)$, $Y(s)$ – təsadüfi kəmiyyətlər, T və S , – t və s -in qiymətlərinin hər hansı çoxluqlarıdır.

H , H_X və H_Y – uyğun olaraq $\{X(t), t \in T, Y(s), s \in S\}$, $\{X(t), t \in T\}$ və $\{Y(s), s \in S\}$ təsadüfi kəmiyyətlərini örten, $(z_1, z_2) = Mz_1 z_2$ skalyar hasil ilə Hilbert fəzaları olsun; burada $MX(t) = MY(t) = 0$, P_X və P_Y , – H_X və H_Y altfəzalarına müvafiq H fəzasında proyeksiyalayıcı operatorlardır. Əgər $\{X(t), t \in T\}$ və $\{Y(s), s \in S\}$ çoxluqları sonlu və ya hesabi olarsa, onda kanonik kəmiyyətlər $B_X = P_X P_Y P_X$ və $B_Y = P_Y P_X P_Y$ operatorlarının məxsusi vektorları, kanonik korrelyasiyalar isə bunların sıfıra bərabər olmayan məxsusi qiymətlərinin kvadrat kökləridir (her iki operatorlar üçün müsbət və eyni).

Əgər H_X və H_Y altfəzalarının dim. – ölçüləri M və L sonlu olarsa, onda kanonik korrelyasiyaların və kəmiyyətlərin sayı $N \leq \min\{M, L\}$ olur və ümumi tərifə uyğun olaraq (bax, [1]–[3]).

$$U_i = \sum_{k=1}^M \alpha_{ik} X(t_k), \quad V_i = \sum_{j=1}^L \beta_{ij} Y(s_j), \quad i=1, \dots, N$$

kanonik kəmiyyətlər cütünü və uyğun kanonik ρ_i korrelyasiyalarını –

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^L B_{XY}(t_m, s_j) \beta_{ij} &= \rho_i \sum_{k=1}^M B_{XX}(t_m, t_k) \alpha_{ik} \\ t_m &\in T, m=1, \dots, M \\ \sum_{k=1}^M B_{YX}(s_l, t_k) \alpha_{ik} &= \rho_i \sum_{j=1}^L B_{YY}(s_l, s_j) \beta_{ij}, \\ s_l &\in S, l=1, \dots, L, i=1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^L \sum_{l=1}^L \beta_{ij} B_{YY}(s_j, s_l) \beta_{il} = \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M \alpha_{ik} B_{XX}(t_k, t_m) \alpha_{im} = 1, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

münasibətlərdən tapmaq olur, burada $B_{XX}(t_k, t_m)$ və $B_{YY}(s_j, s_l)$, – $X(t)$ və $Y(s)$ proseslərinin avtokorrelyasion matrisləri, $B_{XY}(t_m, s_j)$ və $B_{YX}(s_l, t_k) = B_{XY}(t_k, s_l)$ – onların qarşılıqlı korrelyasion matrisləridir. Kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər ehtimalən ki, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_N > 0$ olsun.

İlkin kanonik U_1 və V_1 kəmiyyətlərini də uyğun olaraq, H_X və H_Y -ə aid təsadüfi kəmiyyətlər kimi təyin etmək olar, bu kəmiyyətlər arasında korrelyasiya əmsalı $\rho_1 = MU_1 V_1$ maksimaldır (H_X və H_Y altfəzaları arasında minimal bucağın kosinusuna bərabərdir). U_1 və V_1 kəmiyyətləri ilə korrelyar olmayan uyğun $U \in H_X$ və $V \in H_Y$ kəmiyyətləri cütü üçün onların korrelyasiya əmsalı ρ_2 , $U = U_2$ və $V = V_2$ olduqda, maksimal olur və s. $\{U_1, U_2, \dots, U_N, V_1, V_2, \dots, V_N\}$ vektorunun bütün komponentlərinin dispersiyaları (2)-yə əsasən 1-ə bərabərdir və $MU_i V_i = \rho_i$, $i=1, \dots, N$ şərtini ödəyən $\{U_i, V_i\}$ cütü istisna olunmaqla cüt-cüt qeyri – korrelyar kəmiyyətlərdir.

Kanonik korrelyasiyaların və kəmiyyətlərin tərif H_X və H_Y altfəzalarının dim. – ölçüləri sonsuz olduğu hal üçün ümumiləşdirilir (məs., $X(t)$ və $Y(s)$ intervallar olduqda). Bu halda kanonik korrelyasiyalar toplusu B_X və B_Y operatorlarının spektrini eməle gətirir (eyni bir), kanonik kəmiyyətlər isə bu operatorların H fəzasına daxil olmayan məxsusi funksiyalardır, bu şərtlə ki, bunlar kəsilməz spektrın nöqtələrinə uyğun olsun və [4]-dəki kəsilməz spektrli operatorların spektral nəzəriyyəsində qəbul olunmuş mənada anlaşılsın. T. p.-lər üçün kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlərin daha ümumi tərifində xətti funksionallar fəzası əvəzinə [5] funksionallarının daha geniş siniflərinə baxılır.

T. p.-lerin proqnozlanması məsələsinə tətbiqdə T çoxluğu «keçmiş», S isə «gelecek» kimi anlaşılır, məs., $T = [t - T_0, t]$; $S = [t + \tau, t + \tau_0 + s_0]$, $Y(s) \equiv X(s)$. Bu halda V_i kanonik kəmiyyətləri – $X(t)$ prosesinin «geleceyinin» funksionalları ən yaxşı özü də proqnozlanan olur. U_i prediktorlardır, bu prediktorlar üzrə V_i kəmiyyətləri $\dot{V}_i = \rho_i U_i$ dusturu ilə proqnozlaşdırılır.

Misal 1. $X(t)$ – stasionar artımlı, spektral sıxlığı isə $f(\omega) = C/\omega^{2\alpha}$ olan T. p. olsun, burada $1/2 < \alpha < 3/2$, $T = (-\infty, t)$, $S = (t + \tau, \infty)$. Onda kanonik korrelyasiyalar çoxluğu t və τ -dan asılı deyildir, kəsilməzdir və $0 \leq \rho \leq |\sin \pi \alpha|$ intervalını doldurur (bax, [6]).

Misal 2. $X(t)$ – spektral sıxlığı rəşional

$$f(\omega) = B \prod_{k=1}^m |\omega - \beta_k|^2 / \prod_{l=1}^n |\omega - \alpha_l|^2$$

funksiyası olan təsadüfi stasionar proses olsun, burada $B > 0$, $\text{Im } \alpha_l > 0$, $\text{Im } \beta_k \geq 0$, $T = (-\infty, t)$, $S = (t + \tau, \infty)$. Onda yalnız n sayda (U_i, V_i) kanonik kəmiyyət cütleri və ρ_i kanonik korrelyasiyaları vardır və bunlar $2n$ sayda cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur (bax, [7], [8]).

Əd.: [1] Hotelling H., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук», 1938, № 3, с. 339–70; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Ахнесьер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Хар., 1978; [5] Нанпан Е. J., «J. Austral. Math. Soc.», 1961, v. 2, p. 229–42; [6] Фортус М. И., «Докл. АН СССР», 1983, т. 271, № 6, с. 1325–28; [7] Яглом А. М., в кн.: Bernoulli – Bayes – Laplace anniversary volume, В. – [u. a.], 1965, p. 241–52; [8] Фортус М. И., в сб.: Физика атмосферы и проблема климата, М., 1980, с. 139–61.

TƏSADÜFİ PROSES kənquru tip «случайный процесс» типа кенгуру; kangaroo random process – ixtiyari ardıcıl iki kəsilmə nöqtələri t_{n-1} və t_n arasında $t_{n-1} < t \leq t_n$ intervalllarında sabit X_n qiymətlərini alan, kəsilmə zaman üzrə biricins ele $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ Markov prosesidir ki, $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ – ehtimal paylanması verilən, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı. $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ isə eksponensial paylanma qanununa tabe, ehtimal sıxlığı $p_n(\tau) = \lambda_n e^{-\lambda_n \tau}$, $\tau \geq 0$ olan təsadüfi kəmiyyətdir, burada $\lambda_n = \lambda(x_n)$, X_n təsadüfi kəmiyyətinin aldığı x_n qiymətindən asılıdır. $X(t)$ prosesinin stasionar ehtimal paylanması X_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması və $\lambda(x)$ funksiyası ilə ifadə oluna bilər; eger $X(t_0)$ paylanması hər hansı qeyd olunmuş t_0 qiyməti üçün bu stasionar paylanma ilə üst-üstə düşərsə, onda $X(t)$ korrelyasion funksiyası X_n kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması və $\lambda(x)$ funksiyası ilə təyin olunan stasionar təsadüfi prosesdir. Xüsusi halda, λ x -dən asılı

olmadıqda, kənquru tip T. p. Kubo – Anderson prosesinə çevrilir (bax, Nöqtəvi təsadüfi proses).

Kənquru tip T. p. [1]-də statistik optikanın xüsusi bir məsələsi ilə bağlı daxil olunmuşdur, bu modelin digər fiziki tətbiqləri də vardır (bax, məs., [2], [3]).

Əd.: [1] Brissaud A., Frisch U., «J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.», 1971, v. 11, № 12, p. 1767–84; [2] Brissaud A., Frisch U., «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, № 5, p. 524–34; [3] Шапиро В. Е., Логинов В. М., Динамические системы при возмущениях, Новосибир., 1983.

TƏSADÜFİ PROSES; kəsilmələr «случайный процесс; пересечения; crossings of a random process» – təsadüfi prosesin seçimi funksiyasının qrafikin zaman parametri və faza fəzasının düz hasilinin hər hansı müəyyən oblastının sərhədi ilə kəsildiyi nöqtələrdir. $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ həqiqi təsadüfi prosesi üçün u səviyyəli kəsilmələr ele nöqtələrdir ki, bu nöqtələrdə $\zeta(t) = u$, $u = 0$ səviyyəli kəsilmələr təsadüfi prosesin sıfırları adlanır. Həqiqi təsadüfi prosesin u səviyyəli kəsilmələrinə baxılarkən, adətən, fərz olunur ki: 1) prosesin seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməzdir və təsadüfi prosesin verildiyi oblastın heç bir intervalında eyniliklə u -ya bərabər deyildir; 2) eger təsadüfi prosesin verildiyi oblastın sonlu sərhəd nöqtələri varsa, onda seçimi funksiyaların bu nöqtələrdəki qiymətləri sanki yəqin u -dan fərqlidir. Belə seçimi funksiyalarla u səviyyəsinin kəsilmələri aşağıdakı kimi təsnif olunur (bax, [1]).

Eger t_0 nöqtəsinin ixtiyari ətrafında ele t_1 və t_2 nöqtələri tapılsa ki, $(\zeta(t_1) - u)(\zeta(t_2) - u) < 0$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $\zeta(t)$ seçimi funksiyasının t_0 anında əsl kəsilməsi vardır. Bütün digər u səviyyəli «kəsilmələr» toxunmalar adlanır. Eger $N_u(a, b)$, $C_u(a, b)$, $T_u(a, b)$ zaman parametrinin qiymətlərinin $[a, b]$ parçasında, uyğun olaraq, u səviyyəli kəsilmələr sayı, əsl kəsilmələr sayı və u səviyyəsinə toxunmalar sayı olarsa, onda $N_u(a, b) = C_u(a, b) + T_u(a, b)$ bərabərliyi doğrudur. Eger ele $\varepsilon > 0$ varsa ki, $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ intervalından bütün t -lər üçün $\zeta(t) \leq u$ ($\zeta(t) \geq u$) və $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ intervalından bütün t -lər üçün $\zeta(t) \geq u$ ($\zeta(t) \leq u$) münasibətləri ödənilsin, onda t_0 anında əsl kəsilmə u səviyyəsindən kənara çıxış (u səviyyəsi altına giriş) adlanır. Ümumi halda, $C_u(a, b) > U_u(a, b) + D_u(a, b)$ bərabərsizliyi ödənilir, burada $U_u(a, b)$ və $D_u(a, b)$ uyğun olaraq, $[a, b]$ parçasında u səviyyəsindən çıxış və u səviyyəsi altına girişlərin sayıdır. Lakin $\zeta(t)$ T. p.-nin birölçülü sıxlıq funksiyası $p_t(x)$, $[a, b]$ parçasında müntəzəm məhdud olarsa və T. p.-in seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməz differensiallandırlarsa, onda sanki yəqin $T_u(a, b) = 0$, $N_u(a, b)$ sonlu və $N_u(a, b) = C_u(a, b) = U_u(a, b) + D_u(a, b)$ olur, yeni bütün kəsilmələr əsl kəsilmələrdir və bunlardan hər biri ya çıxışdır və ya girişdir.

Eger $\zeta(t)$ Qauss T. p.-nin kvadratik orta mənada törəməsi $\dot{\zeta}(t)$ varsa, kvadratik orta mənada kəsilməzdirsə, onda cırlaşmayanlığın təbii şərtlərində (bax, [1])

$$M N_u(a, b) = \int_a^b dt \int_{-\infty}^{\infty} |y| p_t(u, y) dy$$

olur, burada $p_t(x, y)$, $-\zeta(t)$ və $\dot{\zeta}(t)$ qiymətlərinin (təsadüfi kəmiyyətlərinin) birgə paylanması sıklıq funksiyasıdır.

Əgər, bundan başqa, üst-üstə düşməyən ixtiyari $t_1, \dots, t_k$ zaman anları üçün $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)$ və $\dot{\zeta}(t_1), \dots, \dot{\zeta}(t_k)$ kəmiyyətlərinin birgə paylanması cırlaşmayan paylanmadır və uyğun paylanma sıklığı funksiyası $p_t(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$ olarsa, onda $[a, b]$ parçasında kəsilmələr sayı $N_u(a, b)$ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib faktorial momenti –

$$M_k(a, b) = \mathbf{M}N_u(a, b)[N_u(a, b) - 1] \dots [N_u(a, b) - k + 1]$$

$$M_k(a, b) = \int_a^b \dots \int_a^b dt_1 \dots dt_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |y_1 \dots y_k| \times \\ \times p_t(u, \dots, u, y_1, \dots, y_k) dy_1 \dots dy_k$$

düsturu ilə hesablanır (bax, [2]).

$\zeta(t)$ kovariasion funksiyası $B(t)$ olan stasionar Gauss T. p. olarsa, $\mathbf{M}N_u(a, b)$ -nin sonlu olması üçün $B''(0)$ kəmiyyətinin sonlu olması zəruri və kifayətdir və bu isə $\zeta(t)$ -nin kvadratik orta menada differensiallanan olması ilə eynigüclüdür. Bu halda

$$\mathbf{M}N_u(a, b) = \\ = \pi^{-1}(b-a)(-B''(0)/B(0))^{1/2} \exp(-u^2/2B(0)),$$

$$\mathbf{M}U_u(a, b) = \mathbf{M}D_u(a, b) = (1/2)\mathbf{M}N_u(a, b).$$

Faktorial momentlərin sonluluğu haqqında məsələlər bir çox müəlliflər tərəfindən öyrənilmişdir (bax, [3]). Yalnız bir dəfə, kvadratik orta menada differensiallanan və ixtiyari k tərtib sonlu faktorial momentlərə malik olan T. p.-lərə aid misallar məlumdur.

Əgər $\zeta(t)$ stasionar Gauss T. p.-nin kovariasion funksiyası $B(t)$

$$\int_0^{\infty} t \left(|B(t)| + |B'(t)| + |B''(t)| \right) dt < \infty$$

şərtini ödəyirsə, $\mathbf{M}\zeta''(t) = 0$ olarsa və $N_u(0, T)$ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası ixtiyari $T > 0$ üçün sonlu olarsa, onda $\sigma > 0$ vardır ki,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{N_u(0, T) - \mathbf{M}N_u(0, T)}{\sigma^2 T} < x \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$$

münasibəti doğrudur.

Əgər orta kəsilmələr sayı $\mathbf{M}N_u(a, b)$ T. p.-in verildiyi oblastın ixtiyari sonlu $[a, b]$ parçasında sonlu olarsa, bu təsadüfi prosesin u səviyyəsini kəsmə momentlərinə *nöqtəvi təsadüfi proses* kimi baxmaq olar. Belə yanaşma çox maraqlı nəticələrə gətirir. Məs., $\zeta(t)$ riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan stasionar Gauss T. p. olarsa və onun kovariasion funksiyası $B(t)$ $t \rightarrow 0$ olduqda $B(t) = B(0) - Ct^2 + o(t^2)$, $C > 0$ və $t \rightarrow \infty$ olduqda $B(t) \ln t \rightarrow 0$ münasibətləri ilə ifadə olunarsa, onda

səviyyənin və miqyasın uzlaşaraq dəyişmələrini ele tənzimləmək olarsa ki, orta çıxışların sayı $\mathbf{M}U_u(0, 1)$ sabit a -ya bərabər olsun, $0 < a < \infty$, onda u səviyyəsindən kənara çıxışların təsadüfi nöqtəvi prosesi $u \rightarrow \infty$ olduqda, paylanmaya görə, a parametrlili Puasson nöqtəvi stasionar prosesinə yığılır.

$\mathbf{M}N_u(a, b) = +\infty$ olduğu halda, $A_u(\xi) \cap [a, b]$ Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsünün araşdırılması maraqlıdır, burada $A_u(\xi) = \{t: \zeta(t) = u\}$, $-\zeta(t)$ T. p.-nin u səviyyələri çoxluğudur. Mərkəzlənmiş separabel Gauss T. p. $\zeta(t)$ -nin riyazi gözləməsi – $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, kovariasion funksiyası – $B(s, t) = \mathbf{M}\zeta(s)\zeta(t)$ və hər bir u , w cütü üçün sıfırdan fərqli, sonlu

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-a} B(tv, tw) = K(v, w)$$

limiti olsun.

Onda $A_0(\xi) \cap [0, 1]$ Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsü sanki yəqin $1 - (a/2)$ -yə bərabərdir (bax, [4]). Viner prosesi üçün bu çoxluğun dim. – ölçüsü $1/2$ -ə bərabərdir.

$\mathbf{M}N_u(a, b)$ riyazi gözləməsinin sonlu parçalarda sonsuz olduğu halında, $A_u(\xi)$ səviyyəli çoxluqların öyrənilməsi $\tau - p a \xi k a$ adlandırılan, u səviyyəli kəsilmələrin ele «kompakt» qurğularının daxil olunması ilə bağlıdır ki, bu qruplar, τ -ya ($\tau > 0$) bərabər və ya τ -dan böyük məsafədə bir-birindən aralı qonşu kəsilmələri özündə saxlamır, eyni zamanda da bir-birindən digər τ - parçaların τ -nu aşmayan məsafəsi qədər uzaqdırlar.

Məs., $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan Gauss stasionar $\zeta(t)$ T. p. üçün onun kovariasion funksiyasının

$$B(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|t|), \quad \alpha > 0$$

olduğu halında $u \rightarrow \infty$ olduqda τ - parçanın orta uzunluğu üçün asimptotik ifadə alınmışdır və τ - parçalar başlanan $\tau - n \text{ ö q t l e r i n } T. p. \text{ öyrənilmişdir (bax, [5]).$

Seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməz differensiallanan olan T. p.-in lokal ekstremumlarının və stasionar nöqtələrinin tədqiqi T. p.-in kəsilmələrinin öyrənilməsi ilə sıx bağlıdır. Əgər riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan Gauss stasionar T. p.-nin

kvadratik orta menada ikinci tərtib törəməsi $\ddot{\zeta}(t)$ vardırsa, onda $\zeta(t)$ T. p.-nin $[a, b]$ parçasında, hündürlüyü ya u -ya bərabər və ya u -dan böyük olan, lokal maksimumlarının orta sayı

$$\nu_n(a, b) = (b-a) \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} |z| p(x, 0, z) dz$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $p(x, y, z)$, $-\zeta(t)$, $\dot{\zeta}(t)$, $\ddot{\zeta}(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması birgə sıklıq funksiyasıdır.

$Y_t = Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_m(t))$, $-\mathbb{R}^m$ -dən qiymətlər alan və sanki yəqin kəsilməz differensial seçimi funksiyalara malik

m – ölçülü vektor təsadüfi proses, $D \subset \mathbb{R}^m$ isə sərhədi verilmiş $\Phi(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$ olan, kifayət qədər hamar S_Φ oblastı olsun:

$$S_\Phi = \{y \in \mathbb{R}^m : \Phi(y) = 0\}, \quad D = \{y \in \mathbb{R}^m : \Phi(y) < 0\}.$$

Əgər $\Phi(Y_\tau) = 0$ olarsa, Y T. p.-nin seçimi funksiyasının τ anında S_Φ sərhədində kəsilməsi vardır. Əgər $\varepsilon > 0$ varsa ki, $(\tau - \varepsilon, \tau)$ intervalında $\Phi(Y_\tau) < 0$ ($\Phi(Y_\tau) > 0$) və $(\tau, \tau + \varepsilon)$ intervalında $\Phi(Y_\tau) > 0$ ($\Phi(Y_\tau) < 0$) münasibətləri ödənilsin, onda τ anında S_Φ sərhədində kəsilmə D oblastından çıxış (D oblastına giriş) adlanır. Sərhədin bütün digər kəsilmələri toxunmalar adlanır. Əgər $Y(t)$ T. p.-nin birölçülü ehtimal sıxlığı funksiyaları $p_t(y)$ varsa və bunlar $y \in \mathbb{R}^n$ və t üzrə müntəzəm məhduddurlarsa, onda: (a) $Y(t)$ T. p.-nin D oblastının sərhədi S_Φ -ə toxunması 1 ehtimalla yoxdur; (b) ixtiyari sonlu zaman intervalında S_Φ sərhədindən çıxış və sərhəd altına girişlərin ümumi sayı 1 ehtimalla sonludur. $Y(t)$ prosesi üzərində qoyulan bəzi əlavə şərtlərlə $Y(t)$ prosesinin $s_1 \leq t \leq s_2$ zaman intervalında $\Gamma \subset S_\Phi$ çoxluğuna giriş və ondan çıxış saylarının faktorial momentləri üçün [6]-da düsturlar alınmışdır.

$\zeta(t)$ ilə həqiqi stasionar T. p. olsun ki, onun riyazi gözləməsi $M\zeta(t) = 0$, kovariasion funksiyası

$$B(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t dF(\lambda),$$

spektral ifadəsi isə

$$\zeta(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t du(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t dv(\lambda)$$

olsun, burada $u(\lambda)$ və $v(u)$ – ortoqonal artımlı proseslərdir və

$$Mu(\lambda) = Mv(\lambda) = 0, \quad Mu(\lambda)v(\mu) = 0$$

$$M[du(\lambda)]^2 = M[dv(\lambda)]^2 = dF(\lambda).$$

$$\hat{\zeta}(t) = \int_0^\infty \sin \lambda t du(\lambda) - \int_0^\infty \cos \lambda t dv(\lambda)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\hat{\zeta}(t)$ prosesi $\zeta(t)$ prosesinin Hilbert çevirməsi adlanır. $Z(t) = [\zeta^2(t) + \hat{\zeta}^2(t)]^{1/2}$ T. p.-ne $\zeta(t)$ T. p.-nin qurşayarı deyilir. $Z(t)$ təsadüfi prosesinin n səviyyəsindən çıxışları $Y(t) = (\zeta(t), \hat{\zeta}(t))$ vektor T. p.-nin $D = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 < u^2\}$ dairəsinin sərhədinin çıxışlarına uyğundur. Əgər $\zeta(t)$ Qauss T. p. olarsa, belə çıxışların nöqtevi T. p.-nin intensivliyini aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür. Doğrudan da, $\zeta(t)$ Qauss T. p.-dirsə və $M\zeta(t) = 0$ olarsa və $|t| \leq t_0$,

$t_0 > 0$ üçün $|B^*(0) - B^*(t)| \leq C/|t|^{1+\varepsilon}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ şərti ödənilsə, onda bu intensivlik

$$\mu_n^+ = (\lambda_2 - \lambda_1^2 \lambda_0^{-1})^{1/2} (2\pi \lambda_0)^{-1/2} (u/\lambda_0^{1/2}) \exp(-u^2/2\lambda_0)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\lambda_k = \int_0^\infty \lambda^k \cos \lambda t dF(\lambda).$$

Belə yanaşmadan istifadə olunma $Z(t)$ T. p.-nin aşma – enmələrinin müxtəlif xarakteristikalarını tədqiq etməyə imkan verir (bax, *Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın*).

Əd. [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Малевич Т. Л., в. сб.: Случайные процессы и статистические выводы, в. 5, Таш., 1975, с. 73–79; [3] Мирошин Р. Н., Пересечения кривых гауссовскими процессами, Л., 1981; [4] Островский Е. И., «Вестн. Моск. Ун-та. Матем. механ.», 1973, № 2, с. 23–29; [5] Беляев Ю. К., Питербарг В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 13, в. 2, с. 217–27; [6] Беляев Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 333–37; [7] Беляев Ю. К., в кн.: Стационарные случайные процессы, пер. с англ., с. 341–78, М., 1969; [8] Питербарг В. И., Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с англ., М., 1978, с. 258–80; [9] Питербарг В. И., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99.

TƏSADÜFİ PROSES kvant «случайный процесс квантовый; quantum random process» – bax, *Kvant təsadüfi prosesi*.

TƏSADÜFİ PROSES qarşılıqlı asılı olmayan qiymətlərli «случайный процесс с взаимно независимыми значениями; stochastic process with mutually independent values» – $n_1, \dots, n_k$ tam ədədlərinin ixtiyari sonlu qrupu üçün $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin k – ölçülü paylanma funksiyası $F(x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$,

$$F(x_{n_1}, \dots, x_{n_k}) = F_{n_1}(x_{n_1}) \cdot \dots \cdot F_{n_k}(x_{n_k})$$

şərtini ödəyən $\{\xi_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ prosesinə deyilir. $F_n(x)$, – ξ_n təsadüfi kəmiyyətinin birölçülü paylanma funksiyasıdır. Belə k – ölçülü ($k=1, 2, \dots$) paylanma funksiyaları ailəsi simmetriklik və uzlaşma şərtini ödədiyindən Kolmoqorov teoreminə əsasən tamqiymətli parametrlili təsadüfi proses vardır və bu təsadüfi prosesin sonlu ölçülü paylanma funksiyaları ailəsi bütün F -lərin ailəsi ilə üst-üstə düşür. F -in təyin olunmasına əsasən, aydındır ki, ξ_n -lər qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olur.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri-antisipativ «случайный процесс; непредсказуемый; non-anticipating random process» – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri-xəttili filtrasiya «случайный процесс; нелинейная фильтрация; nonlinear filtering of a random process» – bax, *Qeyri-xəttili filtrasiya(sı) təsadüfi proseslərin*.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri-xətti modeller «случайный процесс; нелинейные модели; nonlinear models of a random process» – bax, Qeyri-xətti modeller(i) təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri-xətti proqnozlaşdırma «случайный процесс; нелинейное прогнозирование; nonlinear prediction/extrapolation of a random process» – bax, Qeyri-xətti proqnozlaşdırma(sı) təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES; qurşayan «случайный процесс; огибающая; envelope of a random process» – bax, Təsadüfi proses; kəsilmələr.

TƏSADÜFİ PROSES; limit teoremləri «случайный процесс; предельные теоремы; limit theorems for random process» – bax, Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES Loev mənada harmonikləşən «случайный процесс гармонизируемый в смысле Лоева; Loeve's harmonizable random process» – bax, Böyük ədədlər qanunu qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES; maksimum «случайный процесс; максимум; maximum of a random process» – təsadüfi prosesin seçimi funksiyasının ekstremal qiymətidir. T. p. nəzəriyyəsinin mühüm məsələlərindən biri – $Z(t) = \sup_{t \in T} \zeta(t, \omega)$ funksionalının paylanması öyrənilməsi-

dir, burada $\zeta(t, \omega)$ – separabel T. p., T – hər hansı parametrik çoxluqdur. $\zeta(t, \omega)$ -nın ixtiyari parametrik T çoxluğunda, yaxud Evklid fəzasının altçoxluğunda Gauss T. p. olduğu hal sisteməlik surətdə araşdırılmışdır. $Z(T)$ kəmiyyətinin dəqiq paylanması bəzi cırılmış hallar (məs., ζ – sinusoid olduqda) və əlavə olaraq, ζ Markov xassəli proses olduğu hal üçün hesablanmışdır [$w(t)$ Viner prosesi, düzxətdə Markov stasionar Gauss T. p., $a(w(t+b) - w(t))$, $a > 0$, $b > 0$ tipli təsadüfi proses üçün]. $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ – riyazi gözleməsi sıfır bərabər, Gauss T. p., T – ixtiyari çoxluq olsun. Onda $\mathbf{P}\{Z(T) < \infty\} = 0$ və ya $= 1$ olur (sıfır, yaxud vahid qanunu) (bax, Təsadüfi proses; trayektoriyaların rəqulyarlığı). Sonuncu halda $\mathbf{M} \exp(\alpha Z(T)^2) < \infty$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\alpha \in (-\infty, 1/2\sigma^2)$ olsun, burada $\sigma^2 = \sup_T \mathbf{M} \zeta(t, \omega)^2$. Sonuncu müddəə, Orliç fəzalar metodu vasitəsilə, subgauss təsadüfi prosesləri adlandırılan proseslərin geniş sinfi üçün ümumiləşdirilmişdir. Entropik yanaşma vasitəsilə $Z(t)$ paylanması qalıq üçün universal bərabərsizlik alınmışdır. $\psi(1) < \infty$ və $\mathbf{M} \zeta(t, \omega) \equiv 0$ olsun. Onda ixtiyari $S \subseteq T$ altçoxluğu və bütün $u > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{Z(T) > \sigma u\} \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi}u} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 + \chi(S, u/\sigma)\right),$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$$\chi(S, u) = \inf_{\varepsilon > 0} (2u^2 \varepsilon^2 + H(S, \varepsilon) + 4u \sup_{t \in S} \int_0^{\varepsilon/2} \sqrt{2 \ln N(S \cap B(t, \varepsilon), x)} dx).$$

Gauss T. p. üçün $F(a) = \mathbf{P}\{Z(T) \leq a\}$ paylanma funksiyasının kəsilmə nöqtələrinin strukturu öyrənilmişdir. $Z(t) < \infty$ şərti sanki yəqin ödənilsin və bütün $t \in T$ üçün $\mathbf{M} \zeta(t, \omega) \geq 0$, $\mathbf{D} \zeta(t, \omega) \neq 0$ olsun. Onda $F(a)$ funksiyası ola bilər ki, $a_0 = \inf\{a: F(a) > 0\}$ ($a_0 = -\infty$ ola bilər) nöqtəsi istisna olunmaqla, hər yerdə kəsilməzdir. $(a_0, +\infty)$ intervalında $F(a)$ mütləq kəsilməzdir, onun törəməsi $F'(a)$ təyin olunmuşdur və $(a_0, +\infty)$ intervalının sıçrayışları aşağı yönələn, hesabi saydan çox olmayan nöqtələrindən başqa, bütün nöqtələrdə kəsilməzdir, ixtiyari $a > a_0$ üçün $F'(a)$, $(a_0, +\infty)$ çoxluğunda məhdud variasiyaya malikdir.

Stasionar və qeyri – stasionar Gauss T. p.-lərinin geniş sinfi üçün $Z(t)$ paylanmasının qalığının dəqiq asimptotikası tapılmışdır ki, bu proseslər üçün $d(t, s)$ funksiyası $t \rightarrow s$ olduqda qüvvət üstlü şəkilli olur. $T = [0, A]$, $\zeta(t, \omega)$ – düzxətdə stasionar Gauss T. p. olsun. Fərz olunur ki, $\mathbf{M} \zeta(t, \omega) = 0$, $\mathbf{M} \zeta(t, \omega)^2 = 1$, prosesin kovariasion funksiyası isə

$$r(t) = 1 - C|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), t \rightarrow 0, r(t) < 1, t \in (0, A] \quad (*)$$

şərtini ödəyir. Onda

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} u^{1-2/\alpha} \exp(u^2/2\sigma^2) \mathbf{P}\{Z(T) > u\} = AC^{-1/\alpha} H_\alpha$$

bərabərliyi doğrudur, burada

$$H_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} H_\alpha(t)/t, 0 < H_\alpha < +\infty, H_\alpha(t) = \mathbf{M} \exp\left(\max_{s \in [0, t]} Y(s)\right),$$

$Y(s)$ – Gauss T. p.-dir, $\mathbf{M} Y(s) = -|s|^\alpha$, $\text{cov}(Y(s),$

$Y(v)) = |s|^\alpha + |v|^\alpha - |s-v|^\alpha$ (bax, [3]). Stasionar proseslər və meydanlar üçün ümumiləşmələr mövcuddur (bax, [3], [4]). Naməlum parametrlər halında Kolmoqorov tipli statistika üçün limit meydanları olan diffuzion tipli meydanlar da çoxölçülü halda araşdırılmışdır. Həmin trayektoriyalı stasionar Gauss T. p.-ləri halında müqayisə teoremi yerinə yetirir. Əgər $\zeta_1(t, \omega)$ və $\zeta_2(t, \omega)$ cırışmayan Gauss T. p.-ləri $\mathbf{M} \zeta_i(t, \omega) \equiv 0$, $\mathbf{M} \zeta_i(t, \omega)^2 = \mathbf{M} \zeta_j(t, \omega)^2 \equiv 1$ və $\mathbf{M} \zeta_j^*(t, \omega)^2 < \infty$, $i = 1, 2$ şərtləri ilə təyin olunursa, onda ələ $C = C(T)$ və $\rho > 0$ konstantları vardır ki,

$$\left| \mathbf{P}\{Z_{X_1}(T) < u\} - \mathbf{P}\{Z_{X_2}(T) < u\} \right| \leq C \exp(-u^2(1+\rho)/2), T = [0, A], u > 0$$

berəbərsizliyi ödənilir. Bu bərabərsizlik və onun çoxölçülülüyə hala ümumiləşməsi

$$P\{Z_{X_i}(T) > u\} = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx + \frac{A}{2\pi} e^{-u^2/2} + O(\exp(-u^2(1+\delta)/2)), \quad \delta > 0$$

asimptotik ayrılışını almağa imkan yaradır (meydanlar üçün bax, [3]).

Asimptotikalarnı yuxarıda qeyd olunmuş nöqtələri əsasında stasionar Qauss T. p. və ya genişlənən intervalda meydanın maksimumu üçün limit teoremləri alınmışdır. Əgər (*) şərtindən başqa, $t \rightarrow \infty$ olduqda $r(t) \ln t \rightarrow 0$ şərti də ödənilərsə, onda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} P\{l(\tilde{A}, \alpha)(Z(T) - l(\tilde{A}, \alpha)) < x\} = e^{-e^{-x}}$$

olur, burada $T = [0, A]$, $\tilde{A} = (2\pi)^{-1/2} H_\alpha A$.

$$l(C, \alpha) \sqrt{2 \ln C} + (2/\alpha - 1) \ln \sqrt{2 \ln C} / \sqrt{2 \ln C}.$$

Əgər bundan başqa Qauss T. p. üçün yuxarıda qeyd olunmuş, X' və X'' üzərinə qoyulmuş normalanma və hamarlıq şərtləri də ödənilərsə, onda bu limit münasibətində yığılma sürəti loqarifmikdir və yaxşılaşdırılmayıdır, həmçinin elə $\delta > 0$ vardır ki, $A \rightarrow \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm olaraq

$$P\{(Z(T) < l(\tilde{A}, 2) + x/l(\tilde{A}, 2))\} = \exp(-\exp(-x - x^2/2l(\tilde{A}, 2)^2)) + O(A^{-\delta})$$

münasibəti ödənilir, burada $l(\tilde{A}, 2) = \sqrt{2 \ln(A/2\pi)}$.

Bu nəticə stasionar Qauss meydanı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Slepian D., «Bell System Techn. J.», 1962, v. 41, p. 463–501; [2] Цирельсон Б. С., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1975, т. 20, в. 4, с. 865–73; 1984, т. 31, в. 1, с. 44–50; [3] Питербарг В. И., Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей, М., 1988; [4] Фаталов В. Р., «Докл. АН Арм. ССР», 1983, т. 77, № 1, с. 25–29; [5] Ферник К., в сб.: Случайные процессы. Выборочные функции и Пересечения, М., 1978, с. 63–132; [6] Дмитриевский В. А., в сб.: Случайные процессы и поля, М., 1979, с. 22–31.

TƏSADÜFİ PROSES nöqtəvi «случайный процесс» точечный; point random process – bax, Nöqtəvi proses.

TƏSADÜFİ PROSES opsiional «случайный процесс» опциональный; optional random process – bax, Tamamla ölçülən proses.

TƏSADÜFİ PROSES ortalanmış spektrli «случайный процесс» с осредненным спектром; random process having average spectrum / asymptotically stationary random process – ortalanmış korrelyasion $B_{av}(\tau)$ funksiyası [deməli, ortalanmış spektral $F_{av}(\lambda)$ funksiyası] olan diskret və ya kəsilməz zamanlı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir. Ortalanmış spektrli T. p.-lərə [1]–[8]-də baxılmışdır. [3]-də belə proseslər spektrə malik olan

proseslər $[F_{av}(\lambda)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesinin spektrli], [5]-də bunlar korrelyasion funksiyası olan proseslər $[B_{av}(\tau)$ funksiyası qeyri-stasionar $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası], [6]-də asimptotik stasionar təsadüfi proseslər, [7], [8]-də KF sinfinin prosesləri ([5]-dəki müəlliflərin adları ilə bağlı) adlandırılmışdır.

$$B_{av}(\tau) = M\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)} = B(\tau)$$

şərtini ödəyən bütün $\zeta(t)$ stasionar prosesləri və

$\lim_{t \rightarrow \infty} M\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ limiti olan proseslər ortalanmış

spektrli T. p.-lərdir. Bundan əlavə ortalanmış spektrli T. p. sinfinə M. Loev tərəfindən (bax, [3]) daxil olunmuş bütün harmoniklənən təsadüfi proseslər, korrelyasion funksiyası

$$B_{av}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} M\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)} dt$$

düsturu ilə ifadə olunan, ixtiyari T_0 periodlu periodik korrelyar təsadüfi proseslər daxildir.

İsbat olunmuşdur ki, harmoniklənməyən, periodik korrelyar olmayan bir çox T. p.-lər ortalanmış spektrli T. p.-lərdir (məs., Harmoniklənən təsadüfi proses məqaləsində təyin olunmuş bir çox, lakin hamısı deyil, yalnız Rozanov ümumi mənasında harmoniklənən, amma Loev mənasında deyil, proseslər) (bax, [7], [8]).

Stasionar T. p.-lərin spektral nəzəriyyəsinin bir çox nəticələri ortalanmış spektrli T. p.-lər üçün də alınır (bax, məs., Ortalanmış spektral sıxlıq).

Əd.: [1] Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., 1951; [2] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Theorie des fonctions aleatoires, P., 1953; [3] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] Харкевич А. А., «Радиотехника», 1957, т. 12, в. 5, с. 5–11; [5] Kampe de Fériet J., Frenkiel E. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [6] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103; [7] Rao M. M., в кн.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [8] Chung D. K., Rao M. M., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 7–118.

TƏSADÜFİ PROSES; ortogonal ayrılış «случайный процесс» ортогональное разложение; orthogonal expansion of a random process – bax, Karunen – Loev ayrılışı.

TƏSADÜFİ PROSES ossilyar «случайный процесс» осциллирующий; oscillating random process – bax, Evolyusionar spektral ifadə.

TƏSADÜFİ PROSES öngörül «случайный процесс» предсказуемый; predictable random process – bax, Öngörül təsadüfi proses.

TƏSADÜFİ PROSES periodik korrelyarlanmış «случайный процесс» периодически коррелированный; periodically correlated random process – bax, Periodik korrelyar təsadüfi proses.

TƏSADÜFİ PROSES periodik paylanmış «случайный процесс» периодически распределенный; periodically distributed random process – bax, Periodik paylanmış təsadüfi proses.

TƏSADÜFİ PROSES pilləvari «случайный процесс ступенчатый; step random process» – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; *proqnozlaşdırma, ekstrapolyasiya* «случайный процесс; прогнозирование, экстраполяция; forecasting/extrapolation of a random process» – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* cari s anına qədər müşahidə qiymətləri əsasında gələcək $t > s$ zamanında onun qiymətlərinin qiymətləndirilməsi haqqında məsələdir. Proqnozlaşdırma, adətən, ekstrapolyasiya statistik qiyməti $\hat{\zeta}(t)$, $t > s$ *təsadüfi* kəmiyyətinin təyin olunması kimi anlaşılır, bu statistik qiymətin kvadratik orta xətası $M \left| \zeta(t) - \hat{\zeta}(t) \right|^2$, s anına qədər baxılan prosesin keçmişdəki qiymətləri üzrə alınmış digər statistik qiymətlərlə müqayisədə minimal olur [xətti statistik qiymətlər halında proqnozlaşdırma xətti proqnozlaşdırma (proqnozlaşdırma) adlanır].

Stasionar təsadüfi ardıcılığın xətti proqnozlaşdırması məsələsi bu anlamda qoyulan məsələlərdən birincisi kimi həll olunmuşdur və aşağıdakı məsələ ilə analojiidir: $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ parçasında kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzası L^2 -də $\varphi(\lambda) \in L^2$ funksiyasının $e^{i\lambda k} \varphi(\lambda)$, $k = 0, -1, -2, \dots$ funksiyalarının doğurduğu fəzaya proyeksiyasını tapmaq tələb olunur; bu məsələ *stasionar təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunmuşdur. $Y(t)$, $t > t_0$ bəyaz küyü və l tərtib xətti differensial L operatoru ilə verilən $L\zeta(t) = Y(t)$, $t > t_0$ sisteminde yaranan T p.-in proqnozlaşdırılması məsələsi tətbiqə aid misaldır; bu halda $t_0 \leq t \leq s$ anlarında qiymətlər üzrə bəyaz küydən asılı olmayan $\zeta^k(t_0)$, $k = 0, \dots, l-1$ başlanğıc qiymətlərində ən yaxşı $\hat{\zeta}(t)$, $t > s$ proqnozu başlanğıc şərtləri

$\hat{\zeta}^{(k)}(s) = \zeta^{(k)}(s)$, $k = 0, \dots, l-1$ olan uyğun $L\hat{\zeta}(t) = 0$, $t > s$ tənliyi ilə verilə bilər. Stoxastik differensial tənliklər sistemi üçün müşahidə olunmuş bezi komponentlərin qiymətləri üzrə digər komponentlərin proqnozlaşdırılması məsələsi ekstrapolyasiyasının uyğun stoxastik tənliklərinə gətirir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 215–55; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES *progressiv ölçülən* «случайный процесс прогрессивно измеримый; progressively measurable random process» – bax, *Progressiv ölçülən proses*.

TƏSADÜFİ PROSES *Rozanov mənada harmonikləşən* «случайный процесс гармонизуемый в смысле Розанова; Rozanov harmonizable random process» – bax, *Böyük ədədlər qanunu* qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES *sayıcı* «случайный процесс считающий; counting random process» – bax, *Nöqtəvi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; *sədd modeli* «случайный процесс; пороговая модель; threshold model random process» – bax, *Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün*.

TƏSADÜFİ PROSES *sıçrayışvari* «случайный процесс скачкообразный; jump random process» – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; *sıfırlar* «случайный процесс; нули; zeros of a random process» – *heqiqi təsadüfi prosesin* seçimi funksiyasının sıfır qiymətini aldığı nöqtələrdir. T p.-in sıfırlarının öyrənilməsi T p.-in kəsilmələrinin tətbiqi ilə sıx bağlıdır. Tətbiqdə ən böyük maraq doğuran məsələlərdən ardıcıl sıfırlar arasında məsafələrin paylanması və verilmiş parçada sıfırların olmaması kimi məsələlərdir (bax, [1]). Bu məsələlərin dəqiq həllərini yalnız bezi xüsusi hallar üçün almaq mümkündür, məs., riyazi gözlemələri sıfır bərabər, kovariasion funksiyalar

$$B(t) = e^{-|t|}$$

olan stasionar Gauss prosesləri (Gauss–Markov prosesi) üçün və

$$B(t) = (3/2) e^{-|t|/\sqrt{3}} \left(1 - (1/3) e^{-2|t|/\sqrt{3}} \right)$$

olan *Yonq prosesi* üçün. Verilmiş parçada sıfırların olmaması ehtimallarının müqayisəsi haqqında keyfiyyətli nəticələr müxtəlif proseslər üçün Slepian lemmasına əsaslanır.

Əmsalları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, dərəcələri qeyri – məhdud artan cəbri və triqonometrik polinomların sıfırları üçün bir sıra asimptotik nəticələr alınmışdır (bax, məs., [2] – [5]).

Əd.: [1] Мирошнин Р. Н., Пересечения кривых гауссовскими процессами, Л., 1981; [2] Dunne J. E. A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1966, v. 16, № 1, p. 53–84; [3] Logan B. F. Shepp L. A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1968, v. 18, № 1, p. 29–35; [4] Farahmand K., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, № 2, p. 702–709; [5] Farahmand K., «Stoch. Anal. and Appl.», 1987, v. 5, № 4, p. 379–86.

TƏSADÜFİ PROSES; *sonluölçülü paylanmalar* «случайный процесс; конечномерные распределения; finite dimensional distributions of a random process» – *təsadüfi prosesin* əsas xarakteristikəsidir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında $\zeta(t)$ T p.-i parametrik T çoxluğu və fəza fəzası $(S, \mathcal{B})$ ilə verilmiş olsun. $(\zeta(t))_{t \in T}$ ailəsindən olan təsadüfi elementlərin ixtiyari sonlu

toplusunun birgə paylanmaları toplusuna $\zeta(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları toplusu deyilir.

Başqa sözlə, $\zeta(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $(S^n, \mathcal{B}^n)$ fəzalarında $(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n))$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusunun ixtiyari $n = 1, 2, \dots$ və $t_1, \dots, t_n \in T$ qiymətlərində n – ölçülü paylanmalarını təyin edən ehtimal ölçülərini əmələ gətirir. Burada $(S^n, \mathcal{B}^n)$, – $(S, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasının özü-özünə n – qat hasilidir. T p.-in sonluölçülü paylanmaları toplusu T p.-in əsas xarakteristikəsidir. T p.-in sonluölçülü paylanmaları geniş mənada stoxastik ekvivalentlik anlayışı ilə əlaqədardır (bax, *Stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər*). T p.-in sonluölçülü paylanmalarının $(S^n, \mathcal{B}^n)$ fəzalarında $n = 1, 2, \dots$ və $t_1, \dots, t_n \in T$ -lərin bütün mümkün qiymətlərində

əvvəlcədən verilmiş ehtimal ölçüləri $\mu_1, \dots, \mu_n(\cdot)$ ilə üst-üstə düşməsinin mümkünlüyü haqqında məsələ mühüm problemdir. Bu problem Kolmoqorovun sonluölçülü paylanmalar haqqında teoreminə öz həllini tapmışdır.

Əd.: [1] Гикман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

TƏSADÜFİ PROSES stasionar «случайный процесс» стационарный; *stationary random process* – bax, *Stasionar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES stasionar artımlı «случайный процесс» со стационарными приращениями; *random process stationary increments* – diskret və ya kəsilməz t zamanlı $X(t)$ *təsadüfi prosesdir* ki, onun hər hansı qeyd olunmuş tərtib artımlarının statistik xarakteristikaları zaman üzrə dəyişmir (yeni $t \rightarrow t + a$ zaman yerindəyişmələrinə invariantdırlar). Stasionar T. p.-lər halında olduğu kimi stasionar artımlı T. p.-lər iki tipə ayrılır: *dar mənada* stasionar artımlı T. p.-lər, yeni $t_1, \dots, t_n$ nöqtələrində və $t_1 + a, \dots, t_n + a$ nöqtələrində ixtiyari a qiymətində $X(t)$ prosesinin ixtiyari verilmiş tərtib artımlarının bütün sonluölçüsü ehtimal paylanmaları üst-üstə düşür və *geniş mənada* stasionar artımlı T. p.-lər, yeni t anında artımın orta qiyməti və t və $t + s$ anlarında artımların ikinci momentləri t -dən asılı olmur.

$t = 0, \pm 1, \dots$ diskret zamanlı $X(t)$ prosesləri halında $X(t)$ prosesinə baxmaq əvəzinə yeni

$$\Delta^n X(t) = X(t) - C_n^1 X(t-1) + \dots + (-1)^n C_n^n X(t-n)$$

T. p.-nə baxmaq olar, burada C_n^k – binomial əmsallardır. Əgər

$X(t)$ n tərtib stasionar artımlı proses olarsa, onda $\Delta^n X(t)$ prosesi artıq adi mənada stasionar proses olacaqdır; buna görə də diskret zaman halında stasionar artımlı T. p.-lər nəzəriyyəsi daha xüsusi stasionar T. p.-lər nəzəriyyəsinə gətirilir. Lakin təbiiqi nöqtəyi – nəzərdən stasionar artımlı və diskret zamanlı T. p. anlayışı əksər hallarda daha münasibdir, belə ki, praktikada bir çox təsadüf edilən açıq aşkar qeyri – stasionar olan $x(t)$, $t = 1, 2, \dots$ zaman sıralarına, onların hər hansı n tərtib artımları

$\Delta^n x(t)$ sıralarına $\Delta^n X(t)$ stasionar T. p.-in realizasiyası kimi baxmaq olar. Məs., C. Boks (G. Box) və Q. Cenkins (G. Jenkins) (bax, [1]) göstərmişlər ki, bir çox praktiki məsələlərin həllində zaman sıralarını *avtoqressiv – integrallanan sürüşən orta prosesin* (ARISO – prosesin) realizasiyanı hesab etmək olar; bu proses stasionar artımlı və diskret zamanlı xüsusi bir T. p.-dir (bax, [2] – [4]).

Kəsilməz t zamanlı birinci tərtib stasionar artımlı T. p.-lərdən (dar mənada), məs., *Viner prosesi* və *Puasson prosesini* qeyd etmək olar; bu proseslərin hər ikisi birinci tərtib asılı olmayan stasionar artımlı proseslərin daha dar sinfinə də aiddir. Kəsilməz t zaman halında stasionar artımlı T. p.-lər nəzəriyyəsi artıq bilavasitə daha sadə stasionar artımlı T. p.-lər nəzəriyyəsinə gətirilə bilinir. Birinci tərtib stasionar artımlı T. p.-lərin korrelyasion nəzəriyyəsi (yeni geniş mənada uyğun proseslərin nəzəriyyəsi) A. N. Kolmoqorov tərəfindən inkişaf etdirilmişdir (bax, [5], [6]); n – ixtiyari tam müsbət ədəd

olduqda, n tərtib stasionar artımlı T. p.-lərin oxşar nəzəriyyəsinə [7] – [9]-da baxılmışdır. Stasionar artımlı T. p.-lərin korrelyasion nəzəriyyəsində belə proseslərin və onların 2-ci tərtib momentlərinin spektral ayrılışının çıxarılışı mərkəzi yer tutur. *Ümumiləşmiş təsadüfi proses* anlayışından istifadə stasionar artımlı T. p.-lər nəzəriyyəsinə olduğu qədər sadələşdirməyə imkan yaradır; belə ki, ümumiləşmiş T. p.-lər nəzəriyyəsi çərçivəsində ixtiyari $X(t)$ T. p.-nin bütün tərtibli törəmələri olduğundan (bunlar, ümumiyyətlə, ümumiləşmiş T. p.-lərdir), n tərtib stasionar artımlı T. p.-i n -ci tərtib törəməsi $X^n(t)$ stasionar T. p. olan (ümumiyyətlə, ümumiləşmiş) $X(t)$ T. p.-i kimi təyin etmək olar.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов: прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [2] Nelson C. R., Applied time series analysis for managerial forecasting S. F., 1973; [3] Anderson O. D., Time series analysis and forecasting. The Box – Jenkins approach, L. – Boston, 1976; [4] Robinson E. A., Silvia M. T., Digital foundations of time series analysis, v. 1, The Box – Jenkins approach, S. F., 1979; [5] Колмогоров А. Н., Математика и механика, М., 1985, с. 269–73; [6] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141–96; [8] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, № 5, с. 319–44; [9] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [10] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

TƏSADÜFİ PROSES; statistik analiz «случайный процесс; статистический анализ; statistical analysis for random process» – bax, *Statistik məsələlər(i)* təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

TƏSADÜFİ PROSES; stoxastik ekvivalentlik «случайный процесс; стохастическая эквивалентность; stochastic equivalence of a random process» – bax, *Stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər*.

TƏSADÜFİ PROSES stoxastik kəsilməz «случайный процесс» стохастически непрерывный; *stochastically continuous random process* – bax, *Stoxastik kəsilməz təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES tamamilə ölçülən «случайный процесс» вполне измеримый; *well-measurable/optional random process* – bax, *Tamamilə ölçülən proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; trayektoriyaların regularlığı «случайный процесс; регулярность траекторий; regularity of trajectories/paths of a random process» – *təsadüfi prosesin* xassələrindən onun kəsilməzliyini (hamarlığını) xarakterizə edən bir xassədir. $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ – təsadüfi proses, T – hər hansı topoloji fəza olsun. Əgər bütün ω -lar üçün $\zeta(t, \omega)$ T. p.-nin bütün trayektoriyaları – $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ T -də kəsilməz olarsa, $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ T. p.-nə sanki yəqin kəsilməz proses deyilir. Separabel $\zeta(t, \omega)$ T. p.-nin $T = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$ düz xəttində sanki yəqin kəsilməzlik şərti Kolmoqorov teoreminə verilir: monoton azalan $g(h)$ funksiyası və $q(C, h)$, $h \geq 0$ mənfi olmayan funksiyasının varlığı və bu funksiyaların bəzi C və m üçün

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(2^{-n}T) < \infty$$

ve

$$Q(m, C) = \sum_{n=m}^{\infty} 2^n q(C, 2^{-n}T) < \infty$$

münasibetlərini ödədiyi fərz olunur. Onda $\zeta(t, \omega)$ prosesi $[0, T]$ -də sanki yəqin kəsilməz T. p.-dir. Bundan başqa, əgər hər hansı m üçün $C \rightarrow \infty$ olduqda $Q(m, C) \rightarrow 0$ olarsa, onda sanki yəqin ələ müsbət $\gamma = \gamma(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sup_{\substack{t', t'' \in [0, T], \\ |t' - t''| < \varepsilon}} |\zeta(t', \omega) - \zeta(t'', \omega)| \leq \gamma(\omega) Q(m, [\log_2 T/2\varepsilon])$$

münasibəti doğrudur. Gauss T. p.-ləri üçün bu teoremin şərtlərini olduqca zəiflətmək mümkündür. Məs., əgər stasionar Gauss T. p.-nin korrelyasion funksiyası $r(t), p > 1$ olduqda

$$1 - r(h) = O\left(\frac{1}{|\ln|h||^p}\right), h \rightarrow 0 \text{ şərtini ödəyərsə, onda}$$

$\zeta(t, \omega)$ prosesi sanki yəqin kəsilməzdir, lakin Kolmoqorov teoreminin şərti yalnız $p > 3$ olduqda ödənilir.

Gauss T. p.-nin trayektoriyalarının requlyarlıq xassələri ödənildikdə 0 və ya 1 qanunu mühüm rol oynayır. $\zeta(t, \omega), t \in T$ ixtiyari parametrik T çoxluğunda verilmiş Gauss T. p., K isə T -də bütün həqiqi funksiyaların fəzasının ixtiyari xətti altfəzası olsun. Onda $\zeta(t, \omega)$ prosesinin bütün trayektoriyaları ya sanki yəqin K altfəzasındadırlar və ya sanki yəqin K -ya aid deyildirlər. Məs., Gauss T. p.-nin trayektoriyaları sanki yəqin kəsilməz, yaxud sanki yəqin kəsildirlər: ya sanki yəqin differensiallanan və ya sanki yəqin differensiallanmayandılar, ya sanki yəqin məhdud və ya sanki yəqin qeyri – məhduddurlar və s. Gauss T. p.-lərinin sanki yəqin kəsilməzliyini araşdırdıqda Sudakov – Dadli entropik yanaşması çox əlverişli olmuşdur; bu yanaşma 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorovun qoyduğu: Gauss T. p.-nin sanki yəqin kəsilməzliyi üçün zəruri və kafi şərtlər (prosesin kovariasiyası terminlərində) haqqında suala cavab verməyə imkan yaratmışdır. $\mathbf{M}\zeta(t, \omega) \equiv 0$ olsun.

$$d(t, s) = (\mathbf{M}(\zeta(t, \omega) - \zeta(s, \omega))^2)^{1/2}$$

funksiyası T -də psevdometrikadır və T -də təbii topologiya adlandırılan topologiya təyin edilir.

$B(t, \varepsilon) = \{s: d(s, t) \leq \varepsilon, s \in T\}$ – mərkəzi t -də, radiusu ε olan T -də d – küre, $N(s, \varepsilon), S \subseteq T$, – S -i örten ε radiuslu d – kürelərinin minimal sayı, $H(S, \varepsilon) = \log_2 N(S, \varepsilon)$, – S çoxluğunun ε – entropiyası (və ya Kolmoqorov entropiyası) olsun.

Sudakov – Dadli teoremi. Əgər $\mathbf{M}\zeta(t) \equiv 0$ olarsa və ələ $\delta > 0$ olarsa ki,

$$\psi(\delta) = \int_0^\delta \sqrt{H(S, x)} dx < \infty$$

şərti ödənilsin, onda $\zeta(t, \omega), t \in S$ Gauss T. p. d topologiyasında sanki yəqin kəsilməzdir. Hətta sanki yəqin ələ müsbət

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki, $d(t, t') < \varepsilon(\omega)$ şərtini ödəyən bütün t, t' üçün

$$|\zeta(t, \omega) - \zeta(t', \omega)| \leq 680 \int_0^{d(t, t')} \sqrt{\log_2(1 + N(S, u)/u)} du$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əgər T -də digər τ topologiyası olarsa (məs., $T \subset \mathbb{R}^n$ halında Evklid fəzasının topologiyası) və $\zeta(t, \omega)$ Gauss T. p.-nin kovariasion funksiyası bu topologiyada kəsilməz olarsa, onda $\psi(\delta)$ integralının sonlu olması $\zeta(t, \omega)$ Gauss T. p.-nin τ topologiyasında sanki yəqin kəsilməzliyini doğurur.

Fernik teoremi. $\zeta(t, \omega)$ – riyazi gözleməsi sıfır bərabər və kovariasion funksiyası kəsilməz bircins Gauss meydanı (prosesi) olsun. Onda «ixtiyari $\delta > 0$ üçün $\psi(\delta) < \infty$ » şərti – $\zeta(t, \omega)$ Gauss T. p.-nin sanki yəqin kəsilməzliyi üçün zəruri şərtidir.

Gauss T. p. trayektoriyalarının kəsilmə nöqtələri çoxluğu öyrənilmişdir. $\delta, -T$ -də metrika olsun.

$$W_f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{\delta(t, s) \leq \varepsilon \\ \delta(t, s') \leq \varepsilon}} |f(s) - f(s')|$$

funksiyası həqiqi $f(t)$ funksiyasının δ – ossilyasiyası adlanır. Əgər (T, δ) metrik separabel fəza, $\zeta(t, \omega), t \in T$ ələ Gauss T. p.-i olarsa ki, $d(t, s)$ funksiyası (T, δ) -da müntəzəm kəsilməz funksiya olsun, onda ələ təsadüfi olmayan $\alpha(t), t \in T$ funksiyası var ki, bütün t -lər üçün 1 ehtimalla $W_{\zeta(t, \omega)}(t) = \alpha(t)$ bərabərliyi doğrudur və ixtiyari t üçün

$$\lim_{s \rightarrow t} \zeta(s, \omega) = \zeta(t, \omega) - \frac{1}{2} \alpha(t),$$

$$\lim_{s \rightarrow t} \zeta(s, \omega) = \zeta(t, \omega) + \frac{1}{2} \alpha(t)$$

münasibətləri sanki yəqin ödənilir (İto – Nisio teoremi). Bu müddəadan Gauss stasionar T. p.-lərinin aşağıdakı gözəl bir xassəsi alınır.

Belyayev – Dobruşin alternativ. Əgər $\alpha(t)$ funksiyası t -dən asılı deyildirsə, onda ya $\alpha(t) \equiv 0$ və ya $\alpha(t) \equiv \infty$. Yeni stasionar Gauss T. p.-nin (meydanının) bütün trayektoriyaları ya sanki yəqin kəsilməzdir, ya da ki, hər hansı çoxluqda sanki yəqin qeyri – məhduddurlar.

Orliq fəzasının elementləri olan qeyri – Gauss T. p.-nin [bu fəzaya subgauss və pregauss (rus. предгаусс) prosesləri adlandırılan proseslər daxildir, bax, [3]] araşdırılması üçün entropik yanaşma inkişaf etdirilir. Trayektoriyaların lokal xassələri qiymətləri Banax fəzasından olan təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının yığılmasının öyrənilməsi metodu ilə, daxiletmə teoremi metodu ilə araşdırılır (bax, [6]).

Əd.: [1] Ферник К., в сб.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, М., 1978, с. 63–132; [2] Дадли Р., Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, М., 1978, с. 7–62; [3] Козаченко Ю. В., в сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1984, в. 30, с. 92–107, в. 31, с. 44–50; [4] Булдыгин В. В., Сходимость случайных элементов в

топологических пространствах, К., 1980; [5] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [6] И б р а г и м о в И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–50.

TƏSADÜFİ PROSES uzlaşmış «случайный процесс согласованный; adapted random process» – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES ümumiləşmiş «случайный процесс обобщенный; generalized random process» – bax, *Ümumiləşmiş təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES vahidi «случайный процесс единичный; unit random process» – bax, *Binar təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES zaman üzrə bircins «случайный процесс однородный по времени; homogeneous in time random process» – bax, *Stasionar təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES zəif harmoniklənən «случайный процесс слабо гармонизируемый; weakly harmonizable random process» – bax, *Böyük ədədlər qanunu qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün.*

TƏSADÜFİ SEÇMƏ qaytarmamaq şərt ilə «случайный выбор без возвращения; random sampling without replacement» – bax, *Seçim statistik.*

TƏSADÜFİ ŞEY «случайный шейп; random shape» – həndəsi obyektlərin formaları fəzasında (üçbucaqlıların, dördbucaqlıların, r – nöqtələrin və s.-nin) təsadüfi nöqtədir. $\mathbb{R}^n$ -də r – nöqtəvi çoxluqların Evklid və affin şeyləri araşdırılmışdır. $\mathbb{R}^n$ -ə aid nöqtələrin $(P_1, P_2, \dots, P_r)$ nizamlanmış ardıcılıqlarına baxılır, $r \geq 2$; $P_1 = P_2 = \dots = P_r$ halı istisna olunur ($P_1 = P_2 = \dots = P_r$ olduqda Evklid şeyi təyin olunmamışdır). Əgər bir ardıcılıq yerdeyişmə, fırlanma və dartılma nəticəsində digər ardıcılığa çevrilirsə, bu iki ardıcılıq eyni Evklid şeyinə malikdir. Ümumiliyi pozmadan, $P_1 = 0$ qəbul etmək olar, burada 0 , – $\mathbb{R}^n$ -də koordinat başlanğıcıdır. Evklid şeyləri fəzası

$$\Sigma'_n = \{(\mathbb{R}^n)^{r-1} \setminus 0\} / W_n \times [0, \infty)$$

faktor fəzası ilə üst-üstə düşür, burada W_n , – $\mathbb{R}^n$ -də fırlanmalar qrupu, $[0, \infty)$, – $\mathbb{R}^n$ -də dartılmalar qrupudur.

$(P_1, P_2, \dots, P_r)$, – $\mathbb{R}^n$ -ə aid nöqtələrin nizamlanmış ardıcılıqları olsun, $r \geq n+1$ və $(P_1, P_2, \dots, P_r)$ -dən olan $(n+1)$ sayda nöqtələrdən heç biri bir hipermüstəvidə yerləşmir. Əgər hər hansı bir ardıcılıq affin çevirməsi vasitəsilə digər ardıcılığa çevirmək olarsa, bu ardıcılıqlar eyni affin şeyinə malikdirlər.

$$F_n^r = \{(\mathbb{R}^n)^r \setminus Z\} / A_n \times [0, \infty)$$

faktor fəzası ilə üst-üstə düşür, burada Z – xaric olunmuş ardıcılıqlar çoxluğu, A_n – affin çevirmələrinin xüsusi qrupudur (vahid

modullu determinantla), $[0, \infty)$ – dartılmalar qrupudur. T. ş. fəzalarında ehtimal paylanmaları sırası integral həndəsəsinin adi ölçülərinin hasilindən uyğun qrupların Haar ölçülərinin ayrılması yolu ilə alınır.

Misallar. 1) dP – müstəvidə Lebeq ölçüsü olsun. Onda

$$dP_1 dP_2 dP_3 = dk h^3 dh P_1(d\sigma)$$

olur, burada dk – Evklid hərəkətləri qrupunun Haar ölçüsü, h , – $P_1 P_2 P_3$ üçbucaqlısının perimetri, $P_1(d\sigma)$, – Σ_2^3 fəzasında ehtimaldır ($\sigma \in \Sigma_2^3$);

$$P_1(d\sigma) = (\pi/21)^{-1} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 (\sin \psi_1 + \sin \psi_2 + \sin \psi_3)^{-4} d\psi_1 d\psi_2,$$

– P_1 -in sıxlığıdır, ψ_1, ψ_2, ψ_3 , – $P_1 P_2 P_3$ üçbucaqlısının bucaqlarıdır,

2) «sahe üzrə» aşağıdakı faktorizasiya doğrudur,

$$dP_1 dP_2 dP_3 = dk S dS \mu(d\sigma)$$

burada S , – $P_1 P_2 P_3$ üçbucaqlısının sahəsi, μ sıxlığı

$$\mu(d\sigma) = 2 d\psi_1 d\psi_2 / \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3$$

olan, Σ_2^3 fəzasında ölçüdür, μ – ehtimal ölçüsü deyil, $\mu(\Sigma_2^3) = \infty$.

3) dg müstəvi düzxətlər fəzasında Evklid hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçü olsun. Onda

$$dg_1 dg_2 dg_3 = dk m(dh) P_2(d\sigma),$$

burada h – alınan üçbucağın perimetri, m , – $[0, \infty)$ -də ölçü,

$P_2(d\sigma)$, – Σ_2^3 fəzasında ehtimaldır ($\sigma \in \Sigma_2^3$); P_2 -nin sıxlığı

$$P_2(d\sigma) =$$

$$= c \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 (\sin \psi_1 + \sin \psi_2 + \sin \psi_3)^{-1} d\psi_1 d\psi_2$$

düsturu ilə ifadə olunur; c – sabitdir.

4) dP , – $\mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsü olsun. Onda

$$\prod_{i=1}^r dP_i = c_{n,r} dA V^{r-2} dV P_{n,r}(d\tau),$$

burada dA , – A_n -də Haar ölçüsü elementidir, V , – $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ çoxluğunun qabarıq örtüyünün minimal sahəsi,

$P_{n,r}$, – F_n^r -də ehtimal ölçüsü ($\tau \in F_n^r$), τ – təpələri $\{P_1, \dots, P_r\}$ -ə aid olan simplekslərin həcmələrinin $\{P_1, \dots, P_r\}$ çoxluğunun (minimal qabarıq örtüklü) həcminə nisbətləri ilə təsvir olunur, $c_{n,r}$ – sabitlərdir. Məs., $P_{2,4}$, – F_2^4 fəzasında müntəzəm paylanmadır, F_2^4 isə tərəfi 1-ə bərabər üç kvadrat və tərəfləri 1-ə bərabər üç üçbucaqlının birləşməsidir.

T. ş.-lərə $\mathbb{R}^n$ -də bircins Puasson nöqtəvi prosesindən seçilən «tipik» r – nöqtələrə baxıldığı zaman rast gəlinir.

Əd.: [1] K e n d a l l D. G., «Bull. London Math. Soc.», 1984, v. 16, p. 81–121.

TƏSADÜFİ TELEQRAF SİQNALI « случайный телеграфный сигнал; random telegraph signal » – $-\infty < t < \infty$ oxunda verilən, t_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2$ nöqtələrində qiymətlərini sıçrayışlarla dəyişən, ədəd oxunda biricins Puasson nöqtəvi təsadüfi proses doğuran (yəni ən sadə axın yaradan) təsadüfi prosesdir, t_k nöqtələri arasında növbə ilə $+a$ və $-a$ qiymətlərini (a müsbət ədəddir və əksər hallarda vahidə bərabər götürülür)

$$P\{\zeta'(0) = a\} = P\{\zeta'(0) = -a\} = 1/2$$

ehtimalı ilə alır. T. t. s. prosesinin riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdir (yəni t -nin bütün qiymətlərində $M\zeta(t) = 0$) və korrelyasion funksiyası isə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$B(\tau) = M\zeta(t+\tau)\zeta(t) = a^2 \exp(-2\lambda|\tau|),$$

burada λ , – $\{t_k\}$ Puasson nöqtəvi prosesinin intensivliyidir (yəni vahid zaman müddətində t_k sıçrayış nöqtələri sayının orta qiymətidir); bu proses təsadüfi stasionar proses (Qauss prosesi olmayan), kəsilməz Markov prosesi və binar təsadüfi prosesdir. T. t. s. modelini S. Rays ([1], [2]) təklif etmişdir. Bu proses təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Rice S. O., «Bell System Techn. J.», 1944, v. 23, p. 282–332; 1945, v. 24, p. 46–156; [2] Райс С., в сб.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, пер. с англ., М., 1953, с. 88–238.

TƏSADÜFİ TƏKRARSIZ SEÇİM « случайная бесповторная выборка; random sample without replacement » – bax, Seçim statistik.

TƏSADÜFİ TƏNLİK cəbri « случайное уравнение алгебраическое; random algebraic equation » – bax, Cəbri təsadüfi tənlik.

TƏSADÜFİ TƏNLİK qrupda « случайное уравнение на группе; random equation in a group » – $a(x_1, \dots, x_n) = b$ şəklində tənlikdir, burada x_i , – X qrupunun elementləri, $a(\cdot)$, – X^n -in G qrupuna təsadüfi inikasıdır (məyyyənlilik üçün fərz olunur ki, G additiv qrupdur) və $b \in G$. T. t.-lər olan məsələlər ehtimalı avtomatlar nəzəriyyəsi və kodlanma nəzəriyyəsində engeledəyənlik kodların qurulmasında tətbiq ilə və hesablama proseslərində yaranır.

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = b_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (*)$$

– T. t.-lər sistemi, $a_i(\cdot)$ – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi inikaslar olsun. (*) sistemi üçün əsas məsələlər aşağıdakılardır: X^n -dən olan həllər sayı ν_{Nn} -in və ya hər hansı $\mathfrak{X} \subset X^n$ çoxluğundan olan həllər sayı $\nu_{Nn}(\mathfrak{X})$ -in paylanması arasındırılması və məs., sistemin həll olunan olması ehtimalının araşdırılması; X^n fəzasında həllərin qarşılıqlı vəziyyəti, məs., bu həllər arasında Hemminq məsafəsi, sistemin həlli alqoritmlərinin ehtimalı xassələri (məs., orta mürəkkəblik); ν_{Nn} və təsadüfi əvəzləmələrin tsiklləri sayı tipli kombinator xarakteristikaları arasında münasibətinin araşdırılması.

T. t.-lərin bir çox xassələri kombinator mülahizələrdən alınır. Məs., b_i asılı olmayan, G -nin eyniehtimalı elementləri olarsa, $(b_1, \dots, b_N)$ vektoru isə $(a_1(\cdot), \dots, a_N(\cdot))$ -dən asılı olmazsa, onda

$$M\nu_{Nn}(\mathfrak{X}) = |\mathfrak{X}|/|G|^N, \quad M\nu_{Nn} = |X^n|/|G|^N,$$

bərabərlikləri doğrudur. Əgər $a_i(x_1, \dots, x_n)$ $x_1, \dots, x_n$, i -nin müxtəlif qiymətlərində küllüyyatca asılı olmayan və eyniehtimalı inikaslar olarsa, onda $(b_1, \dots, b_N)$ ixtiyari qeyd olunmuş vektor olduqda $\nu_{Nn}(\mathfrak{X})$ kəmiyyəti binomial qanunla paylanır. Lakin T. t. haqqında nəticələrin əksəriyyəti asimptotik xarakterlidir: seriyalar sxeminde, adətən, $n, N \rightarrow \infty$.

$$\nu_{Nn}(\mathfrak{X}) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \xi_{Nn}(x)$$

ifadəsi geniş tətbiq olunur, burada $\xi_{Nn}(x)$ – T. t.-lər sisteminin $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektoru ilə həllinin indikatorudur. Bu ifadənin köməyi ilə Puasson tipli limit paylanmalarını momentlər metodu ilə tapmaq olur.

Xətti təsadüfi tənliklər sistemi. $K = G$ sonlu meydan, $|G| = r$ onun elementlərinin sayı,

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

olsun, a_{ij} , – G meydanında eyniehtimalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $b_i = 0$.

$$P_{Nn}(K) = P\{\nu_{Nn} = r^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

ehtimalları müstəvinin dördü bir hissəsində qeyri – biricins təsadüfi dolaşmanın xarakteristikaları kimi interpretasiya olunur və aşkar düsturla verilir: məs.,

$$P_{Nn}(0) = (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-N}).$$

Eyniehtimalı asılı olmayan a_{ij} , b_k kəmiyyətləri halında

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

sisteminin uyuşanlığı ehtimalı $\sum_k r^{n-N-k} p_{Nn}(k)$ cəminə bərabərdir. Geniş bir sinif üçün, məs., $P\{a_{ij} = z\} > \delta > 0$, $z \in G$ şərtini ödəyən asılı olmayan a_{ij} -lər verildiyi halda $n \rightarrow \infty$, $N - n = \text{const}$ olduqda biricins sistemlər üçün ν_{Nn} -in limit paylanması vardır və bu paylanma a_{ij} -lərin paylanmasına nəzərən invariantdır.

Bu halda xətti asılı olmayan $X^t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$, $1 \leq t \leq k$ həllərinin ixtiyari toplusu üçün $(x_1^j, \dots, x_n^j) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ şərti ödənilən j -lərin tezliyi ehtimala görə r^{-k} -ya yığılır. İnvariantlığın bezi xassələri qeyri – kommutativ sonlu halqalarda biricins və qeyri – biricins tənliklər üçün, həmçinin $\sum_j a_{ij}(x_j) = b_i$ şəklində T. t.-lər sistemləri üçün araşdırılmışdır, burada $a_{ij}(\cdot)$ – Abel qruplarının təsadüfi endomorfizmləridir.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Левитская А. А., Савчук М. Н., Избранные вопросы вероятностной комбинаторики, К., 1986.

TƏSADÜFİ VEKTOR «случайный вектор; random vector» – komponentləri təsadüfi kəmiyyətlər olan $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vektorudur. $B \in \mathbb{R}^n$ fəzasının Borel çoxluğu olduqda X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxölçülü paylanması, yəni

$$P_X(B) = P(\mathbf{X} \in B)$$

funksiyası təsadüfi vektorun ehtimal paylanması adlanır. Bu ehtimal paylanması

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = P\{X_i \leq x_i, i = 1, \dots, n\}$$

çoxölçülü paylanma funksiyası ilə birqiymətli təyin olunur. $\mathbf{X}$ T. v.-nın mütləq kəsilməz paylanması $p_X(x_1, \dots, x_n)$ çoxölçülü paylanma sıxlığı funksiyası ilə

$$P_X(B) = \int_B p_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

integralı vasitəsilə verilir.

$\mathbf{X}$ T. v.-nın diskret paylanması

$$P(\mathbf{X} \in B) = \sum_{\mathbf{x}(i) \in B} P\{\mathbf{X} = \mathbf{x}(i)\}$$

düsturu ilə hesabi sayda $P\{\mathbf{X} = \mathbf{x}(i)\}$ ehtimalları ilə təyin olunur.

TƏSADÜFİ VƏ PSEVDOTƏSADÜFİ ƏDƏDLƏR «случайные и псевдослучайные числа; random and pseudo – random numbers» – eht. ξ_n ədədləridir ki

(və ya α_n rəqəmləri), bunların ardıcılığı bu və ya digər statistik qanunauyğunluqlara malikdir. Təsadüfi ədədlər (TƏ) hər hansı stoxastik qurğu ilə alınır, psevdotəsadüfi ədədlər (PƏ) arifmetik alqoritmlər vasitəsilə konstruksiya olunur. Bu halda, adətən (az və ya çox əsasla), belə qəbul edilir ki, alınan (və ya qurulan) ardıcılıq tezlik xassələrinin kompleksinə malikdir ki, bunlar paylanma funksiyası $F(z)$ olan hər hansı

X təsadüfi kəmiyyətinin asılı olmayan realizasiyalarının ardıcılığı üçün «tipik» xassələrdir; bu halda $F(z)$ qanunu ilə paylanmış asılı olmayan TƏ-dən söhbət gedir. $P\{\xi_n < x\} = x, 0 \leq x \leq 1$ münasibəti ilə verilən $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış ξ_n TƏ-ləri (MPTƏ), həmçinin $P\{\alpha_n = 0\} = P\{\alpha_n = 1\} = 1/2$ qanunu ilə verilən bərabər ehtimalı ikilik təsadüfi α_n işarələri (BİTİ) və riyazi gözləməsi 0, dispersiyası 1 olan normal qanunla paylanmış η_n normal TƏ ən çox istifadə olunan TƏ-dir. İxtiyari paylanma funksiyası olan TƏ və korrelyar TƏ-lər MPTƏ üzrə qurula bilinir (bax, *Modelledirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*). MPTƏ-in ikilik yazılışının dərəcələri BİTİ-dir; əksinə, BİTİ-ni sonsuz ardıcılıqların ardıcılığına qruplaşdıraraq MPTƏ almaq olur.

T. və p. ə. statistik oyunlarda, riyazi statistikada, kriptorafiyada və kodlaşdırmada randomizasiya üçün, yeni yalnız

«orta» mənada öncədən söyləne bilinən determinə olunmamış alqoritmlərin konkret realizasiyaları və s.-də istifadə olunur. Məs., əgər növbəti α_n üçün $\alpha_n = 0$ olursa, onda oyunçu birinci strategiyayı, $\alpha_n = 1$ olduqda isə o, ikinci strategiyayı seçir. Tətbiqi hesablamalarda geniş tətbiq olunan *Monte – Karlo metodu* tamamilə təsadüfi hadisə və ya proseslərin TƏ və PƏ vasitəsilə *statistik modelledirilməsinə* əsaslanmışdır.

« $x_1, \dots, x_n$ ədədlərinin verilən konkret ardıcılığının tipik MPTƏ-in asılı olmayan seçimi olduğu» haqqında hipotezin yoxlanılması üçün uzlaşma kriterisi istifadə olunur. Bir və ya bir neçə belə uzlaşma kriterilərinin ödənilməsindən belə nəticəyə gəlmək olur ki, bu ardıcılığın təsadüfi ardıcılıq kimi istifadəsi yalnız uyğun aspektlərdə mümkündür və bu halda universal zəmanət verilmir. TƏ anlayışına ciddi mənə yalnız alqoritmik ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsində vermək mümkündür (bax, [4]). Məs.,

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_n : 0 \leq x_n \leq 1\} \text{ – Lebeq ölçüsü olan vahidi hesabi}$$

$$\text{ölçülü kub olsun } V \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right\} = \prod_n |b_n - a_n|. H \text{ -da kon-}$$

struktiv təsvir olunan ən böyük, ölçülən G çoxluğu vardır və $V(G) = 0$. Onda ixtiyari sonsuz $\{x_n\} \notin G$ ardıcılığını tipik (yəni əvvəlcədən heç bir xüsusi xassələrə malik olmayan) ardıcılıq hesab edərək, onu MPTƏ ardıcılığı kimi qəbul etmək olar (bax, [5]). Bu ardıcılıq avtomatik olaraq nəzəri – ədədi mənada tamamilə müntəzəm paylanmış ardıcılıq olacaqdır (bax, [6]).

BİTİ ardıcılığı anlayışı analogi qaydada, alqoritmik ehtimal nəzəriyyəsi mənasında, daxil oluna bilinir (bax, [5], [7]). Bu tərifdən, bu ardıcılığın konstruktiv olmadığı nəticəsi alınır və bu anlamda təsadüfi ardıcılıqlara yaxın ardıcılıqların qurulması olduqca çətin olur. Buna görə də, praktikada daha sadə qurulmuş alqoritmlərdən istifadə olunur (bax, [8]) və bunların statistik «keyfiyyətləri» az sayda testlərlə yoxlanılır (bax, [9]).

TƏ və təsadüfi işarələr cədvəlləri də tərtib olunmuşdur. Lakin bunların bütün ağılabatan statistik testlərə cavab verdiyinə zəmanət vermək olmaz.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Методы Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Соболев И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [3] Ченцов Н. Н., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 632–43; [4] Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 204–13; [5] Martin-Lof P., «Information and Control», 1966, v. 9, p. 602–19; [6] Коробов Н. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 215–38; [7] Шень А., «Семиотика и информатика», 1982, в. 18, с. 14–42; [8] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 2, М., 1977; [9] Blum M., Micali S., «SIAM J. Computing», 1984, v. 13, p. 850–64.

Hal-hazırda TƏ-in qurulmasının yeni metodları intensiv surətdə işlənir, bu metodlarla böyük uzunluqlu periodu olan ardıcılıqlar almaq olur və ya bunlar çoxsaylı paralel işləyən prosessorlarda TƏ-lərin praktiki olaraq bir-birindən asılı olmayan parçalarının realizasiyalarını almağa; $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmış TƏ-in daha mürəkkəb strukturlu psevdotəsadüfi obyektlərə: çoxobrazlı təsadüfi nöqtələrə, təsadüfi kombinator və ya həndəsi obyektlərə çevrilməsi metodlarını almağa imkan yaradır.

TƏ *vergeçlərinin* müxtəlif konkret hallarının statistik xassələri tədqiq olunur və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi məntiqin qovuşmasında yaranan prinsipial məsələlərdən – determinik ardıcılıq nə dərəcədə təsadüfi ardıcılıq imitasiya edə bilər, kimi məsələlər də araşdırılır.

Əd.: [10] Devroye L., Non-uniform random variate generation, B., 1986; [11] Fishman G. S., Monte-Carlo: concepts, algorithms

and applications, B., 1996; [12] L u b y M., Pseudorandomness and cryptographic applications, Princeton, 1966; [13] N i e d e r r e i t e r H., Random number generation and quasi - Monte - Carlo methods, Philadelphia, 1992.

TƏSADÜFİ YERDƏYİŞMƏ / PERMUTASIÖN

« случайная перестановка; random permutation »
 n t e r t i b, – n tertib bütün yerdəyişmələr çoxluğu S_n -də qiymətlər alan *tesadüfi elementdir*. T. y.-nin ehtimal paylanması kimi, adətən, S_n -də eyniehtimallı paylanma seçilir, yəni hər bir yerdəyişməyə $(n!)^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulur. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – T. y., $X_n = X_n(\sigma)$, – $i = 1, 2, \dots, n-1$ indekslərinin sayı və $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ (σ -da artımların sayı), $Y_n = Y_n(\sigma)$, – $\sigma_i > \sigma_j$, $i < j$ şərtini ödəyən (i, j) indekslər cütələrinin sayı (σ -da inversiyaların sayı) olsun.

Əgər S_n -in bütün yerdəyişmələri bəraberehtimallı olarsa, onda

$$MX_n = n/2 - 1, \quad DX_n = n/12,$$

$$MY_n = n(n-1)/4, \quad DY_n = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72$$

olur və $n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$X_n^* = (X_n - MX_n)/\sqrt{DX_n},$$

$$Y_n^* = (Y_n - MY_n)/\sqrt{DY_n}$$

tesadüfi kəmiyyətlərinin (mərkəzlənmiş, normalanmış) paylanmaları $(0, 1)$ parametrləri normal paylanmaya yığılır. X_n və Y_n tesadüfi kəmiyyətləri psevdotesadüfi ardıcılıqların keyfiyyətlərinin statistik analizində və həmçinin növlərəayırma alqoritmlərinin bəzələrinin ehtimali analizində təbii olaraq yaranır.

n – tertib σ yerdəyişməsinin rəng vektoru n – ölçülü $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ vektoruna deyilir, bu vektorun koordinatları aşağıdakı kimi təyin olunur: əgər $j = \sigma_m$ olarsa, onda R_j ele $i \leq m$ şərtini ödəyən i -lərin sayına bərabərdir ki, $\sigma_i \geq j$ olsun. S_n -də eyniehtimallı paylanma təyin olunduğu halda, T. y.-nin rəng vektorunun əsas xassələri aşağıdakılardır:

$$P\{R_i = k\} = 1/n, \quad P\{R_i = k, R_j = t\} = 1/(n(n-1)), \quad i \neq j,$$

$$k \neq t, \quad MR_i = (n+1)/2, \quad DR_i = (n^2 - 1)/12, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

T. y.-nin rəng vektoru statistik rəng kriterilərinin qurulması üçün əsasdır.

Bax, *Təsadüfi əvəzetmə*.

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] К н у т Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 1–3, М., 1976–78; [3] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

TƏSADÜFİ YERLƏŞMƏ « случайное размещение; random allocation » – N sayda müxtəlif oyuqda n sayda müxtəlif hissəciyin (küreciyn) təsadüfi yerləşməsinin ehtimali sxemidir. Ən sadə, eyniehtimallı yerləşmələr sxemində, n hissəcikdən hər biri digərlərindən asılı olmadan ixtiyari qeyd olunmuş oyuqda $1/N$ ehtimalı ilə yerləşə bilər. $\mu_r = \mu_r(n, N)$ belə yerləşmələrdən sonra, hər birində yalnız r sayda hissəcik olan

oyuqların sayı olsun və fərz olunur ki, $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s$,
 $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$,

$$\Phi(z; x_1, \dots, x_s) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^{\infty} \frac{(Nz)^n}{n!} P\{\mu_{n_1} = k_1, \dots, \mu_{n_s} = k_s\} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan doğuran funksiya aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\Phi(z; x_1, \dots, x_s) =$$

$$= \left[e^z + \frac{z^1}{r_1!} (x_1 - 1) + \dots + \frac{z^{r_s}}{r_s!} (x_s - 1) \right]^N, \quad (1)$$

(1) funksiyasından istifadə edərək, μ_r -lərin momentlərini hesablamaq və μ_r -in paylanmasının $n, N \rightarrow \infty$ olduqda asimptotik xassələrini öyrənmək olur. Bu asimptotik xassələr bir oyuqda yerləşən hissəciklərin sayının orta qiyməti $\alpha = n/N$ parametridən olduqca asılı olaraq təyin olunurlar. $n, N \rightarrow \infty$ və $\alpha = O(N)$ olduqda, r və t -nin qeyd olunmuş qiymətlərində

$$M\mu_r \sim N p_r(\alpha), \quad \text{cov}(\mu_r, \mu_t) \sim N \sigma_{rt}(\alpha) \quad (2)$$

münasibətləri doğrudur, burada $p_r(\alpha) = (\alpha^r / r!) e^{-\alpha}$ və

$$\sigma_{rt}(\alpha) = p_r(\alpha) \left[\delta_{rt} - p_t(\alpha) - p_t(\alpha) \frac{(\alpha - r)(\alpha - t)}{\alpha} \right],$$

δ_{rt} – Kroneker simvoludur.

μ_r -in asimptotikası müxtəlif olan beş müxtəlif oblast ayırmaq mümkündür. $\alpha = n/N = 1$ olan $n, N \rightarrow \infty$ dəyişmə oblastına mərkəzi oblast deyilir. $\alpha \rightarrow \infty$, $M\mu_r \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ şərtləri ödənilən $n, N \rightarrow \infty$ oblastı sağ r -oblast adlanır. $\alpha \rightarrow \infty$, $M\mu_r \rightarrow \infty$ ödənilən $n, N \rightarrow \infty$ dəyişmə oblastına sağ aralıq r -oblastı deyilir. $r \geq 2$ olduqda $\alpha \rightarrow 0$, $M\mu_r \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ ödənilən $n, N \rightarrow \infty$ dəyişmə oblastı sol r -oblast adlanır. $\alpha \rightarrow 0$, $M\mu_r \rightarrow \infty$ münasibətləri ödənilən oblasta sol aralıq r -oblast deyilir. Sol və sağ aralıq oblastlar $r = 0, 1$ üçün uyğun 2 – oblastlarla üst-üstə düşən oblastlar sayılır.

Yerləşmənin eyniehtimallı sxemində sağ r -oblastda μ_r asimptotik olaraq, Puasson paylanmasına malik olur. Sol r -oblastda μ_r , $r \geq 2$ olduqda, limitdə Puasson paylanması ilə paylanır; $r = 0$ və $r = 1$ olduqda $\mu_0 = N + n$ və $(n - \mu_1)/2$ limitdə Puasson paylanmaları ilə paylanır. Sol və sağ aralıq r -oblastlarda, μ_r asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Mərkəzi oblastda $\mu_1, \dots, \mu_s$ üçün çoxölçülü mərkəzi teoremi isbat olunmuşdur; limit normal paylanmanın parametrləri (2) asimptotik düsturları ilə təyin olunur.

Əgər hissəciklər bir-birindən asılı olmayaraq yerləşdirsə və hissəciklərdən hər birinin j -ci oyuğa düşmə ehtimalı α_j -yə

beraberdirse və $\sum_{j=1}^N a_j = 1$ olarsa, onda *hissəciklərin polinomial paylanması* alınır.

Hissəciklərin qruplarla yerləşməsi sxeminde fərz olunur ki, hissəciklər hər oyuqda m sayda olmaqla, qruplarla yerləşir və bir kompleksin hissəciklərindən oyuqlarda yalnız biri yerləşə bilər. qrupların yerləşmələri isə asılı deyildirlər.

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976.

TƏSADÜFİ YÜK «случайный заряд; random charge» – bax, *Təsadüfi ölçü*.

***TƏSADÜFİ ZAMAN ANI «случайное время; random time»** – kəsilməz zaman ərzində aparılan stoxastik eksperimentlərdə müşahidə oluna bilən hər hansı A hadisəsinin ilk dəfə baş verdiyi təsadüfi andır. T. z. a. bəzən «gələcəkdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət», «Markov anı» və ya «dayanma anı» kimi də adlandırılır. Formal tərif aşağıdakı kimi verilir. T – həqiqi ədədlər çoxluğu – stoxastik eksperimentlərin aparıldığı anlar çoxluğu olsun. $t_1 < t_2$ olduqda, verilmiş $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasının $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ şərtini ödəyən $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ monoton azalmayan σ – cəbrlər ailəsinə σ – cəbrlər axını (eksperimentlər axını) deyilir.

Bu halda $\mathcal{F}_t$, t anı da daxil olmaqla t müddəti ərzində aparılan eksperimentlərdə müşahidə olunan bütün hadisələrin sinfi kimi interpretasiya olunur. İxtiyari $t \in T$ qiymətlərində $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ şərtini ödəyən, Ω fəzasının hər hansı Ω_t , altçoxluğunda təyin olunmuş, qiymətləri T -dən olan $\tau = f(\omega)$ funksiyası $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ σ – cəbrlər axınında təsadüfi zaman anı adlanır.

$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ şərti aşağıdakı kimi anlaşılır: τ anı t anına qədər baş vermişdirsə, bu an haqqında $s \in T$, $s \leq t$ şərtini ödəyən s anlarında eksperimentlərin nəticələrini müşahidə edərək mülahizə yürütmək olar. Ω_τ çoxluğu τ T. z. a.-nın T zaman müddəti ərzində baş verməsi hadisəsinə müvafiq çoxluqdur. Aydın ki, $\Omega_\tau \in \Omega$ -nin altçoxluğu) $\mathcal{F}$ – ölçüləndir. Əgər T -də maksimal $t_{\max}$ qiyməti varsa, onda $\Omega_\tau = \{\tau \leq t_{\max}\} \in \mathcal{F}_{\max}$. Əgər T -də maksimal qiymət yoxdursa və $t_k \uparrow \sup\{t, t \in T\}$ olarsa, onda $\Omega_\tau = \bigcup_k \{\tau \leq t_k\}$.

Əgər $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ şərti $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ münasibətinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür və ya T hesabi çoxluq olarsa, ixtiyari $t \in T$ üçün $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ şərti ilə eynigüclüdür.

T. z. a. τ ilə, τ anı da daxil olmaqla τ anına qədər aparılan eksperimentlərin nəticələrini müşahidə edərək, bu eksperimentlərdə baş verən hadisələrin realizasiyaları haqqında mülahizə yürütmək olar və bu hadisələrin minimal σ – cəbrini əlaqələndirmək olar. İxtiyari $t \in T$ qiymətlərində $B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ münasibəti ilə təyin olunan B hadisələrinin sinfi $\mathcal{F}_t$ olsun, ($B \in \mathcal{F}$). Aydın ki, $\mathcal{F}_t$ σ – cəbrdir, bu σ – cəbr T. z. a.

τ -nın doğrurduğu σ – cəbrdir. τ $\mathcal{F}_t$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyətdir.

Misallar. 1) $\tau = t_0$, $t_0 \in T$ olsun. Onda $\{\tau \leq t\}$ ya $\emptyset$ və ya Ω olur, odur ki, $\tau = t_0$ T. z. a.-nın xüsusi halıdır. Daha sonra $B \cap \{\tau \leq t\}$ ya $\emptyset$ -ya və ya B -yə bərabərdir, odur ki, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_0}$, yəni T. z. a.-nın doğrurduğu σ – cəbrin daxil olunmuş işarəsi, $t = t_0$ xüsusi halında qeyd olunmuş əvvəlki işarələmələrlə uzlaşır. 2) K – həqiqi ədədlər oxunda Borel çoxluğu və $\{\sup x: x \in K\} \leq t$ olsun. Onda $\{\tau \in K\}$ hadisəsi $\mathcal{F}_t$ – ölçüləndir; və s. (bax, [1]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

TƏSDİQEDİCİ ANALİZİ, VERİLƏNLƏRİN «подтверждающий анализ данных; confirmatory data analysis» – bax, *Tədqiqi statistik analiz*.

TƏSİR FUNKSIYASI empirik «влияния функция эмпирическая; empirical influence function» – bax, *Empirik təsir funksiyası*.

TƏSİRSONRASI «последствие; after – effect» – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*.

TƏSNİFEDİCİ ƏLAMƏT «классификационный признак; nominal test» – bax, *Çoxölçülü statistik analiz*.

TƏSNİFEDİCİ DƏYİŞƏN «классификационная переменная; nominal variable» – bax, *Prediktant*.

TIPLƏRİN YİĞİLMƏSİ «типов сходимость; convergence of types» – paylanma funksiyalarının ekvivalentlik sinifləri ardıcılığının *zəif yığılmasıdır*. Əgər T_n hər hansı paylanmalar tipləri ardıcılığı olarsa və ele paylanma funksiyaları ardıcılığı $F_n \in T_n$ olarsa ki, F_n ardıcılığı $F \in T$ ardıcılığına zəif yığılmış olsun, onda T_n *paylanmalar tipləri ardıcılığı* T tipinə *yığılır*, deyilir. Tiplərin ixtiyari ardıcılığı cırlaşmış tipə (bütün cırlaşmış qanunları və yalnız bunları özündə saxlayan tipə) yığılır. Tiplər ardıcılığının heç biri birdən artıq cırlaşmayan tipə yığıla bilməz (bax, [1]).

Əd.: [1] Хвнчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938.

TOQQUŞMALAR METODU qiymətləndirilmənin «столкновений метод оценки; collisions method of evaluation» – köçürülən hissəciklərin faza trayektoriyaları $x(t)$ -lərin (ədədi modeləşdirilən), kəsilmə nöqtələrində stasionar xətti $Af = g$ *kinetik köçürmə tənliyinin* ψ -nin qiymətləri üzrə həlli f -in funksionallarının, yəni

$$(f, \psi) = \int f(x) \psi(x) dx$$

funksionallarının qiymətləndirilməsi metodudur. Əgər $\lambda(x)$ hissəciklərin mühitlə toqquşmaları tezliyi, t_n hissəciklərin trayektoriyalarının təsadüfi sıçrayış anlarındırsa, onda (f, ψ) başlanğıc vəziyyətləri $x(0)$ -lərin sıxlığı $g(x)$ olan, köçürmə Markov prosesinin trayektoriyaları $x(t)$ -lərin fəzası üzrə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(x(t_n - 0)) / \lambda(x(t_n - 0))$$

tesadüfi kəmiyyətinin orta qiymətinə bərabərdir. Şəxələnən proses halı üçün oxşar ifadə yazmaq olar. T. m.-nin müxtəlif təkmilləşdirilmiş variantları haqqında bax, [2].

Əd.: [1] Спанье Дж., Гелбард Э., Метод Монте – Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [2] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982.

TOLERANT İNTERVAL « толерантный интервал; tolerance interval » – təsadüfi sərhədləri intervaldır; bu interval seçim üzrə elə qurulur ki, o, əvvəlcədən verilmiş ehtimalla seçimin elementləri tabe olduğu kəsilməz paylanmanın ehtimal kütləsinin verilmiş payından (hissəsindən) az olmayan kütləsini daxilinə alır. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – elementləri asılı olmayan, eyni kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər olan seçim, $F(x)$, – X_i təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. $F(x) = F(X_1 < x)$ namelumdur. Fərz olunur ki, $T_1 = T_1(X)$ və $T_2 = T_2(X)$ elə statistikalar ki, verilən p ehtimalı üçün $(0 < p < 1)$ $\{F(T_2) - F(T_1) \geq p\}$ hadisəsinin ehtimalı əvvəlcədən verilmiş γ -ya bərabərdir. Bu halda (T_1, T_2) təsadüfi interval $F(x)$ paylanma funksiyası üçün γ -tolerant interval, T_1 və T_2 statistikaları tolerant sərhədlər adlanır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

TOLERANT SƏRHƏDLƏR « толерантные границы; tolerance limits / bounds » – bax, *Tolerant interval*.

TOLERANTLIQ « толерантность; tolerance » – bax, *Binar münasibətlər statistikasi*.

TOPLAM KOHERENTLİK « множественная когерентность; multiple coherence » – bax, *Koherentlik*.

TOPLAM KORRELYASIYA ƏMSALI « множественный коэффициент корреляции; multiple correlation coefficient » – bir təsadüfi kəmiyyət ilə təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı toplusu arasında xətti asılılıq ölçüsüdür. Daha dəqiq, $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^k$ -dan olan təsadüfi vektor olarsa, ξ_1 və $\xi_2, \dots, \xi_k$ arasında T. k. ə. ξ_1 və ξ_1 -in $\xi_2, \dots, \xi_k$ üzrə ən yaxşı xətti yaxınlaşması arasında adi korrelyasiya əmsalı kimi, yəni ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin $\xi_2, \dots, \xi_k$ üzrə $M(\xi_1 | \xi_2, \dots, \xi_k)$ regressiyası ilə təyin olunur. T. k. ə. belə bir xassəyə malikdir ki, əgər $M\xi_1 = \dots = M\xi_k = 0$ olduqda

$$\xi_1^* = \beta_2 \xi_2 + \dots + \beta_k \xi_k$$

ξ_1 -in $\xi_2, \dots, \xi_k$ üzrə regressiyasıdırsa, onda $\xi_2, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün xətti kombinasiyaları arasında ξ_1^* kəmiyyəti ilə ξ_1 arasında korrelyasiya ən böyük olur; T. k. ə. bu mənada *kanonik korrelyasiya əmsalının* xüsusi halıdır. $k = 2$ olduqda T. k. ə. ξ_1 və ξ_1 arasında korrelyasiya əmsalı ρ_{12} -yə bərabərdir. ξ_1 və $\xi_2, \dots, \xi_k$ arasında T. k. ə. $\rho_{1(2 \dots k)}$ ilə işarə olunur və $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, k$ korrelyasion matrisinin elementləri ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\rho_{1(2 \dots k)}^2 = 1 - |\mathbf{P}| / \mathbf{P}_{11},$$

burada $|\mathbf{P}|$, – $\mathbf{P}$ matrisinin determinantı, $\mathbf{P}_{11}$ isə $\rho_{11} = 1$ elementinin cəbri tamamlayıcısıdır; $0 \leq \rho_{1(2 \dots k)} \leq 1$. Əgər $\rho_{1(2 \dots k)} = 1$ olarsa, onda ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti 1 ehtimalla $\xi_2, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı xətti kombinasiyasına bərabərdir, yəni $\xi_1, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması $\mathbb{R}^k$ fəzasının hər hansı hiperfəzasında toplanmışdır. Digər tərəfdən, $\rho_{1(2 \dots k)} = 0$ şərti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\rho_{12} = \dots = \rho_{1k} = 0$ şərti ödənilsin, yəni ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $\xi_2, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərindən heç biri ilə korrelyar olmasın. T. k. ə.-ni hesablamaq üçün

$$\rho_{1(2 \dots k)}^2 = 1 - \sigma_{1(2 \dots k)}^2 / \sigma_1^2$$

düsturundan da istifadə etmək olar, burada σ_1^2 , – ξ_1 -in dispersiyası.

$$\sigma_{1(2 \dots k)}^2 = \mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}(\xi_1 | \xi_2, \dots, \xi_k))^2$$

– ξ_1 -in regressiyaya nəzərən dispersiyasıdır. T. k. ə.-nin seçimi analoqu

$$\hat{\rho}_{1(2 \dots k)} = \sqrt{1 - s_{1(2 \dots k)}^2 / s_1^2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $s_{1(2 \dots k)}^2$ və s_1^2 , – n həcmli seçim üçün $\sigma_{1(2 \dots k)}^2$ və σ_1^2 dispersiyalarının statistik qiymətləridir. Təsadüfi kəmiyyətlərin arasında asılılıq olmaması haqqında hipotezi yoxlamaq üçün $\hat{\rho}_{1(2 \dots k)}$ seçimi toplam korrelyasiya əmsallının seçimi paylanmalarından istifadə olunur. Seçim çoxölçülü normal paylanmalı ümumi çoxluqdan aparılmışdırsa, $\rho_{1(2 \dots k)} = 0$ olarsa, $\hat{\rho}_{1(2 \dots k)}$ kəmiyyəti $((k-1)/2, (n-k)/2)$ parametrləri beta – paylanma qanunu na tabedir; əgər $\rho_{1(2 \dots k)} \neq 0$ olarsa, onda $n \hat{\rho}_{1(2 \dots k)}^2$ kəmiyyəti $n \rightarrow \infty$ olduqda, limitdə, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$ -ə bərabər, qeyri – mərkəzilik parametri isə $n \hat{\rho}_{1(2 \dots k)}^2$ olan qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanması ilə paylanır.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

TOPLAM MÜQAYİSƏLƏR « множественные сравнения; multiple comparisons » – bir sıra hadisələrin (məs., 95%-lik etibarlı ikiintervalla iki ümumi çoxluq üçün orta qiymətlərin eyni zamanda daxilə alınması hadisələrinin) idarə olunması üçün və bir qədər geniş – hipotezlərin yoxlanılması, etibarlı intervallların qurulması kimi birgə (eyni zamanda) nəticələrin ödənilməsi üçün statistik metodlar qrupudur.

Birfaktorlu və ikifaktorlu dispersion analiz sxemlərində həm Qauss, həm də qeyri – parametrik modellərdə qruplar üçün orta qiymətlər (verilənlər üzərində işlənmələrin effektləri) haqqında birgə nəticələr üçün T. m. yaxşı araşdırılmışdır.

T. m. qoşmalıq cədvəllərinin kateqoriyalanmış verilənlərini, regression analizi, çoxfaktorlu dispersion analizi əhatə edir.

Əd.: [1] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Х о л л е н д е р М., В у л ф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Miller R., в кн.:

Encyclopedia of statistical sciences, v. 5, N. Y., 1985, p. 679–89; [5] Miller R., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1977, v. 72, p. 779–88.

TOPLAM RANQ KORRELYASIYA ƏMSALI «множественный коэффициент ранговой корреляции; multiple rank correlation coefficient» – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

TOPLAM REQRESSIYA «множественная регрессия; multiple regression» – çoxölçülü naməlum parametrlili *regression eksperimenti*dir.

TOPLAYICILIQ(ğ) limit teoreminin «собираемость предельной теоремы; collectness of a limit theorem» – Yu. V. Linnik tərəfindən [1]-də təklif olunmuş termindir. Hər bir *limit teoreminde* ilkin paylanmanın hər hansı $\Gamma = \{Q\}$ çoxluğu iştirak edir və bunlar sonra P_i paylanmalarının ailəsinə çevrilir. Limit teoreminin meşxi r parametri hər hansı kritik θ qiymətinə yaxınlaşdıqda P_i -nin müvafiq Q paylanması ilə asimptotik aproksimasiyasını qurmaqdan ibarətdir. Limit teoreminin T geniş mənadı (Yu. V. Linnik nəzərdə tutduğu ilə müqayisədə) belə anlaşılır ki, Q paylanması Γ -də verilmiş sonlu sayda $q_1(t), \dots, q_m(t)$ funksionalları ilə birqiyəmətlili təyin olunur.

Toplayıcı limit teoreminə misal – hər bir $n \geq 1$ qiymətində riyazi gözləmələri sonlu $a_n = MS_n$ və dispersiyası $\sigma_n^2 = DS_n$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nm}$ üçün *mərkəzi limit teoremidir*, belə ki,

$$F_n(x) = P\{S_n < x\} = \Phi(x, a_n, \sigma_n) + \varepsilon_n(x),$$

burada $\Phi(x, a_n, \sigma_n)$ – riyazi gözləməsi a_n olan, dispersiyası σ_n^2 -na bərabər normal qanunun paylanma funksiyasıdır, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ x üzrə müntəzəm ödənilir. Yu. V. Linnikin [1]-də baxdığı məsələdə T ixtiyari x -lər üçün deyil, yalnız n -lə birgə artan hər hansı intervala aid nöqtələr üçün olur. Elə limit teoremləri mövcuddur ki, bunlar hətta dar mənada belə toplayıcı deyildir. Məs., eyni tip hissəcikləri bircins *şaxələnən proseslər* üçün limit teoremləri belələrindəndir (bax, [2]). İsbat olunmuşdur ki, kritikaltı və kritiküstü hallarda bir hissəciyin çevrilmələrinin ilkin paylanması uyğun limit paylanmasına görə həmişə bərpa olunur.

Əd.: [1] Л ин н и к Ю. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 261–62; [2] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероят. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 2, с. 256–65.

S – TOPOLOGIYA «S – топология; S – topology» – bax, *Məqbul topologiya*.

TOPOLOJİ ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin «топологическая энтропия динамической системы; topological entropy of a dynamical system» – *erqodik nəzəriyyə* anlayışıdır. K kompaktının özünə ixtiyari kəsilməz $f: K \rightarrow K$ inikası üçün T , e. dinamik sistemin metrik entropiyası ilə analogi təyin olunur: bu

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\xi} h(f, \xi)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada ξ , – K kompaktının açıq

çoxluqlarla ixtiyari örtüyü, $N(\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi)$, – $\xi, f^{-1}\xi, \dots, f^{-n+1}\xi$ örtüklərinin elementlərinin, boş olmayan kəsişmələrindən ibarət $\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi$ örtüyünün elementləri K kompaktının minimal altörtüyünün elementləri sayının ikilik loqarifmidir və

$$h(f, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi).$$

Metrik kompakt üçün T , e. $h_{\text{top}}(f)$ bütün normalanmış f -ə nəzərən invariant Borel μ ölçüləri üzrə metrik $h_{\mu}(f)$ entropiyalarının yuxarı sərhədi ilə üst-üstə düşür (bax, [2] – [4]). T , e. hamar dinamik sistemlər nəzəriyyəsində tətbiq olunur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] Adler R., Konheim A., McAndrew M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, p. 309–19; [2] Д и н а б у р г Е. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 2, с. 324–66; [3] G o o d m a n T., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1971, v. 3, № 2, p. 176–80; [4] G o o d w y n L., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 2, p. 366–88; [5] Б о у э н Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [6] Г л а д к и е динамические системы, пер. с англ., М., 1977.

σ – TOPOLOJİ FƏZA « σ – топологическое пространство; σ – topological space», σ – fəza, σ – topologiyalı fəza. Aleksandrov fəzası, – elementlər (fəzanın elementləri adlandırılan) çoxluğu $\mathcal{X}$ ilə hesabi sayda birləşmə əməlinə və sonlu sayda kəsişmə əməlinə görə qapalı açıq çoxluqlar sinfi ilə təyin olunan σ – topologiya kimi iki obyektə bərabərdir. $\mathcal{E}$, – $\mathcal{X}$ çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş sistem olsun. Əgər:

1) $\mathcal{E}$ sisteminin çoxluqlarının ixtiyari hesabi birləşməsi $\mathcal{E}$ -dən olarsa;

2) $\mathcal{E}$ sisteminin çoxluqlarının ixtiyari sonlu kəsişməsi $\mathcal{E}$ -dən olarsa;

3) $\mathcal{X}$ və boş çoxluq $\mathcal{E}$ -yə daxil olarsa,

($\mathcal{X}, \mathcal{E}$) cütü σ – topoloji fəza adlanır. $\mathcal{E}$ -dən olan çoxluqlar *açıq çoxluqlar*, $\mathcal{E}$ -dən olan çoxluqların tamamlayıcıları *qapalı çoxluqlar* adlanır.

«Adi» topoloji fəzalar σ – topoloji fəzalardır, lakin tərsi doğru deyildir.

Əgər ixtiyari $U \subset \mathbb{R}$ açıq çoxluğu üçün $f^{-1}(U) \in \mathcal{E}$ olarsa, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyası *kəsilməz funksiya* adlanır.

«Adi» topoloji fəzalarda kəsilməzlik üçün verilən bu tərif yığılma anlayışı vasitəsilə ifadə olunan kəsilməzlik anlayışına ekvivalentdir. Lakin σ – topoloji fəzalarda bu iki tərif ekvivalent deyildir. Yuxarıda verilən tərif burada daha təbiidir.

σ – T , f.-lər bu fəzalarda verilən ölçülərin yığılmasını öyrənmək üçün təbii obyektlərdir. Xüsusilə də, $\mathcal{X}$ -də verilən funksiyalar sinfinin doğurduğu σ – T , f.-lər faydalı olur (bax, *Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün*).

Bax, σ – *ölçülən funksiya*.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [2] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41.

TRANSFER – MATRİS «трансфер – матрица; transfer – matrix» – statistik fizika və Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində iki obyektə ifadə edən anlayışdır: 1) Markov (Gibbs) meydanının stoxastik (keçid) operatoru; 2) ele köməkçi

$A = \{A_{\alpha\beta}\}$ (operator) matrisini ki, sistemin statistik cəmi $\sum_{\alpha} (A^N)_{\alpha\alpha} = \text{tr } A^N$ cəminə bərabərdir.

Daha ətraflı.

1) **Transfer-matris-keçid operatoru.** $\{X_t, t = (t^{(0)}, \dots, t^{(d)}) \in \mathbb{Z}^{d+1} \text{ və ya } \mathbb{R}^{d+1}\}$ – qiymətləri hər hansı S fəzasından olan $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində (və ya $\mathbb{R}^{d+1}$ fəzasında) stasionar təsadüfi meydan, zaman istiqamətinə nəzərən (yeni sıfır koordinat oxu boyunca) Markov meydanı olsun. Onda keçid operatorları

$$(\mathcal{T}_\tau f)X_0 = \left\langle \mathcal{U}_\tau f|X|_{Y_0} = X_0 \right\rangle, \quad \tau \in \mathbb{Z}_+ (\tau \in \mathbb{R}_+), \quad \tau > 0 \quad (1)$$

$\mathcal{T}_\tau = (\mathcal{T})^\tau$ semi – qrupunu əmələ gətirir, $\mathcal{T}$ operatoru meydanın transfer-matrisi adlanır. (1) düsturunda $Y_0 = \{t: t^{(0)} = 0\}$ «sıfırıncı laydır», $X_0 = \{X_t, t \in Y_0\}$ bu layda meydanın konfigurasiyasıdır, $f, -X$ meydanının funksionalıdır və onun Y_0 -da daralması yalnız $X|_{Y_0}$ -dan asılıdır. $\mathcal{U}_\tau f$ τ üzərində zaman istiqaməti boyunca f -in «yerindəyişməsidir», $\left\langle \cdot |X|_{Y_0} = X_0 \right\rangle$ meydanın şərti riyazi gözləməsidir, bu şərtlə ki, onun daralması $X|_{Y_0}$ qeyd olunmuşdur və X_0 konfigurasiyası ilə üst-üstə düşür.

T. – m.-in tənfi Ostervalder – Şradere görə müsbətlik şərtini ödəyən Evklid kvant meydanları halı üçün (ya $\mathbb{R}^{d+1}$ -də və ya $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində təyin olunmuş) ümumiləşdirilir.

2) **Transfer-matris-köməkçi operator.** $G \subset \mathbb{Z}^d$ – məhdud çoxluq, $[0, N] \subset \mathbb{Z}$ olsun.

$$\Lambda = G \times [0, N] \subset \mathbb{Z}^{d+1}$$

oblastında olan spinlərin sonlu fəzası S ilə şəbəkəvari fiziki sistem üçün, bir sıra hallarda, eht. $A = A(G)$ (T. – m.) göstərmək olur ki, $\mathbb{Z}_\Lambda$ sisteminin statistik cəmi A^N matrisinin matris elementlərinin cəminə bərabərdir (və ya onun yalnız diaqonal elementlərinin cəminə bərabərdir – «periodik sərhəd şərtləri» adlandırılan şərtlərlə). Məs., (2) oblastında sistemin enerjisi

$$H_\Lambda(X) = \sum_{i=0}^{N-1} V(X_i, X_{i+1}) \quad (3)$$

şəklində olarsa, onda T. – m.-in

$$A(G) = \{A_{XY} = \exp(-\beta V(X, Y))\}$$

ifadəsilə təyin olunduğu fərz olunur, burada X – sistemin konfigurasiyası, X_i – onun i -ci laya daralması, $Y_i = G \times \{i\}$, $V = V(\cdot, \cdot)$, – X və Y konfigurasiyalar cütünün hər hansı funksiyası, $X, Y \in S^G$, – G -də iki konfigurasiyadır.

Spinlər fəzası S -in kəsilməz olduğu halda T. – m. (nüvə) analoji surətdə təyin olunur.

(3) halında sonsuz $G \times \mathbb{Z}$ silindrinə limit Gibbs meydanı Markov Gibbs meydanı ($t^{(0)}$ oxu boyunca) olur və onun T. – m. [(1) mənasında] $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$

$$\mathcal{T}_{XY} = \frac{1}{\lambda_0 \psi_X^0} A_{XY} \psi_Y^0, \quad X, Y \in S^G, \quad (4)$$

düsturu ilə ifadə olunur və bu düstur «T. – m.» termininin müxtəlif qiymətləri arasında əlaqəni müəyyən edir. (4)-də $\lambda^{(0)} = \lambda^{(0)}(G)$, – $A(G)$ -nin ən kiçik məxsusi qiymətidir.

$\Psi^0 = \{\Psi_X^0, X \in S^G\}$ – ona uyğun məxsusi vektordur. Bütün $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində limit Gibbs meydanının T. – m. $\mathcal{T}$ $G = \mathbb{Z}^d$ olduqda, $\mathcal{T}(G)$ operatorlarının termodinamik limiti kimi alınır.

Əd.: [1] Саймон Б., Модель $P[\phi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966.

TRANSVERSAL(ı) latın kvadratının «**трансверсаль**» латинского квадрата; **transversale of a Latin square**» – bax, *Latin kvadratı*.

TRANZİTİV MARKOV ZƏNCİRİ «**транзитивная цепь Маркова**; **transitive Markov chain**» – bax, *Qayıdışsız Markov zənciri*.

TRAYEKTORIYA «**траектория**; **trajectory / sample path**» – bax, *Seçimi funksiya, Təsadüfi funksiya*.

TRAYEKTORIYA(sı) Markov zəncirinin «**траектория**» цепи Маркова; **trajectory of a Markov chain/sample path of a Markov chain**» – bax, *Markov zənciri*.

TRAYEKTORIYANIN TƏSADÜFİ UZUNLUĞU; **экспоненциальное преобразование**; **exponential transformation of a random path**» – bax, *Eksponensial çevirmə(sı)* təsadüfi trayektoriya uzunluğunun.

TREND «**тренд**; **trend**» – *təsadüfi prosesin* sistematik dəyişikliyi. T., adətən, $X(t)$ təsadüfi komponenti ilə cəmlənən, təsadüfi olmayan $f(t)$ funksiyası şəklində zaman sıraları modellərində iştirak edir: $Y(t) = f(t) + X(t)$. Bu halda $X(t)$ asılı olmayan xətlər ardıcılığı (*bəyaz küy*) ola bildiyi kimi, sistematik xətlərsiz, daha mürəkkəb təsadüfi proses belə ola bilər. Əgər $f(t)$ periodik funksiya olarsa, onda belə T., əksər hallarda, tsiklik trend adlanır. Əgər tsiklik T.-in rəqslər tezliyi yüksək olarsa, belə T. mövsüm effekti adlanır.

T. statistik qiymətinin qurulması və onun təsirinin yox edilməsi üçün çoxlu metodlar mövcuddur, məs., *sürüşən ortalar metodu, dəyişən fərqlər metodu*.

Bax, *Statistik nəzarət, keyfiyyət*.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

TREND(ı) метеорологи кəmiyyətін «**тренд**» метеорологической величины; **trend of a meteorological variable**» – X метеорологи кəmiyyətінin hər hansı $[t', t' + \Delta t]$ zaman intervalında baş verən sistematik dəyişikliyi. Δt -nin artması ilə əksər hallarda aydın olur ki, метеорологи кəmiyyətін evvəllər aşkar edilmiş T.-i (yeni onun artması və ya azalması) əslinə qaldıqda, hər hansı

uzun periodlu rəqsin bir hissəsidir və təsadüfi yüksəklikli rəqslərdən yalnız periodunun uzunluğu ilə fərqlənir. X kəmiyyətinin zaman üzrə dəyişməsinə $X(t)$ prosesinin realizasiyası kimi baxaraq, T.-i bəzən $m_x = M X(t)$ riyazi gözləməsi üzrə $X(t)$ -nin qeyri – stasionarlığının təzahürü kimi interpretasiya etmək olar, bu zaman m_x zaman funksiyası olur. T.-i təsvir etmək üçün digər tətbiq olunan modelər də məlumdur.

Meteoroloji kəmiyyətlərin T.-nin seçilməsi ilkin meteoroloji sıralar üzərində statistik işləmələrin müxtəlif üsullarının tətbiqinə əsaslanır. Bu məqsədlə, əksər hallarda $X(t)$ -də olan qısa-periodlu rəqsin olduğu effektiv hamarlanmasını təmin edən sürüşən orta metodu istifadə olunur. T.-in empirik qiymətlərinin növbəti approksimasiyası bir qayda olaraq, α_i əmsalları ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunan, $\hat{m}_x(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$ şəklində n

tərtib çoxhədli vasitə ilə həyata keçirilir. $n=1$ olduqda $X(t)$ -də xətti T.-in varlığı nəzərdə tutulur.

Meteoroloji zaman sıralarının statistik analizində T.-in olması əlavə xətlərin yaranmasına səbəb ola bilər. Bu xətlər sonsuzluqda belə sönməyən, mərkəzlənmiş korrelyasiya funksiyasının hesablanması əmələ gəlir (bax, [2], [3]). Bu effekti aradan qaldırmaq və ya zəiflətmək üçün korrelyasiya funksiyaya əvəzinə struktur funksiyası hesablanmaq məsləhətdir.

İqlimin dəyişmə ənənələrini təyin edən (əsr boyunca) meteoroloji kəmiyyətlərin çoxillik T.-lərinin analizi mühüm əhəmiyyətə malikdir (məs., istiləşmə və soyuqlaşma kimi). İqlim T.-lərinin statistik mühümlüyünün təsdiq olunması və fiziki təbiətinin aydınlaşdırılması xüsusi tədqiqatların mövzularıdır (bax, [1], [4] – [6]).

Əd.: [1] Г р у з а Г. В., Р а н ь к о в а Э. Я., Данные о структуре и изменчивости климата. Температура воздуха на уровне моря. Обнинск, 1979; [2] Л а м л и Дж.-Л., П а н о в с к и й Г.-А., Структура атмосферной турбулентности, пер. с англ., М., 1966; [3] М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика, ч. I, М., 1965; [4] П о л я к И. И., Численные методы анализа наблюдений, Л., 1975; [5] Р у б и н ш т е й н Е. С., П о л о з о в а Л. Г., Современное изменение климата, Л., 1966; [6] B r i n k m a n n W. A. R., «Quart. Res.», 1976, № 6, p. 335–58.

TRİPLETİ, ÖNGÖRÜL XARAKTERİSTİKALARIN « **триплет предсказуемых характеристик; triplet of predictable characteristics** » semimartinqalın – ζ semimartinqalının sıçrayışları ölçüsü μ -nün kompensatoru ν və öngörül B, C proseslərindən ibarət $T = (B, C, \nu)$ üçlüyüdür, bu anlayışların tərif və xassələri *Semimartinqal* məq.-də verilmişdir.

TSİKLİK KOD « **циклический код; cyclic code** » – bax, *Blok kod*.

TSİKLİK MARKOV ZƏNCİRİ « **циклическая цепь Маркова; cyclic / periodic Markov chain** » – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi ilə bircins Markov zənciridir ki, vəziyyətlərin $d \geq 2$ sayda altısinflərinə ayrılan yeganə mühüm C sinfindən ibarətdir (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*). Belə zəncir d – tsiklik və ya d – periodik zəncir adlanır. İxtiyari i vəziyyəti üçün d ədədi $t \geq 1$ şərtini ödəyən t -lərin ən böyük ümumi böləninə bərabərdir ki, bu t qiymətlərində t addıma keçid ehtimalı $p_{ij}(t)$

0-dan fərqli olsun. Məs., əgər zəncirin vəziyyətləri $-\infty < n < \infty$ şərtlə verilən tam n ədədlədirsə və n vəziyyətindən qonşu $n-1$ və $n+1$ vəziyyətlərinə keçid ehtimalları $p_{n,n-1}$ və $p_{n,n+1}$ və yalnız belə keçid ehtimalları sıfırdan fərqli olarsa, belə zəncir 2 – tsiklik zəncirdir; bu halda cüt n -lər bir altısinfi, tek n -lər digər vəziyyətlər altısinfini əmələ gətirir.

T. M. z.-ndə t addıma keçid ehtimallarının limiti – $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, ümumiyyətlə, mövcud deyildir, lakin i -dən asılı olmayan, Çezaro mənada limitə analogi limitlər vardır, əgər C qayıdışsız və ya sıfır sinfi olarsa, onda bu limitlər 0-a bərabərdir, əgər C müsbət sinfidirsə, onda bu limitlər də müsbətdir və bunlar zəncirin yeganə stasionar paylanmasını əmələ gətirir.

TSİKLİK SİNİF(fi) Markov zənciri vəziyyətlərinin « **циклический класс состояний цепи Маркова; cyclic class of states of a Markov chain** » – bax, *Markov zənciri*.

TSİKLİK TEZLİK « **циклическая частота; cyclic frequency** » – bax, *Tezlik*.

TSİKLİK VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin « **циклическое состояние цепи Маркова; cyclic / periodic state of a Markov chain** » – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi bircins Markov zəncirinin i vəziyyətidir ki, onun periodu (d), $d > 1$ şərtini ödəyir.

Burada d ədədi $t \geq 1$ şərtini ödəyən t -lərin ən böyük ümumi böləninə bərabərdir ki, bu t qiymətlərində t addıma keçid ehtimalı $p_{ii}(t)$ sıfırdan fərqli olsun. Bütün vəziyyətlərin bir mühüm sinfi üçün (bax, *Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı*) period eynidir.

TUTARLI KRİTERİ « **состоятельный критерий; consistent test** », tutarlı test – yoxlanılan hipotezi alternativlər sinfindən olan ixtiyari alternativ hipotezdən, müşahidələr sayını artırıdca, yəqinliklə fərqləndirən *statistik kriteridir*, $(\mathcal{X}_k, \mathcal{B}_k, \mathbf{P}_{\theta k})$, $\theta \in \Theta$, $k = 1, 2, \dots$ ehtimal fəzaları ardıcılığı,

Θ bütün fəzalar üçün ümumi olan parametrlər çoxluğu olsun: $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathbf{P}_{\theta}^{(n)})$, $-(\mathcal{X}_k, \mathcal{B}_k, \mathbf{P}_{\theta k})$, $k = 1, \dots, n$ ehtimal fəzalarının düz hasilidir. Bu, qiymətləri $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ fəzalarından, paylanmalar $\mathbf{P}_{1\theta}, \dots, \mathbf{P}_{n\theta}$ olan asılı olmayan n sayda təsadüfi elementin müşahidəsinə uyğun fəzadır. Hər bir seçimi $\mathcal{X}^{(n)}$ fəzası üçün $H_1: \theta \in \Theta_1 \subset \Theta \setminus \Theta_0$ alternativinə qarşı $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün kritik funksiya φ_n olsun. $\{\varphi_n\}$ kritik funksiyalar ardıcılığı ($n = 1, 2, \dots$), əksər hallarda, *kriteri* adlandırılır. $\beta(\varphi_n, \theta) = \int \varphi_n d\mathbf{P}_{\theta}^{(n)}$, – φ_n kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər $\theta \in \Theta_0$ olduqda $\beta(\varphi_n, \theta) \leq \alpha$, $\theta \in \Theta_1$ olduqda isə $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 1$ olarsa, $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcılığı α ($0 < \alpha < 1$) *h ü d u d u n u n* tutarlı kriterisi adlanır.

Bəzən, $\theta \in \Theta_0$ olduqda $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta_1$ olduqda isə $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 1$ olduğu halda da, $\{\varphi_n\}$ kriterisi *tutarlı kriteri* adlandırılır; bu tərif T. k.-nin tərifinə müəyyən

mənada ekvivalentdir (bax, [1]). Əgər $\beta(\varphi_n, \theta) \rightarrow 0$ münasibəti $n \rightarrow \infty$ olduqda $\theta \in \Theta_0$ üzrə müntəzəm yığılma, $\beta(\varphi_n, \theta) \rightarrow 1$ isə $\theta \in \Theta_1$ üzrə müntəzəm yığılma olarsa, onda $\{\varphi_n\}$ ardıcılığı müntəzəm tutarlı kriteri adlanır.

$\beta(\varphi_n, \theta)$ kəmiyyəti $\theta \in \Theta_0$ olduqda φ_n kriterisinin 1-ci növ səhvi, $1 - \beta(\varphi_n, \theta)$ kəmiyyəti isə $\theta \in \Theta_1$ olduqda φ_n kriterisinin 2-ci növ səhvi olduğundan, kriterinin tutarlılığı onu ifadə edir ki, seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda 2-ci növ səhv olduqca kiçik edilə bilər; deməli, müşahidələrin sayını qeyri – məhdud artırıdığca yoxlanılan hipotezi ixtiyari alternativdən yaqınlıqla fərqləndirmək olar. Analoji olaraq, müntəzəm tutarlılıq onu ifadə edir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda 1-ci və 2-ci növ səhvləri naməlum $\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1$ qiymətindən asılı olmayaraq, istənilən qədər kiçiltmək olar.

T. k. ideyası ilk dəfə [3]-də daxil olunmuşdur; müntəzəm T. k.-nin varlığının zəruri və kafi şərtləri [3]-də ətraflı araşdırılmışdır.

$\Theta \subset \mathbb{R}^s$ olduğu halda T. k.-yə misal *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisidir*. Qeyri – parametrik T. k.-yə misal *Kolmoqorov kriterisidir*.

Əd.: [1] Encyclopedic dictionary of mathematics, v. 2, p. 1217, Camb. – L., 1977; [2] Hoeffding W., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, p. 700–18; [3] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 147–62; [4] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

TUTARLI STATİSTİK QIYMƏT « состоятельная оценка; consistent estimator » – qiymətləndirilən θ parametrinin əsl qiymətinə $n \rightarrow \infty$ olduqda ehtimala görə yığılan (zəif tutarlılıq) və ya sanki hər yerdə yığılan (güclü tutarlılıq) $\hat{\theta}_n$ nöqtəvi statistik qiymətlərinin ardıcılığıdır, $n = 1, 2, \dots$, n – seçimin həcmidir. Məs., seçimi orta qiymətlərin

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

ardıcılığı müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətinin güclü T. s. q.-dir. Statistik qiymətlərin qurulmasında ümumi metodlar üçün qoyulan əsas tələblərdən biri onların tutarlı statistik qiymət olması haqqında qoyulan tələbdir (məs., momentlər metodu və maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə qurulmuş statistik qiymətlərin tutarlılığı haqqında, bax, [2], fəsl. 1).

Əd.: [1] Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Боровков А.А., Математическая статистика, М., 1984; [3] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

TUTUM « емкость; capacity » – klassikpotensial nəzəriyyəsində xarici Nyuton tutumu anlayışının abstrakt ifadəsidir. Fərz olunur ki, hər hansı F çoxluğu və onun altçoxluqlarının hər hansı ailəsi $\mathcal{F}$ verilmişdir, boş çoxluğun və $\mathcal{F}$ ailəsindən olan çoxluqların bütün mümkün birləşmələri və sonlu

toplularının kəsişmələrinin də $\mathcal{F}$ -ə daxil olduğu fərz olunur. $[-\infty, +\infty]$ -dan qiymətlər alan və aşağıdakı xassələri ödəyən, F çoxluğunun bütün altçoxluqları üçün təyin olunmuş $C(A)$ funksiyasına Şoke tutumu və ya F -tutum deyilir: a) $C(A)$ funksiyası A artdıqca azalmır; b) $C(A)$ aşağıdan kəsilmezdir, yəni $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ çoxluqları $\mathcal{F}$ -ə daxildirsə,

$$C\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sup \{C(A_n); n \geq 1\}; \text{ c) } C(A) \text{ yuxardan kəsil-}$$

məzdir, yəni $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ çoxluqları $\mathcal{F}$ -ə daxildirsə,

$$C\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \inf \{C(A_n); n \geq 1\}. \text{ Bu halda } A \subset F \text{ çoxluğu,}$$

əgər $C(A) = \sup \{C(B): B \subset A, B \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F}_0$ isə elementləri $\mathcal{F}$ -dən olan bütün mümkün ardıcılıqların birləşmələrinin çoxluğu olarsa, C – ölçülən çoxluq adlanır.

Abstrakt T. nəzəriyyəsinin (bax, [3] – [5]) ən mühüm məsələsi C – ölçülənlik üçün münasib kriterilərin alınmasıdır. Belə kriteriləri Q. Şoke (G. Choquet) 1955–59-da qurmuşdur. $\mathcal{F}$ tutuma misal $\mu^*(A) = \inf \{\mu(B): B \supset A, B \in \mathcal{F}\}$ xarici ölçüdür, burada $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ – sonlu tam ölçü ilə verilən fəzadır. Digər misal: xarici Nyuton tutumudur (bax, [5]), onu təyin edərkən, F və $\mathcal{F}$ kimi uyğun olaraq $\mathbb{R}^3$, $n \geq 3$ və F -də kompaktlar çoxluğu götürülür. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində T. Nəzəriyyəsi mühüm tətbiqləri ilə seçilir, məs., bəzi çətin ölçülənlik problemlərinin araşdırılmasında, o cümlədən, Markov proseslərinin trayektoriyalarının çoxluqlara ilk çatım anlarının (bax, [1], [2]) tədqiqində (bax, [3], [4]). Markov proseslərinin geniş sinfi üçün xarici Nyuton T.-na analoji T.-lar qurulmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Дынкин Е.Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [2] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [3] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [4] Meyer P.-A., Dellacherie C., Probabilités et potentiel, P., 1976, ch.1–4; [5] Doob I. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – B. – Tokyo, 1984.

F – TUTUM « F – емкость; F – capacity » – bax, *Tutum*.

TYUKİ KORRELYASİON PƏNCƏRƏSİ « Тьюки корреляционное окно; Tukey's lag window » – bax, *Korrelyasion pəncərə*.

TYUKİ – HENNİNG STATİSTİK QIYMƏTİ « Тьюки – Хеннинга оценка; Tukey – Henning estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət.



UAYTMAN FUNKSIYASI « Уайтмана функция; Wightman function » Vaytman funksiyası kvant meydan nəzəriyyəsində – meydan operatorlarının hasilərinin vakuum üzrə ortasının ortasıdır. Bu funksiyalara statistik mexanikada korrelyasion funksiyaların, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində moment funksiyalarının analoqu kimi baxmaq olar.

$\{\varphi(f), f \in S(\mathcal{M}^d)\}$ kvant meydanı, yeni vakuum vektoru Ω olan, hər hansı H Hilbert fəzasında təsir göstərən operatorlar ailəsi olsun (bax, [1]).

$$W_n(f_1, \dots, f_n) = (\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \dots \cdot \varphi(f_n) \Omega, \Omega_H)$$

yarıxətəti formaları nüvə haqqında teoremlə əsasən (bax, [3])

$$W_n(f_1, \dots, f_n) = \int_{(\mathcal{M}^0)^n} W_n(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

bərabərliyi ilə ifadə oluna bilər, burada $W_n(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathcal{M}^d$ – nisbətən artan ümumiləşmiş funksiyadır, bu funksiya n -ci Uaytman funksiyası adlanır. Belə tərif onunla əlaqədardır ki, kvant meydan nəzəriyyəsində təsadüfi meydanlar ümumiləşmiş meydanlardır. Belə funksiyaların toplusu $\{W_n(x_1, \dots, x_n)\}$, $n=1, 2, \dots$ kvant meydan nəzəriyyəsinin aksiomlarından alınan bir sıra tələbləri ödəyir (kovariantlıq, müsbət müəyyənlik, lokallıq və s.; bax, [2]); bu toplu unitar ekvivalentliyə qədər dəqiqliklə $\{\varphi(f), f \in S(\mathcal{M}^d)\}$ kvant meydanının özünü təyin edir.

Əd.: [1] Йост Р., Общая теория квантовых полей, пер. с англ., М., 1967; [2] Боголюбов Н. Н., [и др.], Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

UDUCU BARYER « поглощающий барьер; absorbing barrier / boundary » – bax, Viner prosesi yazımında.

UDUCU VƏZİYYƏT « поглощающее состояние; absorbing state » – bax, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu hesabı.

UDUCU VƏZİYYƏT Марков зəncirinin «поглощающее состояние» цепь Маркова; absorbing state of a Markov chain – bax, Markov zənciri; uducu vəziyyət, Markov zənciri; vəziyyətlərin təsnifatı.

UDUM EHTİMALI « поглощения вероятность; absorption probability » – bax, Markov prosesi vəziyyətləri çoxluğu sonlu, Ehtimal: udum ehtimalı Markov zəncirində.

1040 UAYTMAN

UDUŞ FUNKSIYASI « выигрыша функция; gain function » – bax, İdareolunan diffuzion proses.

UİLKOKSON KRİTERİSİ « Уилкоксона критерий; Wilcoxon test » – $X_1, \dots, X_n$ və $Y_1, \dots, Y_m$ seçimlərinin həmcinsliyini yoxlamaq üçün qeyri – parametrik kriteridir. Seçimlərin elementlərinin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x)$ və $G(x)$ -in isə uyğun olaraq, bu seçimlərin elementlərinin kəsilməz paylanma funksiyaları olduğu fərz olunur; $F(x)=G(x)$ hipotezi yoxlanılır. U. k.

$$W = s(r_1) + \dots + s(r_m) \quad (*)$$

ranq statistikasına əsaslanır; r_j , – X_i və Y_j ümumi variasion sırasında Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ranqları, $s(r)$, $r=1, \dots, n+m$ funksiyaları isə əvvəlcədən qeyd olunmuş

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+m \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n+m) \end{pmatrix}$$

əvəzləməsi ilə təyin olunur, burada $s(1), \dots, s(n+m)$, – $1, 2, \dots, n+m$ ədədlərinin mümkün olan yerdəyişmələrindən biridir. Əvəzləmə elə seçilməlidir ki, verilmiş alternativ hipotez üçün U. k.-nin gücü ən böyük olsun. W statistikasının paylanması yalnız seçimlərin həcmindən asılı olub, əvəzləmənin seçimindən asılı deyildir (əgər paylanmaların eyniliyi hipotezi doğrudursa). $n \rightarrow \infty$ və $m \rightarrow \infty$ olduqda W təsadüfi kəmiyyəti asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Bu tip U. k.-nin variantı ilk dəfə F. Uilkokson tərəfindən eyni həcmli seçimlər üçün təklif edilmişdir və bu kriteri $s(r) \equiv r$ olduğu xüsusi hal üçün (*) statistikasına əsaslandırılmışdır (bax, Ranqlar cəmi kriterisi, Mann – Uitni kriterisi).

Bax, Van der Varden kriterisi, Ranq kriterisi.

Əd.: [1] Wilcoxon F., «Biometrics», 1945, v. 1, p. 80–83; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Вандер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

UİLKs PAYLANMASI « Уилкса распределение; Wilks distribution ». U – paylanma – $U = |I_d - V|$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasıdır, burada $I_d - V$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayı uyğun olaraq, $m_E/2$ və $m_H/2$ olan I tip çoxölçülü beta – paylanma qanununa tabedir. U təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları d , m_H , m_E olan Uilks paylanmasına tabedir, deyilir və bu simvolik olaraq, aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$U \sim U_{d, m_H, m_E}; \quad U = \frac{|E|}{|E + H|}, \quad |E| \neq 0.$$

U statistikası ilk dəfə S. Uilks tərəfindən 1932-də daxil olunmuşdur.

U p.-nin əsas xassələri:

1) U -nin paylanma funksiyası natamam beta – funksiyaların hesabi qarışığı kimi ifadə oluna bilər.

2) U_{d, m_H, m_E} -nin paylanması $U_{m_H, d, m_E - m_H - d}$ -nin paylanması kimidir; bu faktan $m_H < d$ olduqda istifadə olunur. (d, m_H, m_E) üçlüyü əvəzinə (d, m_H, h_0) üçlüyündən də istifadə etmək olar, burada $h_0 = m_E + m_H$. Əgər d və m_H -ı ələ əvəz etmək olarsa ki, $d^* = m_H$ və $m_H^* = d$ olsun və $m_E^* = m_E + m_H - d$ götürülsə, onda $n_0^* = m_E^* + m_H^* = m_E + m_H = h_0$ bərabərlikləri doğrudur.

3) Aşağıdakı xüsusi hallar doğrudur.

$d = 1$ olarsa, onda ixtiyari m_H üçün

$$\frac{1 - U_{1, m_H, m_E}}{U_{1, m_H, m_E}} \frac{m_E}{m_H} \sim F_{m_H, m_E}.$$

$m_H = 1$ olarsa, onda ixtiyari d üçün

$$\frac{1 - U_{d, 1, m_E}}{U_{d, 1, m_E}} \frac{m_E + 1 - d}{d} \sim F_{d, m_E + 1 - d}.$$

$d = 2$ olarsa, onda

$$\frac{1 - U_{2, m_H, m_E}^{1/2}}{U_{2, m_H, m_E}^{1/2}} \frac{m_E - 1}{m_H} \sim F_{2m_H, 2(m_E - 1)}, \quad m_H \geq 2.$$

$m_H = 2$ olarsa, onda

$$\frac{1 - U_{d, 2, m_E}^{1/2}}{U_{d, 2, m_E}^{1/2}} \frac{m_E + 1 - d}{d} \sim F_{2d, 2(m_E + 1 - d)}, \quad d \geq 2.$$

4) Böyük h -lar üçün (yeni böyük m_E -lər üçün) $W = -f \ln U$ kəmiyyəti $\chi_{dm_H}^2$ -in paylanmasına yığılır, burada $f = m_E - (d - m_H + 1)/2 = h_0 - (d + m_H + 1)/2$.

Əd.: [1] Seber G. A. F., Multivariate observations, N. Y. – [a. o.], 1984.

UINZORLANMIŞ ORTA QIYMƏTLƏR « УИНЗОР-ЗОВАННЫЕ СРЕДНИЕ; Winzorized means » – bax, *Dayanıqlılıq (ğı) statistik prosedurun.*

UIŞART PAYLANMASI « Уишарта распределение; Wishart distribution » – cırlaşmayan kovariasion matrisli çoxölçülü normal paylanmalı seçim üzrə kovariasion matris üçün hesablanmış statistik qiymətin *paylanmasıdır*. İlk dəfə C. Uışart tərəfindən alınmışdır (bax, [1]). U p. birölçülü təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasının statistik qiyməti üçün χ^2 – paylanmanın ümumiləşməsidir.

$(X_1, \dots, X_n)$ – parametrləri naməlum μ və Ξ olan p – ölçülü müşahidələrin n həcmli seçimi olsun, $n > p + 1$, $X_i \in N_p(\mu, \Xi)$, $i = 1, \dots, n$. S isə Ξ matrisinin statistik qiyməti olsun. Onda $A = (n - 1)S$ təsadüfi matrisinin U p.-nin sıxlıq funksiyası, A müsbət müəyyən olduqda halda,

$$w(A|\Xi, n - 1) =$$

$$= \frac{|A|^{(n-p-2)/2} e^{-\frac{1}{2} A \Xi^{-1} A}}{2^{(n-1)p/2} \pi^{p(p-1)/4} |\Xi|^{n-1/2} \prod_{i=1}^p \Gamma[(n-i)/2]}$$

düsturu ilə təyin olunur, digər hallarda isə sıfıra bərabərdir. $w(A|\Xi, n - 1)$ sıxlıq funksiyasına uyğun U p. qanunu $W(\Xi, n - 1)$ ilə işarə olunur.

U p.-nin uyğun xarakteristik funksiyası

$$M \exp[i \operatorname{tr}(A\Theta)] = |\Xi^{-1}|^{(n-1)/2} \left| \Xi^{-1} - 2i\Theta \right|^{(n-1)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada Θ – həqiqi matrisdir.

Çoxölçülü statistik analizdə U p.-ndan alınan aşağıdakı nəticələrdən çox istifadə olunur:

1) $MS = \Xi$,

2) $MS^{-1} = [(n - 1)/(n - p - 1)] \Xi^{-1}$,

3) $S^{ii} \sim \chi^2(n - p - 1)$; s^{ii} , – S^{-1} matrisinin diaqonal elementidir.

4) $v'Sv \sim (v'\Xi v) \chi^2(n - 1)$.

U p.-nin mühüm xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: $A_j \sim W(\Xi, n_j - 1)$, $j = 1, \dots, q$ olsun. Əgər A_j matrisləri

asılı olmayan matrislədirsə, onda $A = \sum_{j=1}^q A_j$ matrisi

$$A = \sum_{j=1}^q A_j \sim W(\Xi, \sum_{j=1}^q n_j - q)$$

münasibətini ödəyir.

Əd.: [1] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32–52; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

UIŞART PAYLANMASI ü m u m i l ə ş m i ş « Уишарта распределение обобщенное; Wishart generalized distribution » –

$$\hat{\Xi} = (n - 1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})', \quad \hat{x} = \sum_{k=1}^n x_k / n$$

empirik kovariasion matrisinin elementlərinin birgə *paylanmasıdır*, bu matris m – ölçülü təsadüfi x vektoru üzərində $x_1, \dots, x_n$ müşahidələri üzrə alınan matrisdir. $X = (x_1, \dots, x_n)$ matrisinin elementlərinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(U)$ -nün varlığı fərz olunur, U , – $m \times n$ – ölçülü matrisdir. Əgər $n > m$ olarsa, onda $\hat{\Xi}$ matrisinin paylanmasının sıxlığı

$$(n - 1)^{m(n-1)/2} C_{m, n-1} \int_{G_{n-1}} p((n - 1)^{1/2} Z_m^{1/2} H^m T_{n-1} + y_m t'_n) \det Z_m^{(n-m-2)/2} \prod_{i=1}^m dy_i \mu(dH)$$

şəklində ifadə olunur, burada Z_m , – m – tərtibli mənfə olmayan müəyyən matrisdir. G_{n-1} – həqiqi ortoqonal matrislərin $(n - 1)$ –

ölçülü qrupu, μ – bu qrupda normalanmış Haar (Haar H.) ölçüsü,

$$H^{(m)} = \|h_{ij}\|, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n,$$

$$y_m = \|y_i\|^T, \quad i=1, \dots, m,$$

$$T_n = \|t_{ij}\|, \quad j=1, \dots, n \text{ ortoqonal matrisdir, } t_n = (n^{-1/2}, \dots, n^{-1/2}),$$

$$T_{n-1} = \|t_{ij}\|, \quad i=1, \dots, n-1, \quad j=1, \dots, n$$

$$C_{m,n-1}^{-1} = \pi^{m(m-1)/4-(n-1)m/2} \prod_{i=1}^m \Gamma((n-i)/2).$$

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Многомерный статистический анализ. К., 1988.

UNIMODAL / TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA « уни-модальное / одновершинное распределение; unimodal distribution » – yalnız bir *modası* olan ehtimal *paylanmasdır*. Paylanmanın *modası* və ya *zirvəsi* adlanan hər hansı heqiqi a ədədi üçün uyğun paylanma funksiyası $F(x)$ $x < a$ olduqda qabarıq, $x > a$ olduqda çökük olarsa, ədəd oxunda ehtimal paylanması *unimodal paylanma* adlanır. Normal paylanma, Koşi paylanması, müntəzəm paylanma U. p.-lardır; müntəzəm paylanmanın *modası* birqiymətli deyildir. *Moda* nöqtəsinin kəsilmə nöqtəsi olmadığı paylanma funksiyası unimodal olduğu halda, $F(x)$ paylanma funksiyasına uyğun paylanmanın sıxlıq funksiyası $p(x)$ -in varlığı fərz olunur (ola bilər ki, yalnız bir nöqtə istisna olunmaqla), bu funksiya modadan solda azalmayan, modadan sağda isə artmayandır. Paylanmanın unimodallığı üçün müxtəlif kriterilər mövcuddur. Bunlardan ən ümumi L. Şeppe məxsus aşağıdakı teoremlə ifadə olunur: *modası* sıfır nöqtəsində olan $F(x)$ paylanma funksiyası, yalnız və yalnız,

$$F(x) = \int_0^1 G(x/u) du$$

şəklində olduqda unimodal paylanmadır. $G(x)$ – hər hansı paylanma funksiyasıdır. Bu kriteri A. Ya. Xinqinə məxsus teoremin sadə halıdır: $f(x)$ – paylanma funksiyası, yalnız və yalnız, onun uyğun karakteristik funksiyası

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$$

şəklində olduğu halda unimodal paylanmadır, burada $\varphi(u)$ – karakteristik funksiyadır (*Xinqin teoremi*).

Başqa sözlə, $F(x)$ funksiyası, yalnız və yalnız, iki asılı olmayan ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin hasilinin paylanma funksiyası olduğu halda unimodaldır, bu şərtlə ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərdən biri $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış olsun.

Xarakteristik funksiyaları ilə verilmiş (məs., *dayanıqlı* paylanmalar) paylanmaların unimodal olub-olmadığını yoxlamaq çətin analitik məsələlərdən hesab olunur. Məs., *öz ü - öz n ə ayrılan* paylanmalar sinfi $\mathcal{L}$ -dən olan paylan-

maların unimodallıq problemi belə məsələlərdəndir. Bu sinifdən olan paylanmaların unimodallığı üç onillik ərzində araşdırılsa da, yalnız 1978-də öz həllini tapmış və isbat olunmuşdur; $\mathcal{L}$ sinfindən olan bütün paylanmalar *təkdirvəli*dir.

Kompozisiyalann və kompozisiyalann limitlərinin paylanmalarının unimodallığını araşdırarkən çətinlik doğuran o faktıdır ki, ümumiyyətlə, iki U. p.-nin kompozisiyası U. p. deyildir (uzun müddət bunun əksi fərz olunurdu) (bax, [2]). Bu səbəbdən güclü unimodallıq anlayışı yaranır. Paylanmanın ixtiyari U. p. ilə kompozisiyası U. p. olarsa, belə paylanmaya *güclü unimodal (güclü təkdirvəli)* paylanma deyilir. İki unimodal və simmetrik paylanmanın kompozisiyası unimodal və simmetrik paylanmadır. U. p.-nin simmetrizasiyası U. p.-dir. $F(x)$ – unimodal və simmetrik paylanma, $G(x)$ – unimodal və simmetrik olmayan paylanmadırsa, onda $F * G$ kompozisiyasının paylanması unimodal deyildir [3].

U. p.-lar sinfi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada böyük rol oynayır. Belə ki, paylanmalarla əlaqədar olan bir çox nəticələr U. p.-lar üçün daha da güclü olur. Məs., əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması unimodaldırsa, onda bu təsadüfi kəmiyyət üçün *Çəbişev bərabərsizliyini* deqiqləşdirmək olur və bu halda

$$P\{|\xi - x_m| \geq a\sigma\} \leq 4/9a^2,$$

münasibəti doğrudur, burada $a > 0$, x_m – paylanmanın *modası*,

$$\sigma^2 = M(\xi - x_m)^2.$$

$$P\{\xi = a + hk\} = p_k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, h > 0$$

şəbekevari paylanması üçün, əgər ele tam k_0 qiyməti vardiısa ki, $k \leq k_0$ qiymətlərində p_k k -nin funksiyası kimi azalmayan, $k \geq k_0$ qiymətlərində artmayan funksiya olsun, bu paylanma *unimodal şəbekevari paylanma* adlanır. Diskret paylanmalardan Puasson, binomial, hendesi paylanmalar unimodal paylanmalardır.

Çoxölçülü paylanmalar sinfində də bir sıra unimodallıq xassəli paylanmalar mövcuddur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] С т о я н о в И., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

UNIMODAL ŞƏBƏKƏVƏRİ PAYLANMA « уни-модальное решетчатое распределение; lattice unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkdirvəli paylanma*.

UNITAR TƏSADÜFİ MATRİS « унитарная случайная матрица; unitary random matrix » – sətirləri ortonormalanmış sistem əmələ getirən, $\mathbb{C}$ kompleks ədədlər meydanında n tertib $U_n = \|u_{ij}\|$ kvadrat *təsadüfi matrisidir*.

H_n – U. t. m., $\Lambda_n = \|\exp(i\lambda_k) \delta_{ks}\|$, $\exp(i\lambda_n)$ U_n matrisinin məxsusi qiymətləri, bunların arqumentləri isə $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 2\pi$ qaydası ilə nizamlanmış olarsa, U_n U. t. m.-i $U_n = H_n \Lambda_n H_n^T$ şəklində ifadə oluna bilər. Əgər $\arg h_{1k} = c_k$, $k=1, \dots, n$, $0 \leq c_k \leq 2\pi$ bezi təsadüfi olmayan ədədlər olarsa, U_n matrisinin məxsusi qiymətləri yeganə surətdə təyin olunurlar.

Γ , – n – ölçülü unitar matrislər qrupu, ν – bu qaydada normalanmış Haar ölçüsü, B , – Γ qrupunun Borel altçoxluluğunun σ – cəbri olsun. U_n təsadüfi matrisinin paylanması ν ölçüsünə

nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır. Onda ixtiyari $L \in B$ alt-
çoxluluğu və ixtiyari həqiqi $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, n$ ədədləri üçün

$$P\{H_n \in L, \alpha_k < \lambda_k < \beta_k, k = 1, \dots, n\}$$

ehtimallarını hesablamaq olur (bax, [1]).

Əgər ixtiyari $L \in B$ çoxluğu üçün $P\{U_n \in L\} = \nu(L)$ bərabərliyi ödənilərsə, onda U_n matrisinin məxsusi vektorları onun məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı olmur. U_n matrisinin məxsusi qiymətlərinin arqumentlərinin paylanma sıxlığı

$$(n!)^{-1} (2\pi)^{-n} \prod_{\substack{k,s=1,\dots,n \\ k < s}} |e^{i y_k} - e^{i y_s}|^2,$$

$$0 < y_1 < \dots < y_n < 2\pi$$

ifadəsinə bərabərdir. H_n matrisinin paylanması

$$P\{H_n \in L\} = \int_{X \in L} \nu(dX_n | \arg x_{1k} = c_k, k = 1, \dots, n)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Г н р к о в В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–104; [2] М у р н а г а н Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

UNİVERSAL KODLANMA « универсальное кодирование; universal encoding » – dəyərləri hər bir mənbənin entropiyasına uyğunlaşdırılan mənbələr çoxluğu üçün kodlar ardıcılığıdır. Bu uyğunlaşdırmanın müntəzəm uyğunlaşdırılma olub-olmamasından asılı olaraq, kodlanma güclü və ya zəif universal kodlanma adlanır. Sonlu yaddaşlı mənbələr üçün güclü U. k.-nin varlığı isbat olunmuşdur (bax, [1]); belə mənbələr üçün asimptotik ən yaxşı universal kodlar qurulmuşdur (bax, [2]). Əlifbası sonlu olan bütün stasionar mənbələr çoxluğu üçün zəif U. k. mövcuddur (bax, [3]). U. k.-nin qurulması hər hansı kanalın ötürücülük qabiliyyətinin tapılması ilə ekvivalentdir (bax, [4]). U. k. mənbənin xarakteristikaları haqqında dəqiq bilgi olmadan belə informasiyanı uyğunlaşdırmağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Ф и т н и н г о ф Б. М., «Проблемы передачи информации», 1966, т. 2, № 2, с. 3–11; [2] К р и ч е в с к и Р. Е., Т р о ф и м о в В. К., «IEEE Trans. Uniform. Theory», 1981, v. IT27, № 2, p. 199–207; [3] Ш т а р к о в Ю. М., Б а б к и н В. Ф., «2-nd Int. Symp. Inform. Theory. Tsachkadzor, 1971», Bdpt, 1973, p. 249–57; [4] Р я б к о Б. Я., «Проблемы передачи информации», 1979, т. 15, № 2, с. 71–77.

UNİVERSAL OPTİMAL PLAN « универсально оптимальный план; universally optimal design » – bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

UNİVERSAL ÖLÇÜLƏN STRATEGİYA « универсально измеримая стратегия; universally measurable strategy / policy » – bax, *İdərcilənən təsadüfi proses diskret zamanlı*.

UNİVERSAL TUTARLILIQ XASSƏSİ « универсальной состоятельности свойство; universal consistence » – bax, *Qeyri-parametrik regression analiz*.

UONQ PROSESİ « Уонга процесс; Wong process » – bax, *Təsadüfi proses: sıfırlar*.

URBANİK CƏBRİ « Урбаника алгебра; Urbanik algebra » – mənfii olmayan $\mathbb{R}_+$ yarımoxunda ehtimal paylanmalarının $\mathcal{P}$ fəzasında, kommutativlik xassəli hər hansı semi –

qrup əməli « $\circ$ » ilə bağlı (bu əməl, yeni « $\circ$ » sonra konvolüsyon adlandırılır) cəbri strukturdur; bu əməl haqqında aşağıdakılar fərz olunur. E_a , – a nöqtəsində toplanmış paylanma, $\mathfrak{B}_+$, – $\mathbb{R}_+$ – da bütün Borel çoxluqlarının sistemi, $\{T_c : c \geq 0\}$, – $\mathcal{P}$ –dən olan ölçülərin multiplikativ yerindəyişmə operatorlarının çoxluğu olsun. yeni $T_c P(A) = P(c^{-1}A)$, $A \in \mathfrak{B}_+$, $c > 0$, $T_0 P = E_0$. Aşağıdakı aksiomlar sistemi daxil olunur. İxtiyari $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ və ixtiyari $P, Q, H \in \mathcal{P}$ üçün

$$1) E_0 \circ P = P;$$

$$2) (aP + bQ) \circ H = a(P \circ H) + b(Q \circ H), \quad a + b = 1,$$

$$a \geq 0, \quad b \geq 0;$$

$$3) (T_c P) \circ (T_c Q) = T_c (P \circ Q);$$

4) Əgər $P_n \in \mathcal{P}$, $n \rightarrow \infty$ olduqda $P_n \xrightarrow{w} P$ olarsa, onda $P_n \circ Q \xrightarrow{w} P \circ Q$ münasibəti doğrudur ($\xrightarrow{w}$ – zəif yığılmanı ifadə edir);

5) eht. $c_n \in \mathbb{R}_+$ ardıcılığı və $Q \in \mathcal{P}$, $Q \neq E_0$ ölçüsü vardır ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $T_{c_n} E_1^n \rightarrow Q$ (E_1^n , – P -nin n – qat konvolüsyasıdır).

Əgər U. c. qeyri – trivial $h : \mathcal{P} \leftrightarrow \mathbb{R}^1$ homomorfizminə malik olarsa, onda o, r e q u l y a r Urbanik cəbri adlanır və bu halda bu cəbrdə

$$f(t, P) = \int_0^\infty h(E_x) P(dx)$$

xarakteristik funksiyalarını daxil etmək olur, eht. halda isə U. c. qeyri – r e q u l y a r Urbanik cəbri adlanır. Birinci tipə aid U. c.-lərində konvolüsyon əməlləri $\mathcal{P}$ –də aşağıdakı şəkildə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində Ψ əməlləri ilə doğunulur:

$$X \Psi Y = X + Y, \quad X \Psi Y = X \cdot Y,$$

$$X \Psi Y = \left| X^\alpha + Z Y^\alpha \right|^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

burada Z – simmetrik Bernulli paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir və X və Y ilə asılı olmayandır. Qeyri – r e q u l y a r U. c.-nə misal $X \Psi Y = \max(X, Y)$ əməli ilə verilir.

U. c.-ndə limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsidəki adi kompozisiya əməli ilə bağlı (sonsuz bölünən özü-özünə ayrılan və dayanıqlı qanunlar, limit teoremləri nəzəriyyəsi və s.) analogi məsələlərə, bu cəbri strukturların spesifikasiasi ilə bağlı məsələlərə də baxılmışdır (bax, [2] – [4]). U. c.-nin tədqiqatının təməli J. Kingmenin [1] işində qoyulmuşdur. U. c.-nin ümumiləşməsi vardır (bax, [6]). U. c.-nə [5]-də işlənmiş hiperqruplar konstruksiyası yaxındır.

Əd.: [1] K i n g m a n J. F. C., «Acta math.», 1963, t. 109, p. 11–63; [2] U r b a n i k K., «Studia Math.», 1964, v. 23, p. 217–45; 1973, v. 45, p. 57–70; [3] U r b a n i k K., «Studia Math.», 1984, v. 78, p. 59–75; [5] Y u r e k Z. J., «Probab. and Math. Statist.», 1985, v. 5, № 1, p. 113–35; [5] H e y e r H., Probability theory on hypergroups, B. – L. – N. Y., 1983; [6] В о л ь к о в и ч В. Э., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, М., 1987.

URN SXEMİ « урновая схема; urn scheme / model » – ehtimal nəzəriyyəsi modellərindən ən sadəsidir. U. s. belə təsvir olunur: içərisində ağ və qara rəngli küreciklər olan hər hansı bir

qab – urn götürülür. Urndan (qutu, yeşik sözləri də istifadə olunur) ixtiyari bir kürecik götürülür, çıxarılmış kürecik hansı rəngdə olarsa, bu kürecik həmin rəngdə c sayda kürecik və d sayda digər rəngli küreciklə urna qaytarılır. Küreciklər qarşılıqlıqdan sonra prosedür lazım olan qədər təkrarlanır. Fərz olunur ki, umda evvelce $a > 0$ sayda ağ və $b > 0$ sayda qara kürecik olmuşdur.

c və d – U. s.-nin parametrləri – mənfi ədədlər də ola bilər.

U. s. bezi əsas ehtimalları şərti ehtimallarla hesablamaq üçün əlverişlidir. c və d parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox məlum sxemləri alınır: $c = 0$, $d = 0$ olduqda, qaytarmaq şərti seçmə sxemi (bax, *Bernulli sınaqları*), $c = -1$, $d = 0$ olduqda, qaytarmamaq şərti təsadüfi seçmə sxemi, $c = -1$, $d = -1$ halında Erenfestlər diffuziya modeli,

$c > 0$, $d = 0$ halında Poya U. s. və s. kimi. Bu xüsusi hallar bir çox real hadisələrin və bunların araşdırılma metodlarının modelləridir. Məs., Poya U. s. epidemiyaların təsviri üçün istifadə olunur, bu halda hansısa hadisələrin baş verməsi onların növbəti dəfə baş verməsi ehtimalını artırır. U. s. çərçivəsində ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox paylanmalarını almaq olur, məs., binomial, hiperhəndəsi, həndəsi, Poya paylanmalarını. U. s.-də yaranan limit təsadüfi proseslərinin təsvirində mənfi binomial paylanma və Puasson paylanması tətbiq olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

URSELL FUNKSIYALARI « Урселла функции; Ursell functions » statistik fizikada – aktivlik dərəcələrinə görə termodinamik təzyiqin ayrılışını verən funksiyalar ardıcılığıdır (Meyer ayrılışı adlanan, bax, [2]).

$\{Z(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ (və ya $z(x) = e^{-\beta\Phi(x)}$) aktivliyini $\{\Phi(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ xarici meydanı ilə qarşılıqlı təsirli münasibətlə götürdükdə) aktivliklərin qeyri – biricins meydanı ilə təsvir olunan sonlu $\Lambda \in \mathbb{R}^d$ oblastında yerləşən qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklərin sistemi üçün bu sistemin statistik cəmi $Z_\Lambda(\{z(x)\})$ -in loqarifmi (bax, [1]) $z(x)$ -in olduqca kiçik qiymətlərində aşağıdakı şəkildə ifadə olunan ayrılışa malik olur:

$$\ln Z_\Lambda(\{z(x)\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n z(x_i) d^d x_1 \dots d^d x_n. \quad (1)$$

Bu ayrılışa daxil olan $\varphi_n(x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, \dots$ funksiyaları Ursell funksiyaları adlanır.

Hissəciklər arasında qarşılıqlı təsir translyasion invariant olduğu halda U. f. da bu xassəyə malikdir, yəni

$$\varphi_n(x_1 + y, \dots, x_n + y) = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

və $[z(x) = z]$ sabit aktivliyində limit termodinamik təzyiqi –

$$p(T, z) = T \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d} \frac{\ln Z_\Lambda}{|\Lambda|}$$

mövcuddur ($T > 0$ sistemin temperaturudur, $|\Lambda|$, – $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ oblastının həcmidir).

Olduqca kiçik $z \ll 1$ qiymətlərində $p(T, z)$ funksiyası z -in qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılır:

1044 URSELL

$$p(T, z) =$$

$$= T \left(\varphi_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \varphi_n(0, x_2, \dots, x_n) d^d x_2 \dots d^d x_n \right),$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(x) = \text{const}.$$

Klassik qaz halında, hissəciklər arasında qarşılıqlı təsir cüt translyasion invariant $U(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^1$ potensialı ilə verildikdə U. f. $\varphi_1 = 1$ və $n > 1$ qiymətlərində

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_G \prod_{(i,j) \in G} (e^{-\beta U(x_i - x_j)} - 1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada cəmləmə təpələri $1, \dots, n$ olan bütün əlaqəli qraflar üzrə aparılır, $\prod_{(i,j) \in G}$ hasilə isə G -nin bütün tilləri üzrə aparılır.

Əd.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Ursell H., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1927, v. 23, p. 685–97.

UYUŞAN MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « совместимые наблюдаемые; compatible observables » – bax, *Müşahidələnen*.

UYUŞMAYAN HADİSƏLƏR « несовместимые / дизъюнктные события; mutually / disjoint exclusive events », *dizyunkt hadisələr*, – eyni zamanda baş verməyən hadisələrdir. Əgər A və B U. h.-dirsə, onda $A \cap B = \emptyset$ (qeyri – mümkün hadisə) və $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayandırsa və bunlardan heç olmazsa biri hökmən baş versə, yeni ixtiyari $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$ qiymətlərində $A_i \cap A_j = \emptyset$ və

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ (yəqin hadisə) şərtləri ödənilsə, } A_1, A_2, \dots, A_n$$

hadisələri hadisələrin tam qrupunu əmələ gətirir və ya bölgü təşkil edir, deyilir. U. h. və tam qrup əmələ gətirən hadisələr anlayışları bir çox ehtimal müddəalarının çıxarılışında geniş istifadə olunur (bax, məs., *Bəyəs düsturu*, *Tam ehtimal düsturu*).

UYUŞMAYAN MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « несовместимые наблюдаемые; incompatible observables » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*.

UYUŞMAYAN / DİZYUNKT TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR « несовместимые / дизъюнктные случайные события; mutually / disjoint exclusive random events » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B təsadüfi hadisələrinin kəsişməsi qeyri – mümkün hadisə olan hadisələrə deyilir, yeni eyni zamanda baş verməyən A və B hadisələrinə deyilir. A və B hadisələri, yalnız və yalnız, $A \cap B = \emptyset$ olduqda U. t. h.-dir. U. t. h. eyni elementar hadisələrə malik olmayan hadisələrdir. $A_1, A_2, \dots$ (sonlu, yaxud sonsuz) təsadüfi hadisələr ardıcılığının hər bir ixtiyari cütü üçün $i \neq j$ şərtini ödəyən i, j -lərin bütün qiymətlərində $A_i \cap A_j = \emptyset$

berabərliyi ödənilərsə, $\{A_i\}$ hadisələr ardıcılığı *uyuşmayan* və ya *disyunkt hadisələr ardıcılığı* adlanır.

Cüt-cüt *uyuşmayan* və $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ şərtini ödəyən $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($A_i \subset \Omega, i = \overline{1, n}$) hadisələrinə *tam qrup emele gətirən hadisələr* deyilir. Eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisələrin tam qrup emele gətirən hadisələr olması üçün $i \neq j$ şərtini ödəyən ixtiyari $i, j = 1, 2, \dots$ qiymətlərində $A_i \cap A_j = \emptyset$ və $\bigcup A_i = \Omega$ şərtləri ödənilməlidir.

Əgər A və B U. t. h.-dirsə, onda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

U. t. h. anlayışı bir çox düsturların çıxarılışında geniş tətbiq olunur (bax, məs., *Tam ehtimal düsturu, Bəyəs düsturu*).

«UZAQ QONŞU» ALQORİTMİ «*дальнего соседа*» алгоритм; *farthest neighbour algorithm* – *təsnifatın iyerarx prosedurunun* xüsusi halıdır, sinif arasında yaxınlıq ölçüsü bu siniflərin ən uzaq obyektləri arasında yaxınlıq ölçüsü kimi təyin olunur.

F – **UZLAŞMIŞ FUNKSIYA** «*F – согласованная функция; F – adapted function*» – bax, Qeyri – antisipativ funksiya.

UZLAŞMA ƏMSALI / KONKORDANS ƏMSAL «*согласованности коэффициент; concordance coefficient*» – bax, *Rəng korrelyasiyası*.

UZLAŞMA KRİTERİSİ «*согласия критерий; goodness of fit test*» – uzlaşmanın yoxlanılması məsələsində tətbiq olunan *statistik kriteridir*. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – eyni bir ehtimal qanununa tabe, paylanma funksiyası $F(x)$ olan naməlum təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda $F_0(x)$ hər hansı paylanma funksiyası olarsa, $F(x) \equiv F_0(x)$ olduğunu fərz edən H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsi *uzlaşmanın yoxlanılması məsələsi* adlanır. Məs., əgər $F_0(x)$ kəsilməz paylanma funksiyası olarsa, onda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *Kolmoqorov kriterisi, Smirnov kriterisindən* istifadə etmək olar.

Bax, *Riyazi statistika; qeyri-parametrik metodlar*.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

UZLAŞMA KRİTERİSİ; *deterministik interpretasiya* «*согласия критерий; детерминистическая интерпретация; deterministic interpretation of a goodness of fit test*» – statistik məsələnin deterministik məsələ ilə əvəz olunmasıdır ki, bu məsələdə baxılan uzlaşma kriterisi yalnız zəruri deyil, həm də kafidir. İlk dəfə [1]-də alınmışdır.

M i s a l. $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $0 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu haqqında hipotezi

$$\kappa = \sqrt{n} \sup_{0 \leq x \leq 1} |F_n(x) - x|$$

statistikasına əsaslanan *Kolmoqorov statistikasının* köməyiylə yoxlamaq olar; $F_n(x)$ $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçiminin empirik paylanma funksiyasıdır. Uyğun deterministik məsələ: $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ -lərin qiymətlərini ortalama ilə $W_1^1(L)$ -dən olan

ixtiyari $f(x)$ funksiyasının integralını verilən dəqiqliklə qiymətləndirmək mümkündürmü?

$$\sup_{f \in W_1^1(L)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - \int_0^1 f(x) dx \right| = \frac{L\kappa}{\sqrt{n}}$$

düsturundan aydındır, bu, yalnız və yalnız, χ kəmiyyəti olduqca kiçik olduğu halda mümkündür.

Əd.: [1] Соболев И. М., Детерминистическая интерпретация критерия согласия и проверка псевдослучайных чисел, М., 1968 (Препринт ИПМ АН СССР); [2] Соболев И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973.

UZLAŞMIŞ PAYLANMALAR «*согласованные распределения; consistent distributions*» – çoxluqlar funksiyaları $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$ -lərin çoxluğu (burada

$t_1, \dots, t_n$ – hər hansı T çoxluğunun elementləridir, $B_1, \dots, B_n$ – hər hansı $\mathbb{B}$ çoxluğunun altçoxluqlarının *semi – halqası* $\mathcal{A}$ -nin elementləridir) və bu funksiyalar aşağıdakı şərtləri ödəyirlər: $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$ funksiyaları $B_1, \dots, B_n$ argumentlərindən hər biri üzrə $\mathcal{A}$ *semi – halqasında* paylanmadır; $t_1, \dots, t_n$ və $B_1, \dots, B_n$ -lərin eyni zamanda ixtiyari yerdəyişməsində

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_{i_1}, \dots, B_{i_n}) = \mu_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(B_1, \dots, B_n);$$

$$\mu_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(B_1, \dots, B_n, \mathbb{B}) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n).$$

$X = \mathbb{B}^T$ – qiymətləri $\mathbb{B}$ -dən olan, T çoxluğunda bütün $x = x(t)$ funksiyalarının çoxluğu olsun; $\mu = \mu(A)$ X fəzasının

$$A = \{x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n\} \quad (*)$$

şəklində bütün silindrik çoxluqların *semi – halqası* $\mathcal{A}^T$ -də ixtiyari paylanma olsun, burada $t_1, \dots, t_n \in T$ və $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$. Onda

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n) = \mu \{x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n\}$$

çoxluq funksiyalarının toplusu U. p. təşkil edir.

Əgər $\mathbb{B}$ kompakt, $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$ U. p., $\mu_t(K) = \mu_{t, t_1, \dots, t_n}(K, \mathbb{B}, \dots, \mathbb{B})$, $t \in T$ $\mathcal{A}$ *semi – halqasında* *reqlulyar* paylanma olarsa, onda *elə yeganə μ ölçüsü* vardır ki, o, X fəzasının μ paylanmasına nəzərən ölçülən çoxluqlarının σ -cəbrində təyin olunmuşdur və (*) şəklində silindrik A çoxluqları üçün

$$\mu(A) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$$

berabərliyini ödəyir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

UZLAŞMIŞ TƏSADÜFİ PROSES «*согласованный случайный процесс; adapted random process to given filter*» – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında σ -cəbrlər axını $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ ilə verilmiş, $(M, \mathfrak{B})$ fəza fəzasından qiymətlər alan *elə $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$, $t \in T$ (T – nizamlanmış çoxluqdur) prosesi*dir ki, hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ qiymətində $(\Omega, \mathcal{A}_t)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına *inikası* $\zeta(t, \cdot)$ –

ölçülendir. Əgər $\zeta(t)$ prosesi $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ σ -cəbrlər axını ilə uzlaşmış ələ prosesdirsə ki, hər bir $\mathcal{A}_t$ σ -cəbri $\mathcal{A}$ -nin sıfır ehtimalı bütün çoxluqlarını özündə saxlasın, onda $\zeta(t)$ prosesinə stoxastik ekvivalent olan [yeni ixtiyari $t \in T$ qiymətində $P\{\zeta(t) \neq \zeta^*(t)\} = 0$ şərtini ödəyən $\zeta^*(t)$ prosesi] ixtiyari $\zeta^*(t)$ prosesi də bu axınla uzlaşan prosesdir. Hər bir $\zeta(t)$ prosesi müəyyən mənada minimal σ -cəbrlər axını $(\mathfrak{N}_t)_{t \geq 0}$ ilə uzlaşan prosesdir, burada $\mathfrak{N}_t$ – Ω -nin ələ altçoxluqlarının mi-

nimal σ -cəbridir ki, bütün mümkün $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $s \in T$, $s \leq t$ üçün $\{\omega: \zeta(s, \omega) \in \Gamma\}$ şəklində bütün çoxluqlar bu σ -cəbrə daxildir.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистики, 2 изд., М., 1985.

* **UZUNÖMÜRLÜLÜK** « долговечность; durability » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

* **UZUNÖMÜRLÜLÜYÜ, SİSTEMİN / ELEMENTİN** « долговечность системы / элемента; durability of system / element » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.



ÜÇ SIRA TEOREMİ « трех рядов теорема; three series theorem / criterion »: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ sırasının sanki yəqin yığılması üçün ixtiyari $c > 0$ qiymətində

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n| > c\}, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^c, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n^c$$

sıralarının yığılması zəruri, hər hansı $c > 0$ qiymətində bu sıraların yığılması kafidir. Burada əgər $|\xi| \leq c$ olarsa, $\xi^c = \xi$,

əgər $|\xi| > c$ olarsa, $\xi^c = 0$ fərz olunur. $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ sırasının yalnız

sanki yəqin yığılan deyil, eyni zamanda elementləri yerdəyişməli (rus. перестановочный) sıra olması üçün Ü. s. t.-də

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^c \text{ sırası } \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{M}\xi_n^c| \text{ sırası ilə əvəz olunmalıdır. Asılı}$$

olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sanki yəqin yığılması üçün əl kriteri vardır ki, bu kriteri təsadüfi kəmiyyətlərin *indeksləri, mərkəzləri, səpələnmələri* kimi anlayışlardan istifadə edir (bax, *Yığılma(sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının*).

Ü. s. t. [1]-də A. N. Kolmogorov tərəfindən isbat olunmuşdur. Qiymətləri Hilbert fəzasından və bəzi Banach fəzalarından olan təsadüfi kəmiyyətlər halları üçün bu teoremin ümumiləşmələri alınmışdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Булдыгин В. В., Сходимость случайных элементов в топологических пространствах, К., 1980.

ÜÇ SİQMA QAYDASI « трех сигм правило; three-sigma rule / 3σ – rule » – mnemonik qaydadır, bu qaydaya görə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bəzi məsələlərində normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsindən yayınmasının üç standart yayınmadan böyük olması hadisəsinin praktiki olaraq, qeyri – mümkün hadisə olduğu hesab olunur.

X , – $N(a, \sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun. İxtiyari $k > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|X - a| < k\sigma\} = 2\Phi(k) - 1$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\Phi(\cdot)$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır, onda bərabərlikdən $k = 3$ olduqda aşağıdakı alınır:

$$\mathbf{P}\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 0,99730.$$

Bu sonuncu bərabərliyə görə X təsadüfi kəmiyyəti özünün riyazi gözləməsi a -dan hər bir min sınaqda orta hesabla 3σ -dan 3

dəfədən çox olmamaqla böyük ola bilər. Eksperiment aparıcılar ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bəzi məsələlərində bəzən məhz bu nəticədən istifadə edirlər və onlar qəbul edirlər ki, $\{|X - a| > 3\sigma\}$ hadisəsi praktiki olaraq qeyri – mümkün hadisədir və deməli, $\{|X - a| < 3\sigma\}$ hadisəsi praktiki olaraq yəqin hadisədir. Bu halda, eksperiment aparıcı şəxsin «üç siqma qaydası»na istinad etdiyi deyilir.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., Дунин – Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

ÜÇBUCAQ PAYLANMA « треугольное распределение; triangular distribution » – eyni bir parçada müntəzəm paylanmış iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin kəsilməz ehtimal paylanmasıdır.

ÜÇDƏ İKİ QANUNU « двух третей закон; two – thirds law » – bax, *Kolmogorovun üçdə iki qanunu*.

ÜFÜQ(Ü) modelin « горизонт модели; horizon of a model » – bax, *İdareolunan təsadüfi proses diskret zamanlı*.

ÜMUMİ ÇOXLUQ « генеральная совокупность; general population » – elə obyektlər çoxluğu ki, bu obyektlər kəmiyyət və ya keyfiyyət əlamətlərilə səciyyəvidir; verilən Ü. ç.-dan ixtiyari *seçim* əsasında bu obyektlərin paylanmaları statistik metodlarla öyrənilir. «Paylanma funksiyası F olan Ü. ç.-dan seçim dəyəmi (və ya çoxluqdan seçim)» ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu kimi anlaşılr. Bax, *Seçimi metod*.

ÜMUMİ QARŞILIQLI STRUKTUR FUNKSİYASI « общая взаимная структурная функция; general cross – structure function » – bax, *Struktur funksiya(s)*.

ÜMUMİ STATİSTİK ANALİZİ, MÜŞAHİDƏLƏRİN « общий статистический анализ наблюдений; general statistical analysis of observations ». G – *analiz*, – hər hansı mürekkəb S sistemi üzərində müşahidələr sayı n -in artması ilə belə sistemlərin riyazi modellərindəki parametrlərin sayı m_n -in də artması mümkün olan mürekkəb S sistemlərini öyrənən riyazi nəzəriyyədir. Bu nəzəriyyənin məsələləri S sistemi üzərində aparılan müşahidələr üzrə onun elə riyazi modellərinin tapılmasından (G – statistik qiymətləri *n* in) ibarətdir ki, müşahidələr sayı minimal olduqda və müşahidələr haqqında ümumi fərziyyələrlə bu modellər hər hansı mənada verilən yaxınlaşma dəqiqliyi ilə S sistemə yaxınlaşa bilsinlər: matrislərin, təsadüfi vektorların müşahidə paylanmaları sıxlığının varlığı tələb olunmur, yalnız bunların komponentlərinin bir neçə ilk momentlərinin varlığı tələb olunur və bu zaman m_n və n ədədləri üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(m_n, n) < \infty \quad (*)$$

– G – şərti ödənilməlidir, burada $f(x, y)$, x -ə görə artan, y -ə görə azalan hər hansı müsbət funksiya. Əksər hallarda $f(x, y)$ funksiyası xy^{-1} -ə bərabərdir. Bu halda G – şərti Kolmoqorov – Deyev şərti adlanır.

M. ü. s. a.-ndə iki şərtin ödənilməsi fərz olunur:

1) S sisteminin riyazi modellərinin parametrlərinin sayı m_n -in artması ilə sistemin qiymətləndiriləcək xarakteristikalarının dim. – ölçüsü (parametrlərin sayı) dəyişmir;

2) S sistemi üzərində müşahidələr sayı n -in artması ilə riyazi modellərin ölçüsü m_n arta və ya eksinə azala bilər: m_n artdıqda da müşahidələr sayı n m_n -dən asılıdır və ixtiyari cür sürətlə arta bilər.

M. ü. s. a.-ndə G – statistik qiymətlərin tapılması ideyası aşağıdakı misalda şərh olunur. $\mathbb{R}^{m_n}$ -də kəsilməz məhdud ikinci tərtib törəmələri olan Borel funksiyası $f(x)$ -in, $\{x \in \mathbb{R}^{m_n}\}$ verildiyi fərz olunur; ξ , $N(a, R_{m_n})$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi m_n – ölçülü vektor olsun, a – orta qiymətlər vektoru, R_{m_n} – kovariasion matrisdir. ξ vektoru üzərində müşahidələrin nəticələri x_k -lər üzrə, $k = 1, \dots, n$, (*) G – şərtinin ödənilməsi şərti, $f(a)$ kəmiyyəti üçün tutarlı G – statistik qiymətini tapmaq tələb olunur (a vektorunun tutarlı statistik qiyməti kimi

$\hat{a} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k$ kəmiyyətini götürmək olar). M. ü. s. a.-ndə fərz

olunur ki, parametrlərin məhdud sayı üçün tutarlı statistik qiymətlər vardır. Bu statistik qiymətlər, məs., momentlər metodu, maksimal doğruxa oxşarlıq metodu və stoxastik aproksimasiya metodu ilə tapılır. Tətbiqi məsələlərin bir çoxu orta qiymətlər vektoru a və kovariasion R_{m_n} matrisindən asılı funksiyaların qiymətləndirilməsi ilə əlaqədardır, bunların tutarlı statistik qiymətləri uyğun olaraq, $\hat{a}$ və

$$\hat{a}, \hat{R}_{m_n} = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{a})(x_k - \hat{a})^T$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $f(x)$, a nöqtəsində kəsilməz olarsa, onda m -in qeyd olunmuş qiymətində $f(a) - f(\hat{a}) \xrightarrow{p} 0$ münasibəti ödənilir. Ümumi halda m n -dən asılı olduqda bu belə olmur. Əsas məsələ $f(\hat{a})$ -dan yaxşı olan $G(\hat{a})$ statistik qiymətlərinin axtarılmasıdır və bu qiymətlər elə olmalıdır ki, (*) şərti ödənildikdə $f(a) - G(\hat{a}) \xrightarrow{p} 0$ münasibəti də ödənilsin.

Bu məsələnin həlli üçün

$$u(z, t) = \mathbf{M} f(a + z + (R_{m_n} t n^{-1})^{1/2} \eta)$$

funksiyaları daxil olunur, burada η , $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi vektor, $z \in \mathbb{R}^{m_n}$, $t \geq 0$ – həqiqi parametrdir. $u(z, t)$ funksiyaları

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = A u(z, t)$$

G – tənliyini ödəyirlər, burada

$$A = (2n)^{-1} \sum_{i,j=1}^{m_n} r_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}, \quad u(z, 0) = f(a + z),$$

$$R_{m_n} = \|r_{ij}\|, \quad i, j = 1, \dots, m_n.$$

Əgər (*) ödənildikdə, ixtiyari məhdud z üçün

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\hat{a} + z) - \mathbf{M} f(\hat{a} + z)] = 0$$

olduğu fərz olunarsa, onda $t=1$ qiymətində G – tənliyinin verilmiş $u(z, 1) = f(\hat{a} + z)$ qiyməti üzrə onun həllinin $u(z, 0)$ başlanğıc qiyməti $f(a + z)$ -in tapılmasına gətirilir, yeni mahiyyət etibarilə məsələ differensial tənliklər üçün ters məsələyə gətirilir ki, bu məsələni kvaziçevirmələr metodu və Furiye çevirməsi metodu ilə həll etmək olur. G – statistik qiymətlərinin tapılmasında bu əsas andır. İsbat ideyası ondan ibarətdir ki, $f(\hat{a} + z) - \mathbf{M} f(\hat{a} + z)$ fərqi martinqal – fərqlər cəmi şəklində ifadə etmək olar. Sonra isə bu cəmə mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək və asimptotik normal G – statistik qiymətlərini tapmaq mümkündür.

M. ü. s. a.-nin yaxşı xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, burada ehtimal nəzəriyyəsinin analitik metodları əsasında G – statistik qiymətlər üçün G – tənliklər əvəzinə, daha sadə şəkildə olan bezi qeyri – xətti tənlikləri tapmaq olur.

G – analizin əsas məsələsi kovariasion matrisi R_{m_n} olan ξ təsadüfi vektoru üçün alınmış $x_1, \dots, x_n$ müşahidələri üzrə R_{m_n} kovariasion matrislərinin normalanmış spektral funksiyaları –

$$\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(\lambda_k < x)$$

funksiyalarının Stilyes çevirmələrinin qiymətləndirilməsi məsələsidir. Çoxölçülü statistik analizdə istifadə olunan kovariasion matrislərin bir çox analitik funksiyalarını $\mu_{m_n}(x)$ spektral funksiyaları vasitəsilə ifadə etmək olur. Məs.,

$$m_n^{-1} \text{tr} f(R_{m_n}) = \int_0^\infty f(x) d\mu_{m_n}(x)$$

burada f – analitik funksiya.

$\mu_{m_n}(x)$ funksiyasının Stilyes çevirməsi –

$$\varphi(t, R_{m_n}) = \int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1} \text{tr}(I + tR_{m_n})^{-1},$$

$$t \geq 0$$

ifadəsinə deyilir, bu zaman $\varphi(t, R_{m_n})$ Stilyes çevirməsinin

G_2 – statistik qiyməti $G_2(t, \hat{R}_{m_n}) = \varphi(\hat{\theta}_n(t), \hat{R}_{m_n})$ ifadəsinə deyilir, burada $\hat{\theta}_n(t)$ –

$$\theta \left(1 - \frac{m_n}{n-1} + \frac{m_n}{n-1} \varphi(\theta, \hat{R}_{m_n}) \right) = t,$$

$$t > 0, \quad m_n < n-1$$

tənliyinin mənfi olmayan həllidir. $t > 0$ olduqda bu tənliyin müsbət və yeganə həlli vardır. Bezi şərtlər ödəniləndi halda isbat olunur ki, əgər $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n-1} < 1$ olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{[G_2(t, \hat{R}_{m_n}) - \varphi(t, R_{m_n})] \sqrt{(n-1)m_n} a_n(t) + c_n(t) < x\} = \\ = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

münasibəti doğrudur, burada $a_n(t)$ və $c_n(t)$

$$\sup_n [|a_n(t)| + |c_n(t)|] < c < \infty$$

şərtini ödəyirlər (bax, [2]).

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Вычисл. и прикл. математика», 1986, в. 60, с. 115-21; [2] Гирко В. Л., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1986, в. 35, с. 28-31; [3] Гирко В. Л., «Вестн. Киевского ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем», 1987, в. 6, с. 40-44; [4] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

ÜMUMİ STRUKTUR FUNKSİYASI «общая структурная функция; general structure function» – bax, *Struktur funksiya*(s i).

ÜMUMİ ŞAXƏLƏNƏN PROSES «общий ветвящийся процесс; general branching process». Крат – Mod – Yagers prosesi – hər biri təsadüfi ömür sürən və yaşama müddəti ərzində bir neçə dəfə yeni hissəciklər doğuran, bir-birindən asılı olmadan artan hissəciklər toplusunun evolyusiyasını təsvir edən *təsadüfi prosesdir*. Ü. ş. p. modeli şaxələnən proseslər nəzəriyyəsinin biologiya və demografiyada tətbiqində istifadə olunur (bax, [1]). Bax, *Şaxələnən proses*.

Əd.: [1] Jagers P., Branching processes with biological applications, N. Y. – L., 1976.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ARKSİNUS PAYLANMASI «обобщенное распределение арксинуса; generalized arcsine distribution» – bax, *Arksinus paylanması*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ BEYES STATİSTİK QIYMƏTİ «обобщенная байесовская оценка; generalized Bayes estimator» – *Beyes statistik qiymətləri* ardıcılığıнын regular (nöqtəvi) limiti olub, Θ parametrik fəzasında hər hansı σ – sonlu ölçüyə (bu ehtimal ölçüsü olmaya da bilər) nəzərən formal Bayes statistik qiymətidir. Məs., $\bar{x}$ seçimi ortası $\tau \rightarrow \infty$ olduqda (θ, σ) parametrləri normal paylanmanın θ parametrlərinin Bayes statistik qiymətləri $-(n\bar{x}\sigma^{-2} + \mu\tau^{-2})/(n\sigma^{-2} + \tau^{-2})$ statistikalarının limitidir və kvadratik itki funksiyası olduğu halda θ -nin aprior paylanmasının (μ, τ) parametrləri normal paylanma olduğu fərz olunur, bununla belə, $\bar{x}$ seçimi ortası, $\Theta = \mathbb{R}$ -də $d\theta$ aprior Lebeq ölçüsünə nəzərən θ -nin formal Bayes statistik qiymətidir. Ü. B. s. q. minimaks statistik qiymətlərin axtarılmasında mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

ÜMUMİLƏŞMİŞ BLOK PLAN «обобщенный блочный план; generalized block design» – bax, *Blok plan*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ DISPERSİYA «обобщенная дисперсия; generalized variance» – regression eksperimentin keyfiyyət xarakteristikalarından biridir.

$$y = \theta^T f(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n).$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$$

regression modelinin verildiyi fərz olunur, burada θ – regressiya parametridir.

X planının normalanmış informasiya matrisi –

$$MX = \int_P f(p) f^T(p) X(dp)$$

olsun (burada P planlama çoxluğu). Onda

$$G = \max_{p \in P} f^T(p) (MX)^{-1} f(p)$$

kəmiyyətinə ümumiləşmiş dispersiya deyilir.

Ü. d.-nin minimal qiymət aldığı X planına G – optimal plan deyilir. Bu planda regression proqnozun ən yaxşı xətti məyus statistik qiymətlərinin bütün $p \in P$ nöqtələri üzrə dispersiyanın maksimumu ən kiçik qiymətini alır. Kifer – Volfovits ekvivalentlik teoreminə əsasən G – optimal plan eyni zamanda D – optimal plandır.

Bax, *Ən kiçik kvadratlər metodu*.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Жигляевский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987.

ÜMUMİLƏŞMİŞ KORRELYASİON FUNKSİYASI «обобщенная корреляционная функция; generalized correlation function» – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ QAUSS PROSESİ «обобщенный гауссовский процесс; generalized Gaussian process» – bax, *Gauss prosesi*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ÖLÇÜ «обобщенная мера; generalized / signed measure / charge» – bax, *Yük*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ PUASSON PAYLANMASI «обобщенное распределение Пуассона; Poisson compound distribution» – bax, *Puasson paylanması mürəkkəb ümumiləşmiş*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ PUASSON PROSESİ «обобщенный пуассоновский процесс; compound Poisson process» –

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k, \quad t \geq 0$$

şəklində ifadə olunan *təsadüfi prosesdir*, burada $\xi_1, \xi_2, \dots$ – $v(t)$ prosesindən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı, $v(t)$ – Puasson prosesidir. $\zeta(t)$ asılı olmayan artımlarlı, sıçrayışvari trayektoriyalara malik təsadüfi prosesdir. Tərsinə, əgər asılı olmayan artımlarlı ixtiyari $\{\zeta_t, t \geq 0\}$ təsadüfi prosesinin trayektoriyaları sıçrayışvari trayektoriyalar olarsa, $\{\zeta(t) - \zeta(0), t \geq 0\}$ prosesi Ü. P. p.-dir.

Əgər $v(t)$ bircins proses, $\xi_1, \xi_2, \dots$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\xi(t)$ bircins prosesdir. Bu halda prosesin xarakteristik funksiyası

$$M e^{i\lambda \xi(t)} = \exp \{ i t a \int (e^{i\lambda x} - 1) dF(x) \}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada a - $v(t)$ prosesinin parametridir, $M v(t) = at$ və F - ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] Гнхман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

ÜMUMİLƏŞMİŞ REGRESSION EKSPERİMENT

« обобщенный регрессионный эксперимент; generalized regression experiment » - asılı olmayan ölçmələr nəticələri $y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i$ şəklində verilən y_i -lərin toplusudur.

$M\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2(x_i, \theta)$; $\eta(\cdot, \cdot)$ funksiyalarının rəqulyarlıq

şərtlərini və $\sum_{i=1}^N (\eta(x_i, \theta) - \eta(x_i, \theta'))^2 > 0$, $\theta \neq \theta'$ şərtini

ödəməsi tələb olunur. Sonuncu şərt yalnız $\sigma(\cdot, \cdot)$ funksiyası naməlum parametrlərin bir hissəsindən asılı olmadıqda ödənilir. Lakin sonuncu misalda ölçmə paylanmalarının üçüncü və dördüncü momentləri mehz ilk iki momentin funksiyaları olarsa, onda (y_i, y_i^2) vektoru ikiölçülü Ü. r. e. ilə təsvir olunur. Analogi reduksiya qarşıq modelin dispersion analizi üçün də faydalıdır.

Ü. r. e.-də θ parametrlərinin statistik qiymətlərinin asimptotik xassələri araşdırılmışdır (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması eksperimentin*). Qeyd etmək lazımdır ki, əgər y_i -nin paylanması eksponent ailəyə daxil olunmuşdursa (məs., parametrləri polinomial, x_i və θ -dan asılı), onda ölçmələrin ilk iki momentinə əsaslanan Jirina iterasion statistik qiymətləri iterasiyaların sayı artdıqda maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətlərinə asimptotik ekvivalent olur.

Əd.: [1] Малютков М. Б., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 19-41.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SPEKTRAL SIXLIQ « обобщенная спектральная плотность; generalized spectral density » - bax, *Spektral nəzəriyyələri* (i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin.

ÜMUMİLƏŞMİŞ STASİONAR PROSES « обобщенный стационарный процесс; generalized stationary process » - olduqca hamar əsas $\varphi(t)$ funksiyalarının hər hansı D vektor fəzasında verilən $X(\varphi)$ ümumiləşmiş təsadüfi prosesidir və ya ele $X(\varphi)$ ümumiləşmiş təsadüfi prosesidir ki,

$\{X(V_a\varphi_1), X(V_a\varphi_2), \dots, X(V_a\varphi_n)\}$ təsadüfi vektorunun ehtimal paylanmaları ixtiyari müsbət tam n , həqiqi a və D -dən olan $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ funksiyaları üçün $\{X(\varphi_1), X(\varphi_2), \dots, X(\varphi_n)\}$ vektorunun ehtimal paylanması ilə üst-üstə düşür (d a r m ə n a d a Ü. s. p.), burada $V_a\varphi(t) = \varphi(t+a)$ və ya da ki,

$$MX(\varphi) = MX(V_a\varphi),$$

$$MX(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)} = MX(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}$$

münasibətləri bütün həqiqi a -lar üçün ödənilir (geniş m ə n a d a Ü. s. p.). $D = D_\infty$ olduqda və (bir sıra başqa hallarda) $X(\varphi)$ prosesinin orta qiymətinin funksionalı $MX(\varphi) = m(\varphi)$ və korrelyasion funksionalı $MX(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2)$ aşağıdakı şəkildədir:

$$m(\varphi) = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \quad (1)$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = B \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(s) \overline{\varphi_2(s-t)} ds \right) = B(\varphi_1 * \hat{\varphi}_2), \quad (2)$$

burada $*$ - kompozisiya işaresidir, $\hat{\varphi}(t) = \overline{\varphi(-t)}$; odur ki, $m(\varphi)$, m sabiti ilə birqiymətli təyin olunur və $m X(\varphi)$ Ü. s. p.-nin orta qiyməti adlandırılır, $B(\varphi_1, \varphi_2)$ isə ümumiləşmiş $B(\varphi)$ funksiyası (D -də kompleksqiymətli xətti funksionalı) ilə təyin olunur və $B(\varphi_1, \varphi_2)$ $X(\varphi)$ prosesinin ümumiləşmiş korrelyasion funksiyası adlanır. Bu halda $X(\varphi)$ Ü. s. p. və onun korrelyasion funksionalı $B(\varphi_1, \varphi_2)$ aşağıdakı şəkildə spektral ayrılışla ifadə olunur:

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) dZ(\lambda), \quad \tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t) dt, \quad (3)$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(\lambda) \overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)} dF(\lambda), \quad (4)$$

burada $F(\lambda)$, - $X(\varphi)$ Ü. s. p.-nin həqiqi azalmayan spektral funksiyasıdır və $D = D_\infty$ olduğu halda müəyyən bir $p \geq 0$ qiymətində

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2)^{-p} dF(\lambda) < \infty \quad (5)$$

şərtini ödəyir, $Z(\lambda)$ isə $M|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$ şərtini ödəyən qeyri - korrelyar artımlı təsadüfi funksiyadır (bax, [1] - [3]). D fəzası kimi hər hansı tam analitik funksiyalar fəzasını seçdikdə spektral funksiyası sonsuzluqda eksponensial artan $F(\lambda)$ olan $X(\varphi)$ Ü. s. p.-ni almaq olur (bax, [4]).

(3) və (4) ayrılışları stasionar təsadüfi proseslərin bunlara yaxın spektral ayrılışlarını ümumiləşdirir; Ü. s. p. bəyaz küy olduqda $F(\lambda) = a_1\lambda + a_2$, burada $a_1 > 0$ və a_2 - sabitlərdir.

Ü. s. p. anlayışının ümumiləşdirilmiş halı $\mathbb{R}^n$ fəzasında bircins ümumiləşmiş meydan anlayışdır, yeni ümumiləşmiş təsadüfi $X(\varphi)$ meydanı [burada $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$, - n - dəyişənli finit sonsuz differensiallanan funksiyalar fəzası $D_\infty^{(n)}$ fəzasına aid funksiyadır]. Bu ümumiləşmiş meydan Ü. s. p.-in təyin olunması üçün qoyulan bütün şərtləri ödəyir, bu şərtlə ki, $V_a\varphi(t) = \varphi(t+a) = \varphi(t_1 + a_1, \dots, t_n + a_n)$, burada $t = (t_1, \dots, t_n)$ və $a = (a_1, \dots, a_n)$, - $\mathbb{R}^n$ -də vektorlardır. $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş bircins ümumiləşmiş $X(\varphi)$ meydanı üçün (1) - (5) düsturlarına tamamilə analogi düsturlar doğrudur;

bu halda $X(\varphi)$ və $B(\varphi_1, \varphi_2)$ -nin spektral ayrılışları aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\lambda) Z(d\lambda),$$

burada

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda t} \varphi(t) dt,$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad t\lambda = t_1\lambda_1 + \dots + t_n\lambda_n,$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_1(\lambda) \overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)} dF(\lambda),$$

burada $F(d\lambda)$, $-\mathbb{R}^n$ -də mənfəi olmayan ele ölçüdür ki, hər hansı $p > 0$ qiymətində

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\lambda|^2)^p dF(\lambda) < \infty, \quad |\lambda| = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2},$$

$Z(d\lambda)$, $-\mathbb{R}^n$ -də ele təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M}|Z(d\lambda)|^2 = F(d\lambda)$ (bax, [3], [5]).

Əd.: [1] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–86; [2] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [3] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Оноуама Т., «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A», 1959, v. 13, № 2, p. 208–13; [5] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338.

ÜMUMİLƏŞMİŞ STOXAŞTİK KONVOLYUSIYA «обобщенная стохастическая свертка; generalized stochastic convolution» – hər hansı $(X, \mathcal{X})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş ehtimal ölçülərinin $B(X)$ çoxluğunda semi – qrup əməlidir. Ü. s. k. anlayışı bir sıra məlum ehtimal əməliyyatlarının – K. Urbanik [1], B. M. Levitan [2], R. Aski, C. Qasper [3] konvolýusiyaları, hiperqrup konvolýusiyaları və s. kimi əməliyyatların xassələrinin aksiomatlaşdırılmasında yaranır. Ən çox aşağıdakı model istifadə olunur: 1) X – separabel tam metrik (lokal kompakt) fəza, $\mathcal{X}$ – onun Borel çoxluqlarının σ – cəbri; 2) $(B(X), \circ)$ – semitopoloji vahidi δ_a (δ_a , $a \in X$ -də toplanmış ölçüdür) olan kommutativ semi – qrupdur; 3) $\circ$ əməli ehtimal ölçülərinin qabarıq kombinasiyasına nəzərən distributivdir; 4) X fəzasının özünə ele $x \mapsto x^*$ kəsilməz inikası vardır ki, bu inikada $\mu^*(A) = \mu(A^*)$, $\mu \in B(X)$ belə xassələri ödəyir: $\mu^{**} = \mu$ və $(\mu_1 \circ \mu_2)^* = \mu_1^* \circ \mu_2^*$. «Stoxastik» adı onunla əsaslandırılmışdır ki, bir qayda olaraq, $\mu = \delta_u \circ \delta_v$ ($u, v \in X$) ölçüsü nöqtəvi ölçüdür.

Əgər ele separabel lokal kompakt M fəzası və $X \times M$ -də ölçülən məhdud $\omega \in L^1(X \times M)$ funksiyası varsa ki, bunlar üçün

$$\Phi(\mu, m) = \int_X \omega(m) \mu(dx)$$

inikası $L^1(M)$ -də cəbri inektiv simmetrik homomorfizmdir, onda Ü. s. k. zəif reqlular adlanır. Ölçülən nüvələrli integral

çevirmələrin tətbiqi ideyasını K. Urbanik təklif etmiş və göstərmişdir ki, onun əvvəllər daxil etdiyi ixtiyari stoxastik konvolýusiya zəif reqluardır. Əgər ω dəyişənlərinin toplusu üzrə kəsilməz funksiya olarsa, $\circ$ konvolýusiyası reqluar adlanır. Reqluarlıq üçün zəruri və kafi şərtlər onunla təyin olunan yüklərin (ümumiləşmiş ölçülərin) simmetrik halqasının topolojişdirilməsi terminləri ilə ifadə oluna bilər. Reqluar stoxastik konvolýusiya ikili obyekt kimi hər hansı reqluar stoxastik konvolýusiya da daxil olunur. Belə iqtisad əməliyyatları üçün müsbət və mənfəi müəyyən funksiyaların ehtimal nəzəriyyəsini qurmaq mümkündür.

Əgər ixtiyari nisbi kompakt $B \subset B(X)$ altçoxluğunun bölmələri çoxluğu da nisbi kompakt olarsa, Ü. s. k. düzgün konvolýusiya adlanır (bax, [4]). Reqluar Ü. s. k. üçün bu halda Levi – Xinqin düsturunun analogları eyniliklə involyutiv $*$ inikasında alınmış, Puasson və Qauss paylanmalarının analogları daxil olunmuşdur, iqtisad reqluar konvolýusiyalar üçün isə konvolýusiyaların tapılması üçün tənliklər verilmişdir.

Reqluar Ü. s. k.-nin arifmetik xassələri hələ ki, yalnız konkret realizasiyalar üçün araşdırılmışdır. Burada qruplar hallarından fərqli hallarda, əsas etibarilə, D. Kendall tərəfindən [5]-də dəfəli semiqrupları nəzəriyyəsi əsasında A. Ya. Xinqin faktORIZASIYA teoremlərinin analogları alınmışdır (bax, o cümlədən, [6], [7]). Ümumiləşmiş konvolýusiyaların stoxastikliyi bir çox hallarda baxılan konvolýusiyalar üçün $B(X)$ -dən olan ayrılmayan komponentlərin bütün paylanmalarının I_0 sinfinin təsviri problemini həll etmək imkanını verir (bax, [7] – [9]).

Sonsuz bölünən paylanmaların faktORIZASIYALARININ analogları sonsuz kiçik ölçülərin Ü. s. k.-lar seriyaları sxemi üçün limit hali kimi ümumi modeldə verilmişdir (bax, [4]). Burada Qauss qanunlarına yığılma şərtləri də araşdırılmışdır. Ümumi halda bir çox klassik limit teoremlərinin analoglarının tapılması prosesində Ü. s. k. ölçüləri ardıcılıqlarının mərkəzləndirilmə və normalizasiya əməliyyatlarının ümumi hal üçün təyin edilməsi problemi yaranır. Bu məsələnin həlli üçün [10]-də şərh olunmuş (fə. 2, 5) Ü. s. k.-nin tədqiqinin ümumi prinsiplərindən istifadə etmək olar. Ü. s. k. üçün limit teoremlərində yığılma sürətlərinin statistik qiymətlərini tapılmaq üçün, Ü. s. k. nin faktORIZASION məsələlərinin dayanıqlılığını təyin etmək üçün təbii instrument ümumi tipli ideal metrikalardır.

Əd.: [1] Urbanik K., «Studia Math.», 1964, v. 23, p. 217–45; 1984, v. 80, p. 167–69; 1986, v. 83, p. 57–59; [2] Левитан Б. М., «Вестник ЛГУ», 1960, т. 7, № 2, с. 81–115; [3] Aski R., Gasper G., «J. analyse math.», 1977, т. 31, p. 48–68; [4] Волков В. Э., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1985, с. 15–24; М., 1987, с. 19–32; [5] Kendall D., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, S. 163–95; [6] Bingham N. H., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1973, v. 73, p. 145–56; [7] Трухина И. П., в кн.: Теория функций. функциональный анализ и их приложения, т. 34, Хар., 1980, с. 136–46; [8] Трухина И. П., «Зап. науч. сем. ЛОМН», 1979, т. 87, с. 143–58; [9] Островский И. В., «Матем. физ. и функц. анализ», 1973, т. 4, с. 3–12; [10] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

ÜMUMİLƏŞMİŞ TƏSADÜFİ MEYDAN «обобщенное случайное поле; generalized random field» – tipik realizasiyaları hamar G çoxobrazlısında verilən ümumiləşmiş funksiyalar olan, bu çoxobrazlıda təsadüfi funksiyadır. Başqa sözlə, belə təsadüfi meydanlar üçün, ümumiyyətlə, bunların $x \in G$ nöqtələrində qiymətləri $f(x)$ təyin olunmamışdır, lakin G çoxobrazlısında yoxlanma məqsədilə seçilən hamarlayıcı $\varphi(x)$ funksiyaları üçün (bunların sayı kifayət qədərdir)

$$f_{\varphi} = \int_G \varphi(x) f(x) dx \quad (*)$$

«orta kəmiyyətləri» təyin olunmuşdur. Daha dəqiq, G – sonsuz hamar çoxoxobrazlı, $D(G)$, – G -də təyin olunmuş, sonsuz differensiallanan finit funksiyaların fəzası olsun və bu fəzada belə müntəzəm finit funksiyaların və onların bütün törəmələrinin ardıcılıqları üçün müntəzəm yığılmanın adi topologiyasının təyin olunduğu fərz olunur. Onda əgər hər hansı $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlərin $L_0(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ fəzasına $D(G)$ fəzasının kəsilməz xətti $D(G) \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$.

$\varphi \rightarrow f_{\varphi}$, $\varphi \in D(G)$ inikası verilmişdirsə, G -də Ü. t. m. təyin olunmuşdur; $L_0(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ ölçü üzrə yığılma topologiyası ilə təmin olunmuşdur (bax, [7]). Əgər G -də ümumiləşmiş funksiyaların $D'(G)$ fəzası $D'(G)$ -nin silindrik çoxluqlarının doğruduğu σ – cəbrlə ehtimal fəzası olarsa, (*) inikası isə $f_{\varphi}(T) = (T, \varphi)$, $T \in D'(G)$, $\varphi \in D(G)$ düsturları ilə verilsə, $\{f_{\varphi}, \varphi \in D(G)\}$ Ü. t. m. kanonik təsadüfi meydan adlanır. Aydın olmuşdur ki, sonluölçülül G çoxoxobrazlısında ixtiyari Ü. t. m. G -də hər hansı yeganə bir kanonik təsadüfi meydana ehtimali izomorfdur (bax, [2]).

Burada verilmiş tərifin bir sıra təbii modifikasiyalı vardır: məs., vektor qiymətlərli Ü. t. m.-a baxmaq olar və ya $D(G)$ fəzası əvəzinə, tərifdə, G -də əsas funksiyaların daha geniş hər hansı bir fəzasından istifadə etmək olar [məs., $G = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ hallarında sonsuz differensiallanan, öz törəmələri ilə sonsuzluqda ixtiyari $|x|^k$, $k = -1, -2, -3, \dots$, $x \in \mathbb{R}^n$ mənfii qüvvət üstündən daha sürətlə azalan funksiyalar fəzası $S(\mathbb{R}^n)$].

Ü. t. m. anlayışı realizasiyalı adi funksiyalar olan klassik təsadüfi meydanlar və təsadüfi prosesləri də əhatə edir. Bu anlayış 20-ci əsrin 50-ci illərinin ortalarında bir çox təbii stoxastik anlayışların klassik təsadüfi meydanlar terminlərində kifayət dərəcədə sadə ifadə oluna bilinməsi, Ü. s. m. dilində isə sadə və incəliklə ifadə edilməsi ilə əlaqədar yaranmışdır. Məs., $D(\mathbb{R}^n)$ -də, $n = 1, 2, \dots$ ixtiyari müsbət təyin olunmuş aşağıdakı şəkildə bixətti forma –

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2,$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$, $W(x_1, x_2)$ müsbət müəyyən, simmetrik ümumiləşmiş ikidəyişənli funksiya olduqda, $\mathbb{R}^n$ -də birqiymətli olaraq $\{f_{\varphi}, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ Qauss Ü. t. m.-ni təyin edir, bu meydanın kovariasiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\int f_{\varphi_1} f_{\varphi_2} d\mu = (\varphi_1, \varphi_2)$$

[μ – bu meydana uyğun təyin olunmuş, $D'(\mathbb{R}^n)$ -də ehtimal ölçüsüdür].

Bu Ü. t. m. $W(x_1, x_2)$ yalnız olduqca yaxşı funksiya olduqda klassik meydan olur (məs., kəsilməz və məhdud funksiya olduqda).

da). Digər misallar: $\mathbb{R}^n$ -də asılı olmayan qiymətlərli Ü. t. m. (bax, [2]) və ya $\mathbb{R}^n$ -də avtomodel təsadüfi meydanlar adlandırılan meydanlar (bax, [6]) (bunlar arasında isə klassik meydanlar, ümumiyyətlə, yoxdur).

Ü. t. m.-lərin tədqiqinə maraqlı (xüsusən də, Markov təsadüfi meydanlarının) 20-ci əsrin 70-ci illərində Kvant fiziki meydanının qurulması məsələsi ilə $\mathbb{R}^n$ -də Markov Ü. t. m.-nin qurulması məsələsi arasında əlaqənin aşkar edilməsindən sonra artmışdır; $n > 1$ halında (bax, [5]).

Ü. t. m.-lərin tədqiqini stimullaşdıran digər mühüm oblast stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsidir (xüsusilə də, xüsusi törəməli stoxastik tənliklər).

Əd.: [1] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Э., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [4] Кийоси Ито, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1954, в. 28, № 3, р. 209–23; [5] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [6] Дюбрушин Р. Л., в сб.: Многокомпонентные случайные системы, М. – Л., 1978, с. 179–213; [7] Дюбрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122.

ÜMUMİLƏŞMİŞ TƏSADÜFİ PROSES «обобщенный случайный процесс; generalized stochastic / random proses» – kəsilməz zaman arqumenti t -dən asılı ele ζ təsadüfi prosesidir ki, onun qeyd olunmuş zamanlarında qiymətləri, ümumiyyətlə, mövcud deyildir, amma bu anlarda yalnız $\zeta(\varphi)$ «prosesinin hamarlanmış qiymətləri» vardır, bu qiymətlər isə prosesin qiymətlərini ölçmə nəticələri kimi təsvir edir; ölçmə nəticələri isə olduqca hamar çəki funksiyası $\varphi(t)$ (yəni impulsal keçid funksiyası) olan bütün mümkün ola bilən xətti ölçmə cihazlarının köməyiylə alınır. $\zeta(\varphi)$ prosesi sonsuz differensiallanan finit φ funksiyalarının D_{∞} fəzasının (və ya ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsində istifadə olunan əsas funksiyaların hər hansı bir digər fəzasının) hər hansı ehtimal fəzasında təyin olunmuş ζ təsadüfi kəmiyyətlərinin L_0 fəzasına kəsilməz xətti inikasıdır; ζ -nin realizasiyalı $x(\varphi)$ adi, t arqumentinin ümumiləşmiş funksiyalandır.

Klassik (yəni $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinə xüsusi Ü. t. p. kimi baxmaq olar ki, bu halda bunlar

$$\zeta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \zeta(t) dt$$

kimi təyin olunur; belə yanaşma faydalı ola bilər, çünki Ü. t. p. ζ -nin ixtiyari n tərtib $\zeta^{(n)}$ törəmələri vardır və bunlar $\zeta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \zeta(\varphi^{(n)})$ bərabərliyi ilə təyin etmək olur (bax, məs., Təsadüfi proses stasionar artımlıdır). Ü. t. p.-ə mühüm misal klassik təsadüfi proses olmayan bəyaz küy prosesidir və bu proses stasionar ümumiləşmiş proseslər sinfindendir. Ü. t. p. anlayışının ümumiləşmiş ümumiləşmiş təsadüfi meydan anlayışdır.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [2] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [3] Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

ÜMUMİLƏŞMİŞ UİŞART PAYLANMASI « обобщенное распределение Уишарта; Wishart generalized distribution » – bax, *Uişart paylanması ümumi-
ləşmiş*.

***ÜST PİLLƏ ANI** « верхний лестничный момент; upper ladder time » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

***ÜST PİLLƏ BOYU** « верхняя лестничная высота; upper ladder height » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

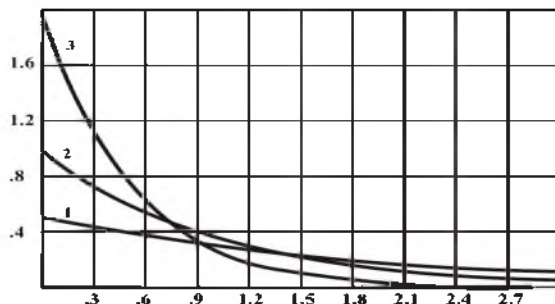
***ÜST PİLLƏ İNDEKSİ** « верхний лестничный индекс; upper ladder index » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

***ÜST PİLLƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİ** « верхние лестничные случайные величины; upper ladder random variables » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

ÜSTLÜ PAYLANMA « показательное распределение; exponential distribution » – *экспоненциал paylanma*, – paylanma sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

olan, $[0, \infty)$ -da toplanmış kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, λ – paylanmanın parametridir.



(1) $\lambda = 0.5$; (2) $\lambda = 1$; (3) $\lambda = 2$ olduqda üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyaları ayrılır

Ü. p.-nin xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - it/\lambda)^{-1}$, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $1/\lambda$ və $1/\lambda^2$, medianı $\ln 2/\lambda$, asimmetriyası $\gamma_1 = 2$, ekssesi isə $\gamma_2 = 6$ -ya bərabərdir.

Ü.p. keçmişin təsirsizlik xassəsi (Markov xassəsi) ilə xarakterizə olunur: mənfi olmayan X təsadüfi kəmiyyətinin üstlü qanunla paylanması üçün ixtiyari $x, y > 0$ qiymətlərində $P\{X > x + y | X > y\} = P\{X > x\}$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kifədir. Ü. p. *Pirson paylanmaları* ailəsinin X tipinə aiddir, *gamma – paylanmanın* xüsusi halıdır (həmçinin *Erlanq paylanması* və *Veybul paylanması* da).

Ü. p. Puasson prosesi ilə sıx bağlıdır: eğer hadisələr axını Puasson prosesi ilə təsvir olunursa, onda ardıcıl baş verən hadisələr arasında keçən müddətlər (bunlar təsadüfi kəmiyyətlərdir) Ü. p.-ya tabe asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ü. p.-nin bu xassəsinə görə o, kütləvi xidmət nəzəriyyəsi və etibarlılıq nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur.

Ü. p.-nin diskret analoqu *həndəsi paylanma*dır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

ÜSTÜNLÜK İNDİKATORU « предпочтения индикатор; preference indicator » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ÜSTÜNLÜK MEYDANI « предпочтения поле; ordering field » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ÜSTÜNLÜK MÜNƏSİBƏTİ « предпочтения отношение; ordering relation » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ÜSTÜNLÜKLƏR ANALİZİ « предпочтений анализ; preference analysis » – bax, *Çoxölçülü şkalalanma*.



VAHİDİ (SPORADİK) TƏSADÜFİ PROSES
« единичный случайный процесс; unit random process » – bax. *Binar təsadüfi proses.*

VALD EYNİLİYİ « Вальда тождество; Wald's identity » – sonlu riyazi gözləməsi $M\xi_1$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, təsadüfi τ kəmiyyəti sayda, $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi üçün eynilidir:

$$MS_\tau = M\xi_1 \cdot M\tau :$$

τ , – $\mathcal{A}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ hadisələr σ – cəbri axınına nəzərən Markov anıdır və $M\tau < \infty$. V. e. A. Vald tərəfindən ardıcıl analizdə tətbiqlə bağlı müəyyən olunmuşdur. Əgər $M\xi_1 = 0$ və $1 < \alpha \leq 2$ şərtini ödəyən hər hansı α üçün $M|\xi_1|^\alpha < \infty$ olarsa, $MS_\tau = 0$. V. e.-nin doğruluğu üçün $M(\tau^{1/\alpha}) < \infty$ şərti kafi şərtidir (bax, [3]). Əgər $\sigma^2 = D\xi_1 < \infty$ və $M\tau < \infty$ olarsa, onda $M(S_\tau - M\xi_1 \tau)^2 = \sigma^2 M\tau$ eyniliyi də doğrudur (bax, [1]). Diskret və kəsilməz parametrlili martinqallar üçün analogi münasibətlər doğrudur (bax, *Moment eynilikləri martinqallar üçün*).

Əd.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чоу И., Теория оптимальных правил останова, пер. с англ., М., 1977.

VALD KRİTERİSİ « Вальда критерий; Wald test » – müəkkəb statistik hipotezləri müqayisəetmə məsələsinə A. Vald tərəfindən təklif edilmiş *statistik kriteridir* (bax, [1]). $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ – naməlum ω parametrlindən asılı P_ω paylanmasına mənsub təkrar seçim olsun: $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^s$. $r \leq s$ şərti ilə r sayda $h_1(\omega), \dots, h_r(\omega)$ heqiqi funksiyalardan ibarət $h(\omega) = (h_1(\omega), \dots, h_r(\omega))'$ vektor – funksiyası ilə təyin olunan $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : h(\omega) = 0\}$ altçoxlğu seçilir. $\Omega_0 \subset \Omega$. $H_0 : \omega \in \Omega_0$ və $H_1 : \omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ statistik hipotezlərini müqayisəetmə məsələsi araşdırılır.

V. k.

$$nh'(\omega_n^*) [H'(\omega_n^*) \Sigma^{-1}(\omega_n^*) H(\omega_n^*)] h(\omega_n^*) \quad (*)$$

statistikasına əsaslanır və (*) statistikasının böyük qiymətlərində H_0 hipotezini inkar edir, burada ω_n^* , – ω parametri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq metodu ilə hesablanan statistik qiymət,

$\Sigma(\omega)$, – P_ω ailəsinin Fişer informasiya matrisi, $H(\omega)$ isə $\partial h_j(\omega) / \partial \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, r$ komponentlərindən ibarət $(s \times r)$ – ölçülü matrisdir.

(*) statistikası H_0 hipotezi seçildikdə və $n \rightarrow \infty$ olduqda sərbəstlik dərəcəsi sayı r olan asimptotik mərkəzi χ^2 – paylanması ilə paylanır. Buna görə də, V. k. asimptotik oxşar kriteridir. Bir-birinə yaxınlaşan alternativlərə baxıldıqda (*) statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı r olan asimptotik qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanması ilə paylanır və bu halda qeyri – mərkəzi kriteri aşkar ifadə olunur (bax, [1]).

V. k. olduqca ümumi rəqulyarlıq şərtlərlə *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi*, *Rao kriterisi*, *C(a) statistik kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, deməli, bu kriteri uyğun asimptotik optimal xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Wald A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, № 3, p. 426–82.

VALD REDUKSIYASI « Вальда редукция; Wald reduction » – bax. *Ən əlverişsiz paylanma.*

VALD RİSKİ « Вальда риск; Wald risk » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

VALD – HEFDİNG BƏRABƏRSİZLİYİ « Вальда – Хэфдингга неравенство; Wald – Hoeffding inequality » – hipotezlərin ardıcıl yoxlanılması məsələsində *helledici qaydalar* üçün müşahidələrin orta müddətinin aşağı sərhədini təyin edən bərabərsizlikdir. $\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $p(x)$ bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasının sıxlıq funksiyası, $H_i : p(x) = p_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ isə $p(x)$ funksiyası üçün irəli sürülmüş sadə hipotezlər, $\alpha_{ij} = P_i\{d = j\}$, $i \neq j$ isə hər hansı (i, d) helledici qaydasının xətalannın ehtimalları olsun (i indeksi H_i hipotezinin yerinə yetirilməsi ilə ehtimalları araşdırılmasını göstərir). Onda

$$M_i \tau \geq \max_{j \neq i} \frac{1}{I(i, j)} \sum_{n=1}^k \alpha_{n,j} \ln(\alpha_{n,j} / \alpha_{j,n})$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $I(i, j) = M_i \ln\{p_i(\xi_1) / p_j(\xi_1)\}$ – Kullbak – Leybler informasiya ədədləridir və $0 \cdot \ln(0/c)$ tipli ifadə ixtiyari $c > 0$ qiymətində sıfır bərabər götürülür. $k = 2$ olduqda bu bərabərsizlik [1]-də isbat olunmuşdur. k -nin böyük qiymətləri üçün bu bərabərsizliyin bir sıra modifikasiyaları alınmışdır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Hoeffding W., «Ann. Math. Stat.», 1960, v. 31, № 2, p. 352–68; [4] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26.

VAN DANTSİQ SİNFİ « ван Данцига класс; van Dantzig class » – ele *xarakteristik funksiyalar* topludur ki, *xarakteristik funksiyaların* bu sınıfdan olması üçün o, aşağıdakı şərtləri ödəməlidir: 1) f *analitik xarakteristik funksiya* olmalıdır; 2) $t \in \mathbb{R}^1$ olduqda $1/f(it)$ nisbəti *xarakteristik funksiya* olmalıdır. Normal paylanmanın *xarakteristik funksiyası* V. D. s.-ndəndir.

Belə *xarakteristik funksiyaların* təsviri problemi D. van Dantsiq tərəfindən defələrlə təklif olunmuşdur (bax, [1]). Bu problem hələ də öz həllini tapa bilməmişdir. V. D. s.-ne aid funksiyaların bir sıra xassələri [2] və [3]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Prize questions, Nieuw Archief voor Wiskunde, ser. 3, 1958, v. 6, p. 28 (question № 9); 1959, v. 7, p. 41 (question № 5); 1960, v. 8, p. 42. (question № 50); [2] Lukacs E., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 114–25; [3] Островский И. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 195–207.

VAN DER VARDEN KRİTERİSİ « Ван дер Вардена критерий; Van der Waerden test » – *vəziyyətlərinin* fərqli olmasının əksinə olaraq, iki skalyar seçimin birinciliyini yoxlamaq üçün *ranq kriterisi*dir. Asılı olmayan skalyar seçimlərlə təmsil olunan iki ümumi çoxluğun birinciliyi hipotezinə alternativ onlann (yerindəyişmənin alternativ) formaları sabit qaldıqda *vəziyyətlərinin* fərqli olması hipotezi irəli sürülür. Ranqların təyinedilmə sistemi aşağıdakı qaydada qurulur: seçimlər bir ümumi çoxluqda cəmləşir və həcmərinə görə nizamlanır; müşahidənin ranqı bu nizamlamada onun nömrəsinə bərabər götürülür (üst-üstə düşən müşahidələr olduqda orta ranqlar götürülür). $r_1, \dots, r_m$ – seçimlərdən birinin ranqı olsun (m, n seçimlərin həcmidir). V. d. V. k. statistikasi

$$W = \sum_{i=1}^m \psi(r_i)$$

cəminə bərabərdir, burada $\psi(\cdot)$ – standart normal paylanmanın kvantillər funksiyasıdır.

Əgər hər iki seçim eyni bir kəsilməz ümumi çoxluqlardan götürülmüşdürsə, W statistikasının paylanması yalnız m, n -dən asılı olur. m, n -in kiçik qiymətlərində cədvəllər [2]-də verilmişdir. m və n -in böyük qiymətləri üçün normal approksimasiya da orada göstərilmişdir. Müşahidələr normal qanuna yaxın qanunla paylandıqda V. d. V. k. tətbiq oluna bilər.

Əd.: [1] Van der Waerden B. L., «Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. A.», 1952, v. 55, p. 453–58; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Ван дер Варден Б., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория равновых критериев, пер. с англ., М., 1971.

VAN HOV TEOREMLƏRİ « ван Хова теоремы; van Hove theorems » – *Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin* termodinamik limit keçidində xüsusi sərbəst enerji limitinin varlığı şərtini verən teoremlər sinfidir. Məs., V. H. t.-nin diskret argumentli Gibbs paylanmaları üçün variantlarından biri aşağıdakından ibarətdir. $|\Lambda|$ – Λ çoxluğunun gücü, Λ^c – Λ çoxluğunun tamamlayıcısı, $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$, $n=1, 2, \dots$ – sonlu həcmli ardıcılığı olsun. İxtiyari $m > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n|^{-1} \left| \{t \in \Lambda_n : \text{dist}(t, \Lambda^c) \leq m\} \right| = 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\Lambda_n\}_n$ ardıcılığı *Van Hov xassəsinə* malikdir, deyilir. Fərz olunur ki, bu xassə ödənilir və

U Gibbs meydanının potensialı ələdir ki, onun norması $\|U\|$ sonludur: onda

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\Lambda_n}$$

limiti vardır, burada f_{Λ_n} – Λ_n həcmində xüsusi sərbəst enerjidir və bu enerji Λ_n ardıcılığının seçilməsindən asılı olmur.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

VANDERMOND TƏSADÜFİ DETERMİNANTİ « Вандермонда случайный детерминант; Vandermonde random determinant » – bax, *Təsadüfi determinant*.

VAPNİK – ÇERVONENKİS SİNFİ « Вапника – Червоненкиса класс; Vapnik – Chervonenkis class, VC class » – ixtiyari $\mathcal{X}$ çoxluğunun altçoxluqlarının ele $\mathcal{B}$ ailesidir ki, bu aile üçün

$$\min \{n : \sup_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}} \Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) < 2^n\} < \infty$$

şerti ödənilir, burada $\Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ – $B \in \mathcal{B}$, $\{x_1, \dots, x_n\} \cap B$ tipli müxtəlif sonlu altçoxluqların sayıdır (bax, [1], [2]). Əgər $\mathcal{B}$ V. Ç. s.-dirse, onda empirik ölçülər ardıcılığı üçün $\mathcal{B}$ üzrə müntəzəm Gauss approksimasiyası mümkündür (bax, *Yığılma(sı)* empirik ölçülərin və empirik proseslərin: [2]). Empirik paylanmaların müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər $\Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ kəmiyyəti

terminologiyasında alınmışdır. $\mathbb{R}^k$ fəzasının bütün yanmfəzalarının, bütün k – ölçülü kürelərin, tərəfləri koordinat müstəvilərinə paralel bütün k – ölçülü paralelepipedlərin çoxluqları V. – Ç. s.-dirlər.

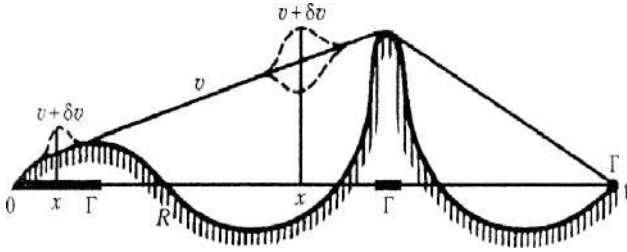
Əd.: [1] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 2, с. 264–79; [2] Dudley R. M., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, № 6, p. 899–929.

VARIASİON BƏRABƏRSİZLİKLƏR *stoxastik idarəetmədə « вариационные неравенства в стохастическом управлении; variational inequalities in stochastic control »* – maneəli (bax, aşağıda) *variasion məsələ* ilə analogiyaya əsaslanan optimal dayanma haqqında məsələnin öyrənilməsi üçün analitik aparatdır. V. b.-in ümumiləşməsi impulsu idarəetmə məsələlərində istifadə olunan *kvazivariasion bərabərsizliklərdir*.

V. b. ideyasını $I = [0, 1]$ parçasından ilk çıxış anında udulan $\{w(t)\}$ Viner prosesi misalında izah etmək münasibdir. Proses $x \in I$ nöqtəsində dayandıqda $R(x)$ gəlirinin alındığı fərz olunur; R funksiyası kəsilməzdir və $R(0) = R(1) = 0$. Məsələnin dəyəri

$$v(x) = \sup_{\tau} \mathbf{M}_x R(\omega_{\tau}), \quad x \in I \quad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, x – prosesin ilkin vəziyyəti, τ – ixtiyari sonlu Markov anıdır. Məlumdur ki, v – R funksiyasının çökük (içəri) majorantıdır (bax, şəkil) və prosesin $\Gamma = \{x : v(x) = R(x)\}$



çoxluğuna ilk daxilolma anı τ^* optimal andır [(1)-in supremumunu təmin edir]. Aydınır ki, $Lv \leq 0$, $R - v \leq 0$ münasibətləri I -də ödənilir,

$$Lv = 0 \text{ isə } I \setminus \Gamma \text{-də, } R - v = 0 \text{ isə } \Gamma \text{-də ödənilir,} \quad (2)$$

burada $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$, $- \{w(t)\}$ prosesinin doğuran operatorudur (formal şərhə Lv ümumiləşmiş funksiya kimi anlaşılar).

(2) düsturları

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (3)$$

sərhəd şərtlərlə v dəyərini və Γ çoxluğunu birqiyətli təyin edir. Γ çoxluğunu xaric edərək, (2) münasibətlərini v funksiyası üçün aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$Lv \leq 0, R - v \leq 0, Lv(R - v) = 0. \quad (4)$$

K – (3) sərhəd şərtlərini, $R - v \leq 0$ bərabərsizliyini, bəzi hamarlıq və integrallananlıq şərtlərini ödəyən, I -də verilmiş funksiyalar sinfi olsun; v dəyərinin $v \in K$ şərtini ödədiyi fərz olunur. Və fərz olunur ki, v elə dəyişir ki, $v + \delta v \in K$. $Lv \neq 0$ olan nöqtələrdə, birincisi, $Lv < 0$, ikincisi $R = v$ olur və buna görə də, $\delta v \geq 0$. Deməli, $Lv \delta v \leq 0$ bərabərsizliyi hər yerdə ödənilir və xüsusən ona görə ki, (Lv, dv) skalyar hasil ≤ 0 şərtini ödəyir. Beləliklə, v dəyəri bütün $v + \delta v \in K$, $v \in K$ üçün

$$(Lv, dv) \leq 0 \quad (5)$$

variasion məsələsinin həllidir; K sinfində baxılan bu məsələ mexanikada R maneəli variasion bərabərsizlik adlanır. Əksinə, (5) münasibətindən (4) alınır; buna görə ixtiyari $x \in I$ nöqtəsinin kiçik ətrafında δv -ni sıfırdan fərqli götürmək və nəzərə almaq lazımdır ki, $I \setminus \Gamma$ çoxluğunda ixtiyari işarəli variasiyalar, Γ -də isə yalnız müsbət variasiyalar mümkün ola bilər. Beləliklə, (1) dəyəri (5) V. b.-nin yeganə həllidir. Stoxastik idarəetmə nəzəriyyəsinə «V. b.» termini (4) sistemi üçün tədricən qəbul olunmuşdur. Dayanma anına qədər gəlirlər sürəti $r(x)$ olan və diskontlama (dəyərsizlənmə) parametri $\beta(x)$ -ə bərabər, doğuran operatoru

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

düsturu ilə verilən, $\mathbb{R}^n$ fəzasında diffuzion prosesin optimal dayanma məsələsində V. b. (4) və ya (5) şəklində olduğu kimi

qalır, lakin bu halda operator $Lv = Av - \beta v + r$ düsturu ilə ifadə olunur [əgər proses bütün fəzada verilməmişdirsə, onda (4) münasibətinə sərhəd şərtləri də əlavə olunur və bu şərtlər K sinfinin tərifində də əks olunur]. Əgər A, β, r idarədən a parametrindən asılıdırlarsa, onda L xətti olmayan $Lv = \sup_a [Av - \beta v + r]$ Bellman operatoru olur.

Əgər dayanmalar əvəzinə ixtiyari $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ Markov anlarında b impulsu idarəetmələr tətbiq etmək olarsa və bunlar prosesdə $q(x, b, dy)$ paylanmalı ani sıçrayışlar və ani $R(x, b)$ gəliri yaradırsa, bundan sonra proses yenidən y nöqtəsindən başlayır (adətən, $R < 0$ olduğu hesab edilir). Dinamik proqramlaşdırma mülahizələrinə görə hesab olunur ki, optimal idarəetmənin uyğun məsələsinin dəyəri v sərhəd şərtlərlə yanaşı

$$Lv \leq 0, Mv \leq 0, LvMv = 0 \quad (6)$$

münasibətlərini də ödəməlidir, burada M operatoru

$$Mv(x) = \sup_b [R(x, b) + \int v(y) q(x, b, dy)] - v(x)$$

düsturu ilə təyin olunmuşdur; ümumiyyətlə isə, optimal idarəetmə ondan ibarətdir ki, x vəziyyətində elə a və ya b idarəetməsini tətbiq etmək lazımdır ki, o, Lv və Mv -yə sıfır bərabər supremum təmin etsin. (6) sistemini sərhəd şərtlərlə (5)-ə oxşar şəkildə yazmaq olar, lakin bu zaman qeyd olunmuş K sinfi əvəzinə v -dən asılı $K(v)$ sinfi götürülməlidir («manea» hələdən asılı olur). Belə variasion məsələlər və (6) şəklində münasibətlər «kvazi-variasion bərabərsizliklər» kimi adlandırılmışdır.

V. və kvazivariasion bərabərsizliklər impulsu idarəetmələr arasında Puasson tipli sıçrayışlar mümkün olan və v dəyərinin x vəziyyətindən və t zamanından asılı olan, zamana görə bircins olmayan modellər üçün də tətbiq olunur. Birinci halda L operatorunda, M operatorundakı integrala oxşar, əlavə integral yaranır; ikinci halda isə $\frac{\partial}{\partial t}$ həddi yaranır.

Əd.: [1] Bensoussan A., Lions J.-L., Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, P., 1978; [2] Бен-сусан А., Лионс Ж.-Л., Импульсное управление и квази-вариационные неравенства, пер. с франц., М., 1987.

VARIATION PRINSİP statistik mexanikada «вариационный принцип в статистической механике; variational principle in statistical mechanics» – enerjisi qeyd olunmuş, izole edilmiş material sistemin tarazlıq vəziyyəti entropiyanın maksimal qiyməti ilə xarakterizə olunan, C. Gibbs tərəfindən daxil olunmuş prinsipdir (bax. [1]).

Statistik mexanikanın hissəciklərinin vəziyyətləri (tipləri) sayı sonlu olan şəbəkəvari modelləri üçün bu prinsipin ən sadə riyazi ifadəsi

$$\mathcal{G}_0(\Phi) = \left\{ \mu \in M_0 : s(\mu) - U_\Phi(\mu) = \sup_{\nu \in M_0} [s(\nu) - U_\Phi(\nu)] \right\}$$

münasibətlə təyin olunur, burada M_0 – konfigurasiyalar fəzasında transilyasion invariant ehtimal ölçüləri çoxluğu, $\mathcal{G}_0(\Phi)$, –

Φ potensialı (tarazlıqlı vəziyyətlərin) translyasion invariant Gibbs paylanmalar çoxluğu, $s(\mu)$ - μ ölçüsünə uyğun xüsusi (rus. удельная) termodinamik entropiya, $U_{\Phi}(\mu)$ - orta xüsusi (rus. удельная) enerjidir (bax, [2], [3], [5]). Analoji müddəalar digər modellər üçün də doğrudur (bax, [6], [8]).

$$P(\Phi) = \sup_{v \in M_0} [s(v) - U_{\Phi}(v)]$$

bərabərliyi də V. p. adlanır, burada $P(\Phi)$ təzyiqdir (bax, [4]).

V. p.-lə bağlı ideya və anlayışlar erqodik nəzəriyyəyə təsir göstərmişdir.

Əd.: [1] Г и б б с Д ж., О равновесии гетерогенных веществ, в его кн.: Термодинамика. Статистическая механика, пер. с англ., М., 1982, с. 61-349; [2] Lanford O., Ruelle D., «Commun. Math. Phys.», 1969, v. 13, № 3, p. 194-215; [3] Ruelle D., «Commun. Math. Phys.», 1967, v. 5, № 1, p. 324-29; [4] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [5] Ruelle D., Thermodynamic formalism, Reading (Mass.), 1978; [6] Preston Ch., Random fields, B., 1976; [7] Follmer H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 26, № 3, S. 207-17; [8] K u n s c h H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 58, № 1, S. 69-85; [9] G e o r g i I H., Gibbs measures and phase transitions, B., 1988; [10] П р и г о ж и н И. Р., Введение в термодинамику необратимых процессов, пер. с англ., М., 1960; [11] К л е й н М., в кн.: Термодинамика необратимых процессов, пер. с англ., М., 1962, с. 213-32; [12] Б о у э н Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979.

VARIASION SIRA « вариационный ряд; set of order statistics, ordered statistics » - n həcmli $X_1, \dots, X_n$ seçiminin artmaqla nizamlanmış elementlərindən təşkil edilmiş, yeni

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

şərtlə təyin olunan $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ vektorudur.

V. s.-nin hədlərinə seçimin qaydalı statistikaları deyilir.

Paylanma funksiyaları kəsilməz olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin V. s.-nin riyazi statistikada mühüm tətbiqi əhəmiyyəti vardır. $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ V. s.-nin minimal və maksimal hədlərinin paylanmalarına uyğun olaraq,

$$P\{X_{(1)} < x\} = 1 - P\{X_{(1)} \geq x\} = 1 - (1 - F(x))^n,$$

$$P\{X_{(n)} < x\} = (F(x))^n$$

münasibətlərlə təyin olunur. k -cı qaydalı $X_{(k)}$ statistikasının paylanması

$$P\{X_{(k)} < x\} = C_n^{k-1} (n-k+1) \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt, \\ k = 2, \dots, n-1$$

düsturu ilə hesablanır, burada $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasıdır və onun kəsilməz olduğu fərz olunur.

Əgər X_i , $1 \leq i \leq n$ asılı olmayan ümumi paylanma sıxlığı f olan elementlərdirsə, onda V. s.-nin elementlərinin birgə ehtimal sıxlığı $x_1 \leq \dots \leq x_n$ olduqda

$$g(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

düsturu ilə təyin olunur, eks halda isə sıfır bərabərdir. Bircins asılı olmayan seçim üçün V. s. rəqəmlər vektorundan asılı olmur.

Əd.: [1] Д е й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

VARIASIYA(sı) ölçünün « вариа́ция меры; variation of a measure » - dəyişmə xarakəti və ya kompleks ölçü ilə əlaqələnən müsbət ölçüdür. φ - Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ - cəbrində təyin olunmuş çoxluq (ədədi) funksiyası olsun. $E \in \mathcal{A}$ çoxluğunda

$$|\varphi|(E) = \sup \sum_{i=1}^n |\varphi(E_i)|$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $|\varphi|$ funksiyasına **variasiya** (və ya **am variasiya**) deyilir, burada yuxarı sərhəd E çoxluğunun bütün $\{E_1, \dots, E_n\}$ tipli sonlu bölgüləri üzrə götürülür: $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Əgər $|\varphi|(\Omega) < \infty$ olarsa, φ sonlu (və ya məhdud) variasiyaya malikdir, deyilir. Əgər φ additivdirsə, onda $|\varphi|$ çoxluq funksiyası kimi additivdir. Əgər $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ additiv məhdud funksiyadırsa, onun V.-sı sonludur. Əgər $\mathcal{A}$ σ - cəbr və $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ hesabi - additiv funksiyadırsa, onda φ -nin sonlu V. vardır və $|\varphi|$ hesabi - additivdir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ müsbət ölçü təyin olunmuş fəzadırsa və $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μ - integrallanan funksiyadırsa, onda çoxluq funksiyası

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu, E \in \mathcal{A}$$

hesabi - additivdir və o, sonlu V.-ya malikdir və

$$|\varphi|(E) = \int_E |f| d\mu, E \in \mathcal{A}.$$

V. anlayışı **vektor ölçülər** üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962, с. 111-13, 129, 142-48.

VARIASIYA ƏMSALI « вариа́ции коэффициент; variation coefficient » - təsadüfi kəmiyyətin adsız kəmiyyət olan səpələnmə ölçüsüdür. V. ə. müxtəlif qaydalarla təyin olunur. Praktikada ən çox istifadə olunan V. ə. düsturu

$$V = \sigma / M_{\xi}^{\xi}$$

ifadəsilə verilir, burada σ^2 və M_{ξ}^{ξ} - uyğun olaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası və riyazi gözləməsidir (bu halda M_{ξ}^{ξ} müsbət olmalıdır). Bəzən bu ifadə faizlərlə, yəni $V = 100 \sigma / M_{\xi}^{\xi} \%$ kimi verilir. V. ə. σ -nin (kvadratik orta meylin) M_{ξ}^{ξ} -nin neçə faizi olduğunu göstərir. V. ə. üçün bu tərif K. Pirson (K. Pearson, 1985) tərəfindən verilmişdir.

VARŞAMOV – HİLBERT SƏRHƏDİ « Варшамова – Гильберта граница; Varshamov – Hilbert boundary » - bax, Kod.

VATANABE TEOREMİ « Ватанабе теорема; Watanabe theorem » - bax, Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları.

VAYTMAN FUNKSIYASI « Вайтмана функция; Wightman function » – bax, *Uaytman funksiyası*.

VEKTOR – BİRCİNS VƏ İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDANI « векторное однородное и изотропное случайное поле; vector – valued homogeneous isotropic random field » – bax, *Bircins və izotrop təsadüfi meydan*.

VEKTOR KRİTERİSİ eksperimentin planlaşdırılmasının « векторный критерий планирования эксперимента; vector test / criterium design of experiment » – planın minimizasiya olunacaq skalyar xarakteristikaları toplusudur (məs., yerinidəyişmə, regressiya funksiyasının qeyri – adekvat statistik qiymətinin səpələnməsi kimi). Minimizasiya eyni zamanda mümkün olmadıqda, ya kriterilər prioriteti daxil olunur və ya planların Pareto üzrə optimallığı anlayışından istifadə olunur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Соболев Н. М., Статников Р. Б., Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями, М., 1981.

VEKTOR ÖLÇÜ « векторная мера; vector measure » – hər hansı σ – cəbrdə təyin olunmuş, qiymətləri Banax fəzasından olan hesabı – additiv inikasdır. V. ö. anlayışı aşağıdakı daha ümumi halda təyin olunur. Ω – boş olmayan çoxluq, $\mathcal{A}$ – onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı cəbr, $\mathbb{B}$ – lokal qabarıq fəza olsun. Əgər $\mathcal{A}$ -nin cüt-cüt kəsişməyən çoxluqları A_n -lərin birləşməsi də $\mathcal{A}$ -ya daxil olduqda hər bir A_n ardıcılığı üçün $\sum \varphi(A_n)$ sırası $\mathbb{B}$ -də yığılarsa və $\varphi\left(\bigcup A_n\right) = \sum \varphi(A_n)$ olarsa, $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ inikası vektor ölçü (və ya hesabı – additiv vektor ölçü) adlanır.

Aşağıda fərz olunur ki, $\mathbb{B}$ Banax fəzasıdır. Əgər $\mathcal{A}$ σ – cəbr və $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ V. ö. olarsa, onda $\{\varphi(A): A \in \mathcal{A}\}$ -nin qiymətləri çoxluğu zəif topologiyada nisbi kompakt $\mathbb{B}$ altçoxluğu (Bartl–Danford–Şvarts teoremi). V. ö. üçün ölçünün davamı haqqında teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur. Əgər $\mathcal{A}_0$ cəbr, $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}_0$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbrdirsə və $\varphi_0: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{B}$ ele V. ö.-dürsə ki, onun üçün $\{\varphi_0(A): A \in \mathcal{A}_0\}$ $\mathbb{B}$ fəzasında zəif nisbi kompakt qiymətlər çoxluğudur, onda φ_0 V. ö.-sü $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ V. ö.-sünə qədər yeganə surətdə davam olunur; əgər $\mathbb{B}$ -nin C_0 -a izomorf altfəzası yoxdursa, onda hər bir $\varphi_0: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{B}$ məhdud V. ö.-sü $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ V. ö.-sünə qədər davam olunur.

$\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ V. ö.-nün variasiyası $\|\varphi\|$ skalyar ölçünün variasiyası kimi təyin olunur, lakin fərqləndirici cəhət modulun norma ilə evez olunmasıdır. Əgər $\|\varphi\|(\Omega) < \infty$ olarsa, V. ö. φ sonlu və ya məhdud variasiyaya malikdir, deyilir. Əgər $\mathbb{B}$ sonsuzölçülü fəza, $\mathcal{A}$ σ – cəbrdirsə, onda ixtiyari φ V. ö.-nün sonlu variasiyası olmaya bilər.

$\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}$ V. ö.-sünün semi-variasiyası $\|\varphi\|$ $E \in \mathcal{A}$ çoxluğunda

$$\|\varphi\|(E) = \sup \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi(E_k) \right\|$$

berəbərliliklə təyin olunur, burada supremum bütün n -lər, E çoxluğunun bütün sonlu $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{A}$ bölgüləri və $\max |\beta_k| \leq 1$ şərtini ödəyən $\beta_1, \dots, \beta_n$ -lər üzrə götürülür. Yalnız və yalnız φ -nin qiymətlər oblası $\mathbb{B}$ -də məhdud olduğu halda φ -nin sonlu semi – variasiyası vardır (yəni $\|\varphi\|(\Omega) < \infty$). Xüsusi halda, σ – cəbrdə təyin olunmuş V. ö. sonlu semi – variasiyaya malikdir. Semi – variasiya variasiyadan fərqli olaraq, additiv funksiya deyildir.

Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (sonlu) ölçülü fəza, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{B}$ Pettise görə inteqrallanan inikasdırsa, onda

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu$$

çoxluq funksiyası variasiyası σ – sonlu olan V. ö.-dür; əgər f Boxnərə görə ölçüləndirsə, onda φ -nin sonlu variasiyası, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki,

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu(\omega) < \infty$$

şərti ödənilsin.

V. ö.-yə mühüm misal operator (operatorqiymətli) ölçüdür. $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ – Banax fəzaları, $L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ – kəsilməz xətti operatorlar fəzası olsun. Əgər hər bir $x \in \mathbb{B}_1$ üçün φx V. ö. olarsa, $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ inikası operator ölçü adlanır.

Operator ölçüləri üzrə inteqrallar operatorların spektral nəzəriyyəsində və geniş mənada stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., т. I, М., 1962, 345–57; [2] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977; [3] Kluvanek I., Knowles G., Vector measures and control systems, Amst., 1975.

VEKTOR TƏSADÜFİ PROSES « векторный случайный процесс; vector random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

VEKTORLAR KONFIGURASIYASI « векторов конфигурация; vector configuration » – ele vektorlar sistemidir ki, vektorların uzunluğu *korrelyasion matrisin* baş diaqonalının elementlərinə, bucaqları isə matrisin digər elementlərinə uyğundur. Baş diaqonal elementləri məlum olan korrelyasion matris ona uyğun yeganə, ciddi təyin olunmuş V. k.-ni təyin edir. Bu mənada hesab etmək olar ki, korrelyasion matris onunla əlaqəli bütün vektor cütlerinin skalyar hasilini təyin edir. Müəyyən dəyişənə uyğun hər bir vektorun uzunluğu bu dəyişənin ümumiyyəti xarakterizə edən kəmiyyətin müsbət kvadrat kökünə bərabərdir. Matrisin V. k. kimi təsviri matrisin və ya V. k.-nin daşıdığı informasiyanın itkisinə səbəb olur.

Əd.: [1] Окунь Я., Факторный анализ, пер. с польск., М., 1974.

VENTSEL ŞƏRTİ « Вентцеля условие; Wentzell condition » – bax, *Markov prosesi*; şərhəd şərti.

VERGƏCİ, TƏSADÜFİ ƏDƏDLƏRİN « датчик случайных чисел; random numbers generator » – adətən, eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər (psevdotəsadüfi) ardıcılığının bir sıra xassələrinə malik ədədlər ardıcılığının regenerasiyası üçün proqram və ya qurğudur (bax, *Təsadüfi və psevdotesadüfi ədədlər*). Təsadüfi kəmiyyətin

bütün xassələrini özündə eksi etdiren ardıcılıq yaradan program-vergələr mövcud deyil (bax, [3]). T. e. v.-ləri hesablama alqoritmlərində (Monte – Karlo metodu, bax, [2]), kompyuterlə modeləşdirmədə, informasiyanın kodlanmasında (qorunmasında) istifadə olunur. Vergələrin qurulmasının əsas məsələsi $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının yaxşı imitasiyasıdır. Bu imitasiyadan ixtiyari paylanmaya malik ardıcılıqlar almaq mümkündür. Vergənin keyfiyyəti n – ölçülü müntəzəm paylanmanın xassələrinə əsaslanan testlərlə (bax, [1]), spektral metodlarla yoxlanılır (bax, [3]); bu metodlar və testlər vergənin psevdoperiodikliyi (asılılığını) aşkar edir. $x_n = y_n/m$ periodik xətti konkurent vergələri ən çox istifadə olunan vergələrdir, burada $y_n = a y_{n-1} + b \bmod m$, a, b, y_0 – tam, m – böyük, adətən, ən böyük maşın ədədləridir; a və b -nin yarayan qiymətlərində vergənin periodu m -ə bərabərdir. Bunlar ikiölçülü müntəzəm paylanmaya çox da uyğun olmur və kiçik psevdoperiodlara malikdirlər. Daha mürəkkəb konstruksiyalar birgə paylanma baxımından yaxşı keyfiyyətli olur: periodları ölçüləbilməyən vergələrin xətti kombinasiyaları, inversal konkurent vergələr: $x_n = y_n/m$, $y_n = a y_{n-1} + b \bmod m$, $y_0 = 1 \bmod m$, m – sadə ədəddir və b .

İmitasiya modellərin vergələrinin asılı olmamalıqlarını əlavə surətdə yoxlamaq tələb olunur, çünki bu modellər istifadə olunan psevdotəsadüfi ardıcılıqların elementlərinin asılılığına daha çox həssas olur; belə ki, asılılıq olduğu halda modeləşmənin nəticələri prinsipial surətdə təhrif olunur.

Əd.: [1] К у т Д., Искусство программирования на ЭВМ, т. 2, пер. с англ., М., 1977; [2] Ф о р с а й т Д. Ж., М а л ь к о л ь М., Машинные методы математических вычислений, пер. с англ., М., 1980; [3] Ж у р б е н к о И. [и др.], О построении и исследовании псевдослучайных последовательностей различными методами. «Заводская лаборатория», 1985, т. 5.

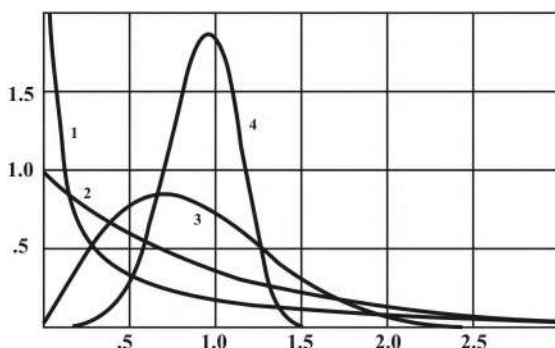
VERİLƏNLƏR PƏNCƏRƏSİ « данных окно; data window / taper » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri-parametrik statistik qiymət.

VERİLƏNLƏRİN HİSSƏSİ « порция данных; data portion » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

VEYBULL PAYLANMASI « Вейбулла распределение; Weibull distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil)

$$p(x) = \alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}$$

olan, $(0, \infty)$ -da toplanmış, kəsilməz *ehtimal paylanması*dır.



Veybull paylanmasının sıxlıq funksiyası $\lambda = 1$ və
(1) $a = 0.5$; (2) $a = 1$; (3) $a = 2$; (4) $a = 5$ qiymətlərində

V. p.-nin paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}, \quad \lambda > 0, \alpha > 0$$

münasibətilə ifadə olunur, burada α, λ – parametrlərdir. $\alpha = 1$ olduqda V. p. *üstlü paylanma*, $\alpha = 2$ olduqda isə *Reley* (Rayleigh) *paylanması* ilə üst-üstə düşür. V. p.-nin bütün momentləri sonludur, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $\alpha > 1$ olduqda

$$\lambda \Gamma(1 + 1/\alpha) \text{ və } \lambda^2 (\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha))$$

ifadələrlə təyin olunur. V. p. unimodaldır, modası $\lambda(\alpha - 1)^{1/\alpha}$ -ya bərabərdir.

V. p. fasiləsiz işləmə müddətinin paylanmasının ifadə edilməsi üçün statistik etibarlılıq nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Вейбулл В., A statistical theory of the strength of materials, Stockh., 1939; [2] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [3] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

VEYL DÜSTURU « Вейля формула; Weyl formula » – bax, *Differensial operator*; təsadüfi əmsallı spektral nəzəriyyə.

VƏZİYYƏT « состояние; state » qeyri-kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində – verilən sistemin hər bir X *müşahidələnməsinə* onun orta qiyməti $\varphi(X)$ -i qarşı qoyan riyazi gözləmənin funksionalıdır (bax, *Cəbri. müşahidələnmələrin*). V. riyazi anlayışı cəbri yanaşma çərçivəsində daha geniş (və daha az təyin olunmuş) statistik vəziyyət fiziki anlayışını verilən fərdi sistemlərin statistik ansamblının hazırlanmasını təsvir edən şərtlər toplusu kimi formalaşdırır və bu (yeni V.) müşahidə olunan bu və ya digər kəmiyyətin müşahidə olunmasından bilavasitə əvvəl həyata keçirilir.

VƏZİYYƏT DÖVRÜ; Markov zənciri vəziyyətlərinin dövrü « состояния период цепи Маркова; period of a state of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

VƏZİYYƏT VEKTORU « состояния вектор; state vector » – bax, *Sıxlıq operatoru*.

VƏZİYYƏTİ, AVTOMATIN « состояние автомата; automaton state » – bax, *Ehtimali avtomat*.

VİK FORMASI « Вика форма; Wick form » – bax, *Vik nizamlanması*.

VİK MONOMU « Вика моном; Wick monom » – bax, *Vik nizamlanması*.

VİK NİZAMLANMASI « Вика упорядочения; Wick ordering » – ikinci kvantlama metodu və təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində tətbiq olunan iki əməliyyat üçün ümumi addır (hər iki əməl :: simvolu ilə işarə olunur).

1) İkinci kvantlanma halında, ixtiyari monom üçün $a_1^\# \cdot a_2^\# \cdot \dots \cdot a_N^\#$, $a_i^\#$, $i = 1, \dots, N$ -ya a_i -nin doğum operatoru və ya a_i -nin ölüm operatorudur; onun Vik (və ya normal)

forması: $\prod_{i=1}^N a_i^\#$: ele hasilə deyilir ki, bütün ölüm operatorları doğum operatorlarından sağda yerləşirlər. :: xətti əməl olduğuna

görə $a_i^{\#}$ operatorlarının bütün polinomlarına (sıralarına) da davam olunur.

2) $\{X_1, \dots, X_N\}$ cüt-cüt müxtəlif Gauss təsadüfi kəmiyyətlərinin sistemi olarsa, n_i tam ədədlər, $i=1, \dots, N$ olduqda, baş

həddi $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_N^{n_N}$ olan, bütün $\prod_{i=1}^N X_i^{k_i}$, $0 \leq k_i \leq n_i$,

$\sum_{i=1}^N k_i \leq \sum_{i=1}^N n_i$ monomlarına ortoqonal olan $X_1, \dots, X_N$

kəmiyyətlərinin polinomuna: $\prod_{i=1}^N X_i^{n_i}$: Vik monomu

deyilir. Asılı olmayan Gauss sisteminin ən sadə halında

$\prod_{i=1}^N X_i^{n_i} = \prod_{i=1}^N X_i^{n_i}$ olur və bu halda $X^n = H_n(X)$,

burada $H_n(\cdot)$ – baş əmsalı 1 olan n -ci Hermit çoxhədlisidir.

Gauss təsadüfi funksiyası (meydanı) – $\{X_x, x \in H, H$ – Hilbert fəzasıdır} üçün onun kovariasion operatoru vahidi operator olduğu halda: eməlinin köməyiylə $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ fəzasının $\mathcal{H}_\Sigma(H)$ fəzasına – H üzərində simmetrik Fok fəzasına – mühüm izomorfizmi (İto – Vik inikası; [3]) qurulur (Ω, Σ, μ) , – X_x təsadüfi kəmiyyətlərinin təyin olduğu ehtimal fəzasıdır];

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)^s \leftrightarrow \prod_{i=1}^n X_{x_i},$$

burada $(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)^s$, – $x_i \in H$, $i=1, \dots, N$ elementlərinin simmetriklənmiş hasilidir.

Əd.: [1] Х е п о Н., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [2] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [3] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122.

VİQNER PAYLANMASI « Вигнера распределение; Wigner distribution » – Gauss simmetrik matrislər ansamblında (Viqner ansamblı) limit spektral funksiyasını (vəziyyətlər sıxlığını) xarakterizə edən paylanmadır. Bu ansambl aşağıdakı kimi daxil olunur.

X_{ij} , $n \geq i \geq j \geq 1$ – asılı olmayan həqiqi Gauss ədədləri;

$$\mathbf{M}X_{ij} = 0; \mathbf{D}X_{ij} = 1, i \neq j, \mathbf{D}X_{ii} = 2; X_{ij} = X_{ji}, i < j;$$

$$A_n = n^{-1/2} \|X_{ij}\|;$$

$\lambda_i^{(n)}$, $i=1, 2, \dots, n$ A_n -in məxsusi ədədləri olsun. $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} n(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \lambda_i^{(n)} < \lambda^{(1)}$$

limit spektral paylanma funksiyası yaranır, belə ki, vəziyyətlər sıxlığı $n(\lambda)$ aşkar hesablanır:

$$n(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \lambda^2} \chi_{|\lambda| \leq 1},$$

1060 VİLSON

bu düsturla ifadə olunan sıxlıq Viqner semi-dairəvi qanununu adlanır. Viqner ansamblı ortoqonal invariantlıq xassəsinə malikdir. $A_n = O_1 A_n O_2$, burada O_i – təsadüfi olmayan ortoqonal matrislərdir. V. p. ağır nüvələrin spektral xassələrinin təsvir edilməsində model kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Случайные матрицы, К., 1975.

VİQNER SEMİ – DAİRƏVİ QANUNU « Вигнера полукруговой закон; Wigner semicircular law » – bax, Viqner paylanması.

VİLKOKSON KRİTERİSİ « Вилкоксона критерий; Wilcoxon test » – bax, Uilkokson kriterisi.

VİLSON TƏSİRİ « Вильсона действие; Wilson action » – bax, Kalibrleme modeli statistik mexanikanın.

VİLSON – HİLFERTİ ÇEVİRMƏSİ « Вильсона – Хилфerti преобразование; Wilson – Hilferty transformation » – sərbəstlik dərəcəsi sayı ν -yə bərabər χ^2 kvadrat paylanmaya malik χ_ν^2 təsadüfi kəmiyyətini normallaşdıraraq çevirmədir. V. – H. ç.

$$h(\chi_\nu^2) = 3 \sqrt{\frac{\nu}{2}} \left[\left(\frac{\chi_\nu^2}{\nu} \right)^{1/3} - 1 + \frac{2}{9\nu} \right]$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Bu normallanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası $\nu \rightarrow \infty$ olduqda

$$K_\nu(y) = \mathbf{P}\{h(\chi_\nu^2) < y\} = \Phi(y) - \Phi^{(4)}(y)/(108\nu) + O(\nu^{-3/2})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\Phi(y)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır və $\Phi^{(4)}(y) = \partial^4 \Phi(y)/\partial y^4$. Fişer çevirməsi

$$g(\chi_\nu^2) = \sqrt{2\chi_\nu^2} - \sqrt{2\nu - 1} \text{ üçün } \nu \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

$$\mathbf{P}\{g(\chi_\nu^2) < y\} = \Phi(y) + O(\nu^{-1/2})$$

olur.

V. – H. ç. $\nu \geq 50$ oblastunda $\mathbf{P}\{\chi_\nu^2 < x\}$ ehtimalını hesablamaq üçün cədvəllərdə istifadə olunur, bu cədvəllər $K_\nu(y) - \Phi(y)$ fərqləri üzrə tutulmuşdur və bu halda, əgər $y = h(x)$ olarsa, $K_\nu(y) = \mathbf{P}\{\chi_\nu^2 < x\}$ götürülür.

Əd.: [1] Wilson E. B., Hilferty M. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1931, v. 17, p. 684–88; [2] Пугачова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

VİNER FUNKSIONALI « винеровский функционал; Wiener functional » – $(w_t, \mathcal{A}_t^w, \mathbf{P})$, $t \geq 0$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş ölçülən funksiyadır, burada w_t , – m – ölçülü Viner prosesi, $\mathcal{A}_t^w$, – $\{w_s, s \leq t\}$ qiymətlərinin doğruduğu və əsas ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}$ üzrə tamamlanmış σ – cəbdir.

V. f.-na aid:

$$\max_{t \in [0, T]} w_t, \int_0^T f(w_t) dt,$$

f – təsadüfi olmayan funksiyadır; n – qat Viner inteqralları –

$$\int_{[0,T]^n} K(t_1, \dots, t_n) dw_{t_1} \dots dw_{t_n},$$

$K \in L^2([0, T]^n)$; təsadüfi olmayan və ya $\mathcal{A}_t^w$ – antisipativ əmsalları stoxastik differensial $dX_t = a(t, X)dw_t + b(t, X)dt$ tənliklərinin güclü həllərinin funksionallarını misallar kimi qeyd etmək olar. $m=1$ olduğu halda, qeyd olunan funksionalların paylanmalarına baxılmışdır (bax, [1] – [3]), məs.,

$$P\{\max_{t \in [0,T]} w_t < a\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^a \exp\left[-\frac{x^2}{2T}\right] dx, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

$\mathcal{A}_t^w$ – ölçülən X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonlu olarsa, yəni $M|X| < \infty$ olarsa, onda V. f.

$$X = MX + \int_0^T (g_t, dw_t)$$

şəklində ifadə oluna bilər, burada g_t – m – ölçülü $\mathcal{A}_t^w$ – uzlaşmış prosesdir (bax, [4]).

V. f.-lının stoxastik analizi kimi bölmələr də inkişaf etməkdədir və xüsusi halda V. f.-nin törəməsi təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Ito K., «J. Math. Soc. Jap.» 1951, v. 3, p. 157–69; [2] Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961; [3] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [4] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [5] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

VİNER FUNKSIONALI; ortoqonal sığalara ayırılış «винеровский функционал; разложение в ортогональные ряды; Wiener functional; expansion into orthogonal series» – kvadratik inteqrallanan Viner funksionalı X -in (X hər hansı $T > 0$ üçün $\mathcal{A}_T^w$ – ölçülendir və w_t birölçülü Viner prosesidir) polinomial ortoqonal funksionallar üzrə sıraya ayrılışdır:

$$X = MX + \text{li.m.} \sum_{n=1}^N \sum_{r, m_1 + \dots + m_r = n} A_{m_1, \dots, m_r} \varphi_{m_1, \dots, m_r},$$

$A_{m_1, \dots, m_r}$ – Furiye – Hermit əmsallandır,

$$A_{m_1, \dots, m_r} = MX \cdot \varphi_{m_1, \dots, m_r};$$

$$\varphi_{m_1, \dots, m_r} = \psi_{m_1, 1} \cdot \dots \cdot \psi_{m_r, r},$$

$$\psi_{m, p} = H_m \left(\int_0^T \alpha_t^{(p)} dw_t \right),$$

$\alpha_t^{(p)}$ – $L^2[0, T]$ -də ortonormalanmış bazisdir,

$$H_m(u) = (-1)^m 2^{-m/2} (m!)^{-1/2} e^{u^2} \frac{d^m}{du^m} (e^{-u^2})$$

normalanmış Hermit çoxhədliləridir. Bu halda

$$MX^2 = (MX)^2 + \text{li.m.} \sum_{n=1}^N \sum_{r, m_1 + \dots + m_r = n} (A_{m_1, \dots, m_r})^2.$$

Hər bir $\varphi_{m_1, \dots, m_r}$ funksionalı çoxqat Viner inteqralı şəklində ifadə oluna bilindiyindən

$$X = \text{li.m.} \sum_{n=0}^N G_n(K_n)$$

ifadəsi doğrudur, burada $G_n(K_n) \perp G_m(K_m)$, $m \neq n$:

$$G_n(K_n) = \int_{[0,T]^n} K_n(t_1, \dots, t_n) dw_{t_1} \dots dw_{t_n},$$

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^n n!)^{-1} MX G_n(L_n^\varepsilon),$$

$$L_n^\varepsilon(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} 1, & t_i \leq s_i \leq t_i + \varepsilon, \quad i=1, \dots, n \\ 0, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

Əd.: [1] Cameron R., Martin W. T., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 385–92; [2] Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961.

VİNER İNTEQRALI «винеровский интеграл; Wiener integral» – $C = C[0, 1]$ ədədi kəsilməz funksiyalar fəzasının Borel σ – cəbri $\mathcal{B}$ -də təyin olunmuş μ_w Viner ölçüsü

üzrə inteqraldır. V. i.-nin ehtimali interpretasiyası: V. i.-nin, μ_w Viner ölçüsünü doğuran $w(t)$ Viner prosesinin trayek-toriyalan üzərində təyin olunmuş təsadüfi funksionalın riyazi gözləmə olmasıdır:

$$\int_C f(x(\cdot)) \mu_w(dx(\cdot)) = Mf(w(\cdot)).$$

Burada $f(x(\cdot))$, C -də təyin olunmuş, $\mathcal{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən ədədi funksionaldır.

VİNER KÖRPÜSÜ «винеровский мост; Wiener bridge», Braun körpüsü – sonlu zaman parçasının uclarında aldığı qiymətlərin qeyd olunması şərtilə, şərti Viner prosesidir.

$a \leq t \leq b$ olduqda, $\zeta(t)$ V. k. $\zeta(a) = A$, $\zeta(b) = B$ şərhə şərtlərilə verilən, riyazi gözləməsi

$$m(t) = M\zeta(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a), \quad a \leq t \leq b,$$

kovariasion funksiyası

$$K(s, t) = M\{[\zeta(s) - m(s)][\zeta(t) - m(t)]\} = \frac{(b-t)(s-a)}{b-a}, \quad a \leq s \leq t \leq b$$

olan kəsilməz Gauss – Markov prosesidir.

$$\zeta^*(s) = \zeta(t) - m(t), \quad t = a + (b-a)s$$

düsturları vasitəsilə $\zeta(t)$ V. k., $0 \leq s \leq 1$ olduqda, $\zeta^*(0) = \zeta(1) = 0$ şərhə şərtləri ilə verilən $\zeta^*(s)$ V. k.-ne çevrilir. $w(t)$ sıfırdan başlayan standart Viner prosesi olduqda da, $\zeta^*(s) = w(s) - sw(1)$ qəbul etməklə eyni prosesi almaq olur.

V. k. funksional limit teoremlərində istifadə olunur. Əgər F_n , ξ təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanma funksiyası, F onun kəsilməz nəzəri paylanma funksiyasıdır, onda $x = F^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\zeta_n^*(s) = \sqrt{n} [F_n(x) - F(x)]$ təsadüfi prosesi V. k.-ne yığılır. *Kolmoqorov kriterisi* statistikasının paylanmasının çıxarılışı bu mülahizəyə əsaslanır.

Əd.: [1] Х и л а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER MARTİNGALI «винеровский мартингал; Wiener martingale» – kəsilməz, kvadratik integrallanan $\mu(t)$ martinqaldır. $\mu(0) = 0$; V. m.-nin xarakteristikası – $\langle \mu \rangle_t = t$. Yeni V. m. ele Viner prosesidir. Aşağıda baxılan bütün təsadüfi proseslər qeyd olunmuş $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində təyin olunmuşdur, $t \geq 0$. Tərifdə qeyd olunmuş xassənin çoxölçülülük analoqu *Levi teoremi* kimi (bax, [1]) məlumdur, bu teoremdə hökm olunur ki, əgər $\mu(t)$ $\mathcal{A}_t$ axınına nəzərən m – ölçülü kəsilməz lokal martinqaldırsa, $\mu(0) = 0$ və qarşılıqlı xarakteristika $\langle \mu_i, \mu_j \rangle_t = \delta_{ij} t$ (δ_{ij} – Kroneker simvoludur) olarsa, onda μ_i $\mathcal{A}_t$ -yə nəzərən m – ölçülü Viner prosesidir.

Əgər $(\mu(t), \mathcal{A}_t)$ m – ölçülü Viner prosesidirsə, onda aşağıdakı müddəalar doğrudur:

1) Əgər $b(s, \omega) \in \mathbb{R}^m$, $|b(s, \omega)| = 1$ olarsa, onda

$$\left(\int_0^t b(s, \omega) d\mu(s), \mathcal{A}_t \right)$$

Viner prosesidir.

2) Əgər $B(s, \omega)$ bütün (s, ω) -lər üçün $\mathbb{R}^n$ -də unitar operator dursa, onda

$$\left(\int_0^t B(s, \omega) d\mu(s), \mathcal{A}_t \right)$$

Viner prosesidir.

3) $m = 1$, $\alpha(s, \omega)$ – ədədi funksiya və bütün $t > 0$ üçün

$$\int_0^t \alpha^2(s, \omega) ds < \infty, \quad \int_0^\infty \alpha^2(s, \omega) ds = \infty$$

olsun və $t = \int_0^{\tau} \alpha^2(s, \omega) ds$ bərabərliyindən τ , təyin olunsun.

Onda

1062 VİNER

$$\left(\int_0^{\tau_t} \alpha(s, \omega) d\mu(s), \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{\tau_t} \right)$$

Viner prosesidir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975; [2] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

VİNER MEYDANI «винеровское поле; Wiener field» – Viner prosesinin çoxparametrlili analoqu, n – ölçülü

$\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında təyin olunmuş paralelepipedlərdə birincis əsli olmayan artımları heqiqi Qauss meydanıdır. Standart V. m. $W(x) = W(x_1, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ – riyazi gözleməsi $\mathbf{M}W(x) = 0$, korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M}W(x)W(y) = \prod_{i=1}^n b(x_i, y_i)$$

olan Qauss meydanı kimi təyin olunur, burada

$$b(x_i, y_i) = \begin{cases} \min(x_i, y_i), & x_i > 0, y_i > 0 \text{ olduqda;} \\ \min(-x_i, -y_i), & x_i < 0, y_i < 0 \text{ olduqda;} \\ 0, & \text{əgər } x_i, y_i \leq 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

$W(x)$ meydanı $\mathbb{R}^n$ -in ölçülən altçoxtuqlarında $\mathbf{M}\Gamma(dx) = 0$ və

$\mathbf{M}[\Gamma(dx)]^2 = dx$ şərtləri, $x \in \mathbb{R}^n$ üçün $W(x) = \Gamma(A_x^0)$ bərabərliyi ilə təyin olunan Qauss ortoqonal ölçüsü Γ ilə təyin oluna bilinir, burada

$$A_x^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \min(0, x_i) \leq y_i \leq \max(0, x_i), i = 1, \dots, n\}.$$

$W(x)$ V. m. sanki yaqın kəsilməzdir və $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ şərtini

təmin edən bütün x -lər üçün vahid ehtimalla $W(x) = 0$ olur.

$\mathbb{R}^n$ fəzasının $\mathbf{I}^n = [0, 1]^n$ vahidi kubunda $W(x)$ meydanını 1 ehtimalla müntəzəm yığılan sıra kimi ifadə etmək olur, yəni

$$W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \varphi_m(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n,$$

burada $\{\varphi_m(y), y \in \mathbf{I}^n\}$, – $L^2(\mathbf{I}^n)$ Hilbert fəzasında ele funksiyaların ixtiyari tam ortonormalanmış sistemidir ki, bunlar $\mathbf{I}^n$ -də Lebeq ölçüsü üzrə kvadratı ilə integrallanan funksiyalardır, $\{Z_m\}$, – $\mathbf{M}Z_m = 0$ və $\mathbf{M}Z_m^2 = 1$ şərtini ödəyən əsli olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığıdır (bax, [2]). $\{x, W(x), x \in \mathbf{I}^n\}$ V. m.-nin qrafikində demək olar ki, bütün realizasiyaların Hausdorf dim. – ölçüsü $(n + 1/2)$ -ə bərabərdir və $0 < \beta < 1/2$ olduğu hallarda

$$|W(x) - W(y)| \leq Z \|x - y\|^\beta, \quad x, y \in \mathbf{I}^n$$

münasibəti sanki yaqın ödənilir, burada Z – sanki yaqın sonlu müsbət təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [3]).

V. m. təsadüfi funksiyaların müxtəlif modellərinin qurulmasında istifadə olunur. Bu zaman ümumiləşmiş təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsi anlamında anlaşılan $\dot{W}(x) = \partial^n W(x) / \partial x_1 \dots \partial x_n$ törəməsi (bu törəmə çoxparametrlı bəyaz küydür, yəni sabit spektral sıxlığı $f(\lambda) = 1/(2\pi)^n$ -ə bərabər ümumiləşmiş bircins Gauss meydanıdır) və $W(x)$ üzrə stoxastik integrallar mühüm rol oynayır (bax. [4]).

Məs., $MV(x) = 0, x \in I^2$ və

$$MV(x)V(y) = [\min(x_1, y_1) - x_1 y_1] [\min(x_2, y_2) - x_2 y_2]$$

şərtlərlə təyin olunan $V(x), x \in I^2$ Gauss meydanına (B r a u n m ə l ə f ə s i) də adlandırılan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(x) + \frac{1}{1-x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} V(x) + \frac{1}{1-x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} V(x) + \\ + \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} V(x) = \dot{W}(x) \end{aligned}$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli (ümumi mənada) kimi baxmaq olar; bu halda stoxastik differensial tənliyə I^2 kvadratında və I^2 -nin sərhədində sərhəd şərtləri sıfır olduğu hal üçün baxılır.

Əd.: [1] Ч е н ц о в Н. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 4, с. 607-09; [2] Б у л д ы г и н В. В., Сходимость случайных элементов в топологических пространствах, К., 1980; [3] A d l e r R. J., The geometry of random fields, Chichester – [a. o.], 1981; [4] C a i r o - l i R., W a l s h J. B., «Acta math.» 1975, v. 134, № 1-2, p. 111-83.

VİNER ÖLÇÜSÜ « винеровская мера; Wiener measure » – kəsilməz funksiyalar fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbrində *Viner prosesinin* doğruduğu *ehtimal ölçüsüdür*. Ədədi kəsilməz funksiyaların fəzası $C = C[0, 1]$ -də B altçoxluqlarının Borel σ – cəbri

$$\begin{aligned} C(t_1, \dots, t_n; a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \\ = \{x(\cdot) \in C: a_k \leq x(t_k) \leq b_k, k = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

tipli bütün silindrik altçoxluqları özündə saxlayan minimal σ – cəbr kimi təyin olunur.

B -də $V. \hat{\mu}_w$ öz qiymətləri ilə silindrik çoxluqlarda birqimətli təyin olunur (ölçünün davamı haqqında teoremlər uyğun olaraq):

$$\begin{aligned} \mu_w(C(t_1, \dots, t_n; a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)) = \int_{a_1}^{b_1} p(t_1, x_1) dx_1 \times \\ \times \int_{a_2}^{b_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1) dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) dx_n (*) \end{aligned}$$

burada

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}.$$

(*) düsturu $w(t)$ standart Viner prosesinin sonluölçülü paylanmalarını ifadə edir və bu anlamda μ_w ölçüsü $w(t)$ Viner prosesinin doğruduğu ölçü kimi anlaşılar. μ_w ölçüsünün ümumi xassələri $w(t)$ prosesinin trayektoriyalarının xassələri ilə əlaqəlidir. Məs., məlumdur ki, μ_w ölçüsü heç yerdə

differensiallanmayan, lakin kəsilməz funksiyalar fəzası C -də toplanmışdır ($\mu_w(\hat{C}) = 1$).

V. ö. anlayışı Braun hərəkətinin riyazi modelinin öyrənilməsi ilə əlaqədar N. Viner tərəfindən daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] W i e n e r N., «Math. and Phys.» 1923, v. 2, p. 131-74; [2] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER PROSESİ « винеровский процесс; Wiener process » – heqiqiqimətli asılı olmayan artımlı ele bircins $w(t), t \geq 0$ Gauss prosesidir ki,

$$w(0) = 0, M(w(t) - w(s)) = 0,$$

$$D(w(t) - w(s)) = \sigma^2 |t - s|.$$

V. p. birölçülü Braun hərəkətinin riyazi modelidir və o, B r a u n hərəkəti prosesini kimi də adlanır. $\sigma^2 = 1$ olduqda V. p. standart Viner prosesini adlanır. Separabel V. p. vahid ehtimalla kəsilməzdir və aşağıda V. p. mehz kəsilməz standart V. p. kimi anlaşılaçaqdır. Orta qiymətlərinin və artımlarının dispersiyalarının verildiyi hallarda bu proses vahid ehtimalla yeganə kəsilməz asılı olmayan artımlı prosesdir. Kəsilməz heqiqi funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ -in Borel σ – cəbrində ehtimal ölçüsü $w(t), t \in [0, 1]$ V. p.-nin paylanmasıdır və ölçü nəzəriyyəsinə sonsuzölçülü funksional fəzalarda bu ehtimal ölçüsü mühüm rol oynayır və *Viner ölçüsü* adlanır.

V. p. üçün onun xassələrini əks etdirən bir neçə ekvivalent təriflər verilmişdir. Riyazi gözləməsi sıfır və korrelyasion funksiyası $R(s, t) = \min(s, t)$ olan $w(t), t \geq 0$ Gauss təsadüfi prosesi mehz V. p.-dir.

Keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası $p(t, x, y) -$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

parabolik differensial tənliyinin fundamental həlli

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)$$

düsturu ilə verilən bircins Markov prosesi $w(0) = 0, w(t), t \geq 0$ – V. p.-dir.

Əgər $w(0) = 0, w(t), t \geq 0$ təsadüfi prosesi 1 ehtimalla kəsilməz prosesdirsə, $\mathcal{A}_t, t \geq 0$ σ – cəbrlər axını ilə uzlaşmışdırsa və 1 ehtimalla

$$M((w(t) - w(s))^2 | \mathcal{A}_s) = 0$$

$$M((w(t) - w(s))^2 | \mathcal{A}_s) = t - s, s < t$$

münasibətlərini ödəyirsə, onda $w(t)$ V. p.-dir.

V. p. fəza və zaman şkalasının bezi çevilmələrinə görə invariantdır: ixtiyari $\sigma > 0, s \geq 0$ qiymətlərində $\zeta(t) = \sigma w(t/\sigma^2), t \geq 0; \zeta(t) = tw(1/t), t > 0$ və $\zeta(0) = 0; \zeta(t) = w(t+s) - w(s), t \geq 0$ təsadüfi prosesləri V. p.-leridir. V. p. ciddi Markov xassəsinə malikdirsə və 1 ehtimalla $\tau < \infty$ olarsa, onda $\zeta(t) = w(t+\tau) - w(t), t \geq 0$ təsadüfi prosesi $w(t), t \leq \tau$ prosesindən asılı deyildir.

$w(t), t \in [0, T], T > 0$ V. p. konstruktiv olaraq,

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t \varphi_k(u) du$$

sırası şeklinde ifade olunur. Burada $\xi_k, k \geq 1$ – asılı olmayan Gauss təsadüfi kəmiyyətləridir və $M\xi_k = 0, D\xi_k = 1; \varphi_k, k \geq 1$ isə $[0, T]$ parçasında Lebeq ölçüsünə görə kvadratı ilə inteqrallanan bütün həqiqi funksiyaların Hilbert fəzası $L^2[0, T]$ – də ortonormalanmış bazisdir. $w(t)$ –nin ifadəsindəki sıra $[0, T]$ – də 1 ehtimalla müntəzəm yığılır. $[0, \infty)$ zaman yarımxında V. p.-ni konstruktiv şəkildə vermək üçün $\varphi_k, k \geq 1$ əvəzinə, $L^2[0, \infty)$ –də ortonormalanmış bazis götürmək kifayətdir. Bu halda $w(t)$ –nin ifadəsindəki sıra ixtiyari məhdud intervalda 1 ehtimalla müntəzəm yığılır. Xüsusi halda, $w(t), t \in [0, 1]$ V. p.,

$$w(t) = t\xi_0 = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi},$$

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(k+1/2)\pi t}{(k+1/2)\pi}$$

münasibətlərlə ifadə olunur, burada $\xi_k, k \geq 0$ – asılı olmayan Gauss təsadüfi kəmiyyətləridir və $M\xi_k = 0, D\xi_k = 1, k \geq 0$.

V. p.-nin demək olar ki, bütün trayektoriyaları kifayət qədər kiçik ixtiyari intervalda qeyri – məhdud variasiyaya malikdirlər və heç yerdə differensiallanmayandrlar. V. p. üçün

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|w(h)|}{\sqrt{2h \ln \ln h}} = 1 \right\} = 1$$

lokal təkrar loqarifm qanunu və V. p.-ni lokal cəhətdən xarakterizə edən bu qanunun aşağıdakı dəqiqləşmələri doğrudur:

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|w(t+h) - w(t)|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{|w(s+t) - w(s)|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \sqrt{\frac{8 \ln(1/h)}{\pi^2 h}} |w(s+t) - w(s)| = 1 \right\} = 1.$$

Digər tərəfdən

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left| w(k/2^n) - w((k-1)/2^n) \right|^2 = 1$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir.

$t \rightarrow \infty$ olduqda V. p.-nin trayektoriyaları asimptotik olaraq təkrar loqarifm qanunu –

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|w(t)|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1$$

münasibətlə və funksional təkrar loqarifm qanunu ilə ifadə olunur; sonuncu qanuna əsasən

$$\left(\frac{w(nt)}{\sqrt{2n \ln \ln n}}, t \in [0, 1] \right), n \geq 3$$

təsadüfi proseslər ardıcılığı $C(0, 1)$ fəzasında 1 ehtimalla nisbi kompaktdır və bu ardıcılığın limit nöqtələri çoxluğu

$$f(0) = 0, \int_0^1 (f'(t))^2 dt \leq 1$$

şərtlərini ödəyən Lebeq ölçüsü mənada mütləq kəsilməz $f(t), t \in [0, 1]$ funksiyalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

V. p.-nin təbii baxımdan bir çox mühüm funksionallarının paylanma funksiyalarının aşkar analitik ifadələri vardır və bunlardan bəziləri sadə şəkildədir. Məs., $x > 0$ olduqda

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \max_{0 \leq s \leq t} w(s) \leq x \} &= 1 - 2\mathbf{P} \{ w(t) > x \} = \\ &= (2/\sqrt{2\pi t}) \int_0^x e^{-u^2/2t} du. \end{aligned}$$

$x > 0$ səviyyəsini ilk aşma müddəti τ_x -in paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_x(s) = \left(x/\sqrt{2\pi s^3} \right) e^{-x^2/2s}, s > 0$$

kimi ifadə olunur. $[0, t]$ intervalında V. p.-nin maksimum nöqtəsi τ ilə (maksimum 1 ehtimalla yeganədir) prosesin maksimumu $\max_{0 \leq s \leq t} w(s)$ -in birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(s, x) = (x/\pi s \sqrt{s(t-s)}) e^{-x^2/2s}, 0 \leq s \leq t, 0 \leq x < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur. τ -nın özü isə arksinus qanunu ilə paylanır:

$$\mathbf{P} \{ \tau < s \} = 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{s/t}, 0 \leq s \leq t.$$

V. p.-nin müsbət yarımxda olma müddəti də arksinus qanunu ilə paylanır.

Yuxarıdakı münasibətlərə əsaslanaraq belə nəticə alınır ki, ixtiyari bir x nöqtəsindən çıxan V. p.-nin trayektoriyası olduqca kiçik zaman ərzində 1 ehtimalla x səviyyəsini sonsuz dəfə ilkin vəziyyətinə qayıdaraq aşır: bütün x -lər üçün 1 ehtimalla $\tau_x < \infty$ olur, yeni t müddətində V. p. bütün nöqtələrdə olur; qeyd olunmuş zaman intervalı $[0, t]$ –də bu trayektoriya $s=0$ və $s=t$ nöqtələrinin yaxınlığında ekstremal qiymətlər almağa meyilli olur.

V. p.-nin bircins Markov prosesi kimi invariant ölçüsü $\mathbf{Q}(dx)$ vardır:

$$\mathbf{Q}(A) = \int \mathbf{Q}(dx) \mathbf{P}(t, x, A)$$

[$p(t, x, A)$ – keçid ehtimalı funksiyasıdır], bu ölçü adəd oxunda Lebeq ölçüsü ilə üst-üstə düşür: $Q(dx) = dx \cdot V$. p.-nin $[0, T]$ müddətində A çoxluğunda olması müddət $T(A)$ -nin ergodik xassəsi ondan ibarətdir ki, $T \rightarrow \infty$ olduqda

$$T(A_1)/T(A_2) \rightarrow Q(A_1)/Q(A_2)$$

münasibəti ixtiyari məhdud A_1 və A_2 Borel çoxluqları üçün 1 ehtimalla ödənilir ($Q(A_2) > 0$).

Braun hərəkəti prosesinə ilk dəfə L. Başelye [1]-də baxmışdır. Bu prosesin ciddi riyazi qurulması və onun trayektoriyalarının xassələrinin öyrənilməsi N. Viner tərəfindən [2]-də aparılmışdır. m – ölçülü V. p. və birölçülü V. p. haqqında ətraflı məlumat [3] – [8]-də verilmişdir. Hilbert – qiymətli V. p.-ləri nəzəriyyəsi işlənmişdir (bax, [9]). Vektor parametrləri üçün V. p.-nin analoqu P. Lévi (P. Lévy) və N. N. Çentsov tərəfindən daxil olunmuş təsadüfi meydanlardır (bax, *Viner meydanı*).

Əd.: [1] Bachelier L., «Ann. Sci. Écol. Norm. supér.», 1900, № 17, p. 21–86; [2] Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1923, № 2, p. 131–74; [3] Левин П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [4] Дуб Дж. Д., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [5] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [6] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [7] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [8] Csörgö M., Révész P., Strong Approximations in Probability and Statistics, Bdpst, 1981; [9] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [10] Розанов Ю. А., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, с. 698–700.

VİNER PROSESİ ani əksölünən «винеровский процесс с мгновенным отражением; Wiener process with instantaneous reflection about zero» – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

VİNER PROSESİ çər «винеровский процесс косо́й; skew Brownian motion» – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

VİNER PROSESİ çoxölçülü «винеровский процесс многомерный; multivariate Wiener process» – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

VİNER PROSESİ çoxparametrlili «винеровский процесс многопараметрический; multi-parameter Wiener process» – bax, *Viner vərəqi*.

VİNER PROSESİ; ekskursiya «винеровский процесс; экскурсия; Wiener process; excursion» – bax, *Ekskursiya(sı) Viner prosesinin*.

VİNER PROSESİ; ergodik teoremlər «винеровский процесс; эргодические теоремы; Wiener process; ergodic theorems» – bax, *Ergodik teoremlər Viner prosesləri üçün*.

VİNER PROSESİ kəsilməzlik modulu «винеровский процесс; модуль непрерывности; Wiener process; modulus of continuity» – standart *Viner prosesi* $w(t)$ -nin ossilyasiyalarını xarakterizə edən

$$\omega(h) = \sup \{ |w(t+s) - w(t)| : 0 \leq t, t+s \leq 1, |s| < h \}$$

kəmiyyətidir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} w(h) = 0$$

münasibəti sanki yaqın ödənilir, belə ki, $w(t)$ -nin trayektoriyaları kəsilməz funksiyalardır. Dəqiq yığılma sürəti Lévi teoremi ilə verilir: $l(h) = (2h |\ln h|)^{1/2}$ olduqda

$$\limsup_{h \rightarrow 0} w(h)/l(h) = 1$$

münasibəti sanki yaqın ödənilir (bax, *Təkrar loqarifm qanunu Viner prosesi üçün*). Deməli, $w(t)$ prosesinin trayektoriyaları $\alpha < 1/2$ olduqda Lipşits şərtini sanki yaqın ödəyir, $\alpha \geq 1/2$ olduqda bu şərti ödəmir. Trayektoriyaların qeyri-regularlığı aşağıdakı mənada müntəzəmdir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{|\ln h|}{l(h)} |w(t+s) - w(t)| = \frac{\pi}{4} \quad \text{sanki yaqın.}$$

$\omega(h)$ -in paylanması üçün aşağıdakı qiymətləndirmə faydalıdır:

$$P \{ \omega(h) > x \} \leq 20 x h^{-3/2} \exp(-x^2/2h).$$

Əd.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [2] Csörgö M., Révész P., «Stoch. Proc. Appl.», 1978, v. 8, № 2, p. 119–29; [3] Révész P., «Ann. Probab.», 1982, v. 10, № 3, p. 613–22.

VİNER PROSESİ Li qrupunda «винеровский процесс на группе Ли; Wiener process on a Lie group» – qiymətləri birəlaqəli G Li qrupunun çoxobrazlısından olan, zaman üzrə biricins *Markov prosesidir*; onun bütün trayektoriyaları sanki kəsilməzdir, Γ G -də Borel çoxluğudur və $g \in G$ olduqda keçid ehtimalı $P(t, g, \Gamma)$ aşağıdakı şərtlərdən birini ödəyir: ixtiyari $h \in G$ üçün ya $P(t, hg, h\Gamma) = P(t, g, \Gamma)$ (G -də solinvariant V. p.), yaxud $P(t, gh, \Gamma h) = P(t, g, \Gamma)$ (G -də sağinvariant V. p.). Li qrupunda V. p. $w(t, \omega)$

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P(t, g, G \setminus U_g) = 0$$

tip Lindeberq şərtini ödəyir, burada U_g – g -nin ($g \in G$) açıq ətrafıdır. Əgər $g^1, \dots, g^n$ və $h^1, \dots, h^n$ G -dən olan g və h -in uyğun lokal koordinatlarıdır, onda G -də $g, h \in U$ açıq çoxluğu üçün aşağıdakı limitlər vardır:

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_U (h^i - g^i) P(t, g, dh) = a^i(g),$$

və

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_U (h^i - g^i)(h^j - g^j) P(t, g, dh) = b^{ij}(g).$$

Əgər $G^* \subset G$ Li qrupunun birəlaqəli örtən Li qrupudursa, $\varphi: G^* \rightarrow G$ təbii homomorfizmdir, onda

$$\tilde{w}^*(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} [w(s, \omega), 0 \leq s \leq t]^*,$$

burada bərabərliyin sağ tərəfi G^* -nin $[w(s, \omega), 0 \leq s \leq t]$ trayektoriyası ilə ifadə olunan elementidir (w qeyd olunmuşdur). Li qrupunda V. p. $w(t, \omega)$, $[w(0, \omega) = e]$ G^* Li qrupunda V. p.-dir. Əksinə, əgər $w^*(t, \omega) w^*(0, \omega) = e^*$ şərti ilə G^* -da V. p.-dirsə, onda $w(t, \omega) = \varphi[w^*(t, \omega)]$ G Li qrupunda V. p.-dir.

$P(t, x, \Gamma)$ və $P^*(t, x^*, \Gamma^*)$ keçid ehtimalları $P(t, \varphi(x^*), \Gamma) = P^*(t, x^*, \varphi^{-1}(\Gamma))$ münasibətilə əlaqədirlər, G və G^* -da sol- (uyğun olaraq, sağ-) invariant Haar ölçülərinə nəzərən mütləq kəsilməzdir və uyğun ehtimal sıxlıqları üçün

$$p(t, x, y) = \sum_{\alpha_n} p^*(t, \varphi^{-1}(x), \alpha_n y^*)$$

düsturu doğrudur, burada $N = \{a_1, a_2, \dots\}$, $-G (G^*/N \cong G)$ qrupunun diskret komponentlər qrupudur və sağ tərəf proobrazın seçilməsindən asılı deyildir.

Əd.: [1] Itô K., «Proc. Jap. Acad.», 1950, v. 26, № 8, p. 4-10; [2] Itô K., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1952, № 1, p. 40-48.

VİNER PROSESİ; maksimum və minimumun paylanması «винеровский процесс; распределение максимума и минимума; Wiener process; distribution of maximum and minimum» — $w(t)$, $t \geq 0$ standart Viner prosesi üçün

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} w(s) \text{ və } m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} w(s)$$

tesadüfi kəmiyyətləri ikimisilli (əksolunan) normal qanunla —

$$P\{M(t) > x\} = P\{-m(t) > x\} = 2P\{w(t) > x\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty e^{-y^2/2t} dy, \quad x \geq 0$$

qanunu ilə paylanır. İxtiyari A Borel çoxluğu üçün Viner prosesi, prosesin maksimumu və minimumunun birgə paylanması

$$P\{m(t) > a, M(t) < b, w(t) \in A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_A [\exp\{-(x+2k(b-a))^2/2t\} - \exp\{-(x-2a+2k(b-a))^2/2t\}] dx$$

düsturu ilə təyin olunur.

Xüsusi halda,

$$P\{M(t) < b, w(t) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{x-2b}^x e^{-y^2/2t} dy, \\ P\{m(t) > -b, M(t) < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_{-b}^b \exp\{-(y-2kb)^2/2t\} dy = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\{-\pi^2(2k+1)^2 t/(8b)^2\}.$$

1066 VİNER

Aparılı $w_a(t) = w(t) - at$, $a > 0$ V. p.-nin, üstlü paylanması

$$P\{M_a(\infty) > x\} = e^{-2ax}, \quad x > 0$$

düsturu ilə ifadə olunan, sonlu maksimumu $M_a(\infty) = \max_{t \geq 0} w_a(t)$ vardır.

Əd.: [1] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER PROSESİ; prosesin hissəsinin eksessiv funksiyaları «винеровский процесс; эксцессивные функции для его части; Wiener process; excessive functions of its part» — Viner prosesinin vəziyyətlər fəzasının müəyyən oblastından ilk çıxış anında qınılmış V. p. üçün eksessiv funksiyalardır (bax, Markov prosesi; hissəsi). Belə funksiyalar ailesi uyğun oblastda klassik mənada superhamonik, mənfi olmayan bütün funksiyalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür. V. p. üçün eksessiv funksiyalar mənfi olmayan konstantlardır.

Bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N.Y. — [a. o.], 1984.

VİNER PROSESİ sferik «винеровский процесс сферический; spherical Wiener process» — bax, Sferik Viner prosesi.

VİNER PROSESİ standart «винеровский процесс стандартный; standard Wiener process» — bax, Viner prosesi.

VİNER PROSESİ yarımoxda «винеровский процесс в полупрямой; Wiener process in half-line» — $X_t = B_t + M_t$, $t \geq 0$ şəklində semi-martinqaldır, burada B_t — artan prosesdir, $dB_t = I_{(0,\infty)}(X_t)dB_t$, M_t — kəsilməz martinqaldır və $d\langle M \rangle_t = I_{(0,\infty)}(X_t)dt$. X_t özünü standart Viner prosesi kimi aparır. Belə ki, X_t O nöqtəsinə çatdıqda ya bu nöqtədə həmişəlik qalır, ya da ki, sıçrayışla və ya apar təsirini ilə $(0, \infty)$ -a qayıda bilər. O nöqtəsində X_t -nin özünü nə cür aparması Markov halında (bax, [2]) B_t prosesinin öngörül xarakteristikaları terminləri: $\{\rho, c, \pi\}$ toplusu ilə təsvir olunur; $\rho \geq 0$ — zaman müddəti, $c \geq 0$, — apar əmsali, π , — $(0, \infty)$ -da ölçüdür, $\int_{(0,\infty)} u \wedge 1 \pi(du) < \infty$ — sıçrayışların ölçüsüdür.

Məhz X_t ilə uzlaşan (prosesin daxiləki sıfırda keçirdiyi müddət) ele kəsilməz artan φ prosesi vardır ki,

$$I_{(0)}(X_t)dt = \rho d\varphi_t, \quad B_t = c\varphi_t + \sum_{s \leq t} \Delta B_s$$

və B_t prosesinin ΔB_s sıçrayışları ölçüsünün dual öngörül proyeksiyası $d\pi d\varphi$ -yə bərabərdir. $\rho = 0$ halında

$$\int_0^\infty I_{(0)}(X_t)dt = 0.$$

Əgər bu halda $c=1$, $\pi=0$ olarsa, onda X_t sıfırda ani əksolunan (O nöqtəsində) Viner prosesi, O

nöqtəsi əksedici baryer adlanır, X_t -nin paylanması V. p.-nin modulunun paylanması ilə üst-üstə düşür (bax, [2]):

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right).$$

$\rho > 0$, $c=1$, $\pi=0$ halında isə O nöqtəsi ləngidici baryer adlanır. $\rho > 0$, $c=0$, $\pi=0$ halında isə O nöqtəsi uducu baryer adlanır; keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right)$$

düsturu ilə təyin olunur və

$$\mathbf{P}\{X_t > 0\} = 1 - 2 \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$$

$(0, \infty)$ yarımxunda V. p.-nin təbii ümumiləşməsi $\mathbb{R}^1$ -də, sıfırda şəffaf sərhəddli Viner prosesidir (bax, *Stoxastik differensial tənlik* sərhəddli). Ani əksolunan prosese analoji proses çəp Viner prosesidir (bax, [4] $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ halı) ki, bu proses özünü Viner prosesi kimi aparır, 0 nöqtəsində isə $p > 0$ və $1-p$ ehtimalları ilə uyğun olaraq, $(0, \infty)$ və $(-\infty, 0)$ -da əks olunur.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1986; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] Harrison J. M., Shepp L. A., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, p. 309–13.

VİNER PROSESİNİN FUNKSIONALI «винеровского процесса функционал; functional of the Wiener process» – $w(t)$, $t \in [0, T]$ Viner prosesinin doğurduğu $\mathcal{A}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən Y təsadüfi kəmiyyətidir. $w_t = (w_s)$ qiymətləri kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, T]$ -dən olan təsadüfi kəmiyyət olduğundan, $Y = F(w)$, burada F , $-C[0, T]$ -də Borel funksiyasıdır.

V. p. f.-nin stoxastik inteqrallarla ifadəsi.

$L^2(\Omega)$ -dan olan ixtiyari V. p. f.

$$Y = \mathbf{M}Y + \int_0^T \varphi_t dw_t$$

şəklində ifadə olunur, burada inteqral İto menada anlaşılır, φ – antisipativ funksiya olub, $L^2(\Omega \times [0, T])$ sinfində yeganədir (bax, [1], həm də *Mark düsturu*). V. p. f.-nin inteqral ifadələri stoxastik analiz, filtrasiya nəzəriyyəsi və optimal idarəetmədə (bax, [1]) mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Clark J. M. C., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 4, p. 1282–95; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

VİNER SOSİSİ «винеровская сосиска; Wiener sausage» – $\sigma = 1$ parametrlı (yəni korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}W(t)W(s) = \min(t, s)$ olan) $W(t)$ Viner prosesinin traektoriyası $w(t)$, $0 \leq t \leq u$ səth əyrisinin nöqtələrində mərkəz-

ləri yerləşən r radiuslu daireələr toplusu ilə örtülmüş, qalınlığı $2r$, uzunluğu u -ya bərabər müstəvinin nöqtələri y -lərin çoxluğu S_u^r -dir; başqa sözlə,

$$S_u^r = \{y: |y - w(t)| \leq r, \text{ hər hansı bir } t \in [0, u] \text{ üçün}\}.$$

V. s.-nin daha ümumi sinfi $S_u^{K_r}$

$$S_u^{K_r} = \{y: y - w(t) \in K_r, \text{ hər hansı bir } t \in [0, u] \text{ üçün}\}$$

bərabərliyi ilə verilir, burada K_r – «mərkəzi» (K_r -in daxili nöqtəsidir) koordinat başlanğıcında yerləşən $2r$ diametrlı müstəvidə qeyd olunmuş kompakt çoxluqdur. V. s. ilə əlaqədar tədqiqatların böyük hissəsi qeyd olunmuş u və $r \rightarrow 0$ halı və ya qeyd olunmuş r və $u \rightarrow \infty$ halında V. s. orta sahəsinin asimptotikasının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Bu sahədə ilk nəticələr 1933-də A. N. Kolmogorov və M. A. Leontoviç tərəfindən alınmışdır (bax, [1] və ya [2]). Sonrakı nəticələr [3] – [7]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 124–34; [2] Леонтович М. А., Избранные труды. Теоретическая физика, М., 1985, с. 134–42; [3] Chavel I., Feldman E. A., «Comp. Math.», 1986, v. 60, p. 65–84; [4] Dynkin E. B., «Ann. Probab.», 1988, v. 16, p. 1–57; [5] Le Gall J.-F., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, p. 1219–44; [6] Le Gall J.-F., «C. r. Acad. sci., Ser. I», 1987, t. 304, p. 339–42; [7] Le Gall J.-F., «J. Funct. Anal.», 1989.

VİNER VƏRƏQİ «винеровский лист; Wiener sheet», Braun vərəqi, – riyazi gözləməsi sıfır bərabər və korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}W_s W_t = \min(s, t)$ $\min(s_1, t_1) \min(s_2, t_2)$

olan $W = (W_t, t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2)$ Gauss təsadüfi meydanıdır. V. v. kəsilməz modifikasiyaya malikdir (bax, [1]) və ikiölçülü parametrlı Viner prosesinin təbii ümumiləşmiş halıdır.

Çoxparametrlı Viner prosesi analoji təyin olunur. n – parametrlı Viner prosesi riyazi gözləməsi sıfır bərabər və korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M}W_s W_t = \prod_{i=1}^n \min(s_i, t_i)$$

olan sanki yəqin kəsilməz Gauss təsadüfi meydanına deyilir. Çoxparametrlı Viner prosesinin artımları asılı olmayan biricins artımlardır və bu aşağıdakı kimi anlaşılır. $t, h \in \mathbb{R}_+^n$ olduğu fərz

olunur, W -nin $[t, t+h] = \prod_{i=1}^n [t_i, t_i+h_i]$ düzbucaqlısında

artımı

$$W[(t+h)] = \sum_{i=1}^{n+\sum \varepsilon_i} (-1)^{\varepsilon_i} W_{t_1+\varepsilon_1 h_1, \dots, t_n+\varepsilon_n h_n}$$

kəmiyyətidir, burada cəmləmə bütün $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vektorları üzrə aparılır, $\varepsilon_i = 0$ və ya $\varepsilon_i = 1$, $1 \leq i \leq n$. Bu halda W -nin artımları göstərilən şəkilli düzbucaqlılarda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu şərtlə ki, bu düzbucaqlıların ümumi daxili nöqtələri olmamalıdır və $W[(t, t+h)]$ riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası $|h|$ olan normal paylanmaya malikdir, burada

$$t \in \mathbb{R}_+^n \text{ üçün } |t| = \prod_{i=1}^n t_i.$$

n – parametrlı Viner prosesi W -nin ümumiləşmiş törəməsi

$$W_{t_1, \dots, t_n} = \frac{\partial^n W_{t_1, \dots, t_n}}{\partial t_1 \dots \partial t_n}$$

$\mathbb{R}_+^n$ -də Gauss bəyaz küyüdür.

Fərz olunur ki, $s, t \in \mathbb{R}_+^n$, $\delta(s, t) = \lambda([0, s] \Delta [0, t])$, λ – $\mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsüdür; eger $s_i \leq t_i$ olarsa, $s \leq t$, $1 \leq i \leq n$; $n \in \mathbb{R}_+^n$ nöqtəsi qeyd olunmuşdur, $u_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Onda n – parametrik Viner prosesi W -nin sanki bütün trayektoriyaları üçün

$$\lim_{|t| \rightarrow 0, t \leq u} \frac{|W_t|}{\sqrt{2n|t| \ln \ln |t|}} = 1,$$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty, t \geq u} \frac{|W_t|}{\sqrt{2n|t| \ln \ln |t|}} = 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\delta(s, t) \leq \varepsilon, s \leq u, t \leq u} \frac{|W_t - W_s|}{\sqrt{2n\delta(s, t) \ln |u| / \delta(s, t)}} = 1,$$

$$C(u) = \{u\}$$

burada $C(u)$, – u nöqtəsini özündə saxlayan $\{t: W_t = W_u\}$ qapalı çoxluğunun əlaqə komponentidir.

W – qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan n – parametrlı Viner prosesi, yeni $W = (W^1, \dots, W^d)$, W^i – n – parametrlı Viner prosesleridir, müxtəlif i -lər üçün W_i asılı olmayan proseslerdir; $d \geq 1$. Onda ixtiyari $x \in \mathbb{R}^d$ üçün:

əger $d > 2n$ olarsa, onda

$$P \left\{ \lim_{|t| \rightarrow \infty, t \geq (t, \dots, 1)} |W_t| = \infty \right\} = 1;$$

əger $d \leq 2n$ olarsa, onda

$$P \left\{ \lim_{|t| \rightarrow \infty, t \geq (t, \dots, 1)} |W_t - x| = 0 \right\} = 1;$$

əger $d \geq 2n$ olarsa, onda

$$P\{W_t = x, |t| > 0 \text{ şərtini ödəyən hər hansı } t \text{ üçün}\} = 0;$$

əger $d < 2n$ olarsa, onda ixtiyari $u \in \mathbb{R}_+^n$ üçün

$$P\{Mt \geq u: W_t = x\} = 1.$$

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 4, с. 607–09; [2] Grey S., Pruitt W. E., «Ann. Probab.» 1973, v. 1, № 1, p. 138–63; [3] Розанов Ю. А., «Марковские случайные поля», М., 1981; [4] Walsh J. B., «Lect. Notes Math.», 1986, v. 1215, p. 329–491.

VINOQRAD METODU « Винограда метод; Winograd method » – diskret Furiye çevirmesinin effektiv hesablanması algoritmidir, sürətli Furiye çevirməsi algoritmlə

müqayisədə vurma əməlinə əməliyyatın 80% az olmasını tələb edir. Metod $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_k$ uzunluqlu diskret Furiye çevirmesinin hesablanması üçün istifadə olunur, N_l , $l = 1, \dots, k$ – qarşılıqlı sadə ədədlərdir; diskret Furiye çevirmesinin vektor yazılışı – $A = W_N x$ düsturundan W_N ($N \times N$) – matrisinin N_l – nöqtəvi diskret Furiye çevirmələrinin düz hasil – $W_N = W_{N_1} \otimes \dots \otimes W_{N_k}$ ifadəsinə əsaslanır; N_l – nöqtəvi çevirmələrinin hesablanması çoxhədlilər halqasında modul cəbrinin istifadə olunması ilə dairəvi konvolusiyaların hesablanmasına gətirilməsinə əsaslanır.

Əd.: [1] Winograd S., «Math. Comp.», 1978, v. 32, № 141, p. 175–99; [2] Маккеллан Дж., Рэйдер Ч., Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., М., 1983.

VİRİAL AYRILIŞ « виральное разложение; virial expansion » – bax, *Klasterlərə ayrılış metodu*.

VİRTUAL GÖZLƏMƏ MÜDDƏTİ « виртуальное время ожидания; virtual waiting time » – qeyd olunmuş anda daxil olmuş tələbin gözləmə müddətidir və bu müddət qeyd olunmuş ana qədər daxil olmuş tələblərin bütünlüklə xidmət olunmasına qədər keçən zaman intervalına bərabərdir. Puasson giriş axınılı, gözləməli, *təxəttli xidmət sistemi* ifadə edən V. g. m.-ni təsvir edən $\zeta(t)$ prosesi Markov prosesidir. V. g. m.-nin stasionar paylanması Laplas çevirməsi

$$Me^{-s\zeta} = \lambda M\beta[1 - \lambda(1 - Me^{-s\beta})/s]^{-1}$$

Xinçin düsturu ilə təyin olunur, burada λ – giriş axınının parametri, β – xidmət müddətidir,

$$\zeta = \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t).$$

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [2] Гнеденко Б. В., [и др.], Приоритетные системы обслуживания, М., 1973.

VİTALİ SİSTEMİ « Витали система; Vitali system » – bax, *Differensiallanması, sistemin*.

VİTALİ TEOREMİ « Витали теорема; Vitali theorem » – bax, *Ölçülməyən çoxluq*.

VİTALİ – HAN – SAKS TEOREMİ « Витали – Хана – Сакса теорема; Vitali – Hahn – Saks theorem » – bax, *Mütəəq kəsilməzliyi, ölçülərin*.

VLASOV TƏNLİYİ « Власова уравнение; Vlasov equation » – meydanın orta qiymətinin limit yaxınlaşmasında hissəciklərin orta sıxlığının dəyişikliyinə – statistik mexanika dinamik sisteminin doğrurduğu dəyişikliyi təsvir edən tənlikdir. Bu tənlik aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{\partial f_i(q, 0)}{\partial t} = -(p, \text{grad}_q f_i(q, p)) - \left(\text{grad}_p f_i(q, p), \int_{\mathbb{R}^d + \mathbb{R}^d} \text{grad}_q U^0(q - q_1) f_i(q_1, p_1) dq_1 dp_1 \right); (*)$$

burada $f_i(q, p)$, – t anında $(q, p) \in \mathbb{R}^d + \mathbb{R}^d$ nöqtəsində orta sıxlıqdır (və ya, başqa sözlə, birinci korrelyasion funksiyadır), q – hissəciyin koordinatıdır, p – onun impulsudur, $U^0(q)$

– hamar funksiya olduğu fərz olunan qarşılıqlı təsir potensialıdır. V. t.-ni $f_t(q, 0)$ orta sıxlığı üçün Boqolyubov tənliklərindən, dəyişənlərin əvəz olunması, yəni $f_t(q, 0) = f_{\varepsilon^{-1}t}(\varepsilon q, p)$ və U^0 potensialının $U(q) = \varepsilon^v U^0(\varepsilon q)$ ilə əvəz olunması və $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda limitə keçidlə almaq olur. (*) tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyini ehtimal metodları ilə isbat etmək olur. Tətbiqlərdə (*) tənliyinin şəklində dəyişməsi mühümdür; $q \rightarrow 0$ olduqda $U(q) \rightarrow \infty$ xassəli U potensialına tətbiqdə, lakin bu halda riyazi nəzəriyyə az inkişaf etmişdir.

Əd.: [1] Д о б р у ш и н Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1979, т. 13, в. 2, с. 48–58; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., С и н а й Я. Г., С у х о в Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84; [3] Б р а у н W., Н е р р К., «Comm. Math. Phys.», 1977, в. 56, р. 101–13; [4] Н е у н з е р т Н., «Trans. Fl. Dynamics», 1977, в. 18, р. 663–78.

VOLD AYRILIŞI « Вольда разложение; Wold's decomposition » – bax, *Xətti filtr*.

VORONOI MOZAIKASI « Вороного мозаика; Voronoi tessellation » – bax, *Təsadüfi mozaika*.

VURUĞU STATİSTİK QIYMƏTİ, PAYLANMA FUNKSİYASININ « множительная оценка функции распределения; product – limit estimator of a distribution function » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

VURULMA SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « схема перемножения случайных величин; multiplication scheme for random variables » – *təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə sxəminə* analoqdur; bu halda təsadüfi kəmiyyətlərin hasiləri – $S_n = X_1 X_2 \dots X_n$ topları araşdırılır. Bu modelə vurular asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda baxılmışdır (bax, [1] – [3]). T. k. v. s.-də xarakteristik funksiyalar rolunu xarakteristik çevirmələr ifadə edir. T. k. v. s., bu sxəmlə bağlı analitik aparat və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasilə üçün limit teoremləri ədədlərin ehtimali nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 4, с. 788–91; [2] Б а к ш т и с А., «Лит. матем. сб.», 1971, т. 11, № 4, с. 724–44; [3] А б р а м о в В. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1984, с. 12–21; [4] А б р а м о в В. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1986, с. 4–10.



YADDAŞ(1) kodun « память кода; code memory » – bax, *Konvolusion kod*.

YAXIN HİPOTEZLƏR « близкие гипотезы; close hypotheses », yaxınlaşan hipotezler, – statistik hipotezlerin fərqləndirilməsi asimptotik məsələsində hipotezler ardıcılığının xassəsidir, əsas və alternativ hipotezler doğru olduğu halda, müşahidələrin paylanmalarına uyğun ehtimal ölçüləri ardıcılığının (məyayən mənada) yaxınlaşmasından ibarətdir və bu, müşahidələrin qeyri – məhdud artırılması halı üçün nəzərdə tutulur (statistik nəticənin alınma dəqiqliyinin artmasına gətirən digər limitə keçidlərə daha az baxılır).

Y. h.-ə tipik misal *kontinual alternativlərdir*, buna baxmayaraq, kontinual olmayan, lakin yaxınlaşan alternativlər üçün bir çox məzmunlu nəticələr alınmışdır (məs., çoxseçimli məsələlər üçün xi – kvadrat tipli rəng kriterilərinə; bax, [1]).

Əd.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

YAXINLAŞAN HİPOTEZLƏR « сближающиеся гипотезы; close hypotheses » – bax, *Yaxın hipotezler*.

YAXINLIQLAR ANALİZİ « близостей анализ; proximity analysis » – bax, *Çoxölçülü şkalalanma*.

YAXINLIQLAR ÖLÇÜSÜ « близости мера; proximity measure » $\mathfrak{X}$ fəzasında – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər arasında yaxınlığı ölçmə üçün, qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasında istifadə olunan $\rho: \mathfrak{X}^2 \rightarrow [0, \infty]$ funksiyasıdır və ixtiyari $x, y \in \mathfrak{X}$ üçün $\rho(x, x) = 0$ və $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ şərtləri ödənilir. Üçbucaq bərabərsizliyinin

ödənilmədiyi fərz olunur. Y. ö.-ne *Kemeni məsafəsi*nə, $\mathbb{R}^k$ -da Evklid məsafəsinin kvadratını, Spirmen rəng korrelyasiyası əmsalının 1-ə qədər tamamlanmasını misal kimi göstərmək olar. Əgər ρ Y. ö. olarsa, onda $f(\rho)$, $f(0) = 0$ şərtini ödəyən, ixtiyari ciddi artan, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ münasibətini təmin edən funksiya olarsa, $f(\rho)$ Y. ö.-dür. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin konkret fəzalarında Y. ö. əksər hallarda uyğun aksiomların köməyiylə daxil olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Раушенбах Г. В., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 169–203.

***YALIN İZİ** « след гребня; ridge trace » – bax, *Yalvarı reqressiya*.

YALVARI FUNKSIYA « хребтовая функция; ridge function » – $\{z: a < \text{Im} z < b\}$, $a < 0 < b$ zolağında $f(z)$ analitik funksiyasıdır, bu zolaqda $|f(z)| \leq |f(i \text{Im} z)|$ bərabərsizliyini ödəyir. Sonsuzluqda olduqca tez azalan ehtimal

paylanmalarının xarakteristik funksiyaları Y. f.-lar sinfinin özünün altsinfini əmələ gətirir.

Y. f.-lardan çox vaxt sonsuz bölünən paylanmaların ayrılışları haqqında məsələlərin analitik funksiyalar nəzəriyyəsi məsələlərinə reduksiya üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972.

***YALVARI REQRESSIYA** « хребтовая / гребневая перпекссия; ridge regression », ridge reqressiya – $y = F\theta + \varepsilon$ xətti regression eksperimentinin $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrlərinin xətti statistik qiymətidir, burada $y \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$,

$\theta \in \mathbb{R}^p$, $M\varepsilon = 0$, $\text{cov} \varepsilon = W^{-1}$, $\hat{\theta}_\alpha = (M + \alpha A)^{-1} F^T W y$ tiplidir, burada $M = F^T W F$, $\alpha > 0$, A – müsbət müəyyən matrisdir. Bu statistik qiymət meylli statistik qiymətdir, lakin onun kvadratik riski $R_\alpha = M \|\hat{\theta}_\alpha - \theta\|^2$ α -nın $\alpha > 0$ kiçik qiymətlərində Y. r.-nin ən kiçik kvadratlər metodu ilə hesablanmış statistik qiymətindən kiçik olur. Y. r. ən kiçik kvadratlər metodu ilə alınacaq statistik qiymətin hesablanması və statistik xassələrinin yaxşılaşdırılması məqsədilə bu qiymətə süni meyl daxil etmə sxemlərindən ən çox yayılmışdır. Belə uyğun statistik qiymətlər ridge – qiymətlər adlanır.

Y. r., xüsusilə də, $\det M$ kiçik olduğu halda (prediktorların multikollinearlığı halında) məsləhətdir, $\arg \min R_\alpha$ -nı tapmaq üçün $\hat{\theta}_\alpha$, R_α -nın qrafiklərinin qurulmasına əsaslanan evristik qaydalar mövcuddur. R_α -nın funksiyası Φ -i optimallaşdırma planların regression eksperimentin Φ – optimal planına yığılması isbat olunmuşdur, bu da özlüyündə cırlaşmış informasiya matrisli Φ – optimal planların ədədi qurulmasının əsas metodlarından biridir (bax, *Regression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

«Yalın izi»-nin (ridge trace; след гребня) istifadə olunması proseduru ilk dəfə Hörl (Hoerl A. E.) tərəfindən 1962-də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Bu prosedur o vaxt istifadə olunur ki, modelə daxil olan müxtəlif prediktorlar arasında xeyli dərəcədə korrelyasiyalar mövcuddur və bunun nəticəsində də $X'X$ matrisi demək olar ki, cırlaşan olur və parametrlərin statistik qiymətləri isə dayanıqlı qiymətlər olmur. Statistik qiymətlərin işarəsi düzgün olmaya bilər və ya onların qiymətləri fiziki və ya praktiki mülahizələrə görə olan qiymətlərdən olduqca böyük ola bilər (bax, [2]).

Y. r. metodu ən sadə formada aşağıdakı kimidir. Tədqiq olunan regression məsələ «korrelyasiya formada» ifadə olunduğu halda Z müvafiq surətdə mərkəzlənmiş və normalanmış X matrisini ifadə etmiş olsun. Onda bütün mümkün r sayda $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ prediktorlarını özündə saxlayan model üçün $b_z(\theta)$ parametrlərinin statistik qiymətlərini

$$b_z(\theta) = (Z'Z + \theta I_r)^{-1} Z'Y \quad (1)$$

düsturu ilə almaq olur, burada θ – müsbət ədəddir (tətbiqi məsələlərdə bu kəmiyyət $(0, 1)$ intervalında yerləşir). (1)-də Y vektoru korrelyasion deyil, adi formada verilir, $b_z(\theta) = \{b_{1z}(\theta), b_{2z}(\theta), \dots, b_{rz}(\theta)\}$ isə $(r \times 1)$ – vektordur və o, sərbəst həddin qiymətini özündə saxlamır.

Ayandır ki, sərbəst həddə heç bir düzəliş tələb olunmur, çünki (1) tənliyində Y -i $Y - \bar{Y}\mathbf{I}$ ilə əvəz etdikdə ($\mathbf{I} = (1, 1, \dots, 1)$) alınan nəticələrdə dəyişiklik olmur, belə ki, prediktorların «mərkəzlənməsi» $Z\mathbf{1} = \mathbf{0}$ münasibətinin ödənilməsinə təmin edir. Y vektoru korrelyasion formada ifadə olunmadığından, $S_{IT}^{1/2}$ əmsalından istifadə olunmamalıdır, buna görə də, nəticədə $(r+1) \times 1$ dim. – ölçülü $b(\theta) = \{b_0(\theta), b_1(\theta), \dots, b_r(\theta)\}'$ vektorunu almaq üçün aşağıdakı dəyişiklikləri etmək olar :

$$b_j(\theta) = b_{jz}(\theta) / S_{jz}^{1/2}, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

burada

$$S_{jj} = \sum_{i=1}^n (Z_{ji} - \bar{Z}_j)^2 \quad \text{və} \quad b_0(\theta) = \bar{Y} - \sum_{j=1}^r b_j(\theta) \bar{Z}_j.$$

$\theta = 0$ olduqda bu vektorun komponentləri $b_j(0)$ -lar $j = 0, 1, 2, \dots, r$ adi – ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymətlərdir ki, bu (1) tənliyində $\theta = 0$ əvəzləməsi aparılmaqla alınır. (1)-in sağ tərəfindəki $(Z'Z)^{-1}$ vuruğunu ayıraraq ridge-qiymətləndiricisini ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətləndirici $b_z(0) = (Z'Z)^{-1} Z'Y$ ilə, yeni $b_z(\theta) = \{I + \theta(Z'Z)^{-1}\}^{-1} \times b_z(0) = Qb$ ilə ifadə etmək olar, çünki ridge-qiymətləndiricilər ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlərin əmsallarla xətti kombinasiyalarıdır, bunlar isə

$$\{I + \theta(Z'Z)^{-1}\}^{-1}$$

ilə təyin olunur.

Bundan sonra $b_{jz}(\theta)$ və ya $b_j(\theta)$ -nin θ -dan asılılığını $j = 1, 2, \dots, r$ qiymətlərində qrafik şəkildə qurmaq olar. Qrafik əyrisinin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi, adətən, göstərilir. Bu qrafik y alının izi adlanır. Adətən, bu qrafik «korrelyasion» vahidlərlə qurulur (yeni $b_j(\theta)$ kəmiyyətlərindən istifadə olunur), bu o məqsədlə edilir ki, müxtəlif əmsallarn nisbi effektlərini bir-bəşə müqayisə etmək mümkün olsun və ilkin əmsallarn qiymətlərinin müxtəlif X -lər üçün miqyas ölçmələrinin təsirini aradan qaldırmaq mümkün olsun.

Y. r. ona görə də, əlverişli sayılır ki, o, əl praktiki qaydadır ki, bununla xətanın kvadratik ortasının kiçik qiymətini almaq mümkündür. Yalvarı qiymətləndirici üçün kvadratik orta xəta

$$\begin{aligned} MS\mathbf{M}(\theta) &= \mathbf{M}\{b_z(\theta) - \beta_z\}'\{b_z(\theta) - \beta_z\} = \\ &= \mathbf{M}\{Qb - \beta_z\}'\{Qb - \beta_z\} = \\ &= \mathbf{M}\{(b - \beta_z)'Q'Q(b - \beta_z) + \beta_z'(Q - I)'(Q - I)\beta_z\} \end{aligned}$$

şəklində yazıla bilər (bax, [4], səh. 30–32).

Əd.: [1] Hoerl A. E., Kennard R. W., Ridge regression; biased estimation for nonorthogonal problems. *Tecnometrics*, 1970, 12, p. 55–67; [2] Mullet G. M., Way regression coefficients have the

wrong sign. *Journal of Quality Technology*, 1976, 8, p. 121–126; [3] Hoerl A. E., Kennard R. W., *Communication in Statistics*, 1976, A5, p. 77–87; [4] Дрейпер Г., Смит Г., *Прикладной регрессионный анализ*, изд. второе, кн. 2, пер. с англ. М., 1987; [5] Ермаков С. М., Жигляевский А. А., *Математическая теория оптимального эксперимента*, М., 1987; [6] Pazman A., *Foundations of optimum experimental design*, Dordrecht - [a. o.], 1986.

YALVARI STATİSTİK QIYMƏT « гребневая оценка; ridge estimator » – bax, *Aprior informasiyadan istifadə*.

YANQ – MILLS MEYDANI « Янга – Миллса поле; Yang – Mills field » – bax, *Kalibrleme modeli statistik mexanikanın*.

YANLIŞ KORRELYASIYA « ложная корреляция; spurious correlation » – qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərə baxıldıqda yaranan və onlarda təxmini qarşılıqlı əlaqə olduğunu göstərən vəziyyəti ifadə edən termindir. Məs., əgər x_1, x_2, x_3 qarşılıqlı qeyri – korrelyar, orta qiymətləri müsbət və variasiya əmsalları kiçik v_1, v_2, v_3 olan kəmiyyətlədirsə, onda x_1/x_3 və x_2/x_3 arasında korrelyasiya təqribən

$$\rho = v_3 / \sqrt{v_1^2 + v_3^2} \sqrt{v_2^2 + v_3^2} > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur. Deməli, qeyri – korrelyarlıq asılı olma-mazlığı ifadə etmir.

YARDIMÇI STATİSTİKA « вспомогательная статистика; auxiliary statistics » – ələ oxşar statistikadır ki, baxılan paylanmalar ailəsi üçün digər hər hansı biri ilə birgə kafi statistikə əmələ gətirir, belə ki, oxşar statistika birincisinə nəzərən yardımçı statistika olur. «Y. s.» anlayışı R. Fişer tərəfindən seçimdən maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətinə keçdikdə informasiyanın mümkün ola bilən itkisinin qarşısını almaq məqsədilə daxil olunmuşdur (bax, [5]).

R. Fişerin ideyası aşağıdakı misalda şərh olunmuşdur. Baxılan paylanmalar ailəsi $\mathcal{P}$ -nin θ parametrləri $R(\theta - 1, \theta + 1)$ ümumi çoxluğundan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təkrar seçimi ilə doğrulduğı fərz olunur, yeni ξ_i asılı olmayan və $(\theta - 1, \theta + 1)$ -də müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. $X_1 = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $X_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ olduqda, (X_1, X_n) cütü $\mathcal{P}$ üçün kafi statistika, $(X_1 + X_n)/2$ isə maksimal doğruxaoxşarlıq statistik qiymətidir. $X_n - X_1$ isə Y. s.-dir. Fərz olunur ki, ümumi şəkildə $\mathcal{P}$ ailəsinin parametri $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ kimi, kafi statistika isə (T_1, T_2) kimi ifadə olunur. Əgər T_2 komponentinin paylanması yalnız θ_2 -dən asılı olarsa, onda T_2 -yə hər hansı geniş mənada Y. s. kimi baxmaq olar. R. Fişer şərtilik prinsipini aşağıdakı kimi ifadə etmişdir: θ_1 haqqında statistik nəticələrin çıxarılması üçün yalnız T_2 verildiyi halda T_1 komponentinin şərti paylanması bilmək kifayətdir (bax, [1]).

Y. s. nezeriyyəsinin müasir vəziyyəti ilə tanışlıq üçün [2]-yə bax. Y. s.-ya sinonim kimi bəzən «əlavə statistika» termini də istifadə olunur. M. Bartlett (M. Bartlett) «kvazikafi statistika» terminindən istifadə edir və bunu onunla əsaslandırır ki, T_1 -in T_2 -yə nəzərən şərti paylanması nəzərdə tutulur. Lakin bu termin geniş yayılmamışdır.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Buehler R. J., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1982, v. 77, № 379, p. 581-89; [3] Fisher R. A., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1925, v. 22, p. 700-725.

* **YAŞAMA MÜDDƏTİ** « **время жизни; life time** » – bax, *Şəxəsləndirən proses* immiqrasiyalı, *Yaşama müddəti* paylanması.

YAŞAMA MÜDDƏTİ PAYLANMASI « **возраста распределение; age distribution** » – *şəxəsləndirən proses*-də hissəciklərin yaşama müddətinin *paylanması* üçün qəbul edilmiş termdir. $\zeta_t(x)$ – yaşama müddəti x -i aşmayan hissəciklərin t anında sayı olsun; $0 \leq x \leq \infty$. Hissəciklərin yaşama müddətinin empirik paylanması $\zeta_t(x)/\zeta_t(\infty)$ ($\zeta_t(\infty) > 0$) şəxəsləndirən prosesinin çoxalma qanunu üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlərlə $t \rightarrow \infty$ olduqda

$$A(x) = \int_0^x e^{-at} (1 - G(t)) dt \bigg/ \int_0^\infty e^{-at} (1 - G(t)) dt$$

paylanmasına uyğundur, burada α – şəxəsləndirən prosesin yaşama müddətindən asılı *Maltus parametri*, $G(x)$ – hissəciyin ömrünün paylanma funksiyası, $A(x)$ – yaşama müddətinin limit paylanmasıdır.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К, 1983; [2] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3-67.

YAYINMALAR FUNKSİYASI « **уклонений функция; deviation / rat function** » $X \in \mathbb{R}^d$ təsadüfi kəmiyyəti üçün –

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{(\lambda, \alpha) - \ln \psi(\lambda)\} \quad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan funksiyadır, burada $\psi(\lambda) = \mathbb{M}e^{(\lambda, X)}$. Y. f. $A(\lambda) = \ln \psi(\lambda)$ funksiyasının Lejandr çevirməsidir [başqa sözlə, $A(\lambda)$ -ya ikili funksiya qoşma funksiyadır].

Y. f. $[A(\lambda)]$ ilə birlikdə $[\lambda]$ qabarıq funksiyadır. Bu funksiyanın ehtimali mənası

$$\Lambda(\alpha) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n}{n} \in \Delta_{\alpha, \varepsilon} \right\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $S_n = X_1 + \dots + X_n$, X_k , $k = 1, \dots, n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni paylanmaya malikdir, $\Delta_{\alpha, \varepsilon}$ – α nöqtəsini özündə saxlayan və $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda bu nöqtəyə sən dərəcəli daxil edilmiş küblər və ya sferaların ardıcılığıdır. Y. f. S_n cəmlərinin böyük yayınmaları ehtimallının təsvirində və buna yaxın məsələlərdə mühüm rol oynayır.

Birölçülü hal.

$$\lambda_- = \inf \{\lambda: \psi(\lambda) < \infty\}, \quad \lambda_+ = \sup \{\lambda: \psi(\lambda) < \infty\},$$

$$\lambda_- < \lambda_+ \quad (\text{əks halda } \Lambda(\alpha) \equiv 0) \quad \text{olsun.} \quad A(\lambda) = \ln \psi(\lambda)$$

funksiyası $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasında təyin olunmuşdur, bu parçada ciddi qabarıqdır və $\lambda \downarrow \lambda_-$ olduqda, $A(\lambda) \rightarrow A(\lambda_-)$ (uyğun olaraq, $\lambda \uparrow \lambda_+$ olduqda, $A(\lambda) \rightarrow A(\lambda_+)$) münasibəti ödənilir. Buna görə də, ixtiyari α üçün ələ yeganə $\lambda(\alpha) \in [\lambda_-, \lambda_+]$ nöqtəsi vardır ki, bu nöqtədə $\lambda\alpha - A(\lambda)$ funksiyası maksimumunu alır. $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasının daxilində $\lambda(\alpha)$ funksiyası $A'(\lambda) = \alpha$ tənliyini ödəyir, yəni bu funksiya $A'(\lambda)$ -nin tərsidir. $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ funksiyaların $(\alpha_-, \alpha_+) = (A'(\lambda_-), A'(\lambda_+))$ intervalında analitikdir və bu funksiyaların limitləri uyğun olaraq, $\alpha \uparrow \alpha_+$ olduqda, $\Lambda(\alpha_+)$, $\lambda(\alpha_+)$, $\alpha \downarrow \alpha_-$ olduqda isə $\Lambda(\alpha_-)$, $\lambda(\alpha_-)$ olur. $\alpha \in [\alpha_-, \alpha_+]$ olduqda $\lambda\alpha - A(\lambda)$ funksiyası maksimumunu $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasının uclarında alır, belə ki, $\alpha \geq \alpha_+$ olduqda, $\lambda(\alpha) = \lambda_+$; $\alpha \leq \alpha_-$ olduqda, $\lambda(\alpha) = \lambda_-$ olur. α -nın belə qiymətləri üçün, əgər λ_+ sonlu olarsa, onda $\Lambda(\alpha) = \alpha\lambda_+ - A(\lambda_+)$ olur. Əgər $\lambda_+ = \pm\infty$ olarsa, $\alpha > \alpha_+$ və $\alpha < \alpha_-$ olduqda, $\Lambda(\alpha) = +\infty$ olur. $\alpha_- > -\infty$, $\lambda_- = -\infty$ (uyğun olaraq, $\alpha_+ < +\infty$, $\lambda_+ = +\infty$) variantı X -in aşağıdan (yuxarıdan) α_- qiyməti ilə (α_+ ilə) məhdud olduğu hala uyğundur. Bu halda $\Lambda(\alpha_\pm) = \ln \mathbb{P}\{X = \alpha_\pm\}$, odur ki, $\Lambda(\alpha)$ funksiyası $\alpha_\pm$ nöqtəsində, $\mathbb{P}\{X = \alpha_\pm\} > 0$ olduğu halda kəsilmə nöqtəsinə malikdir.

Beləliklə, Y. f. $\Lambda(\alpha)$ bütün həqiqi oxda təyin olunmuşdur, bununla belə $\mathbb{R}^1$ oxu Y. f.-nin requlyar olduğu ən çoxu üç intervala bölünür. Bundan başqa, ixtiyari $\alpha_0 \in (\alpha_-, \alpha_+)$ üçün

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \lambda(t) dt.$$

Əgər $\mathbb{M}X = a$ varsa, onda $\Lambda(a) = 0$ olur və

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^{\alpha} \lambda(t) dt.$$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} r(\mu) d\mu \quad \text{çevirmə düsturu da}$$

doğrudur, burada $r(\mu)$ funksiyası $\lambda(\alpha) = A'(\alpha)$ funksiyasının tərsidir. Bu digər

$$A(\lambda) = \sup_{\alpha} \{\alpha\lambda - \Lambda(\alpha)\}$$

– çevirmə düsturuna və $A(\lambda)$ funksiyasına iqiqat qoşma $A^{**}(\lambda) = \sup_{\alpha} (\lambda\alpha - A^*(\alpha))$ funksiyasının $A(\lambda)$ ilə üst-üstə düşməsinə uyğundur. Beləliklə, $A(\lambda)$ və $\Lambda(\lambda)$ funksiyaların arasında əlaqə onlarla xarakterizə olunur ki, bunların törəmələri $A'(\lambda)$ və $\Lambda'(\lambda)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Əgər $\Lambda_Y(\alpha)$ Y üçün Y. f.-dirsə, onda

$$\Lambda_{a+bX}(\alpha) = \Lambda_X((\alpha - a)/b), \quad \Lambda_{S_n}(\alpha) = n\Lambda_X(\alpha/n). \quad (2)$$

Əgər $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ olarsa [$\psi(\lambda)$ funksiyası $\lambda = 0$ nöqtəsində analitikdir], onda $\lambda(\alpha)$ -nin ayrılışındakı [uyğun olaraq $\Lambda(\alpha)$ -nin] əmsalları X təsadüfi kəmiyyətinin semiinvariantları γ_k -lər vasitəsilə ifadə etmək olur. (2)-yə əsasən, $\mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$ halına baxmaq kifayətdir. $a_k = \gamma_{k+1}/k!$, $a_1 = \gamma_2 = 1$ olduqda

$$A'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k \text{ olduğundan, } \lambda(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \alpha^k \text{ olur, burada}$$

$$l_1 = 1, \quad l_2 = -a_2, \quad l_3 = -a_3 + 2a_2^2, \quad l_4 = -a_4 + 5a_3a_2 - 5a_2^3; \\ L_k = l_{k-1}/k, \quad -k \geq 3 \text{ olduqda Kramer sırasının əmsallarını}$$

əmələ gətirir [$\Lambda(\alpha)$ funksiyasının ayrılış əmsallarını] (bax, [1], [6]).

Y. f. $\Lambda(\alpha)$ və $A(\lambda)$ funksiyası

$$\Lambda(\alpha) + A(\lambda) \geq (\alpha, \lambda)$$

Yunq bərabərsizliyini ödəyirlər.

Bəzi paylanmalar üçün Y. f. aşkar şəkildə tapılır. Standart normal paylanma üçün:

$$A(\lambda) = \lambda^2/2, \quad \lambda(\alpha) = \alpha, \quad \Lambda(\alpha) = \alpha^2/2, \quad \lambda_{\pm} = \pm\infty, \\ \alpha_{\pm} = \pm\infty.$$

Binomial paylanma üçün:

$$\mathbf{P}\{X=1\} = p, \quad \mathbf{P}\{X=-1\} = 1-p,$$

$$A(\lambda) = \ln(pe^{\lambda} + (1-p)e^{-\lambda}),$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1-p)(1+\alpha)}{p(1-\alpha)}, \quad \lambda_{\pm} = \pm\infty, \quad \alpha_{\pm} = \pm 1.$$

(β, μ) parametrləri qamma paylanma üçün:

$$A(\lambda) = -\mu \ln(1-\lambda/\beta), \quad \lambda(\alpha) = \beta - \mu/\alpha$$

$$\Lambda(\alpha) = \mu(\alpha - \mu/\beta) - \ln(\alpha\beta/\mu),$$

$$\lambda_- = -\infty, \quad \lambda_+ = \beta, \quad \alpha_- = 0, \quad \alpha_+ = \infty.$$

μ parametrlili Puasson paylanması üçün:

$$A(\lambda) = -\mu + \mu e^{\lambda}, \quad \lambda(\alpha) = \ln \alpha/\mu, \quad \lambda_{\pm} = \pm\infty,$$

$$\alpha_- = 0, \quad \alpha_+ = \infty.$$

Y. f. təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin böyük yayınmalarının ehtimallarının yalnız loqarifmik (kobud) ifadələrinin deyil, həm də dəqiq asimptotik ifadələrinin alınmasında istifadə olunur.

Əgər $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\alpha = x/n \in (0, \alpha_+)$, $\alpha\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $(\alpha_+ - \alpha)\sqrt{n} \rightarrow \infty$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim \frac{\Lambda'(\alpha)}{\sqrt{2\pi n} \lambda(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)}$$

münasibəti ödənilir (bax, [1]). Bu münasibəti aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim c(\alpha)(\Lambda_{S_n}(x))^{-1/2} e^{-\Lambda_{S_n}(x)}.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, bu münasibət zəif məhdudiyyətlər qoyulduqda və X_k təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olduğu və müxtəlif paylanmalara malik olduqları halda belə ödənilir.

Çoxluğun Ω çoxluğu 0 nöqtəsinin ətrafını daxilində saxlamadığı şərtlə və $\mathbf{M}X_1 = 0$, $x\sqrt{n} \rightarrow \infty$ olduğu halda $\mathbf{P}\{S_n \in x\Omega\}$ ehtimalının təsvir olunmasında

$$H_b = \{\alpha : \Lambda(\alpha) \leq b, \quad b \geq 0\}$$

qabarıq çoxluqlarının sərhədləri olan Γ_b həddüdlü müstəvilər və

$$b_{\Omega_x} = \sup\{b : H_b \cap \Omega_x = \emptyset\} = \inf\{\Lambda(\alpha), \alpha \in \Omega_x\},$$

$$\Omega_x = x\Omega/n$$

kəmiyyəti mühüm rol oynayır.

Məs., əgər $H_{b_{\Omega_x}}$ və Ω_x yeganə $\alpha(\Omega_x)$ nöqtəsində bir-birinə toxunarsa və bütün istiqamətlər üzrə bu toxunma ikinci tərtiblə olarsa (yayınmanın tertibi r^2 -na bərabərdir, r toxunan müstəvidə $\alpha(\Omega_x)$ -dən olan məsafədir), onda bəzi çox da məhdud olmayan şərtlərlə (bax, [4])

$$\mathbf{P}\{S_n \in x\Omega\} \sim \frac{c(\alpha(\Omega_x))}{\sqrt{n\Lambda(\alpha(\Omega_x))}} e^{-n\Lambda(\alpha(\Omega_x))}$$

münasibəti ödənilir.

Y. f. təsadüfi dolaşmalar üçün sərhəd məsələlərində böyük yayınmaların təsvirində, invariantlıq prinsipində böyük yayınmaların təsvirində və digər yaxın problemlərdə (bax, [3]) təyinedici rol oynayır. Y. f., sonsuz halda belə, böyük yayınmaların ehtimallarının kobud asimptotikasını (loqarifmik) təsvir etməyə imkan verir.

Y. f. anlayışı (əsas xassələrinin saxlanılması ilə) qiymətləri ixtiyari topoloji vektor fəzası V -dən olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün də təyin olunmuşdur, bu halda

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda \in V^*} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda) \}, \quad A(\lambda) = \ln \mathbf{M} e^{\langle \lambda, X \rangle},$$

burada V^* , $-V$ -yə qoşma olan xətti kəsilməz funksionallar fəzasıdır və bu funksionallar $\langle \lambda, \alpha \rangle$ kimi işarə olunmuşdur. Bu fəzada Y.f.-nin rolu

$$\Lambda(\alpha) = - \inf_{U \in C(\alpha)} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{n} \in U \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{n} \in U \right\} = - \inf_{\alpha \in U} \Lambda(\alpha) \end{array} \right\} \quad (3)$$

münasibətilə izah olunur, burada $C(\alpha)$, $-\alpha$ -ni özündə saxlayan açıq qabarıq çoxluqların toplusudur. Bu hökmələr V fəzasının lokal qabarıq X -in paylanması V -də sıx U çoxluğunun isə (3) düsturunda açıq və qabarıq olduğu halda da doğrudur (bax, [5]).

Böyük yayınmalar haqqında əsas «kobud» teoremlər (bax, [5], [7], [8]) aşağıdakı ümumi sxemlə ifadə olunur. X_n - qiymətləri V fəzasından olan təsadüfi elementlər ardıcılığı olsun. V və V^* çoxluqlarının ehtimal uyğun $\mathfrak{M}$ və $\mathfrak{M}^*$ sinifləri vardır ki, aşağıdakı iki münasibət ekvivalentdir:

- I. $\lambda \in \mathbf{M}^*$ üçün $\ln \mathbf{M} \exp(\gamma(n)\langle \lambda, X_n \rangle) \sim \gamma(n) \Lambda(\lambda)$
 II. $\Omega \in \mathbf{M}$ üçün $\ln \mathbf{P}\{X_n \in \Omega\} \sim -\gamma(n) \inf_{\alpha \in \Omega} \Lambda(\alpha)$.

burada $\gamma_n, -\infty$ -a yaxınlaşan hər hansı ədədi ardıcılıqdır. Bu böyük yayınmalar nəzəriyyəsində özünəməxsus ikilik prinsipidir (qəbərliq analizdə ikilik prinsipilə sıx bağlı), burada əvvəldə olduğu kimi

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda) \}, \quad A(\lambda) = \sup_{\alpha} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - \Lambda(\alpha) \}$$

münasibətləri doğrudur.

Markov proseslərinin böyük yayınmaları (1) düsturu ilə ifadə olunan təsir funksionalı vasitəsilə verilir ki, bu halda $\psi(\lambda)$ keçid ehtimalının Laplas çevirməsi (momentlərin doğuran funksiyası) ilə əvəz olunur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [2] Боровков А. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 2, с. 253–89, 1964, т. 5, № 4, с. 750–67; [4] Боровков А. А., Рогозин Б. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69; [5] Боровков А. А., Могульскый А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004, т. 21, № 5, с. 12–16; [6] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [7] Вентцель А. Д., «Теория вероят. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 235–52; [8] Donsker M. D., Varadhan S. R. S., «Comm. Pure. Appl. Math.», 1976, v. 29, № 4, p. 389–461.

YEGANƏLİK TEOREMİ xarakteristik funksiyalar üçün «единственности теорема для характеристических функций; uniqueness theorem for characteristic functions» – təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası öz xarakteristik funksiyası ilə birqiyəmetli təyin olunur, yəni əgər $F_1(x)$ və $F_2(x)$ paylanma funksiyaları, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ bu paylanmaların uyğun xarakteristik funksiyalandırsa və bütün $z \in \mathbb{R}^1$ qiymətlərində $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$ olarsa, onda $F_1(x) \equiv F_2(x)$. Y. t.-nə əsasən paylanma funksiyaları və xarakteristik funksiyalar arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiyəmetlidir.

Daha ümumi təbiətli fəzalarda verilmiş paylanma funksiyaları və xarakteristik funksiyalar arasında da bu xassə analoji ödənilir.

YENİLƏŞDİRƏN PROSES «обновляющий процесс; innovation process» – bax, *Təsadüfi proses*; *kanonik ifadə*.

YENİLƏŞDİRİCİ HADİSƏ «обновляющее событие; renovating event» – *təsadüfi prosesin* $(n-\tau, n)$, $\tau \geq 0$ intervalı müddətində trayektoriyalarına aid elementar nəticələrinin ehtimal çoxluğu ki, prosesin bu çoxluğa daxil olan trayektoriyası $m > n$ anlarında prosesin $m \leq n-\tau$ anlarındakı trayektoriyalarından qismən asılı olmur. $\{v_n\}$ qiymətləri ixtiyari ölçülən fəzadan olan ehtimal ardıcılığıdır ki, bu ardıcılıq ilkin v_1 təsadüfi kəmiyyəti və $v_{n+1} = f(v_n, u_n)$, $n \geq 1$ rekurrent münasibətlərlə təyin olunur, burada $\{u_n\}$ – verilmiş təsadüfi ardıcılıq, f – ölçülən funksiyadır. $\mathcal{F}_n$ $v_1, u_1, u_2, \dots, u_n$, $n \geq 1$ təsadüfi

kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr, $\tau \geq 0$ qeyd olunmuş ədəd olsun. Əgər $v_{n+1}(\omega)$, $v_{n+2}(\omega)$, ... təsadüfi kəmiyyətləri $\omega \in \mathcal{A}_n$ olduqda

$$v_{n+j}(\omega) = \varphi_j(u_{n-\tau}(\omega), \dots, u_{n+j-1}(\omega))$$

şəklində ifadə olunarsa, $n \geq \max(1, \tau)$ olduqda $\mathcal{A}_n \in \mathcal{F}_n$ hadisəsi $(n-\tau, n)$ intervalında yeniləşdirici hadisə adlanır, burada φ_j funksiyası yalnız $\tau+j$ arqumentlərinin sayından və $\{\mathcal{A}_n\}$ hadisələr ardıcılığından asılıdır.

v_n -in ixtiyari qeyd olunmuş nöqtədə olması (əgər u_n -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bu *regenerasiya*dır) $\tau=0$ qiymətində Y. h.-dir. $n \rightarrow \infty$ olduqda $\{v_{n+k}; k \geq 0\}$ ardıcılığının hər hansı $\{\omega_k; k \geq 0\}$ stasionar ardıcılığına yığılma şərtlərini təyin etmək və yığılma sürətinin qiymətlərini tapmaq $\{u_n\}$ idarəedici ardıcılığının kiçik dəyişikliklərində $\{\omega_k; k \geq 0\}$ ardıcılığının (və ya $\{v_n\}$ ardıcılığının) dayanıqlılıq şərtlərini araşdırmaq və dayanıqlılıq üçün qiymətlər almaq kimi məsələlərin həllində Y. h. anlayışından istifadə olunur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Калашников В. В., Изв. АН СССР Сер. Техническая кибернетика, 1979, № 5, с. 85–89.

YENİLƏŞDİRİCİ KOMPONENTLƏR «обновляющие компоненты; innovation components» – bax, *Təsadüfi proses*; *kanonik ifadə*.

JENSEN BƏRABƏRSİZLİYİ «Йенсена неравенство; Jensen's inequality» ehtimal nəzəriyyəsinə – təsadüfi kəmiyyətin qəbərliq funksiyasının riyazi gözləməsi üçün bərabərsizlikdir. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyət, $g(x)$ qəbərliq Borel funksiyası, $\mathbf{M}g(\xi) < \infty$ olarsa, onda

$$g(\mathbf{M}\xi) \leq \mathbf{M}g(\xi)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Xüsusi halda, $g(x) = x^2$ olarsa, onda

$$(\mathbf{M}\xi)^2 \leq \mathbf{M}\xi^2$$

olur; əgər $g(x) = |x|^r$ ($x \geq 1$) olarsa, $|\mathbf{M}\xi|^r \leq \mathbf{M}|\xi|^r$ olur.

Bu bərabərsizliyi inteqrallar üçün I. Yensen [1]-də isbat etmişdir.

Əd.: [1] Jensen J. L. W., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 175–93; [2] H o l d e r O., «Nachr. Ges. Wiss. Gott.», 1889, S. 38–47; [3] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] П а р т а с а р а т и К., Введение в теорию вероятностей и теории меры, пер. с англ., 1983; [5] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

***YERDƏYİŞƏN HADİSƏ** «перестановочное событие; permutational event» – $\mathcal{A}_n$ ($\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}$) ehtimal fəzasında verilmiş $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının ilk n sayda $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu

σ – cəbr, $\mathcal{F}_{n,\infty}$ $\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin

doğurduğu σ – cəbr, $\mathcal{A}_{1,\infty} \bigcap_{k=1}^N B_k \subset \mathcal{A}_{N,N}$ hadisələri ilə

doğurulmuş σ – cəbr olarsa ($B_k \in \mathcal{B}_k$ ədəd oxunda Borel çoxluqlarıdır), onda əgər $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) \in A$ hadisəsi $(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1, x_{n+1}, \dots) \in A$ hadisəsini doğursasa, $A \in \mathcal{B}_{\infty}$ hadisəsinə deyilir. Qalıq hadisələr Y , h.-dir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Курс теории вероятностей, М., 1972; [2] Лоев М., Теория вероятностей, М., 1962.

YERDƏYİŞMƏ (s) / PERMUTASİON(u) sonlu çoxluğun elementlərinin « перестановка элементов конечного множества; permutation of elements of a finite set » – $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ çoxluğunun elementlərinin yerdəyişməsi – X_n -in bütün elementlərindən ibarət tamamilə nizamlanmış çoxluqdur. n ədədi Y -nin tərtib-i adlanır. n tərtib Y -lərin sayı $n!$ -a bərabərdir. Adətən, X_n kimi $\{1, 2, \dots, n\}$ çoxluğu götürülür. $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ $\{1, 2, \dots, n\}$ ədədlərinin Y olsun. σ -nin mühüm xarakteristikalarından biri onun signaturu $q = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ çoxluğudur, burada $q_i = \text{sign}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Verilən signaturlu Y -lərin sayı hesablanmışdır (bax, [4]). Məs., əgər C_n signaturu $q = (1, -1, 1, -1, \dots)$ olan n tərtib Y -lərin sayı, $A(r, s)$ hər birinin signaturunda yalnız r sayda 1 və $s = n-1-r$ sayda -1 olan Y -lərin sayı olarsa, onda

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n = \lg x + \sec x - 1 - x,$$

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} A(r, s) \frac{x^r y^s}{(r+s+1)!} = \frac{e^x - e^y}{xe^y - ye^x}$$

bərabərlikləri doğrudur. $r+1$ və $s+1$ kəmiyyətləri uyğun olaraq Y -nin artma və azalma ədədi adlanır.

Əgər $i < j$ və $\sigma_j < \sigma_i$ olarsa, σ_i və σ_j elementləri cütlü inversiya əmələ getirir. $B_n(k)$ k inversiyalı n tərtib Y -lərin sayı olsun. $B_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, C_n^2$ ardıcılığının doğuran funksiyası

$$\sum_{n=0}^{C_n^2} B_n(k) x^k = (1-x)^{-n} \prod_{j=0}^n (1-x^j)$$

düsturu ilə təyin olunur. Hər bir σ yerdəyişməsinə $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ inversiyalar cədvəlini qarşı qoymaq olar, burada b_j – σ -dakı j -dən böyük və j -dən solda yerləşən elementlərin sayıdır. Inversiyalar cədvəli uyğun Y -ni yegana surətdə təyin edir. $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ vektoru σ -nin ranqlar vektoru adlanır, burada $r_j = b_j + 1$. Signaturun xassələri, inversiyalar cədvəlləri (və ranqlar vektorunun) bir çox statistik kriterilərin, o cümlədən, Uilkokson kriterisi, median kriterisi, yerdəyişmələr kriterisi kimi kriterilərin, həm də növlərə ayırma və axtarışın müxtəlif alqoritmlərinin qurulmasında istifadə olunur. n tərtib Y -ə n sayda müxtəlif hissəciyin n müxtəlif oyuqlarda yerləşməsi (bütün oyuqların dolu olması halı) kimi baxmaq olar. Belə interpretasiya təbii olaraq Y anlayışını X_n -in elementləri

arasında bir-birindən fərqlənməyən elementlər olduğu hal üçün də ifadə etməyə imkan verir (bax, [1]).

Əd.: [1] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 1–3, М., 1976–78; [2] Рнордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., 1963; [3] Сачков В. Н., Введение в комбинаторные методы дискретной математики, М., 1982; [4] Carlitz L., «Math. Nachr.», 1973, Bd 58, H. 1/6, S. 31–53.

YERDƏYİŞMƏ / PERMUTASİON təsadüfi « перестановка случайная; random permutation » – bax, *Təsadüfi yerdəyişmə / permutasion*.

YERDƏYİŞMƏLƏR KRİTERİSİ « перестановок критерий; permutation test » – bax, *Randomizasiya(s)* kriterilərin, kriterilərin yerdəyişmələrinin.

YERİNİDƏYİŞDİRMƏ PARAMETRİ « сдвига параметр; location / shift parameter » – $F_a(x)$,

$a \in A \subset \mathbb{R}^k$, $x \in X \subset \mathbb{R}^k$ funksiyalar ailəsinin aşağıdakı şərti ödəyən parametridir: ixtiyari $a \in A$, $x \in X$ üçün $F_a(x) = F_0(x-a)$ bərabərliyi ödənilir. Əgər $\mathbb{R}^k$ -da paylanma funksiyası ilə verilən paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan paylanma tipli olarsa, onda $F(x) = F_0((x-a)/b)$ olur. Burada a Y , p., $b > 0$ miqyas parametridir.

YERİNİDƏYİŞDİRMƏ PARAMETRİ; statistik qiymət « сдвига параметр; оценка; estimator of a location parameter » – θ parametrinin

$$x_j = \theta + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (*)$$

şəklində müşahidələr əsasında alınan statistik qiymətdir. ε_j – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. θ parametrinə heqiqi ədədlərin additiv qrupunun elementi kimi baxmaq mümkün olduğundan, çox vaxt onun *ekvivariant statistik qiymətlərindən* istifadə olunur. Bu statistik qiymətlər arasında *Pitmen statistik qiyməti* ən yaxşısı hesab olunur.

(*) sxemi münasib nəzəri modeldir. Bu sxemlə adaptiv, robust, müəyyən qədər qeyri – parametrik və digər tip qiymətləndirilmələrin bir sıra nəticələri əlaqəlidir. Y , p.-nin statistik qiymətlərinin xassələri ilə paylanmaların xarakterizasiyasının bir sıra məsələlərinə baxılmışdır. Məs., əgər seçimi orta Y , p.-nin məqbul statistik qiyməti olarsa, onda (*)-dakı x_j təsadüfi kəmiyyətləri normal qanunla paylanır.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984.

YERİNİDƏYİŞMİŞ EKSURSİYA « сдвинутая экскурсия; shifted excursion » – bax, *Ekskursiya(s)* Markov prosesinin.

YERLƏŞMƏ / ARANJEMAN « размещение; arrangement / permutation with repetition », təkrarlanan elementləri m həcmli nizamlanmış seçim, təkrarlanan elementləri yerləşmə (aranjeman), – n elementli $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ çoxluğunun elementlərindən təşkil olunmuş

$\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{i_m}\}$ ardıcılığıdır. Əgər $\bar{a}$ -nın bütün elementləri müxtəlif olarsa, onda $\bar{a}$ təkrarsız aranjeman adlanır. Y -ni $1, 2, \dots, m$ ədədləri ilə işarələnmiş hissəciklərin $\{1, 2, \dots, n\}$ (və ya $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) işarələri oyuqlarda Y kimi interpretasiya etmək olar. Belə interpretasiya $\bar{a}$ Y -ni $Z_m = \{1, 2, \dots, m\}$ çoxluğunun $Z_n = \{1, \dots, n\}$ çoxluğuna φ inikası ilə eyniləşdirməyə imkan yaradır və bu halda $\varphi(k) = i_k$.

Bütün Y -lər çoxluğunu müxtəlif üsullarla baxılan oyuqlar və (və ya) hissəciklərin müxtəlif və ya fərqlənməyən obyektlər olmasından asılı olaraq ekvivalent Y -lər siniflərinə ayırmaq olar. Bu halda iki Y -dən biri digərindən müxtəlif olmayan hissəciklərin və (və ya) oyuqların yenidən uyğun nömrələnməsindən sonra alına bilinirsə, belə Y -lərə ekvivalent Y -lər deyilir.

Təkrarsız (elementləri müxtəlif) Y halında (bu o hala uyğun olur ki, hər bir oyuqda yalnız bir hissəcikdən artıq olmamaqla, yeni hər bir oyuqda hissəciklərin sayı birdən artıq olmamaqla hissəcik yerləşə bilər) ən maraqlı doğuran Y -lər aşağıdakılardır.

1) Müxtəlif hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda yerləşməsi. Bu halda hər bir ekvivalentlik sinfi yalnız bir elementdən ibarətdir və belə siniflərin sayı

$$A_n^m = (n)_m = n(n-1) \dots (n-m+1), \quad m \leq n$$

olur. $n = m$ olduqda belə Y -lər (aranjemanlar) n -elementli çoxluğun *yerdəyişmələri* (permutasyonlar) olur.

2) Fərqlənməyən hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y . Bu halda bütün $k \in Z_m$ üçün, əgər Z_m -in elementlərinin yerdəyişməsi σ üçün φ və ψ Y -ləri varsa ki, $\varphi(\sigma(k)) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənilsin, onda φ və ψ ekvivalent Y -lər adlanır. Ekvivalentlik siniflərinin sayı $n! / m!(n-m)!$ düsturu ilə təyin olunur, hər bir ekvivalentlik sinfi n elementdən m elementli təkrarsız birləşməyə (kombinezona) uyğun olur.

Oyuqların hecminə (sayına) məhdudiyyət qoyulmadıqda Y -lərin ekvivalentlik sinifləri və onların sayı aşağıdakı kimi təsvir olunur.

3) Müxtəlif hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y -lərində hər bir ekvivalentlik sinfi bir elementdən ibarətdir və belə siniflərin sayı n^m -ə bərabərdir.

4) Müxtəlif oyuqlarda bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin Y -lərində Y -nin ekvivalentlik sinifləri 2)-də olduğu kimi təsvir olunur. Ekvivalentlik siniflərinin sayı bu halda $(n+m-1)! / m!(n-1)!$ olur, hər bir sinif isə n elementdən m elementli təkrarlanan elementləri birləşməyə uyğun olur.

5) Bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y -lərində, əgər A -nın elementlərinin τ yerdəyişməsi (permutasiya) varsa ki, bütün $k \in Z_m$ üçün $\tau(\varphi(k)) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənilsin, onda φ və ψ ekvivalentdir. Ekvivalentlik siniflərinin sayı Z_m çoxluğunun, n -dən çox olmamaqla, bölgüləri sayı ilə üst-üstə düşür və bu say

$$\sum_{k=1}^n \sigma(m, k)$$

ədədinə bərabərdir, burada $\sigma(m, k)$ 2-ci növ Stirlinq ədədləridir.

6) Əgər Z_m və A çoxluqlarının elementlərinin uyğun olaraq σ və τ yerdəyişmələri tapılırsa ki, bunlar üçün bütün $k \in Z_m$ qiymətlərində $\tau(\varphi(\sigma(k))) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənilsin, onda φ və ψ Y -ləri ekvivalentdir. Ekvivalentlik siniflərinin sayı m natural ədədinin n -dən çox olmayan sayda toplanana bölgüləri sayı $Q_m(n)$ ilə üst-üstə düşür və o,

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(n) t^m = \prod_{k=1}^n (1 - t^k)^{-1}$$

bərabərliyindən təyin olunur.

Bax, *Polynomial yerləşməsi, hissəciklərin, Yerləşməsi, hissəciklərin qrupları*.

Əd.: [1] Рнордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ. М., 1963; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей в математической статистике, К., 1979.

YERLƏŞMƏ təsadüfi «размещение случайное; random allocation» – bax, *Təsadüfi yerləşmə*.

YERLƏŞMƏSİ, HISSƏCİKLƏRİN bərabərhətimli «размещение частиц равновероятное; equiprobable allocation of particles» – bax, *Polynomial yerləşməsi, hissəciklərin*.

YERLƏŞMƏSİ, HISSƏCİKLƏRİN qruplarla «размещение частиц комплектами; group allocation of particles» – hissəciklərin oyuqlarda *elə yerləşmə* sxemidir ki, hissəciklər qruplarla asılı olmayaraq yerləşir və qrupun hissəcikləri müxtəlif oyunlarda bir-bir yerləşir. Hissəciklərin qruplarla yerləşməsi hər birində s hissəcik olan n sayda qrupun hissəciklərinin N sayda oyuqda asılı olmayaraq yerləşmələri sxemi kimi anlaşılır; hissəciklərin yerləşməsi üçün bütün mümkün olan halların sayı C_N^s olub, bərabərhətimlidir.

Bu sxemdə hər bir oyuqda r hissəcik yerləşməsi sayı μ_r təsadüfi kəmiyyətinin, ilk dəfə heç olmasa k sayda oyuğun dolu olduğu haldakı qrupların sayı ν_k və oyuqda hissəciklərin maksimal sayı η təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanmaları öyrənilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmaları bir çox cəhətlərlə ns hissəciyin N oyuqda yerləşməsinin bərabərhətimli sxeminə belə kəmiyyətlərin limit paylanmalarına analoji (bax, *Polynomial yerləşməsi, hissəciklərin*). μ_r , ν_k , η üçün limit teoremləri isbat olunmuşdur (bax, [1] – [4]).

Hissəciklərin qruplarla yerləşməsinin əsas sxemi bəzən bərabərhətimli sxem adlanır. Bu sxemin bir sıra ümumiləşmələri, o cümlədən, aşağıdakılar vardır.

Qrupların ölçüləri – $s_1, s_2, \dots, s_n$ müxtəlif ola bilər. Bu halda, boş oyuqların sayı – μ_0 təsadüfi kəmiyyəti üçün normal və Пуассон limit paylanmalarına yığılma sürəti qiymətləndirilərək, limit teoremlərinin tam spektri alınmışdır (bax, [5]).

Qrupun yerləşməsinin digər halı bütün oyuqlar çoxluğundan hər hansı altçoxluğun təsadüfi seçimi ilə eyniləşdirilir. Bu halda μ_r təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının Пуассон paylanmasına yığılmasının kafi şərtləri göstərilir (bax, [6]).

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Е. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Михайлов В. Г., «Матем. сб.», 1980, т. 11, № 2, с. 163–86; [3] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., «Теория вероятностей и ее примен.»,

1966, t. 11, v. 4, s. 701-08; [4] Хакимуллин Е. Р., «Матем. заметки», 1981, т. 30, в. 2, с. 277-89; [5] Ватутин В. А., Михайлов В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 4, с. 684-92; [6] Михайлов В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 1, с. 155-60.

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN; Markov yerləşməsi «размещение частиц марковское; Markov allocation of particles» – bax, Markov yerləşməsi, hissəciklərin.

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN; polinomial yerləşmə «размещение частиц полиномиальное; multinomial group allocation of particles» – bax, Polinomial yerləşməsi, hissəciklərin.

YEYTS DÜZƏLİŞİ «Йейтса поправка; Yates correction» – sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər χ^2 – kvadrat approksimasiyasının dəqiqliyi üçün təyin edilmiş kəsilməzlik düzəlişidir. Bu tip ilk düzəlişə F. Yeyts [1]-də aşağıdakı məsələ ilə əlaqədar baxmışdır (bax, [2], s. 482). Arasında A əlamətli M sayda elementi olan N sayda element təsadüfi qaydada iki qrupa – n və $N - n$ sayda elementdən ibarət qruplara bölünür. Bu bölgünün nəticələri 2×2 cədvəli şəklində göstərilir, m – 1-ci qrupda A əlamətli elementlərin sayıdır.

	əlamətli	əlamətsiz	cəmisi
1-ci qrup	m	$n - m$	n
2-ci qrup	$M - m$	$N - n - M + m$	$N - n$
cəmisi	M	$N - M$	N

Sual olunur ki, 2×2 cədvəlindəki verilənlərə görə bölgünün, həqiqətən də, təsadüfi qaydada – elementlərdə A əlamətinin olub-olmamasını nəzərə almadan aparılması haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq olarmı? Aydındır ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, m ədədinə

$$P\{\xi = m | H_0\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, & \text{əgər } \max(0, M + n - N) \leq m \\ & \leq \min(M, n) \text{ olarsa} \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

hiperhəndəsi paylanma qanununa tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi baxmaq olar, bu halda $M\xi = nM/N$.

$D\xi = NM(N-n)(N-M) \cdot \frac{1}{N^2(N-1)}$, H_0 hipotezi ξ təsadüfi kəmiyyəti terminləri ilə $M(\xi/n - (M - \xi)/(N - n)) = 0$ bərabərliyi ilə verilir. Əgər N böyük olarsa, $n, M, N - n, N - M$ ədədlərindən isə heç biri çox da kiçik olmazsa, onda H_0 hipotezi doğru olduğu halda $Y^2 = (\xi - M\xi)^2/D\xi$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər χ^2 – kvadrat qanunu ilə təqribi paylanır, yəni

$$P\{Y^2 \geq x | H_0\} \approx P\{\chi_1^2 \geq x\} = P_1(x),$$

bundan da, praktikada H_0 hipotezini yoxlamaq üçün istifadə olunur. N -in kiçik qiymətlərində Y^2 statistikası əvəzinə

$$Y^2 = \left(|Y| - 1/2\sqrt{D\xi}\right)^2 \quad (1)$$

statistikasını hesablamaq məsləhətdir və bu halda aşağıdakı qaydaya riayət olunmalıdır: əgər $P_1(Y^2) \leq \alpha$ olarsa, onda təsadüflilik haqqında hipotez qəbul edilmir, əgər $P_1(Y^2) > \alpha$ olarsa, müşahidə olunan qiymətin təsadüflilik haqqında hipotezə zidd olmadığı hesab olunur (α – kriterinin mühümlük ölçüsüdür, $0 < \alpha < 0.5$). (1) düsturunda çıxan $1/2\sqrt{D\xi}$ $P_1(x)$ -i approksimasiyalayan paylanma funksiyasının kəsilməzliyinə Yeyts düzəlişidir. $n = 3(1)20$ və $N - n = 2(1)n$ üçün $M - \xi$ -nin dəqiq kritik qiymətləri cədvəlləri mövcuddur və (dəqiq Fişer kriterisi) bu cədvəllərdən N -in kiçik qiymətlərində təsadüflilik hipotezini yoxlamaq üçün istifadə etmək olar (bax, [3], [4]). Əgər $N \geq 21$ olarsa, təqribi birtərəfli kriterilərin kritik oblastları aşağıdakı bərabərsizliklərlə verilir (bəlli olan kəsilməzliyə düzəlişləri ilə):

$$(\xi - M\xi)/\sqrt{D\xi} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha) + 1/2\sqrt{D\xi},$$

$$(\xi - M\xi)/\sqrt{D\xi} \leq -\Phi^{-1}(1 - \alpha) - 1/2\sqrt{D\xi},$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır, deməli, mühümlük ölçüsü α -ya bərabər təqribi ikitərəfli kriterinin kritik oblastı

$$Y^2 = (\xi - M\xi)^2/D\xi \geq \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) + 1/2\sqrt{D\xi}\right)^2 \quad (2)$$

bərabərsizliyi ilə verilir.

Beləliklə, dəqiq Fişer kriterisinin kritik qiymətləri üçün təqribi düsturlar ələ nəticəyə gətirir ki, bu nəticə (1) düsturu şəklində yazılan nəticələrdən fərqlənir. Doğrudan da, (1) düsturuna görə Y^2 statistikası təqribi olaraq χ_1^2 kimi paylanır, (2) düsturuna görə isə Y^2 statistikası təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər χ^2 – kvadrat paylanması və qeyri – mərkəzlilik parametri $(1/4)D\xi$ ilə paylanır. Əgər $D\xi \rightarrow \infty$ olarsa, onda Y^2 və Y^2 statistikalarının paylanmaları asimptotik ekvivalent paylanmalar olur.

Əd.: [1] Yates F., «J. Roy. Statist. Soc.», 1934, Suppl. 1, p. 217-35; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р - н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] О у э н Д. Б. Сборник статистических таблиц, пер. с англ., М., 1966; [5] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to Chi-square testing, N. Y., 1996.

YƏQİN HADİSƏ « достоверное событие; certain event » – apriori hökmən baş verən hadisədir. $\Omega = \{\omega\}$ elementar nəticələr fəzası olarsa, ω elementar nəticələrindən ixtiyari biri ilə baş verən A hadisəsi yəqin hadisə adlanır və aydındır ki, bu hadisə bütün Ω fəzası ilə üst-üstə düşməlidir. Buna görə də, $Y. h.$ -nin ehtimalını 1-ə bərabər götürmək təbii bir şeydir:

$$P(A) = \{\omega : \omega \in A\} \text{-nin ölçüsü} = P\{\Omega\} = 1.$$

A hadisəsinə eks hadisə (tamamlayıcı hadisə) qeyri – mümkün hadisədir.

Bax, Cəbri, hadisələrin.

YƏQİNLİK « достоверность; certainty » – hər hansı hadisə və ya prosesin baş verəcəyinə bütün şübhələri istisna edən aprior əminlikdir. Y. hər hansı hadisənin reallaşmasını xarakterizə edir və onun ehtimalının ən böyük qiymətli olmasını qeyd edir. Y. l ehtimalla baş verən *yəqin hadisələrlə* bağlıdır. Praktikada hər hansı hadisənin ehtimalı l-ə kifayət dərəcədə yaxın olduğu halda Y.-den danışıla bilər.

YİĞİLMƏ ehtimala görə « сходимость по вероятности; convergence in probability » – ehtimal nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlərin yığılmasının xüsusi halıdır. $X_0, X_1, \dots$ eyni $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|X_n - X_0| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

münasibəti ödənilərsə, $\{X_n, n \geq 1\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda X_0 -a ehtimala görə yığılır.

deyilir və bu yığılma simvolik olaraq, $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X_0$ kimi işarə olunur. Yığılmanın bu növü *Ki – Fan metrikası* ilə metrikləşir və bu növ yığılma riyazi analizdə ölçüyə görə yığılmaya uyğundur.

YİĞİLMƏ(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin « сходимость эмпирических мер и эмпирических процессов; convergence of empirical measures and processes » – normalanmış empirik paylanmalar və momentlər üçün *merkezi limit teoremi və invariantlıq prinsipidir*.

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ – ixtiyari ölçülən fəza, $\mathbf{P}_n$ – $\mathcal{A}$ -da verilmiş $\mathbf{P}$ paylanmasına təbə n – ölçülü seçim üzrə qurulmuş empirik paylanmadır. Kvadratı ilə inteqrallanan ölçülən $f: (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyalarının hər hansı $\mathcal{F} \equiv \{f\}$ parametrik çoxluğunda verilən empirik proses

$$Y_n(f) = n^{1/2} \int_{\mathcal{X}} f(x) (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}) dx, f \in \mathcal{F}$$

düsturu ilə təyin olunur. $Y_n(f)$ -in $\{\mathbf{I}_A(\cdot); A \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ indikatorlar çoxluğuna daralması empirik ölçü adlanır:

$$\mu_n(A) = n^{1/2} (\mathbf{P}_n(A) - \mathbf{P}(A)), A \in \mathcal{B}.$$

Çoxölçülülük merkezi limit teoreminə əsasən $\{Y_n(f), f \in \mathcal{F}\}$ empirik prosesinin sonluölçülülük paylanmaları $n \rightarrow \infty$ olduqda, riyazi gözləməsi sıfıra bərabər və kovariasiyası

$$\begin{aligned} \mathbf{M} Z(f) Z(g) &= \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) g(x) \mathbf{P}(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \mathbf{P}(dx) \int_{\mathcal{X}} g(x) \mathbf{P}(dx) \quad (1) \end{aligned}$$

düsturu ilə ifadə olunan $\{Z(f); f \in \mathcal{F}\}$ Gauss prosesinin sonluölçülülük paylanmalarına zəif yığılır.

$\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcılığı $\mathcal{F}$ sinfi üzrə merkezi limit teoremini müntəzəm ödəyir, bu şərtlə ki, hər bir n üçün eyni ehtimal fəzasında

ele $Y_n(\cdot)$ və $Z(\cdot)$ təsadüfi proseslərini vermək mümkündür ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün bu proseslər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr} \left\{ \sup_{f \in \mathcal{F}} |Y_n(f) - Z(f)| > \varepsilon \right\} = 0 \quad (2)$$

şərtini ödəsin, burada $\mathbf{Pr}$ – xarici ehtimaldır (rus. внешняя вероятность) [(2)-dəki supremum təsadüfi kəmiyyət olmaya bilər].

Bir sıra məsələlərdə $\{Y_k(\cdot); k \leq n\}$ şəklində «trayektoriyaların» Gauss təqribatı zərurəti yaranır. Buna görə də, (2) münasibətinə ekvivalent aşağıdakı müddə məqsəduyğun sayılır. Əgər eyni bir ehtimal fəzasında empirik proseslərin $\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcılığını və həm də kovariasiyası (1) olan asılı olmayan mərkəzlənmiş ele $\{Z_f(\cdot)\}$ Gauss proseslərini vermək olarsa ki, bunlar üçün

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr} \left\{ \max_{k \leq n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| k^{1/2} Y_k(f) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{j=1}^k Z_j(f) \right| > \varepsilon n^{1/2} \right\} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

münasibəti ödənilsin, onda $\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcılığı üçün $\mathcal{F}$ üzrə müntəzəm invariantlıq prinsipi ödənilir, deyilir.

Əgər (2) və (3)-də supremum bütün n qiymətlərində təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda empirik ölçülərin və empirik proseslərin Y -sı uyğun funksional fəzalarda paylanmaların zəif Y . Terminlərlə ifadə oluna bilər (bax, [1] – [3]). (2) və (3)-dən $Y_n(\cdot)$ və ya $\{Y_k(\cdot); k \leq n\}$ topluslarının funksionallarının olduqca geniş sinfi üçün paylanmaların zəif yığılması alınır.

$\mathcal{F}$ sinfinin bəzi entropik xarakteristikaları terminlərində (2) və (3) münasibətlərinin ödənilməsi üçün zəruri və kifayət şərtlər alınmışdır (bax, [1] – [7]).

$H_1(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ aşağıdakı şərtləri ödəyən $\mathbf{P}$ – inteqrallanan $\{f_i\}$ funksiyalarının ($\mathcal{F}$ -dən olmaya da bilər) minimal sayının loqarifmi (əgər bu varsa) olsun: sonlu $\mathcal{F}$ ailəsindən ixtiyari ele f_1 və f_2 funksiyaları tapılar ki, ixtiyari $f \in \mathcal{F}$ üçün

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \int_{\mathcal{X}} (f_2(x) - f_1(x)) \mathbf{P}(dx) \leq \varepsilon$$

şərtləri ödənilsin. Əgər $\mathcal{F}$ -dən olan funksiyalar müntəzəm məhdud olarsa və

$$\int_0^1 H_1^2(\varepsilon^2, \mathcal{F}, \mathbf{P}) d\varepsilon < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda (2) və (3) münasibətləri ödənilir (bax, [2], [5]).

Əgər $\mathcal{B}$ çoxluqların *Vapnik – Çervonenkis sinfi* olarsa, onda müəyyən ölçülənlik şərtlərində ixtiyari $\mathbf{P}$ üçün $\{\mu_n(A); A \in \mathcal{B}\}$ empirik ölçülər ailəsi (2) və (3) münasibətlərini ödəyir (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Dudley R. M., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, p. 899–929; [2] Dudley R. M., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1097, p. 1–141; [3] Колчинский В. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1981, т. 24, с. 63–75; [4] Gine E., Zinn J., «Ann. Probab.», 1984, v. 12, № 4, p. 929–89; [5] Боронов И. С., «Сб. матем. ж.», 1983, т. 24, № 6, с. 14–25; [6] Боронов И. С., «Тр. Ин-та матем.», Новосибир., 1985, т. 5, с. 3–27; [7] Ossander M., «Ann. Probab.», 1987, v.15, № 3, p. 897–919.

YİĞİLMA əsas etibarilə «сходимость в основном; weak convergence» – bax, *Zəif yığılma*.

YİĞİLMA(sı) integral funksionalların «сходимость интегральных функционалов; convergence of integral functional» – bax, *Yığılma*(sı) integral tipli funksionalların paylanmalarının.

YİĞİLMA(sı) integral tipli funksionalların paylanmalarının «сходимость распределений функционалов интегрального типа; convergence of distributions of integral type functionals» – integral funksiyalannın doğurduğu σ – topologiyalı fəzada paylanmaların zəif yığılmasıdır ($\mathcal{F}$ integral tipli funksionallar sinfi olduqda, bu yığılma təsadüfi proseslərin $\mathcal{F}$ – yığılmasıdır).

$\zeta(t)$ – ölçülən təsadüfi proses və $(\zeta_n(t)), t \in [0, 1]$ – məhdud ölçülən funksiyalar fəzası $M(0, 1)$ -də 1 ehtimalla $[0, 1]$ parçasında toplanmış ölçülən təsadüfi proseslər ardıcılığı, $\mathcal{F}$ –

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt$$

şəklində bütün funksionallar sinfi olsun, burada $\varphi, - \mathbb{R}$ -də kəsilməz funksiyadır.

ζ_n ardıcılığının ζ -ya $\mathcal{F}$ -yığılması (integral funksionallarının yığılması) üçün:

1) $\mathbb{R}$ -də ixtiyari kəsilməz φ funksiyası və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_N \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P \left\{ \int_{\{t: \zeta_n(t) > N\}} \varphi(\zeta_n(t)) dt < \varepsilon \right\} = 0$$

münasibətinin ödənilməsi;

2) hesabi çoxluğu aşmayan ələ ədədlər çoxluğu D və $\mathbb{R} \setminus D$ -də hər yerdə sıx ələ S çoxluğu olsun ki, ixtiyari m üçün

$$\begin{aligned} \lim_n \int_0^1 \dots \int_0^1 P \left\{ \bigcap_{j=1}^m \{ \zeta_n(t_j) < u_j \} \right\} dt_1 \dots dt_m = \\ = \int_0^1 \dots \int_0^1 P \left\{ \bigcap_{j=1}^m \{ \zeta(t_j) < u_j \} \right\} dt_1 \dots dt_m \end{aligned}$$

münasibətinin ixtiyari $u_1, \dots, u_m \in S$ üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 5, с. 899–915; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

YİĞİLMA kvadratik orta «сходимость в среднем квадратичном; convergence in mean square/convergence in the quadratic mean» – bax, *Yığılma p* tərtib orta.

YİĞİLMA ölçüyə görə «сходимость по мере; convergence in measure» – ölçülən funksiyaların yığılma növlərindən biridir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – ölçülü fəza,

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ – həqiqi ədədlərin genişləndirilmiş çoxluğu, $f_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$ isə sanki hər yerdə sonlu və ölçülən funksiyaların ardıcılığı olsun, burada Ω – hər hansı çoxluq, $\mathcal{A}$ – onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, μ isə bu altçoxluqlarda verilmiş ölçüdür. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ və A ($A \subset \Omega, A \in \mathcal{A}$) üçün ələ $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülən funksiyası tapılsa ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x \in A: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (1)$$

münasibəti ödənilsin, onda $f_n, n \geq 1$ ardıcılığı f funksiyasına A çoxluğunda μ ölçüsünə görə yığılır, deyilir. Əgər (1) münasibəti $A = \Omega$ olduqda ödənilsə, onda $\{f_n, n \geq 1\}$ ardıcılığı ölçüyə görə yığılan ardıcılıq adlanır. Bu halda $\{f_n, n \geq 1\}$ ardıcılığı f funksiyasına μ ölçüsünə görə yığılır, deyilir və belə yığılma simvolik olaraq

$$f_n \xrightarrow{\mu} f, f_n \longrightarrow f(\mu), f = \mu - \lim f_n$$

kimi işarə olunur. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \mu \{x \in \Omega: |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

münasibəti ödənilsə, $f_n, n \geq 1$ ardıcılığı ölçüyə görə fundamental ardıcılıq adlanır.

Ölçüyə görə Y ölçülən funksiyalar fəzasının topoloji strukturunun öyrənilməsində mühüm rol oynayır və bu yığılma digər növ yığılmalarla sıx əlaqədardır.

1) Əgər $\mu(\Omega) < \infty$ olarsa, onda sanki hər yerdə sonlu funksiyaya sanki hər yerdə yığılmadan həmin limit funksiyasına ölçüyə görə (hətta sanki hər yerdə) Y alınır. Əgər $\mu(\Omega) = \infty$ olarsa, onda sanki hər yerdə yığılmadan (hətta hər yerdə yığılmadan) ümumiyyətlə, ölçüyə görə Y alınmır. $\mu(\Omega) = \infty$ olduqda ölçüyə görə Y , bəzən, bütün $A \subset \Omega, A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$ çoxluqlarında ölçüyə görə Y kimi təyin olunur.

2) Əgər ardıcılıq ölçüyə görə yığılırsa, onda bu ardıcılıqdan həmin limit funksiyasına sanki hər yerdə yığılan altardıcılıq seçmək olur.

3) Ölçüyə görə Y və ölçüyə görə fundamentalıq bir-birilə ekvivalentdirlər.

4) $p > 0$ tərtib orta yığılma həmin limit funksiyasına ölçüyə görə Y -ni doğurur.

5) Ölçüyə görə Y funksiyaların toplanması və funksiyaların skalyarlara hasili ilə uzlaşır. Bundan əlavə, əgər $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir-birilə ekvivalent ölçülən funksiyaların siniflərinin çoxluğu varsa və μ ölçüsü σ – sonlu ölçüdürsə, onda $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tam topoloji metrikləşən vektor fəzadır və bu fəzada metrikaya görə yığılma ölçüyə görə Y ilə üst-üstə düşür. Uyğun metrika müxtəlif üsullarla daxil oluna bilər (bax, [2], [3]). Əgər μ diskret ölçü deyildirsə, onda $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ fəzası lokal fəza olmur (deməli, normalanmayan fəza da). Əgər $\mathcal{A}$ σ – cəbri hesabi bazisə malikdirsə, $S(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ fəzası separabeldir. $[0, 1]$ parçasında ölçülən funksiyalar fəzasında ölçüyə görə yığılma üçün metrikləşməni ilk dəfə M. Freşe [5]-də həyata keçirmişdir.

Ölçülən metrik fəzalarda qiymətlər alan ölçülən inikaslar üçün ölçüyə görə Y -nin tərifli həqiqi qiymətli ölçülən funksiyalar halına analojiyə. Məs., separabel Banax fəzaları üçün ölçüyə görə Y -nin bütün xassələri olduğu kimi qalır.

Ölçüyə görə Y anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinə ehtimala görə Y anlayışına uyğundur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [4] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [5] Fréchet M., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1921, v. 11, p. 187–206.

YİĞİLMA(sı) paylanmaların «сходимость распределений; convergence of distribution» – ehtimal nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma anlayışının xüsusi halıdır; bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathcal{X}$ -in, paylanmaları eyni P_X olan X təsadüfi kəmiyyətlərini birləşdirən ekvivalentlik siniflərinə $\mathcal{X}$ çoxluğunun bölgüsünə uyğun halıdır. Əgər $X_0, X_1, \dots \in \mathcal{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $P_0, P_1, \dots$ olarsa, onda paylanmaların yığılması $n \rightarrow \infty$ olduqda P_n -in P_0 -la müəyyən mənada yaxınlaşması kimi anlaşılır. Əgər baxılan $P_n \rightarrow P_0$ Y $\mathcal{X}$ -də μ metriksə ilə metrikləşsə, onda $\mu(X, Y)$ X, Y kəmiyyətlərinin paylanmaları cütləri (P_X, P_Y) -lərin çoxluğunda verilmiş funksionaldır və bu Y aşağıdakı münasibətlə eyniləşir:

$$\mu(X_n, X_0) = \mu(P_n, P_0) \rightarrow 0, \quad X_n \in \mathcal{X} = \{X : P_X = P_{X_n}\}.$$

Ehtimal nəzəriyyəsində paylanmaların Y -nin çoxsaylı müxtəlif növləri ənənəvi istifadə olunur – *zəif yığılma*, *müntəzəm yığılma*, *variasiyaya görə yığılma*, *çəkili orta yığılma* və s. Paylanmaların Y -nin metrik interpretasiyasının üstün cəhəli ondadır ki, paylanmaların baxılan Y -nda P_n -in P_0 -a yaxınlaşma sürəti haqqında sual qoymağa imkan verir (bax, məs., *Berti – Esseen teoremi*) və limit teoremləri nəzəriyyəsində və stoxastik modellərin dayanıqlılığı nəzəriyyəsində və s. müxtəlif analitik metodlar üçün əsas yaradır.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

YİĞİLMA; paylanmaların çəki ilə orta yığılması «сходимость распределений в среднем с весом; convergence of distributions in the weighted mean» – bax, *Orta yığılma* çəkili.

YİĞİLMA(sı) paylanmaların moment xarakteristikalarının «сходимость моментов; convergence of moment distribution characteristics» – F_n paylanmalarının moment xarakteristikaları adlanan $\int \varphi(x) F_n(dx)$ inteqrallarının $\int \varphi(x) F(dx)$ inteqralına yığılmasıdır, burada $F, F_n, n=1, 2, \dots$ – hər

hansı $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmaları, $\varphi(x)$ – bu paylanmalar üzrə inteqrallanan funksiyadır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin moment xarakteristikalarının yığılması haqqında hökmələr aşağıdakı teoremə əsaslanır.

X separabel Hilbert fəzası, $\mathcal{A}$ isə onun altçoxluqlarının Borel σ – cəbri olsun. Fərz olunur ki, $(X, \mathcal{A})$ -da simmetrik ehtimal

paylanmalarının kompozisiyalar ardıcılığı $F_n = \prod_{k=1}^{m_n} * F_{nk}$,

$n=1, 2, \dots$ F ehtimal paylanmasına zəif yığılır və φ kəsilməz müsbət funksiyadır, X -də təyin olunmuşdur və aşağıdakı şərtləri ödəyir: φ hər bir F_{nk} ehtimal paylanması üzrə inteqrallandır və bütün x və y və hər hansı A üçün $\varphi(x+y) \leq A \varphi(x) \varphi(y)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) dF_n(x) = \int_X \varphi(x) dF(x)$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^{m_n} \int_{\|x\| > R} \varphi(x) dF_{nk}(x) = 0$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kifayətdir.

φ funksiyası kimi $1 + \|x\|^p$, $p > 0$ və $\exp\{\alpha \|x\|^\beta\}$, $\alpha > 0$, $0 < \beta \leq 1$ götürərək, momentlərin və eksponensial momentlərin yığılmasının zəruri və kifayət şərtlərini almaq olur.

Əd.: [1] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984.

YİĞİLMA; paylanmaların müntəzəm yığılması «сходимость распределений равномерная; uniform convergence of distributions» – bax, *Müntəzəm yığılma(sı)* paylanmaların.

YİĞİLMA paylanmaya görə «сходимость по распределению; convergence in distribution» – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılmasının bir növüdür. Əgər $X_0, X_1, \dots$ paylanmaları uyğun olaraq, $P_0, P_1, \dots$ olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olarsa, onda paylanmaya görə yığılma, adətən, $n \rightarrow \infty$ olduqda P_n paylanmalarının P_0 -a *zəif yığılması* kimi anlaşılır. Lakin paylanmaya görə yığılmaya daha geniş anlam vermək olar ki, buna görə yalnız zəif topologiya ilə kifayətlənməmək olarsa.

YİĞİLMA sanki yəqin, vahid ehtimalla «сходимость почти наверное, сходимость с вероятностью 1; almost surely convergence / convergence with probability 1» – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma növlərindən biri olub, aşağıdakı kimi təyin olunur. $(U, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, $X_0, X_1, \dots$ – eyni bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fəzasında verilmiş, U -dan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı olsun. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X_0(\omega)\} = 1 \quad (*)$$

münasibəti ödənilsə, X_n ardıcılığı X_0 -a sanki yəqin və ya vahid ehtimalla yığılır, deyilir və bu yığılma

simvolik olaraq $X_n \xrightarrow{\varepsilon, Y} X_0$ kimi yazılır. (*) münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün aşağıdakı münasibətlərdən ixtiyari biri ilə ekvivalentdir:

A) $\mathbf{P}\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ - in sonsuz sayda qiymətləri çoxluğu üçün $\} = 0$

B) $\mathbf{P}\{\omega: \bigcup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$;

C) $\mathbf{P}\{\omega: \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Sanki yəqin yığılma riyazi analizdəki sanki hər yerdə yığılmaya uyğundur.

Ehtimal nəzəriyyəsində sanki yəqin yığılmanın gücləndirilmiş bir növü – dar mənada sanki yəqin yığılma adlandırılan növü də məlumdur. Q. Robbins (G. Robbins) və P. L. Hsu (P. L. Hsu) tərəfindən daxil edilmiş bu növ yığılma ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} < \infty$$

şərtlərlə təyin olunur. Sanki yəqin yığılma və dar mənada sanki yəqin yığılma metrikəlmir.

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Д ю г е Д., Теоретическая и прикладная статистика, пер. с франц., М., 1972.

YİĞİLMA tam «сходимость» полная; complete convergence» – bax. *Yığılma* tamamilə.

YİĞİLMA tamamilə «сходимость» вполне; complete convergence», tam yığılma – $\mathbb{R}^1$ -də bütün məhdud və azalmayan $H(x)$, $H(-\infty) = 0$ funksiyalarının çoxluğu $\mathcal{H}$ -də aşağıdakı kimi təyin olunan yığılmadır. $H_0, H_1, \dots \in \mathcal{H}$ olsun: əgər H_0 funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində $\{H_n(x)\}_{n \geq 1}$ $H_0(x)$ -ə yığılırsa və $H_n(\infty) \rightarrow H_0(\infty)$ münasibəti də ödənilərsə, onda $\{H_n\}_{n \geq 1}$, $n \rightarrow \infty$ olduqda H_0 -a tamamilə yığılır, deyilir. $\{F_n\}_{n \geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının $F_0(x)$ paylanma funksiyasına tam Y . $\{F_n\}_{n \geq 1}$ -in F_0 -a zəif yığılması ilə eynigüclüdür. Y -nın bu növü *Levi metrikası* ilə metrikəlmir, bu metrikanın tərfi isə $\mathcal{H}$ -dən olan funksiyalar halı üçün də təyin olunur.

Tam Y -ya nəzərən $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ çoxluqları üçün zəif nisbi kompaktlıq kriterisinin analoqu

$$\sup \left\{ \int_{|x| > T} dH(x): H \in \mathcal{A} \right\} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

şərtidir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

YİĞİLMA p tərtib orta «сходимость» в среднем порядка p : convergence in mean of order p » – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma növlərindən biridir. $p > 0$.

$\mathbb{B}$ – təsadüfi kəmiyyətlərin separabel Banach fəzası olsun; bu təsadüfi kəmiyyətlərin eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi, $\mathbb{B}$ -dən

qiymətlər aldığı, $\mathbf{M}\|X_n\|^p < \infty, n = 0, 1, \dots$, olduğu fərz olunur. Əgər

$$\mu_p(X_p(X_n, X_0)) = \mathbf{M}\|X_n - X_0\|^p \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilərsə, X_n ardıcılığı X_0 -a p tərtiblə orta yığılır, deyilir. $\mu(X, Y) = (\mu_p(X, Y))^{1/\min(1, p)}$

funksionalı $\mathcal{X}_p = \{X: \mathbf{M}\|X\|^p < \infty\}$ çoxluğunda sonlu qiymətlər alan ehtimal metrikasıdır. μ metrikasını $K(X, Y)$ *Ki – Fan metrikası* ilə

$$K(X, Y) \leq (\mu(X, Y))^{(1+p)/\min(1, p)}$$

berabərsizliyi əlaqələndirir. $p = 2$ olan hal kvadratik orta yığılmaya uyğundur.

YİĞİLMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının «сходимость» рядов случайных величин; convergence of series of random variables» – analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi dilində təyin olunduğu kimi. $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü ilə verilmiş hər hansı $(\Omega, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasında verilən heqiqi ölçülən $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ funksiyalarının

$$X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots \quad (1)$$

sıralarının yığılmasıdır, yəni $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ xüsusi cəmlərinin $(\Omega, \mathfrak{B})$ fəzasında hər hansı $Y(\omega)$ ölçülən funksiyasına hər hansı mənada yığılmasıdır. Y -nın ehtimal nəzəriyyəsində ən çox istifadə olunan növləri aşağıdakılardır:

1. Vahid ehtimalla yığılma ($\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən sanki yəqin yığılma):

$$\mathbf{P}\{\omega: S_n(\omega) \rightarrow Y(\omega), n \rightarrow \infty\} = 1.$$

2. Ehtimala görə yığılma: hər bir $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\omega: |S_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Yığılma topologiyasının bu tipi *Ki – Fan metrikası* ilə reallaşır, yəni (2)

$$K(S_n, Y) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

yığılmasına ekvivalentdir.

3. Zəif yığılma (paylanma üzrə): G paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtəsi olan hər bir x üçün

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\omega: S_n(\omega) < x\} \rightarrow G(x) = \mathbf{P}\{\omega: Y(\omega) < x\}.$$

Zəif yığılma topologiyası *Levi metrikası* ilə reallaşır, yəni (3) münasibəti

$$L(F_n, G) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

yığılmasına ekvivalentdir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sıraları üçün Y -nın bütün üç tipi bir-birilə ekvivalentdirlər (bax, [1]). Belə sıraların Y üçün zəruri və kafi şərtlər A. N. Kolmogorovun isbat etdiyi *üç sıra teoreminde* ifadə olunmuşdur. Ədədi sıralardan fərqli olaraq yığılan (1) sırası ele sıra ola bilər ki, onun toplananlarının yerini dəyişdirdikdə bu cəmin qiyməti dəyişilməz qalsın. Məsələn,

$$P\{X_k = 1/k\} = P\{X_k = -1/k\} = 1/2$$

kimi verilen asılı olmayan $X_1, X_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mütləq yığılmayan sırası belə sıradır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin (1) sırasının yığılma kriterisi təsadüfi kəmiyyətlərin $\Delta(X_j)$ indeksləri, $C_r(X_j)$ mərkəzləri (ixtiyari), $B_r(X_j)$ səpələnmələri (ağır təsadüfi kəmiyyətlərin) terminlərində aşağıdakı şərtlərin ödənilməsindən ibarətdir: hər hansı $0 < r < \Delta$ üçün

$$\Delta = \inf(\Delta(X_j): j \geq 1) > 0$$

[belə r seçilərsə, bütün j -lər üçün $C_r(X_j)$ -in və $B_r(X_j)$ -in varlığı təmin olunur];

$$C_r(X_1) + C_r(X_2) + \dots \text{ və } B_r(X_1) + B_r(X_2) + \dots$$

sıraları yığılır. Əgər sıranın yığılmasının mərkəzlərdən ibarət şərti onun mütləq Y şərti ilə əvəz olunarsa, onda Y kriterisi və sıranın toplananlarının yerindəyişməsinin onun qiymətinə təsir etməməzliyini alırıq (bax, [2]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

YİĞİLMƏ(sı) təsadüfi kəmiyyətlərin «сходимость случайных величин; convergence of a random variables» – ehtimal nəzəriyyəsində və ilk növbədə limit teoremlərində istifadə olunan anlayışlardan biridir. $\mathcal{X} = \{X(\omega)\}$ eyni bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimal fəzasında verilmiş və hər hansı ölçülən $(U, \mathcal{B})$ fəzasından qiymətlər alan bütün mümkün ola bilən kəmiyyətlər çoxluğu olsun. $X_n(\omega) \in \mathcal{X}$ funksiyalarının $X_0(\omega) \in \mathcal{X}$ funksiyasına $n \rightarrow \infty$ olduqda Y müxtəlif mənalarda anlaşıla bilər ki, bu da təsadüfi kəmiyyətlərin müxtəlif tip Y -lərinə uyğundur.

Ehtimal nəzəriyyəsində konkret problemlərin həlli prosesində ümumi xüsusiyyətə malik təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən tip Y -sından istifadə etmək ənənəsi vardır ki, $\mathcal{X}$ -dən olan təsadüfi kəmiyyətlər bu və ya digər üsulla ekvivalentlik siniflərinə bölünür, sonra isə Y -nin uyğun şəkildə bu təsadüfi kəmiyyətlərə müstəqil elementlər kimi baxılır. Bölgü üsullarından ən çox istifadə olunanlar aşağıdakı iki üsuldur: əgər

$$A) \quad P\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\} = 1;$$

$$B) \quad P\{\omega: X(\omega) \in A\} = P\{\omega: Y(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{A}$$

olarsa, $X, Y \in \mathcal{X}$ eyni bir ekvivalentlik sinfinə mənsubdurlar.

Birinci üsul ilə, məs., təsadüfi kəmiyyətlərin sanki yəqin yığılması, ehtimala görə yığılma, p tərtib orta yığılma kimi Y -lər, ikinci üsulla isə təsadüfi kəmiyyətlərin Y -sının olduqca geniş qrupu, o cümlədən, zəif yığılma, müntəzəm yığılma, variasiyaya görə yığılma və s. kimi Y -lər bağlıdır (bax, *Yığılma(sı)* paylanmaların). Bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətlərin istifadə olunan Y tipləri metrikləşir. Bu belə anlaşılar: təsadüfi kəmiyyətlərin baxılan $X_n(\omega) \rightarrow X_0(\omega)$ Y -na $\mathcal{X}$ -də ehtimal metrikası qarşı qoymaq mümkündür ki, bu metrika üçün bu Y $\mu(X_n, X_0) \rightarrow 0$ yığılmasına ekvivalentdir. Bununla belə təsadüfi kəmiyyətlərin

metrikləşməyən Y -sı da vardır, məs., 1 ehtimalla yığılma. Ehtimal metrikalarının təsnifatında B) bölgüsü sadə metrikalar üçün istifadə olunduğu halda, mürəkkəb metrikalar digər bölgülərdən istifadə edir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin Y anlayışına yaxın olan təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması anlayışı – $X_n, Y_n \in \mathcal{X}$ iki təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqlarının əsasında formalaşmışdır. Bu yaxınlaşma təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən tip Y ilə əlaqədardır və bu Y μ metrikası ilə metrikləşmə bildirir halda, onu ifadə edir ki, $\mu(X_n, Y_n) \rightarrow 0$, lakin metrikləşmə mümkün olmadığı halda bu əlaqə $X_n(\omega) - Y_n(\omega)$ fərqi bu yığılma mənasında sıfır yaxınlaşması ilə ifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlərin Y -sı anlamında ekvivalent olan, $\mathcal{X}$ -də μ və ν metrikaların təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması mənasında ekvivalent olmaya da bilər. Məs., *Levi metrikası* L və *Levi – Proxorov metrikası* π belə metrikalardır, $L \leq \pi$ olmasına baxmayaraq, $x \geq 0$ yarımxunda azalmayan $\psi(x)$ funksiyası yoxdur ki, $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ və $\pi \leq \psi(L)$ şərtlərini ödəsin (bax, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*).

Əd.: [1] Золотарев В. М., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1988, с. 48–52; [2] Ротарь В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 527–46.

YİĞİLMƏ(sı) tiplərin «сходимость типов; convergence of types» – bax, *Tiplərin yığılması*.

YİĞİLMƏ vahid ehtimalla «сходимость с вероятностью 1; convergence with probability 1» – bax, *Yığılma* sanki yəqin, vahid ehtimalla.

YİĞİLMƏ variasiyaya görə «сходимость по вариации; convergence in variation» – paylanmaların yığılma növlərindən aşağıdakı kimi təyin olunan bir yığılmadır. $(U, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, $P_0, P_1, \dots$ – $\mathcal{A}$ -də verilmiş ehtimal paylanmalar ardıcılığı olsun. Təfərrüatla görə, əgər $\{P_n, n \geq 1\}$ ardıcılığı P_0 -a *tam variasiya metrikası* mənasında yığılırsa, yeni

$$\sigma(P_n, P_0) = \sup\{|P_n(A) - P_0(A)|: A \in \mathcal{A}\} \rightarrow 0, \quad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\{P_n, n \geq 1\}$ ardıcılığı P_0 -a variasiyaya görə yığılır. (*) şərti

$$\text{var}(P_n - P_0) = (P_n - P_0)^+(U) + (P_n - P_0)^-(U)$$

variasiyasının sıfır yığılması ilə eynigücdür, burada $(P_n - P_0)^+(A) = (P_n - P_0)^-(A), - (P_n - P_0)(A), A \in \mathcal{A}$ ümumiləşmiş ölçüsünün (yükünün) Jordan – Han ayrılışının komponentleridir.

Əgər $U = \mathbb{R}^k$ olarsa və $P_n, n = 0, 1, \dots$ paylanmalarının sıxlıqları p_k -lər olarsa, onda (*)

$$\int_U |p_n(u) - p_0(u)| du \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

münasibətilə eynigücdür.

Əd.: [1] Лозе М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

1082 YİĞİLMƏ

YİĞİLMA zəif « **сходимость** » слабая; weak convergence » – bax, *Zəif yığılma*.

C – YİĞİLMA(sı) təsadüfi proseslərin « **C – сходимость** случайных процессов; **C – convergence** of stochastic processes » –

təsadüfi proseslərin paylanmalarının ehtimal növüdür ki, limit prosesinin trayektoriyaları kəsilməz olur. $\{X_n(t)\}$ $[a, b]$ sonlu parçasında verilmiş, trayektoriyaları hər hansı $R[a, b] \supseteq C[a, b]$ funksional fəzasından olan, paylanmaları isə $R[a, b]$ fəzasının bütün silindrik çoxluqlarını özündə saxlayan hər hansı $\mathcal{A}$ σ – cəbrindən olan təsadüfi proseslər ardıcılığı olsun. $X(t)$ prosesinin trayektoriyaları 1 ehtimalla kəsilməz olduqda və əgər $R[a, b]$ -də ixtiyari $\mathcal{A}$ – ölçülən, $x \in C[a, b]$ nöqtələrində müntəzəm topologiyada kəsilməz $f(x)$ funksionalı üçün $f(X_n)$ -in paylanmaları $f(X)$ -in paylanmasına zəif yığılarsa, $\{X_n(t)\}$ ardıcılığı $X(t)$ prosesinə **C – yığılır**, deyilir (bax, [1]). Təsadüfi proseslərin **C – y.**-na misal ədəd oxunda empirik proseslərin kəsilməz trayektoriyalı limit Gauss prosesinə yığılmasıdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

D – YİĞİLMA(sı) təsadüfi proseslərin « **D – сходимость** случайных процессов; **D – convergence** of stochastic processes » –

təsadüfi proseslərin paylanmalarının ehtimal növüdür ki, limit prosesi trayektoriyaları 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyalar fəzasından olan prosesdir. Təsadüfi proseslərin **D – paylanması** təsadüfi proseslərin **C – paylanması**na analojiçdir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

F – YİĞİLMA(sı) paylanmaların « **F – сходимость** распределений; **F – convergence** of distributions » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

F – YİĞİLMA(sı) təsadüfi proseslərin « **F – сходимость** случайных процессов; **F – convergence** of stochastic processes » – təsadüfi proseslərin funksionallarının verilmiş $\mathcal{F}$ sinfindən paylanmalarının zəif yığılmasıdır. $\mathcal{F}$, – $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında verilən, qiymətləri $\mathbb{R}$ -dən olan ölçülən funksionallar sinfi olsun. Əgər X qiymətləri $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ fəzasından olan təsadüfi elementdirsə, onda hər bir $f \in \mathcal{F}$ funksionalı üçün $F_X^f(t) = P\{f(X) < t\}$ paylanma funksiyasını təyin etmək mümkündür. (X_0) – qiymətləri $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ -dən olan təsadüfi elementlərin şəbəkəsi olsun. Əgər hər bir $f \in \mathcal{F}$ üçün paylanma funksiyası $F_{X_0}^f, F_X^f$ funksiyasına zəif yığılarsa, onda (X_0) şəbəkəsi X təsadüfi elementinə **F – yığılır**, deyilir.

Məs., X_0 və X təsadüfi proseslər olduqda $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ fəzası rolunu $\mathbb{R}$ -dəki trayektoriyaların (funksiyaların) fəzası

ifadə edir. Əgər $\mathcal{X}$ -də topologiya verilmişdirsə və $\mathcal{F}$ bütün kəsilməz funksiyaların sinfi ilə üst-üstə düşərsə, onda **F – yığılma** təsadüfi proseslərin zəif yığılmasına ekvivalentdir.

Əd.: [1] Боровков А. А., «Успехи матем. наук.», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

G – YİĞİLMA « **G – сходимость; G – convergence** » – bax, *Ortalanma prinsipi* təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün.

YİĞİLMANİ YAXŞILAŞDIRAN ÇEVİRMƏ « **улучшающее сходимость преобразование; convergence improving transformation** » – paylanmaları limit paylanma qanununa «çox yaxın» olan təsadüfi kəmiyyətlər funksiyalarının qurulmasıdır. Məs., $X_1, \dots, X_n$, – $(-1, 1)$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi

kəmiyyətlər və $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i / \sqrt{n/3}$ olsun. Onda mərkəzi limit teoreminə əsasən $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{Z_n < x\} - \Phi(x) = O(n^{-1}),$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır.

Əgər

$$V_n = Z_n - (3Z_n - Z_n^3)/(20n)$$

olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{V_n < x\} - \Phi(x) = O(n^{-2})$$

münasibəti doğrudur.

Y. y. ç.-yə aid digər misallar *Vilson – Hilferti çevirməsi*, *Patnayk çevirməsi*, *Pirson çevirməsi*dir.

Bax, *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi*.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 136–49.

YİĞİLMANIN EKSTREMAL KRİTERİSİ « **сходимости экстремальный критерий; extremal criterion for convergence** »: $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nm_n}$ – hər bir

seriyada asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin seriyalar ardıcılığı olsun və bu təsadüfi kəmiyyətlərin müntəzəm sonsuz kiçiklik şərtini ödədikləri fərz olunur. Fərz olunur ki, $|X_{nk}| < \varepsilon$

olduqda $X_{nk}^\varepsilon = X_{nk}$ və $|X_{nk}| \geq \varepsilon$ olduqda $X_{nk}^\varepsilon = 0$ olur;

$X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nm_n} - \alpha_n$ cəmlərinin paylanma funksiyaların ardıcılığının, α_n , $n = 1, 2, \dots$ sabitlərinin hər hansı seçimində, xarakteristik funksiyasının Levi ifadəsi (bax, *Levi kanonik ifadəsi*) γ, σ^2, M, N xarakteristikaları ilə təyin olunan, sonsuz bölünən paylanma funksiyasına zəif yığılması üçün zəruri və kifayət ki, $P\{\min_{1 \leq k \leq m_n} X_{nk} < x\}$ və $P\{\max_{1 \leq k \leq m_n} X_{nk} < x\}$ paylanma funksiyaların ardıcılıqları

$$L_1 = \begin{cases} 1 - \exp\{-M(x)\}, & x < 0 \text{ olduqda,} \\ 1, & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və

eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ixtiyari $\{a_n\}$ ardıcılığı $\{X_n\}$ təsadüfi ardıcılığı üçün ya yuxarı, ya da aşağı ardıcılıq olur. Bu həddə $MY_1 = m$ riyazi gözləməsi olarsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $\{(m + \varepsilon)n\}$, $\{X_n\}$ üçün Y. a. $[(m - \varepsilon)n - A. a.]$ olur; $\sigma^2 = MY_1^2 < \infty$ olduqda Y. və A. a. –

$$\{mn + (1 \pm \varepsilon) \sigma(2n \ln \ln n)^{1/2}\}$$

kimi ifadə olunur (təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün *təkrar loqarifm qanunu*).

Kəsilməz zamanlı $\{\zeta(t)\}$ təsadüfi prosesi üçün yuxarı və aşağı funksiyalar oxşar surətdə təyin olunur: əgər sanki yəqin hər hansı təsadüfi T qiymətindən başlayaraq $\zeta(t) \leq a(t)$, $t > T$ [uyğun olaraq, kifayət qədər böyük olan ε t -lər olarsa ki, bu t -lər üçün $\zeta(t) \leq a(t)$] olarsa, $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün *yuxarı (aşağı)* funksiya adlanır; t sonlu t_0 limitinə yaxınlaşdıqda yuxarı və aşağı funksiyalar analogi təyin olunur, məs.: əgər kifayət qədər kiçik $|t - t_0|$ üçün $\zeta(t) \leq a(t)$ bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilərsə, $a(t)$ yuxarı funksiya.

Standart Viner prosesi $w(t)$ üçün $t^{1/2}b(t)$ funksiyası

$$\int_0^\infty \exp(-b^2(t)/2) b(t) t^{-1} dt$$

integralı yığıldığı halda yuxarı, dağıldığı halda aşağı funksiya; $b(t)$ – monoton funksiya. Beləliklə, $\varepsilon > 0$ olduqda $w(t)$ prosesi üçün $(1 + \varepsilon)(2t \ln \ln t)^{1/2}$ yuxarı funksiya, $(2t \ln \ln t)^{1/2}$ $w(t)$ üçün aşağı funksiya (*Viner prosesi üçün təkrar loqarifm qanunu*).

Yuxarı (aşağı) funksiyanın digər bir tərifi də istifadə olunur. Əgər

$$P \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \zeta(t)/a(t) < 1 \} = 1$$

$$(P \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \zeta(t)/a(t) > 1 \} = 1)$$

münasibəti ödənilərsə, onda $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesi üçün *yuxarı (aşağı)* funksiya adlanır. Əgər

$$P \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \zeta(t)/a(t) = 1 \} = 1$$

münasibəti ödənilərsə, onda $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesi üçün *dəqiq yuxarı funksiya* adlanır.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [2] Г н х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

YUL PROSESİ « Юла процесс; Yule process » – kəsilməz zamanlı ε Markov *şaxələnen prosesi*dir ki, hər bir hissəcik iki yeni hissəcik yaradaraq məhv olur. Y . p. *xalis doğum prosesi*nin xüsusi halıdır (yeni hissəciyin yaranması intensivliyi onun yarandığı ana qədər mövcud olan bütün hissəciklərin sayına mütənəssibdir), t anında hissəciyin bölünmə intensivliyi $1/(1-t)$ -yə mütənəssib olan intensivlikli $[0, 1]$ parçasında, zaman üzrə qeyri – bircins Y . p. kritik halda redüslənmiş şaxələnen proseslər üçün limit prosesidir (bax, [2]).

Əd.: [1] Y u l e G. U., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B», 1925, v. 213, p. 21–87; [2] F l e i s c h m a n n K., S i e g m u n d – S c h u l t z e R., «Math. Nachr.», 1977, Bd 79, S. 233–41.

YUL – UOKER STATİSTİK QIYMƏTLƏRİ « Юла – Уокера оценки; Yule – Walker estimator » avtoregressiya parametrlərinin –

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_m X(t-m) = Y(t)$$

fərqlər düsturunun $MY(t) = 0$, $MY(t)Y(s) = \sigma^2 \delta_{st}$ şərtlərilə stasionar həlli olan, m tərtib *avtoregressiv* $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$

prosesinin müşahidə olunmuş $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$ qiymətləri üzrə, $a_1, \dots, a_m$ parametrləri üçün *Yul – Uoker tənliyində*

$B(s) = MX(t+s)X(t)$ korrelyasion funksiyasının naməlum əsl qiymətlərini $B_T^*(s)$ seçimi korrelyasion funksiyasının qiymətləri-

lə əvəz etdikdən sonra alınmış tənliklərin naməlum $a_1, \dots, a_m$ parametrlərinə görə həllindən alınmış statistik qiymətlərdir. Adətən, avtoregressiya parametrlərinin Y . – U . s. q.-ni tapmaq üçün m məchullu m xətti tənliklər sistemi əmələ gətirən $k = 1, \dots, m$ sayda tənliklər istifadə olunur; bu tənliklər sisteminin

həlləri $a_1^*, \dots, a_m^*$, geniş şərtlərlə, avtoregressiya parametrlərinin tutarlı statistik qiymətləri olur (bax, [1] – [4]).

m sayda *Yul – Uoker* tənliklər sisteminin ədədi həllində Levinson – Derbin rekurent algoritmindən istifadə etmək münasibdir (bax, *Levinson algoritmi*); T -nin böyük qiymətlərində bu sistemin əmsallarını təyin edən, seçimi korrelyasion $B_T^*(s)$ funksiyasının qiymətlərinin EHM-da hesablanılmasını sürətləndirmək olur, bu məqsədlə $B_T^*(s)$ funksiyasının $x(t)$ sırasının periodogramının Furje çevirməsi olduğuna əsaslanaraq, *sürətli Furje çevirməsi* algoritmi iki dəfə tətbiq olunmalıdır (bax, *Korrelyasion funksiya; q i y m ə t l ə n d i r m ə*). $Y(t)$

prosesinin dispersiyası σ^2 da naməlum olduğu halda, onun tutarlı statistik qiyməti $(\sigma^2)^*$ -nu $k = 0$ olduqda *Yul – Uoker* tənliyi əsasında

$$(\sigma^2)^* = B_T^*(0) + \sum_{s=1}^m a_s^* B_T^*(s)$$

tənliyindən təpəq olar, burada a_s^* , $s = 1, \dots, m$ – avtoregressiya parametrləri üçün məhz Y . – U . s. q. olur. Y . – U . s. q.-ni təyin etmək üçün, bəzən $p > 0$, $k = 1, \dots, m + p$ olan, yenidən təyin edilmiş *Yul – Uoker* tənliklər sisteminin də istifadə olunur ki, bunlar əsasında $a_1^*, \dots, a_m^*$ statistik qiymətləri üçün qiymətlər xətalər kvadrları cəminin minimizasiyasının köməyiylə alınır (bax, [5], [6]). Bezi hallarda Y . – U . s. q.-nin yalnız $s > 0$ olan

$B(s)$ -in qiymətlərini özündə saxlayan və yalnız olduqca yüksək k tərtib *Yul – Uoker* tənlikləri daxil olan tənliklər sistemi əsasında tapılması da maraqlıdır. $N(t)$ müşahidə xətaləri olarsa və

$MN(t) = 0$, $MN(t)N(s) = \sigma_N^2 \delta_{ts}$ şərtlərini ödəyərsə, real müşahidə olunan $X_1(t) = X(t) + N(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B_{11}(s) = MX_1(t+s)X_1(t)$, $s \neq 0$ olduqda $B(s)$ ilə üst-üstə düşür; buna görə də, yalnız $B(0)$ qiymətlərini özündə saxlamayan tənliklərin və yalnız bu tənliklərin istifadə olunması avtoregressiya parametrlərinin Y . – U . s. q.-nə müşahidə xətalərinin təsirini yox etməyə imkan verir. Lakin yüksək tərtibli *Yul – Uoker* tənliklər sisteminin ədədi həllində çox vaxt əlavə çətinliklər yaranır ki, bunlar xüsusi qaydaların cəlb olunmasına gətirir (bax, [6]).

Əgər $Y(t)$ yuxarıda qeyd olunmuş proses, müşahidə olunmuş $x(t)$, $t = 1, \dots, T$ qiymətləri

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_m X(t-m) = \\ = Y(t) + b_1 Y(t-1) + \dots + b_n Y(t-n)$$

fərqlər tənliliyinin həlli olan qansız avtoreqressiv – sürüşən orta prosesinin realizasiyaları olarsa, onda $a_1^*, \dots, a_m^*$ avtoreqressiya parametrlərinin tutarlı Y – U. s. q.-ni təyin edən tənliklər sistemini tapmaq mümkündür, buna görə $k = n+1, \dots, n+m$ olan Yul – Uoker tənliklər sisteminde (və ya $p > 0$, $k = n+1, \dots, n+m+p$ olan belə tənliklərin sisteminde) $B(s) = \mathbf{M}X(t+s)X(t)$ korrelyasion funksiyasının əsl qiymətləri $x(t)$ sırasının seçimi korrelyasion funksiyası $B_T^*(s)$ qiymətləri ilə evez olunmalıdır (bax, Yul – Uoker tənlikləri).

Əd.: [1] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [4] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [5] Кэдзоу Дж. А., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиотехн.», 1982, т. 70, № 9, с. 256–93; [6] Tzga-levitz D., Lim J. S., в кн.: ASSP Spectrum Estim., 2-nd Workshop, N. Y., 1983, p. 49–54; [7] Chan Y. T., Langford R. P., «IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Proc.», 1982, v. 30, № 5, p. 689–98.

YUL – UOKER TƏNLİKLƏRİ « Юла – Уокера уравнения; Yule – Walker equation » – $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ avtoreqressiv prosesinin korrelyasiya funksiyası $B(k) = \mathbf{M}\zeta(t+k)\zeta(t)$ -in qiymətlərinin ödədiyi

$$B(k) + a_1 B(k-1) + \dots + a_m B(k-m) = \\ = \begin{cases} \sigma^2, & k=0 \text{ olduqda,} \\ 0, & k=1, 2, \dots \text{ olduqda} \end{cases}$$

tənlikləridir, burada $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ avtoreqressiv prosesi –

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_m \zeta(t-m) = Y(t)$$

[$\mathbf{M}Y(t) = 0$; $\mathbf{M}Y(t)Y(k) = \sigma^2 \delta_{tk}$, yəni $Y(t)$ diskret bəyaz küydür] fərq tənliliyinin stasionar həllidir. Y – U. t. [1]-də $m = 2$ halında Q. Yul, [2]-də ümumi halda isə Q. Uoker tərəfindən alınmışdır ([3] və [6]).

Avtoreqressiv – sürüşən orta qansız prosesi $\zeta(t)$

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \dots + a_m \zeta(t-m) = \\ = Y(t) + b_1 Y(t-1) + \dots + b_n Y(t-n)$$

fərq tənliliyini ödəyirsə, onda $B(k) = \mathbf{M}\zeta(t+k)\zeta(t)$ korrelyasion funksiyasının qiymətləri

$$B(k) + a_1 B(k-1) + \dots + a_m B(k-m) = 0, \\ k = n+1, n+2, \dots$$

tipli Yul–Uoker tənliklərini ödəyir.

1086 YUL – UOKER

Əd.: [1] Yule G. U., «Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A», 1927, v. 226, p. 267–98; [2] Walker G., «Proc. Roy. Soc. Ser. A» 1931, v. 131, p. 518–32; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [4] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [5] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [6] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

YUNAN – LATIN KUBU « греко – латинский куб; Greek – Latin cube » – bax, *Ortoqonal kublar*.

YUNAN – LATIN KVADRATI « греко – латинский квадрат; Greek – Latin square » – bax, *Ortoqonal kvadratlar*.

YUVA VAHİDİ « гнездовая единица; unit » – bax, *Seçimi statistik araşdırma*.

YÜK ümumiləşmiş ölçü, dəyişən işarəli ölçü « Заряд, обобщенная мера, знакопеременная мера; charge / signed measure » – ədədi qiymətlər alan, hesabı – additiv çoxluq funksiyasıdır. Bir qayda olaraq, Y -ün təyin olunma oblası çoxluqların hər hansı σ – həlqəsidir və xüsusi hallarda çoxluqlar σ – cəbri də ola bilər (bu halda, adətən, tələb olunur ki, boş çoxluqda hər bir Y sıfır qiyməti alsın).

Xüsusi maraq kəsb edən fakt Y -ün təyin olunma oblastının tamamilə $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ genişlənmiş həqiqi oxunun tərkibində olmasıdır, başqa sözlə, hər bir Y -ün təyin olunma oblası ya tamamilə $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ və ya $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ çoxluğuna daxildir.

Y -ə standart misal –

$$\lambda(Y) = \int_Y f d\mu, \quad Y \in S$$

integralı ilə təyin olunan çoxluq funksiyası λ -dır, burada μ hər hansı S σ – cəbriində verilmiş, hər hansı σ – sonlu (müsbət) ölçü, f μ ölçüsü üzrə inteqrallanan ixtiyari ədədi funksiyadır. Yuxarıdakı bərabərlik bir çox hallarda λ yükünün μ ölçüsü üzrə inteqral ifadəsi adlanır.

Y -ün inteqral ifadələri *Radon – Nikodim teoremi* ilə sıx bağlıdır; bu teorem yükün və ölçünün verilənləri arasında hansı münasibətlərlə qeyd olunan inteqral ifadəsinin mümkünlüyü müəyyən edilir.

Y -ə digər bir misal

$$\lambda(Y) = \mu_1(Y) - \mu_2(Y), \quad Y \in S$$

bərabərliyi ilə təyin olunan çoxluq funksiyası λ -dır, burada μ_1 – hər hansı S σ – cəbriində verilmiş müsbət σ – sonlu ölçü, μ_2 isə eyni S σ – cəbriində verilmiş müsbət ölçüdür. Yüklər haqqında *Han teoremi* kimi məlum olan mühüm müddəada isbat olunur ki, hər bir Y təyin olunma oblası ilkin Y -ün təyin olunma oblası ilə eyni olan iki müsbət ölçünün fərqi şəklində ifadə oluna bilər, belə ki, bu ölçülərdən biri həkəmlən sonludur.

Y anlayışı ehtimal paylanmalarının yığılmasında və xüsusilə, σ – topoloji fəzalarda paylanmaların yığılmasının öyrənilməsində böyük rola malikdir (təsadüfi proseslərin yığılması haqqında mühüm məsələnin araşdırılmasında istifadə olunur; bax, [3], [4]).

Onun bu rolu onunla izah olunur ki, ümumiləşmiş Helli teoremine əsasən yükün müntəzəm məhdud variasiyalı ixtiyari altçoxluluğu (xüsusi halda ixtiyari paylanmalar çoxluğu) zəif yığılmanın doğruduğu topologiyalı bütün yüklər fəzasında nisbi kompaktlıq xassəsinə malikdir (bax, [3] – [5]).

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Кол м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [3] А л е к - с а н д р о в А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48, 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [4] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [5] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д. Ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

YÜKLƏNMƏ FUNKSIYASI « загрузка функция; load function » – $(0, t)$ intervalında xidmət sistemə daxil olan tələblərin xidmət müddətlərinin cəminə bərabər *təsədüfi* $K(t)$ funksiyasıdır. Y . f.-nin sıçrayış anları tələblərin daxil olduğu anlarla üst-üstə düşür, sıçrayışların boyunu (uzunluğu) tələblərin xidmət olunma müddətlərinə bərabərdir. *Virtual gözlemə müddəti* $w(t)$ Y . f. ilə $w'(t) = K'(t) - \text{sign } w(t)$ stoxastik differensial tənliyi ilə əlaqəlidir (bu tənlikdə tələmlər ümumiləşmiş mənada anlaşılır). Ən çox yayılmış hal $K(t)$ ümumiləşmiş Puasson prosesi olduğu haldır.



ZAMAN XARAKTERİSTİKASI, FİLTİRİN « временная характеристика фильтра; time response of a filter » – bax, *Xətti filtr*.

ZAMAN PƏNCƏRƏSİ « временное окно; time window » – bax, *Spektral sıxlıq; qeyri-parametrik statistik qiymət*.

ZAMAN – SELEKTİV FEYDİNGİ / DONMASI « время – селективное затухание; time – selective fading » – bax, *Feydinglər / donmalar kanalda*.

ZAMAN SİRASI « временной ряд; time series » – 1) $\zeta(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ diskret təsadüfi prosesi, təsadüfi ardıcılığıdır.

2) Z. s. diskret $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $t=t_1, t_2, \dots, t_N$ qiymətlərində müşahidə olunan sonlu realizasiyasıdır (bəzən t_i və t_{i+1} nöqtələri arasındakı məsafə bütün i -lər üçün eyni götürülür). Z. s. anlayışı yalnız zaman etibarı ilə təkamülde olan proseslərlə bağlı istifadə olunur (məs., t fəza koordinatı ola bilər).

Spektral analiz(i) zaman sıralarının məqaləsinə bax.

ZAMAN ÜZRƏ DİSKRETİZASIYA / KVANTLAMA « временная дискретизация / квантование во времени; time quantization » – analiz (ölçmə) obyektinin kəsilməz $x(t)$ prosesinin t_i diskret müşahidə anlarındakı $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_i), \dots$ hesablanan qiymətlər ardıcılığı ilə əvəzlənməsidir. Tərs əməliyyat hesablanan qiymətlər əsasında müəyyən dəqiqliklə ilkin $x(t)$ funksiyasının bərpasıdır və bu əməliyyat bərpa olunma adlanır. Əgər hesablamalar bərabər $T = t_{i+1} - t_i = \text{const}$ intervallarından bir götürülürsə, onda Z. ü. d. müntəzəm, əks halda qeyri-müntəzəm adlanır (bax, [1]).

Z. ü. d.-nin əsas problemi hesablamalar tezliyinin seçilməsidir ki, bu da bir qayda olaraq diskretləşdiriləcək funksiyanın xüsusiyyətləri haqqında mülahizələrin dəqiqliyi və aprior təsəvvürlərə əsaslanır. Məhdud spektrli proseslər üçün Kotelnikov – Şennon teoremi fundamental əhəmiyyətə malikdir: bu teoremə görə $x(t)$ funksiyası $T = 1/2f_m$ addımlı diskret hesablamalar üzrə dəqiqliklə bərpa olunur, burada f_m – $x(t)$ funksiyasının spektrinin maksimal tezliyidir.

Z. ü. d. addımının ehtimal modelləri əsasında seçilməsi geniş yayılmışdır; bu halda fərz olunur ki, $x(t)$ hər hansı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin realizasiyasıdır (əksər hallarda stasionar təsadüfi prosesin) və bu prosesin statistik xarakteristikaları məlumdur (bax, məs., [2], [3]). Bu halda Z. ü. d.-nin addımı T intervalı üzrə ortalanan bərpa xətasının kvadratik ortasını və ya verilmiş maksimal qiymətini aşmaması şərtindən asılı seçilə

bilinir. Xüsusi halda, iki qonşu hesablanma üzrə xətti interpolasiyada, yeni $x(t)$

$$\bar{x}(t_i + \Delta t) = (1 - \Delta t/T) x(t_i) + \Delta t/T x(t_i + T), 0 \leq \Delta t \leq T$$

təqribi düsturu ilə bərpa olunduqda, stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün maksimal kvadratik orta xətanın verilməmiş qiymətini aşma şərti

$$3/2 - 2r_{xx}(T/2) + r_{xx}(T)/2 \leq \varepsilon^2$$

münasibətlə ifadə olunur, burada $r_{xx}(\cdot)$ – $\zeta(t)$ -nin monoton normalanmış korrelyasion funksiyası, ε^2 isə diskretizasiya intervalının ortasında bərpa xətasının məqbul dispersiyasının $\zeta(t)$ funksiyasının dispersiyasına olan nisbətidir.

Əd.: [1] Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М., Введение в информационную теорию измерений, М., 1974; [2] Ицкович Э. Л., Статистические методы при автоматизации производства, М. – Л., 1964; [3] Немировский А. С., Волконский В. А., «Измерительная техника», 1963, № 4, с. 1–6.

ZAMAN ÜZRƏ KVANTLAMA / DİSKRETİZASIYA « квантование во времени / временная дискретизация; time quantization » – bax, *Zaman üzrə diskretizasiya / kvantlama*.

ZAMAN ÜZRƏ ORTA QIYMƏT « временное среднее значение; time-average value » – bax, *Ergodik teoremlər*.

ZƏİF DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ « слабый принцип правдоподобия; weak likelihood principle » – bax, *Ən böyük doğruxaoxşarlıq prinsipi*.

ZƏİF HARMONİKLƏNƏNLİK(yi) təsadüfi prosesin « слабая гармонизируемость случайного процесса; weak harmonizability of a random process » – bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*.

ZƏİF İZOMORF DİNAMİK SİSTEMLƏR « слабо изоморфные динамические системы; weakly isomorphic dynamical systems » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik*.

ZƏİF KOMPAKT ŞƏVƏKƏ(sı) ehtimal ölçülərinin « слабо компактная сеть вероятностных мер; weak compact net of probability measure » – bax, *Kompaklıq(ğı) ölçülər ailəsinin*.

ZƏİF NİSBİ KOMPAKTLIQ(ğı) ehtimal ölçüləri ailəsinin « слабая относительная компактность семейства вероятностных мер; weak relative compactness of a family of random measures » – bütün ehtimal ölçüləri fəzasının *zəif topologiyasında ehtimal ölçüləri* ailəsinin nisbi kompaklığıdır.

T metriklenen separabel fəza olduğu halda T -də ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathcal{M}$ -in Z . n. k. zəif nisbi sekvensial kompaktlıqla eynigüclüdür, yəni $\mathcal{M}$ zəif nisbi kompakt ailə, yalnız və yalnız, o halda olur ki, $\mathcal{M}$ -in elementlərindən ibarət $\{\mu_n\}$ ardıcılığından zəif yığılan $\{\mu_{k_n}\}$ ardıcılığını ayırmaq mümkün olsun.

Z . n. k. şərtləri *Proxorov kriterisində* verilir: tam separabel metrik T fəzasında ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathcal{M}$, yalnız və yalnız, o halda zəif nisbi kompakt ailədir ki, o, sıx olsun, yəni hər bir ε üçün $e \in K \subset T$ kompakt altçoxluğu tapılar ki, hər bir $\mu \in \mathcal{M}$ üçün $\mu(K) \geq 1$ şərti ödənilsin.

Banach fəzası halında Z . n. k.-in öyrənilməsində ehtimal ölçülərinin *müstəvi – sıxlaşmış ailəsi* anlayışından istifadə olunur. Bir çox konkret fəzalar üçün müxtəlif ehtimal fəzalarının Z . n. k. şərtləri məlumdur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

ZƏİF ÖLÇÜLƏN İNİKAS « слабо измеримое отображение; weakly measurable mapping », *skalyar ölçülən inikas* – qiymətləri Banach və ya ümumi lokal qabanq B fəzasından olan inikas üçün ölçülənlik anlayışdır.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza olsun. Əgər B -də hər bir kəsilməz xətti x^* funksionalı üçün $x^*(X(\cdot))$ ədədi funksiyası ölçülən olarsa, $X: \Omega \rightarrow B$ inikası *zəif (skalyar) ölçülən inikas* adlanır. Zəif ölçülənlik B -də silindrik σ -cəbr və Ω -da $\mathcal{A}$ σ -cəbrinə nəzərən ölçülənliklə eynigüclüdür. Əgər B metriklenen və separabel fəza olarsa, onda X -in zəif ölçülənliyi hər bir $\beta \subset B$ Borel çoxluğu üçün $X^{-1}(\beta) \in \mathcal{A}$ münasibətinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası olarsa, X -in Z . ö. i. qiymətləri B -dən olan *təsadüfi inikas* adlanır.

Əd.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

ZƏİF PAYLANMA « слабое распределение; weak distribution » – bax, *Silindrik ölçü*.

***ZƏİF PİLLƏLİ ARTAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « слабые лестничные возрастающие случайные величины; increasing weak ladder random variables »** – bax, *Daxil edilmiş bərpə prosesi*.

ZƏİF TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « слабый случайный линейный оператор; weak random linear operator » – bax, *Təsadüfi xətti operator*.

ZƏİF TOPOLOGİYA « слабая топология; weak topology », *dar topologiya*, ölçülər fəzasında – metrik fəzada və ya daha ümumi tamamilə requlyar Hausdorff topoloji T fəzasında bütün Radon *ehtimal ölçülərinin* fəzası $\mathcal{M}(T)$ -də ən zəif topologiyadır ki, bu topologiyaya nəzərən bütün $\mu \rightarrow \int_T f d\mu$ funksionalları kəsilməzdirlər, burada $f, - T$ -də

bütün məhdud kəsilməz həqiqi funksionallar çoxluğunda dəyişir. Z . t.-də yığılma ehtimal ölçülərinin *zəif yığılması* ilə eynigüclüdür. Əgər T metrik fəza olarsa, onda $\mathcal{M}(T)$ -də Z . t. metriklenəndir. $\mathcal{M}(T)$ -nin altçoxluqlarının nisbi kompaktlığı

şərti ehtimal ölçüləri ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının *Proxorov kriterisi* ilə verilir.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977.

ZƏİF YIĞILMA « слабая сходимость; weak convergence », *əsasən yığılma*, – ehtimal nəzəriyyəsində baxılan və aşağıdakı kimi təyin olunan, *əsas yığılma* növüdür. $\{\mathbf{P}_n\}$

– metrik S fəzasının Borel çoxluqlarında paylanmaların (ehtimal paylanmalarının) ardıcılığı olsun. Əgər S fəzasında ixtiyari həqiqi məhdud kəsilməz f funksiyası üçün

$$\lim_n \int_S f d\mathbf{P}_n = \int_S f d\mathbf{P} \quad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\mathbf{P}_n\}$ ardıcılığı $\mathbf{P}$ paylanmasına *zəif yığılan* ardıcılıq adlanır. Z . y., adətən, $\xrightarrow{w}$ simvolu ilə işarə olunur. Aşağıdakı şərtlər Z . y. ilə eynigüclüdür:

1) $(*)$ münasibəti ixtiyari məhdud müntəzəm kəsilməz həqiqi f funksiyası üçün ödənilir;

2) $(*)$ münasibəti ixtiyari məhdud $\mathbf{P}$ – sanki hər yerdə kəsilməz həqiqi f funksiyası üçün ödənilir;

3) $\lim_n \mathbf{P}_n(F) \leq \mathbf{P}(F)$ münasibəti ixtiyari $F \subset S$ qapalı çoxluğu üçün ödənilir;

4) $\lim_n \mathbf{P}_n(G) \geq \mathbf{P}(G)$ münasibəti ixtiyari $G \subset S$ açıq çoxluğu üçün ödənilir;

5) $\lim_n \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$ münasibəti $\mathbf{P}(\partial A) = 0$ şərtini ödəyən

ixtiyari $A \subset S$ Borel çoxluğu üçün ödənilir, burada ∂A , – A çoxluğunun sərhədidir;

6) $\lim_n \pi(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}) = 0$ münasibəti doğrudur, burada π – *Levi* – *Proxorov* metrikasıdır.

Fərz olunur ki, U S -in altçoxluqlarının kəsişmə emeline nəzərən *ele qapalı* sinfidir ki, S -in ixtiyari açıq çoxluğu U -nun çoxluqlarının sonlu və ya hesabı sayda birləşməsidir. Onda bütün $A \in U$ üçün $\lim_n \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$ münasibəti ödənilərsə,

$\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ – zəif yığılması doğrudur. Məs., əgər $S = \mathbb{R}^k$ və $F_n, F, - \{\mathbf{P}_n\}$ və $\mathbf{P}$ paylanmalarının uyğun paylanma funksiyaları olarsa, onda $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\mathbf{P}_n(A) \rightarrow \mathbf{P}(A)$ bütün qabanq Borel A çoxluqları üçün müntəzəm yığılma olsun.

$\mathbf{P}_n, \mathbf{P}$ – metrik S fəzasında paylanmalar, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ və $h, - S$ fəzasının metrik S' fəzasına $\mathbf{P}$ – sanki hər yerdə kəsilməz ölçülən inikas olsun; onda $\mathbf{P}_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mathbf{P} h^{-1}$ doğrudur, burada S -də verilmiş ixtiyari $\mathbf{Q}$ paylanması üçün $\mathbf{Q} h^{-1}$ paylanması onun S' -ə h – obrazıdır: ixtiyari $A \in S'$ Borel çoxluğu üçün

$$\mathbf{Q} h^{-1}(A) = \mathbf{Q}(h^{-1}(A)).$$

S -də paylanmaların ailəsi $\mathcal{P}$ -nin elementlərinin ixtiyari ardıcılığının zəif yığılan altardıcılığı olarsa, $\mathcal{P}$ ailəsi *zəif nisbi*

kompakt ailə (rus. слабое относительно компактное семейство) adlanır. Zeif nisbi kompaktlıq şərti Proxorov teoremi ilə verilir. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $K \subset S$ kompaktı varsa ki, ixtiyari $P \in \mathcal{P}$ üçün $P(K) > 1 - \varepsilon$ şərtini ödəsin, onda $\mathcal{P}$ sıx ailə adlanır. Proxorov teoremi: əgər $\mathcal{P}$ sıx ailədirsə, onda $\mathcal{P}$ nisbi kompakt ailədir. əgər S separabel və sıx ailədirsə, onda $\mathcal{P}$ -nin zeif nisbi kompaktlığı onun sıx ailə olmasını doğurur. $S = \mathbb{R}^k$ olduqda paylanmalar ailəsi $\mathcal{P}$, yalnız və yalnız, o halda zeif nisbi kompakt ailədir ki, $\mathcal{P}$ -yə uyğun xarakteristik funksiyalar ailəsi sıfırda eyni dərəcədə olsun.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Лозе М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

Z. y. anlayışına bezən yuxarıda verilən mənadan fərqli digər mənə verilir. Əgər $H_0, H_1, \dots, - \mathbb{R}^1$ -də məhdud və azalmayan funksiyalar və $H_n(-\infty) = 0$ olarsa, zeif yığılma H_n funksiyalarının $n \rightarrow \infty$ olduqda H_0 funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində H_0 -a yığılmasına deyilir. Bu yığılmanın əsas xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, paylanma funksiyaları ardıcılığının limiti < 1 tam dəyişməsi (xüsusi halda sabit) olan azalmayan funksiyaların Furre – Stilyes çevirmələri h_n, h_0 terminləri ilə ifadə olunan aşağıdakı şərtidir: hər bir $n > 0$ üçün

$$\int_0^u h_n(t) dt \rightarrow \int_0^u h_0(t) dt, \quad n \rightarrow \infty$$

(ətraflı bax, [2] və Yığılma tamamilə).

ZƏİF YIĞILMA(sı) ehtimal ölçülərinin «слабая сходимость вероятностных мер; weak convergence of probability measures» – ehtimal nəzəriyyəsində ehtimal ölçülərinin yığılma növlərindən ən mühüm yığılma növüdür. Metrik T fəzasında μ_n Borel ehtimal ölçülərinin $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ ardıcılığı və T -də hər bir kəsilməz və məhdud həqiqi f funksionalı üçün

$$\lim_n \int_T f d\mu_n = \int_T f d\mu$$

münasibəti ödənilsə, $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ ardıcılığı T -də verilən μ Borel ehtimal ölçüsünə zeif yığılır, deyilir. Aşağıdakı şərtlərdən hər biri (μ_n) -in μ -yə Z. y. ilə eynigüclüdür.

- 1) hər bir qapalı $F \subset T$ üçün $\lim_n \sup \mu_n(F) \leq \mu(F)$;
- 2) hər bir açıq $U \subset T$ üçün $\lim_n \inf \mu_n(U) \geq \mu(U)$;
- 3) sərhədinin μ – ölçüsü sıfır bərabər hər bir Borel çoxluğu $B \subset T$ üçün $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$.

Separabel T fəzası üçün Z. y. Levi – Proxorov metrikası ilə metriklenir:

$$\pi(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \}$$

berabersizliyi hər bir Borel çoxluğu $A \subset T$ üçün doğrudur,

burada $A^\varepsilon, - A$ çoxluğunun ε – ətrafıdır.

Əgər $T = \mathbb{R}^n$, G_n və G uyğun olaraq, μ_n və μ ölçülərinin paylanma funksiyaları olarsa, onda (μ_n) -in μ -yə Z. y. $G_n(x)$ -in $G(x)$ -ə G -nin kəsilməz olduğu hər bir $x \in \mathbb{R}^n$ nöqtəsində yığılması ilə eynigüclüdür.

Tamamilə requlyar Hausdorff fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin Z. y. da analogi təyin olunur. «Z. y.» termini evezinə bezən, «dar yığılma», «tam yığılma», «Bernulli mənada yığılma» terminləri də istifadə olunur. Ehtimal ölçülərinin Z. y.-sı ölçülər fəzasının zeif topologiyada yığılmasıdır.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Лозе М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., 1977.

ZƏİF YIĞILMA(sı) ölçülərin «слабая сходимость мер; weak convergence of measures» – bax, Fəzası, ölçülərin.

ZƏİF YIĞILMA(sı) topoloji fəzada ölçülər şəbəkəsinin «слабая сходимость сети мер в топологическом пространстве; weak convergence of a net of measures in a topological space» – ölçülər şəbəkəsinin ölçülər fəzasında zeif topologiyaya uyğun yığılmasıdır. $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ – ölçülər şəbəkəsi, P – $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ fəzasının Borel σ – cəbrində verilmiş ölçülər fəzasından olan ölçüdür. Əgər $\mathcal{X}$ -də verilən ixtiyari kəsilməz məhdud f funksiyası üçün

$$\lim_{\theta} \int_{\mathcal{X}} f(x) dP_\theta(x) = \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(x)$$

berabərliyi ödənilsə, (P_θ) şəbəkəsi P ölçüsünə zeif yığılır, deyilir. Bu bərabərlik onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\theta_\varepsilon \in \Theta$ vardır ki, bütün $\theta \geq \theta_\varepsilon$ üçün

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x) dP_\theta(x) - \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(x) \right| < \varepsilon$$

berabərsizliyi ödənilir. Aleksandrov teoremi ölçülər şəbəkəsinin zeif yığılma kriterisini verir. Yuxarıda qeyd olunanlar topoloji və həmçinin σ – topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ZƏRİF / SEYRƏKLƏNMİŞ ÇOXLUQ «тонкое множество; thin set» – requlyar nöqtələri olmayan sağ Markov prosesinin vəziyyətlərinin hər hansı sanki Borel çoxluğundan olan çoxluqdur (bax, Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesləri üçün). Beləliklə, əgər $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathcal{A}_t, P_x)$ vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$ olan, bircins, ümumiyyətlə, qınlan sağ Markov prosesi olarsa, onda $\Gamma \subset \mathcal{E}$ çoxluğu aşağıdakı halda Z. ç.-dur: elə sanki Borel $A \supset \Gamma$ çoxluğu olarsa ki, bu çoxluq üçün bütün $x \in \mathcal{E}$ vəziyyətlərində $\tau_A > 0$ şərti P_x – sanki yəqin ödənilmiş olsun, onda A Z. ç.-dur, burada $\tau_A, - t = 0$ anından sonra A -ya ilk çatım anıdır. Z. ç. polyar çoxluğun xüsusi halıdır.

$\Gamma \subset \mathcal{E}$ çoxluğunun hər hansı $x \in \mathcal{E}$ nöqtəsi qeyri – requlyar nöqtə olarsa, Γ çoxluğu bu nöqtədə zərif çoxluq adlanır. Lakin $\mathcal{E}$ -dən olan bütün nöqtələrdə Z. ç. ζ prosesi üçün Z. ç. olmaya da bilər.

Əd.: [1] Blumenthal R. M., Gettoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

ZƏRURİ KAFİ STATİSTİKA « необходимая достаточная статистика; necessary sufficient statistic » – minimal kafi statistikadır.

ZƏRURİ STATİSTİKA « необходимая статистика; necessary statistics » – bax, Minimal kafi statistika.

ZƏRURİ TOPOLOGİYA « необходимая топология; necessary topology » – T lokal qabarıq fəzasına qoşma T^* fəzasında topologiyadır və bu topologiyada T -də ixtiyari sıx silindrik μ ehtimalının xarakteristik funksionalı $\hat{\mu}$ kəsilməzdir.

ZİGEL PROBLEMİ « Зигеля задача; Siegel problem »: – $\mathbb{R}^n$ fəzasının çevirmələrinin verilmiş G qrupu üçün $\omega \subset \mathbb{R}^n$ nöqtələr sistemini tapmaq lazımdır ki, bunlar üçün $\{g\omega : g \in G\}$ obrazlar çoxluğunda topalanmış G – invariant

nöqtəvi proses mövcud olsun. K. Zigel isbat etmişdir ki, $\mathbb{R}^n$ -in Lebeq ölçüsünü saxlayan affin çevirmələrinin qrupu üçün uyğun məsələnin həlli tamqıymətli koordinatlı nöqtələr şəbəkəsidir (bax, [1]). $\mathbb{R}^n$ -in paralel köçürmələr qrupu və Evklid qrupu üçün Z. p.-nin həlləri k – şəbəkələr (bir-birindən yerindəyişmə ilə alınan k – şəbəkələrin birləşmələri) və yalnız bu şəbəkələrdir. Affin qrupun bəzi altqrupları üçün Z. p.-nin həlləri tapılmışdır və bu həllər, artıq, k – şəbəkələr olmur.

Əd.: [1] Siegel S., «Ann. Math.», 1945, v. 46, № 2, p. 340–47.

ZİGEL – TYUKİ KRİTERİSİ « Сиджела – Тьюки критерий; Siegel – Tukey test » – iki skalyar seçimin miqyas fərqlərinin olması alternativinə qarşı miqyas bircinsliyinin yoxlanılması üçün istifadə olunan *ranq kriterisidir*. Asılı olmayan skalyar seçimlərlə ifadə olunan iki ümumi çoxluğun (rus. генеральная совокупность) bircinsliyinə alternativ hipotez medianlar eyni olduqda səpələnmələrdəki fərqlənmədir. Ranqların təyinsistemi: bütün müşahidələr bir çoxluq kimi birləşdirilir; 1 ranqı bu çoxluqdakı ədədlərdən ən kiçiyinə aid edilir, 2 ranqı qalan ədədlərdən ən böyüyünə aid olunur, 3 ranqı yenidən qalanlardan ən böyüyünə; 4 ranqı qalanlardan ən kiçiyinə aid olunur və s. Əgər bütün müşahidələr artma qaydası ilə düzülərsə, onda bunların ranqlar ardıcılığı: 1, 4, 5, ..., 3, 2 olacaqdır. Z. – T. k. seçimlərdən birinin ranqları cəmidir. İlkin hipotezdə bu cəm Uilkokson ranqlar cəmi kriterisi kimi sərbəst paylanır. Buna görə də, Z. – T. k. üçün Uilkokson kriterisi üçün tərtib olunmuş cədvəllərdən istifadə olunur (bax, [1], [2], [3]).

Medianları ola bilsin ki, eyni olmayan iki ümumi çoxluğun seçimləri üzrə miqyaslarının bərabərliyinin yoxlanılması üçün L. Mizes ranq kriterisinə oxşar, paylanmadan asılı olmayan (ilkin hipotezdə) kriteri təklif etmişdir (bax, [2], [4]). Bu kriteridə süni randomizasiyadan – ilkin seçimlərin altqruplara təsadüfi bölgüsündən istifadə olunur.

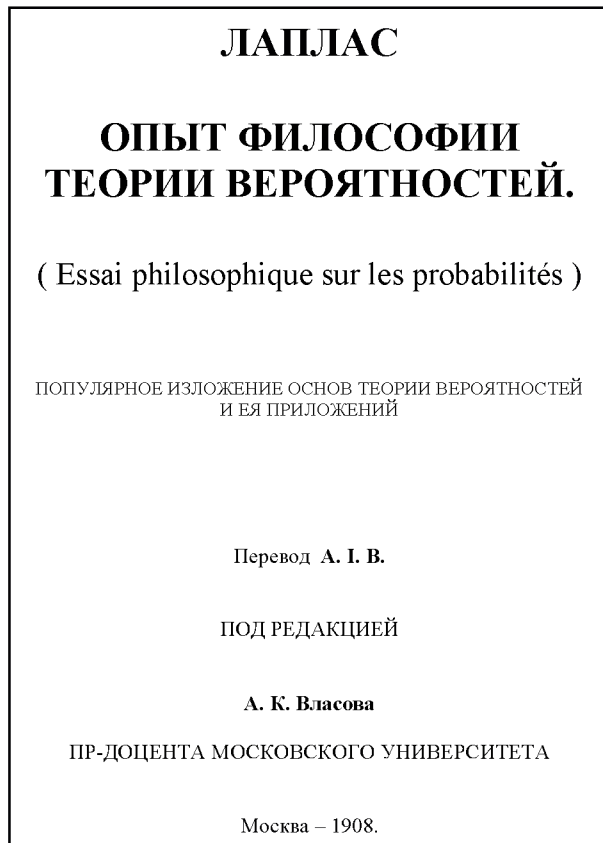
Əd.: [1] Siegel S., Tukey J. W., «J. Amer. Statist. Assos.», 1960, v. 55, p. 429–45; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Moses L. E., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, p. 973–83.

ZİRVƏ(sı) paylanmanın « вершина распределения; mode of a distribution » – bax, *Moda*.

EHİTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA MÜNTƏXƏBATI

Müntəxəbat fransız alimi P. Laplasın «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» adlı görkəmli əsərinin tərcüməsi ilə başlayır. Daha sonra giriş hissəsi, son və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərslik – V. Ya. Bunyakovskinin «Основания математической теории вероятностей» (СПб., 1846) adlı əsərindən tarixi öçerk verilir. Müntəxəbatın xülasə hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın 1-ci və 2-ci nəşrlərində (М., 1937-58) verilmiş ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən ibarətdir. P. Laplas (P. Laplace, 1749-1827) yaşadığı illərdə «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» beş dəfə (fevral və noyabr, 1814, 1816, 1819, 185) dərc olunmuşdu. Bu əsərin ikinci və üçüncü nəşrləri onun «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi» («Théorie analytique des probabilités», Paris, 1812, – birinci nəşr) əsərinin giriş hissəsi kimi verilmişdir. Belə hesab olunur ki, «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» hələ 1725-də, «Écoles normales»-da müəllifin oxuduğu mühazirələrin ideyalarının necə inkişaf etməsini özündə ehtiva edir.

Müntəxəbatın birinci hissəsinin titullar sahifəsi aşağıda verilir.



«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» və onun tərcümələri 1840-dan başlayaraq, 19-cu və 20-ci əsrlərdə dəfələrlə nəşr olunmuşdur. Onun sonuncu nəşrlərindən biri – 1825-ci il 5-ci fransız nəşrinin ingilis tərcüməsi (Laplace R. S., Philosophical essay on probabilities, N. Y. – B., 1994), əvvəlki nəşrlərin izahları nəzərə alınmaqla geniş kommentarilərlə hazırlanmışdır.

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» rus dilinə tərcümədə 1908-də dərc olunmuşdur. Azərbaycan dilində bu tərcümə aşağıda verilir.

Tərcüməyə ön söz

Ehtimal nəzəriyyəsi – riyazi analizin ən maraqlı, hətta qeyri-mütəxəssislərin də nəzərini özünə cəlb etmiş qollarından biridir. Riyazi statistikanın, biometrikanın, müxtəlif növ sığortalıların inkişaf edərək və geniş xalq kütlələrinə yayılaraq, ictimai və iqtisadi siyasətin qaçılmaz faktoruna çevrilməsi, bu elmlərin əsası və tətbiqlərinin təməli olan ehtimal nəzəriyyəsinin bunlardakı rolunu sübut edir.

Son zamanlar bu nəzəriyyə yalnız fizika–riyaziyyat fakültələrinin riyaziyyat bölmələrində, əvvəllər də tədris olunmuş bir predmet kimi hökmən, hətta belə bölmələr yaradılmış hüquq fakültələrinin və digər ali məktəblərin bölmələrində də, öyrənilməsi vacib sayılan bir predmet kimi daxil olunur.

Beləliklə, təbii olaraq, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə belə əsərlərin yaradılması tələbatı yaranmışdı ki, bunlar, daha geniş oxucu dairəsi üçün nəzərdə tutulmuş və bu predmetin hərtərəfli işıqlandırılmasında bu nəzəriyyənin əsaslı surətdə öyrənilməsinə giriş rolunu oynamış olsun.

Laplasın oxucunun diqqətinə burada təqdim olunan «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» («Essai philosophique sur les probabilités») əsərinin tərcüməsini bu cəhətdən ən məqsədəuyğun hesab etmək olar. Fransız həndəsəçisinin bu gözəl əsərində bu nəzəriyyənin, demək olar ki, bütün əsas məsələlərinin toplusu verilir, təsadüfi təzahürlər nəzəriyyəsinin elm və həyatın ən dərin və incə məsələlərinə tətbiq olunduğu məsələlərinə toxunulur. Ehtimal nəzəriyyəsi heç bir kəsə Laplasa olduğu qədər borclu deyildir. Onun «Théorie analytique des probabilités» əsəri bu predmet üzrə bir növ *prinsipia* təşkil edir. Bu əsas əsərə giriş kimi «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» əlavə olunmuşdur, bu başlıq ilə o, əvvəl ayrıca monoqrafiya kimi dərc olunmuşdu. Bu klassik əsərin yüz illik yaşı onun əhəmiyyətini azaltmamışdır. Cevonsun ifadəsinə görə ««Essai philosophique sur les probabilités» – dərc olunmuş ən dərin və incə traktatlardan biridir. Məntiqi metodu öyrənən hər bir kəs bu traktatla yaxşı tanış olmalıdır, çünki zaman ötdükcə o, (traktat, H. M.) az və ya heç bir şey itirməmişdir». Cevons özünün «Elmin əsasları, məntiq və elmi metod haqqında traktat» əsərlərində belə yazmışdı. Belə də əlavə etmək olardı ki, Laplasın bu kitabı ilə tanışlıq, ümumtəhsil məqsədlərində öz məlumatlarının artırılmasını genişləndirmək istəyən şəxsləri, şübhəsiz ki, qane edəcəkdir, özünü elmi işlərə və ya statistika, biometrika və sığortanın praktiki məsələlərinə elmi nəticələrin tətbiqinə həsr etmiş insanlarda riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin əsaslı surətdə öyrənilməsinə maraq və enerji yaradacaqdır.

Tərcümə, Laplasın əsərlərinin tam küllüyyatına daxil olmuş «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi»-nin («Théorie analytique des probabilités») üçüncü nəşrinə əlavə olunmuş girişdən alınmışdır. Dahi həndəsəçinin məşhur «Baxış» («Опыт», «Essai») traktatı artıq çoxdan digər dillərə tərcümə olunmuşdur və mən fikirləşirəm ki, son zamanlar ehtimal

nəzəriyyəsinə bizdə maraq canlandığından, rus tərcüməsinin (az. tərcüməsinin, H. M.) olması artıq bir şey olmayacaqdır.

A. Vlasov.

EHİTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ FƏLSƏFƏSİNƏ BAXIŞ

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» – mənim, riyaziyyat professoru kimi, Laqranjla birlikdə milli konventin dekreti ilə dəvət olunduğum «école normales»-da, 1795-də ehtimal nəzəriyyəsi üzrə oxuduğum mühazirələr kursunun genişləndirilmiş formada «Théorie analytique des probabilités» əsərinə verilmiş giriş sözüdür. Burada mən, analizdən istifadə etmədən, ehtimal nəzəriyyəsinin bu kitabda şərh olunmuş prinsiplərini və ümumi nəticələrini, əksəriyyəti məhz ehtimal nəzəriyyəsinin məsələləri olan həyatın ən mühüm suallarına tətbiq edərək şərh etmək istəyirəm. Dəqiq demək istəsək, hətta demək olar ki, bizim bütün biliklərimiz ehtimalıdır; bizim yaqınlıqla dərk edə biləcəyimiz predmetlərin çox da geniş olmayan dairəsində, hətta riyaziyyatın özündə belə, həqiqətə qovuşmanın əsas vasitələri – induksiya və analogiya – ehtimallara əsaslanır; beləliklə, bəşəri biliklərin bütün sistemi bu əsərdə şərh olunmuş nəzəriyyə ilə bağlıdır. Şübhəsiz ki, burada idrakın, ədalətin və humanizmin əbədi prinsiplərinə bunları daima müşayiət edən xoşbəxt bir mümkünlüklər (rus. *счастливости*) kimi baxılarsa, maraqla görmək olur ki, bu prinsiplərə riayət etmək olduqca faydalıdır, lakin onları nəzərə almamaq çox ziyanlıdır; belə ki, bunların mümkünlüyü lotereyada əlverişli mümkünlüklər kimi təsadüfün dəyişmələri arasında üstünlüyə malikdir. Mən arzu edərdim ki, bu giriş sözündə rast gəlinən fikirlər filosofların diqqətini cəlb etsin və onların diqqətini olduqca dəyərli predmetin öyrənilməsinə yönəldə bilsin.

Ehtimal haqqında

Bütün hadisə və ya proseslər, hətta özünün əhəmiyyətsizliyi ilə guya ki, təbiətin ali qanunlarından asılı olmayanları belə, o dərəcədə də məhz bu qanunların zəruri nəticələridir, məs., günəşin dövr etməsi kimi. Bu nəticələri bütün kainat sistemi ilə əlaqələndirən bağları bilmədən, bunların birinin digərinin ardınca məlum bir düzgünlüklə və ya görünməz bir qayda ilə baş verib-vermədiklərindən asılı olaraq, onların son səbəblər və ya təsadüf nəticəsində baş verdikləri fərz olunur, lakin xəyalın məhsulu olan bu səbəblər, bizim bilik həddlərimiz genişləndikcə, nəzərə alınmayaraq, sağlam fəlsəfə qarşısında tamamilə itmiş oldu, belə ki, bu fəlsəfəyə görə, bu səbəblər – həqiqi səbəbi yalnız özümüz olan – bilgisizliyin təzahürüdür.

Baş vermiş hər bir hadisə və ya proses özündən əvvəlki ilə belə bir açıq-aşkar prinsipə əsaslanaraq əlaqəlidir ki, hər hansı hadisə və ya proses (təzahür) onu doğuran səbəb olmadan baş verə bilməz. «Kifayətəddici əsas prinsip» (rus. «*принцип достаточного основания*») adı ilə məlum olan bu aksiom, hətta əhəmiyyətsiz sayılan olaylara da şamil olunur. Bu olayları onları əmələ gətirən səbəblər olmadan ən azad iradə belə yarada bilməz; çünki bu iradə, əgər bir halda təsir göstərüb, digər halda təsir göstərməkdən yayınmış olsa idi və hər iki vəziyyət isə bütün cəhətlərlə tamamilə oxşar olsaydı, iradənin seçimi – səbəbsiz bir olay olardı: Leybnitsin dediyi kimi, bu iradə epikürçülərin kor-koranə bir halı olardı. Əks fikir əqlin illüziyasıdır ki, o, fərqi nə varılmayan davranışlarda iradənin bu və ya digər seçimində xırda səbəbləri nəzərdən qaçıaraq əminliklə hesab edir ki, bu fikir özü-özünə və səbəbsiz yaranır.

Beləliklə, biz kainatın hazırkı vəziyyətinə onun əvvəlki vəziyyətinin nəticəsi və növbəti vəziyyətinin səbəbi kimi baxmalıyıq.

Təbiəti canlandıran qüvvələr və onun bütün tərkib hissələrinin nisbi vəziyyəti hər hansı bir verilmiş anda əqlə məlum olsa idi və üstəlik bu əql elə geniş ola bilsəydi ki, bunları əhatəli analiz edə bilsəydi, o, kainatın nəhəng cisimlərinin hərəkətini ən yüngül atomların hərəkətləri ilə eyni bir düsturdə əhatə etmiş olardı: onun üçün yaqın olmayan heç bir şey qalmazdı və gələcək, həmçinin keçmiş onun qarşısında canlanmış olardı. Kamil insan zəkasının astronomiyaya verə bildikləri belə idrakın zəif eskizi haqqında təəvvür verir. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi ilə bağlı olaraq, mexanika və həndəsədə əqlin etdiyi kəşflər, kainat sisteminin keçmiş və gələcək vəziyyətlərini eyni bir analitik ifadələrlə anlamağa imkan yaratdı. Həmin metodu bəzi digər

bilik obyektlərinə tətbiq etdikdə, müşahidə olunan hadisə və ya prosesləri ümumi qanunlarla ifadə etmək bizim idrakımıza müyəsər oldu və o, verilmiş şərtlər nəticəsində baş verə biləcək hadisə və ya prosesləri öncədən söyləməyə belə müvəffəq oldu. Gerçəklik axtarışında ruhun bütün cəhdləri daima ruhu idrak (*закая*) yaxınlaşdırmağa yönəlmişdir və indicə qeyd etdiyimiz elə idrak ki, ruh ondan həmişə sonsuz uzaqda olacaqdır. İnsana xas olan bu cəhdətmə onu heyvanlardan üstün edir; onun bu istiqamətdəki uğurları millətləri və əsrləri fərqləndirir və onların həqiqi şöhrətini təşkil edir.

Xatırlayaq ki, bizdən o qədər də uzaq olmayan keçmiş dövrlərdə yağısa və ya fəvqəladə quraqlığa, olduqca uzanmış quyruğu olan kometə, günəş tutulmasına, şimal şəfqinə və ümumiyyətlə, qeyri-adi təzahürlərə Göy qəzəbinin əlaməti kimi baxılırdı. Bunların zərərli təsirinin qarşısını almaq üçün Göyə (Tanrıya) yalvarırdılar. Planetlərin və ya günəşin hərəkətini dayandırmaq üçün Tanrıya yalvarmırdılar: müşahidə tez bir zamanda bu yalvarışların tamamilə səmərəsiz olduğunu hiss etdirirdi. Lakin uzun müddətdən bir baş verən və itən təzahürlərdən belə fikir yaranırdı ki, bunlar təbiətdə qərarlaşmış qaydalara ziddir və insanlar fərz etməyə başladılar ki, bunları Göy (Tanrı) yaradır və o, insanları günahlarına görə cəzalandırmaq üçün bunları lazımi bildiyi kimi də dəyişir. 1456-da müşahidə olunmuş uzanmış quyruğu olan komet, bu ərafda türklərin sürətli qələbələri nəticəsində Bizans imperiyasının süquta uğramasından dəhşətə gəlmiş Avropada çaxnaşma yaratdı. Bu Göy ulduzu özünün dörd dövrünü başa vurduqdan sonra, bu hadisə bizim aramızda çox müxtəlif maraqlar doğurdu. Bu dövr ərzində kainat sisteminin əldə olunmuş qanunları ilə tanışlıq insanın kainata gerçək münasibətlərindəki bilgisizliyi ilə doğrulmuş qorxunu aradan qaldırmış oldu; bu kometin 1531, 1607 və 1682-ci illərdə müşahidə olunmuş komet olduğu qənaətinə gəlmiş Halley (Halley), onun 1758-in sonunda və ya 1759-un əvvəlində qayıdışını öncədən söylədi. Elm aləmi bu qayıdışı səbrsizliklə gözləyirdi, belə ki, bu elmdə edilmiş ən böyük kəşflərdən birini və bununla da, çox böyük məsafələr qət edən Göy ulduzlarının dövrləri haqqında Senekinin öngörülüklə söyləmiş olduğu: «Gün gələcək ki, indi bizə məlum olmayan şeylər bir neçə yüzilliklər boyu öyrənilməsinin davam olunması sayəsində, özünün bütün açıq-aşkarlığı ilə züھر edəcəklər; əcdadlarımız bu qədər aşkar gerçəkliklərin onların nəzərindən qaçmasına çox təəccüblənəcəklər» fikrini də təsdiq etməli idi. Onda Klero (Clairaut) iki ən böyük planet – Yupiter və Saturnun təsiri nəticəsində bu kometin məruz qaldığı kükrəntiləri analiz etməyə başladı: olduqca böyük hesablamalardan sonra onun perigelidlərdən yaqın keçəcəyini 1759-un aprelin başlanğıcına təyin etdi və müşahidə bunu təsdiq etdi. Astronomiyanın bizə aşkar etdiyi düzgünlük bütün təzahürlərdə heç bir şübhə doğurmadan özünü göstərir. Havanın və ya buxarın sadə molekulunun cızdığı əyri, planetlərin orbiti kimi dəqiqliklə təyin olunur: bunlar arasındakı fərq, yalnız, bizim bilgisizliyimizdən irəli gəlir.

Ehtimal, müəyyən qədər bu bilgisizliklə, müəyyən dərəcədə isə bizim bilimizlə şərtləşdirilir. Bizə məlumdur ki, üç və ya daha çox hadisədən biri baş verəcəkdir; lakin bunlardan birinin digərlərindən hər hansı bir üstünlüyə malik olması barədə hər hansı dəlilin olmasına da əsasımız yoxdur. Belə bir inamsızlıqda biz hansı hadisənin baş verəcəyini yaqınlıqla söyləyə bilmərik. Lakin bu hadisələrdən ixtiyari birinin baş verməyəcəyi fərz olunur, çünki bu hadisənin baş verməməsi üçün onun baş verəməsinə istisna edən bir neçə, eynilə mümkün ola bilən hallar olduğu halda, onun baş verməsi üçün yalnız bir əlverişli hal vardır.

Təsadüflər nəzəriyyəsi – bütün bircins hadisələrin bərabər mümkün olan hallarının, yəni varlığı bizim üçün eyni dərəcədə qeyri-müəyyən olan halların məlum sayı ilə ifadə etməyə nail olunmaqdan və ehtimalı axtarılan hadisənin baş verməsi üçün əlverişli hallar sayının da təyin oluna bilinməkdən ibarətdir. Bu əlverişli hallar sayının bütün mümkün halların sayına nisbəti bu ehtimalın ölçüsüdür və beləliklə, bu ehtimal – surəti bütün əlverişli hallar sayı, məxrəci bütün mümkün hallar sayı olan kəsirdir.

Ehtimalın əvvəlki anlayışında fərz olunur ki, əlverişli hallar sayı və bütün mümkün hallar sayı eyni nisbətdə artırıldıqda ehtimal

dəyişmir. Buna əminlik üçün iki – A və B urnlarına baxaq; A -da dörd ağ və iki qara kürəcik, B -də yalnız iki ağ və bir qara kürəcik olsun. Fərz edək ki, A -dakı iki qara kürəcik bir-birilə iplə bağlanmışdır və bu kürəciklərdən birini götürdükdə bu ip qırılır; dörd ağ kürəciyin də belə iki sistem əmələ gətirdiyi fərz olunur. Qara sistemin kürəciklərindən birinin çıxarılması üçün əlverişli olan bütün mümkün hallar qara kürəciyin çıxması ilə nəticələnəcəkdir. Əgər kürəcikləri bir-birilə birləşdirən iplərin qırılmayan olduğu fərz olunarsa, onda aydındır ki, bütün mümkün baş vermələrin sayı dəyişməyəcəkdir, qara kürəciklərin çıxarılması üçün əlverişli baş vermələrin sayı da dəyişməyəcəkdir; yalnız bu halda bir dəfədən iki kürəcik çıxacaqdır. Urndan qara kürəciyin çıxması ehtimalı əvvəlkinə bərabər olub, dəyişməyəcəkdir. Onda aydındır ki, bu hal B urnu halı olacaqdır, lakin yalnız belə bir fərqli cəhət olacaqdır ki, bu sonuncu urnun üç kürəciyi dəyişməz olaraq, bir-birilə bağlanan kürəciklərin üç cütü ilə əvəz olunacaqdır. Bütün mümkün hallar hər hansı hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olarsa, onda güman (ehtimal) yaqınlıqla əvəz olunur və onun ifadəsi vahidə bərabər olur. Bu anlamda yaqınlıq və ehtimal müqayisə olunandrlar, lakin bununla belə, əqlin iki halı arasında mühüm fərq vardır: ya həqiqət əqlə ciddi surətdə isbat olunur və ya əql hələ də kiçik bir səhvən ola biləcəyini də nəzərdə tutur.

Yalnız doğruyaoxşar hadisələrdə, hər bir ayrıca insanda ona məlum ola bilən verilənlər arasındakı fərq, eyni bir əşyalar haqqında mövcud olan fikir müxtəlifliyinin əsas səbəblərindən biridir. Məs., üç – A , B , C urnlarından birində yalnız qara kürəciklər, qalan ikisində yalnız ağ kürəciklər olduğu fərz olunur. Kürəcik C urnundan çıxarılmalıdır; bu kürəciyin qara olması ehtimalı nəyə bərabərdir? Əgər bizə məlum olsa idi ki, bu üç urnndan hansı yalnız qara kürəciklər olanıdır, onda qara kürəciklərin B -də və ya A -da deyil, məhz C -də olduğunu fərz etmək üçün heç bir dəlil yoxdur, onda bütün bu üç fərziyyənin eyni dərəcədə mümkün olduğu gördüntüsü yaranar, belə ki, qara kürəcik yalnız birinci fərziyyə şərtində çıxarıla bilindiyyindən, onun çıxarılması ehtimalı üçdə birə bərabərdir. Əgər A -da yalnız ağ kürəciklərin olduğu məlum olarsa, onda bizim tərəddüdümüz yalnız B və C urnları ilə əlaqədar olacaqdır və C urnundan çıxan kürəciyin qara olması ehtimalı ikidə birə bərabər olacaqdır. Əgər biz əmin olarsaq ki, A və B urnlarında yalnız ağ kürəciklərdir, bu təldə ehtimal, nəhayət, yaqınlıya çevrilir.

Çoxsaylı toplantı qarşısında hansısa bir tərdə söylənilmiş fakt dinləyicilərin bilik dairəsinə görə müxtəlif ehtimallarla qiymətləndirilir. Əgər bu fakt barədə mürəzə edən şəxs bu fakta tamamilə əmindirsə və onun tutduğu vəziyyəti və xarakterini böyük inam təlqin edərsə, onun hekayətinin nə dərəcədə qeyri-adi olmasından asılı olmayaraq, maariflənmiş dinləyicilər üçün bu şəxsin danışığı adi fakt kimi eyni dərəcədə doğruyaoxşar olacaqdır; şübhəsiz ki, ona inanacaqlar. Lakin dinləyicilərdən hər hansı birinə məlum olarsa ki, həmin fakt bu şəxsədən heç də az hörmətli olmayan şəxs tərəfindən inkar olunur, onda bu dinləyicidə şübhə oyanacaqdır; maarifli insanlar bu faktı yalan hesab edəcəklər, çünki onlar tapa biləcəklər ki, bu fakt yaxşı yoxlanılmış faktlara, ya da ki, təbiətin dəyişməz qanunlarına ziddir.

Yanlış fikirlərin cahil dövrlərdə Yer üzündə yayılmasına görə biz, kütlənin məlumatlı hesab etdikləri və həyatın ən mühüm məsələlərində inanmağa adət etdikləri şəxslərin fikirlərinin təsirinə borcluyuq. Magiya və astrologiya buna aid mühüm misallardır. Uşaqlıqdan insanlara təlqin olunmuş, yoxlanılmadan qəbul edilərək, olduqca uzun müddət onlarda davamlı olaraq, bərqərarlaşdırılan ümumi inamla formalaşmış belə yanlış fikirlər dəstəklənirdi; lakin elmin inkişafı ilə və nəhayət, bunlar maariflənmiş insanların ağıllarında darmadağın olunduqdan sonra, onların fikirləri xalq arasında təqlid sayısında və adətətmə vərdişilə belə yanlış fikirlərin yox olması zərurətini yaratdı. Məhz mənəvi aləmin ən möhtəşəm və təhrikədi olan bu gücü, eyni hakimiyyətli başqa bir yerdə tərəfdarları olan ideyalara tam tərs olan və bütöv bir millətə xas ideyaları təsdiq edir və qoruyub saxlayır. Bizimkindən fərqli, əksər hallarda şəraitin yaratdığı yad baxışlara, biz nə qədər də anlaşıqlı olmalıyıq. Biz kifayət qədər maariflənmiş hesab etdiklərimizi maarifləndirəcəyik:

lakin əvvəlcə, özümüzün şəxsi baxışlarımıza ciddi surətdə yenidən baxaraq, onların nisbi yaqınlığını qərəzsiz ölçüb-biçməliyə.

Baxışlar arasında fərq həmçinin bizə məlum verilənlərin təsirinin təyin olunması üsulundan da asılıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi elə incə müləhizələrlə əlaqəlidir ki, xüsusilə mürəkkəb məsələlərdə eyni verilənlərə malik iki şəxsin müxtəlif nəticələrə gəlməsi heç də təəccüb doğurmur. Bu nəzəriyyənin əsas prinsiplərini indi şərh edək.

Ehtimalların hesablanması ümumi prinsipləri

I p r i n s i p. Prinsiplərdən birincisi – ehtimalın özünün tərifidir və biz gördük ki, ehtimal – əlverişli hallar sayının bütün mümkün hallar sayına nisbətidir.

I I p r i n s i p. Lakin bu zaman müxtəlif halların bərabər mümkünliyi fərz olunur. Əgər bu hətta belə olmasa, onda bu halların uyğun mümkünlikləri təyin olunur; bunların dəqiq qiymətləndirilməsi – təsadüflər nəzəriyyəsinin ən incə bəndlərindən biridir. Onda ehtimal hər bir əlverişli halın mümkünliklərinin cəmi olacaqdır. Bu prinsipi misalla izah edək.

Fərz edək ki, havaya böyük və çox nazik metal pul atılır; bu pulun hər iki üzü tamamilə oxşardır, bunları *xaç* və *şəbəkə* ilə adlandıraraq. Pulun iki dəfə atılmasında *xaçın* heç olmasa bir dəfə görünməsi ehtimalını tapaq. Aydındır ki, eyni mümkün ola bilən dörd hal ola bilər, doğrudan da: birinci və ikinci atılmada *xaç*; birinci atılmada *xaç* və ikincidə *şəbəkə*; birinci atılmada *şəbəkə* və ikincidə *xaç*; nəhayət, hər iki atılmada *şəbəkə*. Birinci üç hal, ehtimalı axtarılan hadisə üçün əlverişlidir, bu ehtimal, deməli, $3/4$ -ə bərabərdir; odur ki, iki dəfə atılmada *xaçın* heç olmasa bir dəfə düşməsi üçün bir şans əleyhinə üç şans vardır.

Bu oyunda, belə hesab etmək olar ki, üç müxtəlif hal vardır, məhz: birinci atılmada *xaçın* düşməsi pulun ikinci dəfə atılması zəruriliyini istisna edir; birinci atılmada *şəbəkə* və ikincidə *xaçın* düşməsi; nəhayət, birinci və ikinci atılmada *şəbəkə*. Əgər biz Dəlamber kimi bu halları eyni mümkün üç hal kimi hesab etmiş olsaydıq, onda bu ehtimalın $2/3$ olduğunu alardıq. Lakin aydındır ki, *xaçın* birinci atılmada düşməsi ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir, bununla belə digər halların hər birinin ehtimalı $1/4$ -ə bərabərdir; çünki birinci hal sadə hadisədir və bu hadisə iki mürəkkəb hadisəyə uyğundur: birinci və ikinci atılmada *xaç* düşməsinə və birincidə *xaç*, ikinci atılmada *şəbəkə* düşməsinə. Əgər indi, ikinci prinsipə görə birinci atılmada *xaçın* mümkünliyi $1/2$ -i birinci atılmada *şəbəkə*, ikinci atılmada *xaçın* mümkünliyi $1/4$ -ə əlavə etsək, axtarılan ehtimal üçün $3/4$ ehtimalı alınır, bu isə hər iki dəfə atılmanı yerinə yetirmək fərziyyəsini qəbul etdikdə tapdığımız ehtimalla uzlaşır. Bu fərziyyə bu hadisə üçün mərc gəlmiş şəxsin aqibətini heç də dəyişmir.

I I I p r i n s i p. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm bəndlərindən biridir və burada illüziyalara daha çox yer verilir və bu elə bir qaydadır ki, ehtimallar qarşılıqlı birləşmələrlə artır və azalır. Əgər hadisələrdən biri digərindən asılı deyildirsə, onların birgə baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin hər birinin ehtimallarının hasilinə bərabərdir. Məs., bir zərin bir dəfə atılmasında bir xalın düşməsi ehtimalı altıda bir olduğu halda, iki zərin bir dəfə atılmasında iki xal düşməsi ehtimalı otuz altıda birə bərabər olur. Doğrudan da, bir zərin hər bir üzü digərinin altı üzü ilə kombinasiya oluna bilindiyyindən, onda eyni mümkün otuz altı hal vardır və bunlardan yalnız biri iki xalı verir. Ümumiyyətlə isə, hər hansı hadisənin eyni şəraitdə, verilmiş ədəd dəfə təkrar olunması ehtimalı, bu sadə hadisənin ehtimalının bu ədəd qədər qüvvət üstünə yüksəldilməsindən alınan ədədə bərabərdir. Beləliklə, vahiddən kiçik olan kəsrin ardıcıl qüvvət üstləri həmişə azalır, odur ki, bir sıra olduqca böyük ehtimallardan asılı olan hadisə həddən ziyadə kiçik ehtimalı da ola bilər. Fərz edək ki, hər hansı bir fakt şahidlik edən iyirmi nəfərlə bizə elə surətdə ötürülür ki, birinci onu ikinciyə, ikinci üçüncüyə və s. ötürür: daha sonra fərz edirik ki, hər bir şahidlik ehtimalı $9/10$ -a bərabərdir; şahidliklərdən alınan faktın ehtimalı bu halda səkkizdə birdən az olardı. Əşyalardakı aydınlığın azalması ilə ehtimalın da azalmasına ən yaxşı müqayisə: göz qarşısına bir neçə şüşə lövhə qoyulduqda, bir şüşədən

tamamilə aydın görünən əşyanın görünməz olması üçün hətta az sayda lövhənin kifayət etməsidir. Tarixçilər, deyəsən, faktların ehtimalının belə tədrici azalmasına kifayət qədər diqqət yetirmirdilər, əgər tarixi hadisələrə çox sayda nəsillər ardıcılığı keçdikdən sonra nəzər salınsa, əksəriyyəti yaqin hadisələr sayılan belə hadisələr sınaqlarla yoxlanılsaydı, onlar ən azı şübhə doğurardı.

Sırf riyazi elmlərdə ən əvvəlki nəticələr baş verdikləri prinsipin yaqinliyində iştirak edir. Analizin fizikaya tətbiqində alınan nəticələr faktların və ya təcrübələrin tam yaqinliyinə malikdir. Mənəvi elmlərdə, hər bir nəticə əvvəlki nəticədən doğruyaoxşarlıq əsasında çıxarıldığından, bu nəticələrin nə qədər ehtimallı olmasına baxmayaraq, xəbərlərin sayı onların sayı ilə birlikdə artır, hər hansı bir prinsipin ən əvvəlki nəticələrində gerçəklik şanslarından artıq olur.

I V p r i n s i p. Əgər iki hadisə bir-birindən asılı olarsa, mürəkkəb hadisənin ehtimalı – birinci hadisənin ehtimalının, bu hadisənin baş verməsi şərtində, ikinci hadisənin baş verməsi ehtimalına hasilidir. Məs., üç A, B, C urnlarına baxdığımız halda, bunlardan ikisində yalnız ağ kürəciklər və birində yalnız qara kürəciklər olduqda, C urnundan ağ kürəcik çıxması ehtimalı $2/3$ -ə bərabərdir, belə ki, üç urndan yalnız ikisində ağ kürəciklər vardır. C urnundan ağ kürəciyin çıxmasına əsaslanmaqla məhz hansı urnda yalnız qara kürəciklər olduğu haqqında məlumdursuzluq. artıq yalnız A və B urnlarına aid olur; B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir; $2/3$ -nin $1/2$ və ya $1/3$ -ə hasil, deməli, B və C urnlarından eyni zamanda iki ağ kürəcik çıxarılması ehtimalıdır. Əslində, buna görə, A-nın yalnız qara kürəciklər olan urnlardan biri olması zəruridir, aydındır ki, bu halın ehtimalı $1/3$ -dir.

Bu misaldan baş vermiş hadisələrin gələcək hadisələrin ehtimalına təsiri olduğu aydın olur; belə ki, ehtimalı əvvəlcədən $2/3$ -yə bərabər olan B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, C urnundan ağ kürəcik çıxıxdıqdan sonra, $1/2$ olur: həmin urndan, əgər qara kürəcik çıxsaydı, bu ehtimal yaqinliyə çevrilərdi. Bu təsir əvvəlki prinsipin nəticəsi olan aşağıdakı prinsip vasitəsilə təyin olunur.

V p r i n s i p. Əgər baş vermiş hadisənin ehtimalı *a priori* hesablanarsa və bu birinci və digər hadisədən ibarət hadisənin ehtimalı hesablanırsa, onda birinciyə bölünmüş ikinci ehtimal, müşahidə olunmuş hadisədən sonra gözənilən hadisənin ehtimalı olacaqdır.

Burada keçmişin gələcək hadisənin ehtimalına təsiri barədə bəzi filosofların qaldırdığı sual ortaya çıxır. Fərz edək ki, *xaç* və *şəbəkə* oyununda *xaç* *şəbəkə*-dən daha çox düşmüşdür: yalnız buna əsasən biz belə fikirləşə bilərik ki, elə bir həmişəlik səbəb vardır ki, belə nəticə üçün əlverişlidir. Məs., həyatda daimi xoşbəxtlik bacarıqlılığın sübutudur, bu isə insanları xoşbəxt adamlara üstünlük verməyə sövq edir. Lakin, əgər şəraitin qeyri-sabitliyindən biz, hər dəfə mütləq qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıdırıqsa; məs., *xaç* və *şəbəkə* oyununda metal pul hər bir atılmada dəyişdirilirsə, onda keçmişin gələcəyə cüzi aydınlıq gətirməsi mümkün deyildir və bunu hesaba almaq mənasızlıq olardı.

V I p r i n s i p. Müşahidə olunmuş hadisənin baş vermə səbəblərindən hər biri ehtimal olunmaqdan daha çox, xüsusən də, ona görə doğruyaoxşardır ki, bu səbəb mövcud olduqda hadisə baş verəcəkdir; bu səbəblərdən hər hansı birinin mövcud olması ehtimalı, aydındır ki, surəti – bu səbəbdən baş verən hadisənin ehtimalı olan, məxrəci isə bütün səbəblərə aid olan oxşar ehtimalların cəmi olan kəsre bərabərdir: əgər bu müxtəlif, *a priori* baxılan səbəblər eyni ehtimallı deyildirlərsə, onda hər bir səbəbin doğurduğu hadisənin ehtimalı əvəzinə, bu ehtimalın, səbəbin özünün ehtimalına hasil götürülməlidir. Bu, təsadüfiliyələr analizinin hadisələrdən səbəblərə keçidlə məşğul olan sahəsinin əsas prinsipidir.

Bu prinsip düzgün hadisələrin nəyə görə xüsusi səbəblə əlaqədar olmasını izah edir. Bəzi filosoflar fərz edirdilər ki, bu hadisələr digərlərindən daha az ehtimallıdır və *xaç* və *şəbəkə* oyununda, məs., *xaç*-ın ardıcıl olaraq iyirmi dəfə düşməsi birləşməsi daha az təbiidir, nəinki *xaç* və *şəbəkə*-nin düzgün qarışdırılmaqları birləşmələrdən. Lakin belə nöqtəyi-nəzər fərz edir ki, keçmiş hadisələr gələcək hadisələrin mümkünliyinə təsir edir, bu isə qətiyyəni mümkün deyildir.

Düzgün hallara yalnız ona görə az-az təsadüf olunur ki, onlar çoxsaylılardan daha azdır. Biz simmetriya müşahidə etdikdə səbəbi müəyyənləşdirmək istəsək, bundan belə nəticə çıxarılmamalıdır ki, biz simmetrik hadisəyə daha az mümkün ola bilən hadisə kimi baxırıq; bu hadisə ya rəqulyar səbəbin və ya təsadüfün nəticəsi ola bildiyindən, birinci fərziyyə ikincidən daha çox ehtimallı olur. Biz masa üzərində hərfələrin belə düzlülüşünü görürük: *Konstantinopol* və bu halda biz hesab edirik ki, bu düzlülüş təsadüfiliyə nəticəsi deyildir, ona görə yox ki, belə düzlülüş başqalarından daha az ehtimal olunur, belə ki, əgər bu söz heç bir dildə istifadə olunmasaydı, belə düzlülüşün heç bir xüsusi səbəbinin olduğuna biz şübhələnməzdik: lakin bu söz bizdə istifadə olunan sözdür, onda bu düzlülüşdə hərfələri belə kiminsə də qoyması halının ehtimalı, şübhəsiz ki, düzlülüşün təsadüfiliyə nəticəsi halındakı ehtimalından daha çox olur.

Burada *qeyri-adi* sözünü təyin etmək yerinə düşərdi. Biz bütün mümkün ola bilən hadisələri fikrən müxtəlif siniflərə bölürük və bu hadisələrdən ən az sayda hadisədən ibarət sinifləri biz *qeyri-adi* sinif hesab edirik. Məs., *xaç* və *şəbəkə* oyununda xaçın yüz dəfə ardıcıl düşməsi bizə qeyri-adi görünür, çünki yüz dəfə atılmada baş verə bilən, demək olar ki, sonsuz sayda birləşmələri düzgün sıralara və ya bizim nəzərimizə görə bu birləşmələrdə asanca hiss olunan qayda hökm sürən sıralara və nəhayət, düzgün olmayan sıralara böldükdə, bu sonuncular məhsilsiz dərəcədə çoxdur. İçərisində yalnız biri ağ, digərləri qara kürəcik olan milyon kürəcik yerləşən urndan ağ kürəciyin çıxması da bizə qeyri-adi hal kimi görünür, çünki iki rəngə uyğun hadisələrin yalnız iki sinfini təşkil edirik. Lakin milyon ədəd nömrələnmis kürəcik olan urndan 475813 №-li kürəciyin çıxması bizə adi hadisə kimi görünür, çünki nömrələri onları siniflərə bölmədən fərdi surətdə yoxladıqda, bunlardan birinin digərindən daha tez çıxacağını düşünməyimizə heç bir əsas yoxdur.

Biz əvvəlkilərdən, ümumiyyətlə, belə nəticə çıxarmalıyıq ki, hər hansı fakt nə dərəcədə qeyri-adidirsə, onu əsaslandırmaq üçün ciddi dəlillər olmalıdır; çünki onun haqqında şahidlik edənlər səhv edə bilərlər və ya aldana bilərlər və buna görə də, real fakt öz-özlüyündə daha az, bu iki səbəb isə daha çox ehtimal olunur. Şahidlərin şahidliklərinin ehtimalları haqqında danışdıqda biz buna xüsusilə əmin olacağıq.

V I I p r i n s i p. Gələcək hadisənin ehtimalı – müşahidə olunmuş hadisədən çıxarılmış hər bir səbəbin ehtimalının, bu səbəb olduqda, gələcək hadisənin baş verməsi ehtimalına hasilərinin cəmidir. Aşağıdakı misalda bu prinsip aydın olur.

İçərisində yalnız iki – ağ və ya qara kürəcik olan urn olduğunu fərz edirik. Bu kürəciklərdən biri çıxarılır, sonra o, yenidən urna qaytarılır ki, yeni tiraj başlansın. Fərz edirik ki, ilk iki tirajda ağ kürəciklər çıxmışdır, belə sual qoyulur: üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir.

Burada yalnız iki hipotez irəli sürmək olar: kürəciklərdən biri ağ, digəri qara və ya hər ikisi ağdır. Birinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı $1/4$ -ə bərabərdir; bu ehtimal ikinci hipotezdə vahidə və ya yaqinliyə bərabərdir. Odu ki, səbəblər qədər də bu hipotezlərə də baxsaq, altıncı prinsipə görə, bunlara uyğun ehtimalların $1/5$ və $4/5$ olduğunu alırıq. Lakin əgər birinci hipotez yerinə yetərsə, onda üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxarılması ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir; ikinci hipotezdə bu ehtimal vahidə bərabərdir. Bu sonuncu ehtimalları uyğun hipotezlərin ehtimallarına vurduqdan sonra alınmış hasilərin cəmi və ya $9/10$, – üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı olacaqdır.

Sadə hadisənin ehtimalı məlum olmadıqda, onda bu ehtimalın sıfırdan vahidə qədər bütün ədədi qiymətlər alacağını fərz etmək olar. Müşahidə olunmuş hadisədən sonra bu hipotezlərin hər birinin ehtimalı, altıncı prinsipə əsasən, surəti – bu hadisənin bu hipotezdə ehtimalına, məxrəci isə bütün hipotezlər üçün oxşar ehtimalların cəminə bərabər, kəsre bərabərdir. Hadisənin verilmiş sərhədlərdə mümkünliyinün ehtimalı – bu sərhədlərdə yerləşən kəsrlərin cəminə bərabərdir. Əgər hər bir kəsri uyğun hipotezdə təyin olunan gələcək hadisənin ehtimalına vurarıqsa, onda yeddinci prinsipə görə, bütün hipotezlərə aid hasilərin cəmi –

müşahidə olunmuş hadisə üzrə baş verəcək gələcək hadisənin ehtimalı olacaqdır.

Bələliklə, biz tapırıq ki, hadisə ardıcıl bir neçə dəfə baş verdikdən sonra, onun növbəti dəfə də baş verməsi ehtimalı, bir vahid artırılmış baş ədədin, iki vahid artırılmasına nisbətində bərabərdir. Məs., biz ən qədim tarixi dövrü beş min il əvvəl və ya 1826 613 gün geriye aid etsək və nəzərə alsaq ki, bu müddət ərzində günəş, gün hər dəfə yeni günlə əvəz olunduqda daima çıxmışdır, onda günəşin sabah da çıxacağı üçün bir şansa qarşı 1826 214 şans olacaqdır. Hadisə və ya proseslərin küllüyyatından günləri və ilin fəsilərini tənzimləyən prinsipin olduğunu bilən şəxs üçün bu ədəd misilsiz dərəcədə mühümdür, o görür ki, indiki anda bunların cərəyan etməsinin qarşısını heç bir qüvvə ala bilməz.

Byuffon özünün siyasi arifmetikasında ehtimalı əvvəlkindən fərqli, başqa yolla hesablayır. O fərz edir ki, bu ehtimal vahiddən, sürəti vahidə bərabər, məxrəci isə iki ədədinin o dövrdən keçən günlər sayına qüvvət üstünə yüksəldilmişinə bərabər ədəd olan kəsr qədər fərqlənir. Lakin keçmiş hadisələrdən səbəblərin və gələcək hadisələrin ehtimalına keçidin düzgün üsulu bu məşhur yazıçıya məlum deyildi.

Gözləmə haqqında

Hadisələrin ehtimalı bu hadisələrin mövcudluğunda maraqlı şəxslərin ümidini və ya qorxusunu təyin etməyə xidmət edir. *Ümid* sözünün müxtəlif mənaları vardır: bu, adətən, şəxsin yalnız gümanla etdiyi fərziyyələrlə, hər hansı mənfəəti gözləyərək, qazancını ifadə edir. Bu qazanc – ehtimal nəzəriyyəsində, gözlənilən miqdarın onun alınması ehtimalına hasilinə bərabərdir, bu isə miqdarın ehtimallara mütənasib olaraq paylandığı fərz olunduqda, hadisəyə qoşma olan riskə məruz qalmamaq arzusunda olan maraqlı şəxsin ödəməli olacağı miqdarın hissəsini təşkil edir. Ehtimalın bərabər dərəcədə paylanması gözlənilən miqdara bərabər hüquqlar verdiyindən, biz bütün kənar halları nəzərə almasaq, bu, yeganə doğru paylanmadır. Bu qazancı biz *riyazi gözləmə* adlandıracağıq.

VIII p r i n s i p. Əgər qazanc bir çox hadisədən asılıdırsa, onda hər bir hadisənin ehtimalını bu hadisənin baş verməsi ilə bağlı mənfəətə vuraraq, bu hasilərin cəmini götürsək, biz bu qazancı alırıq.

Bu prinsipi misallara tətbiq edək. Fərz edək ki, *xaç və şəbəkə* oyununda birinci atılmada *xaç* düşərsə, Pavel iki frank alır, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşərsə, o, beş frank alır. İki frankı birinci halın ehtimalı $1/2$ -ə, beş frankı ikinci halın ehtimalı $1/4$ -ə vursaq, hasilərin cəmi və ya Pavelin qazancı olan iki tam dördüdə bir frankı alırıq. Bu məbləğ o qədərdir ki, o, bu qazancı ona əldə etməyə səbəbkar olan şəxsə əvvəlcədən verməlidir: çünki oyunun bərabərhüquqlu olması üçün oyunda ortaya qoyulan məbləğ onun gətirdiyi qazanca bərabər olmalıdır.

Əgər Pavel birinci atılmada *xaç* düşdükdə iki frank və hətta birinci atılmada da *xaç*, ikinci atılmada da *xaç* düşdükdə belə, beş frank alarsa, onda iki frankın və beş frankın $1/2$ -ə vurulmasından sonra bu hasilərin cəmi – Pavelin qazancı üçün üç frank yarımə bərabər olacaqdır, deməli, bu onun oyunda ortaya qoyacağı məbləğdir.

IX p r i n s i p. Bəziləri gəlir, digərləri ziyan gətirməsi ehtimal olunan bir sıra hadisələrin olduğunu bilərək, biz bunlardan alın bilən qazancı təyin edə bilirik, buna görə, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalını onun gətirdiyi mənfəətə hasilinə vuraraq, hasilərin cəmini hesablayıb, hər bir əlverişsiz hadisənin ehtimalını onunla bağlı ziyanı vuraraq, hasilərin cəmini hesabladığımız birinci cəmdən çıxmalıyıq. Əgər ikinci cəm birincidən çoxdursa, onda qazanc ziyana, ümid isə qorxuya çevrilir.

Həyatda, həmişə, heç olmasa gözlənilən qazancın onun ehtimalına hasilinə əvəzi üçün belə hasilin bərabər götürülməsi baxımından hərəkət etmək gərəkdir. Lakin buna nail olmaq üçün gəliri, ziyanı və onların uyğun ehtimallarını dəqiq qiymətləndirmək zəruridir. Buna görə ən doğru aqla, incə nəzakətə və böyük təcrübəyə, aşağıdakı nisbətlərdə malik olmaq gərəkdir: özünü xurafatdan, illüziyalardan, qorxudan və

ümiddən, əksər insanların var-dövlət barədə öz izzət-nəfslərini arxayın etdikləri yanlış fikirlərdən qorumağı bacarmaq gərəkdir.

Aşağıdakı məsələyə əvvəlki prinsiplərin tətbiqi həndəsəçiləri çox maraqlandırmışdı. Pavel aşağıdakı şərtlərlə *xaç* və *şəbəkə* oyununda iştirak edir: əgər birinci atılmada *xaç* düşmüşdüsə, o, iki frank, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşmüşdüsə, dörd frank, *xaç* yalnız üçüncü atılmada düşmüşdüsə, səkkiz frank və s. alır. Onun oyunda ortaya qoyduğu məbləğ, səkkizinci prinsipə görə, atılmalar sayına bərabər olmalıdır; odur ki, əgər partiya sonsuz davam edilirsə, onda bu məbləğ sonsuz olmalıdır. Bununla belə heç bir ağıllı adam bu oyunda hətta orta məbləği, məs., 50 frankı ortaya qoymazdı. Sağlam düşüncənin göstərişləri ilə hesablama nəticələrinin arasında bu fərq nədən yaranır? Tez bir zamanda öyrəndilər ki, bu ondan asılıdır ki, hər hansı mənfəətdən bizə çatan mənəvi qazanc, bu mənfəətə mütənasib deyildir və o, minlərlə səbəblərdən asılıdır, amma bunlardan ən ümumi və mühümü – əksər hallarda çətinliklə təyin olunan vəziyyətdir (səbəblər nəzərdə tutulur – H. M.). Əslində, aydındır ki, milyonlarla müqayisədə, 100 frankı olan şəxs üçün bir frank daha qiymətlidir. Buna görə də, gözlənilən mənfəətdə onun bir frankın mütəlak dəyəri nisbi dəyərindən fərqləndirilməlidir: bu nisbi dəyər onu istəməyə məcbur edən dəlillərdən asılı olduğu halda, birincisi bundan asılı deyildir. Bu nisbi dəyərin qiymətləndirilməsi üçün ümumi prinsip vermək mümkün deyildir. Lakin bununla belə Danil Bernullinin təklif etdiyi və bir çox hallarda səmərəli olan prinsip aşağıda verilir.

X p r i n s i p. Son dərəcə kiçik məbləğin nisbi dəyəri – maraqlı şəxsin bütün əmlakının mütəlak dəyərə nisbətində bərabərdir. Burada fərz olunur ki, hər bir insanın hər hansı əmlakı vardır və onun dəyərinin sifra bərabər olduğunu heç bir halda fərz etmək belə olmaz. Doğrudan da, hətta heç bir şeyi olmayan şəxs belə, öz zəhmət və ümidlərlə yaratdıqlarına, heç olmasa yaşamaq üçün zəruri olan dəyəri verir.

İndicə şərh etdiyimiz prinsipi analiz edərək, aşağıdakı qaydanı alırıq.

Əgər hər hansı şəxsin varidatının onun gözləmələrindən asılı olmayan hissəsini vahidlə işarə edib, bu gözləmələr və onların ehtimallarına görə bu varidatın ala biləcəyi qiymətlər təyin edilərsə, onda bu ehtimallarla göstərilən uyğun qüvvət üstlərinə yüksəldilmiş bu qiymətlərin hasilini fiziki sərvət olacaqdır, bu isə həmin şəxsin öz varidatından vahid əvəzinə götürülmüş hissəsindən və öz gözləmələrindən ala biləcəyi mənəvi qazanc olacaqdır; onda fərq fiziki sərvətin artımı olacaqdır, buna görə biz gözləmələrə borcluyuq: biz bu artımı *mənəvi gözləmə* adlandıracağıq. Asanlıqla görmək olur ki, mənəvi gözləmə o halda riyazi gözləmə ilə üst-üstə düşür ki, vahid əvəzinə qəbul edilmiş varidat gözləmələrdən yaranan dəyişikliklərlə müqayisədə sonsuz olur. Lakin bu dəyişikliklər bu vahidin əsas hissəsini təşkil edərsə, hər iki gözləmə bir-birindən olduqca çox fərqlənə bilər.

Bu qayda sağlam düşüncənin göstərişləri ilə uzlaşan nəticələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar müəyyən dəqiqliklə qiymətləndirilə bilər. Məs., əvvəlki misalda tapırıq ki, əgər Pavelin iki yüz frankı varsa, onda oyunda ortaya qoyulan məbləğin iki yüz frankdan artıq qoyulması ağılsızlıqdır. Həmin bu qayda bütün varidatı təhlükəyə məruz qoymaqdansa, bu təhlükəni tez bir zamanda gözlənilən varidatın bir neçə hissəsinə paylaşdırılmasını tövsiyə edir. Bundan belə nəticə çıxır ki, hətta ən ədalətli oyunda belə, udulmuş məbləğ uduşdan həmişə nisbətən çox olur. Məs., yüz frankı olan oyunçu *xaç* və *şəbəkə* oyununda əlli frank ortaya qoyursa, bundan sonra ondakı məbləğ səksən yeddi frank olacaqdır, yəni bu son məbləğ oyunçuya oyundan sonra onun varı haqqında vəziyyəti kimi həmin mənəvi qazancı verə bilərdi. Bələliklə, oyun hətta o halda da əlverişlidir ki, oyunda ortaya qoyulan məbləğ gözlənilən məbləğin onun ehtimalına hasilinə bərabər olsun. Buna əsaslanaraq, gözlənilən məbləğin bu hasilədən kiçik olduğu oyunlarda mənəviyyətsizlik haqqında mühakimə yürütmək olar. Oyundakı mənəviyyətsizliklər yalnız yanlış mühakimələrə və tamahkarlığa görə mövcuddur və bunlar, hətta sonsuz bələlərin mənbəi olan xəm xəyal ümidləri naminə və bunların doğruxaoxsar olmadığını qiymətləndirmək iqtidarında olmadıqlarından xalqı onun üçün zəruri olanı belə qurban verməyə sövq edirlər.

Oyunların mənfəətsizliyi, gözlənilən bütün mənfəəti eyni bir təhlükəyə məruz qoymamağın faydası və sağlam düşüncənin göstərdiyi bütün oxşar nəticələr hər bir fərd üçün onun mənəvi sərvətini ifadə edən fiziki sərvətin funksiyalarından asılı olmayaraq mövcuddur. Mənəvi

sərvət funksiyasının artımının fiziki sərvətin artımına nisbətinin, bu sonuncunun artması ilə azalması kifayətdir.

Ehtimalların analitik metodları haqqında

Ehtimalın müxtəlif məsələlərinə bizim indicə şərh etdiyimiz prinsiplərin tətbiqi elə metodları tələb etdi ki, bunların axtarışı analizin bir çox sahələrinin, o cümlədən, birləşmələr nəzəriyyəsinin və sonlu fərqlər hesabının başlanğıcına səbəb oldu.

Əgər vahid üstəgəl birinci hərf, vahid üstəgəl ikinci hərf, vahid üstəgəl üçüncü hərf və s. n -ci hərfə qədər binomların hasilini yazıb, vahiddən bu hasilin açıq ifadəsini çıxsaq, onda bir-bir, iki-iki, üç-üç və s. bütün hərlərdən ibarət birləşmələrin cəmini alırıq, belə ki, hər bir birləşmənin əmsali vahid olacaqdır. n hərfdən ibarət s həfli birləşmələrin sayını almaq üçün, qeyd etmək kifayətdir ki, bu hərlərin öz aralarında bərabərliyi halında əvvəlki hasil vahid üstəgəl birinci hərf binomunun n -ci qüvvət üstünə çevriləcəkdir; beləliklə, n hərfdən s həfli binomların sayı – bu binomun ayrılışında qüvvət üstü n -ə bərabər birinci hərfin əmsali olacaqdır; bu ədəd, aydındır ki, məlum binom düsturundan alınacaqdır.

Hər bir birləşmədə hərlərin düzlüklüyünə fikir verəcəyik, nəzərə almalıyıq ki, əgər birinci hərfi ikincisinə birləşdirdikdə, onu ya birinci və ya ikinci yerə yerləşdirməklə iki birləşmə alınır. Əgər bu birləşmələrə üçüncü hərf də birləşdirilsə, onda bu hərfi hər bir birləşmədə birinci, ikinci və ya üçüncü yerdə yerləşdirmək olar ki, bu da əvvəlki ikincisindən hər birinə üç birləşməni verir; cəmi altı birləşmə. Buradan asanlıqla belə nəticə çıxarmaq olur ki, s hərfdən ibarət yerləşmələrin sayı – vahiddən s -ə qədər ədədlərin hasilinə bərabərdir. Buna görə də, hərlərin düzlüyü qaydasını da nəzərə alaraq bu hasilə n hərfdən s həfli birləşmələrin sayını da vurmaq gərəkdir; bu isə ona gətirir ki, bu ədədi ifadə edən binomun həddinin əmsalının məxrəci atılmalıdır.

n nömrədən ibarət lotereya olduğunu fərz edək, bu lotereyalardan hər bir tirajda s saydası çıxır: s sayda verilən nömrənin bir tirajda çıxması ehtimalını təyin etmək lazımdır. Buna görə də, n lotereyada s saydasının birləşmələri sayı təyin edilməlidir. Sonra oxşar surətdə, r lotereyadan s lotereya olan birləşmələrin sayı təyin olunur. Bu sonuncu ədədin əvvəlkinə nisbəti, aydındır ki, s sayda verilmiş nömrənin r sayda lotereya arasında çıxması ehtimalı olacaqdır; deməli, bu, axtarılan ehtimal olacaqdır. Məlum olduğu kimi, 90 nömrədən ibarət, hər bir tirajında beş nömrə çıxan Fransa lotereyasında verilmiş biletin çıxması ehtimalı $5/90$ və ya $1/18$ -ə bərabərdir; deməli, bu halda oyunun bərabərliyi üçün lotereya oyununda ortaya qoyulan məbləğin on səkkiz misli qaytarılmalıdır. 90 nömrədən iki-iki bütün mümkün birləşmələrin sayı 4 005-ə bərabərdir və bunlardan hər bir tirajda onu çıxır. Verilən ambın çıxması ehtimalı, buna görə də, $1/400,5$ -ə bərabərdir və bu halda lotereya ortaya qoyulan məbləğin 400,5 mislini qaytarmalı olardı; üç-üç birləşmələr üçün o, bu məbləği 11 748 dəfə, dörd-dörd birləşmələr üçün 511 038 dəfə və beş-beş birləşmələr üçün 43 949 268 dəfə artırmalı olardı; lotereya da oyunçulara bu imkanları verməkdən uzaqdır.

Fərz edək ki, a sayda ağ və b sayda qara kürəcik vardır və urandan bir kürəcik çıxarılır və sonra o, yenidən urna qaytarılır; belə sual qoyulur ki, n tirajda m sayda ağ və $n-m$ sayda qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir? Aydındır ki, hər bir tirajda mümkün halların sayı a üstəgəl b -yə bərabərdir. İkinci tirajın hər bir hali birinci tirajın bütün halları ilə kombinasiya oluna bilindiyindən, iki tirajda mümkün ola bilən bütün halların sayı a üstəgəl b binomunun kvadratına bərabərdir. Bu kvadratin ayrılışında a -nın kvadratı – iki dəfə ağ kürəcik çıxan halların sayı, a və b -nin hasilinin iki misli – ağ və qara kürəciklər çıxan halların sayı, b -nin kvadratı – iki dəfə qara kürəcik çıxan halların sayıdır. Bu qayda ilə davam etdikdə, ümumiyyətlə, tapmaq olur ki, a üstəgəl b binomunun n -ci dərəcəsi – n tirajda bütün mümkün olan halların sayını ifadə edir və bu ayrılışda a -nın m -ci dərəcəsinə vurulan hədd – m dəfə ağ, $n-m$ dəfə qara kürəcik

çıxan halların sayını ifadə edir. Buna görə də, bu həddi qüvvət üstü n -ə bərabər olan binoma böldükdə, m dəfə ağ və $n-m$ dəfə qara kürəcik çıxması ehtimalını alırıq. a -nın a üstəgəl b -yə nisbəti – bir tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, b -nin a üstəgəl b -yə nisbəti isə bir tirajda qara kürəcik çıxması ehtimalı olduğundan, n tirajda m ağ kürəcik çıxması ehtimalı – p üstəgəl q binomunun n -ci dərəcəsinin ayrılışında qüvvət üstü m olan p -nin vurğudur: asanlıqla görmək olur ki, p üstəgəl q cəmi vahiddir. Binomun çox gözəl bu xassəsi ehtimal nəzəriyyəsində çox səmərəlidir.

Lakin ehtimal haqqında məsələlərin ən ümumi və birbaşa həlli – onları fərqlər tənliliklərindən asılılığa gətirməkdir. Ehtimal ifadə edən funksiyanın ardıcıl qiymətlərini müqayisə etdikdə, dəyişənlər onlara uyğun fərqlər qədər artdıqda təklif olunan məsələ çox vaxt bu qiymətlər arasında sadə münasibətlərə gətirir. Bu – adi və ya xüsusi fərqlərlə tənlilik adlanan münasibətdir: bir dəyişən olduqda adi, bir neçə dəyişən olduqda, xüsusi fərqlərli tənlilik. Bir neçə misala baxaq.

Eyni bacarıqlı üç oyunçu aşağıdakı şərtlərlə oyunda iştirak edir. İlk iki oyunçudan rəqibini udan, üçüncü oyunçu ilə oynayır və əgər o, üçüncüyə qalib gəlsə, onda oyun sona çatır. Əgər o uduzursa, onda qalib oyunçu digəri ilə oynayır və s. və oyun, oyunçulardan biri ardınca digər iki oyunçunu udana qədər davam edir, bununla da, partiya sona çatır: partiyanın hər hansı n gedişdən sonra qurtaracağı ehtimalını tapmaq tələb olunur. Əvvəlcə oyunun məhz n gedişdən sonra başa çatacağı ehtimalını tapaq. Buna görə, oyunu udan oyunçu, oyuna n minus vahid gedişdən sonra başlamalıdır və həm bu, həm də növbəti oyunu udmalıdır. Əgər o, n minus vahid gedişini udmaq əvəzində öz rəqibi tərəfindən məğlub olsaydı və həm də, bu rəqib-qalib növbəti anda digər oyunçunu da udsaydı, onda oyun bu gedişdə sona çatmış olardı. Odur ki, oyunçulardan birinin n minus vahid gedişində partiya qoşulmasının ehtimalı – partiyanın məhz n gedişdə sona çatması ehtimalına bərabərdir; bu oyunçu isə növbəti gedişi də udmalıdır ki, partiya n -ci gedişdə sona çıxsın, bu halın ehtimalı yalnız əvvəlki ehtimalın yarısına bərabər olacaqdır. Bu ehtimal, aydındır ki, n ədədinin funksiyasıdır; deməli, bu funksiya, bu funksiyaadakı n bir vahid azaldıldıqdan sonra onun yarısına bərabərdir. Bu bərabərlik – adi sonlu fərqlərlə tənliliklər adlanan tənliliklərdən biridir.

Bu tənliliyin köməyiylə partiyanın məhz verilən hər hansı gedişdə sona çatacağı ehtimalını asanlıqla təyin etmək olur. Aydındır ki, partiya ikinci gedişdən tez qurtara bilməz və buna görə də, ilk iki oyunçudan rəqibini udan oyunçu ikinci gedişdə üçüncü oyunçunu da hökmən udmalıdır; bu gedişdə partiyanın sona çatacağı ehtimalı, buna görə də, $1/2$ -ə bərabərdir. Buradan əvvəlki tənliliyə əsasən biz belə nəticəyə gəlirik ki, partiyanın sona çatmasının ardıcıl ehtimalları: üçüncü gediş üçün $1/4$ -ə, dördüncü gediş üçün $1/8$ -ə və s. bərabərdir, ümumiyyətlə, n -ci gediş üçün $1/2$ -in qüvvət üstlərindən sonuncusu minus vahidə bərabər qüvvət üstü ilə təyin olunur. Bu qüvvət üstləri ilə götürülmüş

$1/2$ -lərin cəmi ($\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, – H. M.) vahid minus n -ci gediş

ehtimalına ($1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, – H. M.) bərabərdir; bu – partiyanın ən çoxu n gedişdə sona çatacağı ehtimalıdır.

Ehtimalın hesablanması üçün ilk, az və ya çox çətin bir məsələyə baxaq, bu məsələni həll etmək mümkün olmuşdu və Paskal onu Fermata həll etmək üçün təklif etmişdi. Eyni bacarıqlı iki oyunçu – A və B bir-birilə belə bir şərtlə oynayırlar ki, kim ilk dəfə olaraq, digərinə verilən say dəfə qalib gəlsə, o oyunda ortaya qoyulan məbləğlərin cəmi qədər partiyani udur; bir neçə gedişdən sonra oyunçular partiyani başa çatdırmamış oyunu dayandıрмаğa razılaşırlar; sual olunur, bu məbləğ bunlar arasında necə paylaşılmalıdır? Aydındır ki, onların payları partiyani udmaq üçün uyğun ehtimallara mütənəşib olmalıdır; buna görə də, məsələ bu ehtimalların təyin olunmasına gətirilir. Bu

ehtimallar, aydındır ki, verilən ədədə çatmaq üçün, hər bir oyunçunun udməsi üçün çatışmayan xallar sayından asılıdır. Odur ki, oyunçu A -nın ehtimalı iki ədədin funksiyasıdır, bunları biz *göstəricilər* adlandıracağıq. Əgər hər iki oyunçu bir gediş etməyə də razılaşıydılar (əgər bu gedişdən sonra ortadakı məbləğin paylaşdırılması partiyamı udməq üçün yeni ehtimallarla mütənəsib olarsa, bu razılaşıma onların taleini dəyişmir), onda ya A bu gediş uduz və bu halda onun üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid azalacaqdır və ya B onu uduzacaqdır və bu halda B üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid az olacaqdır. Lakin bu hallardan hər birinin ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir; axtarılan funksiya – birinci göstəricisi bir vahid azaldılmış bu funksiya üstəgəl ikinci göstəricisi bir vahid azaldılmış funksiyanın yansıma bərabərdir. Bu bərabərlik *sonlu fərqlərlə tənliklər* adlanan tənliklərdən biridir.

Bu tənliyin köməyiylə oyunçu A üçün ehtimalları, oyunçu A verilən say qədər xal topladığı halda ehtimalın və ya bu ehtimalı ifadə edən funksiyanın vahidə bərabər olmasını nəzərə alaraq (yoxsa birinci göstərici sıfıra bərabər olduqda, bu funksiya ikinci göstəricisi ilə birlikdə sıfıra çevrilir) və ən kiçik ədədlərdən başlayaraq təyin etmək olar. Beləliklə, fərz edərək ki, oyunçu A -ya yalnız bir xal çatışmır, biz onda tapırıq ki, onun üçün uduş ehtimalları, B üçün bir və ya iki, və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, $1/2$, $3/4$, $7/8$ -ə və s. bərabər olur. Ümumiyyətlə, onda bu ehtimal bərabərdir: vahid minus $1/2$ üstü B üçün çatışmayan xallar sayı. Sonra fərz edək ki, oyunçu A üçün iki xal çatışmır və oyunçu B üçün bir və ya iki və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, bu ehtimalın $1/4$, $1/2$, $11/16$ və s. bərabər olduğunu tapırıq. Daha sonra fərz edirik ki, oyunçu A üçün üç xal çatışmır və s.

Hər hansı bir kəmiyyətin ardıcıl qiymətlərinin fərqlərlə tənliyinin köməyiylə alınmasının bu üsulu uzun və çətindir. Həndəsəçilər bu tənliyi ödəyən göstəricilərin ümumi funksiyasının alınması metodlarını axtarırdılar ki, hər bir xüsusi halda bu funksiya göstəricilərin uyğun qiymətlərini yerinə qoymaq mümkün olsun. Bu məsələyə ümumi halda baxaq. Buna görə üfqi xətt üzrə yerləşən sıradakı hədlərdən elələrini götürək ki, bunlardan hər biri əvvəlkilərdən məlum qanun əsasında yaranır. Fərz edək ki, bu qanun bir neçə ardıcıl hədləri onların öz göstəriciləri ilə və ya onların sıradakı tutduğu yeri göstərən ədədlə əlaqələndirən tənliklə ifadə olunur. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *bir göstəricili sonlu fərqlərlə tənlik* adlandırırım. Bu tənliyin tərtibi və ya dərəcəsi onun kənar hədlərinin tərtiblərinin fərqi qədərdir. Bu tənliyin köməyiylə sıranın hədlərini ardıcıl surətdə təyin etmək və onu qeyri-müəyyən olaraq davam etdirmək olar; lakin buna görə, sıranın tənliyin dərəcəsinə bərabər hədlərinin sayını bilmək zəruridir. Bu hədlər fərqlərlə tənliyin inteqralı və ya sıranın ümumi həddinin məhz ixtiyari sabit ifadələridir.

İndi əvvəlki sıranın hədlərinin üstündən üfqi yerləşən hədlərinin ikinci sırasını götürək; ikinci sıranın hədlərinin üstündən üçüncü üfqi sıranı da götürək və s. Sonsuzluğa qədər belə davam edərək, fərz edək ki, bütün bu sıraların hədləri şaquli və həm də üfqi istiqamətlərdə götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bunların hər iki istiqamətdə yerlərini göstərən ədədlər arasında ümumi tənliklə əlaqələndirilmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *iki göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırırım.

Oxşar qaydada əvvəlki sıraların müstəvisi üzərindən hədləri, uyğun olaraq, birinci müstəvi üstündə olan oxşar sıraların ikinci müstəvisini götürək; sonra, bu ikinci müstəvinin üzərindən oxşar sıraların üçüncü müstəvisini götürək və fərz edək ki, bu sıraların bütün hədləri uzunluq, en və hündürlük istiqamətlərində götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bu istiqamətlərdə onların yerini göstərən üç ədəd arasında tənliklə əlaqələndirilmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən, onu *üç göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırırım.

Nəhayət, məsələyə mücərrəd formada və fəzanın ölçülərindən asılı olmayaraq baxaraq, ümumiyyətlə, məlum sayda göstəricilərin funksiyaları olan kəmiyyətlər sisteminə baxaraq, fərz edək ki, bu kəmiyyətlər, bu göstəricilərə nəzərən onların fərqləri arasında və göstəricilərin özlərinin arasında bu kəmiyyətlərin sayı qədər tənlik vardır;

bunlar – göstəricilərinin sayı məlum olan sonlu xüsusi fərqlərli tənliklər olacaqdır.

Bu tənliklərin köməyiylə bu kəmiyyətləri ardıcıl surətdə təyin etmək olar. Bir göstəricili tənlik halında sıranın hədlərinin məlum sayını bilmək zəruri olduğu kimi, iki göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri bu göstəricilərdən birinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə sətirlərini bilmək zəruridir. Eynilə də, üç göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri iki göstəricinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə müstəvisini bilmək zəruridir və s. Bütün bu hallarda sıraların hər hansı bir həddini ardıcıl xaricetmə yolu ilə təyin etmək mümkündür. Xaricetmə aparılan tənliklərin hamısı eyni bir tənliklər sistemindən olduğundan, bu xaricetmələrin köməyiylə alınmış ardıcıl hədlərin bütün ifadələri həddin yerini təyin edən göstəricilərin funksiyası olan bir ümumi ifadədə olmalıdır. Bu ifadə fərqlərlə təklif olunmuş tənliyin inteqralıdır və onun tapılması – inteqral hesabının predmetidir.

Teylor ilk dəfə «Methodus incrementarum» adı ilə sonlu fərqlərlə xətti tənlikləri tədqiq etmişdir. O, burada bir əmsallı və sonuncu həddi göstəricinin funksiyaları olan birinci tərtib tənliklərin inteqrallanması yolunu verir. Düzdür, ədədi və həndəsi silsilələrin hədlərinin əlaqələrinə həmişə baxılmışdır və bunlar fərqlərlə xətti tənliklərin ən sadə hallarıdır; lakin bunlara hələ belə nöqtəyi-nəzərdən baxılmamışdı, bu nöqtəyi-nəzər ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyəyə gətirir və bunlar əsl kəşflər hesab olunur.

O zamanlara yaxın dövrdə, Muavr sabit əmsallı ixtiyari tərtib sonlu fərqlərlə tənliklərə – *qayıdışlı sıralar* (suites récurrentes) adlandırılan tənliklərə baxmışdı. O, bunları olduqca bacarıqlı üsulla inteqrallaya bilmişdi. İxtiraçıların yolu ilə getmək həmişə maraqlı olduğundan, mən Muavrın tutduğu yolu qayıdışlı sıraya tətbiq edərək şərh edəcəyəm; bu sıranın ardıcıl üç həddi arasında əlaqə verilir. Muavr əvvəlcə həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri arasında əlaqəyə və ya onu ifadə edən ikihəddli tənliyə baxır. O, bu münasibəti əvvəlki hədlərə aid edərək, onu bu şəkildə sabit vuruğa vuraraq, hasilini ikinci tənlikdən çıxır. Bu üsulla o, həndəsi silsilənin üç ardıcıl həddini əlaqələndirən tənlik alır. Sonra Muavr ikinci silsiləyə baxır, bu silsilənin ardıcıl hədlərinin nisbəti – indicə götürülən həmin vuruqdur. O, bu yeni silsilədə tənliyin hədlərinin göstəricisini oxşar qaydada bir vahid azaldır: bu şəkildə o, bu silsiləni ikinci silsilənin hədlərinin nisbətinə vurur və hasilini ikinci silsilənin tənliyindən çıxır, bununla da o, onun birinci silsilə üçün tapdığı qayda ilə bu silsilənin üç ardıcıl hədləri arasında tamamilə oxşar münasibəti alır. Daha sonra o qeyd edir ki, hər iki silsiləni hədbəhd topladıqda, həmin münasibət üç ixtiyari belə ardıcıl cəmlər arasında qüvvədə qalır. O, bu nisbətin əmsallarını təklif olunmuş qayıdışlı sıranın hədlərinin nisbətinin əmsalları ilə müqayisə edir və hər iki həndəsi silsilənin nisbətlərini təyin etmək məqsədilə ikinci dərəcəli tənlik tapır ki, bu tənliyin kökləri bu nisbətlər olur. Beləliklə, Muavr qayıdışlı sıranı hər biri ixtiyari sabitə vurulmuş iki həndəsi sıraya ayırır, bu sabit qayıdışlı sıranın ilk iki həddinin köməyi ilə tapılır. Bu ağıllı üsul mahiyyətcə Dalamberin sonradan sabit əmsallı sonsuz kiçilən fərqlərlə xətti tənliklərin inteqrallanması üçün tətbiq etdiyi və Laqranj tərəfindən sonlu fərqlərlə oxşar tənliklərə keçirilmiş olan metoddur.

Bundan sonra mən, sonlu xüsusi fərqlərlə xətti tənliklərə, əvvəlcə, qayıdışla – qayıdışlı sıralar adı ilə (rus., возвратно-возвратных; suites récurrentes) baxmışam. Bütün bu tənliklərin ən ümumi və ən sadə inteqrallanması qaydası, mənə elə gəlir ki, mənim doğuran funksiyaların baxılmasına əsaslandırıdığım üsuldur ki, onun ideyası belədir.

Əgər t dəyişənin artan qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılmış t dəyişənin funksiyası olan A -nı götürsək, onda bu qüvvət üstlərindən hər hansı birinin əmsalı bu qüvvət üstünün funksiyası və ya bu dərəcənin göstəricisi olacaqdır. A – bu əmsalın və ya göstəricinin *doğuran funksiya* adlandırdığım funksiyasıdır.

İndi isə A sırasını həmin t dəyişənin xətti funksiyasına, məs., vahid plyus bu dəyişənin iki mislinə vursaq, onda hasil yeni $d o g u - r a n$ funksiya olacaqdır ki, burada dəyişənin hər hansı qüvvət üstünün əmsalı – A -da həmin qüvvət üstlü əmsal plyus bir vahid az qüvvət üstlü əmsalın iki mislidir. Beləliklə, hasiləki göstərici funksiya $A - d a k i$ *göstərici* funksiya plyus həmin iki misli götürülmüş

funksiya olacaqdır ki, bu funksiyada göstərici bir vahid azaldılmışdır. Həsilin ayrılışında bu göstərici funksiya, beləliklə, A -da göstərici funksiyanın törəməsi olacaqdır, elə törəmə ki, onu bu sonuncu funksiya qarşısında qoyulan δ xarakteristikası ilə ifadə etmək olur. Xarakteristika ilə göstərilən əməliyyat A -nın vuruğundan asılıdır, bu vuruğu B ilə işarə edəcəyik və fərz edəcəyik ki, A kimi o da t dəyişəninin qüvvət üstləri üzrə sıraya ayrılmışdır.

İndi yenə də, B -ni, A -nın B -yə hasilinə vursaq, bu, A -nın B -nin kvadratına hasilinə bərabər olacaqdır, onda üçüncü doğuran funksiya təşkil olunacaqdır ki, bu funksiyada t -nin hər hansı dəyişəninin əmsalı əvvəlki hasilin uyğun əmsalının oxşar törəməsi olacaqdır; buna görə də, onu əvvəlki törəmə qarşısında qoyulmuş həmin δ xarakteristikası ilə işarə etmək olar; onda bu xarakteristika A sırasına uyğun əmsalın qarşısında iki dəfə yazılacaqdır. Lakin onu iki dəfə yazmaq əvəzinə onu iki əmsal ilə yazırlar.

Bu qayda ilə davam edərək, ümumi halda biz görəcəyik ki, A -nı B üstü n -ə vurduqdan sonra, əgər A -nın uyğun əmsalı qarşısında n üstü δ xarakteristikasını yazsaq, hasilə t dəyişəninin hər hansı qüvvət üstü əmsalı alınır.

Fərz edək ki, B , – vahid bölünsün t -dir; onda A -nın B -yə hasilində hər hansı qüvvət üstü bu dəyişənin (t -nin) əmsalı, A -da, qüvvət üstü bir vahid artıq olan əmsal olacaqdır; buradan belə nəticə alınır ki, A -nın n dərəcəli B -yə hasilində bu əmsal, A -da, n vahid artıq dərəcəli əmsal olacaqdır.

C ilə vahid bölünsün t dəyişəni minus vahidi işarə edək; onda A -nın C -yə hasilində hər hansı qüvvət üstü dəyişənin əmsalı – A sırasında onun bir vahid qüvvət üstü əmsalı minus həmin sırada bu qüvvət üstü əmsal olacaqdır; bu, deməli, göstəricisi bir vahid azaldılan bu sonuncu əmsalın sonlu fərqi olacaqdır. Beləliklə, A -nın qüvvət üstü n olan C -yə hasilində əmsal, – A -nın uyğun əmsalının n -ci fərqi olacaqdır.

Belə ki, burada B , – vahid plyus C -yə bərabər olduğundan, qüvvət üstü n olan B , – həmin qüvvət üstü vahid plyus C binomuna bərabərdir. Buna görə də, bu qüvvət üstləri ilə qeyd olunan binomların A -ya hasilindən sonra hər iki hasilin eyni olduğu aşkar olur. Lakin A -nın n üstü B -yə hasilində hər hansı qüvvət üstü t dəyişəninin əmsalı, biz gördüyümüz kimi, A -da qüvvət üstü n vahid böyük olan əmsaldır; deməli, bu əmsal n ədədi qədər artırılmış göstərici funksiya. A -nın vahid plyus C binomuna ayrılışına hasilində, biz əvvəlki mülahizələrə əsasən, A -nın C -nin ardıcıl dərəcələrinə hasiləri əvəzinə A -dakı göstərici funksiyanın ardıcıl fərqlərini yazaraq və bu funksiyanı C -dən asılı olmayan həddə vuraraq, uyğun əmsalları alırıq. Deməli, biz göstəricinin qeyri-müəyyən n qədər artırılmış hər hansı funksiyanı alırıq, bu funksiya qüvvət üstü n olan vahid plyus vahid binomunun uyğun olaraq, funksiyanın özünə və onun ardıcıl fərqlərinə vurulmuş əmsalları ilə ifadə olunur ki, bu da sıraların ardıcıl hədlərinin fərqləri vasitəsilə bu sıraların interpolasiyasını verir, əgər qeyri-müəyyən n -ə kəsir kimi baxılırsa.

Eynilik tənlisi – B bərabərdir C plyus vahid, C bərabərdir B minus vahid eynilik tənlisini verir. Bu sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini n qüvvət üstünə yüksəldib və bunları da A -ya vurduqda A -nın qüvvət üstü n olan C -yə hasilində t dəyişəninin verilmiş qüvvət üstü əmsalı – A -da həmin qüvvət üstü ilə əmsalın n -ci sonlu fərqi olacaqdır. Qüvvət üstü n olan B minus vahid binomunun ayrılışına A -nın hasilində verilən qüvvət üstü dəyişənin əmsalı – bu ayrılışın A -dakı həmin qüvvət üstü əmsalının qiymətlərinə uyğun olaraq, vurulmuş hədlərinin cəminə bərabər olur, əgər bu əmsalın göstəricisi ardıcıl surətdə n , n minus vahid, n minus iki və s. qədər artırılsa, göstərici funksiyanın n -ci sonlu fərqi funksiyanın ardıcıl qiymətləri ilə ifadə olunur.

δ ilə A -da t dəyişəninin verilən qüvvət üstü əmsalının B vuruğuna nəzərən törəməsinə işarə edərək, C vuruğuna nəzərən

törəməni Δ xarakteristikası ilə işarə edək. Əgər B bərabərdir C plyus vahid tənlində δ , əvəzinə Δ yazsaq, onda əvvəlkinə əsasən, bu tənlinin hər iki tərəfini n -ci qüvvətə yüksəltsek, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman ayrılışın hər bir həddində A -da dəyişənin verilən qüvvət üstü əmsalı və ya göstərici funksiya, xarakteristikanın hər bir qüvvət üstündən sonra qoyulmalıdır, xarakteristikalardan asılı olmayan hədd isə bu funksiya vurulmalıdır. Bunlar C bərabərdir B minus vahid tənlində, həmçinin B minus C bərabərdir vahid tənlində də yerinə yetir. B və C əvəzinə δ və Δ yazsaq və bu sonuncu tənlinin hər iki tərəfini n -ci dərəcədən qüvvətə yüksəldib, sonra birinci hissənin ayrılışını yazsaq, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman hər bir həddə göstərici funksiya δ və Δ -nın qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikalarından və qüvvətə yüksəldilmiş bu xarakteristikaların hasilindən sonra yazılmalıdır; bu funksiya yalnız ikinci hissədə vahid əvəzinə yazılmalıdır; bu funksiyanın ifadəsi, nəticədə, onun ardıcıl qiymətlərinin və fərqlərinin vasitəsilə alınır.

B və C vuruqlarının digər qiymətlərinə bu mülahizələri tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı ümumi nəticəyə gəlirik: B və C -ni əlaqələndirə bilən bütün eynilik tənliliklərinin ayrılışında B və C -də təmsil olunan t dəyişəninin funksiyaqlarının nə cür olmasından asılı olmayaraq, bu funksiyaqları δ və Δ -nın uyğun xarakteristikaları ilə əvəz etmək olar, yalnız bu zaman göstərici funksiya qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikadan və qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikaların hasilərindən sonra yazılmalı, xarakteristikadan asılı olmayan hədlər isə bu funksiya vurulmalıdır. Doğrudan da, aydındır ki, əgər B və C -ni əlaqələndirən tənlinin, hər hansı söhbət gedən həddində r , – B -nin dərəcəsi, r' , – C -nin dərəcəsidirsə, doğuran funksiyaqlardan onların əmsallarına keçmək üçün δ -ni B -nin və Δ -ni C -nin əvəzinə və dərəcələrin hasilini də yerinə yazmaq gərəkdir.

Bölmə mümkün olmadığı halda, Muavr bu nəticəni analoji genişləndirərək, qüvvət üstü kəsir olan kəmiyyətə qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətin kökü kimi baxır, bu kökdə kökaltı kəmiyyət – kəsirin surətində göstərilən qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyət, kökün dərəcəsi – həmin kökün məxrəcidir. Sonra o görmüşdür ki, Dekart işarələməsi üzrə eyni bir hərfin iki qüvvətinin hasilini onların dərəcələrinin toplanmasına, nisbəti – bölünənin dərəcəsinə bölünən dərəcəsinin, lakin birincisi ikincisindən böyük olduqda, çıxılmasına gətirir. Vallis bu nəticəni birinci göstərici ikinci göstəriciyə bərabər və ya ondan kiçik olduğu hallar üçün genişləndirərək, bu fərqi ya sıfır bərabər götürür və ya onu mənfii edir. Onda o fərz edirdi ki, mənfii qüvvət üstü göstəricisi – vahidin müsbət, lakin həmin qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətə nisbətidir. Bu mülahizələr onu, ümumi halda differensial birhədlilərin integrallanmasına gətirdi; buradan o, qüvvət üstü tam və müsbət ədəd olan differensial binomların xüsusi növ müəyyən integrallarını çıxardı. Sonradan o, bu integralları ifadə edən ədədlərin qanununu müşahidə edərək, həndəsəçiləri olduqca maraqlandıran və mənim yeni ehtimal nəzəriyyəmin əsaslarından biri olan müəyyən integrallar hesabının başlanğıcı sayılan bir sıra interpolasiya və uğurlu induksiya vasitəsilə dairənin sahəsinin onun diametrinin kvadratına nisbətini sonsuz hasilə ifadə etmişdir; bu hasilə sonsuz davam etdirməyib dayandırdıqda, tədricən bu nisbət alınır: analizin ən gözəl nəticələrindən biri. Lakin çox qərribədir ki, radikal qüvvətlərin kəsri dərəcələrini çox yaxşı araşdıran Vallis, bunları ondan əvvəlkilər kimi işarə etməyə davam etmişdir. Nyuton ilk dəfə, əgər səhv etmərsə, «Oldenburqa Məktublarında» bu qüvvətlərin işarələmələrini kəsri dərəcələr vasitəsilə daxil etmişdir. Binomun qüvvət üstlərinin göstəricisini onun ayrılışındakı hədlərin əmsalları ilə induksiya metodu ilə müqayisə edərək, bu metodu belə gözəl tətbiq edən Vallis, bu qüvvət üstü tam və müsbət olduğu halda, bu əmsalların qanununu müəyyən etmiş və onu analoji surətdə kəsri və mənfii qüvvət üstləri halına genişləndirmişdir. Dekart işarələnməsinə əsaslanan bu müxtəlif nəticələr, onun analizin inkişafına təsirini sübut edir. Dekart işarələnməsinin daha üstün bir cəhəti də vardır ki, o,

loqarifmlər haqqında ən sadə və düzgün anlayış verir, bu loqarifmlər əslində eyni bir kəmiyyətin qüvvət üstlərinin göstəriciləridir, bunlar sonsuz kiçilən kəmiyyətlər qədər ardıcıl artaraq, bütün ədədləri ifadə edə bilirlər.

Lakin bu işarələmənin ən mühüm ümumiləşməsi, onun dəyişən göstəricilərə genişləndirilməsidir, bu isə ən yeni analizlərin ən məhsuldar istiqamətlərindən biri olan göstərici hesabını təşkil edir. Leybnits dəyişən göstəricili transsendent kəmiyyətləri birinci olaraq göstərmişdir və bunlarla o, sonlu funksiyanın təşkil olunduğu elementlər sistemini tamamlamış oldu, belə ki, dəyişənin hər bir aşkar sonlu funksiyası sonuncu analizdə toplanma, çıxma, hasil və bölmə, sabit və ya dəyişən qüvvətlərə yüksəltmə vasitəsilə sadə kəmiyyətlərə gətirilir. Bu elementlərdən ibarət tənliklərin kökləri – dəyişənin qeyri-aşkar funksiyalarıdır. Beləliklə, dəyişən – hiperbolik loqarifmi vahid olan ədədin qüvvətləri sırasında göstəricinin loqarifminə bərabər olan qüvvətə bərabərdir, odur ki, dəyişənin loqarifmi qeyri-aşkar funksiyadır.

Leybnits, kəmiyyətlərə olduğu kimi, özünün differensial xarakteristikasına dəyərlər vermək fikrinə gəlmişdi; amma bu halda bu dəyərlər eyni bir kəmiyyətin təkrarən vurulmasını deyil, eyni bir funksiyanın təkrarən differensiallanmasını göstərəcəkdir. Dekart işarələməsinin bu ümumiləşdirilməsi Leybnitsi differensialların müsbət, integralların isə mənfi qüvvətlərinin analogiyasına gətirdi. Laqranj bu gözəl analogiyamı onun bütün təfərrüatı ilə izlədi; o, dəyişənlər sonlu və müxtəlif artımlar aldığıda, həmçinin bu artımlar sonsuz kiçilən olduqda, bu və digər hallarda fərqlərin və integralların başqa şəkllə salınması üçün həm maraqlı, həm də faydalı ümumi düsturlara, induksiya metodunun nə vaxtsa olunmuş tətbiqlərindən ən gözəl sayılan bir sıra induksiyalara gətirib çıxardı. Lakin çətin hesab etdiyindən o, isbatlar vermədi. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi Dekart işarələməsinə ixtiyari xarakteristikalara genişləndirir: bu nəzəriyyə bu xarakteristikaların göstərdiyi qüvvətə yüksəltmə və əməllər arasında analogiyamı aydın şəkildə sübut edir, odur ki, bu nəzəriyyəyə xarakteristikaların göstərici hesabı kimi də baxıla bilər. Sıralara və fərqlər tənliklərinin integrallanmasına aid olan nə varsa, bu nəzəriyyədən son dərəcə asanlıqla alınır.

Ehtimalların hesablanması tətbiqi. Oyunlar haqqında

Oyunlarla ifadə olunan kombinasiyalar ehtimallar haqqında ilk tədqiqlərin predmeti olmuşdur. Bu kombinasiyaların intəhasız müxtəlifliyi arasında bir çoxu asanlıqla hesablanır, digərləri olduqca çətin hesablanma tələb edir və kombinasiyalar çətinləşdikcə bu hesablamalardakı çətinliklərin də artması ilə bunları dəf etmək və maraq həndəsəçiləri analizlərinə nəvənün getdikcə daha çox təkmilləşdirməyə sövq etdi. Biz əvvəl gördük ki, birləşmələr nəzəriyyəsinin köməyiylə hər hansı bir lotereyada qazancı asanlıqla müəyyən etmək olur; lakin birə qarşı bir mərcini neçənci tirajda saxlamağı bilmək çox çətin, məs., bütün nömrələrin çıxmasını. Əgər n – nömrələrin sayı, r – hər bir tirajda çıxan nömrələrin sayı, i isə tirajların naməlum sayıdırsa, onda bütün nömrələrin çıxması ehtimalının ifadəsi i -nin n -ci dərəcəsinə r sayda ardıcıl ədədlərin hasilinin sonlu fərqiindən asılıdır. n ədədi xeyli böyük olduqda bu ehtimalın $1/2$ -ə bərabər alınmasına baxmayaraq, bu fərqi heç olmasa yaxşı yığılan sıraya ayırmadıqda, i -nin qiymətini tapmaq mümkün olmur. Buna çox böyük ədədlərin funksiyalarının yaxınlaşmaları üçün əvvəl göstərilmiş metodun köməyiylə uğurla nail olmaq mümkündür. Beləliklə, biz belə nəticəyə gəlirik ki, əgər lotereya on min nömrədən təşkil olunmuşdursa və hər bir tirajda bunlardan yalnız biri çıxarılsa, onda birə qarşı bir mərcini, yəni bütün nömrələrin 95 767 tirajdan sonra çıxacağı mərcini gəlmək sərfəli deyildir və həmin mərci 95 768 tiraj halında gəlmək sərfəlidir. Fransız lotereyasında 85-ci tirajda mərc gəlmək sərfəli deyil, 86-cı tirajda isə sərfəlidir.

Belə bir halda da baxaq: iki oyunçu – A və B xax və $şəbə$ oyununu belə bir qaydada oynayırlar ki, hər bir atılmada xax düşdükdə A , B -yə bir jeton verir, $şəbə$ düşdükdə B , A -ya bir jeton verir; B -də olan jetonların sayı məhduddur, A -nın jetonlarının sayı qeyri-məhduddur və partiya yalnız B -nin jetonları qurtardıqda sona çatır.

Sual olunur, oyunçulardan birinin digərilə mərc gəlməsi üçün atmaların sayı nə qədər olmalıdır ki, oyun bitmiş hesab olunsun. Partiyamın i sayda atılmadan sonra sona çatacağı ehtimalının ifadəsi sıra ilə verilir, əgər B -nin jetonlarının sayı çox olarsa, bu sıra çoxlu hədlər və vuruqlardan ibarət olur; bu sıranın $1/2$ -ə bərabər olmasını təmin edən naməlum i -nin qiymətinin tapılması, bu sıranı olduqca yığılan sıraya gətirmək mümkün olmadıqda, mümkün olmazdı. İndicə şərh etdiyimiz metodu bu sıraya tətbiq edərək, naməlum i üçün çox sadə ifadə tapırıq, buradan isə belə nəticə alınır ki, məs., B -də yüz jeton olarsa, onda birə qarşı birdən bir qədər az şans vardır ki, partiya 23 780 atılmadan sonra sona yetsin və birə qarşı bir şansdan bir qədər çox şans vardır ki, partiya 23 781 atılmadan sonra başa çatsın.

Bu iki misal, verdiyimiz misallarla birlikdə, oyunlar üçün məsələlərin analizinin mükəmməlləşdirilməsinə nə cür təsir etdiyini göstərmək üçün kifayətdir.

Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında

Ehtimalların hesablanması nəticələrinə xüsusi diqqətəlayiq bu növ bərabərsizliklər xeyli təsir göstərir. xax və $şəbə$ oyununa baxaq və fərz edək ki, metal pulun hər iki üzünü yüngüllüklə düşür; onda birinci atılmada xax düşməsi ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir, onun ardıcıl iki dəfə düşməsi ehtimalı $1/4$ -ə bərabərdir. Lakin, əgər metal pulun üzərində qeyri-bərabərlik varsa və buna görə də, üzvlərdən birinin digərindən çox düşməsi kimi üstünlüyü olursa və bu qeyri-bərabərliyin hansı üz üçün əlverişli olduğu məlum olmazsa, onda birinci atılmada xax düşməsi ehtimalı yenə də $1/2$ olacaqdır, çünki bu qeyri-bərabərlik haqqında bizim bilgisizliyimiz halında, əgər bu qeyri-bərabərlik düşən üz üçün əlverişlidirsə, sadə hadisənin ehtimalı bir o qədər də artır, əgər bu qeyri-bərabərlik onun üçün əlverişli deyildirsə, onda bu ehtimal o qədər də azalır. Lakin bu bilgisizliyimizdə xax iki dəfə ardıcıl düşməsi ehtimalı artır. Əslində bu ehtimal, birinci atılmada xax düşməsi ehtimalı ilə onun birinci dəfə xax düşməsindən sonra ikinci dəfə də xax düşməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir; lakin birinci dəfə xax düşməsi metal pulun qeyri-bərabər üzlü olmasının bu hal üçün əlverişli olduğu nəticəsinə gətirir; deməli, naməlum qeyri-bərabərlik bu halda ikinci atılmada xax düşməsi ehtimalını artırır; o, aydındır ki, hər iki ehtimalın hasilini də artırır. Bu suala cavabı hesablamaq məqsədilə fərz edək ki, bu qeyri-bərabərlik sadə hadisənin ehtimalının iyirmidə bir qədər artması üçün əlverişlidir. Əgər bu hadisə xax düşməsi hadisədirsə, onun ehtimalı – $1/2$ plus $1/20$ və ya $11/20$, iki dəfə ardıcıl xax düşməsidirsə, onda onun ehtimalı $11/20$ -nin kvadratı və ya $121/400$ olacaqdır. Əgər $şəbə$ düşməsi əlverişli hadisə olarsa, onda xax ehtimalı – $1/2$ minus $1/20$ və ya $9/20$ olacaqdır, xax ard-ardınca iki dəfə düşməsi ehtimalı $81/400$ olacaqdır. Qeyri-bərabərliyin bu hadisələrdən hansı üçün əlverişli olduğunu əvvəlcədən bilmək üçün heç bir əsas olmadıqdan, aydındır ki, xax – xax – mürəkkəb hadisəsinin ehtimalını tapmaq üçün əvvəlki iki ehtimalı toplamaq və bunların cəminin yansıması götürmək lazımdır, nəticədə bu ehtimal $101/400$ -ə bərabər olur ki, bu da $1/4$ -in $1/400$ qədər və ya $1/20$ -in artımının kvadratına bərabərdir ki, qeyri-bərabərlik onun əlverişli etdiyi hadisənin mümkünliyünü bu qədər artırır. Oxşar olaraq $şəbə$ – $şəbə$ düşmə ehtimalı $101/400$ -ə bərabərdir; lakin xax – $şəbə$ və ya $şəbə$ – xax düşməsi ehtimallarından hər biri yalnız $99/400$ -ə bərabərdir, belə ki, bu dörd ehtimalın cəmi yəqinliyə və ya vahidə bərabər olmalıdır. Beləliklə, adi olaraq belə məlum olur ki, sadə hadisələr üçün əlverişli olan, eyni mümkün sayılan sabit və naməlum şəbəblər eyni bir sadə hadisənin təkrar olunması ehtimalını həmişə artırır.

Atılma sayı cüt olduqda xax və $şəbə$ hər ikisi ya cüt dəfə, ya da tək dəfə düşməlidir. Bu hallardan hər birinin ehtimalı, əgər metal pulun hər iki üzünün düşməsi mümkünliyü eyni olarsa, $1/2$ -ə bərabərdir; lakin bunlar arasında naməlum qeyri-bərabərlik olduqda, onda bu qeyri-bərabərlik həmişə birinci hal üçün əlverişli olur.

Eyni bacarıqlı iki oyunçu belə bir şərtlə oynayırlar ki, hər bir gedişdə oyunu uzadan öz rəqibinə jeton verir və partiya oyunçulardan birinin jetonu qurtarana qədər davam edir. Ehtimalların hesablanması bizə aydın olur ki, oyunun bərabərliyə qəbul olması üçün oyunçuların oynada

ortaya qoyduqları məbləğ onların jetonlarının sayına mütənasib olmalıdır. Lakin onların bacarıqları arasında kiçik naməlum qeyri-bərabərlik olarsa, onda o, jetonların sayı az olan oyunçu üçün əlverişli olacaqdır. Əgər oyunçular öz jetonlarını iki dəfə, üç dəfə artıq götürməyi şərtləssələr, onun partiyayı udməsi ehtimalı artır və bu ehtimal $1/2$ -ə bərabər olacaqdır və ya onların jetonlarını sayı aralarındakı nisbət eyni qalmaq şərti ilə sonsuz artdığı hallarda belə, ikinci oyunçunun ehtimalı kimi olacaqdır.

Bu naməlum qeyri-bərabərlikləri təsadüfün şanslarına məruz qoyaraq onların təsirini düzəltmək olar. Məs., *xaç və şabəkə* oyununda, əgər biz *xaçla* ikinci metal pulda düşən üzü həmişə adlandırmağı şərtləssək, onda birinci pulda ard-ardınca *xaç* düşməsi ehtimalı dördüdə birə daha çox yaxınlaşacaqdır, nəinki bir pulun atılmasında. Bu sonuncu halda fərq birinci pulun əlverişli həl üçün naməlum qeyri-bərabərliyin verdiyi ehtimalın kiçik artımının kvadratına bərabərdir: digər halda bu fərq bu kvadratin dörd mislinin ikinci pul üçün uyğun kvadrata hasilinə bərabərdir.

Urna nömrələnmə qaydası ilə birdən yüzə qədər nömrələnmiş yüz nömrə atılmışdır və bunları qarışdırmaq məqsədilə urnu silkələdikdən sonra bunlardan biri çıxarılır; aydındır ki, bu qarışdırma yaxşı olmuşdursa, onda nömrələrin çıxması ehtimalları bərabər olacaqdır. Lakin bunların çıxmasında nömrələrin urna atılması qaydasında asılı olan cüzi fərqlərin olmaması üçün şübhə yaranmasın deyər, bu fərqləri nisbətən azaltmaq məqsədilə, bu nömrələri onları birinci urnadan çıxardıqdan sonra qarışdırmaq üçün ikinci urna atırlar. Üçüncü, dördüncü və s. urnalar ikinci urnadakı bu kiçik fərqi azaldacaqdır.

Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında

Hadisələrin gedişatını qeyri-sabit və düzgün olmayan edən, *təsadüf* adı ilə anladığımız dəyişən və naməlum səbəblər çərçivəsində bu hadisələrin sayının artması ilə nəzərə cərpacaq qədər, son dərəcədə bir düzgünlük yaranır ki, bu da qabaqcadan düşünülmüş niyyətdən asılılıq kimi görünmüş və onu İlahi qüvvənin varlığına sübut kimi saymışdılar. Lakin bu haqda düşünərək, biz tezliklə əmin oluruq ki, bu düzgünlük ən çox ehtimal olunan tez-tez baş verəcək sadə hadisələrin uyğun ehtimallarının aşkar olunmasıdır. Məs., içərisində ağ və qara kürəcik olan urnadan hər dəfə çıxarılan kürəciyin urna qaytarıldığı fərz olunur və yeni tirajda da bu təkrar olunur. Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış qara kürəciklər sayına nisbəti ilkin tirajlarda, əksər hallarda, olduqca düzgün nəticə verməyəcəkdir; lakin bu qeyri-düzgünlüyün qeyri-sabit səbəbləri ilə təsirlər yaraşdır ki, bunlar hadisələrin düzgün məcrada baş verməsi üçün növbə ilə əlverişli və əlverişsiz olur, bu təsirlər tirajların sayı çoxaldıqca bir-birini qarşılıqlı yox edərək, urnadakı ağ kürəciklər sayının qara kürəciklər sayına nisbətini və ya hər bir tirajda urnadan ağ və ya qara kürəciyin çıxmasının uyğun ehtimallarını get-gedə daha çox nəzərə cərpdir. Buradan aşağıdakı teorem alınır.

Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış bütün kürəciklər sayına nisbətinin urnadakı ağ kürəciklər sayının bütün kürəciklər sayına nisbətdən, verilmiş intervaldan artıq yayınmayacağı ehtimalı – fərz olunan intervalın nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, hadisələr sayını qeyri-müəyyən surətdə artırıdığında qeyri-müəyyən surətdə yaqinliyə yaxınlaşır.

Sağlam düşüncənin təlqin etdiyi bu teoremi analizin köməyi ilə isbat etmək çətin idi. Və bununla ilk olaraq məşğul olan məşhur həndəsəçi Yakob Bernulli bu teoremin özü verdiyi isbatına böyük əhəmiyyət verirdi. Doğuran funksiyalar hesabının bu predmetə tətbiqi, bu teoremi asanlıqla isbat etməklə yanaşı, müşahidə olunan hadisələrlə əlaqəli nisbətən onların uyğun mümkünlüklərlə əlaqəli əsl nisbətindən yalnız məlum sərhədlərdə yayınma ehtimalını da təyin edir.

Əvvəlki teoremdən ümumi qanun kimi baxılacaq bir nəticə çıxarmaq olar: təbiətin yaratdıqlarının nisbətləri bu yaradılmışlara külli miqdarda baxıldıqda, təxminən sabit qalır. Məs., illərin müxtəlifliyinə baxmayaraq, məhsulların cəmi uzun illər üçün eyni olaraq qalır; odur ki, hər şeyi nəzərə alan insan, təbiətin ona qeyri-bərabər bəxş etdiklərini bütün dövrlərə bərabər paylaşırdıraq, ilin mövsümlərinin qeyri-

sabitliyindən özünü qoruya bilər. Mən əvvəlki qanundan mənəvi səbəblərdən yaranan təsirləri istisna etmirəm. Hər il üçün doğum sayının əhalinin sayına nisbəti və nigahların doğumlarına nisbəti çox dəyişmir: Parisdə illik doğum sayı, demək olar ki, dəyişmir; eşitdiyimə görə, adi vaxtda, ünvan olmaması səbəbindən məktubların poçtla çatdırılmaması ildən-ilə az dəyişir; oxşar vəziyyət Londonda da müşahidə olunmuşdur.

Bundan başqa bu teoremdən belə nəticə alınır ki, qeyri-müəyyən davam olunan hadisələr sırasında rəqulyar və sabit səbəblərin təsiri zaman ötdükcə, qeyri-rəqulyar səbəblərin təsirini üstələməlidir. Bu vəziyyət lotereyadan alınan gəliri də əkinçilik məhsullarından alınan gəlir kimi ona görə labüd edir ki, onların fərz etdikləri şanslar oyunda ortaya qoyulan məbləğ çox olduqda onlara qazanc gətirir. Beləliklə, nəzərə alınarsa ki, əlverişli çoxsaylı şanslar cəmiyyətin əsası və dayacağı olan ictimai, ədalətin və humanizmin ədədi prinsiplərinə riayət edilməsilə həmişə əlaqədardır, bu prinsiplərə əməl etmək böyük üstünlük, bunlardan yayınmaq – böyük nöqsandır. Hər kəs tarixə və özünün şəxsi təcrübəsinə nəzər salarsa, görə ki, bütün faktorlar bu hesabın nəticəsini təsdiq edir. İdraka və insanın təbii hüquqlarına əsaslanan qərarların, bunları daxil etmiş və qoruyub saxlamış xalqların uğurlu nəticələrinə nəzər salın. Həmçinin vicdanı öz əxlaqının əsası götürən dövlətlərə onun nə cür üstünlüklər verdiyinə baxın və görün ki, onlar öz vədlərini yerinə yetirməkdə ciddi dəqiqlik naminə verdikləri qurbanlara görə necə mükafatlanmışlar. Ölkə daxilində nə dərəcədə nəhəng bir etimad! Ətrafda necə bir nüfuz! Əksinə bir baxın, öz sərhədlərinin hakimiyyət səvərliliyi və xəyanətkarlığı ucbatından xalqlar tez-tez dərin bədbəxtliklərə düşər olmuşlar. Hər dəfə böyük dövlət qələbələrə böyük sevgidən başı gicallənib dünyaya hökmranlığa can atdıqda, təhlükə altında olan insanları asılı olmamazlıq hissi ittifaqda birləşdirir. Qeyri-sabit səbəblər arasında müxtəlif dövlətlərin genişlənməsinə və kiçilməsinə oxşar olaraq, eynilə də, təbii çərçivələr sabit səbəblər kimi təsir göstərərək, nəhayət, qələbə qazanmışdır. Buna görə də, dövlətin möhkəmliliyi naminə, həm də xoşbəxtliyi naminə, bu sərhədləri keçmək olmaz, bu sərhədlərə onlar bu səbəblərin təsirindən aramsız olaraq qayıtmalıdılar, necə ki, tüğyan edən fırtınadan qabaran dəniz suları ağırlıqdan öz hövzəsinə qayıdır. Bu, ehtimal hesabının çoxsaylı fəlakətli təcrübələr ilə təsdiqlənmiş nəticələrindən biridir. Daimi səbəblər nöqtəyi-nəzərindən baxılan tarix maraq üçün faydadan çox elə faydanı ifadə etmiş olardı ki, o, insanlara ən yaxşı dərş verə bilmiş olsun. Bəzən bu səbəblərin qaçılmaz nəticələrinin təsadüfi təsirləri aşkar olunduqda, onların təsadüf nəticəsində baş verdiyini düşünürlər; məs., bir-birindən böyük dənizlər və ya böyük məsafə ilə aralı olan ərazilərdə yaşayan hər hansı xalqın digər xalqa tabe olması heç bir vəhcə qəbul olunmazdır. Belə iddia etmək olar ki, zaman ötdükcə bu sabit səbəb, həmin anlamda zaman ötdükcə aşkar olunan dəyişən səbəblərlə həmişə birləşərək, nəhayət, onlar arasında ən güclüsünə rast gələcəkdir ki, tabe xalqa təbii asılı olmamazlığını qaytarsın və ya onu onunla qonşu hər hansı güclü dövlətə birləşdirdin.

Təsadüfi analizin ən mühüm hallarının əksəriyyətində, sadə hadisələrin mümkünlükləri məlum olmur və biz, olub keçmiş hadisələrdə bizim səbəblər barədə bunlardan asılı fərziyyələrimizdə bir göstəriş axtarmaq məcburiyyətində oluruq. Doğuran funksiyalar analizini müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış nəticələrin yuxarıda qeyd olunmuş ehtimal prinsipinə tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı teoremi alırıq.

Hadisə sadə olarsa və ya bir neçə sadə hadisədən ibarət olarsa, məs., oyun partiyası çox dəfə təkrar olunmuşdursa, onda sadə hadisələrin müşahidələnməsinə ən ehtimalı edən mümkünlüklər – ən doğruya oxşar müşahidənin göstərdiyi mümkünlüklərdir: müşahidə olunan hadisə təkrar olunduqca, bu doğruya oxşarlıq artır və o, təkrar olunma sayı sonsuz olduqda, nəhayət, yaqinliklə qovuşur.

Burada iki cür yaxınlaşma mümkündür: bunlardan biri – baş vermiş hadisəyə, ən böyük doğruya oxşarlıq şamil edən mümkünlüklərin bu və ya digər tərəfdən götürülmüş sərhədlərinə aiddir, ikinci yaxınlaşma isə bu mümkünlüklərin bu sərhədlər arasında olması ehtimalına aiddir. Mürəkkəb hadisənin get-gedə daha çox dəfə təkrar olunması, əgər bu sərhədlər eyni qalarsa, bu ehtimal artırır; bu təkrarlanma, əgər ehtimal dəyişməzsə, bu sərhədlərin arasını daraldır: sonsuzluqda bu məsafə sıfıra çevrilir, ehtimal isə yaqinliyə keçir.

* şortı mənada.

Əgər bu teorem Avropanın müxtəlif ölkələrində doğulan oğlanlar sayının qızlar sayına nisbətində tətbiq olunarsa, onda bu nisbət hər yerdə təqribən, 22-nin 21-ə nisbətində bərabər olub, oğlanların ən ehtimallı çox yüngül doğumunu sübut edir. Bu nisbət Neapol və Peterburqda da belə olduğunu nəzərə alaraq, biz görürük ki, bu mənada iqlimin təsiri hiss olunmazdır. Buna görə ümumi fikrə zidd olaraq, belə düşünmək olar ki, oğlan doğumları hətta şərqdə də üstünlük təşkil edir. Buna görə də, mən, Misirə ezam olunmuş fransız alimlərinə bu maraqlı məsələ ilə məşğul olmağı təklif etdim: lakin doğum barədə dəqiq məlumatların alınmasındakı çətinlik onlara bu məsələni həll etməyə imkan vermədi. Xoşbəxtlikdən Qumboldt yeni verilənlər əsasında bu məsələni diqqətdən kənarda qoymadı; o, bu verilənləri Amerikada müşahidə etmiş və ağılla, fərasətlə, inadla və cəsarətlə toplamışdı. O, cəngəlliklər arasında da oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbətində Parisdə müşahidə edilmiş kimi olduğunu tapmışdı, bu isə oğlan doğumlarının üstünlüyünə insan nəsli üçün ümumi qanun kimi baxmaq məcburiyyəti yaratmışdır. Bu mənada müxtəlif növ heyvanlar üçün qanunlar təbiətşünasların diqqətini, mənəcə, özünə cəlb etməlidir.

Oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbəti vahiddən çox az fərqlənir, lakin hər hansı bir yerdə müşahidə olunmuş olduqca çoxsaylı doğumlar, bu mənada ümumi qanuna zidd nəticə verə bilərdi və bununla yanaşı, bizim buradan bu qanunun olmaması nəticəsinə gəlməyə haqqımız yoxdur. Belə bir nəticə çıxarmaq üçün çox böyük ədədlər tətbiq olunmalıdır və belə nəticənin böyük ehtimalla göstəriləyinə əmin olmaq gərəkdir. Məs., Byuffon özünün siyasi aritmetikasında bir neçə Burqundiya icmasında qız doğumlarının oğlan doğumlarından çox olmasını misal gətirmişdir. Bu icmalardan *Carcelle-le Griqnon* icması 2009-cu il üçün beş il ərzində 1026 qız və 983 oğlan doğulacağını bildirir. Bu ədədlər o qədər böyük olmasalar da, bunlar qız doğulmasının çox ehtimallı olmasını yalnız 9/10 ehtimalı ilə verir; bu ehtimalın *xaç* və *şəbəke* oyununda *xaçın* dörd dəfə ardıcıl düşməməsi ehtimalından az olmasına baxmayaraq, bu anomaliyanın səbəbini tapmaq üçün kifayət deyildir; əgər bu icmada doğulma yüzillik ərzində müşahidə olunsaydı, bu anomaliya güman ki, nəzərə çarpmazdı.

Doğum barədə doğum şəhadətnamələri kitabları vətəndaşların vəziyyətlərinin təminatı məqsədilə diqqətlə tərtib olunmadığından, böyük bir dövlətin əhalisinin çox çətin və dəqiq yerinə yetirilməsi çətin olan əməliyyata – əhalinin siyahıya alınmasına müraciət etmədən təyin etmək olar. Lakin buna görə əhalinin illik doğumlara nisbəti məlum olmalıdır. Buna nail olmaq üçün ən dəqiq üsul ondan ibarətdir ki, 1) ümumi nəticənin yerləşdiyi mövqenin şəraitindən asılı olmaması üçün dövlətdə elə departamentlər seçilməlidir ki, onlar bu dövlətin bütün ərazilərində təqribən eyni cür paylanmış olsunlar; 2) hər hansı verilmiş dövr üçün hər bir departamentdə bir neçə icmanın əhalisinin siyahısı diqqətlə aparılmalıdır; 3) bu dövrdən əvvəl və bu dövrdən sonrakı bir neçə il ərzində doğum siyahılarının köməyi ilə illik doğumlara uyğun orta ədəd tapılmalıdır. Əhalinin sayına bölünmüş bu ədəd, siyahıyaalma çox olduqca, hərillik doğumların sayının əhalinin sayına nisbətini daha doğru ifadə edir. Dövlət belə siyahıyaalmanın xeyirli olmasına əmin olaraq, mənim xahişimə əsasən onun yerinə yetirilməsinə razılıq verdi. Bütün Fransa üzrə eynimövqeli otuz departamentdə elə icmalar qeyd olunmuşdur ki, bunlar ən dəqiq məlumatlar verə bilirdi. Bu icmalarda siyahıyaalma, ümumi nəticədə, 23 sentyabr 1802-ci il üçün 2 037 615 nəfər sakin olduğunu qeydə almışdı. Bu icmalarda 1800, 1801 və 1802 illəri üçün doğum sayları siyahısı aşağıdakı nəticələri vermişdi:

doğum	nigah	ölüm halları
110 312 oğlan 105 287 qız	46 037	103 659 kişi 99 443 qadın

Əhali sayının illik doğum sayına nisbəti 28 352 845 -in 1 000 000 nisbəti olur; bu nisbət əvvəlki illərdə hesablananlarla müqayisədə böyükdür. Bu nisbət Fransadakı illik doğum sayına vurduqda, bu

dövlətin əhalisinin sayını alır. Lakin bu qayda ilə alınan əhali sayının əhalinin gerçək sayından verilən bir sərhədi aşmaması ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələni həll edərək və onun həllinə əvvəlki verilənləri tətbiq edərək, mən tapdım ki, Fransada hər ildəki doğum sayının bir milyona bərabər olduğu fərz olunarsa, əhalinin sayı 28 352 845 nəfər olacaqdır, bu isə bu nəticənin xətasının hətta yarımmilyona bərabər olmayacağına, bir şansa qarşı üç yüz min şansı olacağına dəlalət edir.

Əvvəlki siyahılara görə oğlan doğumları sayının qız doğumları sayına nisbəti – 22-nin 21-ə nisbətində bərabərdir; nigahlar sayının doğum saylarına nisbəti – üçün on dördə nisbəti kimidir.

Parisdə hər iki cinsdən uşaqların *xaç* suyuna salınması 22-nin 21-ə nisbətindən bir qədər yayındır. 1745-dən – doğum barədə doğum şəhadətnaməsi kitablarında cins də qeyd olunmağa başlandığı zamandan bu paytaxtda 1784-ün sonuna qədər 393 386 oğlan və 377 555 qız *xaç* suyuna salınmışdı. Bu ədədlərin nisbəti təqribən 25-in 24-ə nisbətində bərabərdir; belə çıxır ki, Parisdə hər iki cinsdən *xaç* suyuna salınanların sayını bərabərləşdirmək üçün hansısa xüsusi səbəb vardır.

Əgər bu məsələyə ehtimal hesabını tətbiq etsək, onda bu səbəbin olması üçün bir şansa qarşı 238 şansı olduğunu tapırıq, bu isə bu səbəbin axtarılmasına kifayət qədər haqq verir. Mən bu haqda fikirləşərkən, mənə belə gəldi ki, nəzərə çarpan bu fərq ondan asılıdır ki, kənd və əyalətlərdən olan valideynlər oğlan uşaqlarını özlərində saxlamaqda müəyyən üstünlük olduğunu düşünərək, onları Parisdəki atılmış uşaqlar üçün Yetimxanaya qızlarla müqayisədə daha az göndərirdilər, bu isə iki cinsdən doğum saylarının nisbətindən də aydın ola bilərdi; məhz bu Yetimxananın siyahısı mənə bunu sübut etdi. Bu Yetimxanaya 1745-in əvvəlindən 1809-un sonuna qədər 163 499 oğlan və 159 405 qız qəbul olunmuşdu. Bu ədədlərdən birincisi ikincisindən yalnız otuz səkkizdə bir qədər artıqdır, əslində isə bu heç olmasa, iyirmi dördə bir qədər artıq olmalı idi. Bu səbəbin mövcudluğunu o da sübut edir ki, əgər atılmış uşaqlar nəzərə alınmazsa, Parisdə doğulmuş oğlan uşaqları sayının qız uşaqları sayına nisbəti, bütün Fransada olduğu kimi, 22-nin 21-ə nisbətində bərabərdir.

Parisdə də, Londonda da oğlan doğumlarının qız doğumlarından üstünlüyündəki sabitlik, bəzi alimlərin müşahidə apardıqları müddət ərzində İlahi bir qüvvənin müdaxiləsi kimi görünürdü və onlar düşüncələrini ki, bu qüvvə olmasaydı, hadisələrin gedişini aramsız pozan qeyri-rəquliyar səbəblər, qızların illik doğumlarının oğlan doğumlarından üstünlüyünü göstərməliydilər.

Lakin bu dəlil belə bir yeni misaldır ki, çox vaxt sui-istifadə olunan son nəticələr, problemlərin daha dərin tədqiqində, bunların həlli üçün zəruri verilənlər olduqda həmişə itir. Səhbət gedən sabitlik qəbulu səbəblərin nəticəsidir ki, bunlar illik doğum sayı olduqca çox olduqda təsadüfdən asılı olan anomaliyaları üstələyən oğlan doğumlarına üstünlük verir. Bu sabitliyin uzun zaman müddətində qalacağı ehtimalının tapılması, təsadüflər analizinin o sahəsinə aiddir ki, burada keçmiş hadisələrdən gələcək hadisələrin ehtimalına keçilir, nəticədə isə bizə bəlli olur ki, Parisdə 1745-dən 1784-ə qədər müşahidə olunmuş doğumlar üzrə oğlanların illik doğumları yüzillik ərzində qız doğumlarını həmişə üstələyəcəkdir: beləliklə, təəcəblənməyə heç bir dəlil-sübut yoxdur ki, yanmyüzillikdə də eyni nəticə müşahidə olunsun.

Belə bir misala baxaq ki, hadisələrin sayı artdıqca onlar sabit münasibətləri necə aşkar edir? Dairəvi qaydada düzülmüş umurlar sırasına baxaq və bunlardan hər birində çox sayda ağ və qara kürəciklər vardır; deməli, bu umurlarda ağ kürəciklərlə qaralın nisbətləri əvvəlcə olduqca müxtəlif ola bilər, məs., bu umurlardan hansı birində yalnız ağ, digər hər hansı birində yalnız qara kürəciklər olan hal. Əgər biz birinci umrdan kürəcik çıxarıb, onu ikinci urna qoyaraq, bu umrdakı kürəcikləri yaxşıca qarışdırıqdan sonra, ondan bir kürəcik çıxarıb, onu üçüncü urna qoyaraq və i. a., sonuncu urna qədər bu qayda ilə davam edərək, sonuncudan çıxarılmış kürəciyi birinci urna qoyaraq, biz bu tirajlar sırasını qeyri-müəyyən olaraq davam edə bilərik; ehtimalların analizi bizə göstərir ki, bu umurlarda ağ kürəciklərlə qara kürəciklərin nisbətləri, nəhayət, eyni olur və umrlardakı bütün ağ kürəciklər cəminin bütün qara kürəciklər cəminə nisbətində bərabər olur. Onda bu dəyişdirilmə qaydasının rəquliyarlığından nisbətlərdəki ilkin düzgün olmaqlıq zaman ötdükə itir ki, bu da nəticədə ən sadə qaydanın öz yerini tutmasına səbəb olur. Əgər biz bu umurlar arasında yeni umrlar

yerləşdirsək və bu uumlardakı ağ kürəciklər cəminin qara kürəciklər cəminə nisbəti əvvəlki nisbətdən fərqli olarsa və biz, bütün bu uumlardan kürəciklərin çıxarılmasını əvvəlki qayda ilə davam etdirsək, əvvəlki uumlarda qərarlaşmış o sadə qayda əvvəlcə pozulacaqdır və ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbəti düzgün olmayacaqdır; lakin bu düzgün-olmamazlıq get-gedə itəcəkdir və yeni qayda ilə əvəz olunacaqdır ki, bu qayda, nəhayət, uumlardakı ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbətlərinin bərabərliyi qaydası, qərarlaşacaqdır. Bu nəticəni təbiətdəki bütün birləşmələrə genişləndirmək olar, belə ki, bu birləşmələrə xas olan sabit qüvvələr düzgün təsir tərzini bərqərar edir, bu isə qərībā qanunlarla idarəolunan sistemin xaosunun içindən belə özünü biruzə verir.

Belə görünür ki, baş verən hadisələr və ya proseslər, hətta təsadüfdən ən çox asılı olanları belə, demək olar ki, bunların sayı artıqca aramsız olaraq tamamilə müəyyən münasibətlərə yaxınlaşmağa meylli olur; odur ki, əgər biz bu münasibətlərin hər birini hər iki tərəfdən ixtiyari uzunluqlu parça ilə məhdudlaşdırsaq, onda müşahidələrin orta nəticəsi bu parça daxilində yerləşəcəkdir və əvvəl-axır yaqınlıkdən yalnız ixtiyari verilən kəmiyyətdən kiçik olan kəmiyyət qədər fərqlənəcəkdir. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrə tətbiq edilən ehtimal hesabı vasitəsilə bu münasibətlərin mövcudluğunu dərk etmək olar. Lakin bunların səbəblərini araşdırmazdan əvvəl, həm də faydasız düşüncələrdə qaşib qalmaq üçün, bu münasibətlərin təsadüfdən asılı olmayan anomalialar kimi baxılmasını istisna edən ehtimallarla göstərilməsinə əmin olmaq zəruridir. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi bu ehtimal üçün olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə differensial kəmiyyətin hasilinin integrallanmasından alınır, bu ehtimal üçün çoxsaylı müşahidələrdən alınmış bu nəticə gerçək ehtimaldan vahiddən kiçik və məsələnin növbəndən asılı olan bir sabit qədər yayındır, bu sabitin qüvvət üstü yayınma kvadratının müşahidələr sayına nisbətinə bərabərdir. Verilmiş sərhədlərlə götürülmüş integralın sərhədləri müsbət və mənfi sonsuzluq olan həmin inteqralla nisbəti – gerçəkdən yayınma ehtimalının sərhədlər arasında olmasını ifadə edəcəkdir. Çoxsaylı müşahidələrlə göstərilən nəticələrin ümumi ehtimal qanunu belədir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi

Təbiət hadisələri və ya proseslərinin əksəriyyəti o qədər kənar səbəblərlə müşayiət olunur ki, bunlara çoxsaylı dəyişikliklər yaradan o qədər səbəblər qarışır ki, onları dərk etmək olduqca çətin olur. Bunların əsl mahiyyətini dərk etmək üçün yalnız təkrarlanan müşahidələr və sınaqlar aparılmalıdır ki, kənar təsirlər bir-birini yox etsinlər və orta nəticələr bu hadisələri və ya prosesləri və onların müxtəlif elementlərini aşkar edə bilsinlər. Bu müşahidələr nə qədər çox olarsa və nə qədər az fərqlənsə, bunların nəticələri gerçəkliyə o qədər yaxın olur. Bu axırıncı şərtə müşahidə metodlarının seçilməsi, alətlərin dəqiqliyi və dəqiqlik sayəsində nail olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyiylə və ən münasib (əlverişli) orta nəticələr və ya ən az xəta ilə olan nəticələr təyin olunur. Lakin bu kifayət deyildir; bundan başqa bu nəticələrin xətalarnın verilən sərhədlər arasında olması ehtimalı qiymətləndirilməlidir; bunsuz biz, yalnız alınmış dəqiqliyin dərəcəsi haqqında mükəmməl olmayan anlayış almış olarıq. Buna görə də, bu məqsədə xidmət edən düsturlar elmi metodun əsl təkmilləşdirilməsini və onun mühüm əlavəsini təşkil edir. Bu düsturların analizi ehtimal nəzəriyyəsinə ən inə və çətin sahədir; bu analiz mənim bu nəzəriyyə üzrə dərc olunmuş əsərimdə əsas predmetlərdən birini təşkil edir, burada mən üstünlüyü olan əl bir neçə düstur tapmışam ki, bunlar xətalarn ehtimal qanunlarından asılı deyildirlər və bilavasitə müşahidələrlə verilən təsadüfi kəmiyyətləri və onların ifadələrini özlərində ehtiva edirlər.

Hər bir müşahidənin analitik ifadəsi təyin olunması tələb olunan elementlərin funksiyasıdır; və əgər bu elementlər təxminən məlum olarsa, bu funksiya bunların düzəlişlərinin xətti funksiyasına çevrilir. Bu funksiyayı müşahidənin özünə bərabərləşdirərək, *şərti tənlik* adlandırılan tənlik alırıq. Əgər oxşar tənliklərin sayı çox olarsa, onda bunlar ələ kombinasiya olunmalıdırlar ki, nəticədə elementlərin sayı qədər sonuncu tənliklər alınmış, bu elementlərə düzəlişləri isə sonradan bu tənlikləri həll edərək təyin etmək mümkün olsun. Görəsən, nəticədə alınması sonuncu tənliklərin alınması üçün tənliklərin kombinasiya üsullarından hansı daha əlverişlidir? Xətalarn ehtimal qanunu necə bir

qanundur ki, bu qanunun bu xətalardan alınan elementləri hələ də olduqca dəyişkəndirlər? Bu suallara cavabı ehtimal nəzəriyyəsinəndən öyrənəcəyik. Şərti tənliklərin köməyi ilə sonuncu tənliyin qurulması bu şərti tənliklərdən hər birinin qeyri-müəyyən vuruğa vurulmasına və bu hadisələrin birləşdirilməsinə gətirir. Deməli, vuruqların ələ sistemi seçilməlidir ki, bu sistemdə ən kiçik xəta gözlənilsin. Lakin hər hansı elementin mümkün olan xətalarn onların uyğun ehtimallarına vurularsa, onda aydındır ki, ən əlverişli sistem – müsbət işarə ilə götürülmüş bütün hadisələrin cəmi *minimum* olan sistem olacaqdır, çünki müsbət və ya mənfi xətaya həmişə itki kimi baxılmalıdır. Beləliklə, hasilərin bu cəmini qurduqda, *minimum* şərti münasib vuruqlar sistemini və ya ən əlverişli sistemi təyin edəcəkdir. Beləliklə, biz tapırıq ki, bu sistem – hər bir şərti tənlikdə elementlərin əmsallarının sistemidir, odur ki, ilk sonuncu tənlik – hər bir şərti tənliyin uyğun olaraq, birinci elementinin əmsalına vurulması ilə və bu qayda ilə vurulmuş bütün belə tənliklərin birləşdirilməsi ilə qurulur. İkinci sonuncu tənlik də, ikinci elementin əmsalları ilə oxşar qayda ilə davransaq, analoji alınır və i. a. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələr toplusunda əks olunan hadisə və ya proseslərin elementləri və qanunları daha çox aydınlıqla aşkarlanı bilinin.

Hər bir elementdə arzu olunmaz xətalarn ehtimalı-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, mənfi işarə ilə götürülmüş və xətalarn ehtimalının modulu kimi baxılan sabit əmsala vurulmuş, xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənəsidir, çünki, əgər xəta dəyişməz qalarsa, xəta artıqda onun ehtimalı sürətlə azalır; odur ki, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, alınmış elementin çəkisi, bu modul nə qədər böyük olarsa, o qədər çox gerçəyə yaxın olur. Buna görə də, mən bu modulu elementin və ya nəticənin *çəkisi* adlandıracağam. Bu çəki ən əlverişli vuruqlar sistemindən böyük mümkün qiymətə malikdir; bu isə bu sistemə digərləri ilə müqayisədə üstünlük verir. Ümumi ağırlıq mərkəzinə görə müqayisə olunan həm bu çəkini, həm də cisimlərin çəkisinin bu gözəl analogiyasından aydın olur ki, əgər hər hansı bir element çoxsaylı müşahidələrdən təşkil olunmuş müxtəlif sistemlərlə verilsə, onda bütün nəticələrdən ən əlverişlisi olan orta nəticə ayrılıqda götürülmüş hər bir nəticənin özünün çəkisinin hasilərinin cəminin bütün çəkilərin cəminə nisbətinə bərabərdir.

Bundan başqa, müxtəlif sistemlərin nəticəsinin ümumi çəkisi onların ayrı-ayrılıqdakı çəkilərinin cəminə bərabərdir, odur ki, bütün bunların birlikdə götürülmüş orta nəticəsinin xətalarn ehtimalı-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, bütün çəkilərin cəminə vurulmuş mənfi işarə ilə götürülmüş xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənəsidir. Əslində hər bir çəki hər bir sistemin xətalarnın ehtimal qanunundan asılıdır, bu qanun isə demək olar ki, həmişə naməlumdur; lakin sistemin müşahidələrinin onların orta qiymətlərindən yayınmaları vasitəsilə bu qanunu özündə ehtiva edən vuruğu xaric etmək mənə müyəsər oldu. Beləliklə, çoxlu sayda müşahidələr toplusu ilə əldə olunmuş nəticələr haqqında bizim bilgilərimizi genişləndirmək üçün yaxşı olardı ki, hər bir nəticə ilə yanaşı onun uyğun çəkisi də yazılsın; bu məqsəd üçün analiz bizi ümumi və sadə metodlarla təmin edir. Xətalarn ehtimal qanununu ifadə edən üstlü funksiya bu şəkildə alındıqda, biz belə bir ehtimala malik oluruq ki, nəticənin xətası verilən sərhədlərdə yerləşir, üstlü funksiyanın xətanın differensialına hasilinin integralı bu sərhədlərdə götürülərək, nəticənin çəkisinin kvadrat kökünün vahid diametrlı çevrəyə nisbətinə vurulmalıdır. Buradan belə bir nəticə alınır ki, eyni bir ehtimalı nəticələrin xətalarn onların çəkilərinin kvadrat köklərinə tərs mütənəsidir; bu isə onların nisbi dəqiqliklərinin müqayisəsinə xidmət edə bilər. Bu metodu müvəffəqiyyətlə tətbiq etmək üçün müşahidələrin və ya sınaqların şərtləri ələ surətdə müxtəlifləşdirilməlidir ki, xətanın dəyişməz səbəblərinə təsadüf olunmasın. Müşahidələrin sayı olduqca çox olmalıdır, təyin olunması elementlər çox olduqca bunlar da çox olmalıdır, belə ki, nəticənin orta çəkisi müşahidələr sayının elementlər sayına nisbəti ilə birlikdə artır. Bundan başqa, bu müşahidələrdə elementlərin dəyişikliklərinin müxtəlif cür olması zəruridir, çünki əgər iki elementin dəyişikliyi tamamilə eyni olarsa, onda onların əmsalları şərti tənliklərdə mütənəsidir olardı, onda bu elementlər birlikdə bir məchulla ifadə olunardı ki, bu da onları bu müşahidələr üzrə

fərqləndirməyi mümkünsüz etmiş olardı. Nəhayət, zəruridir ki, müşahidələr dəqiq olsun: bütün şərtlərdən ən birincisi olan bu şərt nəticənin çəkisini olduqca artırır, bu nəticənin ifadəsinin böləni – müşahidələrin bu nəticədən yayımları kvadratlarının cəmidir. Belə ehtiyatlı tədbirlərdə əvvəlki metoddan istifadə etmək və çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələrin etibarlılıq dərəcəsini qiymətləndirmək mümkün olacaqdır.

Şərti tənliliklərdən son tənliliklərin çıxarılması üçün indicə verdiyimiz qayda ona gətirilir ki, müşahidələr xətlərinin kvadrları cəmi *minimumlaşdırılsın*, çünki hər bir şərti tənlilik müşahidə ilə onun xətası cəmi ilə əvəzləmədən sonra dəqiqləşir; əgər bu tənlilikdən bu xətin ifadəsi təyin edilərsə, onda asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ifadələrin kvadrları cəminin *«minimum»*luq şərti həmin bu qaydanı verir. Bu qayda müşahidələr sayı çox olduqca daha dəqiq olur; hətta bu say böyük olmadıqda belə, hər halda axtarılan düzəlişləri fikirləşmədən ala bilmək üçün sadə üsul verən həmin qaydanı tətbiq etmək təbii görünür. Bu qayda eyni bir ulduzun müxtəlif astronomik cədvəllərinin dəqiqliyini müqayisə etmək üçün də istifadə oluna bilər. Həmişə belə fərz etmək olar ki, bu cədvəllər eyni bir şəkə gətirilmişdir, bu halda bunlar yalnız dövrlərlə, arqumentlərin orta hərəkətlərlə və əmsalları ilə fərqlənirlər; belə ki, bunlardan birində digərlərində olmayan arqument olarsa, onda aydındır ki, bu belə fərziyyə ilə əsaslandırılır ki, bu arqumentin əmsalı sifra bərabərdir. Əgər bütün bu cədvəllər yaxşı müşahidələrin bütün toplusundan istifadə edilərkə tərtib olunursa, onda bunlar xətlərin kvadrları cəminin *«minimum»*luq şərtini ödəyirdilər; beləliklə, bu şərtə daha çox yaxınlaşan cədvəllər olduqca çoxsaylı müşahidələrlə tərtib olunmuş cədvəllərlə müqayisədə, üstünlüyə layiqdirlər.

Yuxarıda şərh olunmuş metod, əsas etibarilə, astronomiyada müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Astronomik cədvəllər nail olduqlarına, həqiqətən də, müşahidələrin və nəzəriyyələrin dəqiqliyinin heyrətamiz doğruluğuna, həmçinin, şərti tənliliklərin istifadə olunması ilə bərlədurlar, bu tənliliklərin sayəsində isə çox gözəl müşahidələrin əksər sayı eyni bir elementin düzəlməsinə xidmət edir. Lakin xətlər ehtimalını da təyin etmək tələb olunur, çünki bu düzəlişlərdə xətlərin ola biləcəyi istisna deyil; indicə mənəim şərh etdiyim metod bu məqsədə xidmət edir. Bu metodun bir neçə maraqlı tətbiqlərini göstərməkdən ötrü, mən, *Bouvardın* yenicə başa çatdırdığı, Yupiter və Saturnun hərəkətləri haqqındakı çox dərəli bir əsərindən istifadə etdim, o, olduqca dəqiq cədvəlləri olduqca böyük bir diqqətlə tərtib etmiş, qarşıdurmaları və *Bradley* və astronomların müşahidə etdikləri bu iki planetin kvadrlarlarını araşdırmışdır; onlar son illərə qədər *Bouvardın* davamçıları olmuşlar. *Bouvard*, bu cədvəllərdən bu planetlərin hərəkətlərinin, vahid kimi götürülən Günəş kütləsi ilə müqayisə olunan kütlələrinin və hərəkətlərinin elementlərinin düzəlişlərini çıxarmışdır. Bu hesablamalardan Saturnun kütləsinin Günəş kütləsinin 3 512 -də bir hissəsinə bərabər olduğu alınmışdır. Bunlara mənəim ehtimal düsturlarını tətbiq edərək, mən bu nəticənin xətasının onun ədədi qiymətinin yüzdə birdən az olması üçün bir şansa qarşı on bir min şansı olduğunu tapdım; və ya əgər yüz ildən sonra yeni müşahidələrə əvvəlki müşahidələrlə birlikdə həmin üsulla baxılırsa, demək olar ki, eyni bir nəticəyə gəlmək olur, lakin yeni nəticə *Bouvard* nəticəsindən yüzdə bir qədər fərqlənməyəcəkdir. Bu alim-astronom bundan başqa tapır ki, Yupiterin kütləsi Günəş kütləsinin 1701-də bir hissəsinə bərabərdir; mənəim ehtimal metodum isə bu nəticənin hətta neçə yüzdə bir qədər səhv olmadığı üçün bir şansa qarşı milyən şansı olduğunu verir.

Bu metod geodeji əməliyyatlara da müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Yer səthində böyük qövsün uzunluğu dəqiq ölçülmüş bazaya söykənən üçbucaqlar zənciri ilə təyin olunur; lakin bucaqların nə cür dəqiqliklə ölçülməsinə baxmayaraq, qaçılmaz xətlər olacaqdır, bunlar çox sayda üçbucaqlardan çıxarılmış qövsün ədədi qiymətinin gerçək-dən olduqca yayınmasına səbəb olacaqdır. Beləliklə, bizə məlumdur ki, ədədi qiymət mükəmməl olmayacaqdır, əgər biz onun xətasının verilən sərhədlər hüdudunda yerləşməsi ehtimalını təyin edə bilsək, onda bizə məlum olan ədədi qiymət, deməli, mükəmməl qiymət olmayacaqdır. Geodeji nəticənin xətası hər bir üçbucağın bucaqlarının xətlərinin funksiyasıdır. Adı çəkilən əsərdə mən ehtimal qanunu bizə

məlum olan çoxsaylı xüsusi xətlərin çox saydasının bir və ya bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin ədədi ehtimallarını almaq üçün ümumi düsturlar vermişəm; deməli, bu düsturların köməyiylə, xüsusi xətlərin ehtimal qanununun nə cür olmasından asılı olmayaraq, hər hansı geodeji nəticənin təyin olunmuş sərhəd hüdudlarında yerləşməsi ehtimalını təyin etmək olar. Buna görə də, bu qanundan asılı olmamaq olduqca zəruridir, belə ki, hətta ən sadə qanunlar belə bunların təbiətdə mövcud olacaqları mümkün olanlarının sonsuz sayda olduqları nəzərə alınarsa, həmişə sonsuz kiçik ehtimallıdırlar. Amma xüsusi xətlərin naməlum qanunu düsturlara qeyri-müəyyən kəmiyyət daxil edir və əgər onu xaric etmək mümkün olmazsa, bu kəmiyyət bu xətlərin sayını azaltmağa imkan verməzdi. Biz gördük ki, astronomik məsələlərdə ixtiyari müşahidə xətti tənliliyə gətirir, elementlərin alınması üçün bu qeyri-müəyyən kəmiyyət, hər bir tənlilikdə elementlərin ən ehtimalı ədədi qiymətləri qoyulduqdan sonra, qalıqların kvadrları cəminin köməyiylə xaric olunur. Geodeji məsələlərdə, oxşar tənliliklər olmadıqdan, digər xaric etmə üsulu axtarılmalıdır. Biz bu üsulu, hər bir müşahidə olunan üçbucağın bucaqları cəminin iki düzbucaq pilyus sferik artdığı aşan kəmiyyətlə alırıq. Bu kəmiyyətlərin kvadrları cəmi ilə şərti tənliliklərin qalıqlarının kvadrları cəmi əvəz olunur; onda bir sıra geodeji əməliyyatların son nəticəsinin verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını hesablamaq olar. Lakin hər bir üçbucağın 3 bucağı arasında onların xətləri cəmini paylaşdırdıqda hansı üsul ən əlverişlidir? Ehtimalların analizi göstərir ki, hər bir bucaq, geodeji nəticənin çəkisinin mümkün qədər ən böyük olması üçün, bu cəmin üçdə biri qədər kiçildilməlidir; bu isə həmin xətanı az ehtimalı edir. Deməli, ixtiyari üçbucağın üç bucağını müşahidə etmək və göstərilən üsulla onları düzəltmək böyük üstünlüyə malikdir. Sadə sağlam düşüncə bu faydanı hiss etməyə vadar edir; amma yalnız ehtimal hesabı bu faydanı qiymətləndirə bilər və göstərə bilər ki, bu düzəliş sayəsində bu fayda mümkün olduqca daha böyük olur.

Böyük dairənin qövsünün uclarından birində ölçülmüş bazaya söykənən bu qövsün ədədi qiymətinin dəqiqliyinə əmin olmaq üçün bu qövsün digər ucunda ikinci baza ölçülür və bu bazalardan biri üzrə digərinin uzunluğu ölçülür. Əgər bu uzunluq müşahidədən az yayınsa, onda belə fikirləşmək tamamilə anlaşıldır ki, bu bazaları birləşdirən üçbucaqlar zənciri, demək olar ki, bu zəncirdən təyin olunan böyük qövsün uzunluğu kimi çox dəqiqdir. Sonra bu kəmiyyətə düzəliş verilir, buna görə üçbucaqların bucaqları elə dəyişdirilir ki, hesablanmış bazalar ölçülmüş bazalarla uzlaşsın; lakin bunu sonsuz sayda üsulla etmək olar, bunlar arasında geodeji nəticələri ən böyük çəkiyə malik olanlarına üstünlük verilməlidir, çünki həmin xəta bu halda ən az ehtimalı olur. Ehtimalların analizi bir neçə bazanın ölçülmələrindən alınan ən əlverişli düzəlişi bilavasitə almaq üçün düsturlar, həmçinin bazaların çoxsaylılığı sayəsində yaranan ehtimal qanunlarını, məhz bu çoxsaylılıq sayəsində daha sürətlə azalan qanunları verir.

Çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələr xətləri, ümumiyyətlə, məhz hər bir müşahidənin xüsusi xətlərinin xətti funksiyasıdır. Bu funksiyaların əmsalları məsələnin növündən və bu nəticənin alınması üçün istifadə olunan üsuldən asılıdır. Ən əlverişli üsul, aydındır ki, nəticələrdən alınan eyni bir xəta – digərlərindən ən az ehtimala malik olanıdır. Beləliklə, ehtimal hesabının natural fəlsəfəyə tətbiqi – bu funksiyaların ədədi qiymətlərinin ehtimallarını analitik olaraq təyin etməkdən və bunların qeyri-müəyyən əmsallarının elə seçilməsindən ibarətdir ki, bu ehtimal qanunu ən sürətli azalan qanun olsun. Xüsusi xətlərin naməlum ehtimal qanununu, demək olar ki, həmişə məsələnin verilənləri vasitəsilə daxil edən vurğu sonradan düsturlardan xaric edərək, nəticələrin xətlərini verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını ədədi qiymətləndirmək mümkün olur. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrdən alınmış nəticələrə görə nəyi arzu edirikse, onun hamısını ala bilirik.

Bundan başqa, digər mülahizələr vasitəsilə çox yaxın nəticələr almaq mümkündür. Məs., fərz edək ki, eyni bir kəmiyyət üçün min bir müşahidə aparılmışdır; bütün bu müşahidələrin ədədi ortası ən əlverişli metodla verilməmiş nəticədir; lakin nəticəni belə də seçmək olar ki, hər bir xüsusi kəmiyyətdən müsbət işarə ilə götürülmüş bütün yayımlar cəmi *minimum* olsun: əslində isə bu şərti ödəyən nəticəyə gərçəyə ən yaxınlaşmış nəticə kimi baxmaq təbiidir. Əgər müşahidələrdən alınmış ədədi qiymətlər böyüklüyü qaydasında yerləşdirilsə, onda asanlıqla

görmək olur ki, mərkəzdə yerləşən ədədi qiymət əvvəlki şərti ödəyəcəkdir; hesablamalar isə bizə göstərir ki, müşahidələr sayı sonsuz olduğu halda bu kəmiyyət gerçək kəmiyyət ilə üst-üstə düşür; bununla belə, ən əlverişli metodla verilən nəticə ən üstün sayılır.

Ehtimallara, Göy cisimlərinin hərəkətlərindəki müşahidə xətlərində gizli qalan kiçik bərabərsizlikləri fərqləndirmək və bu hərəkətlərdə nəzərə çarpan anomalionaların səbəbini aydınlaşdırmaq məqsədilə də baxılır. Tixu Brage bütün Ay müşahidələrini bir-birilə müqayisə edərək, Aya Günəş və planetlərə tətbiq olan tənlikdən fərqli, zaman tənliliyini tətbiq etməyin zəruriliyini etiraf edir. Oxşar surətdə çoxsaylı müşahidələrin toplusu Mayerə aşkar etdi ki, pressesiya bərabərsizliyinin əmsalı Ay üçün kiçildilməlidir. Hətta Mazonun da təsdiq etdiyi və hətta böyütmüş olduğu bu kiçilmənin ümumdünya cazibə qüvvəsindən alınmadığı görünüşü yaratmağına baxmayaraq, astronomların böyük əksəriyyəti bunu öz hesablamalarında nəzərə almadılar. Bundan sonra mən, olduqca çox sayda Ay müşahidələrinin ehtimal hesablamalarını apardım, bu məqsəd üçün bu müşahidələr, mənim xahişimlə *Bouvard* tərəfindən seçilmiş və araşdırılmışdır; nəticədə bu kiçilmə mənə elə böyük ehtimalla göründü ki, mən bunun səbəbini tapmağı özümə borc sandım. Mən çox yaxşı gördüm ki, bu səbəb yalnız Yer sferoidinin elliptik şəkildə olması ilə izah oluna bilər, amma o vaxta qədər bu, Ayın hərəkəti nəzəriyyəsində, ona yalnız əhəmiyyətsiz hədlər daxil edə biləcəyi baxımdan nəzərə alınmamışdı; buradan mən nəticə çıxardım ki, bu hədlər differensial tənliklərin ardıcıl integrallanmasında əhəmiyyətli hədlərə çevrilir. Mən sonra bu hədləri ayrıca analiz ilə təyin etdim və əvvəlcə heç bir astronomun ağılına belə gəlməyən, Ayın uzunluq dairəsinin *sinus*-una müntəzib olan en dairəsi üzrə Ayın hərəkəti bərabərsizliyini kəşf etdim. Sonradan mən bu bərabərsizliyin köməyiylə, Aya tətbiq olunan pressesiya bərabərsizliyində Mayerin qeyd etmiş olduğu və kiçilməni yaradan uzunluq dairəsi üzrə Ay hərəkətində digər bərabərsizliyin mövcudluğunun olduğunu bildim. Bu kiçilmə kəmiyyəti və en dairəsi üzrə əvvəlki bərabərsizliyin əmsalı Yer in sızılmasını müəyyənləşdirmək üçün çox münasibdirlər. Özümün tədqiqlərim haqqında, o vaxtlar bütün yaxşı müşahidələrin müqayisəsi yolu ilə Ay cədvəllərinin təkmilləşdirilməsi ilə məşğul olan Burqa xəbər verərək, mən onun bu iki kəmiyyəti xüsusi bir diqqətlə təyin etməsini xahiş etdim. Onun tapdığı, olduqca gözəl uzlaşan bu iki kəmiyyət Yer üçün eyni bir sızılma — $1/305$ sızılmasını verir, bu isə rəqqasın müşahidələrindən və meridianın dərəcələrinin ölçmələrindən çıxarılmış orta qiymətdən az fərqlənir, lakin mənə, bu sızılma, müşahidə xətlərinin bu ölçmələrə və onları dəyişdirən səbəblərin təsirinə görə, Ay bərabərsizlikləri ilə daha dəqiq təyin olunur.

Ehtimalları araşdırarkən, mən Ayın əsrlik tənliliyinin səbəbini öyrəndim. Ayın ən yeni müşahidələrinin əvvəlki aytutulmaları ilə müşahidələrlə müqayisəsi astronomlara Ayın hərəkətinin sürətlənməsini göstərmiş oldu; lakin həndəsəçilər, xüsusilə də, Laqranj dəyişikliklərdəki bu sürətlənməyə səbəb olan hədlərin uğursuz axtarışından sonra, bu sürətlənməni nəzərə almadılar. Köhnə və ən yeni müşahidələrin, həmçinin rəsəblərin arada müşahidə etdikləri aytutulmalarının diqqətlə araşdırılması mənə göstərdi ki, bu sürətlənməyə səbəblər böyük ehtimalla malikdirlər. Bu nöqtəyi nəzərdən, mən Ay nəzəriyyəsinə yenidən baxdım və tapdım ki, Ayın əsrlik tənliliyi Yer orbitinin eksentrisitetinin əsrlik dəyişməsi ilə əlaqədar olaraq, bu peykə Günəşin təsiri ilə baş verir, bu isə Ay orbitinin perigelisinin və düyünlərinin hərəkətlərinin əsrlik tənliklərinin kəşfinə gətirdi. Bu nəzəriyyənin bütün qədim və yeni müşahidələrlə olduqca gözəl uzlaşması onu yüksək dərəcədə açıq-aşkar etdi.

Ehtimal hesabı, oxşar surətdə, mənə Yupiter və Saturnun hərəkətlərindəki böyük düzgün olmamazlıqların mövcudluğu səbəbinə gətirdi. Halley (Halley Edmund, 1656–1742) ən yeni müşahidələri qədimlərlə müqayisə edərək, Yupiterin hərəkətində sürətlənmə və Saturnun hərəkətində yavaşlamanı tapdı. O, bu müşahidələri uzlaşdırmaq üçün, bu hərəkətləri müxtəlif işarələrlə və 1700-ci ildən keçən zamanın kvadratı kimi artan iki əsrlik tənliklərə tabe etdi. Eyler və Laqranj, iki planetin hərəkətlərində qarşılıqlı cazibə yaradacaq dəyişiklikləri analiz etdilər. Onda onlar əsrlik tənlikləri tapdılar; lakin onların nəticələri o dərəcədə müxtəlif idi ki, bunlardan heç olmasa biri yalnız olmalı idi. Buna görə də, mən Göy mexanikasının bu mühüm məsələsi ilə məşğul olmaq qərarına gəldim və mən, planetlərin orta hərəkətlərinin

dəyişməzliyini qəbul etdim, bu isə Halleyin Yupiter və Saturnun cədvəllərinə daxil etdiyi əsrlik tənliklərin yox edilməsi məcburiyyətini yaratdı. Beləliklə, bu planetlərin hərəkətlərindəki düzgün olmamazlıqların izahı, bir də, yalnız kometlərin cazibələri ola bilərdi ki, buna bəzi astronomlar müraciət etdilər, daha bir izah isə hər bir planet üçün əks işarələrlə təyin olunan, bu iki planetin qarşılıqlı təsirlə hərəkətlərdə olduqları uzun müddətdə bunların hərəkətlərinin bərabərsizliyinin mövcudluğudur. Bu növ bərabərsizliklər haqqında mənim tapdığım teorem, bu bərabərsizliyi mənim üçün olduqca doğruxa oxşar etdi. Bu teoremdən belə nəticə alınır ki, əgər Yupiterin hərəkəti sürətlənirsə, onda Saturnun hərəkəti yavaşlayır, bu isə Halleyin qeyd etdiyinə oxşar nəticədir; bundan başqa, bu teoremdən Yupiterin hərəkətinin sürətlənməsi barədə alınan nəticə Saturnun hərəkətinin yavaşlaması nəticəsinə gətirir ki, bu da Halleyin əsrlik tənliklərin bir-birilə münasibətləri haqqındakı aldığı nəticə kimidir. Yupiter və Saturnun orta hərəkətlərini tədqiq etdikdə mənə asanlıqla aydın oldu ki, Yupiterin iki misillə götürülmüş hərəkəti, Saturnun beş misillə götürülmüş hərəkətinə, yalnız çox kiçik kəmiyyət qədər aşır. Bu arqument üçün ola bilsən bərabərsizlik periodu, təxminən doqquz əsrə bərabər ola bilərdi. Əslində, onun əmsalının dərəcəsi orbitlərin eksentrisitetlərinin küblərinin dərəcəsi kimi olmalı idi. Lakin mənə məlum idi ki, ardıcıl integrallanmalar nəticəsində, bu əmsalda, bu bərabərsizliyin arqumentində zamanın çox kiçik vuruğunun kvadrlarının böleni də alınır ki, bu da onun böyük ədədi qiymət almasına səbəb ola bilər: bu bərabərsizliyin mövcudluğu, buna görə də, mənə çox ehtimallı göründü. Aşağıdakı qeyd onun ehtimalını daha da artırdı. Tixu Bragenin müşahidələri zamanı mən bu arqumenti sifra bərabər götürərək gördüm ki, ən yeni müşahidələrin köhnələrlə müqayisəsindən Halley özünün göstərmiş olduğu dəyişiklikləri tapmalı idi, bununla belə ən yeni müşahidələrin öz aralarında müqayisəsi, Lambertin bu müqayisədən çıxaraçaqlarına oxşar və zidd dəyişiklikləri verməli idi. Buna görə də, bu qeyri-bərabərliyin mövcudluğuna əmin olmağım üçün, mən tərəddüd etmədən, zəruri olan uzun və yorucu hesablama apardım: bu hesablama bundan başqa mənə çox sayda digər bərabərsizlikləri aşkar edən hesablama nəticəsi ilə təsdiq olundu, bunların çoxluğu sayəsində Yupiter və Saturn cədvəlləri müşahidələrin özlərinin ən dəqiqliyinə qədər başa çatdırıldı.

Ehtimalların hesablanması köməyiylə Yupiterin ilk üç peykinin orta hərəkətlərinin çox gözəl qanununu da kəşf etmək mənə müvəffəq oldu; bu qanuna görə birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikinci peykin uzunluq dairəsinin üç misli plus üçüncünün uzunluq dairəsinə iki misli dəqiq olaraq yarımqəvrəyə bərabərdir. Bu ulduzlar kəşf olunduqları zamandan onların orta hərəkətləri yaxınlaşma ilə bu qanunu ödəyirlər, yaxınlaşma isə böyük doğruxa oxşarlıqla bu qanunun mövcudluğunu göstərirdi: mən bunların qarşılıqlı təsirindəki səbəbi axtarmağa başladım. Bu təsirin diqqətlə araşdırılması nəticəsində mənə aydın oldu ki, bunların orta hərəkətlərinin bu qanuna yalnız məlum sərhədlərdə belə yaxınlaşan belə ilkin münasibəti kifayət edərki ki, onların qarşılıqlı təsiri bu qanunu qərarlaşdırın və onu dəqiqliklə müdafiə edə bilsin. Beləliklə, bu üç peyk fəzada öz hərəkətlərini, əgər hər hansı səbəblər, məs., kometlər onların Yupiter ətrafında hərəkətlərini gözlənilmədən pozmasalar, əvvəlki qanunla daima davam etdirəcəklər.

Buradan görünür ki, təbiətin göstəriciləri çoxsaylı müşahidələrin nəticəsi olduğundan və buna görə də, məlum üsullarla izah oluna bilinmədiyindən bu göstəricilərə olduqca diqqətlə yanaşılmalıdır. Dünya sisteminə aid məsələlərin olduqca çətin olması, həndəsəçiləri yaxınlaşmalara müraciət etməyə məcbur etdi, belə yaxınlaşmalarda həmişə atılan kəmiyyətlərin hiss olunacaq təsir göstərə biləcəyindən duyulan narahatlıq hissi qaçılmaz olur. Müşahidələrdən belə təsirin olduğu aşkar ediləndə, onlar yenidən bunların analizinə başlayırdılar; yoxlama nəticəsində onlar müşahidə olunmuş anomalionaların səbəbini həmişə tapırdılar; onlar bu anomalionaların qanununu təyin edirdilər və əksər hallarda, hətta müşahidələrdən də hələ aşkar olunmamış qeyri-bərabərlikləri kəşf edərək, bu müşahidələri qabaqlayırdılar və baş verə biləcək nələrisə söyləyə bilirdilər. Beləliklə, belə demək olar ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə əsaslanan nəzəriyyələrin analitik

təkmilləşdirilməsinə təbiətin özü şərait yaratmışdı və mənim fikrimcə, bu, təəccüb doğurmağa layiq bu prinsipin gerçəkliyinin ən güclü sübutlarından biridir.

Dünya sisteminin ən gözəl qeyri-adi hadisələrindən biri, – öz oxu ətrafında bütün fırlanma hərəkətləri və Günəşin öz oxu ətrafında fırlanması ilə eyni istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvator müstəvisində planet və peyklərin fırlanma hərəkətləridir. Belə bir gözəl fenomen heç də təsadüfi deyildir: o, bu hərəkətləri təyin edən ümumi səbəbin olması göstərir. Bu səbəbin hansı ehtimalla baş verdiyini bilmək üçün nəzərə alınır ki, hal-hazırda kimi bizə məlum planetlər sistemi, – heç olmasa Gərşel kimi, Uran planetinə də altı peyk aid edilərsə, – on bir planet və on səkkiz peykdən ibarətdir. Günəşin, altı planetin, Aynın, Yupiterin peyklərinin, Saturnun halqasının və onun peyklərindən birinin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətləri məlumdur. Bu hərəkətlər fırlanma hərəkətləri ilə birlikdə eyni bir istiqamətdə cəmi 190 üç hərəkət təşkil edir; ehtimalların analizindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, bu qaydanın təsadüfün nəticəsi olmadığı əleyhinə dörd min milliard şans vardır; bu isə bizim şübhə etmədiyimiz belə tarixi hadisələrin ehtimalından daha böyük olan bir ehtimaldır. Odur ki, ən azı biz, həmin əminliklə qəbul etməliyik ki, hər hansı bir ilkin səbəb planetlərin hərəkətlərini istiqamətləndirmişdir, xüsusilə də, əgər nəzərə alınarsa ki, bu hərəkətlərin böyük əksəriyyətinin Günəş ekvatoruna meyil etməsi çox da böyük deyildir.

Günəş sisteminin digər gözəl bir fenomeni planet və peyklərin orbitlərinin eksentrisitetlərinin kiçik olmasına rəğmən, komet orbitlərinin olduqca dartılmış şəkildə olmasıdır, odur ki, bu sistemdə orbitlər böyük eksentrisitetlərin kiçiklərinə aralıq keçid və təzahürünü yaratmırlar. Burada biz yenə də rəqulyar səbəbin təsirinin olduğunu qəbul etməliyik: təsadüf, bütün planetlərin və onların peyklərinin orbitlərinə, təxminən dairəvi forma verə bilməzdi; buna görə də, zəruridir ki, Göy cisimlərinin hərəkətlərini təyin edən bu səbəb onları, demək olar ki, dairəvi formalı etsin. Bundan başqa, kometlərinin orbitlərinin eksentrisitetlərinin böyük olması üçün zəruridir ki, bunların böyüklüyü bu səbəbin mövcudluğu nəticəsində alınsın və bu səbəb, bununla belə, bu hərəkətlərin istiqamətlərinə təsir edə bilməsin; çünki demə, əksinə və düzünə hərəkət edən kometlər o qədərdir ki, bunların bütün orbitlərinin ekliptikaya orta meyl düzbucağın yarısına çox yaxındır, bu isə bu cisimlərin yalnız təsadüfi qaydada səpələnməsi halında mümkün ola bilərdi.

Söhbət gedən bu səbəbin nə cür təbiəti olmasından asılı olmayaraq, əgər o, planetlərin hərəkətinə səbəb olmuşsa və onları istiqamətləndirmişdirsə, onda zəruridir ki, bu səbəb bütün bu cisimləri də əhatə etməliydi, bunları bir-birindən ayıran məsafələrə gəldikdə isə səbəb yalnız möhtəşəm cazibə mayesi ola bilərdi: Günəş ətrafında eyni bir istiqamətdə, təxminən dairəvi formalı hərəkət yaratmaq üçün bu maye bu ulduzu atmosfer kimi əhatə etməli idi. Planetlərin hərəkətlərinin öyrənilməsi, beləliklə, bizi belə bir fikrə gətirir ki, Günəş atmosferi qeyri-adi istilik nəticəsində əvvəlcə bütün planetlərin orbitləri ətrafını bürümüş və getdikcə hazırda ki sərhədlərinə qədər sıxılmışdır.

Fərz ediyimizə görə, Günəş öz əvvəlki vəziyyətində dumandan ibarət ləkələrə oxşayırmış, bunlar teleskopda dumana bürünmüş az və ya çox parlayan nüvə görüntüsü yaradır, bu duman nüvənin səthi üzərində getdikcə sıxlaşaraq, gözəl bir gündə onu ulduza çevirir. Əgər biz analoji olaraq, belə hesab edərik ki, bütün ulduzlar belə yaranmışdır, onda belə fərz edə bilərik ki, onlar əvvəlki ilkin duman vəziyyətindən daha əvvəlki elə vəziyyətlərdə olmuşlar ki, bu vəziyyətlərdə duman materiyası getdikcə daha çox səpələnmiş, nüvə isə getdikcə daha az parlaq və sıx olmuşdu. Beləliklə, mümkün olduğu qədər daha uzağa nəzər sala bilərik ki, biz dumanın elə səpələnmiş vəziyyətdə olduğu nəticəsinə gəlirik ki, biz onun varlığını belə yalnız çox çətinliklə fərz edə bilərik.

Gərşelin özünün güclü teleskopları ilə xüsusi diqqətlə tədqiq etdiyi duman ləkələrinin ilkin vəziyyəti əslində belədir, o, bu ləkələrdən yalnız birini izləməmişdi; bu progress yalnız yüzilliklərdən sonra, onların toplumu üçün bizə aydın ola bilər; bu ona bənzəyir ki, böyük bir meşədə müxtəlif yaşlı ayrı-ayrı ağaclarla ağacların böyüməsi izlənilir. O, duman materiyasını əvvəlcə Göyün müxtəlif hissələrində uzun bir

sahədə ayrı-ayrı topalar şəklində səpələnmiş kimi müşahidə etmişdi. O görmüşdü ki, bu materiya bəzi topalarda bir və ya bir neçə, az parlayan nüvələr ətrafında sıxlaşmışdır. Digər duman ləkələrində bu nüvələr onları bürümüş dumanla müqayisədə daha çox parıldayıb. Əgər bəzi ayrı-ayrı nüvələrin atmosferləri sonrakı sıxlaşma nəticəsində ayrılırlarsa, onda hər biri atmosferlə əhatə olunmuş, bir-birinə çox yaxın yerləşmiş parlaq nüvələrdən ibarət mürəkkəb duman ləkələri əmələ gəlir: bəzən, duman materiyası müntəzəm sıxlaşaraq, *planet ləkələri* adlanan duman ləkələrini əmələ gətirirdi. Nəhayət, olduqca böyük sıxlaşma bu duman ləkələrini ulduzlara çevirir. Bu fəlsəfi nöqtəyi-nəzərə əsasən, duman ləkələrinin təsnifi onların gələcəkdə ulduzlara çevriləcəyini və mövcud ulduzların əvvəldə duman vəziyyətində olmasını göstərir. Aşağıdakı mülahizələr bu analogiyalardan çıxarılmış isbatların sübutudur.

Adi gözə görünən bəzi ulduzların xüsusi düzlülüşi müşahidəçi filosofları çoxdan təəccübləndirirdi. Metçel artıq qeyd etmişdi ki, məs., Ülkər bürcünün ulduzlarının, yalnız təsadüfün şansları nəticəsində bu ulduzlar yerləşən çox böyük olmayan fəzama belə sıx doldura bilməsi, çox az ehtimaldır; buradan o, belə nəticə çıxarıb ki, ulduzların bu qruplaşması və belə qruplaşmaya oxşar digərləri də, təbiətin ümumi bir qanununun bir başlanğıc-ilkin səbəbinin nəticəsidir. Bu qruplaşma bir neçə nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşmasının zəruri nəticəsidir; çünki aydındır ki, duman materiyası müxtəlif nüvələrlə daima cazb olunduğundan, onlar zaman ötdükcə Ülkər qrupuna oxşar ulduzlar qrupu yaratmalıdırlar. Eynilə də, iki nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşması, bir-birinə çox yaxın yerləşən və biri o birisinin ətrafında fırlanan ulduzlara əmələ gətirir, belə ulduzlar – hərəkətləri Gərşelin müşahidə etdiyi ulduzlara oxşar ulduzlardır. Altmış birinci ulduz və bu ulduzun ardınca gələn Qu bürcünün ulduzları da belədir: Bessel onların məxsusi hərəkətlərinin çox az fərqləndiklərini və olduqca mühüm olduğunu qeyd etmişdir, bu isə bu ulduzların yaxın olduğunu və onların ümumi ağırlıq mərkəzi ətrafında hərəkət etdiklərinə kiçik belə şübhə qoymur. Beləliklə, duman materiyasının sıxlaşması progressindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, Günəş əvvəllər nəhəng atmosferlə əhatə olunmuş imiş, necə ki, biz gördük ki, Günəş sisteminin təzahürlərinin öyrənilməsi belə bir nöqtəyi-nəzərə gətirir. Bir-birilə üst-üstə düşən belə gözəl izah Günəşin əvvəlki vəziyyətinin belə olduğu izahına gərçəyə çox yaxın olan ehtimal verir.

Lakin Günəş atmosferi planet və peyklərin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətlərini nə cür təyin etmişdir? Əgər bu cisimlər bu atmosferin dərinliyinə keçə bilsəydilər, onda atmosferin müqaviməti onların Günəş üzərinə düşməsinə səbəb olardı. Bu isə planetlərin Günəş atmosferinin ardıcıl hüdudlarında əmələ gəlmiş ehtimalının böyük olduğunu düşünməyə sövq edir, guya atmosfer soyudulmuş sıxlaşaraq, özünün ekvator müstəvisində buxarlar zolaqlarını ayırmalı idi ki, bunlar öz növbəsində molekullarının qarşılıqlı cazibəsi nəticəsində müxtəlif sferoidlərə çevrilmişdilər.

Mənim «Kainat sisteminin Şərhim»də mən bu hipotezi çox geniş inkişaf etdirmişəm və mənə belə gəlir ki, bu hipotez bu sistemdə rast gələn bütün fenomenlərlə uzlaşır.

Bu hipotezə görə kometlər, planet sisteminə nə isə yad olan cisimlərdir. Onların yaranmasını duman ləkələrinin yaranması ilə əlaqələndirərək, onlara ayrı-ayrı Günəş sistemlərindən digərlərinə təsadüfi dolaşma hərəkəti edən, nüvələri olan, çox da böyük olmayan duman ləkələri və bütün kainatda hər tərəfə yayılmış duman materiyasının sıxlaşması nəticəsində yaranmış cisimlər kimi baxmaq olar. Beləliklə, necə ki, aerolitlər Yerə nəzərən yad cisimlərdir, kometlər də bizim sistemə nəzərən yad olmalıyırlar. Bu ulduzlar bizə göründükləri zaman onların duman ləkələrinə elə tam oxşar olduğu təəvvürünü yaradır ki, onları çox vaxt ayırd edə bilmirlər; və yalnız onların hərəkətləri üzrə və Göyün müəyyən hissəsində görünən bütün duman ləkələri məlum olduğundan, onları bir-birindən fərqləndirmək mümkün olur. Bu fəziyyə, insanları düşündürən böyük cazibəni və Günəşə yaxınlaşdıqca kometlərin quyuqlarını və həmçinin, bu quyuqların hədsiz seyrəkləşməsinə çox yaxşı izah edir, həmin o quyuqların ki, özlərinin çox böyük qalınlığına baxmayaraq, onlardan sayırıqca görünən ulduz parıltılarını heç də zəiflədə bilmir.

Çox da böyük olmayan duman ləkələri Günəşin cazibəsinin çox olduğu fəza hissəsinə çatdıqda, biz bu hissəni bu ulduzun *təsir sferası*

adlandıracağıq, bu sfera onları elliptik və ya hiperbolik orbitlər cızmağa məcbur edir. Lakin onların sürətləri bütün istiqamətlər üzrə bərabərlikli olduğundan, onlar bütün istiqamətlər üzrə və ekliptikaya bütün mümkün meyillilikləri ilə ixtiyari qaydada hərəkət etməlidirlər; bu da müşahidələrlə uzlaşır.

Komet orbitlərinin böyük ekscentrisiteti də əvvəlki hipotezdan alınır. Doğrudan da, əgər bu orbitlər elliptik formaya malikdirsə, onda bunlar çox uzun formalı olmalıdırlar, çünki onların böyük oxları ən azı Günəşin təsir dairəsinin radiusuna bərabərdir. Lakin bu orbitlər hiperbolik formada da ola bilər və əgər bu hiperbolaların oxları Günəşin Yerdən orta məsafəsi ilə müqayisədə çox böyük olmazsa, bu orbitləri cızan kometlərin hərəkətləri hiss olunacaq qədər hiperbolik formada görünəcəkdir. Bununla belə, elementləri artıq məlum olan yüz kometdən, məlum olduğu kimi, hər biri hiperbola üzrə hərəkət etmir; aydındır ki, hiperbolanın görünməsinə yaranan şanslar əks şanslarla müqayisədə olduqca nadir olmalıdırlar.

Kometlər o qədər kiçikdirlər ki, onlar yalnız perigelidə onların bir-birindən məsafələri çox olmadıqda görünə bilirlər. Bu vaxta qədər bu məsafə Yer orbitinin diametrinin iki mislindən çox olmamışdı, əksinə, tez-tez bu orbitin radiusundan kiçik olurdu. Belə yaxın məsafədə Günəşə yaxınlaşmaq üçün onların təsir sferasına daxil olduqları andakı sürətləri, aydındır ki, dar hədudlarda olan qiymətə və istiqamətə malik olmalıdırlar. Ehtimalların analizi vasitəsilə, bu hədudlar çərçivəsində, görünən hiperbola verən şansların parabola ilə qarışıq salına bilən orbit verən şanslara nisbətini təyin edərək, mən tapdım ki, Günəşin təsir sferasına daxil olan və müşahidə oluna bilən duman ləkəsinin ya olduqca uzun formalı ellips və ya hiperbola cızması üçün bir şansa qarşı ən azı altı min şans vardır, hiperbola isə öz oxunun uzunluğuna görə müşahidə olunan hissədə parabola olduqca yaxınlaşır. Odu ki, heç də təəccüblü deyildir ki, bu vaxta qədər hiperbolik hərəkət tanınmamışdı.

Planetlərin cazibəsi, həm də ola bilər ki, efir mühitinin müqaviməti, bir çox komet orbitlərini, böyük oxu Günəşin təsir radiusundan kiçik olan ellipslərə çevirməli idi, bu isə elliptik orbitlərin şanslarını artırır. Belə hesab etmək olar ki, belə dəyişiklik 1759-cu ilin kometi və dövrətmələri müəyyən olunmuş digər bəzi kometlər üçün baş vermişdi.

İndi isə mən, Yer və onu örtən mayelərə baxacağam. Yer qatlarının düzgünlüyünü ən çox işıqlandıra bilən – onun üzərində ağırlığın dəyişilməsidir. Bu dəyişiklik eyni bir rəqəsin müxtəlif yerlərə keçirilməsilə təyin olunur, məlum zaman intervalında rəqəsin rəqsləri sayılır; yaxud saniyə rəqəsinin uzunluğunun bilavasitə ölçülməsi ilə təyin olunur. Bu sınaqlar asandır və indi olduqca dəqiq aparıla bilər. Yer nəzəriyyəsi üçün bunlar mühüm olduğundan, onlar xüsusilə dəniz səyyahlarına tövsiyə oluna bilər. Baxmayaraq ki, daha yaxşı nəticələr də ola bilərdi, bununla belə, artıq aparılmış sınaqlar böyük bir düzgünlüyü və ən sadə dəyişilmə qanununa yaxınlaşmanı, yəni en dairəsinin sinusunun kvadratı qanununu aşkar edir; Şimal və Cənub yarımkürləri bu mənada o qədər də fərqlənmirlər, ən azı elə bir fərq yoxdur ki, onu müşahidə xətlərinə aid etmək mümkün olmasın. Əgər ölçü vahidi kimi kvadrata saniyə rəqəsinin uzunluğu götürülsə, onda bütün bu müşahidələr, nəticə etibarilə, en dairəsinin sinus'un kvadratına mütənəib həddin əmsalı üçün on mində əlli dörd ədədini verəcəkdir. Bu nəticəyə mənəm ehtimal düsturlarının tətbiqi nəticəsində bir şansa qarşı iki min şansdan artıq şansın olduğu alınır, bu isə onu göstərir ki, əsl əmsal beş mində birə altı mində bir arasındadır. Əgər Yer fırlanma ellipsoidini təmsil edərsə, onda biz yüzmində 875-dən cazibə qanununun əmsalını çıxaraq, onun sıxlığını öyrənirik; beləliklə, beş mində bir əmsal – $1/272$ sıxılmasına uyğundur. Deməli, Yer in sıxılmasının bu kəsrdən kiçik olması üçün bir şansa qarşı dörd min şansdan artıq şans vardır. Yer in birinciliyinə uyğun Yer sıxılması və Yer qatlarının sıxlığının bu planetin mərkəzinə yaxınlaşdıqca artması üçün bir şansa qarşı miyadların milyonu qədər şans olacaqdır. Yer in səthində ağırlığın müntəzəmliyi göstərir ki, bu qatlar mərkəz nöqtəsi ətrafında simmetrik yerləşmişlər. Maye vəziyyətin qaçılmaz bu iki şərti, bütün Yer in ilk əvvəl bu vəziyyətdə, – onun yalnız qeyri-adi istilik nəticəsində düşdüyü vəziyyətdə olduğunu olduqca doğruxaoşar edir; bu isə Göy cisimlərinin yaranması haqqında bizim təsdiq etdiyimiş hipotezi təsdiqləyir.

Elmlər Akademiyasının təklifinə görə keçən yüzilliyin əvvəlində Brestdə altı il ərzində ardıcıl surətdə qabarma və çəkilmələr üzrə müşahidələr aparılmışdı. Bu növ müşahidələr üçün bu portun seçilməsi olduqca əlverişli idi. Bu port dənizlə çox böyük reydlə qurtaran kanala birləşir, bu reydin ən içəri hissəsində port salınmışdır. Beləliklə, dəniz hərəkətindəki düzgün olmamazlıqlar bu porta çatana kimi olduqca zəifləyir, gəminin düzgün olmayan hərəkəti nəticəsində barometrin borusunun daralması ilə barometrə rəqslərin zəifləməsi kimi. Bundan başqa, Brestdə qabarma və çəkilmələr olduqca çox olduğundan, küləkdən asılı təsadüfi dəyişikliklər bu prosesə az təsir göstərir; qabarma və çəkilmələr üzərində müşahidələrdə burada elə böyük bir düzgünlük müşahidə olunur ki, onu bu portun reyfində itib-batan kiçik bir çay heç bir vəhclə poza bilməz. Bu düzgünlüyə heyrtlənərək, mən dövlətə belə bir xahişlə müraciət etdim ki, Ay orbitinin düyünlərinin bütün hərəkəti dövründə Brestdə bir sıra yeni müşahidələr aparılsın, bu xahişim isə yerinə yetirildi. Bu müşahidələrə 1806-nın iyunun 1-dən başlandı və indiyə qədər onlar fasiləsiz davam olunur, odur ki, bu müddət mənəm qeyd etdiyim dövrün yarısını da ötür. Bu müşahidələr, mənəm ehtimal düsturlarımı təbiətin ən möhtəşəm təzahürlərindən birinə tətbiq etmək üçün olduqca əlverişli şərait yaratdı və mən bundan istifadə etməyə bilməzdim. Mən tapdım ki, bunlar Ayın fazalarından, ilin fəsilələrindən və Ay və Günəşin Yerdən olan məsafəsindən asılı olaraq, qabarma və çəkilmələr arasındakı müddətlər və hündürlüklərin qanunlarını böyük ehtimalla müəyyənləşdirirdi. Bu mənada bu müşahidələr ən mükəmməl surətdə yüz il əvvəl aparılmış müşahidələrlə uzlaşır. Bunlar ümumdünya cazibə qanunu ilə də elə bu dərəcədə uzlaşır; bu qanunu elə bu müşahidələrin köməyli də kəşf etmək olardı.

Göy mexanikasının dördüncü kitabında bu qanunla uzlaşan, mənəm verdiyim qabarma və çəkilmə nəzəriyyəsi dinamikanın bir prinsipinə əsaslanır və bu prinsip portun yerli, hesablanılması olduqca çətin şərtlərdən, bu nəzəriyyənin asılı olmamazlığını və olduqca sadə olmasını təmin edir. Ümumdünya cazibəsi, doğrudan da, dəniz qabarmaları və çəkilmələrinin əsl səbəbləridirsə, bu prinsipin köməyli bu şərtlər, bu müşahidələri bu surətdə ifadə edən analizin nəticələrinə, ixtiyari sabitlər kimi daxil olur. Bir çox digər təzahürlərə də tətbiq olunan bu prinsip belədir: *cisimlər sisteminin vəziyyətində başlanğıc-ilkın hərəkət şərtləri, bu sistemin maruz qaldığı müqavimətlər nəticəsində yox olmuşlarsa, sistemin vəziyyəti, onda təsir göstərən qüvvələr kimi, periodik olaraq yenidən bərpa olunur*. Bu prinsipi çox kiçik dəyişikliklərin birgə mövcud olması prinsipinə birləşdirərək, mən qabarma və çəkilmənin hündürlüyü üçün ifadə tapdım, bu ifadədə ixtiyari sabitlər portun yerli şərtlərinin təsirini özündə ehtiva edir. Qabarma və çəkilmələrdəki çoxsaylı müxtəlifliklər və bu şərtlər nəticəsində onlardakı dəyişikliklərin hamısı bu ifadədə dəqiqliklə ifadə olunmuşdur. Bu qəbildən olan ən gözəl dəyişikliklərdən biri – sizigiyə və kvadratur anlarında ən böyük və ən kiçik qabarmalar və çəkilmələrdə bir gün yarım müddət ərzində gecikmədir. Qeyd olunan ifadə göstərir ki, bu gecikmə yerli şərtlərlə əlaqədar olaraq, okeana təsir edən ulduzun hərəkət sürətindən asılıdır; həmin bu səbəb isə Brestdə Günəş və Ayın təsirinin nisbətində artım əmələ gətirir. Analiz, bu artımı təyin etmək üçün, müşahidələrin köməyli müxtəlif üsullar verir və nəticədə bu artım təxminən əsl nisbətə səkkizdə birinə bərabərdir.

Günəş və Ayı okeandan ayıran bizim atmosferdə şübhəsiz olaraq onların göstədikləri təsir qabarma və çəkilmə təzahürlərinə oxşar dəyişikliklərə səbəb olur; lakin bu dəyişikliklər çox zəif olduqlarından onları atmosfer hərəkətləri çoxluğundan seçib ayırmaq mümkün olmadığından, qeyri-requlyar atmosfer dəyişikliklər mühüm olmayan kvadrata, əsas etibarilə, çox gözəl barometrlər vasitəsilə olduqca çox saylı bir sıra müşahidələr aparmaq zəruridir.

Mənəm qabarma və çəkilmələr nəzəriyyəsinin əsası olan prinsipimi qeyri-sabit səbəblər də qoşulan bütün təzahürlərin düzgün qanunlarına tabe olduğu hala da ümumiləşdirmək olar. Bu səbəblərin təsiri çoxsaylı təzahürlərin nəticələrində eyni bir qanuna tabe fərqlənmələr əmələ gətirir, bunu isə ehtimalların analizinin köməyli aşkar etmək olar. Təzahürlərin sayı artıqca bu fərqlənmələr artan ehtimalla aşkar olunur və əgər təzahürlər sayı sonsuz olsaydı, bu ehtimal yaqınlıqla

qovuşardı. Bu teorem, mənim sabit səbəblərin təsiri haqqında əvvəllər inkişaf etdirmiş olduğum teoremə analojiçdir. Beləliklə, biz gördükdə ki, gedişatı düzgün olan səbəb məlum növ hadisələrə təsir göstərə bilər, biz müşahidələri çoxaldaraq, bu səbəbin təsirini öyrənməyə cəhd göstərə bilərik və bizə belə gələrsə ki, bu təsir aşkar olunur, onda ehtimalların analizi onun varlığının və onun yəqinliyinin ehtimalını təyin edir. Odur ki, gündüzdən gecəyə keçdikdə temperatur dəyişməsi atmosfer təzyiqini və həm də deməli, barometrin hündürlüyünü dəyişə bildiyindən, təbii olaraq düşünmək olar ki, bu hündürlük üzərində Günəş istisinin təsiri aşkar olunmalıdır. Əslində də ekvator da bu təsir, məncə göründüyü kimi ləp çox olduğundan, barometrin bir günlük çox da böyük olmayan rəqsi artıq çoxdan müəyyən olunmuşdu, bu rəqsin *maximumu* səhər saat doqquza yaxın rədlərdə, *minimumu* isə axşam saat dördə yaxın olur. İkinci *maximum* axşam saat onbirə yaxın, ikinci *minimum* isə səhər saat dördə yaxın olur. Bu dəyişikliklər iki millimetr arasında baş verdikdə, gecə vaxtı bunlar gündüzə nisbətən az olur. Bizim iqlimin qeyri-sabitliyi bu dəyişiklikləri bizim müşahidəçilərimizin nəzərindən yayınırı bilmədi, baxmayaraq ki, bu dəyişikliklər burada tropiklər arasındakından da azdır. Son bir neçə ardıcıl illər ərzində Ramondun apardığı çoxsaylı dəqiq müşahidələrə ehtimal düsturlarını tətbiq edərək, biz görürük ki, bunlar bu təzahürün mövcudluğunu olduqca ehtimalıdır. Bu müşahidələr ona ilin fəsilələrindən asılı olan barometrin daha bir dəyişikliyi aşkar etməyə imkan yaradı. O, qış Günəş qarşılıdırmasından dərhal sonra, barometrin birinci orta aylıq hündürlüyünün *maximumunu*, birinci *minimumun* isə aprelə olduqunu tapır; ikinci *maximum* yay Günəş qarşılıdırmasına yaxın vaxtda, ikinci *minimum* isə sentyabrda baş verir. Analiz bu nəticələrin doğruluğunu aşkar edərək kimi qeyd olduğunu bizə göstərir. Bundan başqa bunlar digər müşahidələrlə də təsdiq olunur. Zaman göstərəcəkdir ki, müxtəlif iqlimlərdə eyni bir aylarda ən böyük və ən kiçik hündürlük olur. Barometrin illik və birgünlük dəyişiklikləri, şübhəsiz ki, passatlar və mussonlar kimi Yer in fırlanma hərəkəti ilə əlaqədar Günəş istisindən asılıdır. Lakin bu dərəcədə mürəkkəb təzahürləri hesablamaq, demək olar ki, qeyri-mümkündür.

Ehtimalların analizi məlum səbəblərin mövcudluğunu və ya təsirini yoxlamaq üçün də tətbiq oluna bilər, bizə belə gəlirdi ki, bu səbəblər müəşəkkil canlılarda da nəzərə çarpır. Təbiətin nəzərə çarpmayan qüvvələrini dərk etmək üçün bizim tətbiq edə biləcəyimiz vasitələrdən ən həssas sinirlərdir, xüsusilə də, hansısa xüsusi səbəblər onların həssaslığını artırarsa. Bunların köməyiylə, iki müxtəlif cinsli metalların bir-birinə toxunmasından zəif elektrikin yaranması kəşf olduqdan sonra fizik və kimyaçılar qarşısında tədqiqatçılar üçün geniş meydan açıldı. Bəzi insanlarda sinirlərin qeyri-adi həssaslığından yaranan özünəməxsus təzahürlər, hansısa yeni bir agentin, *canlı maqnetizm* adlandırılan agentin varlığı barədə müxtəlif fikirlər yaradı, bu maqnetizmin adı maqnetizm və bəzi əsəb üzüntüləri olduqda Günəş və Ayın təsiri nəticəsində yarandı; nəhayət, metalların və axar suyun yaxınlığından təəssüratlar təsiri nəticəsində yarandığı fərz olunurdu. Bu səbəblərin təsirinin çox zəif olduğunu və bu təsirin təsadüflər nəticəsində asanlıqla pozula biləcəyini düşünmək təbii idi, odur ki, bəzi hallarda hətta bu təsir aşkar olunmadıqda belə onun varlığını inkar etmək olmaz. Biz təbiətin bütün qüvvələrindən və onların müxtəlif təzahürlərindən bilgisindən o qədər uzağıq ki, hazırda yalnız bizim biliklərimiz çərçivəsində onların izah olunmadığı səbəbindən onları inkar etmək heç də elmi olmazdı. Onları fərz etmək nə qədər çətin olsa da, biz onları yalnız çox diqqətlə və hərtərəfli tədqiq etməliyik; məhz burada, ehtimalların hesablanması ona görə zəruri olur ki, müşahidələr və ya sınaqlar bunlarda aşkar olunan ehtimalların nə dərəcədə yaxşı olmasını müəyyən etmək üçün elə münasib vaxtda dayandırılmalıdır ki, bu ehtimallar digərlərini qəbul etməmək üçün olan əsaslardan üstün ola bilsin.

Elmlərdə tətbiq olunan, gümanlara əsaslanan metodların üstün və çatışmayan cəhətlərini ehtimalların hesablanması ilə qiymətləndirmək olar. Məs., hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində artıq tətbiq olunan metodlardan hansının ən yaxşı olduğunu bilmək üçün bu metodlardan hər birini eynilə oxşar şərtlərdə, eyni sayda xəstələr üzərində yoxlamaq kifayətdir; xəstələrin sayı çox olduqca, ən əlverişli metodun üstünlüyü

getdikcə aşkar olunacaqdır; hesablama isə onun üstünlüyünün uyğun ehtimalını və digərlərlə müqayisədə üstünlüyünü ifadə edən münasibəti verir.

Ehtimal hesabının mənavi elmlərə tətbiqi

Biz indicə, səbəbləri məlum olmayan və ya olduqca mürəkkəb olduğundan təsirlərini hesablamaq mümkün olmayan təbii təzahürlərin qanunlarını axtardıqda, ehtimalların analizinin faydalı olduğuna əmin olduq. Bu, mənavi elmlərin demək olar ki, bütün obyektlərinə də aiddir. İnsan təsisatlarına gözlənilməz və ya gizli və ya qiymətləndirilməsi mümkün olmayan o qədər səbəblər təsir göstərir ki, onların nəticələri haqqında *a priori* fikir yürütmək mümkün deyildir. Zamanın hökmü ilə baş verən bir sıra hadisələr bu nəticələri açıqlayır və bunlardan zərərliyənin qarşısını almaq üçün vasitələr də göstərir. Bu mənada mütəmadi olaraq, müdrik qanunlar tərtib olunurdu; lakin bu zaman motivlərin qorunub-saxlanılmasına etinasızlıqdan onların bir çoxu faydasız kimi hesab olunaraq ləğv olunmuşdu və bu qanunların bərpası üçün, onların zəruriliyini hiss etmək üçün acı təcrübə yaranmalıydı. Deməli, ictimai idarəetmənin hər bir sahəsində dövlətlərin böyük miqyasda keçirdikləri sınaqların uyğun sayından ibarət, tətbiq edilən müxtəlif vasitələrlə həyata keçirilən effektivlərin dəqiq reyestrinin tərtib olunması olduqca mühümdür. Müşahidə və hesablamalara əsaslanan, təbii elmlərdə çox yaxşı xidmət göstərmiş metod siyasi və mənavi elmlərə də tətbiq oluna bilər. Maariflənmənin inkişafının qaçılmaz nəticələrinə, əksər hallarda səmərəsiz və təhlükəli olan müqaviməti göstərməyəcəyik, amma biz, yalnız olduqca ehtiyatla, bizim təsisatlarımızı və artıq çoxdan vərdiş etdiyimiz adətlərimizi dəyişdirəcəyik. Biz keçmişin təcrübəsinə görə yaxşı bilirik ki, bunlar nə qədər narahatlıqlar yaradır, lakin bununla belə biz bilmirik ki, bunların dəyişdirilməsinin verdiyi ziyan nə dərəcədə böyük ola bilər. Belə qeyri-müəyyənlikdə ehtimal nəzəriyyəsi hər cür dəyişənlikdən yan keçməyi tövsiyə edir: xüsusilə də, gözlənilməz dəyişənliklərdən qaçmaq lazımdır, belə ki, bunlar həm mənavi, həm də fiziki surətdə heç bir zaman canlı qüvvənin böyük itkisi olmadan baş vermir.

Ehtimal hesabı mənavi elmlərin bir çox predmetlərinə müvəffəqiyyətlə tətbiq olunurdu. Mən burada onun əsas nəticələrini verəcəyəm.

Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında

Bizim mülahizələrimizin böyük əksəriyyəti şahid ifadələrinin ehtimalına əsaslandığından, bu ehtimalı hesablamaq səyi olduqca mühümdür. Bu doğrudur ki, əksər hallarda, çətin olduğundan onların şahidlik etdikləri müşayiətedici faktorların, şəraitlərin çox sayılması səbəbindən şahidlərin doğruluğunu qiymətləndirmək mümkün olmur. Lakin, əksər hallarda, qarşımıza çıxan suallarla böyük oxşarlığı olan məsələləri həll etmək mümkün olur və bunların həllinə, bizi düzgün olmayan qərarlar verməyə sövq edən səhvlər və təhlükələrdən qoruyan və istifadə üçün yararlı bir yaxınlaşma kimi baxıla bilər. Belə bir yaxınlaşma, əgər yaxşı yerinə yetirilmiş olarsa, ən doğruluqşar nəticələr sayılanlarla müqayisədə üstünlük verməlidir. Bu məqsədə çatmaq üçün bir neçə ümumi qaydanı verməyə cəhd edək.

İçərisində min ədəd kürəcik olan urandan bir nömrə çıxarılmışdır. Bu çıxarılmaya şahid olanlardan biri 79 №-li kürəciyin çıxdığını elan edir; bu nömrənin çıxma ehtimalı nəyə bərabərdir? Fərz edək ki, təcrübədən bizə məlumdur ki, bu şahid hər on dəfədən birində yalan söyləyir, odur ki, onun şahidlik ehtimalı 9/10-a bərabərdir. Belə hadisə qeyd olunmuşdur: şahid təsdiq edir ki, № 79 çıxmışdır. Bu hadisə aşağıdakı iki hipotezə nəticəsində baş verə bilər: məhz, şahid doğru söyləyir, ya da ki, o yalan söyləyir. Müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış səbəblərin ehtimalları üçün bizim şərh etdiyimiz prinsipə görə, əvvəlcə hər bir hipotezə nəzərən bu hadisənin ehtimalı *a priori* təyin olunmalıdır. Birinci hipotezdə şahidin № 79-u elan etməsi ehtimalı eyni zamanda bu nömrənin çıxması ehtimalıdır, yəni 1/1000-dir. Bu ehtimal şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-a vurulmalıdır; deməli, bu hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı 9/10 000 olacaqdır. Əgər şahid yalan söyləyirsə, onda № 79 çıxmamışdır; bu halda ehtimal 99/1000-a bərabərdir. Lakin bu nömrənin çıxdığını elan etmək üçün

şahid onu çıxmamış 999 nömrə içərisindən seçməlidir; lakin şahidin nömrələri seçərkən birinə digərlərlə müqayisədə üstünlük verməsinə heç bir səbəbi olmadığından, onda onun № 79-u seçməsi ehtimalı 1/999-ə bərabərdir; bu ehtimalı əvvəlkinə vurduqda, ikinci hipotездə şahidin № 79-u elan edəcəyi ehtimalı üçün 1/1000 ədədini alırıq. Daha sonra, bu ehtimal hipotezin özünün ehtimalı 1/10-a vurulmalıdır və nəticədə bu hipotездə bu hadisənin ehtimalı üçün 1/10000 ehtimal alınır. Əgər surəti – birinci hipotездəki ehtimal, məxrəci – hər iki hipotездəki ehtimallar cəmi olan kəsr yazırıqsa, onda altıncı prinsipə əsasən, birinci hipotezin ehtimalını almış olarıq ki, bu ehtimal da 9/10-a bərabər olardı, yəni şahidin doğruluğunun həmin ehtimalı alınardı. Bu ehtimal – həmçinin № 79-un çıxması ehtimalıdır. Şahidin yalan söyləməsi, № 79-un çıxmadığı ehtimalı isə 1/10-ə bərabərdir.

Əgər şahid aldatmaq istəyərək, çıxmayan nömrələr arasında № 79-un seçilməsində hər hansı cür maraqlı olsaydı; əgər o, belə hesab etsəydi ki, məs., bu nömrə üçün oyuna böyük məbləğ ortaya qoymaqla bu nömrənin çıxması ilə o, öz kreditini artıracaq, onda onun bu nömrəni seçməsi ehtimalı, əvvəlki kimi, 1/999 olmalıydı; bu ehtimal onun bu nömrənin elan olunmasında nə dərəcədə maraqlı olmasında asılı olaraq, 1/2, 1/9 və s. ola bilər. Bu ehtimalın 1/9 olduğunu fərz edərək, onu 999/1000 ehtimalına vuraraq, yalan hipotездə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalını almaq üçün o, 1/10-ə də vurulmalıdır; onda ikinci hipotездə bu hadisənin ehtimalı üçün 11/10000 qiyməti alınır. Birinci hipotezin ehtimalı və ya № 79-un çıxması, onda, əvvəlki qaydaya görə, 9/120-ə bərabər olur. Deməli, № 79-un çıxdığını elan edən şahidin marağı nəzərə alınarsa, bu ehtimal olduqca kiçiləcəkdir. Doğrudur, həmin bu maraq, əgər № 79 çıxarsa, şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-u artırır. Lakin bu ehtimal vahidi və ya 10/10-u aşma bilməz; beləliklə, № 79-un çıxması ehtimalı 10/121-dən artıq ola bilməz. Sağlam düşüncə bizə təlqin edir ki, bu maraq inamsızlıq doğurmalıdır, hesablama isə bu marağın təsirini qiymətləndirir.

Şahidin elan etdiyi nömrənin ehtimalı, *a priori* olaraq, bir bölünmüş urdakı nömrələr sayına bərabərdir; bu ehtimal, şahidliyə əsasən şahidin doğruluğunun özünə çevrilir; deməli, bu şahidliyin özü ilə ehtimal azala da bilinər. Əgər, məs., urda yalnız iki nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı 1/2 olur; əgər № 1-in çıxdığını elan edən şahidin doğru elan etməsi ehtimalı 4/10-ə bərabərdirsə, onda buna əsasən, № 1-in çıxması az ehtimalla olur. Əslində, aydındır ki, bu halda həqiqətdən çox yalana meyilli şahid özünün şahid ifadəsi ilə şahidlik göstəriləcək faktın ehtimalını hər dəfə, bu ehtimal 1/2-ə bərabər olduqda və ya onu aşdıqda, kiçiltməlidir. Lakin, əgər urda üç nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı doğruluğu 1/3-i aşan şahidin ifadəsi ilə artır.

Fərz edək ki, urda 999 qara və bir ağ kürəcik vardır və urdan kürəciyi çıxaran şahid ağ kürəcik çıxdığını elan edir; müşahidə olunan hadisənin birinci hipotездə nəzərdən *a priori* ehtimalı, burada əvvəlki sualdakı kimi 9/10 000 -ə bərabərdir. Lakin fərz olunarsa ki, şahid yalan söyləyir, ağ kürəcik çıxmamışdır, bu halın ehtimalı 999/1 000 -ə bərabərdir. Bu ehtimal yalan ehtimalı 1/10-ə vurulmalıdır, onda ikinci hipotездə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı 999/10 000 olur. Bu ehtimal əvvəlki məsələdə yalnız 1/10 000 -ə bərabər idi: belə böyük fərqin olması ondan asılıdır ki, qara kürəcik çıxdıqda, aldatmaq istəyən şahid üçün, əgər o, ağ kürəciyin çıxmasını elan etmək istəyirsə, çıxmayan 999 kürəcdən seçim etmək şansı qalır. Əgər surətləri – hər bir hipotездəki ehtimallar, ümumi olan məxrəcləri – bu ehtimalların cəminə bərabər iki kəsre baxılırsa, birinci hipotezin və ağ kürəciyin çıxması ehtimalı 9/1 008, ikinci hipotezin və qara kürəciyin çıxması ehtimalı 999/1 008 olardı. Bu sonuncu ehtimal yaqinliyə olduqca yaxınlaşır; o, yaqinliyə daha çox yaxınlaşar və 999 999/1 000 008 -ə bərabər olardı, bu şərtlə ki, urda milyon kürəcik və bunlardan yalnız biri ağ olsaydı, odur ki, ağ kürəciyin çıxması, bu halda daha çox qeyri-adi hadisə olardı. Buradan görünür ki, faktın özü daha da qeyri-adi olmağa başladıqca yalan ehtimalı da necə artır.

Bu vaxta qədər biz fərz edirdik ki, şahid heç vaxt səhv etmir; lakin, əgər onun səhv edə biləcəyi fərz olunarsa, onda qeyri-adi fakt daha da

güman edilməz olur. Onda iki hipotездə əvəzinə aşağıdakı dörd hipotездə irəli sürülür, məhz: şahid yalan söyləmir və özü də səhv etmir; şahid yalan söyləmir və səhv edir; şahid yalan söyləyir və səhv etmir; və nəhayət, şahid yalan söyləyir və səhv edir. Bu hipotездərdən hər birində müşahidə olunan hadisənin ehtimalını *a priori* təyin edərək, altıncı prinsipə əsasən tapırıq ki, göstərilən faktın yalan olduğu ehtimalı: surəti – urdakı qara kürəciklərin sayının şahidin aldatmaması və səhv etməsi və ya da ki, aldatması və səhv etməməsi ehtimalları cəminə hasili olan, məxrəci – bu surət ilə şahidin aldatmaması və səhv etməməsi və ya da ki, aldatması və bununla yanaşı səhv etməsi ehtimallarının cəminə bərabərdir. Buradan aydındır ki, əgər urda qara kürəciklərin sayı olduqca çox olarsa, ağ kürəciyin çıxması qeyri-adi hadisə olacaqdır, qeyd olunan faktın mövcud olmaması ehtimalı isə yaqinliyə olduqca yaxınlaşacaqdır.

Bu nəticənin bütün qeyri-adi faktlara şamil olunmasından belə nəticə çıxır ki, səhv ehtimalı və ya şahidin yalanı ehtimalı, baxılan fakt nə qədər qeyri-adi olarsa, o qədər böyük olur. Bəzi müəlliflər əksini iddia edirdilər, onlar ona əsaslanırdılar ki, qeyri-adi faktın forması adi faktın formasına tamamilə oxşar olduğundan, eyni bir motivlər bizi şahidə bu faktlardan hansı birinin olduğunu iddia etməsindən asılı olmayaraq, eynilə inandırmağa sövq etməlidir. Sade sağlam düşüncə belə qərribə iddianı qəbul etmir; lakin ehtimal hesabı sağlam düşüncənin göstərişlərini təsdiq edərək, qeyri-adi faktorlar haqqında şahidlik ifadələrinin doğruluğa oxşar olduğunu daha çox qiymətləndirir.

Təkid etmək və belə fərz etmək olar ki, inanılan iki şahiddən biri ifadə verir ki, o, adamı iki həftə əvvəl ölü görmüşdür, digəri isə onu dünən sap-sağlam görmüşdür. Bu faktorlardan heç biri doğruluğa oxşar olmayan heç bir şeyi ifadə etmir. Birlikdə götürülən bu faktların nəticəsi bu adamın dirilməsidir; bu şahid ifadələri bir-birə o adama bir-birə təsir etmədiyindən, nəticənin qeyri-adiliyi bu faktlara göstərilən inamı heç bir vəhcə azaltmamalıdır (Encyclopédie, art. Certitude).

Lakin, əgər şahid ifadələrindən çıxarılan nəticə qeyri-mümkün olsaydı, onda onlardan biri hökmən yalan olmalıydı; qeyri-mümkün nəticə isə səhv doğruluğa oxşar olmamaqlığın limiti olduğu kimi, qeyri-adi nəticə – qeyri-adi nəticələrin limitidir; qeyri-mümkün nəticə halında şahid ifadəsinin qiyməti sıfır bərabər olduğundan, qeyri-adi nəticə halında bu qiymət olduqca azalmalıdır və bu da əslində ehtimal hesabı ilə təsdiq olunur.

Bunu göstərmək üçün, birində (A-da) milyon ağ kürəcik, ikincisində (B-də) milyon qara kürəcik olan urna baxaq. Bunlardan birindən bir kürəcik çıxaraq, onu ikinci urna qoyub, sonra bu urdan bir kürəcik götürülür. İki şahiddən biri – birinci tirajda şahidlik edən, ağ kürəcik çıxdığını gördüyünü bəyan edir. Verilən ifadələrdən hər biri ayrı-ayrılıqda doğruluğa oxşardır və aydındır ki, haqqında ifadə verilən faktın ehtimalı şahidin özünün doğruluğunu ifadə edir. Lakin şahid ifadələrindən belə nəticə çıxır ki, birinci tirajda A urnundan ağ kürəcik çıxmışdır və sonra bu ağ kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, o, yenidən ikinci tirajda çıxmışdır, bu isə olduqca qeyri-adi bir nəticədir, belə ki, bu ikinci urda bu halda bir ağ, milyon qara kürəcik olur, ona görə də, bu urdan ağ kürəcik çıxması ehtimalı 1/1 000 001 -ə bərabər olur. Hər iki şahid ifadələrinin ehtimallarının nəticə etibarilə zəiflənməsini təyin etmək üçün, biz qeyd etməliyik ki, burada müşahidə olunmuş hadisə, bu şahidlərdən hər birinin ağ kürəcik çıxdığının gördüyünü iddia etməsidir. Fərz olunur ki, 9/10 şahidin doğru ifadə verməsi ehtimalıdır; bu indiki halda o zaman mümkündür ki, şahid aldatmır və səhv etmir və o aldırsa, onda həm də səhv edir. Aşağıdakı dörd fərziyyəni irəli sürmək olar.

1) Birinci və ikinci şahid doğru ifadə vermişlər. Bu halda ağ kürəcik əvvəlcə A urnundan çıxarılmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/2-ə bərabərdir, çünki birinci tirajda çıxarılmış kürəcik iki urdan birindən çıxarıla bilinir. Sonra, A urnundan çıxarılmış və B urnuna qoyulmuş kürəcik yenidən ikinci tirajda çıxarıldı; bu hadisənin ehtimalı – 1/1 000 001 -ə bərabərdir; buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı – 1/2 000 002 -ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, 81/200 000 000 ehtimalını – birinci hipotездə və

şahidlərin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halındakı ehtimalı almış oluruq.

2) Birinci şahid doğru, ikinci şahid yalan ifadə verir, ikinci şahidin doğru ifadə verməməsi ya onun aldatması və səhv etməməsi və ya da onun aldatmaması və səhv etməsi ilə bağlı ola bilər. Deməli, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir. Sonra bu kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, bu urnadan qara kürəcik çıxarılmışdır: bu hadisənin ehtimalı $1\,000\,000/1\,000\,001$ -ə bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı $1\,000\,000/2\,000\,002$ -ə bərabər olur. Bu ehtimalı, birinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru, ikincinin $1/10$ ehtimalı ilə yalan ifadə verdikləri halında 9/10 və $1/10$ ehtimallarının hasilinə vuraraq, ikinci hipotezədə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün $9\,000\,000/200\,000\,200$ qiymətini alırıq.

3) Birinci şahid doğru ifadə vermir, ikincisi isə doğru ifadə verir. Deməli, qara kürəcik birinci tirajda B urnundan çıxmışdır, sonra isə o, A urnuna qoyulmuş və A urnundan ağ kürəcik çıxarılmışdır. Bu hadisələrdən birincisinin ehtimalı $1/2$ -ə, ikincisinin ehtimalı – $1\,000\,000/1\,000\,001$ -ə bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı $1\,000\,000/2\,000\,002$ -ə bərabərdir. Bu ehtimalı birinci şahidin $1/10$ ehtimalı ilə yalan və ikinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halında, $1/10$ və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, uyğun hipotezədə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün $9\,000\,000/200\,000\,200$ ehtimalını alırıq.

4) Nəhayət, hər iki şahid yalan ifadə verir. Deməli, birinci tirajda qara kürəcik B urnundan çıxarılmışdır, sonra o, A urnuna qoyulduqdan sonra, o, ikinci tirajda A urnundan çıxarılır. Bu mürəkkəb hadisənin ehtimalı $1/2\,000\,002$ -ə bərabərdir. Şahidlərin hər birinin $1/10$ və $1/10$ ehtimallarının hasilinə vuraraq, bu hipotezədə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı üçün $1/200\,000\,200$ ehtimalını alırıq.

İndi isə iki şahid ifadəsinin ehtimalını, yəni hər bir tirajda ağ kürəcik çıxması hadisəsinin ehtimalını müəyyən etmək üçün birinci hipotezə uyğun ehtimal dörd hipotezin hamısına uyğun ehtimallar cəminə bölünməlidir və nəticədə bu ehtimal üçün olduqca kiçik kəsr – $81/18\,000\,082$ ədədi alınır.

Əgər iki şahiddən birincisi ağ kürəciyin A və B urnundan birindən çıxarıldığını; ikincisi də ağ kürəciyin oxşar surətdə A və B urnlarından birindən çıxarıldığını təsdiq etsəydilər, hər iki şahidin ifadələrinin ehtimalı onların şahidlik ehtimallarının hasilinə və ya $81/100$ -ə bərabər olardı: deməli, bu ehtimal, heç olmasa, yüz səksən min dəfə əvvəlki ehtimaldan çox olardı. Buradan aydın görünür ki, iki şahid ifadəsinin qeyri-adi nəticəsi – birinci tirajda ağ kürəcik çıxdığı halda, birinci haldakı kimi ikinci tirajda ağ kürəciyin çıxması kimi qeyri-adi nəticə, – iki şahid ifadəsinin əhəmiyyətini nə dərəcədə azaldır.

Biz, yüz zərin atılmasında bütün zərərlərin eyni üzlə düşməsinə şahidlik edən bir şəxsə inanmazdıq: əgər biz özümüz bu hadisənin şahidi olsaydıq, biz öz gözələrimizlə gördüyümüzə inanardıq, yalnız bundan sonra bütün şərtləri diqqətlə yoxlayardıq və bundan sonra da hər hansı bir şəxsi də şahidlik etməyə dəvət edərdik ki, gördüyümüzə tamamilə əmin olaq ki, burada heç bir qalypusinasialara, heç bir fokusa yol verilməmişdir; amma bütün bunlardan biz, tərəddüd etmədən, bu hadisənin fəvqəladə qeyri-doğruyaoxşarolmasına baxmayaraq, onu qəbul edərdik və heç bir kəs onun izahı məqsədilə görmə qanunlarının inkar olunmasına cəhd belə göstərməzdi. Buradan biz nəticə çıxarmalıyıq ki, təbiət qanunlarının sabitliyinin ehtimalı bizim üçün qeyd olunan hadisənin baş verə bilməyəcəyi ehtimalından üstündür, o ehtimaldan ki, o, öz növbəsində şübhə doğurmayan əksər tarixi faktların ehtimalından üstündür. Buna əsaslanaraq, şahid ifadələrinin nə dərəcədə olduqca böyük çəkiyə malik olması barədə mühakimə yürütmək olar, çünki sonra təbii qanunların pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adı qaydalarının pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adı qaydalarının tətbiqi sui-istifadə kimi qiymətləndirilə bilinsin. Belə ciddi şahid ifadələrini təqdim etmə-

yönərlərin hamısı bu qanunlara zidd olan və onların nümayiş etdirdikləri hadisələri müdafiə edirlər, əslində isə onların təlqin etmək istədiklərinə inam artmaq əvəzinə zəifləyir, çünki bu halda bu hekayələr bu müəlliflərin səhvə yol verdiklərini və ya yalanını çox ehtimalıdır. Maariflənmiş insanların inamını azaldan nə varsa, həmişə möcüzə gözəldən qara camaatın inamını əksər hallarda çoxaldır.

Elə şeylər var ki, onların qeyri-doğruyaoxşarlığını heç bir şey şübhə altına qoya bilməz; lakin hökumət baxışların təsiri altında bu qeyri-doğruyaoxşarlıq o dərəcədə zəif ola bilər ki, şahid ifadələrinin ehtimalından kiçik görünə bilər; bu baxışlar dəyişdikdə, o əsrdə bir səsə qəbul olunmuş, bu baxışın doğurduğu cəfəngiyyət məhz sonrakı əsrlər üçün ən yaxşı əqllərə ümumi fikrin böyük təsirinin yeni sübutu kimi görünəcəkdir. XIV Lyudovik əsrinin iki dahi şəxsi – Rasin və Paskal buna olduqca gözəl nümunədir. İnsan qəlbinin abbatlığının və bütün şairlərdən ən mükəmməli Rasinin, Port-Royal abbatlığının keçmiş pansioneri və Paskalın bacısı qızı (qardaşı qızı) gənc Peryenin guya ki, çox yaxşı sağlamlığı haqqında nə cür canfəşanlıqla danışdığını görmək təəssüf doğurur; bu haqda Paskalın mülahizələrini oxumaq çox ağırdır, o, bu mülahizələrilə isbat etməyə çalışır ki, bu möcüzə din üçün zəruri idi ki, bu abbatlığın o zamanlar iyezuitlərin təqibinə məruz qalmış rəhbər qadınların doktrinasına haqq qazandıra bilsin. Gənc Perye artıq üç il yarım idi ki, göz yaşının fistulasından əziyyət çəkirdi, o, öz xəstə gözü ilə guya ki, Xilaskarın çəlgə tikani olan müqəddəs tütyaya toxunduğu anda özünü sağlamış hiss etmişdi. Bir neçə gündən sonra həkimlər və cərrahlar sağlamları təsdiq etmişdilər, onların fikrinə bu hadisədə nə təbiətin, nə dərmanların iştirakı olmamışdır. 1656-da baş vermiş bu hadisə çox böyük səs-küyə səbəb olmuşdu; Rasinin dediyi kimi, «bütün Paris» «Port-Royal axışdı». Hər gün insan axını çoxalır və belə təəssürat yaranırdı ki, bu kilsədə baş verən möcüzələr sayının çoxluğu xalqın möminliyini artırmaq üçün elə Allahın özünə də xoş idi. Hələ o vaxtlar möcüzələr və sehrbazlıq inanılmaz görünmədiyindən və bunlara təbiətdəki bütün qəribəliklər şübhə edilmədən şamil olunduğundan, onları başqa cür izah edə bilmirdilər.

Qeyri-adi təzahürlərə bu baxışa XIV Lyudovik əsrinin ən gözəl əsərlərində təsadüf olunur, hətta müxtəlif razılaşmaları nəzərdə tutan, müdrik Lökk insan idrakı haqqında «Təcrübə» əsərində deyir ki: «ümumi təcrübə və şeylərin adi axarının insan əqlinə təsir göstərməyə tam əsas olduğuna baxmayaraq, bu razılaşmada nəyə inanmaq, nəyi isə inkar etməklə razılaşmağa onları sövq etmək üçün, bununla belə, elə hallar da olur ki, faktdakı qəribəlik bu faktın əsasına xidmət edən əsl şahidliyə bizim göstərməyimiz inamı heç də azaltmır. Əgər fəvqəladə hadisələr verilən şəraitdə və verilmiş zamanda təbiətdə şeylərin axarını dəyişmək iqtidarında olan şəxsin qarşısına qoyduğu məqsədlərə uyğun olursa, onda bizim ağılımız, bunlara, bunlarla ziddiyyətin olması çoxaldıqca və ya bunlar adi müşahidələrdən də üstün olduqca, böyük inamla yanaşa bilər». Beləliklə, idrakın əsas etibarilə öz proqresinə səbəb olan şahid ifadələrinin ehtimallarının gerçək prinsipləri, filosoflar tərəfindən qəbul edilmədiklərindən, mən bu məsələ üçün hesablamə nəticələrini geniş surətdə şərh etməyi özümə borc bildim.

Burada Paskalın məşhur arqumentini araşdırmaq yerinə düşərdi, bu arqument ingilis riyaziyyatçısı Kreq tərəfindən həndəsi forma verilmişdi. Bir neçə şahid belə ifadə verir ki, Allahın özü tərəfindən onlara ayan olmuşdur ki, hər hansı məlum şeylə razılaşaraq, bir və ya iki deyil, sonsuz sayda xoşbəxt günlərdən həzz almaq mümkündür. Şahid ifadələrinin ehtimalının kiçik olmasına baxmayaraq, əgər bu ehtimal sonsuz kiçik olmazsa, aydındır ki, bununla razılaşan kəslərin qazancı sonsuz böyükdür, çünki bu qazanc bu ehtimalın sonsuz mənfəətinə hasilidir: buna görə də, bu qazancı əldə etməkdə tərəddüd etmək belə olmaz.

Bu arqument Allahın adı ilə şahidlərin vəd etdikləri xoşbəxt günlərin sonsuz sayda olacağına əsaslanmışdı. Deməli, onların dedikləri yerinə yetirilməli idi, məhz ona görə ki, onlar öz vədlərində bütün hədləri, sağlaml düşüncəyə zidd nəticəni aşırırdılar. Hesablama isə biza göstərir ki, vədlərin məhz belə şişirdilməsi, şahid ifadələrinin ehtimalını o qədər zəiflədir ki, bu şişirtmə ehtimalı sonsuz kiçik edir və ya sıfıra çevirir. Əslində bu hal ona gətirir ki, bu halda şahid çoxlu nömrələr olan urndan yalnız bir nömrə çıxarıldıqda onun ən böyük nömrə olduğuna elan etsin; digər tərəfdən bu şahidin bu nömrənin çıxmasını elan etməsində çox maraqlı olduğu da məlumdur. Biz əvvəl gördük ki, onun maraqlılığı bu şahidliyin qiymətini nə dərəcədə azaldır. Şahid əgər yalan söyləyirsə,

1/2-lə onun ən böyük nömrəni götürəcəyi ehtimalını qiymətləndirərək, biz hesablamadan sonra alırıq ki, onun elan etdiyin ehtimalı – surəti vahidə, məxrəci isə vahid üstəgəl *a priori* baxılan və ya elan ediləndən asılı olmayaraq, yalan ehtimalının nömrələr sayına hasilinin yansıma bərabər olan kəsrdən kiçikdir. Bu hal ilə Paskalın arqumenti aid olan hal arasında müqayisə aparmaq üçün urnun nömrələrini xoşbəxt həyatların bütün mümkün ədədlərlə göstərmək kifayətdir, nəticədə bu nömrələrin sayı sonsuz olur və qeyd olunmalıdır ki, əgər şahidlər yalan ifadə verirlərsə, bununla onlar üçün ən əlverişli hal əbədi səadət vəd etməkdir, çünki onda onlar öz yalanlarını sənədləşdirmiş olurlar. Onların verdiyi ifadələrin ehtimalının ifadəsi bu halda sonsuz kiçik olur. Bu ehtimalı vəd olunmuş xoşbəxt günlərin sonsuz sayına vurduqdan sonra, sonsuzluq hasilə itir, yox olur, bu hasil bu vəddən doğan mənfəəti ifadə edir ki, bu da Paskalın arqumentini alt-üst edir.

İndi isə müəyyən bir fakta aid bir neçə şahid ifadələri toplusunun ehtimalına baxaq. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, bu fakt – içərisində yüz nömrə olan urnadan yalnız bir nömrə çıxarılmasıdır. Bu tirajın iki şahidi elan edir ki, № 1 çıxmışdır və bu şahid ifadələrindən alınan ehtimal təyin olunmalıdır. Aşağıdakı iki hipotezi fərz etmək olar: şahidlər doğru söyləyirlər və şahidlər yalan söyləyirlər. Birinci hipotezdə № 1 çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/100-ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən şahidin və 7/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən digər şahidin doğruluq ehtimallarına vurmaq lazımdır: beləliklə, bu hipotezdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalının 63/10 000 olduğunu alırıq. İkinci hipotezdə № 1 çıxmamışdır və bu hadisənin ehtimalı 99/100-ə bərabərdir. Onda şahidlərin razılaşdırılmış ifadələri belə tələb edir ki, aldatmaq üçün onların hər ikisi çıxmamış 99 nömrədən № 1-i seçmişlər: bu seçimin ehtimalı 1/99 kəsrinin özünə hasilinə bərabərdir; sonra bu iki ehtimalı bir-birinə vurduqdan sonra, bu hasilə də şahidlərin aldatma ehtimalları 1/10 və 3/10-ə vurmaq lazımdır, beləliklə də, ikinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 1/330 000 qiymətini alırıq. Birinci hipotezə uyğun ehtimalı hər iki hipotezə uyğun ehtimalların cəminə bölərək, şahidlik olunan faktın və ya № 1-in çıxması ehtimalını tapırıq. Bu ehtimal, beləliklə, 2079/2080 olacaqdır, nömrənin çıxmaması ehtimalı və şahidlərin yalan ifadələri ehtimalı isə 1/2 080 1/2080 olacaqdır.

Əgər urnada yalnız 1-ci və 2-ci nömrələr olsaydı, onda biz həmin bu qayda ilə № 2-nin çıxması ehtimalının 21/22 olduğunu və deməli, şahidlərin yalan ifadələri üçün 1/22 ehtimalını almış olardıq, bu ehtimal əvvəlki ehtimaldan heç olmasa doxsan dörd dəfə böyükdür. Buradan aydın olur ki, şahidlərin yalan ifadə vermələri ehtimalı, onların şahidlik edəcəkləri fakt özlüyündə az ehtimalı olduqda, necə kiçilir. Əslində, aydındır ki, əgər şahidlər aldadırlarsa, şahid ifadələrinin öz aralarında razılığı, əgər onlar bir-birilə şərtləşməmişdirlərsə və biz bu halı burada fərz etmədiyimizi də nəzərə alırıqsa, az ehtimal olunan haldır.

Əvvəlki halda, urnada yalnız iki nömrə olduqda və buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı *a priori* 1/2 olduğundan, şahid ifadələri nəticəsində alınan ehtimal – şahidlərin doğruluqları ehtimallarının hasilinin, bu hasil ilə onların uyğun yalan ehtimallarının hasilinin cəminə nisbətində bərabərdir.

Bundan sonra biz kimlərsə verdikləri bir sıra şahid ifadələrinin faktların ehtimalına zamanın etdiyi təsirə baxmalıyıq. Şahid ifadələrinin bu sırası uzandıqca, aydındır ki, bu ehtimal azalmalıdır. Əgər fakt özü-özlüyündə tamamilə ehtimal olunmaydırsa, onda bu faktın şahid ifadələrindən sonra alacağı ehtimal, şahidlərin doğruluq ehtimallarının hasilini ilə birlikdə, azalır. Əgər fakt özü-özlüyündə ehtimala malikdirsə, əgər, məs., bu fakt – içərisində sonlu sayda nömrələr olan urnadan, yaqınlıqla, bir nömrənin çıxması məlum olduqda № 2-nin çıxması faktı olarsa; kimlərsə verdiyi şahid ifadələrinin bu ehtimalla verə biləcəyi əlavə ilə bu hasil bu ehtimal ilə azalırsa və bu hasilin birinci vuruğu urnadakı nömrələr sayından bir vahid az olan ədədin həmin nömrələr sayına nisbətində bərabər; digər vuruqlardan hər biri, hər bir vuruq isə hər bir şahidin doğruluq ehtimalının, onun yalnız ehtimalının urnadakı nömrələr sayından bir vahid əskik ədədə nisbəti qədər az olan ədədə bərabərdirsə, onda faktın ehtimalının limiti, *a priori* və ya şahid ifadələrindən asılı olmayaraq, baxılmış bu faktın limitidir, bu ehtimal bir bölünmüş urnadakı nömrələr sayına bərabərdir.

Buna görə də, zamanın göstərdiyi təsir tarixi faktların ehtimalını aramsız olaraq azaldır, necə ki, zamanın təsiri ən möhkəm abidələrdə belə öz izini qoyur. Doğrudur, bu təsiri şahid ifadələrini və onların söykəndiyi abidələri qoruyaraq və çoxaldaraq yavaşltmaq olar. Bu məqsəd üçün ən möhtəşəm vasitə – bədbəxtlikdən, qədim dövr insanına məlum olmayan kitab nəşridir. Kitab nəşrinin yaratdığı sonsuz saylı üstünlüklərə baxmayaraq, yer səthinin zamanın qaçılmaz təsiri ilə həmişəlik məruz qaldığı fiziki və mənəvi inqilablər onunla nəticələnməkdir ki, minilliklər ötdükə indi yaqın görünən tarixi faktlar şübhə doğuracaqdır.

Kreç xristian dininin dəlillərinin tədricən zəifləməsini hesablamağa cəhd göstərmişdi: o fərz etmişdi ki, dünyanın sonu o vaxt baş verəcəkdir ki, bu din öz ehtimalını itirmiş olsun, o tapır ki, bu onun hesablamasından 1454 il sonra baş verəcəkdir. Lakin onun analizi, dünyanın varlığının davamı haqqındakı hipotez qərībā olduğu qədər səhvdir.

Seçkilər və iclasların qərarları haqqında

Hər hansı iclasın qərarlarının ehtimalı bu iclası təşkil edən üzvlərin səs çoxluğundan, onların maariflənməsi olub-olmadığından və onun üzvlərinin qərəzsizliyindən asılıdır: bu qərarlara o qədər xüsusi maraq və istəklərin təsiri olur ki, bu ehtimalı hesablamaq mümkün olmur. Bununla belə, sadə sağlam düşüncə və hesablanma ilə təsdiq olunmuş bir neçə ümumi nəticələr vardır. Məs., əgər iclasda baxılan məsələ ilə əlaqədar onun üzvləri az məlumatlı olarsa, bu məsələ üçün çox incə mülahizələr tələb olunarsa və ya bu bənddə həqiqət məlum mülahizələrə ziddirsə, səs verən hər bir kəsin həqiqətdən yayınması bir şansa qarşı birdən çox şansın olması ilə baş versə, onda əksər çoxluğun qərarının çox pis olacağı güman olunur, bu mənada gözlənilən təhlükə iclas üzvlərinin sayı çox olduqca daha da doğru sayılacaqdır. İctimai maraq xatirinə iclasda, yalnız onun üzvlərinin böyük əksəriyyəti üçün anlaşılın məsələlərə baxılmalıdır; olduqca mühümdür ki, maariflənmə hər tərəfli olsun və aqla, təcürbəyə əsaslanmış yaxşı kitablar özükimilərin taleini həll edənləri və ya onları idarə edənləri düzgün istiqamətləndirsinlər və onları yalnız baxışlardan və cəhil əqidlərdən qorusunlar. Alimlər tez-tez müşahidə edirlər ki, ilk təəssürat çox vaxt aldadıcı olur və həqiqət, gerçək olan, həmişə doğruya oxşar olur.

İclas üzvlərinin fikir müxtəlifliyi halında iclasın iradəsini öyrənmək və müəyyənləşdirmək çətin olur. Adı iki hala baxaraq, qeyd etdiyimizə nəzərən bir neçə qaydanı verməyə çalışaq: bir neçə namizəd arasında seçim və eyni bir mövzuya aid olan bir neçə təklif arasında seçim.

Bir və ya bir neçə eyni tip yerə namizəd olan bir neçə nəfər arasında iclas seçim etməlidirsə, səs verən şəxsin namizədlərin adlarını onların layiq olduğu qayda ilə yazması ən sadə üsul hesab oluna bilər. Əgər fərz edilərsə ki, o, bu adları siyahıda viedanla yerləşdirir, onda bu siyahılar olan vərəqlərə baxdıqda, namizədlərin öz aralarında hansı üsulla müqayisə olunmasına baxmayaraq, seçkinin nəticələri aşkar olunacaqdır, odur ki, yeni seçkilər bu baxımdan heç bir şeyi dəyişdirməyəcəkdir. Bundan sonra üstünlük qaydası müəyyən olunmalıdır, bu qayda namizədlər üçün siyahıları müəyyənləşdirir. Fərz edək ki, hər bir seçiciyə içərisində sonsuz sayda kürəcik olan urn verilmişdir, bu kürəciklər vasitəsilə o, namizədlərə aid olan bütün cəhətləri qeyd edə bilər; bir də fərz edək ki, o, öz urnundan hər bir namizədin üstün cəhətinə mütənəsb sayda kürəcik çıxarır və fərz edək ki, ədəd siyahı vərəqində namizədin adının yanında yazılmışdır. Aydındır ki, hər bir namizədin hər bir siyahı vərəqindəki adının qarşısındakı ədədlərin hamısının cəmi təyin olunduqdan sonra, ən böyük cəmi almış namizəd iclasın layiq bildiyi namizəd olacaqdır və ümumiyyətlə, namizədlərin üstünlüyü qaydası onlardan hər birinə aid olan cəmlərin düzlüyü qaydası olacaqdır. Lakin siyahı vərəqlərində hər bir seçicinin namizədlərə verdiyi kürəciklər sayı qətiyyən qeyd olunmur; bunlarda, yalnız, birinci namizədin ikincidən çox, ikinci namizədin üçüncüdən çox və s. kürəcik saylarının qeyd olunduğu göstərilir. Deməli, əgər baxılan siyahı vərəqində birinci namizədin qarşısında hər hansı kürəciklər sayı yazılırsa, onda əvvəlki şərtləri ödəyən kiçik ədədlərin bütün birləşmələri eyni cürə mümkündür; beləliklə, biz hər bir kombinasiyanı təşkil edən bütün ədədlərin cəmini

təyin edərək və onu bütün kombinasiyalara sayına bölərək hər bir namizədin kürəciklərinin sayını alaraq. Çox sadə analiz göstərir ki, hər bir vərəqdə sonuncu adın, sonuncudan əvvəlki adın və s. yanında yazılmalı olan ədədlər 1, 2, 3, ... ədədi silsiləsinin hədlərinə mütənəsbirdirlər. Biz hər bir vərəqdə bu silsilənin hədlərini bu qayda ilə yazsaq və hər bir namizədə bu vərəqlərdəki hədləri əlavə etsək, onda müxtəlif cəmlər özünün qiyməti ilə namizədlər arasında müəyyən olunacaq üstünlük qaydasını göstərəcəkdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin göstərdiyi seçki üsulu belədir. Əgər hər bir seçici öz vərəqində namizədlərin adını və namizədlərin layiq olduğu üstünlüklərinə görə sıra ilə yazsaq, bu üsul, şübhəsiz ki, ən yaxşı üsul olardı; lakin xüsusi maraqlar və üstünlükləri nəzərə almayan bir çox yad mülahizələr bu qaydanı pozacaqdır və bəzən belə məcburiyyət yaranacaqdır ki, üstünlük verilən namizəd axırıncı yerdə olacaqdır, bu isə ən təhlükəli hala – orta üstünlüyü olan namizədlərə olduqca böyük üstünlük verilməsinə səbəb olacaqdır. Buna görə də, belə təcrübənin qəbul edildiyi müəssisələrdə bu qaydadan imtina olundu.

Səsliyin tamamilə böyük əksəriyyəti üzrə aparılan seçkilər bu əksəriyyətin səs vermədikləri namizədlərdən heç birinin keçə bilməyəcəyi ilə yanaşı belə bir üstünlüyü də ifadə edir ki, bu əksəriyyət iclasın iradəsini ifadə edir. Seçkilər yalnız iki namizəd olduğu halda əvvəlki üsulla həmişə üst-üstə düşür. Doğrudur, bunlar elə namünasiblik yaradır ki, seçkiləri sonsuz edir, lakin bununla belə təcrübə göstərmişdir ki, bu namünasiblik yox olur və seçkilərə son qoymaq üçün ümumi bir arzu bir namizəd ətrafında səsliyin əksəriyyətini birləşdirir.

Hər hansı bir əşyaya aid olan bir neçə təklifdən birinin seçilməsi, belə çıxır ki, bir neçə namizəd arasında seçimin qaydaları kimi olmalıdır. Lakin bu iki hal arasında fərq vardır, belə ki, bir namizədin üstün cəhətləri onun rəqiblərinin üstün cəhətlərini istisna etmir; amma bir-birinə zidd təkliflərdən birini seçdikdə, bir təklifin doğruluğu digərlərin doğruluğunu istisna edir. Bu halda məsələyə aşağıdakı kimi baxılmalıdır.

Hər bir seçiciyə bir urn verək; bu urn içərisində sonsuz sayda kürəcik vardır və fərz edək ki, o, bu kürəcikləri müxtəlif təkliflər arasında bunlara verdiyi ehtimallara uyğun olaraq, mütənəsbir surətdə paylayır. Aydın ki, kürəciklərin hamısının sayı yaqınlığı ifadə edərsə, seçici isə fərz olunduğuna görə əmindirsə ki, təkliflərdən biri doğrudur, o, bu ədədi (sayı) təkliflər arasında paylaşıdır. Beləliklə, məsələ kürəciklərin yerləşdirilməsi üçün birləşmələr sayının təyin olunmasına gətirilir ki, bu halda siyahı vərəqində birinci təklif üçün kürəciklər ikincidən, ikinci üçün, üçüncü üçün olduğundan daha çox olmalıdır; bu ona görə ki, bu müxtəlif birləşmələrdə hər bir təklifə aid bütün kürəciklərin sayının cəmini təyin etmək, bu cəmi bu birləşmələrin sayına bölmək üçün: alınan nisbətlər hər hansı siyahı vərəqindəki təklifə aid göstərici kimi yazılan ədədi ifadə edəcəkdir. Analizin köməyi ilə biz tapırıq ki, axırıncı təklifdən başlayaraq, birinciyə çatmaq üçün bu nisbətlər bir-birilə aşağıdakı kəmiyyətlər kimi nisbətdə olur: 1) vahid bölünmüş təkliflərin sayı; 2) bir vahid artırılmış əvvəlki kəmiyyət bölünmüş bir vahid az təkliflərin sayı; 3) bir vahid artırılmış bu ikinci kəmiyyət bölünmüş iki vahid az təkliflərin sayı və s. Bu kəmiyyətləri hər bir vərəqdə onların aid olduqları təkliflərin yanında yazaraq, müxtəlif vərəqlərdəki eyni bir təklifə aid bütün kəmiyyətləri toplayaraq, iclasın bu təkliflərə verdiyi üstünlüyü və öz qiyməti ilə qaydanın göstəricisi olan cəmi almış oluruq.

İclasları yeniləşdirmək, yəni müəyyən olunmuş bir neçə ildən sonra onları tamamilə dəyişdirmək haqqında bir neçə söz deyək: bu yeniləşmə birdən-birə olmalıdır və ya bu illər ərzində həyata keçirilməlidir? İclas, bu qaydaya görə, o vaxtlar hökmran olan müxtəlif fikirlərin təsiri altında təşkil olunmalıydı, onda bu iclasda hökmran olan rəy, bütün bu fikirlər arasında çox güman ki, orta bir fikir olardı. Beləliklə, zaman ötdükcə, iclas onun üzvlərinin təmsil etdiyi ərazinin bütün hissələrində seçkilərin təşviqatının ona verə biləcəyi qədər üstünlük əldə edə bilirdi. Əgər onu nəzərə alırıqsa ki, təcrübə də çox yaxşı göstərmişdi ki, seçkilər həmişə hökmran baxışların ən şisirdilmiş mənasında istiqamətlənir, onda biz bu baxışların beşillərin digərləri ilə qismən yeniləşdirməklə onları cilovlamağın necə də faydalı olduğunu görürdik.

Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında

Sadə sağlam düşüncənin bizə təqdim etdiyi analiz də sübut edir ki, məhkəmənin tərkibi çoxsaylı və hakimlər daha maarifli olduqca məhkəmə qərarlarının yumşaqlığı daha çox ehtimalı olur. Buna görə də, apellyasiya məhkəmələrinin bu iki şərti ödəmələri məqsəda uyğun olardı. Məhkəmənin müttəhimə daha yaxın olan birinci instansiyaları ehtimal olunan ilkin hökmün xeyri barədə onları xəbərdar edir və onlar çox vaxt ya razılığa gəlirlər, ya da ki, öz iradələrindən əl çəkirlər. Lakin əgər məhkəmə çəkişməsinin mövzusunda inamsızlıq və onun mühümlüyü iddiaçı apellyasiya məhkəməsinə müraciət etmək məcburiyyətində qoyursa, iddiaçı böyük ehtimalla ədalətli hökm, öz sağlamlığı üçün böyük təhlükəsizlik, yeni prosesin doğracağı götürəsi işlər və məsrəflər üçün təminat almağa nail olmalıdır. Məhz bu, dairə məhkəmələrinin (tribunaux de département) qarşılıqlı apellyasiya institutunda yerinə yetirilmirdi, bu institut, buna görə də, vətəndaşların maraqlarına çox ziyan verirdi. Bəlkə də, ehtimalların hesablanması ilə, apellyasiya məhkəmələrində aşağı məhkəmənin hökmünü ləğv etmək üçün, heç olmasa iki səs çoxluğunu tələb etməyi razılaşdırmaq lazım idi. Əgər cüt sayda hakimlərdən ibarət apellyasiya məhkəmələrində səsliyin bərabərliyi halında qərar qüvvədə qalsaydı, onda bu nəticə əlində bilinirdi.

Mən xüsusən cinayət işləri üzrə qərarlara baxacağam.

Şübhəsiz ki, müttəhimi cəzalandırmaq üçün hakimlər onun törətdiyi cinayəti sübut edən ən güclü dəlillərə malik olmalıdırlar; lakin mənavi isbat həmişə yalnız fərziyyədir və təcrübə olduqca yaxşı göstərmişdir ki, hətta ən ədalətli sayılan cinayət hökmündə nə cür səhvlər ola bilər. Ölüm hökmünün ləğvinə tərəfdar olan filosoflar üçün bu səhvləri düzəltmək mümkünlüyü ən əsas arqumentdir. Beləliklə, biz riyazi aşkarlığı gözləməli olsaydıq, məhkəmə təxirə salınmalı idi. Cinayətin cəzasızlığı ilə baş verə bilən təhlükə isə bizi mühakimə etməyə vadar edir. Bu məhkəmə, mən səhv etmərsə, aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilir: müttəhimin təqsirinin sübutu zəruri olan ən böyük ehtimala malikdirmi ki, vətəndaşlar məhkəmənin səhvlərilə: əgər ittiham olunan şəxs günahsızdırsa və cəzalandırılmışdırsa, əgər o günahkardırsa və bəraət qazanmışdırsa, onun cəzalandırılması onun yeni cinayətlərinə və bundan nümunə götürən bədbəxtlərin də cinayətlərinə səbəb ola biləcəyi kimi hallarla daha az üzləşsinlər. Bu məsələnin həlli çox böyük çətinliklə dərk olunan bir çox elementlərdən asılıdır: cinayətkar cəzasız qalarsa, cəmiyyəti qorxuya salan təhlükənin sövşmədiyi gündəmdə olur. Bu təhlükə bəzən o qədər böyük olur ki, magistrat cəzasızlığı qorumaq üçün düşünülmüş surətdə müəyyən olunmuş formalardan imtina etmək məcburiyyətində qalır. Söhbəti gedilən bu məsələni, demək olar ki, həllolunmaz edən amil – müttəhimin mühakimə olunması üçün zəruri olan ehtimalı təyin etməyin və müqəssirin törətdiyi əməlin ehtimalını dəqiq qiymətləndirməyin mümkünsüzlüyüdür. Hər bir hakim belə hallarda öz taktına müraciət etməlidir: o, müxtəlif şahid ifadələrini və cinayətin müşayiət olunduğu vəziyyətləri öz mülahizələri və öz təcrübəsinin nəticələri ilə müqayisə edərək, öz fikrini qərarlaşdırır; bu halda ifadə almaqda və müttəhimlərin mühakimə edilməsində qazanılan uzun təcrübə, çox vaxt bir-birinə zidd ifadələr arasında gerçəyi aşkar etmək üçün böyük üstünlüklər verir.

Bundan başqa, əvvəlki məsələ cinayətə verilən cəzanın ölçüsündən asılıdır, belə ki, aydındır ki, ölüm hökmü üçün dəlil-sübutların bir neçə aylıq həbs qərarına görə lazım ola bilən dəlil-sübutlardan daha tutarlı olması tələb olunur. Bu, cəzanın cinayətə ilə müvafiqliyi lehina səbəbdır, belə ki, yüngül cinayətə verilən ağır cəza bir çox günahkara bəraət vermək zərurətinə səbəb olacaqdır. Cinayət ehtimalının onun ağırlıq ölçüsünə hasili təhlükə ölçüsüdür, bu ölçü cəmiyyəti cinayətkara bəraət vermək məcburiyyətinə sövq edə bilər, onda belə qənaətə gəlmək olar ki, cəza bu ehtimaldan asılıdır. Bu bilavasitə məhz məhkəmələrdə yerinə yetirilir, bu məhkəmələrdə müttəhim müəyyən müddət saxlanılır; bu şəxsin əleyhinə tutarlı dəlillər olur, lakin bunlar onun məsuliyyətə cəlb olunması üçün yetərli olmur. Yeni dəlil-sübutlar toplamaq niyyəti ilə, onu heç də həməən öz əhatəsindəki vətəndaşların arasına qaytar-mırlar, çünki o, öz çevrəsi üçün yenidən narahatlıq yarada bilər. Lakin bu ölçünün ixtiyariliyi və ondan sui-istifadə fərdi azadlığa böyük dəyər verən ölkələrdə bu ölçünü onu atmağa məcbur etmişdi.

Belə olan halda, yalnız böyük çoxluqla cəzalandıra bilən məhkəmənin qərarının ədalətli olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir, yəni bu

qərar yuxarıda qoyulmuş sualın düzgün həllinə uyğun olacaqmı? Bu mühüm məsələnin yaxşı həll olunması müxtəlif məhkəmələri bir-birilə müqayisə etməyə bir vasitə olardı. Məhkəmənin çoxsaylı tərkibi halında çoxluq yalnız bir səsə ifadə olunduqda, baxılan məsələ ən azı şübhə doğurur. Bu halda müttəhimin məsuliyyətə cəlb olunması onun günahsızlığını qoruyan humanizm prinsiplərinə zidd olardı. Hakimlərin həmrəyliyi ədalətli hökm üçün ehtimalın çox böyük olmasına səbəb olardı; lakin belə qərarın məcburiyyəti çox günahkarın bəraət almasına da səbəb ola bilərdi. Buna görə də, ya əgər onların həmrəyliyi arzuolunandırırsa, hakimlərin sayı azaldılmalı və ya məhkəmə üzvlərinin sayı çox olduğu halda məsuliyyətə cəlb etmək üçün zəruri sayda hakimdən ibarət çoxluq artırılmalıdır. Mən hesablanmanı bu məsələyə tətbiq etməyə çalışacağam, belə ki, sağlam düşüncənin bizə verdiyi məlumatlar əsasında həmişə bu hesablanmanın ən yaxşı nəticə verəcəyinə əminəm.

Hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı bu hesablamaya başlıca element kimi daxil olur. Bu ehtimal, aydındır ki, hər bir işdə nisbidir. Əgər min bir hakimdən ibarət məhkəmədə beş yüz bir nəfər bir fikirdə və beş yüz nəfər isə əks fikirdə olarsa, onda aydındır ki, hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı $1/2$ -dən çox da böyük olmayan kəmiyyət qədər artıq olur, çünki onun olduqca böyük olduğu fərz olunarsa, bir səs fərqi hadisəsi qeyri-mümkün hadisə olardı. Əgər bütün hakimlər bir-birilə razı olarlarsa, bu onu göstərir ki, dəlillər o qədər güclüdür ki, bunlar inam doğurur: bu halda hər bir hakimin fikrinin ehtimalı vahidə və ya hər hansı ümumi ehtiraslar və ya qabaqcadan yaranmış yanlış fikirlər hakimlərin hamısının eyni zamanda səhvə yol verməsinə səbəb olmazsa, gerçəkliyə çox yaxın olur. Bu hallardan başqa, müttəhimin lehinə və əleyhinə səslərin nisbəti, yalnız bu nisbət, bu ehtimalı təyin etməlidir. Beləliklə, mən fərz edirəm ki, bu ehtimal $1/2$ -dən vahidə qədər dəyişə bilər, lakin o, $1/2$ -dən az ola bilməz. Əgər bu belə olmasaydı, onda məhkəmənin qərarı püşkatma qədər az əhəmiyyət kəsb edərdi; lakin bu qərar dəyərlidir, belə ki, hakimin qərarı qabaqcadan yanlış fikrə gəlməkdən həqiqətə daha çox yaxındır. Müttəhim üçün əlverişli səslərin (lehinə) əlverişli olmayan səslərə nisbəti vasitəsi ilə mən hakimin fikrinin doğru olması ehtimalını təyin edirəm.

Məlum olan səs çoxluğu ilə mühakimə edən məhkəmənin qərarı doğru verməsi ehtimalının ümumi ifadəsinə malik olmaq üçün bu verilənlər kifayətdir. Səkkiz hakimdən ibarət məhkəmədə müttəhimin mühakimə olunması üçün beş səs kifayət edərdi, qərarın düzgün olmasında mümkün ola bilən səhvin ehtimalı $1/4$ -dən artıq olardı. Əgər məhkəmənin tərkibi altı üzvdən ibarət olarsa, bunlar isə yalnız dörd səs çoxluğu ilə mühakimə edə bilərdilərsə, mümkün ola bilən səhvin ehtimalı $1/4$ -dən az olardı; deməli, müttəhim üçün məhkəmə üzvlərinin sayının azaldılması əlverişli olardı. Hər iki halda tələb olunan artıq səs eyni olub, ikiyə bərabərdir. Beləliklə, sabit qalan artıq səs hallarında səhvetmə ehtimalı hakimlərin sayı artdıqca artır: tələb olunan artıq səs, əgər eyni olarsa, bu səs çoxluğunun neçə olmasından asılı olmur. Əgər arifmetik nisbətə bir qayda kimi baxılırsa, onda müttəhim məhkəmə tərkibində üzvlərin sayı çoxaldıqca, getdikcə daha az əlverişli vəziyyətdə olacaqdır. Belə fikirləşmək olardı ki, hakimlərin sayı ixtiyari olduqda, on iki səsdən çoxunun tələb olunduğu məhkəmədə azlığın səsləri çoxluğun bu sayda səslərini neytrallaşıdır, İngiltərədə müttəhimin cəzalandırılması üçün zəruri olan qalan on iki səs on iki nəfərdən ibarət məhkəmə iclasçılarının ibarət məhkəmə üzvlərinin həmrəy olduğunu göstərmiş olardı; lakin bu böyük səhv olardı: sağlam düşüncə bizə onu göstərir ki, iki yüz on iki hakimdən ibarət məhkəmənin qərarına görə onlardan yüz on iki nəfəri müttəhimə günahkar bilərsə, yüz nəfəri ona haqq qazandırsaydı, bu məhkəmənin qərarı ilə on iki hakimdən ibarət, cəzalandırmaq qərarında həmrəy olan məhkəmə qərarı arasında fərq vardır. Birinci halda müttəhim üçün əlverişli olan yüz səs, bizə belə düşünməyə haqq verir ki, dəlillər hələ o dərəcədə deyildir ki, qərar üçün əminlik doğursun; ikinci halda hakimlərin həmrəyliyi onların bu dərəcəyə çatdıqlarına bizə inanmağa əsas verə bilər. Lakin bu iki halda səhv ehtimalının son fərqi qiymətləndirmək üçün yalnız sağlam düşüncə heç də kifayət etmir; onda hesablama aparmaq olar və nəticədə, birinci halda səhv ehtimalı üçün təqribən beşdə bir, ikinci halda bu ehtimal üçün yalnız $1/8192$ qiyməti alınacaqdır ki, ikinci haldakı ehtimal birincinin mində birinə belə bərabər deyildir. Bu belə bir prinsipi təsdiq edir: hakimlərin sayı artırıldıqda müttəhim üçün arifmetik nisbət əlverişli deyildir. Əksinə, bir

qayda kimi həndəsi nisbət götürərsə, hakimlərin sayı artdıqca, qərarın səhv olması ehtimalı azalır. Məs., yalnız səslərin üçdə ikisinin əksəriyyəti ilə cəza verildiyi məhkəmələrdə mümkün ola bilən səhvin ehtimalı hakimlərin sayı altı olduqda təqribən dördə birə bərabərdir; əgər hakimlərin sayı on ikiyə çatarsa, bu ehtimal $1/7$ -dən az olur. Beləliklə, əgər biz səhv ehtimalının heç bir halda müəyyən kəsrdən nə yuxarı, nə aşağı olmasını istəmiriksə, nə arifmetik, nə həndəsi nisbət-lərdən istifadə etməməliyik.

Onda hansı kəsri götürməli? Məhz bu halda özbaşnalıq başlanır və məhkəmə müəssisələri bu mənada çox müxtəlifliklə fərqlənirlər. Müttəhimin cəzalandırılması üçün səkkiz səsdən beşinin yetərli olduğu xüsusi məhkəmələrdə (tribunaux spéciaux), hökmün yumşaq olmasına görə qorxu ola bilərsə, səhv ehtimalı $65/256$ -ya bərabərdir və ya $1/4$ -dən çoxdur. Bu kəsirin qiyməti dəhşət doğurur: buna baxmayaraq, bir tərəfdən belə bir mülahizə adamı onunla razılaşdırır ki, hakim çox hallarda təqsirkara bəraət qazandırarkən, ona günahsız kimi baxmır: o, yalnız onun mühakimə olunması üçün onun əleyhinə kifayət qədər dəlil olmadığını elan edir. Xüsusilə də, adamı sakitləşdirən odur ki, burada mərhəmət hissi özünü göstərir, bu isə təbiətin insan qəlbinə verdiyi bir hissdir və insan əqli bu hissənin təsiri ilə müttəhimin məhkəməsində onun təqsirkar olduğunu yalnız çətinliklə görə bilər. Bu hiss, cinayət qərarları vermək sərişəsi olmayan kəslərdə daha canlı olur, məhkəmə iclasçı-larının sərişəsizliyi ilə əlaqədar nöqsanları əvəzləyir. Cəza verilməsi üçün əksəriyyəti səkkiz səs tələb olunan, on iki nəfərdən ibarət məhkə-mə iclasçısı olan məhkəmədə səhv etmə şübhəsi olduqda, səhvin ehti-malı $1093/8192$ -ə bərabərdir və ya səkkizdə birdən bir az çoxdur; əgər əksəriyyət doqquz səsdən ibarət olarsa, bu ehtimal təqribən $1/22$ -ə bəra-bərdir. Qərarda hamı həmrəy olduqda mümkün ola bilən səhv ehtimalı $1/8192$ -ə bərabərdir, yəni bu ehtimal bizim məhkəmə iclasçılarından ibarət məhkəmələrindekindən min dəfədən də az olur. Burada fərz olu-nur ki, hamının həmrəyliyi ilə verilən qərar yalnız müttəhim üçün əlve-rişli və ya əlverişsiz dəlil-sübutlar nəticəsində verilir; lakin məhkəmə iclasçıların apardığı məhkəmədə bu qərarın verilməsi hökm üçün zə-ruri şərt kimi qoyulduqda, tamamilə kənar motivlər bu qərarın verilmə-sinə səbəb ola bilər. Onda iclasçıların temperamentindən, xasiyyətin-dən və vərdişlərindən asılı olan bu qərarlar, bəzən, yalnız dəlil-sübutlara əsaslanan iclasçılar əksəriyyətinin qəbul etdiyi qərarlara zidd olur; mən-cə, bu üsulla mühakimənin böyük çatışmazlığı bununla əlaqədardır.

Bizim məhkəmə iclasçılarımızdan ibarət məhkəmələrdə qərarların ehtimalı olduqca zəifdir, mənim fikrimcə, günahsızlığı kifayət qədər qorumaq üçün, heç olmasa on iki səsə doqquzu səs çoxluğu kimi tələb olunmalıdır.

Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər

Ölüm cədvəllərini tərtib etmək qaydası olduqca sadədir. Vətəndaş aktlarından doğumu və ölümü göstərilən adamların çox saydası götürülür. Bunlar arasında ömrünün birinci ilində, ikinci ilində və s. ölənlərin sayı təyin olunur. Hər ilin əvvəlində sağ qalmış şəxslərin sayı əvvəlkinə əsasən təyin olunur və bu ədəd cədvəldə il yazılmış ədədlə yanaşı yazılır. Beləliklə, sıfırla yanaşı doğum sayını göstərən ədəd, 1-ci il ilə yanaşı bir yaşı tamam olmuş uşaqların sayı yazılır; 2-ci il ilə yanaşı iki yaşı tamam olan uşaqların sayı yazılır və s. Uşaqların həyatının ilk iki ili ərzində ölüm halları olduqca çox olduğundan, bu ilk yaşlarda hər yarımilliyyin sonunda sağ qalan uşaqların sayı böyük dəqiqlik üçün göstərilməlidir.

Ölüm cədvəlində yazılan bütün bu şəxslərin yaşadıkları ömürlərin cəmini, bu şəxslərin sayına böldükdə, bu cədvələ uyğun olaraq, orta ömür müddəti alınır. Buna görə də, 0 və 1-ci illərlə yanaşı yazılmış şəxslərin saylarının fərqi bərabər olan ədədi — ilk bir il ərzində ölənlərin sayını yarım ilə vurmaq lazımdır: çünki, onların ölüm hal-ları bütün il üçün paylanmalı idi, onda onların orta ömür müddəti yalnız yarım ildir. İkinci il müddətində ölənlərin sayı il yarımə vurul-malı, üçüncü il ərzində ölənlərin sayı iki il yarımə vurulmalıdır və s. Bu hasilərin cəmini doğum sayını göstərən ədədə böldükdə, orta ömür

müddəti alınacaqdır. Onda belə nəticə alınır ki, cədvəldə hər ilin qarşısında yazılmış ədədlərin cəmini taparaq, onu doğum sayına bölərək və alınmış nisbətdən onun yarısını çıxdıqda, bu orta ömür müddəti alınır; bu zaman bir il vahid kimi götürülür. Hər hansı yaşdan başlayaraq, qalan orta ömür müddəti də bu qayda ilə təyin olunur, bu isə bu yaş həddinə çatmış şəxslərin sayları üzərində, yuxarıda doğum saylarını göstərən ədədlər üzərində aparılan həmin əməliyyatların köməyiylə təyin olunur. Orta ömür müddəti anadan olduğu andan deyil, insan ilk uşaqlıq çağlarındakı təhlükələri adlandıqdan sonra çox olur və bu halda orta ömür müddəti təxminən qırx üç yaşa bərabərdir. Verilən yaş həddindən sonra hər hansı yaşa çatma ehtimalı – bu cədvəldə bu yaş həddindəki şəxslərin saylarını göstərən iki ədədin nisbətinə bərabərdir.

Bu nəticələrin dəqiqliyi üçün tələb olunur ki, cədvəllər tərtib olunarkən doğum saylarını göstərən ədədin olduqca böyük olması nəzərə tutulsun. Analiz bu halda bu cədvəllərdə göstərilmiş gerçək ədədlərdən yayımların çox sıx sərhədlər arasında olduğu ehtimalının qiymətləndirilməsi üçün çox sadə düsturlara gətirir. Bu düsturlardan aydın olur ki, doğum sayını göstərən ədəd daha böyük olduqca bu sərhədlər arasında məsafə azalır, ehtimal isə artır; odur ki, əgər hesaba alınan doğum saylarını göstərən ədəd sonsuz olsaydı, onda cədvəllər əsl ölüm qanununu dəqiq ifadə etmiş olardı.

Deməli, ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimal cədvəlidir. Hər bir ilin qarşısında yazılan şəxslər sayının doğum sayını göstərən ədədə nisbəti yeni doğulmuş uşağın bu ilə qədər yaşadığı ehtimalını ifadə edir. Gözləmənin ədədi qiyməti hər bir gözlənilən faydanın bu faydanın alınması ehtimalına hasilərinin cəmlərinin alınması vasitəsilə alındığı kimi, orta ömür müddətini də hər bir iləki ilin əvvəlindən sonuna qədər yaşamaq ehtimalları cəmlərinin yarısına hasilərin cəmlənilməsi yolu ilə almaq olar, bu isə əvvəl tapdığımız nəticəyə gətirir. Lakin orta ömür müddətinə belə yanaşmanın belə bir üstünlüyü vardır ki, əhalinin sayı sabit qaldıqda, yəni doğum halları sayı ölüm halları sayına bərabər olduqda, orta ömür müddəti, məhz əhalinin sayının illik doğum sayına nisbətidir; belə ki, əhali sayı sabit qalarsa, cədvəlin iki ardıcıl ili arasındakı yaşa malik şəxslərin sayı illik doğum sayının bu yaş həddinə qədər yaşama ehtimallarının cəminin yarısına hasilinə bərabərdir. Bütün bu hasilərin cəmi bütün bu əhalinin sayı olacaqdır. Lakin asanlıqla inanmaq olar ki, illik doğum sayına bölünmüş bu cəm, orta yaşama müddəti ilə üst-üstə düşür; bu, bizim tərifimizlə də belədir.

Ölüm cədvəlinin köməyiylə, sabit fərz olunan əhali sayı üçün də uyğun cədvəli asanlıqla tərtib etmək olur. Buna görə sıfır və bir yaş, bir və iki yaş, iki və üç yaş və s.-yə uyğun ölüm cədvəlindəki ədədlərin ədədi ortası götürülür. Bütün ədədi ortaların cəmi, məhz, bütün əhalinin sayıdır; bu ədəd sıfır yaşı ilə yanaşı yazılır. Bu cəmdən birinci ədədi orta çıxılır, alınan qalıq bir yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; alınan bu ədəd 1 yaş ilə yanaşı yazılır. Bu birinci qalıqdan ikinci ədədi orta çıxılır; bu ikinci qalıq iki yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; o, 2 yaş ilə yanaşı yazılır və s.

Ölüm hallarına təsir edən qeyri-sabit o qədər səbəblər olur ki, ölüm cədvəlləri yerinə və zamanına görə tərtib olunmalıdır. Bu cəhətdən həyatın müxtəlif vəziyyətləri, hər bir vəziyyətlə ayrılmaz olan təhlükələr və çətinliklərə görə olduqca fərqli olurlar, bu yaşama müddəti üçün hesablamalarda hökmən nəzərə alınmalıdır; lakin bu fərqlər kifayət qədər araşdırılmamışdır; nə vaxtsa bu olunacaqdır: o vaxt ki, hər bir ixtisasın insan həyatından hansı qurbanı verməsinin tələb olunması məlum olsun, onda təhlükələrin azaldılması üçün bu bilikdən istifadə olunacaqdır.

Çox və ya az dərəcədə sağlam torpaq, ərazinin hündürlüyü, onun temperaturu, sakinlərin xasiyyətləri və dövlətin tədbirləri ölüm hallarına böyük təsir göstərir; müşahidə olunan fərqlərin səbəbinin axtarılmasından əvvəl bu səbəbin hansı ehtimalla ola biləcəyini təyin etmək lazımdır. Məs., müşahidələrə görə, Fransada iyirmi səkkiz tam üçdə bir qədər artmış illik doğum sayı əhalinin sayına nisbətdə, əvvəlki Milan hersoqluğunda heç iyirmi beşə belə çatmır. Doğum saylarının böyük qiymətləri əsasında təyin olunmuş hər iki nisbət Milanda ölüm hallarının xüsusi bir səbəbinin varlığına şübhə doğurmur və bu səbəbi bu ölkənin dövləti axtarmalı və aradan qaldırmalıdır.

Bəzi təhlükəli və çox yayılmış xəstəliklərin qarşısını nisbətən almaq və ya onları aradan qaldırmaq mümkün olarsa, əhali sayının doğum sayına nisbəti daha artmış olardı. Çiçək xəstəliyi ilə əlaqədar bu alındı və bu zaman bu xəstəliyin peyvənd olunması sayəsində, daha sonra bunu daha uğurlu üsul – vaksinin peyvəndi üsulu ilə almaq mümkün oldu, bu üsul Cennerin əvəzolunmaz ixtirası olub, onu insanların sağlamlığına töhfələrdən biri etdi.

Çiçək xəstəliyinin xüsusiyyətlərindən biri odur ki, eyni bir adam bu xəstəliyə ikinci dəfə tutulmur və bu hallar nadir olduğundan, onları nəzərə almamaq olar. Vaksininin kəşfinə qədər bir çoxları ondan qorunmağa çalışsalar da, bu xəstəlik ölümlə nəticələnir və ona tutulmuş xəstələrdən təqribən hər yeddi nəfərdən biri məhv olur. Bəzən bu xəstəlik yüngül formada da keçir və təcrübə göstərmişdir ki, sağlam adamları peyvənd etmək yolu ilə (ilin əlverişli bir mövsümündə, yaxşı rejimlə hazırlanmış şəxslərə) bu xəstəliyin yüngül formada keçməsinə təmin etmək olar. Onda bu xəstəlikdən ölənlərin sayının peyvənd olunanların sayına nisbəti hətta üç yüzdə birə belə çatmır. Peyvəndin üstün olan bu xüsusiyyəti və onun xarici görkəmi dəyişməməsi, onun natural çiçəyin fəsadları olan xoşagəlməz nəticələrinin olmaması, bir çoxlarını onu qəbul etmək məcburiyyətində qoydu. Onun tətbiqi olduqca tövsiyə olunurdu; narahatlıq yaranan hər bir şeylə olduğu kimi, bu tövsiyəyə də qızgın tənqidlərə məruz qaldı. Bu mübahisədə Daniil Bernulli peyvəndin orta yaşama müddətinə təsirinin ehtimalını hesablamağı qarşısına məqsəd kimi qoymuşdu. Müxtəlif yaş hədlərində çiçəkdən ölənlərin sayı haqqında məlumatı olmadığından, o fərz etmişdi ki, bu xəstəliyə tutulmaq təhlükəsi və ondan ölmək bütün yaş hədləri üçün eynidir. Bu fərziyyələrin köməyi və incə analiz yolu ilə o, adi ölüm cədvəlini elə cədvəllər şəklində sala bildi ki, əgər çiçək xəstəliyi mövcud olmasaydı və ya olduqca az saylı xəstələr üçün ölümə nəticələnən olsaydı, bu cədvəllər yaranı bilərdi; o, belə nəticəyə gəldi ki, çiçəyə qarşı peyvənd aparılması orta ömür müddətini heç olmasa üç ilə qədər uzatmış olardı və ona belə gəlirdi ki, belə tədbirin görülməsinin faydalı olduğuna heç bir şübhə yeri qalmır. Dəlil Bernullinin bu analizinə qarşı çıxırdı, birincisi bu iki hipotezin doğru olmadığına görə, ikincisi onun kifayət qədər yetərli olmamasına görə, belə ki, bu analizdə gələcəkdə baş verə biləcək təhlükə ilə müqayisə nəzərə alınmırdı, peyvənd nəticəsində baş verə biləcək ölüm təhlükəsi çox böyük olmasa da, onun natural çiçəkdən baş verə biləcək daha böyük ölüm təhlükəsi ilə müqayisəsi nəzərə alınmırdı. Bu mülahizə adamların sayı çox olduqda nəzərdən qaçdığına görə, dövlətlər üçün əhəmiyyətsiz olur və onlar üçün peyvəndetmənin faydalı olduğu fikri qüvvədə qalır; lakin bu mülahizə ailə başçısı üçün mühümdür, o, öz övladlarını peyvənd etdirərkən qorxmalıdır ki, o, tez bir zamanda onun üçün həyatın ən qiymətli övladının ölümünü görə bilər və bu ölümün səbəbkarı olmuş olar. Bir çox valideynlər bu qorxu hissəsinə görə peyvəndetmədən çəkinirdilər, lakin xoşbəxtlikdən vaksininin kəşfi bu qorxunu aradan qaldırdı. Bu təbiətin bizə bəxş etdiyi bir çox sirlərdən biridir; vaksina da arı zəhəri kimi qoruyucu bir vasitədir; bundan başqa, onun heç bir təhlükəsi yoxdur, heç bir xəstəlik törətmir və çox az qayğı tələb edir; buna görə də, o, tezliklə geniş surətdə yayıldı və onun, ümumiyyətlə, qəbul olunması üçün yalnız xalqın onu təbii surətdə qəbul etməsinə nail olunmalıdır ki, bu da daima diqqət mərkəzində olmalıdır, hətta o hallarda da ki, o, xalqın ən ümdə maraqlarına belə aid olsun.

Hər hansı bir xəstəliyin yox edilməsi nəticəsində alınan mənfəətin hesablanmasının ən sadə üsulu ondan ibarətdir ki, müşahidələr yolu ilə məlum yaş həddi bu xəstəlikdən ölənlərin sayını təyin edib, alınan bu ədədi bu yaşda ölənlərin bütün adamların sayından çıxmaq lazımdır. Bu fərqi verilən yaşdakı bütün adamların sayına nisbət, əgər bu xəstəlik olmasaydı, bir il ərzində bu yaşda ölənlərin adamların ehtimalı olardı. Deməli, anadan olan gündən müəyyən yaş həddinə qədər belə hesablanmış ehtimalların cəmini hesablayıb, bu cəmi vahiddən çıxdıqda, alınmış fərq, bu xəstəlik yox edildikdə, bu yaş həddinə qədər yaşamağın ehtimalı olacaqdır. Bu hipotezə görə hesablanmış belə ehtimallar sırası ölüm cədvəli olacaqdır və bu cədvələ görə, əvvəlkinə əsasən, orta yaşama müddətini təyin etmək olur. Dyuvilə bu üsulla təyin etdi ki, vaksininin peyvənd olunması nəticəsində orta ömür müddəti heç olmasa üç il artıq olur. Bu dərəcədə mühüm artım əhalinin olduqca böyük artımına səbəb olardı, əgər, digər tərəfdən, bu artım yaşamaq imkanlarının uyğun azalması ilə məhdudlaşmasaydı.

Yaşamaq imkanlarının çatışmazlığı əsas etibarilə əhalinin artım hərəkətini gecikdirir. Heyvanların və bitkilərin bütün növlərində təbiət fərdlərin sayını o vaxta qədər artırmağa çalışır ki, bu say yaşamaq imkanları səviyyəsində olsun; insan nəslində mədəni səbəblər əhaliyə çox təsir göstərir. Əgər torpaq onun asan becərilməsi sayəsində yeni nəsilə çoxlu qida məhsulları ilə təmin edərsə, çoxuşaq ailləri təchiz etmək inamı nigahları dəstəkləyir və onların daha erkən və çoxuşaq olmasını alqışlayır. Belə yanaşmada əhalinin və doğumların sayının hər ikisi həndəsi silsilə kimi artmalıdır. Lakin torpağın şumlanması daha çətin və nadir hallarda aparıldıqda, əhalinin artımı azalır: bu artım yaşamaq imkanlarının dəyişkən vəziyyətinə onun ətrafında dəyişərək, aramsız surətdə yaxınlaşır; bu rəqəsin rəqsinə bənzəyir, onu yavaş təsirlə hərəkətə gətirdikdən sonra o, asıldığı nöqtə ətrafında öz ağırlığının təsiri ilə rəqs edir. Əhalinin artımının *maximumunu* təyin etmək çətinidir. Bəzi müşahidələrə görə insan nəslə, belə görünür ki, əlverişli şəraitdə hər on beş ildə iki dəfə arta bilərdi. Fərz olunur ki, Şimali Amerikada belə iki dəfə artma dövrü iyirmi iki ilə bərabərdir. Belə vəziyyətdə əhali, doğumlar, nigahlar, ölüm – hamısı həndəsi silsilə kimi artır, bu halda ard-ardınca gələn hədlərin sabit nisbəti iki dövr ərzində illik doğumlar üzərində müşahidələrdən alınır.

Ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimalını göstərdiyindən bu cədvəlin köməyi ilə nigahların nə qədər davam etməsini təyin etmək olur. Sadəlik üçün fərz edək ki, ölüm hər iki cins üçün eynidir; əgər biz elə kəslər siyahısını tərtib etsək ki, onların ümumi məxrəci ailə qurmuş şəxslərin yaşlarına uyğun cədvəlin iki ədədinin hasilini, surəti isə bu yaşlara uyğun bir il, iki, üç və s. il artırılmış ədədlərin ardıcıl hasilini olsun, onda bu nigahların bir il, iki il, üç il və s. davam edəcəyi ehtimalını alırıq. Əgər bir il vahid kimi götürülsə, bu kəslərin cəmlərini bu cəmlərin yarısı qədər artırıqda, alınmış ədəd nigahın orta davam müddəti olacaqdır. Bu qaydanı üç və ya daha çox nəfərdən ibarət birliyə tətbiq etdikdə, bu birliyin orta davam müddətini də təyin etmək olur.

Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasnda verilən mənfəətlər haqqında

Biz burada gözləmə haqqında dediklərimizi xatırlayaq. Biz gördük ki, bir neçə – bəzilərinin mənfəət, digərlərinin ziyan gətirdikləri bir neçə sadə hadisə səbəbindən mənfəət alınması üçün, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalının onun gətirdiyi gəlirə hasillərini toplayıb, bu cəmdən hər bir əlverişsiz hadisənin ehtimalının bu hadisə ilə bağlı ziyan hasillərinin cəmini çıxmaq lazımdır. Bu cəmlərin fərqləri ilə ifadə olunan gəlirin necə olmasından asılı olmayaraq, bu sadə hadisələrdən ibarət bir mürəkkəb hadisə hələ əsl ziyan qorxusunu aradan qaldırmır. Aydın ki, bu mürəkkəb hadisə təkrarlandıqda bu qorxu hissi də azalmalıdır. Ehtimalların analizindən aşağıdakı ümumi teoremlər alınır.

Mənfəət gətirən sadə və ya mürəkkəb hadisənin təkrar olunmasından əsl mənfəət gətirdikcə daha çox ehtimallı olur və aramsız olaraq artır; təkrarlanmalar sayının sonsuz olması fərz olunduqda, bu mənfəət gerçəkləşir; bu mənfəəti təkrarlanmalar sayına böldükdə, nisbət və ya hər bir hadisənin orta mənfəətini alırıq, bu isə riyazi gözləmə və ya bu hadisəyə müvafiq mənfəət olacaqdır. Əgər hadisə əlverişsiz olarsa, ziyan halı üçün də belə olur, bu ziyan da get-gedə yaqınlıya çevrilir.

Mənfəət və ziyanlar haqqında bu teoremlər sadə və ya mürəkkəb hadisələrin qeyri-müəyyən surətdə təkrarlanmasında meydana çıxan nisbətlər haqqında bizim əvvəldə verdiyimiz teoremlərə analojidir; və bu teoremlərdə olduğu kimi bu teoremlər də isbat edir ki, düzgünlük sonda həttə *təsadiף* adlandırdığımız ən çox təbii olunan şeylərdə də özünü göstərir.

Analiz gerçək mənfəətin müəyyən sərhədlər arasında olması ehtimalı üçün daha bir olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə ehtimallar haqqında ümumi qanuna daxildir, bu qanun isə hadisələr sayının qeyri-müəyyən surətdə artırılmasından alınan ehtimallar haqqında biz danışarkən, bizim tərəfimizdən yuxarıda verilmişdir.

Ehtimallara əsaslanan müəssisələrin davamlılığı, bundan əvvəlki teoremin doğruluğundan asılıdır. Bu ehtimalları bu müəssisələrə tətbiq etmək üçün onlar müəssisələrin sayını artırmaqla əlverişli hadisələri çoxaltmalıdırlar.

İnsan həyatına aid ehtimallar əsasında müxtəlif təsisatlar qurulmuşdur, məs., ömürlük rentalar və tontinlər belə təsisatlardandır.

Bu təsisatların mənfəət və məsrəflərinin ən ümumi və ən sadə hesablanması metodu – onları kapitalların müasir dəyərinə müvafiqləşdirməkdən ibarətdir. Vahidin illik artımı – *faiz məzənnəsi* adlandırılan kəmiyyətdir. Hər ilin sonuna hər bir kapital (vahid plus faiz məzənnəsi) qədər vuruğa malik olur; bu kapital, deməli, həndəsi silsilə şəklində artır, bu nisbətdə məxrəc həmin bu vuruğa bərabər olur. Əgər, məs., faiz məzənnəsi $1/20$ -ə və ya yüzdə beşə bərabər olarsa, onda kapital təxminən on dörd ildən sonra iki dəfə, 29 ildən sonra dörd dəfə artır və üç yüz ildən sonra o, iki million dəfə artır.

Belə heyvətamiz artım onu dövlət borcunun ödənilməsi üçün istifadə etmək fikrini yaratdı. Əgər ilk ödəmə fondu faizlərlə birlikdə daima yaradılaraq, ictimai müəssisələrə yerləşdirilsə, xüsusilə də, endirilmə anlarında və əgər dövlətin ehtiyacları üçün borc tələb olunduğu hallarda, onun bir hissəsi isə ödəmə fondunun artırılması üçün verilsə, onda aydındır ki, bu əməliyyat bu fondun artması və kreditin və ictimai müəssisələrə dəstək olmaq üçün ikiqat mənfəət əldə edəcək və ödəmə xəzinəsi zaman ötdükcə dövlət borcunun böyük bir hissəsini ödəyəcək. Uğurlu təcrübələr bu mənfəəti tamamilə təsdiq etdi. Lakin belə müəssisələrin uğurları üçün olduqca zəruri olan öhdəçiliklərdə dürüstlüyə və möhkəmliyə, yalnız, qanuni hakimiyyəti bir neçə, bir-birindən asılı olmayan hakimiyyətlərə bölünmüş dövlət tərəfindən tamamilə zəmanət verilə bilər. Bu hakimiyyətlərin qaçılmaz vəzifələrinin doğruluğu etibar, dövlətin əzəmətinə ikiqat artırır və dövlət başçısı qanuni hakimiyyətdən, öz hakimiyyətliliklə müqayisədə itirdiyindən, daha çox qazanmış olur.

Əvvəlkilərdən belə nəticə alınır ki, yalnız məlum qədər illər keçdikdən sonra, ödənilən miqdara bərabər kapitalın müasir dəyəri – bu miqdarın bu müddət ərzində ödənilməsi ehtimalına hasilinin ($1 + \text{faiz məzənnəsi}$)-nin bu illərin sayına bərabər qüvvət üstünə nisbətinə bərabərdir.

Bu prinsipi bir və ya bir neçə şəxs üçün ömürlük rentalara, əmanət xəzinələri və hər növ sığortalara da tətbiq etmək olur. Fərz edək ki, verilən ölüm cədvəli üzrə biz ömürlük renta cədvəli tərtib etmək istəyirik. Beş il keçdikdən sonra ödəniləcək ömürlük renta, məs., həm də müasir dəyərlərlə hesablanılacaq renta, bu prinsipə görə aşağıdakı iki kəmiyyətin hasilinə, məhz: rentanın ($1 + \text{faiz məzənnəsi}$)-nin beşinci dərəcə qüvvət üstünə nisbəti ilə bu faiz məzənnəsinin ödənilməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir. Faiz məzənnəsinin ödənilmə ehtimalı – renta təyin ediləcək şəxsin beş il artıq götürülmüş yaşı qarşısında cədvəldəki şəxslər sayının tərs nisbətinə bərabərdir. Məxrəcləri – renta təyin olunacaq şəxs yaşındakı və hələ həyatda olan şəxslərin ölüm cədvəlində göstərilən şəxslər sayının ardıcıl götürülən qüvvət üstü ($1 + \text{faiz məzənnəsi}$)-nə hasillərinə, surətləri – rentanın həmin yaşdakı və ardıcıl olaraq bir yaş, iki yaş və s., artıq götürülmüş hələ sağ olan şəxslər sayına hasillərinə bərabər kəslər sırası tərtib edərək, bu kəslərin cəmi ilə ifadə olunan, bu yaşda ömürlük renta üçün tələb olunan kapitalı alırıq.

Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs, ömürlük renta vasitəsilə öz varislərini onun öldüyü ilin sonunda ödəniləcək kapitala təmin olunmasını arzu edir. Bu rentanın miqdarını təyin etmək üçün, belə fərz etmək olur ki, bu şəxs hər hansı bir xəzinədən ($1 + \text{faiz məzənnəsi}$)-nə bölünmüş kapitalı ömürlük borc götürür və onu həmin xəzinəyə daimi faizlərlə yerləşdirir. Aydın ki, bu kapital bu xəzinənin bu şəxsin varislərinə onun öldüyü ilin sonunda ödəyəcəyi borcu alacaqdır; lakin xəzinə hər il yalnız ömürlük faizlərin daimi faizlərdən qalan artıq hissələri ödəyirdi. Ömürlük renta cədvəllərində bu şəxsin hər il nə qədər ödəməsi göstərilir və bu da onun ölmündən sonra bu kapitalın xəzinədə olmasını təmin edir.

Dəniz sığortaları, yanğınlardan və fırtınalardan sığortalar və ümumiyyətlə, bu növ sığortalar həmin prinsiplərə əsasən hesablanır. Tacirin dənizdə gəmiləri vardır və o, bunların dəyərini və bu gəmilərdəki yüklərin dəyərini onların məruz qala biləcəkləri təhlükələrdən qorunmaq üçün sığortalamaq istəyir; bu məqsədlə o, hər hansı cəmiyyətə – onun gəmiləri və yükünün dəyərinə görə qiymətə müvafiq cavabdeh cəmiyyətə məlum məbləği ödəyir. Gəmilər və yükün bu dəyərinin sığorta müqafatı kimi ödəniləcək ödəniş miqdarına nisbəti gəmilərin məruz qaldıqları təhlükələrdən asılıdır və bu ödəniş miqdarı portdan yola düşən həmin

marşrutla hərəkət edən gəmilərin taleyi ilə bağlı çoxsaylı müşahidələr vasitəsilə və yalnız bu yolla qiymətləndirilə bilər.

Əgər sığortalanmış şəxslər sığorta cəmiyyətinə yalnız ehtimalların hesablanmasıdan alınan məbləği ödəsəydilər, onda bu cəmiyyət onun müəssisəsi ilə bağlı xərclərin öhdəsindən gələ bilməzdi, buna görə də, onların daha yüksək sığorta mükafatı vermələri zəruridir. Belə olan halda onların mənfəəti nədədir? Burada qeyri-müəyyənliklə bağlı mənəvi mənfəətsizliyə baxmaq zəruriliyi yaranır. Aydındır ki, ən ədalətli oyun mənfəətsiz olursa, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, oyunçu oyuna qoyduğu etibarlı sayılan məbləği etibarsız uduşa dəyişdiyi üçün etibarsızlığı etibarlılığa dəyişdirilən sığorta mənfəətli olmalıdır. Bu isə, həqiqətən də, mənəvi gözləmənin tərif üçün bizim yuxarıda verdiyimiz qaydadan bir nəticə kimi alınır, bundan əlavə görünür ki, mənəvi gözləmənin sığorta cəmiyyətinə verə biləcəyi qurban, mənəvi mənfəəti qorumağa davam etməklə nə qədər uzana bilər. Deməli, bu mənfəəti təmin edərək və özü də böyük gəlir əldə edərək, cəmiyyət bunu həyata keçirə bilər, bu şərtlə ki, cəmiyyətin yaşamasının möhkəmliyi üçün zəruri şərt – sığortalanmış şəxslərin sayı olduqca çox olsun. Bu halda cəmiyyətin mənfəəti yaqın olur, riyazi gözləmə isə mənəvi gözləmə ilə üst-üstə düşür; belə ki, analizdən aşağıdakı ümumi teorem alınır: əgər gözlənilən faydaların sayı olduqca çox olarsa, onda hər iki gözləmə daima bir-birinə yaxınlaşır və nəhayət, bu faydaların sayı sonsuz böyük olduqda onlar üst-üstə düşür.

Riyazi və mənəvi gözləmələrdən danışdıqda, biz fərz etmişdik ki, gözlənilən mənfəət riskinin ayrı-ayrı hissələrə paylaşdırılmasında mənəvi mənfəət vardır. Məs., hər hansı uzaq bir portdan müəyyən bir məbləği keçirmək üçün onu bir gəmiyə yerləşdirməkdənsə, bir neçə gəmi arasında paylaşdırmaq daha yaxşıdır. Buna isə qarşılıqlı sığortanın köməyi ilə nail olunur. Əgər iki müxtəlif gəmidə eyni bir portdan çıxmış, eyni bir yerə yollanmış eyni məbləğə malik iki şəxs, onların alacaqları bütün pulları bərabər bölməyə razı olarlarsa, onda aydındır ki, bu razılaşmaya görə bu şəxslərdən hər biri onların gözlədikləri məbləği hər iki gəmi üçün bərabər paylaşıdır. Lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu növ sığorta hələ də hansı itkinin ola biləcəyi barədə suala cavab verməmişdir. Lakin bu məlumatlılıq ən az iştirakçıların sayının artması ilə əlaqədar olaraq azalır: mənəvi qazanc get-gedə artaraq, nəhayət, özünün təbii sərhədi – riyazi mənfəətlə üst-üstə düşür. Bunun sayəsində qarşılıqlı sığorta şirkətləri çox sayda şəxsədən ibarət olduqda, bu şirkətlər sığortaçılar üçün mənəvi mənfəətdən aldıkları gəlir riyazi gözləmədən həmişə az olan sığorta şirkətlərindən daha əlverişli olur. Bütün bu nəticələr, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, mənəvi mənfəəti ifadə edən qanundan asılı deyildirlər.

Azad bir xalqa, üzvləri öz əmlakları üçün qarşılıqlı öhdəçiliklər götürən, bu öhdəçiliklər üzrə mütənəib xərclər çəkən böyük bir qurumlar kimi baxmaq olar. Bir neçə xalqın konfederasiyası bu xalqlardan hər birinə, cəmiyyətdə yaşayan hər bir insanın ala bildiyi dəyərlər kimi dəyərlər verərdi. Onların nümayəndələrindən ibarət konqress hamı üçün eyni dərəcədə mühüm məsələləri müzakirə edə bilərdi, onda fransız alimlərinin təklif etdikləri çəki, ölçü və pul vahidləri sistemi şübhəsiz ki, bu konqress tərəfindən kommersiya münasibətlərində təklif olunmuş tədbirlərdən ən səmərəlisi kimi qəbul olundarı.

İnsan həyatına aid ehtimallara əsaslanan müəssisələrdən ən yaxşısı – öz ehtiyacları üçün vəsaitin çatmayacağı qorxusu olduğu müddət ərzində öz gəlirinin kiçik bir hissəsini istifadə edərək, özü və öz ailəsini təmin edə bilən müəssisələr hesab olunur. Oyun nə dərəcədə mənəviyyatsız olarsa, bu müəssisələr mənəviyyatı o dərəcədə yaxşılaşdırır, ən zəif təbii vərdişlərə əlverişli mühit yaradır. Buna görə də, dövlət bu müəssisələri dəstəkləməlidir və ictimai nailiyyətlərdəki yanlışlıqlara göz gələcəyə aid olduğundan, onların möhkəmliyi yalnız hansısa təhlükədən qorunduqları halda inkişaf edə bilər. Təmsilədiçi idarənin üstün cəhətlərindən biri ondan ibarətdir ki, o, bu zamanəti verir.

İstiqrazlar haqqında bir neçə söz deyək. Aydındır ki, daimi istiqraz üçün hər il kapitalın faiz məzənnəsi hasilinə bərabər məbləğ ödənilməlidir. Lakin bu kapitalı müəyyən illər ərzində bərabər miqdar məbləğlə ödəmək olar, – bu ödəmələr annuitetlər adlanır və

onların miqdarı belə alınır: hər bir annuiteti hazırkı vəziyyətə gətirmək üçün qüvvət üstü bu annuitetin ödənilməsi üçün keçən illərin sayına bərabər (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünməlidir. Birinci həddi (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet, sonuncu həddi isə qüvvət üstü bu annuitetin ödənilməsi üçün keçən illərin sayı bərabər (1 + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet olan həndəsi silsiləni quraraq, bu silsilə cəminin borc alınmış kapitala bərabər olduğunu almış olur. Əgər ömürlük istiqraz arzu olunarsa, onda görmək çətin deyildir ki, sadə uyğunluq onu göstərəcəkdir ki, kapital borc götürülən şəxsə nə qədər rentə ödənilməlidir, bu halda nəzərə alınmalıdır ki, ömürlük rentə cədvəllərində ixtiyari yaş həddinə uyğun ömürlük rentanı təyin etmək üçün zəruri kapital göstərilmişdir. Bu prinsiplərin köməyi ilə istiqrazların bütün mümkün növlərini hesablamaq olur.

Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında

Əqlin görmə hissi kimi öz illüziyaları vardır; lamisə görmə hissində düzəliş etdiyi kimi, müləhizə və hesablama əqldə düzəlişlər edir. Gündəlik təcrübəyə əsaslanan və ya qorxu və ümidlə artan ehtimal bizi böyük, lakin hesablamamızın sadə nəticəsi olan ehtimaldan daha çox təəccübləndirir. Məs., biz, fransız lotereyasında qvın çıxması ehtimalından daha az ehtimallı təhlüklələrə öz həyatımızı məruz qoyaraq, cüzi mənfəət almaqdan heç də qorxmuruq; bunula belə, bu qvın çıxdığı halda həyatımızı itirmək əminliyi olduqda, heç bir kəs bu mənfəəti əldə etmək istəməzdi.

Bizim ehtiraslarımız, bizim xurafat və hökmran baxışlarımız bunlar üçün əlverişli ehtimalları artırır, əlverişli olmayan ehtimalları azaldaraq, təhlükəli illüziyaların çoxsaylı mənbələrini təşkil edir.

Əsl pislik və onu doğuran səbəb biza, əks olan səbəbin doğurduğu pislik barədə xatirələrdən daha güclü təsir edir; bu isə biza onun və ya o birisinin çatışmamazlıqlarını və bizi bunlardan qoruya biləcək vasitələrin ehtimalını ədalətlə qiymətləndirməkdə mane olur. Bu da növbə ilə despotizmə və anarxiyaya sürükləyir, düzgün vəziyyətdən çıxan xalqlar həmişə yalnız uzun və qəddar həyəcanlardan sonra yenə həmin vəziyyətə qayıdılar.

İştirak etdiyimiz hadisələrdə hiss etdiyimiz canlı təəssürat, başqalarının müşahidə etdikləri əks hadisələri görməkdən bizi yayındıraraq, bizim kifayət dərəcədə qoruna bilinmədiyimiz səhətmələrimizin əsas mənbələrindən biridir.

Oyunda əksər hallarda belə olur ki, illüziyalar ümid verir və bu ümidi əlverişsiz şanslar əleyhinə dəstəkləyir. Lotereyada iştirak edən insanların əksəriyyəti onların xeyrinə və əleyhinə nə qədər şans olduğunu bilmir. Onlar yalnız oyuna qoyduqları kiçik məbləğin böyük uduş gətirəcəyini, onların gözündə bu məbləği ala bilmə ehtimallarının çox olacağı kimi uşaq təxəyyülünün fərziyyələrini nəzərdə tuturlar: xüsusilə də, kasıb, daha yaxşı qismətə çatacağı həvəsi ilə, bu oyunun ona böyük mənfəət gətirəcəyi ümidilə ən əlverişsiz variantlardan belə yapışaraq, özü üçün zəruri olan hər şeyi təhlükəyə məruz qoyur. Şübhəsiz ki, əgər oyuna qoyulmuş olduqca böyük məbləğin udulduğunu bilsəydilər, onda bu hamını qorxudardı; lakin əksinə olaraq, uduşlar barədə daha çox məlumat verilərək, çox zəruri bu oyuna həvəsi artırmaq üçün səylər göstərilir.

Fransız lotereyasında hər hansı bir nömrə uzun müddət çıxmırsa, kütlə bu nömrəyə qoyulan məbləği artırır. Kütlə belə fikirləşir ki, uzun müddət çıxmayan nömrə digərlərindən daha çox şansla ən yaxın tirajda çıxmalıdır. Belə ümumi səhvə, mənəcə, illüziyalar nəticəsində yol verilir, bu səhv bizi hadisələrin başlanğıcına qaytarır. Məs., «*gerb və şəbəkə*» oyununda *gerb* üzünün on dəfə ardıcıl düşməsi çox az doğruyaoxşardır. Bu doğruyaoxşarolmamazlıq onuncu dəfə də *gerb* üzünün düşdüyü halda belə, bizi təəccübləndirsə də, bizi onuncu dəfə *şəbəkə* üzünün düşəcəyi fikrindən çəkəndirir. Lakin müşahidə göstərsə ki, *şəbəkə* üzünün düşməsindən çox *gerb* üzünün düşməsinə böyük meyillik vardır, onda bu, hadisələrdən ikincisinin daha çox ehtimalla baş verəcəyini göstərir: bu, biz gördüyümüz kimi, xaç üzünün növbəti dəfə düşməsi ehtimalını artırır. Belə illüziya çoxlarını belə nəticəyə gətirir ki, lotereyada çox güman ki, udumaq mümkündür, buna görə də, nömrənin çıxmasına qədər həmin nömrəyə oyuna qoyulan bütün məbləğlər cəmindən artıq məbləğ qoyulmalıdır. Lakin, əgər belə əlverişlər onların dəstəklənməsi qeyri-mümkün olduğuna görə davam etdiyindən, bunlar,

hər halda alverçilərin itkilərinin riyazi gözləməsini azaltmazdı və onların itkilərinin mədəvi gözləməsini artırmış olardı, çünki hər bir tirajda alverçilər hər dəfə öz varidatının böyük hissəsini oyuna qoymuş olardılar.

Mən görmüşəm ki, oğlu olmasını həddən artıq arzu edən şəxslər, ata olacağı ayda oğlan uşaqlarının doğulduğunu kədərlə qarşılayırdılar. Onların təsəvvürünə görə doğulan oğlan uşaqlarının sayının qız uşaqlarının sayına nisbəti ixtiyari ayın sonunda eyni olmalıdır, onlar belə hesab edirdilər ki, doğulan oğlanlar yaxın zaman ərzində qızların doğulacağı ehtimalını daha da çoxaldır. Məs., içərisində məhdud sayda ağ və qara kürəciklər olan urndan ağ kürəciyin çıxarılması, bu verilən mənada, növbəti tirajda qara kürəciyin çıxarılması ehtimalını artırır. Lakin bu halı bu doğumlar halına oxşatmaq üçün fərz olunmalıdır ki, urndakı kürəciklər sayı qeyri-məhdud olsun, onda belə hal yaranmır. Əgər hər hansı ay ərzində oğlanlar qızlardan daha çox doğulmuş olsaydı, onda belə şübhələnmək olardı ki, onların mayalanma zamanına yaxın bir vaxtda oğlan mayalanmasına hər hansı ümumi səbəb əlverişli şərait yaratmışdır və nəticədə yaxın müddətdə oğlan doğumunu daha ehtimalı etmişdir. Lotereya oyununda, hər tirajda nömrələrin çıxması şansını tamamilə eyni etmək məqsədilə bütün nömrələr qarşılıqlıdırıldığından, təbiətdə düzgün olmayaraq, baş verən təzahürlər lotereyada nömrələrin çıxması ilə dəqiqliklə müqayisə edilə bilinmir. Bu təzahürlərdən birinin tezliyi, onun baş verməsinə səbəb olan, müəyyən müddət təsir göstərmiş səbəbi guya göstərir və bu da onun gələcəkdə təkrar olunacağı ehtimalını artırır; və onun uzun müddət davamlı olaraq təkrar olunması, məs., uzun sürən yağışlı günlərin olması, bu təzahürlərdəki dəyişikliklərin naməlum səbəblərini aydınlaşdırır bilər, odur ki, hər bir gözlənilən təzahürdə, lotereyanın hər bir tirajında olduğu kimi, baş verəcək hadisə baxımından biz eyni bir qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıtmırıq. Bununla belə, bu təzahürlər üzərində müşahidələr çoxaldıqca bu nəticələrin lotereya nəticələri ilə müqayisəsi daha da dəqiqləşir.

Övvəlkilərə əks olan illüziyalara görə, Fransız lotereyasında aparılmış tirajlarda ən çox təsadüf olunan nömrələr axtarılır, bu isə oyuna qoyulan məbləği faydalı surətdə yerləşdirmək üçün bu nömrələrdən birləşmələr qurmaq məqsədilə edilir. Lakin bu lotereyada nömrələrin yerləşdirilməsi üsuluna görə keçmişin gələcəyə heç bir təsiri olmamalıdır. Hər hansı bir nömrənin daha tez-tez çıxması yalnız təsadüfün anomaliyasıdır; bu hallardan əksəriyyəti üçün mən hesablamalar apardım və mən bu hesablamalardan həmişə tapırdım ki, bütün nömrələrin çıxmaları eyni imkanlı olduğu fərz olunduğu hesablama nəticələri göstərirdi ki, hər hansı nömrənin tez-tez çıxması elə sərhədlər arasında yerləşir ki, bu sərhədlərin doğruxaoxşar olmadığını hesab etmək olmaz.

Eyni cür hadisələrin uzun bir sırasında yalnız təsadüfün şansları bəzən bu xoşbəxtlik və ya bədbəxtliklərin qərübə zolağının səbəbi ola bilər, oyunçuların əksəriyyəti də bu şansları hər hansı bir qismətin təzahürü kimi nəzərdə tutmayacaqdır. Eyni zamanda təsadüfdən və oyunçuların məharətindən asılı olan oyunlarda, bir çox hallarda belə olur ki, uduzan şəxs, özünün uduzmasından pərt olaraq, başqa bir halda etmədiyi təsadüfi gedişlər edərək, vəziyyətdən çıxmaq istəyir; bu üsulla o, öz bədbəxtliyini daha da dərinləşdirir və onun daha da çox davam etməsinə səbəb olur. Halbuki məhz onda ağıl zərurətə çevrilir və ona inanmaq gərəkdir ki, əlverişsiz şanslarla əlaqədar itkinin mədəvi gözləməsi bədbəxtliyin özü nəticəsində artır.

Özünü təbiət tərəfindən xüsusi qayğı ilə əhatə olunan predmet hesab edən insan, uzun müddət özünü kainatın mərkəzi saydığından doğan hiss, hər bir ayrıca şəxsi özünü çox və ya az geniş dairənin mərkəzi hiss etməyə, düşünməyə və inanmağa meyl etməyə sövq etdirir ki, təsadüf onu daha çox qiymətləndirəcəkdir. Bu baxışla dəstəklənən oyunçular bir çox hallarda oyunlarda olduqca böyük məbləği oyuna qoyurlar, baxmayaraq ki, bu oyunlardakı şanslar, onlara məlum olduğu kimi əlverişsizdir. Həyatda belə baxış bəzən öz üstünlüklərinə malikdir, lakin əksər hallarda bu başlanacaq çox ziyanlı işə gətirir. Burada və hər şeydə olduğu kimi illüziyalar təhlükəlidir və yalnız həqiqət həmişə faydalıdır.

Ehtimal hesabının böyük xidmətlərindən biri odur ki, o, ilk təəssürlərə inanmamağı öyrədir. Bu təəssürləri hesablamaq mümkün olan hallarda belə aydın olur ki, bu təəssürlər əksər hallarda aldadıcı olur, odur ki, belə nəticə çıxarılmalıdır ki, digər hallarda da

yalnız son dərəcə ehtiyatla bunlara inanmaq olar. Bunu misallarla göstərik.

Urnda dörd ağ və ya qara kürəciklər vardır, lakin bunların hamısı eyni rəngdə deyildir. Ağ rəngdə bir kürəcik çıxarılmışdır; bu kürəcik urna qaytarılır və yenidən belə tiraja başlanılır. Sual olunur ki, dörd növbəti tirajda yalnız qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Əgər ağ və qara kürəciklərin sayı eyni olsaydı, bu ehtimal – qara kürəcik çıxması ehtimalı – $1/2$ -in dördüncü dərəcəsinə bərabər olardı; deməli, bu ehtimal $1/16$ olardı. Lakin birinci tirajda ağ kürəcik çıxmıdırsa, bu belə bir təəssürat yaradır ki, urnda ağ kürəciklər çoxdur; çünki, urnda üç ağ və bir qara kürəcik olsaydı, onda urndan ağ kürəcik çıxması ehtimalı $3/4$ olardı; əgər iki ağ və iki qara kürəcik olsaydı, bu ehtimal $2/4$ -yə bərabər olardı; nəhayət, urnda üç qara və bir ağ kürəcik olsaydı, bu ehtimal $1/4$ olardı. Təcrübədən alınmış səbəblərin ehtimal prinsipinə əsasən, bu üç fərziyyənin ehtimalları öz aralarında $3/4$, $2/4$, $1/4$ kimi münasibətdədir; deməli, bu fərziyyələrin ehtimalları $3/6$, $2/6$, $1/6$ ədədlərinə bərabərdir. Beləliklə, qara kürəciklərin sayı az olarsa və ya ən çoxu ağların sayına bərabər olarsa, bir şansa qarşı beş şans olur. Belə fikirləşmək olar ki, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmasına görə ardıcıl dörd ağ kürəciyin çıxması ehtimalı – hər iki rəngdən eyni sayda olduğu halındakı ehtimaldan kiçik olmalıdır və ya on altıda birdən az olmalıdır. Halbuki, bu belə deyildir və olduqca sadə hesablama ilə tapırıq ki, bu ehtimal on dördə birdən çoxdur. Əslinə qaldıqda, bu ehtimal urndakı kürəciklərin rənginə görə əvvəlki birinci, ikinci və üçüncü cümlələrə görə $1/4$, $2/4$, $4/3$ -ün dördüncü dərəcəsinə bərabər olmalı idi. Hər bir qüvvətə yüksəldilmiş bu ədədləri uyğun fərziyyə ehtimalına vurduqda, yəni $3/6$, $2/6$, $1/6$ ehtimallarına vurduqda, bu hasilərlərdən cəmi ardıcıl olaraq dörd qara kürəciyin çıxarılması ehtimalına bərabər olacaqdır. Beləliklə, bu ehtimal üçün $1/14$ -dən böyük olan $29/384$ ehtimalını alırıq. Bu ziddiyyət izah oluna bilər, əgər biz nəzərə alsaq ki, birinci tirajın ağ kürəciklərin qara kürəciklərdən üstünlüyünü göstərməsi təəssüratı qara kürəciklərin ağlar üzərində üstünlüyünü istisna etmir, – o, üstünlüyü ki, o, bu və ya o biri rəngli kürəciklərin eyni sayda olması fərziyyəsini istisna edir. Bu üstünlük, az doğruxaoxşar olmasına baxmayaraq, qara kürəciklərin verilməsi sayda ardıcıl çıxması ehtimalını böyütməlidir, nəinki, son fərziyyə yerinə yetdikdə, əgər verilən ədəd böyük olarsa; və biz görürük ki, dördə başlayaraq, belə də olur.

İçərisində bir neçə ağ və qara kürəcik olan bir urn halına da baxaq. Övvəlcə fərz edək ki, bu urnda yalnız bir ağ və bir qara kürəcik vardır. Onda bərabər şanslarla mərc gəlmək olar ki, bir tirajda ağ kürəcik çıxacaqdır. Lakin görünür ki, mərcin bərabərliyi üçün, ağ kürəciyin çıxmasına mərc gələn şəxsə, əgər urnda iki qara və bir ağ kürəcik olduğu halında iki tirajda iştirak etməyə imkan verilməlidir; əgər urnda üç qara və bir ağ kürəcik olarsa, üç tirajı imkan yaradılmalıdır və s; fərz olunur ki, hər bir tirajdan sonra çıxarılmış kürəcik yenidən urna qaytarılır.

Lakin asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ilk təəssürat səhvdir. Əslinə qaldıqda, bir ağ kürəcik və iki qara kürəcik olduğu halda, iki tiraj aparıldıqda iki qara kürəciyin çıxması ehtimalı $2/3$ -nin ikinci dərəcəsinə və ya $4/9$ -ə bərabərdir; lakin iki tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı ilə toplanmış bu ehtimal yəqinliyə və vahidə bərabərdir, çünki yəqinliklə məlumdur ki, iki qara kürəcik çıxmalıdır və ya heç olmazsa bir dəfə ağ kürəcik çıxmalıdır; buna görə də, bu sonuncu halın ehtimalı $5/9$ -ə – $1/2$ -dən böyük olan bir kəsə bərabərdir. Urnda beş qara və bir ağ kürəcik olan halda beş tirajda ağ kürəciyin çıxmasına mərc gəlmək əlverişli olardı; bu sonuncu mərc hətta dörd tirajda belə faydalıdır; bu halda bu mərc bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün mərcə gətirilir.

Paskalın dostu – ehtimal hesabının təməlini qoymuş Kavalier de Mere, bu böyük həndəsəçini bu sahədə məşğul olmağa sövq edərək ona deyirdi ki: «aşağıdakı səbəbə görə o, ədədlərdə düzgün olmamalıdır tapmışdır: bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün $671:625$ nisbətində əlverişli şanslara malik olmaq olar». Əgər iki zəri atıldıqda 12 almaq məqsədi qarşıya qoyularsa, onda 24 dəfə atmaq hüququ əlverişsiz şanslar verir. Bununla belə, 24 ilə iki zərin bütün üzləri cütlərinin sayı 36-nın olduğu nisbət, 4-ün bir zərin üzləri sayı

6-ya nisbəti ilə eynidir. «Belədir, — Paskal Fermata yazırdı; keçirdiyi böyük təəsüf hissi onu cəsarətlə belə söyləməyə vadar etdi: bu teoremlər dəyişməz deyildirlər və arifmetika öz-özünə ziddiyyətlidir... O, dərin əqlə malikdir, lakin o, həndəsəçi deyil, bu isə siz bildiyiniz kimi böyük çatışmamazlıqdır». Kavalier de Mere, yalnız analogiya ilə səhvə yol verərək, fərz edirdi ki, mərcə gələnlərdə bərabərlik olarsa, zərərəmlər sayı bütün mümkün ola bilən şansların sayına mütənəsis olaraq artmalıdır, bu isə dəqiq olmasa da, bu say böyük olduqca dəqiqliyə daha çox yaxınlaşır.

Soyadlarını davam etdirəcək oğul arzusunda olan ataların ümumi arzusu ilə oğlan uşaqlarının qız uşaqlarından çox doğulduğunu izah etməyə cəhd göstərdik. Məs., eyni miqdarda, sonsuz sayda ağ və qara kürəciklər olan urn olduğunu təsəvvür edib, fərz edərək ki, çox saylı insanlardan hər biri bu urndan kürəcik çıxarır və tiraj ağ kürəcik çıxana qədər davam etdirilir; belə düşündürlər ki, bu məqsəd çıxarılan ağ kürəciklərin sayının qara kürəciklərin sayından çox olmasını göstərəcəkdir. Əslində, bütün tirajlardan sonra, bu üstünlük, insanlarda ağ kürəciklərin sayının hökmən heç olmasa insanların sayına bərabər olduğunu təmin edəcəkdir; və ola bilər ki, bu tirajlarda qara kürəcik heç olmasın. Lakin asanlıqla görmək olar ki, bu nöqtəyi-nəzər illüziyadan başqa bir şey deyildir, çünki əgər biz fərz edəriksə ki, birinci tirajda bütün insanlar urndan hamısı birdən bir kürəcik çıxarır, onda aydındır ki, onların məqsədlərinin bu tirajda çıxarılan kürəciklərin rənglərinə heç bir təsiri olmayacaqdır. Bu tirajın yeganə nəticəsi — birinci tirajda ağ kürəcik çıxarmış şəxslərin ikinci tiraja buraxılmamasıdır. Oxşar surətdə, aydındır ki, yeni tirajda iştirak edən şəxslərin məqsədlərinin bu tirajda çıxacaq kürəciklərin hansı rəngdə olmasına heç bir təsiri olmayacaqdır və növbəti tirajlarda bu belə olacaqdır. Deməli, bu məqsəd bütün tirajlarda çıxan kürəciklərin nə rəngdə olacağına tamamilə təsir etməyəcəkdir; bu hər bir tirajda iştirak edəcək şəxslərin çox və ya az olmasına səbəb olacaqdır. Çıxarılan ağ kürəciklərin sayının qara kürəciklərin sayına nisbəti, beləliklə, vahiddən çox az fərqlənəcəkdir. Buradan belə nəticə alınır ki, insanların sayının olduqca çox olduğunu fərz edərək, əgər müşahidə də çıxarılan kürəciklərin rəngləri arasında vahiddən çox az fərqlənən nisbəti versənsə, onda vahid və urndakı ağ kürəciklərin qara kürəciklərin nisbəti arasındakı həmin fərqi mövcudluğu, demək olar ki, olduqca ehtimallıdır.

Mən, ehtimal hesabından sıraların cəmlənməsində Leybnits və Daniil Bernullinin etdikləri tətbiqi illüziya hesab edirəm. Əgər biz, surəti vahid, məxrəci isə vahid plus dəyişən olan kəsri bu dəyişənin qüvvət üstünə görə sıraya ayırsaq, onda asanlıqla görmək olar ki, dəyişəni vahidə bərabər götürdükdə, kəsir $1/2$ -ə bərabər olur, sıra isə *plus vahid*, *minus vahid*, *plus vahid*, *minus vahid* və s.-yə çevrilir. Bu sıranın ilk iki həddini, sonra növbəti iki həddini və s. toplayaraq, bu sıranı başqa bir sıraya çeviririk ki, alınmış bu sıranın hər bir həddi sıfıra bərabərdir. İtalyan iyezuiti Qrandi buradan yaratmanın mümkünlüyü barədə nəticə çıxarmışdır; sıra həmişə $1/2$ -ə bərabər olduğundan, o fərz edir ki, bu kəsir sonsuz sayda sıfırlardan əmələ gəlir və ya heç nədən. Eyni şey Leybnitslə baş vermişdi: O, belə fikirləşirdi ki, oxşar yaranmaları onun ikilik arifmetikasında da görmək olar, o, burada yalnız iki işarədən istifadə edirdi: sıfır və vahid. O, belə düşündürdü ki, vahid Allahı, sıfır isə heç nəyi ifadə edə bilərdi, düşündürdü ki, Ali Varlıq bütün olanları heç nədən yaratmışdır, necə ki, vahid və sıfır hesab sistemində bütün ədədləri ifadə edə bilər. Bu ideya Leybnitsin o qədər xoşuna gəlmişdir ki, o, bu düşüncələrini Çində riyaziyyat kafedrasının nümayəndəsi, iyezuit Qrimaldi ilə bölüşərək, ümid bəsləyir ki, bu yaranma emblemi elmləri xüsusilə sevən o vaxtkı imperatoru xristianlığı qəbul etməyə sövq edər. Mən bu cəhəti xüsusilə vurğulayıram ki, göstərmək ki, uşaqlıq xurafatı ən böyük şəxsiyyətləri belə nə dərəcədə yalnız düşündürə bilər.

Leybnits, hələ də qərribə və olduqca sərbəst metafizikanın təsiri altında belə hesab edirdi ki, *plus vahid*, *minus vahid*, *plus vahid*, *minus vahid* və s. sırası hədlərinin sayı cüt və ya tək olmasından asılı olaraq, sıfır və ya vahidə bərabər olur; və buna görə də, sonsuzluqda cüt ədədə tək ədəddən üstünlük verməyə heç bir səbəb olmadığından, ehtimal qaydalarına görə nəticələrin bu iki növə ədədlərə aid — sıfır və

vahid bərabər olan nəticələr götürülməlidir ki, bu da sıranın ədədi qiyməti üçün $1/2$ -i verir. Daniil Bernulli sonra bu mülahizəni periodik hədlərdən ibarət sıraların cəmləri üçün genişləndirmişdi. Lakin bütün bu sıraların, əslinə qaldıqda, ədədi qiyməti yoxdur: bu sıralar üçün ədədi qiymətlər yalnız onların hədlərini vahiddən kiçik hər hansı dəyişənin ardıcıl qüvvət üstünə vurduqda alınır. Bu halda bu sıralar, dəyişən və vahid arasındakı fərz olunan fərqi nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, həmişə yığılır; və çox asanlıqla isbat etmək olar ki, ehtimal nəzəriyyəsi əsasında Bernullinin təyin etdiyi ədədi qiymətlər, məhz, sıraları əmələ gətirən kəsrlərin ədədi qiymətləridir, bu halda bu kəsrlərdəki dəyişənin vahidə bərabər olduğu fərz olunur. Bu ədədi qiymətlər, həm də, dəyişən vahidə yaxınlaşdıqca sıraların get-gedə daha yaxınlaşdıqları limitlərdir. Lakin dəyişən nə vaxtsa vahidə bərabər olursa, bu sıralar artıq yığılan olur, onlar bu sıraların sonlu sayda hədlərini götürdükdə ədədi qiymətlər alır. Periodik sıraların ədədi qiymətlərinə ehtimal hesabının bu tətbiqinin gözəl münasibəti fərz edir ki, bu sıraların hədləri dəyişənin bütün ardıcıl qüvvət üstlərinə vurulmuşdur. Lakin bu sıralar sonsuz sayda müxtəlif kəsrlərin ayrılışlarından da alına bilər; bu kəsrlərdə bu yerinə yetir. Məs., *plus vahid*, *minus vahid*, *plus vahid*, *minus vahid* və s., sırası surəti — vahid plus dəyişən, məxrəci — dəyişənin kvadratı qədər artırılmış bu surətə bərabər olan kəsirin ayrılışından da yaranı bilər. Dəyişənin vahid olduğunu fərz etdikdə, bu ayrılış verilən sıraya çevrilir və yaradıcı kəsir $2/3$ -yə bərabər olur; onda ehtimal qaydaları yanlış nəticələr verərdi, bu isə onu sübut edir ki, xüsusilə də, öz metodlarının dəqiqliyi ilə yüksək dərəcədə fərqlənən riyazi elmlərdə belə mülahizələri tətbiq etmək nə dərəcədə təhlükəli olardı.

Biz, təbii olaraq, belə düşünməyə meyilliyik ki, Yer üzündə hər şey gördüyümüz kimi, yeniləşir və bu qayda həmişə olmuşdur və olacaqdır. Əslində, kainatın hal-hazırdakı vəziyyəti tamamilə əvvəl yaranmış olduğu vəziyyətinə oxşayırdı, onda o, öz növbəsində oxşar vəziyyət yaratmış olardı. Onda bu vəziyyətlərin əvəz olunması əbədi olardı. Ümumdünya cazibə qüvvəsinə analizini tətbiqi ilə mən öyrəndim ki, planet və peyklərin fırlanma hərəkətləri və kükrəntilər və onların orbitləri və ekvatorlarının vəziyyətləri yalnız periodik bərabərsizliklərə tabedirlər. Ayın əsri tənliyi nəzəriyyəsinə qədim Aytutulmaları ilə müqayisə edərək, mən tapdım ki, Hipparx dövründən bəri günün uzunluğu, hətta saniyənin yüzdə biri qədər belə dəyişməmişdir və Yer in orta temperaturu yüzdə bir dərəcə belə azalmamışdır. Beləliklə, hazırkı vəziyyətin sabitliyi elə bil ki, eyni zamanda nəzəriyyə və müşahidələrlə pozulur, bu səbəblərə diqqətlə baxıldıqda bu dəyişiklik nəzərə çarpır və bu səbəbləri hesablamaq belə mümkün olur.

Okeanın, atmosferin və meteorların təsirləri, zəlzələlər və vulkan püskürmələri Yer səthini daima dəyişikliklərə məruz qoyur və zaman ötdükcə bunlar Yer səthində mühüm dəyişikliklər yaradacaqdır. İqlim temperaturu, atmosferin həcmi və atmosferi təşkil edən qazların hansı nisbətə olması hiss olunmayacaq tərzdə dəyişə bilər. Yeniləşən alətlərin və bu dəyişikliklərin müəyyənəşdirilməsi üçün yararlı vasitələrin olmasına baxmayaraq, müşahidələr bu mənada bu vaxta qədər heç bir nəticəyə gətirə bilməmişdir. Bununla belə olduqca az doğruxoxşardır ki, bizim havanı təşkil edən qazların udulması və bərpası səbəbləri onların uyğun miqdarlarını dəqiqliklə saxlamış olsun. Uzun əsrlər sırası bütün bu elementlərin məruz qaldıqları, müəşəkkil varlıqların qorunub saxlanması üçün olduqca mühüm dəyişiklikləri dərk etmək imkanını verir. Tarixi abidələrin ən qədim dövrlərə aid olmamasına baxmayaraq, bunula belə təbii səbəblərin yavaş və davamlı təsirləri nəticəsində onlar məruz qaldıqları olduqca böyük dəyişikliklərin olduğunu göstərir.

Yerin dərinliklərinə baş vuraraq, nə vaxtsa mövcud olmuş və hazırkı təbiətdən tamamilə fərqli olan çoxsaylı təbiət qalıqları kəşf olunur. Bundan başqa, əgər, gördüyü kimi, hər şey necə ki, bütün Yer in əvvəlcə maye şəklində olduğunu göstərsə, onda aydındır ki, onun bu vəziyyətdən indiki olduğu vəziyyətə keçində onun səthi nəhəng dəyişikliklərə məruz qalmalı idi. Hətta Göy, öz hərəkətlərindəki qaydaya baxmayaraq, dəyişməz deyildir. Işıqın və digər efir mayelərin müqaviməti və ulduzların cazibəsi, olduqca çox əsrlər keçdikdən sonra planetlərin hərəkətlərini olduqca dəyişməlidir. Ulduzlarda və dumanların formalarında müşahidə olunmuş dəyişikliklər bu nəhəng cisimlər sistemində zamanın edəcəyi dəyişiklikləri hiss etməyə bizi

məcbur edir. Kainatın ardıcıl vəziyyətlərini absisi zamanı, ornatları bu müxtəlif vəziyyətləri ifadə edə bilən ayrı şəkildə təsvir etmək olardı. Bu ayrının hər hansı bir elementini bildikdə, biz onun başlanğıcına çata biləcəyimiz mümkünlüyündən uzaq və əgər təxəyyül maraqlandıran təzahürlərin səbəbləri barədə bilgisizliyin hələ də doğurduğu təşvişdə olan təxəyyülə istirahət vermək üçün hansısa vəziyyətləri irəli sürməyə risk edilərsə, onda bunlar ən azı olduqca hərtərəfli düşünərək, ağılla təklif olunmalıdır.

Ehtimalları qiymətləndirdikdə illüziyaların bir növü vardır ki, o, xüsusən ağıl quruluşu qanunlarından asılı olub, bu illüziyaların təsirindən qorunmaq üçün bu qanunların dərinliklə sınaqdan keçirməlidir. Gələcəyə baş vurmaq arzusu və bəzi qərribə hadisələrə, astroloqların, falçıların və kahinlərin öngörülərinə, hissetmələrə və yuxulara, xoşbəxt və ya bədbəxt sayılan ədədlərə və günlərə münasibət, hələ indi də, çox yayılmış olan çoxsaylı xurafatı yaratmışdır. Heç bir hiss yaratmayan və ya nəzərdən yayınmış və ya naməlum qalmış bir-birilə uzlaşmayan çoxsaylı hallar haqqında düşünən heç yoxdur; bununla belə bunları bilmək o dərəcədə zəruridir ki, bir-birilə üst-üstə düşən belə halların səbəblərinin ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olsun. Bu qiymətləndirmə, şübhəsiz ki, bu xurafatlara görə bizim aqlımızın dikte etdiyini təsdiq etmiş olardı. Məs., ən qədim filosoflardan birinə Allahın məbəddə qüdrətinin tərifini Göylərə qaldırmaq üçün, bu Allaha *ex-voto* səcdə edərkən xitab edən, gəmi qəzasından xilas olanları göstərərək, onların bu xilasını Allaha yalvarmaları və inamının nəticəsində baş verdiyini misal çəkənlərə o, ehtimal hesabı ilə uzlaşan belə fikri söyləmişdi: o, yalvaran, dua edən və bu qəzada ölmüş şəxslərin adlarını görmür. Sisəron bütün bu xurafatları böyük ağılla və gözəl nətiqliliyi ilə, özünün fala baxma haqqında Traktatında təkzib edərək, sonda belə yazmışdı: çünki onlar keçmiş filosoflarda dünyəvi aqlın cəhətlərini tapmağı sevirilər, elə bir aqlın ki, o, özünün nuru ilə bütün xurafatları alt-üst edərək, insani qanunların yeganə əsasına müraciət edəcəkdir.

Roma nətiqi belə deyir: – «Yuxulara görə falabaxma və bütün oxşar xurafatlar rədd olunmalıdır». Hər yerdə mövhumat ağılların çox hissəsini məhkum etmiş və insan zəifliyinə nail olmuşdu. Məhz bunu, Allahların təbiəti haqqında kitablarımızda, biz inkişaf etdirdik, xüsusilə də, bu əsərdə, çünki biz inanırdı ki, əgər biz xurafatı darmadağın edə bilsək, başqalarına və özümüzə fayda gətirəcəyik. Lakin (və mən xüsusilə arzu edirəm ki, bu anlamda mənim fikrim yaxşı anlaşılın) xurafatı darmadağın etməklə, mən, dinə toxunmaq fikrindən uzağam. Ağıl bizə Allahlara itayişə adlı olan, bizim əcdadlarımızın adət və ənənələrini və təsisatlarını dəstəkləməyi təlqin edir. Bundan başqa, kainatın gözəlliyi və Göy təzahürlərindəki qayda, bizi insan övladının qeyd edə biləcəyi və səcdə edəcəyi hansısa ali təbiətin varlığının olduğunu qəbul etməyə məcbur edir. Təbiətin dərk olunması ilə bağlı olan dini yaymaq nə qədər münasibdirsə, xurafatın yerli-dibli aradan qaldırılması üçün də o qədər say göstərməlidir, çünki bunlar bizə iztirab verir, sizi əsir edir və hər yerdə sizi daima izləyir. Əgər siz falçıdan və ya kahindən məsləhət istəsəniz, əgər siz qurban versəniz, əgər siz quşun uçuşuna baxsanız, əgər siz heyvanların daxili orqanlarına görə falçıyı və ya gildanını (1. Qədim Babilistan övladlarında yaşamış Gildani xalqına mənsub adam; 2. xaldlar – rus. халды – Van gölü hövəlisində yaşamış və miladdan əvvəl XIV-VII əsrlərdə Urartu dövlətində hakimiyyət sürmüş tayfa, – H. M.) qarşılayarsınız, əgər ildırım çıxarsa, əgər Göy guruldayırsa, əgər tufan qopursa, nəhayət, əgər hər hansı müdhiş bir nəhəng doğulur və ya yaranırsa, – bütün bu hadisələrdən çox vaxt hansı biri hökmən baş verirsə; onda sizə hakim kəsilməyi xurafat sizə rahatlıq verməyəcəkdir. Hətta insanların ağır anlarında və zəhmətlərdə dinclik tapdıqları yuxu belə, onların öz günahları isbatından onlar üçün yeni bir narahatlıq və qorxu predmetinə çevrilir».

Onların təlqin etdikləri bütün bu xurafatlar və qorxu hissi fizioloji səbəblərdən asılıdır ki, bunlar bəzən, ağılınız bizi səhvliyimizi görməyə yönəldikdə belə, sonradan güclü təsir etməkdə davam edir. Lakin bizim mövhumatımıza zidd olan əhvalatların təkrar olunması bunları həmişə darmadağın edə bilər. Bunu aşağıdakı mülahizələrimiz sübut edəcək.

Gözlə görünən fiziologiya sərhədində bu fiziologiyadan çoxsaylı təzahürləri ilə fərqlənən digər fiziologiya başlayır, bu təzahürlər özlərinin uyğun qanunlarına tabedirlər ki, bunları bilmək olduqca mühümdür. Bu fiziologiya, onu biz *psixologiya* adlandıracağıq,

şübhəsiz ki, gözlə görünən fiziologiyamızın davamıdır. Lifləri itib-batan sinirlər xaricdəki əşyalardan aldıkları təəssüratları beyin maddəsinə bütün beyin üzrə paylayır və orada daimi təəssüratları saxlayır və bunlar bizə məlum olmayan şəkildə sensorium və ya fikrin yerini dəyişir.

Xarici hissələr bizə bu dəyişikliklərin təbiəti üzrə heç bir şey öyrədə bilmir; özlərinin sonsuz müxtəlifliyi, bir-birindən fərqlənmələri və onları özündə yerləşdirmiş kiçik bir fəzada qayda saxlamalarına görə bu dəyişikliklər barədə işıq və elektrik həsiz rəngarəngliyi bizə müəyyən anlayış verir. Lakin bu dəyişiklikləri duymağa təkə qadir ola biləcək daxili hissələr üzərində müşahidəyə xarici hissələr üzərində müşahidələrdə istifadə olunan metodu tətbiq edərək, insan idrakı nəzəriyyəsinə, natural fəlsəfənin digər sahələrinə daxil olunmuş eyni dəqiqliyi də daxil etmək olar.

Psixologiyamızın bəzi prinsipləri* artıq qəbul olunmuşdur və müvəffəqiyyətlə inkişaf etdirilmişdir. Oxşar orqanizmlə bütün varlıqların öz aralarında harmoniya təsbit etmə cəhdi belədir. *Simpatiya* təşkil edən bu cəhd, hətta müxtəlif növ heyvanlarda belə vardır: onların orqanizmləri bir-birinə az oxşadıqca, bu cəhd azalacaqdır. Eyni orqanizmlə varlıqlar içərisində bəziləri bir-birilə başqalarından daha tez yaxınlaşırlar. Qeyri-üzvü təbiətdə belə hadisələr məlumdur: eyni bir altlıq üzərinə çox az fərqlə işləyən iki – divar və ya cib saatı qoyulduqda sonda bunlar tamamilə eyni cür işləməyə başlayır; səli simlərin sistemində bir simin rəqsi bütün harmonik rəqslərin həmahəng səslənməsinə səbəb olur. Səbəbləri yaxşı məlum olan bu hadisələr üzərində hesablamalar aparılmış və nəticədə məlum olmuşdur ki, bu hesablamalar daha da mürəkkəb səbəblərdən asılı olan bu anlamdakı simpatiya haqqında doğru anlayış verir.

Xoşagəlmə hissi, demək olar ki, simpatiyadakı dəyişməni həmişə müşayiət edir. Heyvan növlərinin əksəriyyətində ayrı-ayrı fərdlər bu tərzdə bir-birilə qovuşur və topluslar kimi birləşirlər. İnsan nəslində güclü şəxslər zəiflər üzərində hakimlikdən əsl xoşbəxtlik duyur və zəiflər isə öz növbəsində onlara tabe olduqlarından özlərini heç də az xoşbəxt hiss etmirlər. Simpatiya hissi eyni zamanda çoxsaylı insanda həyəcan doğurduqda, qarşılıqlı reaksiya nəticəsində artmağa başlayır; necə ki, bunu teatrda müşahidə etmək mümkündür. Bu hissədən doğan zövq, oxşar baxışlı insanları bir-birinə yaxınlaşdırır, onlar birləşdikdə bu hal onları bəzən fanatizmə qədər belə alovlandırır. Beləliklə də, sektalar yaranır, bunların oyatdığı meyillər və onların yayılması sürətlənir. Tarixdə bunlar simpatiya hissəsinin hakim kəsilməsinə ən heyrtəmiz və ən ziyanlı misallardır. Tez-tez elə hal müşahidə olunur ki, simpatik təsirlər necə də asanlıqla, heç bir digər səbəb olmadan bu təsirə duçar olanlara yalnız onunla əlaqədar olaraq sirayət edir, məsələn, gülüş kimi. Sensoriuma simpatiyamızın təsiri, şübhəsiz ki, olduqca güclüdür: simpatiyamızın sensoriuma verdiyi vibrasiyalar, çox güclü olduqları halda, heyvani qənaətə təsir göstərəcək, qeyri-adi təsirlər oyadır, bunlar xurafat əsrlərində fəvqəltəbii qüvvələrə adlanmış və öz müstəsnalığı ilə müşahidəçilərin diqqətini cəlb etmişdir.

Rəhmətdillik, xeyirxahlıq və bir çox digər hissələr simpatiyadan yaranmışdır. Bu hissənin təsiri altında özgə iztirabını hiss etmək və yardım göstərilmiş bədbəxt bir kəsin sevincini bölüşdürmək olur. Lakin mən burada yalnız psixologiyamızın prinsiplərini, onların nəticələrinin inkişafına varmadan, şərh etmək istəyirəm.

Bu prinsiplərin hamısından ən məhsuldar olan biri – sensoriumda eyni zamanda və ya düzgün ardıcılıqla mövcud olan bütün şeylərin əlaqə prinsipidir, elə əlaqənin ki, bu şeylərdən biri qayıtdıqda, digərlərini də qaytarır. Mürəkkəb, mücərrəd və ümumi ideyaların yaranması və analizində ötrü və mühakimə yürütmək üçün hissələr, duyğular və ideyalar doğurmaq məqsədilə işarələr və dillərin istifadəsi bu prinsipə aiddir. Bir çox filosoflar bu predmeti yaxşı inkişaf etdirmişlər və o, indiyə qədər metafizikanın real hissəsini təşkil edir.

Hətta müəyyən etmək olur ki, psixologiya prinsipi kimi, eyni bir predmetdən müxtəlif hissələrdə tez-tez təkrar olunan təəssüratlar,

* Mən burada *prinsip* sözü ilə təzahürlərin ümumi münasibətlərini adlandırmışam.

sensoriumu elə dəyişirlər ki, predmetdən yalnız bir hissə alınan xarici təassuratı uyğun daxili təassurat əvvəl olduğundan olduqca fərqlənir. Bu prinsipi aydınlaşdırmaq məqsədilə kor doğulmuş görmə qabiliyyətinin verildiyi hala baxaq. Onun gözünün tor qışasında əşyanın həkk olunmuş obrazı, onun sensoriumunda təassurat vardır, mən onu birincindən fərqləndirmək üçün və onun təbiəti barədə heç bir fikir söyləmədən, onu *ikinci obraz* adlandıracağam. Bu ikinci obraz, əvvəlcə, əşyanın düzgün obrazı deyildir; lakin hiss etmə vasitəsilə əşyadan yaranan təassuratların görmə qabiliyyətindən yaranan təassuratlarla adətə görə müqayisəsi, sensoriumu dəyişdirərək, nəhayət, elə hal yaradır ki, ikinci obraz hissetmə ilə doğru ötürülmüş gerçəkliklə uzlaşır. Tor qışada həkk olunmuş obraz dəyişmir, lakin onun yaratmış olduğu daxili obraz görmə qabiliyyəti bərpə olunmuş kor doğulmuş bir çoxları üzərində aparılan təcrübələrin göstərdiyi kimi o cür qalır.

Sensorium bu dəyişikliklərə, əsas etibarilə, uşaqlıqda məruz qalır. Uşaq görmə və hissetmə orqanları ilə eyni bir əşyadan aldığı təassuratları daima müqayisə edərək, görmə təassuratlarında düzəlişlər edir. O, öz sensoriumunu gördüyü əşyalara təassuratları ilə sıx bağlı, bunların həmişə doğurmuş olduğu hiss təassuratlarının ona təlqin etdiyi formanı verməyə öyrədir. Ona görünmüş əşyalar, hiss olunmuş kimi eyni gerçəkliklə təsvir olunma bilirlər. Görmə üçün işıq fəzası hissetmə üçün çubuğun yaratdığı emiş olur. Bu hissərdən birincisi bu qayda ilə özünün təassuratları obyektləri oblastlarını ikincisindən daha da çox genişləndirə bilər. Hətta təsəvvürümüzdə səyyarələrin bərkidilmiş olduğu Göy qübbəsi hələ çox məhdud sayılmışsa da, biz yalnız uzun-uzadı aparılan müşahidələr və hesablamalar yolu ilə bu göy cisimlərinin olduqca böyük uzaq məsafələrlə olduğunu dərk edə bilmişik və onların ucsuz-bucaqsız fəzada, bir-birindən qeyri-müəyyənliklə aralı yerləşdiklərini öyrənmə bilmişik.

Heyvanların bir çox növləri, ehtimal ki, sensoriumun məsafələrini qiymətləndirmək qabiliyyətinə malikdirlər. Lakin təbiət instinkt hissini insanda, demək olar ki, hər barədə ağılla əvəz etmişdir və insan instinkt əvəzinə müşahidələrə və müqayisələrə ehtiyac duyur və bunlar onun əqli qabiliyyətini təəcüb doğuracaq qədər inkişaf etdirir və bu inkişaf sayəsində onun yerin hakimi olmasını təmin edir.

Daxili obrazlar, buna görə də, yalnız səbəbin təsiri ilə yaranmır; bunlar ya eyni zamanda eyni bir və ya müxtəlif hiss orqanları ilə alınmış təassuratlardan, yaxud yaddaşın yaratdığı daxili təassuratlardan yaranır. Bu təassuratların qarşılıqlı təsiri – zəngin nəticələri olan psixoloji prinsipdir. Bundan əsaslarını açıqlayaq.

Müşahidəçi tam qaranlıqda, eyni bir diametrli iki işıq saçan kürəciyi müxtəlif məsafələrdən görür: bunlar ona eyni ölçülü kimi görünməyəcəkdir. Bunların daxili obrazları gözün tor qışasında həkk olunmuş uyğun təsvirlərə mütənəşib olacaqdır. Lakin işıqda, o, əgər kürəciklərlə bütün aradakı fəzanı da görərsə, onda bu görüntü daha uzaqdakı kürəciyin daxili obrazını böyütdür və onu digər kürəciyin obrazı ilə sanki bərabər edir. Bundan da belə alınır ki, iki və üç metr məsafədən görünən adam, bizə eyni ölçülü görünür: onun daxili obrazı, gözün tor qışasındakı təsvirlərdən birinin digərindən iki dəfə çox olmasına baxmayaraq, dəyişmir. Eynilə də, aralıqdakı əşyalardan yaranan təassuratlar sayəsində üfüqdə Ay zenitdəki Aydan böyük görünür. Biz gözə yaxın budaq üzərində əşyanı uzaq məsafədəki kimi qəbul ediyimizdən o, çox böyük görünür. Sonra, biz o əşyanı budaqla birləşdirən əlaqəni öyrənirik: biz bu əlaqəni anlayan kimi o, daxili təsviri dəyişərək, onun olduqca kiçik ölçülərdə olduğunu müəyyən edir. Bütün bunlar bəzi metafiziklərin fikirləşdikləri kimi sadəcə mülahizələr deyildir; bu eyni bir əşyadan bir neçə hiss orqanında, xüsusilə də, hiss və görmə orqanlarında, sensoriumda yaranan təassuratların, adətə olunmuş müqayisə yolu ilə aldığı bacarıqlardan doğan fizioloji effektlərdir.

Kənardakı əşyalardan doğan təassuratlara yaddaşın qoyduğu izlərin təsiri bir çox hallarda özünü göstərir. Uzaqdan hərflər görünür, lakin bu hərflərlə hansı sözün yazıldığını müəyyən etmək olmur. Əgər kimsə bu sözü tələffüz edərsə və ya hansısa bir səbəb bu sözü onun yadına salarsa, onda həmin an bu tərzdə yenilənmiş şəkildəki bu hərflərin daxili

təsviri, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, xarici işarələrin təassuratından yaranan, aydın olmayan təsvir üzərinə həkk olunur və onu aydınlaşdırır. Hərflərin şəkli onlara uyğun səslərin izlərini yaradır; bu izlər isə səsin aydın olmayan sədaları ilə qarışaraq, onları fərqləndirməyə imkan verir. Qorxu, çox vaxt bu tərzdə, olduqca zəif işıqda ayırd edə bilmədiyimiz əşyaları, onlara oxşar qorxunc əşyalar kimi görməyə səbəb olur. Bu sonuncu (eybəcərlənmiş şəkildəki) əşyaların sensoriumda qorxudan olduqca güclü şəkildə həkk olunmuş təsvirinin, xaric əşyaların təassuratlarından yarandığı fərz olunur. Yalnız çox zəif təassurat doğuran təzahürlərin müşahidələrindən çıxarılan nəticələrdə illüziyaların bu səbəbindən özünü qorumaq vacibdir: planet və peyklər üzərində işığın azalmasının müşahidəsi belədir və bundan isə onların atmosfer sıxlığının varlığı və onların fırlanma hərəkətləri haqqında nəticələr çıxarılmışdır. Bir çox hallarda daxili obrazların bu təassuratları özünə oxşadacağından qorxmaq lazımdır: biz hissərdən alınmış təassuratlarla təsvir tapmış belə şeylərin varlığına inanmağa meyilliyik.

Bu gözəl meyillilik xüsusi xarakterdən asılıdır, xaricdən alınan bu təassuratlar təəyyülün yaratdığı və ya yaddaşın doğurduğu izlərdən bu xarakter vasitəsilə fərqləndirilir. Sensorium və ya orqanlarda, onlara təsir edən pozulmalar nəticəsində, bəzən bu izlər xaric təassuratların xarakteri və canlılığını almış olur. Gecənin qaranlığı və sakitlik bu illüziyalar əlverişli şərait yaradır, bunlar yuxu mərhələsində bütövləşir və yuxugörmələri doğurur; biz nəzərə alırıqsa ki, qaranlıqda bizim təəyyülümüzdə təsvir olunan əşyaların izləri yuxu ərafəsində böyük gərginliyə malik olur, onda bunlar haqqında bizdə doğru təsəvvür yaranacaqdır.

Hamıda belə fikir formalaşmışdır ki, lunatiklərdə (somnambull) bəzi hissələr oyaq olur. Məs., əgər, xaric əşyalara toxunmadan yaranan hissiyyat az da olsa qalmışsa, onda əşyalardan yaranan sensoriuma ötürülən zəif təassuratlar, lunatikin yuxu obrazları ilə birlikdə onları dəyişə bilər və onun hərəkətlərini idarə edə bilər. Mən bu mülahizələri nəzərə alaraq, lunatiklərin etdikləri qeyri-adi şeylər haqqında yaxşı yoxlanılmış hekayətləri tədqiq etdikdə, mənə belə gəlir ki, bunlara sadə izah vermək mümkündür.

Bəzən gələcəyi görən (bəsirətli) adamlara belə gəlir ki, onlar təsəvvür etdikləri adamların danışdığını eşidirlər və onlar bu adamlarla əlaqəli söhbət aparırlar; həkimlərin əsərləri bu növ faktlarla doludur.

Bonne, tez-tez müşahidə etdiyi ana babasını – «qocanı» misal götürərək, belə deyir: «tam sağlam olan bu «qoca», heç bir xaric təassurat olmadan, zaman-zaman, qarşısında kişi, qadın, quş, ekipaj, tikili və s. kimi obrazlar görür. O, bu obrazların müxtəlif hərəkətlərlə dəyişikliklərini, bir-birinə yaxınlaşdıqlarını, bir-birindən uzaqlaşdıqlarını, yüyürdükələrini, ölçülərdə kiçilib və böyümələrini, gözə görünüb-yox olmalarını və yenidən göründükələrini görür. Lakin o, bu görüntülərin tamamilə gerçək olduğunu qəbul etmir; onun ağıl bunlarla məzənlənir. O bilmir ki, hər bir növbəti anda gözüne hansı görüntü görünəcəkdir. Onun ağıl – səhnələr göstərən, özü də ki, tamaşaçı üçün çox qəribə olan, onun tamamilə görmədiyi səhnələr göstərən bir teatrdir». Janna D'Arkin tarixçəsini oxuduqca, biz bu qeyri-adi qızın təmiz qəlbli bəsirətli bir insan olduğunu qəbul etməyə bilmirik; onun cəsarətli, cəmərd eksaltasiyası Fransanın düşmənlərdən azad olunmasına səbəb olmuşdu. Olduqca mümkündür ki, özlərinin bilgilərinin fəvqəltəbii varlıqdan alındığını iddia edən bu bəsirətli adamlardan bir çoxu öncənigörən adamlar idi: onlar özlərinin əmin olduqlarına digərlərini də inandırmağa çalışırdılar. Onların dinlə əlaqələndirdikləri yalanlara və güclü vasitələrə, onların insanlar üçün zəruri həqiqət hesab etdiklərini yaymaq məqsədilə onların özləri tərəfindən də bəraət qazandırılırdı.

Bizim xaric əşyalardan yaranan təassuratlarımızın yaddaşla doğurulan izləri təəyyül məhsullarından xüsusi xarakterlə fərqləndirilir. Biz bu əşyaların bizim yaddaşımızın təyin etdiyi qaydada keçmişdə mövcud olduğunu sanki instinktlə qəbul etməyə meyilliyik. Daima aparılan təcrübələr bizim davranışımız üçün buradan çıxarılan nəticələrin doğruluğunu təsdiq edir və bu meyilliliyi möhkəmləndirir. Sensoriumun bu əməliyyatında bizim mülahizələrimizi müəyyən edən mexanizm necədir? Biz onun haqqında heç nə bilmirik və yalnız onun təsiri nəticələrini görə bilirik. Bu mexanizmin köməyiylə yaddaşın zəif izləri belə onların ilkin gücünü qiymətləndirməyə bizə imkan verir, beləliklə də, biz bu gücü ətrafımızdakı əşyalardan yaranan oxşar təassuratlarla müqayisə edə bilirik. Beləliklə, bizə belə gəlir ki, öncə gördüyümüz işıq

hal-hazırda gözümüzə görünən işıqdan daha parlaqdır.

Yaddaşdakı izləri müqayisə edən təəssürlər, biza, onların səbəblərini xatırlatmağa kömək edir. Biza nə barədə isə danışılmış xatirəyə, bu hekayəti söyləyən şəxsə bizim inam hissimizin xatirəsi də əlavə olunduqda, əgər həmin şəxsin adını xatırlaya bilmiriksə, biz danışdığımız adamların adlarını biza bu inamı təlqin etmiş şəxsin adına çatana qədər bir-bir xatırlayırıq.

Ətrafdakı bizim əvvəldə gördüyümüz əşyalar onlarla əlaqədar olan bizim ilk gördüyümüz şeylərin izlərini canlandırır. Bu izlər isə eyni tərzdə digər əşyaların izlərini canlandırır və s., odur ki, hər hansı ətrafdakı şey haqqında, biz onları sonsuza qədər xatırlaya bilərik və onlardan hansılarına baxmaq istədikdə, diqqətimizi o anda bunlar üzərində saxlayırıq.

Uşaqlıqda biza təlqin olunmuş təəssürlər insanın ən qoca dövrünə qədər qorunub saxlanılır və hətta ahlı yaşda ən güclü təəssürlər silinmiş olduqda belə bunlar canlanır. Sensoriumda dərin həkk olunmuş ilk təəssürlər, sanki yenidən canlanmaq üçün yaşla və ya xəstəliklə sonrakı təəssürlərin yalnız zəifləməsinə gözləyirlər, necə ki, gündüz işığının görünməz etdiyi ulduzlar gecə və ya Günəş tutulmalarında görünürlər.

Yaddaşın izləri zamanın təsiri və bizim xəbərimiz olmadan gərginlikdə yaranır. Bizim aşxam öyrəndiyimiz nəşə, sensoriumda yuxu zamanı yaddaşda həkk olunur və bu qayda ilə asanlıqla yaddaşda qalır. Mən dəfələrlə müşahidə etmişəm ki, mən ən mürəkkəb məsələlər haqqında bir neçə gün fikirləşmədikdə, bunlara mən yenidən nəzər saldıqda, onlar mənə asan görünürdü.

Əgər biz, öz ölçüsü ilə bizi heyrtləndirmiş əşyanı, onunla bircins olan daha böyük əşyaları tez-tez müşahidə etdikdən uzun müddət sonra yenidən görürüksə, o əşyaların doğurduğu təəssürat, bu əşyanın ölçüsünün kiçik olduğu təəssüratını yaratdıqda, onda biz bu təəssürlərin fərqli olmasına təəccüblənirik.

Bəzi adamlar heyrtəməz yaddaş malikdirlər. Eşitdikləri uzun söhbətləri onların dəqiqliklə təkrar etməsi bizi təəccübləndirir. Lakin insanların əksəriyyətinin yaddaşında hər şeyin qorunub qaldığı haqqında düşündükdə, yaddaşın bir-birilə qarışmadan nə qədər şeyi özündə saxlamasına daha da çox təəccüblənirəm. Səhnədə müğənniyə nəzər salın: onun yaddaşı onun rolunun hər bir sözünü, bunların ölçüsünü və hansı hərəkətlərlə müşayiət ediləcəyini ona xatırladır. Əgər yeni rol birinci roldan sonra gəlsə, onda birincisi sanki yaddaşdan silinir, yaddaş ikinci rolun bütün hissələrini lazımi şəkildə bərpa edir və müğənninin öyrənmiş olduğu bütün müxtəlif rolları oxşar şəkildə bərpa edə bilir. Sayı olduqca çox olan bu izlər və ya heç olmasa bu izləri doğura bilən hal, onun sensoriumunda bir-birinə qarışmadan mövcuddur və aktyor öz arzusu ilə bunları canlandırır. Mən burada təkrar etməliyəm ki, *iz, obraz, dəyişikliklər* (rus. колебание) və s. sözləri ilə mən, yalnız, sensoriumun hallarını ifadə etmək istəmişəm və onların təbiəti və onların səbəbləri barədə heç bir mülahizə yürütmək fikrində olmamışam; bunu mexanikada effektlərin yalnız *güc, cazibə, oxşayış* və s. sözlərlə ifadə edilməsinə analoq kimi hesab etmək olar.

Sensoriumun təsirləri və sensoriumun yerinə yetirmək üçün məcbur etdiyi hərəkətlər daha da yüngül və tez-tez təkrar olunduğundan təbii olur. Bu psixoloji prinsiplərin bizim vərdişlərimiz yaranır. Simpatiya ilə müxtəlif cür birləşərək, o, özünəməxsus vərdişlər və adətlər, xüsusiyyətlər əmələ gətirir. Bu prinsipə əsasən hər hansı bir xalq digəri üçün ümumqəbul olunan nəyəşə dəhşətlə baxır. Romalıların ehtirasla sevdikləri qladiator döyüşləri və insan qurbanları vermə tamaşaları – xalqlar salnamələrini ləkələyən belə tamaşalar – biza dəhşətli görünərdi. Hindistanda qulların acınacaqlı vəziyyətlərinə, parilərin alçaldılmasına, bizim bütün hissələrimizin dəlillərinə və ağılımıza zidd olan çoxsaylı etiqadların mənasızlığına baxdıqda, kədər hissi ilə görürsən ki, köləlik və xurafat insanları nə dərəcədə alçalda bilər.

Sensoriumun tez-tez təkrar olunmalar yolu ilə gələ bildiyi bu vəziyyət, insan orqanizmindən asılı olan meyllərdən yaranmış adətlərin fərqləndirilməsini olduqca çətinləşdirir; çünki, təbii olaraq, fikirləşirsən ki, heyvanlarda olduqca yayılmış və möhtəşəm olan instikt, insanlarda da tamamilə itmiş və ananın övladına bağlılığı da məhz bu instikt nəticəsindədir. Adət və simpatianın ikiqat təsiri bu meylləri dəyişir və çox vaxt bunları möhkəmlədir; bəzən o, bunları o dərəcədə dəyişdirir ki, onlar özlərinə əks olanları ilə əvəz olunurlar. İnsanlar və heyvanlar

üzərində aparılan və davamlı olaraq, aparılması böyük maraq kəsb edən bəzi müşahidələr, adətən, bizi belə fərz etməyə sövq edir ki, adətlərin sensoriuma böyük dayanıqlılıq vermiş olduğu dəyişikliklər atalarından övladlarına, bir çox üzü bacarıqların keçilməsi kimi, nəsilədən nəslə keçir.

Daimi təmrinlərin orqanlara sirayət etmiş olduğu asanlıqla şəklini dəyişmə xüsusiyyəti nəticəsində, bu orqanlar, iradə vasitəsilə ötürülmüş hərəkətləri öz-özünə yerinə yetirməkdə davam edir. Biz yolu getdiyimiz zaman, beynimiz hər hansı bir fikirlə məşğul olduğu halda, bizim hər bir andakı hərəkətimizi yeniləşdirən səbəb, bizim iradəmizin iştirakı olmadan təsir göstərir və biz bu barədə hətta heç düşünmürük. Belə hallar olmuşdur ki, yol getdiyi zaman yuxuya dalmış adamlar öz yollarına, yalnız hər hansı maneə ilə qarşılaşana qədər davam edirlər. Belə görünür ki, sanki belə gediş, hərəkət sistemində yerə getmək istəyi verən vəziyyətlə əlaqədar baş verir, bu da spiral yayın burulması nəticəsində saatın işləməsinə bənzəyir. Heyvani qənaətcilikdə pozuntu belə vəziyyəti yarada bilər. Gözmə hərəkəti iradədən asılı olmadan baş verən xəstəliyə duçar olmuş bir xəstəni müalicə edən çox savadlı bir həkimdən mən öyrəndim ki, xəstə yalnız tərpənməyən dayaq nöqtəsindən tutarsa, o, dayana bilər. Beləliklə, həkimlər öz məharətlərini və dəqiq kritik münasibət bildirən riyaziyyatın və ehtimallar haqqında elmin xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi qabiliyyətini verən uzlaşan elmlərin bilgisini birləşdirdikdə, xəstəliklər üzərindəki müşahidələr psixologiyayı olduqca aydınlaşdırma bilər.

Sensoriumun izlərinin qarşılıqlı təsiri barədə bizim dediklərimizdən belə aydın olur ki, musiqi tez-tez təkrar olunması yolu ilə bizim hərəkətlərimizə öz ölçüsünün düzgünlüyü barədə məlumat verə bilər. Məhz bunu, biz, rəqslərdə və bu tərzdə tənzimlənən müxtəlif məşqlərdə hərəkətlərin biza qeyri-adi görünən dəqiqliyini müşahidə edirik. Musiqi bu rəqslərlə, adətən, bir çox adamın eyni zamanda yerinə yetirdikləri hərəkətləri yüngülləşdirir.

Olduqca gözəl psixoloji təzahür – diqqətin sensoriumun izlərinə güclü təsirdir. Bu təsir onların canlılığını artırır və kənardan olan müşayiətedici təəssürləri azaldır. Əgər biz əşyaya onun hansısa xüsusiyyətlərini fərqləndirmək məqsədilə çox diqqətlə baxırıqsa, onda bu diqqət bizi, gözün tor qışasına digər əşyalardan olan təəssürlərə qarşı hissiyyətsiz edə bilər. Bu diqqətin köməyiylə bizim müqayisə etmək istədiyimiz əşyaların obrazları yalnız onların münasibətlərinin bizim diqqətimizdə olması üçün zəruri güc əldə edir; o, bu müqayisəni edə biləcək yaddaş izlərini oyadır və bunun nəticəsində diqqət insan əqlinin möhtəşəm payına çevrilir.

Diqqət əşyaların hər hansı xüsusi bir keyfiyyətinə tez-tez yönəldikdə, o, orqanlara elə incə hissiyyət aşılayır ki, hər bir xüsusiyyət, hətta adi adam üçün seziilmədiyi halda belə, o, bu keyfiyyəti görməyə səbəb olur.

Bu prinsiplər mənzərələrin yaratdığı qəribə effektləri izah edir. Perspektiv qaydalarına bunlarda yaxşı riayət olunmuşdursa, onda əşyalar gözün tor qışasında real olduğu kimi həkk olunur; onda tamaşa edən şəxs əşyaların realıqda yarada bildiyi vəziyyətdəki vəziyyətdə olur. Lakin perspektiv eyniliyin mükəmməl həddə çatması üçün kafi olan dəqiqliyə çatma bilmir. Bundan başqa, kənar təəssürlər, hətta zəiflə belə, perspektivin yaratdığı əsas təəssürlərə qarışaraq, əvvəlcə illüziyanı məhv edir. Mənzərəyə toparlanmış diqqət onları məhv edir; lakin bundan ötrü sensoriumun vəziyyətindən və mənzərənin mükəmməlliyindən asılı olaraq çox və ya az uzun zaman tələb olunur. Mənim gördüyüm bütün mənzərələrdə tam illüziya almaq üçün, zəruri olaraq, mənə bir neçə dəqiqəlik vaxt kifayət etmişdi.

Psixologiyanın növbəti prinsipi bu əsərin predmetinə birbaşa aidiyyəti olan təzahürlərin böyük əksəriyyətini izah edir: «Əgər sensoriumun xüsusi bir dəyişikliyinə yaranan hərəkətlər tez-tez təkrar olunarsa, onda onların bu orqana reaksiyası bu dəyişilməni yalnız artırmaq deyil, hətta bəzən onun səbəbi də ola bilər». Məsələn, sallanmış uzun bir zənciri tutan əlin hərəkəti zəncir boyunca onun axırncı son nöqtəsinə qədər yayılır; və zəncir hərəkətsiz vəziyyətdə olduqdan sonra, onun bu ucunu hərəkətə gətirdikdə, zəncirdəki hərəkət ələ qədər qalxaraq, öz növbəsində onu hərəkət etdirəcəkdir. Bu qarşılıqlı hərəkətlər tez-tez təkrar olunduqda qarşılıqlı hərəkətlər yüngülləşir.

Bu prinsipin inama təsiri olduqca yaxşıdır. İnəm və ya məlum təkliflə bizim razılığımız, adətən, aşkar-aydınlığa, hisslərin dəlillərinə və ya ehtimallara əsaslanır; bu sonuncu halda onun güc dərəcəsi ehtimalın nə dərəcədə olmasından asılıdır, bu isə öz növbəsində verilənlərdən – özünün mülahizə predmeti haqqında hər bir şəxsin malik ola bildiyi verilənlərdən asılıdır.

Biz tez-tez öz inamımızla həmahəng hərəkət edirik və onun dəlil-sübutlarını yada salmağa belə ehtiyac duymuruq. Deməli, inam sensoriumun dəyişilməsidir, bu dəyişilmə bu dəlil-sübutlardan asılı olmadan mövcuddur, hətta bunlar çox vaxt unudulmuş olur və bizi, onun təsir sonrasına olan hərəkətləri yerinə yetirməyimizə sövq edir. Bizim indicə şərh etdiyimiz bu prinsipə görə bu hərəkətlərin tez-tez təkrar olunması bu dəyişilmələri yarada bilər, xüsusilə də, əgər bunlar çox sayda adamlar tərəfindən təkrar olunurlarsa, çünki, onların reaksiyalarının gücünə simpatiya üçün zəruri olan təqlid etmə hakimiyyəti birləşmiş olur. Bu hərəkətlər üzərimizə şərtlər qoyan bir öhdəçilik olduqda, onda bizim sağlamlığımız üçün ən əlverişli vəziyyət almağa sövq edən heyvani qənaətcilliyə can atmaq, həm də bizi inamlı olmağa təhrik edir və bu inam nəticəsində biz bu hərəkətləri zəvq hissi ilə yerinə yetiririk. Bütün bu səbəblərin təsiri altına düşməyən insanların sayı azdır.

Paskal öz fikirlərinin bir fəslində bu effektləri çox yaxşı açıqlamışdır; bu fəslin özünəməxsus başlığı vardır: *Allahın varlığını təbii dərk etmə yolu ilə isbat etmək olduqca çətindir və bu yolda ən doğru olanı – Ona inanmaqdır*. O, etiqadsızlara xitabən öz fikrini belə ifadə edir: «Siz dinə qovuşmaq istəyirsiniz və ona aparan yolu bilmirsiniz; siz inamsızlıqdan yaxa qurtarmaq istəyirsiniz və buna bir çarə yolunu soruşursunuz. Siz bu çarəni sizin kimi olanlardan və hazırda dini etiqada heç bir şübhəsi olmayanlardan öyrənin. Onlar sizin getmək istədiyiniz bu yolu getmişlər və onlar sizin sağalmaq istədiyiniz bu xəstəlikdən sağalmışlar. Onların başladıqları kimi başlayın. Onların daxili vəziyyətində hələ ola bilmirsinizsə, onların xarici hərəkətlərini təqlid edin; sizi son dərəcə məşğul edən bu boş əyləncələri atın. Siz deyirsiniz ki, əgər mən inansaydım, bu əyləncələri o anda hökmən atardım. Mən isə sizə deyirəm ki, əgər siz bu əyləncələri atmış olsanız, siz onda həmin anda mənə inana bilərsiniz. Başlangıç sizin tərəfdən qoyulmalıdır. Əgər mən bacarsaydım, mən sizə bu inamı verərdim; mən bunu edə bilmirəm və deməli, sizin dediklərinizin doğru olduğuna inanmağı bacarmıram; siz isə əyləncələri tamamilə ata bilərsiniz və sınaqdan keçirə bilərsiniz ki, mənəm dediklərim doğrudur, ya yox».

«Çaşmaq lazım deyildir: biz nə dərəcədə cismani bədəniksə, o dərəcədə də ruhuq; buradan alınır ki, hər hansı bir əqidəyə qovuşma vasitəsi yalnız sübut-dəlillərdən ibarət deyildir. Nə qədər az şey isbat olunmuşdur! İbatatlar yalnız ağıl inandırır; vədişlər bizim hissatlarımıza böyük güc verir. Bunlar bizim ruhumuzu əyləndirən hisslərimizi bizdən xəbərsiz müxtəlif hallara salır. Kim isbat etmişdir ki, sabah gün olacaqdır ki, biz öləcəyik. Başqa elə bir şey varmı ki, ona olan inam daha çox yayılmış olsun? Deməli, bizi inandıran vədişdir; bu nə qədər insani türk və bütperəst edir, bu vədiş bəzilərini sənatkar, digərlərini əsgər və s. edir. Doğrudur, həqiqətə^{*} qovuşmaq üçün ondan başlanılmamalıdır, lakin ağıl həqiqətin harada olduğuna inanmışdırsa, həmişə bizim nəzərimizdən yayınan bu inama qovuşmaq və onun dərinliyinə varmaq və nurlanmaq üçün bu vədişlərə müraciət gərəkdir; belə ki, həmişə hazır şəkildə olan dəlil-sübuta malik olmaq olduqca çətindir. Ən yüngül etiqada yiyələnmək lazımdır, beləsi – adət olunmuş etiqaddır, bu etiqad zor tətbiq olunmadan, isbat olunmadan, bacarıq tələb etmədən bizi nəyəyə inanmağa məcbur edir və bizim gücümüz bu etiqada sitayiş edir, odur ki, bizim ruhumuz təbii olaraq ona tənə olmur. Əgər bizim hisslərimiz bizi əks istiqamətə yönəldirsə, yalnız inamın gücünə inanmaq kifayət deyildir. Ona görə də, bizim varlığımızın hər iki cəhəti işə salınmalıdır: ağıl – dəlillər vasitəsilə, o dəlillər ki, onları bir dəfə nəzərdən keçirmək kifayətdir və vədişlər vasitəsilə, lakin hisslər bu zaman bu hisslərin zidd olanlara meyli etməsinə imkan verməlidir».

* burada Paskal unudur ki, o, elə indicə məsləhət gördü ki, inama qovuşmaq üçün məhz xarici təsirlərdən başlanılmalıdır.

Paskalın etiqadsızları etiqada gətirmək üçün təklif etdiyi vasitə, uşaqlıqdan qazanılmış və vədişdən asılı olaraq, kök salmış mövhumatı darmadağın etmək üçün müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Mövhumatların belə növü çox vaxt fəal təsəvvürlərdə ən sadə boş səbəbdən yaranır. Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs *sol* sözü ilə bədbəxtlik haqqında fikri əlaqələndirir, hər gün sağ və sol əlin görə biləcəyi işi sağ əli ilə görür; bu vədiş bu işdə sol əldən istifadəyə nifrəti o dərəcədə artırır ki, ağıl bu mövhumat qarşısında gücsüz ola bilər. Bir çox cəhətdən qeyri-adi ağıla malik Avqustun özünü bir zəif cəhətə görə qınadığını fərz etmək olar: o, yarmarkadan sonrakı gündə yola çıxmağa cürət etmirdi və o, bu zəifliyindən xilas olmaq istəyirdi. Lakin o, bədbəxt sayılan bu günlərdən birində gəzintiye çıxmaq təşəbbüsündə olduğu anda öz-özünə belə deyər bilirdi ki, gəzintini təxirə salmaq *daha təhlükəsiz* olardı, o, bu hissin təsiri altında olma vədişi ilə bu tərzdə öz nifrətini daha da artırır. Bu mövhumatların zidd hərəkətlərin tez-tez təkrarlanması, zaman ötdükcə onları zəiflətməli və tamamilə yox olmağa məcbur etməlidir.

Bizim çox vaxt minnətdar olduğumuz insanlara hiss etdiyimiz bağlılıq, bizim indicə inkişaf etdirdiyimiz prinsipdən alınır. Onların hərəkətlərinin tez-tez təkrarlanması təbii nəticəsi onların özü olan hissi onların xeyrinə çoxaldır və hətta bəzən də onu doğurur. Hər hansı bir şeyə meyillilik, bizi onu dəfələrlə təkrar etməyə məcbur edən hərəkətlər, bu meyilliliyi bir ehtirasa çevirir.

Əvvəldə qeyd etdiklərimizdən görünür ki, bizim etiqadımız bizim vədişlərimizdən nə dərəcədə asılıdır. Məlum növ ehtimallara əsasən hərəkət etməyə və mühakimə yürütməyə vədiş etdiyimizdən, biz bu ehtimalları instinktiv olaraq dəstəkləyir və bunlar bizi mülahizə və ya hesablama nəticəsi olan daha yüksək sayılan ehtimallardan daha çox inandırır. Doğruyaoxşar olmayan şey bizi çox vaxt şübhələndirir: əgər o, bizim adət etdiyimiz ehtimallara zidd olursa, biz onu tərəddüd etmədən nəzərə almırıq. İllüziyaların bu səbəbini mümkün olduqca zəiflətmək üçün aqla təsəvvür və hisslərin köməyi olmalıdır. Uyğun ehtimalları ayrılaraq şəkildə təsvir edəriksə, biz bunların fərqi olduqca yaxşı hiss edə bilərik. Qeyri-adi faktı möhkəmləndirən şahid ifadəsinin ehtimalını təsəvvür edən əyri, bu faktın doğruyaoxşar olmağını təsvir edən əyri ilə yanaşı yerləşdirildikdə, bu şahid ifadəsinin səhv ehtimal olduğunu çox nəzərə çarpdırardı, necə ki, dağların hündürlüyü təsvir olunmuş şəkil, bu hündürlüklərin bir-birilə nə cür nisbətə olduğu haqqında təsəvvür yaradır. Bu vasitə bir çox hallarda tətbiq oluna bilər. Kainatın hüdudsuzluğunu hiss etmək üçün, millimetrimin onda bir hissəsini Fransa ərazisinin ən böyük uzunluğu ilə – demək olar ki, çox kiçik bir kəmiyyətlə ifadə edək; Yerdən Günəşə qədər məsafə on dörd metrə bərabər olacaqdır; ən yaxın ulduza qədər olan məsafə bir milyon yarım metrədən də artıq olacaqdır, yəni ən yuxarı nöqtədən gözə görünən ən geniş üfünqün radiusunun yeddi və ya səkkiz mislinə bərabər olacaqdır. Hətta bununla belə, ən parlaq ulduzlardan sonsuzluğa qədər uzanan kainatın böyüklüyünün yalnız ən zəif mənzərəsinə ala biləcəyik. Lakin bu mənzərənin zəifliyinə baxmayaraq, bu kifayət edir ki, insanın bütün təbiət üzərində üstünlüyü haqqında təsəvvürlərinin – bu dərəcədə qərribə nəticələr çıxarılmış təsəvvürlərin mənasızlığını, hiss etməyə məcbur etsin.

Nəhayət, psixoloji prinsip kimi gümanların ehtiraslarla artmasını göstərək. Bizim ən çox qorxduğumuz və ya arzu etdiyimiz şey, biza, məhz buna görə də, daha ehtimalı görünür. Sensoriumda onun güclü həkk olunmuş obrazı zidd gümanların təəssüratlarını zəiflədir və bəzən onları o dərəcədə hamarlaşdırır ki, bizi bu şeyin baş verdiyinə inanmağa belə məcbur edir. Mülahizələr və zaman, bu hisslərin canlılığını azaldaraq, aqla hadisələrin ehtimallarının düzgün qiymətləndirilməsi üçün zəruri olan sakitliyi bərqərar edir.

Sensoriumdakı bütün dəyişikliklər, bütün hərəkətlər kimi dinamikanın qanunlarına tabedirlər və bunu təcrübə də sübut etmişdir. Bunların əzələ sistemində ötürdüyü hərəkətləri bu sistem kənar cisimlərə ötürür, bu – yayın açılmasında olduğu kimi baş verir və bu hərəkətlər belədir ki, bizim bədənimizin və onun hərəkətlə gətirdiklərinin ümumi ağırlıq mərkəzi tərpənməz qalır. Bu dəyişikliklər, mayədə dalğaların birləşdiyi kimi bir-birilə qarışmadan yığılır. Səs verən cismin rəqsləri onun əhatəsindəki cisimlərə sirayət etdiyi kimi, bu dəyişmələr də insanlara sirayət edir. Mürəkkəb ideyalar sadələrdən yaranır, necə ki, dəniz qabarması Günəş və Ayın təsiri ilə yaranan hissəvi qabarmalardan

yanarır. Bir-birinə əks olan niyyətlər arasındakı tərəddüd bərabər qüvvələrin tarazlığıdır. Sensoriumda yaranan ani dəyişikliklər müqavimətlə qarşılaşır, bu müqaviməti də maddi sistem oxşar dəyişikliklərə qarşı qoyur; və əgər biz sarsıntılara məruz qalmamaq və canlı qüvvəmizi itirmək istəmiriksə, onda elə bu sistemdəki kimi, hiss edilməyəcək keçidlər vasitəsilə hərəkət etməliyik. Gərgin və davamlı diqqət sensoriumu əldən salır, necə ki, elektrik zərbələri dirəklərin voltlarını və ya elektrik cərəyanı balıqların orqanlarını zəiflədir. İntellektual şeyləri hiss olunan etmək üçün, maddi cisimlərdən bəhs etdiyimiz müqayisələrlə, demək olar ki, hamısı mahiyyət etibarilə eyniliklərdir.

Mən arzu edirəm ki, əvvəlki düşüncələrimiz, fikirlərimiz özünün mükəmməl olmamasına baxmayaraq, tədqiqatçı filosofların diqqətini sensoriumun qanunlarına və ya intellektual aləmə cəlb edirdi, – o qanunlara ki, onların məğzində varmaq, fiziki aləmin qanunlarına varmaq kimi, bizim üçün o qədər də önəmlidir. Bu iki aləmin təzahürlərinin izahı məqsədlə müəyyən dərəcədə bir-birinə oxşar hipotezlər fəxrəşmişlər; lakin bu hipotezlərin əsası bizim bütün tədqiqat və hesablama üsullarından yayındığına görə, bunlar haqqında Montenlə birgə belə söyləmək olar ki, *cahillik və hər şeyi öyrənmək həvəsinin olmaması – iki yumşaq yastıqdır ki, düşüncə bilən başı uyutsun.*

Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları

İnduksiya, faktlara söykənən və yeni müşahidələrlə həmişə yoxlamalara əsaslanan hipotezlərin analogiyası, bunların göstərişləri ilə təcrübənin hər dəfə müqayisə olunması ilə əsaslandırılan xoşbəxt təbii fakt, – budur gerçəkliyə qovuşmanın əsas vasitələri.

Əgər biricins əşyalara diqqətlə baxılırsa, onda bunlar arasında və onlardakı dəyişikliklərdə elə münasibətləri görmək olar ki, bu müşahidələri davam etdirdikcə, bunlar getdikcə daha çox aşkar olunur və bu münasibətlər daima daha çox yayılaraq və ümumiləşərək, sonda onların yaranmış olduqları prinsipə gətirir. Lakin əksər hallarda bu münasibətlər o qədər kənar təsirlərlə görünməz olur ki, bunları seçib ayırmaq və bu prinsipə gəlib çatmaq üçün həddən artıq ağır tələb olunur: əsl elm dahisi bunlarla səciyyəli. Analiz və natural fəlsəfə özünün mühüm kəşflərinə görə *induksiya* adlanan məhsuldar metoduna borcludur: Nyuton özünün binom haqqındakı teoremi və ümumdünya prinsipiə görə bu metoda borcludur. Ən sadə münasibətlərin mahiyyətcə ən adi münasibətlər olduğuna, analizdə alınan təsdiqlənmiş düsturlara və təbii proseslərdə, o cümlədən, kristallaşmada, kimyəvi birləşmələrdə tapdıqlarımıza əsaslanan induksiya nəticələrinin ehtimallarını qiymətləndirmək çətinidir. Münasibətlərin belə sadəliyi, əgər nəzərə alınarsa ki, təbiətdə bütün baş verənlər, – çox olmayan dəyişməz qanunların riyazi nəticələrindən başqa bir şey deyildir.

Lakin elmin ümumi prinsiplərini kəşf etməyə imkan verən induksiya onların dəqiqliyini müəyyənəlmək üçün kifayət etmir. Bunlar hələ isbatlarla və ya son təcrübələrlə təsdiq olunmalıdır, belə ki, elm tarixi bizə göstərir ki, induksiya bəzən dəqiq olmayan nəticələrə gətirmişdir. Sadə ədədlər haqqında Fermatın bir teoremini misal çəkmək istəyirəm; bu dahi həndəsəçi bu ədədlərin nəzəriyyəsinə dərindən diqqət yetirərək, elə bir düstur axtarırdı ki, bu düstur yalnız sadə ədədlərlə ifadə olunaraq, əvvəlcədən verilən ixtiyari ədəddən böyük olan sadə ədədi bilavasitə tapmaq üçün istifadə oluna bilsin. İnduksiya onu belə fikrə gətirmişdi ki, ikinin qüvvət üstünə bərabər qüvvətə yüksəldilmiş iki rəqəmi üzərinə vahid əlavə edildikdən sonra alınan ədəd sadə ədəddir. Məsələn, kvadrata yüksəldilmiş iki, üstəgəl vahid sadə ədəd – beşə bərabərdir: ikinin kvadratına yüksəldilmiş iki və ya on altı üstəgəl vahid onyeddiyə bərabərdir. O tapmışdı ki, bu, həтта, ikini səkkiz və onaltıncı dərəcədə qüvvətə yüksəlib, vahid əlavə edildikdən sonra alınan ədədlərin sadə ədədlər alınması ilə təsdiq olunan üsul – doğru üsuldur; və bu induksiya bir çox arifmetik mülahizələrə əsaslandığından bu nəticəyə, o, ümumi bir nəticə kimi baxmaq fikrinə gəlmişdi. Lakin o etiraf edir ki, o, bu nəticəni isbat etməmişdir. Əslində, Eyler tapmışdı ki, bu müddəa ikini ötuz dərəcədə qüvvət üstünə yüksəldib, vahid əlavə edildikdə yerinə yetmir, belə ki, alınan $4\ 294\ 967\ 297$ ədədi sadə ədəd olmayıb, 641 -ə bölünür.

Biz induksiyaya əsasən fikirləşirik ki, əgər, məs., müxtəlif hadisələr, hərəkətlər, uzun müddət ərzində sadə münasibətlə əlaqələnməmiş şəkildə

daima baş verirsə, onda onlar bu münasibətə həmişə tabe olaraq baş verəcəklər: buradan isə biz ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanaraq, belə nəticə çıxarıyıq ki, bu münasibət təsadüfdən deyil, requlyar səbəbdən asılıdır. Beləliklə, Ayın dövr etmə və fırlanma hərəkətlərinin bərabərliyi, Ay ekvatorunun və orbitinin düyünlərinin hərəkətlərinin bərabərliyi və bu düyünlərin üst-üstə düşməsi; Yupiterin üç ilk peykinin hərəkətləri arasındakı xüsusi münasibət: – birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikincinin orta uzunluq dairəsinin üç misli plus üçüncünün uzunluq dairəsinin iki misli iki düz bucağa bərabərdir; Ayın meridiandan keçdiyi anlar arasındakı zamanın qabarma və çəkilmə arasındakı müddətlərin bərabərliyi; ən güclü qabarma və çəkilmələrin sızıgıyalarla birlikdə ən kiçiklərinin isə kvadratlara ilə qayıtması, – bütün bunlar tətbiq olunmağa başlandıqından dəyişməyən səbəblərin varlığını hədsiz doğruxa oxşarlıqla göstərir; və bu səbəbləri ümumdünya cazibə qanunu ilə əlaqələndirmək həndəsəçilərə müyassər olmuşdur, bunu bilmək isə münasibətlərin qeyd olunan sabitliyini yəqinliyə çevirir.

Əsl fəlsəfi metodun fəal tərəfdarı və gözəl nətiq – Kansler Bekon, olduqca qoribə tərzdə induksiyaadan sui-istifadə edib ki, Yer in hərəkətsizliyini isbat etsin. O, özünün əsərlərindən ən dəyərlisi – *Novum organum*da belə mühakimə edir. Səyyarələrin şərqdən qərbə hərəkəti Yerdən uzaqlaşdıqca daha sürətli olur. Bu hərəkət ulduzlar üçün daha sürətlidir: Saturn üçün bu hərəkət bir az, Yupiter üçün bir az çox və s. yavaşdır, Aya qədər və daha yüksəklikdəki kometlər üçün də bu belə davam edir. Bu atmosferdə də görünür, xüsusilə də, tropiklər arasında havanın molekulları ilə yaranan böyük dairələr nəticəsində; nəhayət, okean üçün bu, demək olar ki, görünmür; odur ki, bu hərəkət Yer üçün sıfır bərabərdir. Lakin bu induksiya yalnız onu sübut edir ki, Saturn və ondan aşağıdakı səyyarələr öz məxsusi hərəkətlərinə malikdirlər və bu hərəkətlər haqiqətdə olduğuna əks və ya Şərqdən Qərbə bütün Göy qübbəsinə zəbt etmiş kimi görüntüsü və daha uzaq səyyarələr üçün daha yavaş hərəkət görüntüsünü verir və bu da optik qanunlarla uzlaşır. Əgər Yer hərəkətsiz olsaydı, səyyarələrin öz birgünlük dövrünü başa vurmaı üçün onların hərəkətlərinin sürətləri ağılaşırmaz olmalıydı ki, bu da Bekonu heyrləndirmiş olardı, əgər Yer in fırlandığı fərz olunardısı, o, bir-birindən olduqca uzaq cisimlərin – ulduzlar, Günəş, planetlər və Ayın bu fırlanmaya tabe olduqları kimi olduqca sadə izahına da çox təəccüblənmiş olardı. Okean və atmosferə gəldikdə, Bekon bunların hərəkətlərini Yerdən çox uzaq səyyarələrin hərəkətlərinə bənzətməməliyd, belə ki, hava və dəniz Yer kürəsinin bir hissəsi olduğundan, onun hərəkətini və ya hərəkətsizliyini paylaşmalıdırlar. Çox təəssüf doğurur ki, çox yüksək nöqtəyi-nəzərlərə öz dühası ilə diqqət yetirən Bekon kainat haqqında Kopernik sisteminin möhtəşəm təsəvvürünə maraq göstərməmişdi. Əgər o, bu marağı göstərmiş olsaydı, bu sistemin xeyrinə ona məlum olan Qaliley kəşflərində güclü analoqlar tapa bilərdi. Haqiqəti tədqiq etmək üçün o, məsləhətlər verirdi, lakin misal göstərmirdi. Diqqətin müşahidə və təcrübələrə cəlb olunması üçün o, öz dalil-sübutları və gözəl natiliq qabiliyyəti ilə, məktəbin boş inceliklərdən imtina etməsi zəruriliyində təkid edərək və təzahürlərin ümumi səbəblərinə keçməyin əsl metodunu göstərərək, bu dahi filosof, ömrünü başa vurduğu o gözəl əsrdə, insan aqlının nail olduğu möhtəşəm uğurlara səbəb olmuşdu.

Analogiya belə ehtimala əsaslanır ki, oxşar şeylər biricins səbəblərdən baş verir və eyni nəticələrə malikdirlər. Bu oxşarlıq mükəmməl olduqca, bu ehtimal da o dərəcədə artır. Odur ki, biz şübhə etmədən belə qərara gəlirik ki, eyni orqanlara malik varlıqlar eyni hissələr keçirirlər və eyni istəklərlə hərəkət edirlər. Öz orqanları üzrə bizə yaxın heyvanların bizim hissiyyatımıza analoji hissiyata malik olması ehtimalı bizim növdən fərdlərə aid ehtimaldan kiçik olsa da, hələ də olduqca böyükdür və bəzi filosofları, heyvanların sadə avtomatlar olduqlarını düşünməyə məcbur etmək üçün, bütün dini xürafatın təsiri lazım olmuşdu. Heyvanların orqanlarının bizim orqanlara oxşarlığı azaldıqda, onlarda hissiyyat olması da azalır; bununla belə, bu ehtimal həтта həşəratlar üçün çox böyükdür. Eyni növ həşəratların nəsilən-nəslə, tamamilə eyni tərzdə, olduqca mürəkkəb hərəkətlər yerinə yetirdiklərini görərək, biz onlardan öyrənməyərək, belə düşünməyə meyllilik ki, onlar məlum növ

yaxınlığa görə hərəkət edirlər; bu – kristalların molekullarını yaxınlaşdırən yaxınlığa analogiyadır, lakin bu yaxınlıq bütün canlı orqanizmlərə xas olan hissiyyatla qarışaraq, kimyəvi birləşmələrə xas olan düzgünlüklə daha çox qeyri-adi birləşmələr yaradır: seçici yaxınlıq və hissetmənin bu qarışığını, bəlkə də, *heyvani oxşarlıq* adlandırmaq olardı. Bitki və heyvanların quruluşu arasında çoxlu analogiya olmasına baxmayaraq, mənə belə gəlir ki, bitkilərin hissiyata malik olduğunu düşünmək üçün bu kifayət etmir; lakin bunu istisna etməyə də heç bir şey bizə haqq vermir.

Günəş öz işığı və istisi ilə Yer üzündəki canlılara və bitkilərə yaxşı təsir etdiyindən, biz, analogi olaraq, belə düşünürük ki, o, digər planetlərə də belə təsir göstərir: belə ki, gördüyümüz kimi fəaliyyəti hərtərəfli inkişaf edən materiyanın Yupiter kimi böyük bir planetdə inkişafsız qaldığını düşünmək qeyri-təbii olardı; bu planetin Yer kürəsi kimi öz gündüzləri, öz gecələri və öz illəri vardır və burada aparılan müşahidələrə görə olduqca fəal qüvvələrin olduğu gümanı verən dəyişikliklər baş verir. Lakin buradan planetlərin və Yer sakinlərinin oxşarlığı barədə nəticə çıxarmaq analogiyanın olduqca genişləndirilməsi olardı. Nəfəs aldığı atmosferə və yaşadığı temperatura öyrənmiş insan, mənəcə, digər planetlərdə yaşaya bilməzdi. Bizim kainatın aləmlərinin müxtəlif şəraitlərinə uyğun orqanizmlərinin sonsuz bir çoxluğu mövcud ola bilməzmi? Əgər yalnız mühit və iqlimdəki fərq Yer in xəlx olunmuşlarına belə müxtəliflik versə, onda müxtəlif planetlərin və onların peyklərinin xəlx olunmuşları nə dərəcədə çox fərqlənə bilərlər? Ən güclü təsəvvür belə bunlar haqqında heç bir təsvir yarada bilməz; lakin onların mövcudluğu olduqca doğrudur.

Güclü analogiya bizi ulduzlara, bizimkinə oxşar, kütləsinə mütənasib cazibə qüvvəsinə malik və məsafələrinin kvadratına isə tərs mütənasib olan günəşlər kimi baxmağa sövq etdirir. Çünki, bu qüvvə Günəş sisteminin bütün cisimləri və onların ən kiçik molekulları üçün isbat olunmuşdur, onun bütün materiyaya xas olduğu güman edilir. Bir-birinə yaxın olduğundan, *əksiz* adlandırılan kiçik ulduzların hərəkətlərindən artıq görünür ki: bunların qarşılıqlı cazibəsinin olduğunu heç bir şübhə altına almamaq üçün, bunların bəzilərinin digərləri ətrafında dövrətmə hərəkətini təsdiq edən, ən çoxu bir yüzillik, dəqiq müşahidələr aparılmalıdır.

Bizi hər bir ulduzu planet sisteminin mərkəzi kimi fərz etməyə sövq edən analogiya əvvəlki analogiyadan daha az güclüdür, lakin o, bizim ulduzlar və Günəşin yaranması barədə təklif etdiyimiz hipotezə əsasən doğrudur; çünki bu hipotezə görə hər bir ulduz, Günəş kimi, əvvəlcə geniş bir atmosferlə əhatə olunmuşdu, təbii olaraq, bu atmosfərə də Günəşi əhatə etmiş atmosferdə baş verənləri şamil etmək olar və fərz etmək olar ki, bu atmosferin sıxılması nəticəsində planetlər və peyklər əmələ gəlmişdir.

Çoxlu elmi kəşflərə görə biz analogiyaya borcluyuq. Elektrik təzahürlərinin ildırım effektilərlə analogiyası atmosfer elektrikin kəşfi kimi ən gözəl bir kəşfə səbəb oldu.

Haqiqət axtarışında ən doğru metod, – induksiyanın köməyi ilə hadisələrdən qanunlara, qanunlardan qüvvələrə keçməkdən ibarətdir. Qanunlar, məhz, ayrı-ayrı təzahürləri bir-birilə əlaqələndirən münasibətlərdir: bunlar yarandıqları qüvvələrin ümumi prinsipini açıqladığı zaman, əgər mümkünse, bu prinsipi ya bilavasitə təcrübələrlə yoxlayırlar, ya da ki, o, məlum təzahürlərlə uzlaşdığını tədqiq edirlər; əgər ciddi analiz vasitəsilə bütün bunların ən kiçik xırdalıklarına qədər bu prinsipdən alındığına əmin olurlarsa, əgər bundan başqa bunlar olduqca müxtəlif və çoxdurlarsa, onda elm ona müəssər ola bilən mükəmməlliyi və ən yüksək dərəcəli yaqınlığı qazanmış olur. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi astronomiyanın belə olmasına səbəb olmuşdur.

Elm tarixi göstərir ki, induksiyanın keçmiş olduğu bu çətin və uzun yol hər zaman kəşf edənlərin yolu olmamışdır. Səbəbləri müəyyənləşdirməyə səbrsizliklə tələsən təsəvvür, hipotezlər irəli sürməyi sevir; əksər hallarda onun irəli sürdüyü bu hipotezlərə faktları tabe etmək üçün o, bu faktları təhrif edir; onda bu hipotezlərin nəzərə alınması təhlükəlidir. Lakin bu təzahürlərin qanunlarını aydınlaşdırmaq üçün bu hipotezlərə yalnız onları bir-birilə əlaqələndirən vasitə kimi baxılırsa, onlara reallığı şamil etməkdən yayınmaq istədikdə, onlar daima yeni

müşahidələrlə düzəldilir, bunlar əsl səbəblərə çatdıra bilir və ya biza, heç olmasa, müşahidə olunmuş təzahürlərdən verilmiş şəraiti doğrulayaraq təzahürləri müəyyən etmək imkanını yaradır.

Təzahürlərin səbəbləri barədə təklif ediləcək bütün hipotezləri biz yoxlasaq, biz xaric etmə yolu ilə doğru hipotezi müəyyən edə bilərik. Bu qayda uğurla tətbiq olunurdu: bəzən bütün məlum faktları eyni cürə yaxşı izah edən bir neçə hipotezlər müəyyən olunurdu və bunlar barədə alimlər o vaxta qədər fikir ayrılığında olurdular ki, həlledici tədqiqatlar doğru hipotezi müəyyən etmiş olsun. Onda insan aqlının tarixi üçün maraq kəsb edən odur ki, bunların köməyi ilə çoxlu faktlar izah oluna bilinsin və təbiətlə uzlaşmaq üçün onların məlum faktları eyni cürə dəyişikliklər təyin edilə bilinsin. Beləliklə, bizə Göyün yalnız görə bildiyimizin təsvirini verən Ptolomey sistemi, planetlərin Günəş ətrafında hərəkət etdiyi hipotezinə gətirir, lakin bu halda Ptolomey, dairələri və episiklləri Günəş orbitinə bərabər və paralel götürürdü və bunları o, hər il qeydə almağa məcbur edirdi və bununla belə, o, bunların qiymətlərini qeyri-müəyyən saxlayırdı. Bu hipotezi dünyanın əsl sisteminə çevirmək üçün sonradan Günəşin gördüyümüz hərəkətini tərs mənada Yerə şamil olunmalıdır.

Bu müxtəlif üsullarla alınmış nəticələrin ehtimallarını hesablamayaq, demək olar ki, həmişə mümkün olmur: bu, oxşar surətdə tarixi faktlar üçün də belədir. Lakin izah olunmuş təzahürlərin və ya sübutların toplusu bəzən elə olur ki, onların ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olmadıqda, onlar barədə hər hansı bir şübhəyə yol vermək əsassız olardı. Digər hallarda onları yalnız böyük bir ehtimalla soyuqqanlıqla qəbul etmək məsləhətdir.

Ehtimal hesabının tarixi öçerki

Ən sadə oyunlarda oyunçular üçün əlverişli və ya əlverişsiz mümkün halların nisbətləri artıq çoxdan təyin olunmuşdu: oyuna qoyulan məbləğ və mərc bu nisbətlərə uyğun olaraq, müəyyən olunurdu. Lakin Paskal və Fermat (P. Fermat, 17-ci əsr) qədər bu predmetə hesablama metodları və prinsiplərini hələ heç bir kəs verməmişdi və bu növ heç olmasa bir neçə məsələlər həll olunmamışdı. Buna görə də, ehtimal haqqında elmin ilk elementləri bu iki dahi həndəsəçiyə şamil olunmalıdır, onun bir elm kimi kəşfi insan aqlına ən çox şərəf gətirmiş XVII əsri əlamətdar edən ən gözəl hadisələr arasında yer almalıdır. Onların müxtəlif yollarla həll etdikləri əsas məsələ, bizim əvvəldə gördüyümüz kimi, ondan ibarətdir ki, oyuna qoyulan məbləğ eyni bacarıqlı oyunçular arasında ədalətlə bölünsün və onlar oyun başa çatmamış partiyani bir az tez qurtarmağı şərtləşsinlər; oyunun şərti ondan ibarətdir ki, partiyalarda uduş üçün birinci oyunçu verilən sayda xal toplamalıdır. Aydındır ki, bu bölüşdürülmə oyunçuların bu partiyani udmalarının nisbi ehtimallarına mütənasib başa çatdırılmalıdır; bu ehtimallar onlara udmaya üçün çatışmayan xallardan asılıdır. Paskal metodu çox incə bir metoddur və mahiyyət etibarilə bu məsələnin xüsusi fərqlərlə tənliyi olub, oyunçuların uduş ehtimallarının ardıcıl təyin olunması üçün kiçik ədədlərdən sonra gələn ədədlərə keçirilərkə tətbiq olunur. Bu metoda yalnız iki oyunçu halı üçün baxılmışdı: birləşmələrə əsaslanan Fermat metoduna ixtiyari sayda oyunçu üçün baxılmışdı. Paskal əvvəlcə belə fikirləşirdi ki, bu metod onun özünün kimi yalnız iki oyunçu üçündür; buna görə də, onlar arasında mübahisə yaranır, bu mübahisənin sonu – Paskalın, Fermat metodunun ümumi olduğunu etiraf etməsilə nəticələnir.

Hüygens artıq həll olunmuş müxtəlif məsələləri toplayaraq və yenilərinə də əlavə edərək, bu predmet haqqında birinci traktatında onları da buraya daxil etmişdi; traktat belə adlandırılmışdı: «*De Ratiociniis in Ludo alea*». Bundan sonra, bu məsələlərlə bir çox həndəsəçilər məşğul olmağa başladılar: Huds (Huddes) və Hollandiyada dahi pensionariy Vitt və İngiltərədə Halley hesablamaları insan həyatı ehtimallarına tətbiq etdilər və Halley, bu məqsədlə, ilk ölüm cədvəlini nəşr etdirdi. O ərəfədə Yakov Bernulli həndəsəçilərə ehtimallar haqqında müxtəlif məsələlər təklif etdi və sonradan onların həllərini də o, özü verdi. Nəhayət, o, «*Ars conjectandi*» adlı özünün gözəl bir işini yazdı ki, bu əsər 1706-da onun ölümündən yeddi il sonra işıq üzü gördü. Ehtimal haqqında elmə, burada Huygensin işi ilə müqayisədə, daha dərinliklə baxılmışdı: müəllif burada birləşmələrin və cəmlərin ümumi nəzəriyyəsini verir və o, bu nəzəriyyəni təsadüflərlə

əlaqədar bir çox çətin məsələlərə tətbiq edir. Bu iş özünün doğru-düzgünlüyü və nöqteyi-nəzərlərinin incəliyi ilə, bu qəbildən məsələlərdə binom düsturunun istifadə olunması və aşağıdakı teoremin isbatı ilə çox gözəldir: müşahidələr və sınaqlar qeyri-müəyyən sayda təkrar olunduqda, müxtəlif növ hadisələr nisbəti limitdə bu hadisələrin uyğun mümkünlükləri nisbətinə yaxınlaşır və bu müşahidələr və sınaqların sayı artdıqca onlar arasındakı fərq azalaraq, əvvəlcədən verilmiş bir ədəddən kiçik olmağa başlayır. Müşahidələrin, qanunların və təzahürlərin səbəblərinin dərk olunması üçün bu teorem olduqca yararlıdır. Bernulli haqlı olaraq, bu teoremin isbatına böyük əhəmiyyət verirdi; onun dediyinə görə o, bu isbatı iyirmi il ərzində təfərrüfatı ilə düşünmüşdü.

Yakov Bernullinin ölümü ilə onun əsərinin nəşri arasındakı müddət ərzində Monmort və Moavr (Muavr) ehtimal hesabı haqqında iki traktat nəşr etdirdilər. Monmort əsərinə «*Essai sur les geix de hazard*» adlandırmışdı: burada ehtimal hesabının müxtəlif oyunlara çoxsaylı tətbiqi verilirdi. Bu əsərin ikinci nəşrinə müəllif, Bernullinin bir çox çətin məsələlərinin incə və səlis həlləri verilən məktublarını əlavə etmişdi. Monmortun traktatından sonra çıxmış Moavrın traktatı, 1711-də, əvvəlcə «*Transactions philosophiques*»-də nəşr olunmuşdu. Sonradan müəllif onu ayrıca nəşr etdirmiş və üç ardıcıl nəşrlərdə onu mükəmməlləşdirərək dərc etdirmişdi. Bu iş, əsas etibarilə, binom düsturuna əsaslanmışdı və buradakı məsələlər və onların həlləri olduqca ümumi xarakter daşıyır. Bu işin səciyyəvi cəhəti – qaydışlı sıralar nəzəriyyəsi və onların bu sahədə tətbiqidir. Bu nəzəriyyə – sabit əmsallı, sonlu fərqlərlə xətti tənliklərin inteqrallanmasıdır, elə bir inteqrallama ki, Moavr ona çox uğurlu bir üsulla nail olur.

Moavr öz əsərində çoxsaylı müşahidələrlə təyin olunmuş nəticələrin ehtimalları haqqında Yakov Bernullinin teoreminə yenidən müraciət edir. O, Bernulli kimi baş verəcək hadisələr nisbətinin onların uyğun mümkünlük nisbətlərinə sonsuz olaraq yaxınlaşdığı isbatı ilə kifayətlənmir; o, ehtimalın daha sadə və gözəl ifadəsini verir: bu iki nisbətlər arasındakı fərq verilən səhədlər arasındadır. Buna görə o, binomun ayrılışındakı ən böyük dərəcəli ən böyük həddin onun bütün hədlərinin cəminə nisbətini və bu həddin yaxın hədlərdən artıq hissəsinin hiperbolik loqarifmini təyin edir. Ən böyük hədd bu halda çox sayda vuruqların hasili olduğundan, onun ədədi qiymətini təyin etmək mümkün olmur. Onun yığılan bir yaxınlaşmasını ala bilmək üçün Moavr binomun yüksək dərəcəyə yüksəldilmiş orta həddi haqqında Stirling teoremini tətbiq edir; bu teorem onunla dəyərlidir ki, bu teorem çevrə uzunluğunun onun radiusuna nisbətinin kvadrat kökünü, məncə, bu transsendentliyə yad olan ifadəyə daxil edir. Moavr özü bu nəticəyə olduqca təəccüblənmişdi, Stirling bu nəticəni çevrənin ifadəsindən sonsuz hasillərin vasitəsilə ala bilmişdi; çevrə üçün bu ifadəni Vallis olduqca faydalı və maraqlı – müəyyən inteqrallar nəzəriyyəsinin rüşeymlərini tərkibində saxlayan xüsusi bir analizin köməyi ilə almışdı.

Bir çox alimlər, o cümlədən, *Déparcieux*, *Kersseboom*, *Wargentin*, *Dupré de Saint-Maur*, *Simpson*, *Sussmilch*, *Messéne*, *Moheau*, *Price*, *Baily* və *Duvillard*, əhali, doğum, nigah, ölüm haqqında çoxlu sayda dəyərli məlumatlar toplamışdılar. Onlar ömürlük təqaüd, tontin, sığorta ilə əlaqədar düsturlar və cədvəllər vermişdilər. Lakin mən, bu qısa yazımda, bu original ideyalara keçmək üçün mənim üçün faydalı olmuş işləri yalnız qeyd edə bilərəm. Riyazi və mənəvi gözləmələrin qiymətləndirilməsi, həm də mənəvi gözləmənin analize tabe olması üçün Daniil Bernullinin vermiş olduğu incə prinsip belə işlərdəndir. Çiçək peyvəndlənməsinə ehtimal hesabının uğurlu tətbiqi də onların belə işlərindən biridir. Xüsusilə də, müşahidə olunmuş hadisələrdən alınmış hadisələrin mümkünlüklərinin bilavasitə baxılması bu original ideyalar sırasına aid olunmalıdır. Yakov Bernulli və Moavr bu mümkünlüklərin məlum olduğunu fərz edirdilər və gələcək sınaqların nəticəsinin onların ifadə oluna biləcəyi bir nəticəyə getdikcə yaxınlaşacağı ehtimalını axtarırdılar. Bayes (Bayes) 1763-ün «*Transactions philosophiques*»-ində aparılmış sınaqlar nəticəsində artıq alınmış olan mümkünlüklərin verilən sərhədlər arasında olduğu ehtimalını bilavasitə tapmaq istəyirdi və o, bu arzusuna bir az qarmaqarışq olsa da, çox incə və səlis bir üsulla nail ola bildi. Bu predmet müşahidə olunmuş hadisələrdən alın bilən gələcək hadisələrin və səbəblərin ehtimal nəzəriyyəsinə, – mümkün ola bilmələr arasında ola bilən bərabərsizliklərin təsviri haqqında qeydlə, bir neçə il

sonra prinsiplərini şərh etdiyim nəzəriyyəyə yaxındır. Bu bərabərsizliklər üçün hansı hadisələrin əlverişli olduğunu bilmədiyimizə baxmayaraq, bu bilgisizlik əksər hallarda mürəkkəb hadisələrin ehtimalını artırmış olur.

Ehtimallarla əlaqədar məsələlərin və analizin ümumiləşdirilməsi məni sonlu xüsusi fərqlər hesabına gətirdi, sonradan Laqranj olduqca sadə metodun köməyi ilə bu sonlu xüsusi fərqlərə baxdı və bunlardan bu növ məsələlərə incə tətbiqlər edə bildi. Elə bu əfəsdə verdiyimiz doğuran funksiyalar (*fonctions génératives*) nəzəriyyəsi onun əhatə etdiyi predmetlər arasında bu predmetləri də əhatə edir və ehtimal haqqında ən çətin məsələlərə ən böyük ümumiləşmə ilə özü-özlüyündə tətbiq olunur. Bundan başqa, çox sayda hədlər və vuruqlardan ibarət funksiyaların ədədi qiymətlərini bu nəzəriyyə çox yaxşı yığılan yaxınlaşmalar vasitəsilə təyin edir və bu zaman aşkar edir ki, çevrə uzunluğunun radiusa nisbətinin kvadrat kökü bu qiymətlərə çox tez-tez daxil olur və göstərir ki, buna sonsuz sayda digər transsendentlər də daxil ola bilər.

Şahid ifadələrinin, səsvermələrin, seçici və muzakirə iclaslarının qərarlarının və məhkəmə qərarlarının ehtimallarını da hesablamaq mümkün olmuşdu. Bu predmetlərə aid məsələləri o qədər ehtiraslar, müxtəlif maraqlar və şəraitlər mürəkkəbləşdirir ki, bunları demək olar ki, həll etmək mümkün olmur. Lakin bunlara olduqca analoji olan daha sadə nəticələrin həlli bu çətin və mühüm məsələlərə aydınlıq gətirir, elə bir aydınlıq ki, o, məhz, hesablanmanın doğruluğuna ən doğruyaoxşar mülahizələrdən daha çox üstünlük verilir. Ehtimal hesabının ən maraqlı tətbiqlərindən biri orta qiymətlər tapılması ilə əlaqədardır ki, bunlar müşahidə nəticələrindən seçilməlidir. Bir çox həndəsəçilər bununla məşğul olmuşlar, Laqranj bu orta qiymətlərin tapılması üçün «*Mémoires de Turin*»-də müşahidə xətlərinin qanunu məlum olduğu hal üçün gözəl bir metodu nəşr etdirmişdi. Mən bu məqsəd üçün hətta analizin başqa məsələlərində də səmərəli tətbiq oluna bilən, xüsusi bacarığa əsaslanan metod vermişəm və bu metod məsələnin növü üzrə məşdudlaşmış funksiyaların hər hansı bir uzun hesablanmasının bütün gedışı üzrə onu qeyri-müəyyən surətdə genişləndirməyə imkan verməklə yanaşı, o, məhdudiyyətlər nəticəsində son nəticənin hər bir həddində ola bilən dəyişiklikləri göstərir. Biz əvvəl görmüşdük ki, hər bir müşahidə birinci dərəcəli şərti tənlik verir və bu tənlik həmişə elə yazıla bilər ki, onun bütün hədləri bir tərəfdə olsun, ikinci tərəfi isə sıfıra bərabər olsun. Bu tənliklərin istifadə olunması, bizim astronomik cədvəllərin böyük dəqiqliyi üçün əsas səbəblərdən biridir, çünki bu üsulla gözəl müşahidələrin əksəriyyətini onların elementlərinin müəyyənəşdirilməsinə yönəltmək mümkün ola bilərdi. Yalnız bir element təyin etmək tələb olunduğu hal üçün Cotes elə şərti tənliklər tərtib etməyi tövsiyyə etmişdi ki, naməlum elementin əmsalı bu tənliklərdən hər birində müsbət olsun və bundan sonra son tənliyi almaq üçün bütün bu tənliklər cəmlənməli və bu son tənlikdən isə bu elementin ədədi qiyməti tapsın. Cotes üsuluna bütün hesablama aparılar riayət edirdilər; amma bir neçə elementi təyin etmək tələb olunduğu halda zəruri sonuncu tənliklərin alınması məqsədilə şərti tənliklərin birləşdirilməsi üçün heç bir müəyyən qayda yox idi; hər bir element üçün yalnız onun təyin olunmasına ən münasib müşahidələr seçilirdi.

Bu üsullardan hansının seçilməsini təyin etmək məqsədilə, Lejandr və Qauss şərti tənliklərin sağ hissələrinin kvadratlarını toplamağı və sonra bunların cəmini, hər bir naməlum element dəyişdikcə, minimumlaşdırmağı qərara aldılar; bu üsulla bilavasitə elementlərin sayı qədər son tənliklər alınır. Lakin belə sual yaranır ki, bu tənliklərlə alınmış ədədi qiymətlər digər üsullarla alın bilməyən bütün qiymətlərdən yaxşıdır mı? Bu suala cavabı ehtimal hesabı verə bilər. Mən ehtimal hesabını bu mühüm predmetə tətbiq edərək, incə analizin köməyi ilə elə bir qayda tapdım ki, bu qayda üzrə axtarılan elementlər müəyyən prosesin köməyi ilə alınır; bu qaydanın elə üstün cəhəti vardır ki, bu elementlər müşahidələr çoxluğundan şübhə doğurmayan olduqları ilə seçilir və bunların elə ədədi qiymətləri tapılır ki, bunlarda yalnız ən kiçik xətalər ola bilər.

Lakin aldığımız nəticələr bunlarda ola biləcək xətlərin qanunu məlum olmadığı halda mükəmməl hesab oluna bilməz; bu xətlərin

verilən sərhədlər arasında olması ehtimalını göstərə bilmək zəruridir, bu isə nəticənin *çəkisi* adlandırdığım ehtimalın təyin olunmasına gətirir. Analiz bunlara aid ümumi və sadə düsturlara gətirir; mən bu analizi geodeji müşahidələrin nəticələrinə tətbiq etdim. Ümumi məsələ ondan ibarətdir ki, olduqca çox sayda müşahidə xətlərinin bir və bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin hansısa sərhədlər arasında olduğu ehtimalı təyin olunmalıdır.

Müşahidə xətlərinin qanunu bu ehtimalların ifadələrinə sabit kəmiyyətlə daxil olur, bu kəmiyyətin ədədi qiyməti isə demək olar ki, həmişə naməlum bu qanun haqqında bilgi olmasını sanki tələb edir. Bu sabit kəmiyyət xoşbəxtlikdən müşahidələrin özü ilə təyin oluna bilər. Astronomik elementlərin axtarışlarında bu kəmiyyət hər bir müşahidə və hesablama arasında fərqlərin kvadratlarının cəmi ilə verilir. Güman olunan xətlər bu cəmin kvadrat kökü ilə eyni cür mütənəşib olduqlarından, bu kvadratları müqayisə edərək, eyni bir ulduzun müxtəlif cədvəllərinin nisbi dəqiqliyini qiymətləndirmək olar. Geodeji əməliyyatlarda bu kvadratlar hər bir üçbucağın üç bucağının müşahidə olunmuş cəmləri xətlərinin kvadratları ilə əvəz olunur. Bu xətlərin kvadratlarının müqayisəsi bucaqların ölçüldüyü alətlərin nisbi dəqiqliyi haqqında mühakiməyə imkan verir. Bu müqayisədən görünür ki, geodeziyada təkrar-təkrar müşahidələr alətlərlə müqayisədə nə cür üstünlüyə malikdir.

Müşahidələrdə tez-tez xətlərə səbəb olan çoxlu mənbələr olur: məs., ulduzların vəziyyətini meridian borusu və dairə vasitəsilə təyin etdikdə, bunların hər biri xətlərə məruz ola bilər və bu halda onların xəta ehtimalları qanununun eyni olduğu fərz olunur; odur ki, bu hallarda yaranan elementlər də bu xətləri özündə daşıyır. Bu elementləri almaq üçün bizim tərtib etdiyimiz şərti tənlidlərə hər bir alətin xətləri daxildir və bunların əmsalları müxtəlifdir. Təyin olunacaq elementlərin sayı qədər sonlu tənlidlər tərtib etmək tələb olunduğundan, bu tənlidləri almaq üçün vuruqlar sistemi götürülür və uyğun olaraq, şərti tənlidlərə vurulur; bu vuruqlar sistemi ən münasib sistem olub, hər bir şərti tənliddə əmsallar sistemindən böyük olmur. Mənim tətbiq etdiyim analiz, xəta mənbələrinin sayından asılı olmayaraq, ən yaxşı nəticələr verən sistemə və ya elə vuruqlara gətirir ki, eyni bir xəta ixtiyari başqa bir sistemdə ola bilən xətdən daha az ehtimallı olur. Həmin analiz bu nəticələrin xəta ehtimallarının qanununu təyin edir. Bu düsturlarda xəta mənbələrinin sayı qədər naməlum sabitlər vardır və onlar bu xətlərin qanunlarından asılıdırlar. Biz gördük ki, mənbə yeganə olduğu halda bu sabiti təyin etmək mümkündür: buna görə də, kvadratlar cəmi və hər bir şərti tənliyin qalıqları tərtib edilib, sonra elementlər üçün tapılmış ədədi qiymətlər bu şərti tənlidlərdə yerinə yazılmalıdır. Belə bir proses, sabitlərin sayından asılı olmayaraq, ümumiyyətlə, bu sabitləri ədədi qiymətlərini almağa xidmət edir, bu isə ehtimal hesabının müşahidə nəticələrinə tətbiqini tamamlayır.

Mən burada mühüm bir qeyd etməliyəm. Müşahidələr sayı bir o qədər də böyük olmadığı halda, mənim sabitlərin ədədi qiymətləri barədə indicə qeyd etdiklərim, müşahidələrə görə kiçik bir şübhə

doğurur və analizin köməyiylə təyin olunmuş ehtimalların bir qədər şübhəli edir. Lakin, demək olar ki, həmişə bilmək yetərlidir ki, alınmış nəticələrin kiçik bir aralıqda olması ehtimalı vahidə olduqca yaxındır və əgər bu belə deyildirsə, bilmək kifayətdir ki, alınmış nəticə barədə heç bir ağlabatan şübhə doğurmayan ehtimal üçün müşahidələr sayı nə vaxta qədər artırılmalıdır. Ehtimallar üçün analitik düsturlar bu məqsədə çatmaq üçün çox yaxşıdır və bu anlamda bunlara, xətlər ola bilən müşahidələr toplusuna əsaslanan elmlərə zəruri bir əlavə kimi baxmaq olar. Bunlar, hətta təbii və mənəvi elmlərdəki çox sayda məsələlərin həlli üçün olduqca zəruridir. Təzahürlərin əksəriyyətinin baş vermə səbəbləri ya məlum olur və ya o dərəcədə müəhkəmdir ki, onları hesablamaq çətindir; bundan başqa onların təsiri çox vaxt təsadüfi və dəyişən səbəblərlə pozulur; lakin bu təsirin izləri, bu səbəblərlə baş vermiş hadisələrdə həmişəlik qalır və bunlarda dəyişikliklərə səbəb olur ki, bu dəyişiklikləri müşahidələrin uzun sırası ilə müəyyənləşdirmək mümkün olur. Ehtimalların analizi bu dəyişiklikləri aydınlaşdırır və onların doğruluq dərəcəsini təyin edir. Məs., atmosferdə həmişə dəyişikliklər yaradan daimi səbəblər arasında, gündüz gecə ilə və qış yay ilə əvəz olunduqda, günəş istisinin periodik olaraq dəyişməsi – bu nəhəng maye kütləsinin təzyiqində və barometrin uyğun hündürlük səviyyəsində bir günlük və illik dəyişikliklər vardır və bunlar, bizim yəqinlik kimi qəbul etdiyimiz faktların ehtimalına ən azı bərabər olan ehtimalla çoxsaylı barometrik müşahidələrdən aydın olur. Eynilə də, bir sıra tarixi hadisələr cəmiyyəti hər mənada hərəkətə gətirən müxtəlif maraqlar və ehtiraslar arasında mənəviyyatın böyük prinsiplərinin daimi təsirinin olduğunu göstərir. Tədqiqatçıdır ki, oyunların öyrənilməsi ilə təməli qoyulmuş elm insan biliyini ən mühüm predmetlər səviyyəsinə qədər yüksələ bilmişdir.

Mən bütün bu metodları özümün «Analitik ehtimal nəzəriyyə»də topladım və burada qarşıma qoyduğum məqsəd – ehtimal hesabının ən ümumi şəkildə prinsiplərini və analizini, həmçinin, hesablama üçün maraqlı və ən çətin məsələlərin həllinə şərh etmək olmuşdu.

Bu əsərdən görünür ki, *ehtimal nəzəriyyəsi*, mahiyyət etibarilə, *hesablamağa gətirilmiş sağlam düşüncədir*: o, dürüst ağılların çox vaxt düşünmədən sanki instinktlə hiss etdiklərini dəqiqliklə qiymətləndirməyə məcbur edir. Əgər bu nəzəriyyədən yaranmış analitik metodlar, onun əsası olan prinsiplərin doğruluğu, onun məsələlərinin həlli üçün tələb olunan incə və zəif məntiqi, bu nəzəriyyəyə əsaslanan ictimai faydanın təsisatı və mənəvi elmlər və natural fəlsəfənin ən mühüm məsələlərinə onu tətbiq etdikdə onun almış olduğu və hələ ola biləcəyi yayılma nəzərə alınsa; əgər, sonra, o da qeyd olunarsa ki, hətta hesablama tətbiq olunmayan oblastlarda belə, bu nəzəriyyə bizim mülahizə və mühakimələrimizdə bizi idarə edən ən doğru-düzgün baxış təlqin edir və bizi çox vaxt yoldan sapdıran illüziyalardan qorunmağı öyrədir – biz görürük ki, elə bir elm yoxdur ki, bizim düşüncələrimiz, fikirlərimiz üçün ondan daha dəyərli qiymətli olsun və çox faydalı olar ki, bu nəzəriyyə xalq maarifi sistemində daxil olunsun.

MÜNDƏRİCAT

Tərcüməyə ön söz
Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış
Ehtimal haqqında
Ehtimalların hesablanması ümumi prinsipləri
Gözləmə haqqında
Ehtimalların analitik metodları haqqında
Ehtimalların hesablanması tətbiqi. Oyunlar haqqında
Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında
Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında

Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi
Ehtimal hesabının mənəvi elmlərə tətbiqi
Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında
Seçkilər və iclasların qərarları haqqında
Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında
Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər
Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasında verilən mənfəətlər haqqında
Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında
Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları
Ehtimal hesabının tarixi öçerk

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОЧИНЕНИЕ

В. Я. БУНЯКОВСКОГО,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ОРДИНАРНОГО АКАДЕМИКА,
ПРОФЕССОРА С ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА И
ДОКТОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

В Типографии Императорской Академии Наук

1846.

Müntəxəbatın ikinci hissəsinin titul səhifəsi belədir. «Müəllifdən» başlığı altında girişdə ehtimal nəzəriyyəsi üzrə bu ilk rus dərsliyinin müəllifi qarşısında duran məsələlər şərh olunmuşdur. Bundan əlavə, müasir oxucu, şübhəsiz ki, «Son» başlıklı məqaləni və «Riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin tədrici inkişafının qısa tarixi öçerki»ni də çox maraqla oxuyacaqdır. Bu hissələrin hər üçü o dövrün orfoqrafiyasına riayət olunaraq yazılmışdır. Dərsliyə daxil olan mövzuların müxtəlifliyini («В и МСЭ» adlı ensiklopediyada dərc olunmuş «Mündəricat»-da (bax, səh. 867-69) görmək olur, bu mündəricat originalda 13 səhifədən ibarət olub, müəllifin «Kitabın ətraflı mündəricatı»-nın qısaltdılmış variantıdır.

МҮӘЛЛІФДӘН

Təbiiqi Riyaziyyat oblastına daxil olan Analitik Ehtimal nəzəriyyəsi, sırf analizin digər tətbiqlərindən olduqca fərqlənir. Həndəsədə və Natural Fəlsəfə predmetlərində, məs., ümumcazibə təzahürlərində, işıq, istilik, səs, elektrik və s. nəzəriyyələrdə bütün tədqiqatların bir hissəsi, həqiqətən də, mövcud olan və ya yalnız təsəvvür etdiyimiz müxtəlif kəmiyyətlər barədə bizim düşüncələrimizə əsaslanır, bir hissəsi – belə sınaqlardan çıxarılmış qanunlara və ya belə sınaqlar başlanğıcda yetərli olmadıqda az və ya çox doğruxaoxşar hipotezlərə əsaslanır. Əksinə, Ehtimal Analizi yalnız bizə tamamilə məlum olmayan səbəblərdən asılı təsadüfi hadisələri deyil, hətta bizim bilgisizliyimizə görə heç bir fərziyyə irəli sürə bilmədiyimiz halda belə hadisələri araşdırmağa və ədədi qiymətləndirməyə xidmət edir. Bu məqsədə gətirən dərin ağılın incə nəticələri, bütünlüklə şərtsiz gerçəkliyin aşkar edilməsinə ən etibarlı yolu göstərməyə belə, heç olmazsa, bu gerçəkliyə mümkün qədər yaxınlaşmağa imkan yaradır. Biz nə vaxt nəzərə alsaq ki, ehtimal haqqında riyazi nəzəriyyə özünün belə mühüm rolu ilə özünün tətbiqlərində fiziki və mənavi aləmin predmetlərini əhatə edə bilir, onda biz əminliklə deyə bilərik ki, bu nəzəriyyə – ağıl onu daha çox uca edə bilən məhsuludur və onun aş a bilməyəcəyi sərhədə aparan yolların sonunu sanki göstərə bilər.

İndi təklif edilən kitab, Rus dilində ilk əsər olub, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsaslarının, həm də onun ictimai həyata, Natural Fəlsəfəyə, eynilə də, Siyasi və Mənavi Elmlərə mühüm tətbiqlərinin ətraflı şərhidir. Sonuncu, XII fəsil, Ehtimal Analizinin tədrici inkişafı barədə tarixi təfəssilatə həsr olunmuşdur. Kitabın sonunda sırf riyazi məzmunlu *on Qeyd* verilmişdir; bunlar bəzi oxucuları Ehtimal hesabında tez-tez təsadüf olunan müxtəlif nəzəriyyələri digər traktatlarda və ya memuarlarda axtarmaq zəhmətindən azad edəcəkdir. Qeydlərdən sonra, mənim əsərimə əlavə olunmuş iki faydalı cədvəlin *İzahı* və nəhayət, sonda bir maraqlı məsələnin həlli şərh olunmuş *Əlavə* verilir. Bununla belə mən Mündəricata baxmağı məsləhət görürəm, burada kitaba daxil olmuş predmetlərə ətraflı göstərişi görmək olar.

Mən bu əsərimin tərtib olunması haqqında bir neçə söz deyəcəyəm. Laplasın burada istifadə olunmuş ölməz əsəri: «*Theorie analytiques des Probabilités*», analizin incəliyi, həmçinin mülahizələrin dərin mənalılığı ilə daima mənim üçün bir nümunə olmuşdur. Lakin, bununla yanaşı, onun yaratdığı bir çox nəzəriyyələri təklif etdikdə, mən həmişə imkan daxilində onların üslubunu və isbatını, eyni dərəcədə də analizin özünü asanlaşdırmağa çalışmışam. Cəsarətlə ümid edirəm ki, riyaziyyatçılar mənə o mənada haqq qazandıracaqlar ki, mən Laplasın bu kitabının öyrənilməsinə olduqca asanlaşdırmışam, çünki bu kitab özünün yığcamlığı və predmetə xas olan xüsusi çətinliklərə görə olduqca az adamlar üçün başa düşüləndir. Digər məşhur həndəsəçilərin, xüsusilə də, *Eylerin*, *Laqranj* və *Puassonun* elmi araşdırmaları da mənim üçün çox faydalı olmuşdu. Mən Puassonun Mühakimə üsulunun riyazi nəzəriyyəsinin şərhindən iqtibas etmişəm. Mənim digər əsərlərim barədə mənim kitabımda yer almış bəzi tənqidi qeydlərə istinadlarla, eyni zamanda, bir çox düsturların çıxarılışında dəyişikliklərin və müxtəlif hallarda istifadə olunan analitik üsullarda etdiyim dəyişikliklərin faydalı olduğunu etiraf etməyimlə kifayətlənəcəyəm. VII və X fəsilərə xüsusilə diqqət yetirməyi məsləhət bilirəm. Oxucu mənim kitabımdakı bir çox məqalələri oxuduqda və bunları digər məşhur əsərlərdəki şərhlərlə müqayisə etdikdə bu dəyişiklikləri özü görəəcəkdir. Məhz mənə aid daha hərtərəfli araşdırmalar mətnin özündə göstərişlərlə verilir. Daha bir qeyd edəcəyəm. Bu vaxta qədər bizdə Riyazi Ehtimal nəzəriyyəsi haqqında heç bir ayrıca əsər, hətta tərcümə belə olmadığından, bizim hələ ki, Rus dilində bu predmet haqqında heç üslub və ifadə tərzimiz olmadığından, mənim qarşısında bu predmet haqqında yazmaq problemi dururdu. Ümid edə bilmirəm ki, mən Ehtimal Analizi üçün özünün sadəliyi və təyin ediciliyi ilə tamamilə mükəmməl bir ehtimal dili yarada bilməmişəm; lakin hər halda, məndə belə əminlik hissi xoş bir duyğu yaradır ki, mən bu məqsədə çatmaq üçün imkan daxilində bütün səylərimi yerinə yetirə bilməmişəm.

Sonda bir arzumun bildirmək istəyirəm; təklif etdiyim bu əsər, mənim həmvətəndaşlarım arasında sağlam düşüncə tərzinin və faydalı praktiki gerçəkliklərin yayılmasına xidmət edə bilsin. Və əgər mənim oxucularımdan bəzələrinin, Ehtimal haqqında Nəzəriyyənin predmetini təşkil edən bütün nəzəriyyələrin analitik şərhini izləmək üçün kifayət dərəcədə riyazi təhsili olmazsa, hətta belələri üçün belə mənim kitabımın diqqətli müəlləsi səmərəsiz olmayacaqdır. Onlar bu kitabdan olduqca müxtəlif, ümumtəbiiqi nəticələrdən bəhrələyə biləcəklər və bu nəticələr onlara bizim ictimai həyatımızla əlaqədar bir çox maraqlı məsələ və gerçəklikləri əslində olduqları kimi göstərə biləcəkdir.

SON.

ЕHTİМАЛІН РІЯЗІ НӘЗӘРІЙҢӘСІНӘ ӘСАСЛАНАН НӘТІҢӘЛӘР HANSI MƏNADA ANLAŞILMALIDIR?

Ehtimal Analizinin riyazi əsaslarını və onun ictimai həyat məsələlərinə, Natural Fəlsəfəyə və Mənavi Elmlərə əsas tətbiqlərini bu əsərdə ardıcılıqla şərh edərək, biz artıq qısa şəkildə də olsa, bu nəzəriyyədən nəyi gözlədiyimizi və nə tələb etdiyimizi dərk edə bilərik; bu nəzəriyyə, ədalətlə düşünülərsə, bizim nəzəriyyələrimizin ən mühüm sahələri ilə bir sırada dura bilər. Olduqca çox da olmayan, insana miras qalmış, danılmaz həqiqətlərdən başqa təbiətdə və mənavi aləmdə hər nə varsa, az və ya çox dərəcədə doğruxaoxşar gümanlara əsaslanmışdır;

buna görə də, ehtimal haqqında nəzəriyyə, əslinə qaldıqda, əqli fəaliyyəti demək olar ki, bütünlüklə əhatə edir. Şübhəsizdir ki, bu elmin hərtərəfli rolu, bir tərəfdən fiziki və mənəvi təzahürlər üzərində müşahidələrdən alınmış məlumatların çatışmamazlığı və kafi olmaması ilə, digər tərəfdən, az dərəcədə də olsa, riyazi analiz mükəmməl olmaması ilə olduqca məhdudlaşır. Bununla belə, Ehtimal nəzəriyyəsində bu günə qədər nələrə nail olunmuşdursa, bunlar onu həqiqətin aşkar edilməsi və əşyalara səthi baxışda ağıl çox vaxt edə biləcəyi səhvlərdən qorunmaq üçün ən mühüm əqli bir vasitə səviyyəsinə qaldırır. Çox dərin ağıl baxış olunmuş şəxsin yalnız öncədən təqribi nəticələri görə biləcəyini bu nəzəriyyə çox vaxt ədədlərlə ifadə olunmuş dəqiq nəticələrə gətirir. Adi Məntiqə sığmayan hər hansı fərz olunan həqiqətin etibarlılıq ölçüsünün qiymətləndirilməsində belə müəyyənlik, şübhəsiz ki, müəfəkkirlərin tam diqqətinə layiqdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsl ruhunu dərk etməmiş bəzi empiriklər kimi bu ədədi nəticələri qəti mənada qəbul etmək, şübhəsiz ki, düzgün olmazdı. Məs., hər hansı bir hadisə gerçəkliyə və ya onun ehtimalı vahidə çox yaxın olarsa, bundan belə nəticə çıxarmaq olmaz ki, bu hadisə hökmən baş verəcəkdir və ya da ki, əks halda, bu nəzəriyyə səhv nəticələrə gətirir. Belə nəticə başqa mənada anlaşılmalıdır, bu nəticə Yakov Bernullinin məşhur ümumi fikri ilə tamamilə təsdiq olunur. Hadisənin ehtimalının böyük olması yalnız onu sübut edir ki, əgər biz, eyni şərtlər yerinə yetirilməklə sınaqları olduqca çox dəfə təkrar edə biləlikdə, onda hadisənin baş verməsi sayı onun baş verməməsi sayından xeyli çox olardı və baş vermə sayının baş vermə sayı ilə baş verməməsi sayının cəminə nisbəti ehtimal üçün tapılmış qiymətə qeyri-müəyyən surətdə yaxınlaşardı. Ehtimal Analizi şərtlərin qeyri-müəyyənliyi üzrə ayrıca bir sınaq haqqında heç bir müsbət nəticə verə bilmir, necə ki, bu, əvvəldə bu kitabın başlanğıcında da izah olunmuşdu.

Ümumiyyətlə, Ehtimal Analizinin müxtəlif nəticələrinin izahında Yakov Bernullinin teoremi ilə ifadə olunan qanun həmişə nəzərə alınmalıdır. Bizim izah edə bilmədiyimiz təsadüflərdən asılı hadisələrin təkrarlanması sayındakı düzgünlük (*qamunayüğunluq*; H. M.), yalnız olduqca çox saylı sınaqlarda yerinə yetir. Buna görə də, hər bir ayrıca baxılmış halda alınan hər bir nəticəyə yalnız *orta nəticə* kimi baxılmalıdır, bu nəticə bir çox hallarda əsl nəticədən olduqca fərqli ola bilər, bu nəticə isə baş vermiş hadisələrlə *a posteriori* aşkar olunur. Lakin həmin sınağı qeyri-müəyyən say dəfə eyni şərtləri yerinə yetirilməklə təkrar etmək imkanı olsaydı, onda alınmış orta nəticə, müxtəlif hadisələrin baş vermələri arasında axtarılan münasibətləri, sınaqların sayı çox olduğu haldakından daha yaxşı ifadə etmiş olardı.

Xülasə olaraq, biz oxuculara Riyazi Ehtimal Nəzəriyyəsinin tədrici inkişafının qısa tarixi öçerkini təqdim edirik.

RIYAZİ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏDRİCİ İNKİŞAFININ QISA TARİXİ ÖÇERKİ

118. Ehtimal haqqında mücərrədlik nöqtəy-nəzərdən baxılan ilkin anlayışların aid olduğu dövr bizim bilik sahələrimizin əksərinin başlanğıcında olduğu kimi qeyri-müəyyəndir. Bu elmin riyazi nəzəriyyəsində hələ çox-çox əvvəl, oyunlarda, mərcələrdə və s. müxtəlif əlverişli və əlverişsiz hallarda onların saylarının müqayisəsi ilə bu müqayisədən sonra çox və ya az uğurlu da olsa, nəticələr çıxarıldı. Qədim filosofların əsərlərindəki oxşar mülahizələr və eynilə də bəzi qaydalar, əlbəttə ki, təsadüflər haqqında elmlərə aiddir və hətta elə müsbət dəlillər vardır ki, ehtimala dair elmin bəzi çox gözəl tətbiqləri bizdən olduqca uzaq dövrlərdə də olmuşdur. Məs., Digestdə*, *Q. Libri*** -nin qeydində orqan haqqında məsələ ilə əlaqədar qanun verilmişdir və bu qanun çox aydın sübut edir ki, Romalılar müxtəlif yaşlarda orta yaşama müddətinin təyin olunması ilə məşğul olurdular. Daha sonra *Q. Libri* İtalyan Respublikalarında hələ orta əsrlərdə mövcud olmuş Dəniz

* *Digest* (və ya *Pandektlər*), məlum olduğu kimi, imperator Yustinianın əmri ilə Qanunlar külliyatı kimi tərtib edilmiş görkəmli Roma Qanunvericilərinin qərarlar məəcəlisidir. *Digestin* nəşri 528-ci ilə aid olunur.

** *Revue des deux mondes*, livraison du 15 Mai 1845; məqalə: Fermat, par M. Libri.

Sığorta Cəmiyyətlərindən söhbət açır; məhz bu, fərz etməyə əsas verir ki, o dövrdə gömi qəzalarının baş vermə ehtimallarını təyin edə bildirdilər. Eyni zamanda məlumdur ki, bir az sonra XVII əsrin başlanğıcında görkəmli *Qaliley* ehtimal nəzəriyyəsinin – xətlərin müəyyənləşdirilməsi və onların müşahidə nəticələrinə təsiri kimi olduqca mühüm məsələsi ilə məşğul olurdu. Əlbəttə ki, bu qədər çətin predmet üzrə onun araşdırılmaları arzu edilən müvəffəqiyyətlə nəticələnə bilməzdi. Məncə, insan ömrü ilə bağlı ehtimallara əsaslanan ilk fikir ayrılığı XVII əsrin birinci yarısına aiddir. Neapolu *Lavrentiy Tonti* öz adı ilə indiyə qədər bağlı olan *tontin* (№ 73) adlanan bu növ xüsusi bir təsisat təklif etdi.

Burada indi qeyd olunmuş cəhdlərin, şübhəsiz ki, Ehtimal Analizinə aid olmasına baxmayaraq, bunların ardıcıl olmamaları və qeyri-mükəmməlliyi üzündən, onlar elmin tələblərinə cavab verə bilmirdilər. Təsadüflərin riyazi nəzəriyyəsinin əsasları Paskal və Fermat tərəfindən on yeddinci əsrin yarısında qoyulmuşdu. Onların həll etdikləri ilk məsələ – Paskal Kavalier *Merenin* təklif etmiş olduğu, oyuna qoyulan məbləğin oyun başa çatmamış oyunçular arasında ziyanı bölüşdürülməsinə aid idi. Bu mövzu ilə ətraflı tanış olmaq istəyənlər bizim kitabın № 32 və № 38 bəndlərinə müraciət edə bilərlər. Beləliklə, ədalət naminə demək olar ki, Ehtimal hesabı, özünün ilkin əsasları və müstəqilliyinə görə, bu iki görkəmli şəxsiyyətə borcludur.

Paskal və Fermatın qeyd olunan cəhdlərindən dərhal sonra, onların müasiri *Hügens* bu predmetlə məşğul olmağa başladı; o, özünə qədər artıq həll olunmuş məsələləri toplayıb və onlara öz araşdırmalarını da əlavə edərək, təsadüflərə məruz oyunlarda abstrakt mühakimə haqqında traktat yazdı. Ehtimal Nəzəriyyəsi üzrə ilk nəşr olunmuş bu əsəri *Şoten*, 1657-də özünün *Exercitationum mathematicarum* kitabında *De ratiocinus in Aleao Ludo* başlığı altında nəşr etdirmişdi. *Hügensin* traktatı da *Ars conjectandi* kitabının birinci hissəsində şərh olunmuşdur, bu haqda aşağıda danışacağıq; bu traktat orada Yakov Bernullinin kommentariləri ilə zənginləşdirilmişdir.

Hügensdən başqa XVII əsrin ikinci yarısında ehtimal nəzəriyyəsi ilə Sovör (*Sauveur*) də məşğul olmuşdur; o, 1679-da *Journal des Savans*-da oyunda, məs., bank və ya farao – *bassète* adlı oyunlarla əlaqədar, mümkün ola bilən halların təyin olunması barədə öz araşdırmalarını vermişdi. *Montyukl*, özünün *«Histoire de Mathématiques»* (1802, cild III, 391 səh.) əsərində «of the Laws of chance» başlıklı bir traktatı da qeyd edir; qumar oyunları mövzusunda bu traktat müəllifin adı qeyd edilmədən 1962-də Londonda nəşr olunmuşdu. *Montyukl* fərz edir ki, bu əsər *Benjamin Motta* (*Benjamin Motte*) məxsusdur. *Van Hudden* (*Van Hudden*), Hollandiya pensionarisi *Vitt* (*Witt*) və *Halleyin* insan ömrü ehtimalları mövzusunda əsərləri XVII əsrin sonuna aiddir. Biza məlum olan ölüm cədvəllərindən tarix etibarilə birincisini 1693-də *Halley* nəşr etdirmişdir [№ 60]. Onun tədqiqləri 1963-ün n^o 196 -da *Philosophical Transactions*-da nəşr olunmuşdur.

Ehtimal Hesabının qeyd olunan dövrə aid çox da maraqlı olmayan digər nailliyətləri üzərində dayanmadan, görkəmli *Yakov Bernullinin* əsərlərinə keçək. Artıq 1685-də *Journal des Savans*-da o, riyaziyyatçılara zər oyunu ilə bağlı olduqca çətin bir məsələ təklif edir. O, cavab almayıb, 1960-ın Leybtsiq Aktlarında özünün həllini isbatsız dərc etdirir. Bu hadisə *Leybnits* təklif olunmuş məsələ ilə məşğul olmağa təhrik etdi; o, bu məsələni təxirə salmadan həll edib, özünün həll üsulunun ətraflı şərhini elə həmin *Leybtsiq Aktlarında* nəşr etdirir. Lakin ehtimalın riyazi nəzəriyyəsinə Yakov Bernullinin göstərdiyi əsas xidməti, şübhəsiz ki, onun uzun illər boyu ətraflı düşünülmüş *Ars conjectandi* adlı gözəl əsəridir. Bu əsər 1713-də, Bazeldə müəllifin ölümündən yeddi il sonra, onun qardaşı oğlu *Nikolay Bernulli* tərəfindən nəşr olunmuşdu. Düzgün və incə ağıllı analitik üsulları ilə seçilən bu əsər dörd hissədən ibarətdir. Bundan əvvəl qeyd etdiyimiz birinci hissə, *Hügensin* Traktatına izahedici qeydlərdən ibarətdir. İkinci hissəyə müxtəlif cür birləşmələrin geniş bir nəzəriyyəsi daxil olmuşdur. Üçüncü hissədə müxtəlif oyunlara aid bir çox məsələlərin həlləri verilmişdir. Nəhayət, sonuncu dördüncü hissə, birgə yaşamaq məsələlərinə mənəvi və siyasi elmlərə aid əvvəlki hissələrdə şərh olunmuş məsələlərdə qaydaların nə cür istifadə olunması və onlara əlavələr şərh olunmuşdur. Bu dördüncü bölmə xüsusilə diqqətəlayiqdir, belə ki, burada həll olunan

məsələlərdə Ehtimal Hesabında olduqca mühüm rol oynayan Nyuton binomundan istifadə olunmuşdur. Bu dördüncü hissənin ən gözəl məqaləsi, şübhəsiz ki, bizim artıq neçə dəfə qeyd etdiyimiz, Yakov Bernullinin adını daşıyan məşhur teoremin isbatıdır. Bu məqalə barədə ətraflı məlumat bizim № 20, 22, 24, 25, 26, ..., 117-ci bəndlərimizdə verilmişdir. Dördüncü hissənin ardınca, *sonsuz sıralar haqqında* traktat, əsərin sonunda isə «*Lettre à un amy sur les Parties du jeu de Paume*» başlığı ilə naməlum müəllifin maraqlı araşdırması şərh olunmuşdur.

Ars conjectandi-nin nəşrçisi Nikolay Bernulli özü bəzi uğurlarla Ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olurdu. O, 1709-da Bazeldə Hüquq Doktoru dərəcəsi almaq üçün Mühakimə üsuluna Ehtimal Hesabının tətbiqi təcrübəsi mövzusunda Dissertasiya müdafiə edir. Nikolay Bernullinin Dissertasiyası «*De Arte conjectandi in Jure*» başlığı ilə 1709-da nəşr olunmuşdur; burada həlləri ilə verilmiş maraqlı məsələlər arasında bir məsələ üçüncü hissənin mövzusu, yəni: bəzində neçə il heç bir məlumat məlum olmayan şəxsi, qanun üzrə nə qədər müddətdən sonra ölmüş hesab etmək olar?

119. On səkkizinci yüzillik Sırf Riyazi Analizin olduqca parlaq müvəffəqiyyətləri ilə əlamətdar olub, Ehtimal Nəzəriyyəsində də mühüm təkmilləşmələrə səbəb oldu. Bu əsrin başlanğıcında Fransada Monmort, İngiltərədə Fransa əsilli Moavr xüsusi bir səylə Ehtimal Hesabı ilə məşğul olurdular. Monmort bu predmet haqqında «*Essai d'analyse sur le jeu de hazard*» başlığı ilə öz əsərini nəşr etdirir; burada o, müxtəlif növ kart, zər oyunlarına aid çoxsaylı maraqlı məsələlərin həllini verir. Bu kitabın bir çox cəhətdən düzəldilmiş və əlavələr daxil olunmuş ikinci nəşrində (1713) Yakov və İvan Bernulli qardaşlarının qardaşı oğlu Nikolay Bernulli ilə Monmortun çox maraqlı bir yazışması vardır. Bu yazışmada Nikolay Bernullinin 9 sentyabr 1713-də Monmorta məktubunda «*Peterburq məsələsi*» adlandırılmış məsələnin qoyuluşu və Nikolay Bernullinin bir çox məsələlərin düşünülmüş incə həlləri xüsusilə diqqətəlayiqdir. Bu mövzu ilə əlaqədar ətraflı yazı № 45-də verilmişdir. Monmortun çətin məsələlərin həlli ilə bağlı məşğul olduğu məsələlərdən biri kimi, – oyunun özünün şərtinə əsasən, onun nə vaxt başa çatacağı qeyri-müəyyən olduqda, oyuna qoyulan məbləğin nə cür bölünəcəyini təyin etmək məsələsini misal göstərmək olar. Bu mövzu ilə də Moavr məşğul olurdu; lakin həllərin mükəmməl olduğunu söyləmək olmazdı [№ 33 və 40].

Moavr ehtimal nəzəriyyəsi üzrə öz ilk əsərlərini London Krallığı Cəmiyyətinə təqdim edir; bu əsərlər *Philosophical Transactions*-da 1711-də «*De mensurâ sortis*» başlığı ilə verilmişdir. Bundan sonra Moavr öz tədqiqatlarını «*The doctrine of chances*» adlı ayrıca kitab şəklində nəşr etdirir; sonradan bu nəşr hər dəfə təkmilləşdirilərək 1716, 1738 və 1756-da 3 dəfə nəşr olunmuşdur. Bu əsər analitik üsul baxımından ondan əvvəlkilərdən olduqca üstün cəhətləri ilə seçilir. Ümumiyyətlə, buradakı məsələlər Nyuton binomundan istifadə olunaraq, böyük ümumiləşmələrlə həll olunmuşdur. Yakov Bernullinin teoreminə olduqca mühüm yeniliklər, məhz, – onların sadə ehtimallara münasibəti və onların həqiqətən təkrarlanma sayı münasibəti arasındakı fərqin verilmiş sərhədlər arasında olması ehtimalının təyin olunması əlavə olunmuşdur. Buna görə Moavr birinci olaraq, *Stirlinqin* teoremindən istifadə etmişdir (№ 21). Lakin onun bu kitabı, onun özünün icad etdiyi *qayıdışlı sıralar* nəzəriyyəsinin burada şərhli ilə xüsusilə əlamətdardır. Əslində bu nəzəriyyədə, təsadüflər analizinə öz tətbiqləri üzrə çox məhsuldar olan bir üsul – sabit əmsallı, sonlu fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üsulu verilmişdir.

Bu dövrə yaxın bir əfəddə çox və ya az uğurla da olsa, Ehtimal Nəzəriyyəsi ilə bir çox digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular; bunlardan Meran [№ 37], Nikol: 1730-un «*Histoire d'Academie Royale des Sciences*»-də qeyri-bərabər bacarıqlı oyunçulardan bəzilərinin uduqları partiyalar artıqlaması ilə olduğu halda, bu oyunçuların taleinə aid müxtəlif məsələlərin həllərini nəşr etdirmişdilər.

XVIII əsrin ikinci yarısında bir çox alimlər böyük bir diqqətlə, ümumiyyətlə, əhaliyə, doğum sayına, nigahlara və s. ad müxtəlif məlumatları toplayırdılar. Bunlarla bağlı ədədi göstəricilər, tələb olunan tənqidi araşdırılmalardan sonra, insan ömrünün ehtimalları haqqında müxtəlif praktiki məsələlərin həlli üçün ömürlük gəlirlər, əmanət kassaları, tontinlər, ixtiyari növ sığortalar və buna bənzər tədaviullər

haqqında olduqca faydalı bir çox cədvəllərin tərtib olunması üçün istifadə olunmuşdur. Bu mövzu ilə əlaqədar tarixi məlumatları oxucular, «*Histoire des Mathématiques, par Montucla*»-nın üçüncü cildində tapa bilərlər, burada alimlərin əsas əsərlərinə qısa göstərişlərlə kifayətlənə bilərik.

XVIII əsrin ortalarına yaxın bu predmet üzrə İngiltərədə Foma Simpsonun, Hollandiyada Kersebooma və Strikin (Struyk) və Fransada Deparsyenin əsərləri diqqətəlayiqdir. Deparsye 1746-da «*Essai sur la probabilité de la dur la vie humaine*» başlığı altında əsərini nəşr etdirir. Stokholm Akademiyasının 1754-ün elmi məcmuələrində İsveç astronomu Vargentinin ölüm cədvəlləri haqqında maraqlı tədqiqatları da nəşr olunmuşdu. Bu predmetlə Almaniyada riyaziyyatçı Lambert [№ 60], Eyler və bəzi digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular.

Keçən əsrin son illərində Deparsye – indi qeyd etdiyimizin qardaşı oğlu, 1981-də «*Traite des annuités, accompagné de plusieurs tables*» başlığı ilə əsər nəşr etdirir. Bundan sonra, dərhal *Dyuvilyar* [№ 60] müxtəlif növ maliyyə dövrüyyələri haqqında «*Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, etc.*» adlı olduqca gözəl kitabını 1787-də nəşr etdirir. O vaxta yaxın bir dövrdə, 1783-də, İngiltərədə Pris, Siyasi Arifmetikanın müxtəlif predmetləri haqqında, ümumi marağa səbəb olmuş əsərlərini çap etdirir.

İndi isə XVIII əsr ərzində Ehtimal Hesabı sahəsində mühüm nailiyyətləri qısa şəkildə şərh edək.

İvan Bernullinin oğlu Daniil Bernulli, Ali Həndəsə və Mexanikanı öz kəşfləri ilə zənginləşdirmiş, riyazi gözləmə və mənəvi gözləmə arasındakı fərqi ilk olaraq təklif edib, mənəvi gözləmənin hələ indi də istifadə olunan ölçüsünü daxil etmişdir (FƏSİL IV). Demək olar ki, onunla eyni vaxtda məşhur Fransa Təbiətşünası Byüffon özünün «*Essai d'Arithmétique morale*» əsərində bu predmetin özü haqqında öz fikirlərini şərh etmişdir [№ 42]. Oxucu «*Ouvres complètes de Buffon*, Paris, 1827, t. XIII p. 14» adlı kitabda Daniil Bernullinin 19 mart 1762-də Byüffona məktubu ilə tanış ola bilər; məktubla sübut olunur ki, Bernulli Byuffonun mənəvi ehtimalla baxışının tamamilə əsaslandırılmış olduğunu qəbul etsə də, onun ölçüsünün tərfi ilə tam razılaşmır. Həmin kitabda Ehtimal Analizindən bir neçə məsələnin riyazi həlləri, insan həyatı, doğumlar, nigahlar, ölüm cədvəlləri və b. aid məsələlərə bu nəzəriyyənin tətbiqi də şərh olunmuşdur. Daniil Bernullinin əsərlərinə qayıdaq. Ehtimal Hesabında onun xidməti öz tətbiqi ilə olduqca məhsuldar olan original bir fikir ilə əlamətdardır: hadisələrin ehtimallarına *a posteriori*, yəni müşahidə olunan təzahürlər əsasında baxılır. Bu mövzu ilə bağlı düsturlar sonradan *Beyes* (Bayes) və *Pris* (Price) tərəfindən 1764 və 1765-in «*Philosophical Transactions*» nəşrində təklif olunmuşdu», daha sonra *Laplas* bunları lazımı qədər ümumiləşdirmişdir. Daniil Bernulli də Ehtimal hesabını çiçəyə qarşı peyvənd məsələsinə tətbiq etdi* № 64] və bu onunla *D'Alambert* arasında olduqca qızğın mübahisəyə səbəb oldu; *D'Alambertin* etirazları onun *Opusculs mathematiques* (II və IV cildlər) və eynilə də, onun *Melanges de philosophie* (V cild) əsərlərində dərc olunmuşdur. Bu gözəl əsərdə Ehtimal Analizinə aid, Kondorsetin ayrı-ayrı məqalələri də verilmişdir; bunlardan həcmi və məzmununa görə əsas məqalə burada *Probabilité* başlığı ilə verilmişdir. Bu elm üzrə Kondorsetin digər tədqiqatları 1781, 1782 və 1783-cü illərin Paris Akademiyasının Elmi məcmuələrində dərc olunmuşdur. Onun ən diqqətəlayiq əsəri səslər çoxluğu üzrə qərarlar haqqında geniş bir Traktatdır. Qeyd etdiyimiz bu əsər 1785-də «*Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*» başlığı ilə dərc olunmuşdur. Bizim bu kitabın XI fəslində biz Kondorsetin bu əsərinin bəzi yerlərinə istinad etmişik.

Eyler sırf və tətbiqi Riyaziyyatın demək olar ki, bütün sahələrini zənginləşdirməklə yanaşı, Ehtimal Nəzəriyyəsinin müxtəlif hissələri üzrə də məşğul olurdu. Bu predmet üzrə onun memuarları olduqca çoxdur. 128. Onun bəzi əsərlərini biz № 35, 65, 72-də göstərmişik. Onun dərc olunmuş tədqiqatlarından başqa, hələ dərc olunmamış əlyazmaları da vardır, məhz: «*Vera Estimatio sortis in Lulis*» və

* Mémoires de l'Académie des Sciens, 1760.

«*Reflexions sur une espèce singulière de loterie nommée Loterie Génoise*». Onun Prussiya Kralı II Fridrix ilə xüsusi növ lotereyalar* mövzusunda hələ heç yerdə dərc olunmamış yazışması da çox maraqlıdır. Lakin onun əsas xidməti İnteqral Hesabının təkmilləşdirilməsilə əlamətdardır ki, bu da Ehtimal Analizinin sürətlə uğurlara nail olmasına səbəb olmuşdur.

Laqranj xüsusi sonlu fərqlərlə tənliliklərin inteqrallanması üçün çox sadə və rahat üsul təklif edərək, onun Ehtimal Hesabının çətin və eyni zamanda maraqlı məsələlərinin həllində tətbiqini göstərmişdir. Bu mühüm predmet haqqında bizim bu əsərimizdə III Fəsil və VII-nin Qeydlərində ətraflı yazılmışdır. № 78 və 79-da biz, müşahidələrin ən əlverişli nəticələrinin təyin olunmasına aid *Laqranj*in digər bir əsərini də qeyd etmişik.

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid *Lakroan*ın bir əsərini də qeyd edək. Paris Elmlər Akademiyası *dəniz təhlükələrindən sığortalama* haqqında məsələ təklif edir. Qanəedici həllər almayan Akademiya iki dəfə müsabiqə elan edir və artıq üçüncü dəfə səkkiz cavab əsərini alır; bunlardan ikisi – biri *Lakroan*ın, digər isə *Bikileyin* (*Bicquille*) əsərləri verilən mükafatın yarısının təqdim olunması ilə qəbul edilir. Tam mükafatın məbləği 6000 frank iki müəllif arasında bölünür: *Lakroa* 1800, *Bikiley* isə 1200 frank alır. Bundan başqa, *Lakroa* olduqca yaxşı bir əsər nəşr etdirir: *Traité élémentaire de Calcul de Probabilités*; bu əsər artıq Fransada üç dəfə nəşr olunmuşdu. *Bikiley* də bu elm haqqında «*Du Calcul de Probabilités*» başlığı ilə 1783-də kitab dərc etdirmişdi.

Biz *Lejandr* və *Qaussun* müşahidələrin ən ehtimallı nəticələri mövzusunda əsərləri üzərində dayanmayacağıq. Bu haqda bizim X Fəsilimizdə [№ 92] yazılmışdır. Elə bu Fəsildə, şərti tənliliklərin ən əlverişli toplusu haqqında digər ətraflı tarixi məlumatlar və yeri gəlmişkən, ingilis riyaziyyatçısı *Kotssun* üsulu da (№ 85-in sonunda) verilmişdir.

Lakin analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi heç bir kəsə *Laplas* qədər borclu deyildir. Bizim kitabda onun əsərləri haqqında tez-tez söhbət etdiyimizdən, biz özümüzə borc bilirik ki, bu böyük həndəsəçinin əsas xidmətlərini, ən qısa şəkildə də olsa, qeyd edək.

*Laplas*ın Akademiyanın Elmi məcmuələrində analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi haqqında dərc olunmuş çoxsaylı Memuarlarından başqa, o, 1812-də** ilk dəfə bu predmet haqqında onun bütün nəzəriyyəsini və onun bütün əsas tədqiqatlarını əhatə edən dahi əsərini nəşr etdirdi. *Laplas*ın heç bir əsərində, onun «*Théorie analytique des Probabilités*» əsərindəki kimi riyazi analiz in özəməti və baxışlarının incəliyi, dərin ağıl belə bir qüdrəti ilə əks olunmamışdı. Təsədüflər analizinin ən çətin məsələlərinin həllində, *Laplas* bu nəzəriyyəni ən mükəmməl səviyyəyə qaldırdı. Onun ehtimal haqqında nəzəriyyəni ən çox zənginləşdirmiş ən gözəl tədqiqatlarından biri kimi, xüsusi fərqlərlə tənliliklərin inteqrallanması üçün doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi xüsusilə qeyd olunmalıdır: Çox böyük ədədlərlə ifadə olunan müxtəlif inteqral düsturların yaxınlaşma yolu ilə hesablanması; belə düsturların xüsusi

hallarına əvvəllər də təsadüf olunurdu, məs., $(\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \text{ müəyyən}$

inteqralı ilə dəqiq ifadə olunan) $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ [№ 21] hasilı üçün *Stirling* təqribi düsturu. Müşahidələr üzrə *a posteriori* ehtimalları üçün ümumi düsturlar (Fəsil VII), bərabər mümkün ola bilən hallar kimi qəbul edilən, bərabər mümkün olmayan hallarda baş verə biləcək hadisələrin ehtimallarının hesablanması (Fəsil V). Ehtimal Hesabının Günəş sistemində müşahidə olunan təzahürlərə müxtəlif təbiiqləri; məs., bütün planetləri və onların peyklərini öz oxları ətrafında fırlanaraq və öz orbitləri üzrə qərbdən şərqə, yəni Günəşin fırlanma hərəkəti ilə bir

* Bu əlyazmalar haqqında məna məlumat vermiş İmperator Elmlər Akademiyasının daimi katibi P. N. Fussa olduqca minnətdaram. Məhz onda Eylerin müxtəlif riyazi predmetlər üzrə memuarları vardır. Ümid etmək olar ki, bu qiymətli əsərlər nə vaxtsa nəşr olunacaqdır.

** «Théorie analytique des Probabilités» əsəri ikinci dəfə 1814-də, üçüncü dəfə isə 1820-də nəşr olunmuşdur.

istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvatoru ilə bir müstəvidə hərəkətlərinin ilkin səbəbinin varlığının ehtimalının təyin edilməsi. Müşahidələrlə bağlı elmlərə öz təbiiqləri ilə olduqca mühüm olan, müşahidələrin ən əlverişli nəticələri nəzəriyyəsi (Fəsil X), özünün indiki mükəmməlliyi ilə *Laplas*a borcludur. *Laplas* geodeji təsirlərə onun təbiiqlərini göstərmiş və inkişaf etdirmişdir. Nəhayət, bu nəzəriyyənin ayrıca bir «*Essai philosophique sur les Probabilités*» adlı əsərində ehtimal analizinin nəzəriyyəsi və tətbiqindən düsturlarsız və hesablamalarsız həqiqətin şərhini və tam xülasəsini aşkar edirik.

Budur, Ehtimal Analizində *Laplas*ın ən mühüm əsərlərinin qısa siyahısı. Burada söylənilənlərdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, öz başlanğıcını Fransada *Paskal* və *Fermat*ın işləri ilə almış bu nəzəriyyə özünün sürətlə mükəmməl bir nəzəriyyəyə çevrilməsi ilə, həmçinin *Fransız* həndəsəçisinə də borcludur.

120. *Laplas*ın və həm də *Qauss* və *Lejandr*ın indicə qeyd etdiyimiz əsərlərindən başqa bir çox astronom və riyaziyyatçıların müxtəlif tədqiqatları da bizim yüzilliyimizə aiddir. *Bessel*, *Plana*, *Enke*, *Struve*, *Poasson* (*Puasson*; H. M.), *Lindenay*, *Bonenberg* və başqaları müşahidələrin ən əlverişli nəticələri haqqında məsələlər ilə nəzəri və pratiki cəhətdən məşğul olmuşlar (№ 89, 91, 92, 95). № 94-də göstərilən əsərlərdən başqa, *Poasson* Ehtimal hesabı haqqında bir neçə digər Memuarlar nəşr etdirmişdi, o cümlədən: «*Mémoire sur la probabilité du tir à la cible*». Çox maraqlı bu əsərdə *Poasson*, hədəfə atış ehtimalının riyazi nəzəriyyəsini şərh edərək, alınmış düsturlardan odlu silahların sərrastlığı və atıcıların bacarığı üzrə müqayisə üçün qaydalar alır. *Fransız* artilleriyaçıların apardığı təcrübələr nəzəriyyəyə tamamilə haqq qazandırdı və alınmış düsturların praktiki cəhətdən faydalı olduğunu sübuta yetirdi. *Poasson*un bu elmə əsas xidməti – onun *Mühakimə* üsulunun riyazi nəzəriyyəsi haqqında: «*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, 1917*» adlı ayrıca bir Traktatıdır. Bu əsər beş fəsildən ibarətdir; ilk dörd fəsil Ehtimal Hesabının ümumi əsaslarının və onun ən çox istifadə olunan təbiiqlərinin şərhinə, sonuncu isə yalnız *mühakimə* üsulunun analitik nəzəriyyəsinə həsr olunmuşdur.

Elə bu kitabda *Puasson* *Yakov Bernullinin* bu teoremini dəyişə bilən mümkünolmalar halına genişləndirmiş və ümumi fikri *böyük ədədlər qanunu* adlandırmışdır. Bu barədə 35-ci səhifədə qeyd olunmuşdur.

Son illərdə ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olan adlarını çəkdiyimiz riyaziyyatçılardan başqa, bu predmet haqqında yazmış digərlərini də, o cümlədən: *Amper*, *Furye*, *Pyüssan*, *Hanzen*, *Kette*, *Littrov*, *Mozzer* və b. qeyd etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsasları, əsas təbiiqləri və uğurlarının qısa xülasəsini ardıcıl Fəsillərdə şərh edərək, biz kitabımızı, insan biliyinin elmləri sırasında bu elmin mühüm əhəmiyyəti haqqında *Laplas*ın** sözləri ilə tamamlayacağıq: «Bütün deyilənlərdən görünür ki, Ehtimal Nəzəriyyəsi, əslində, yalnız sağlam düşüncənin analitik düsturlara çevrilməsidir: o, hətta çox vaxt şüursuz olsa belə, düzgün ağılın gəldiyi qərarın dəqiq qiymətləndirilməsi üçün bir vasitədir». Əgər biz, bir tərəfdən bu nəzəriyyənin yaratdığı bütün analitik üsulları, onun əsası üçün başlanğıcların gerçəkliyini, müxtəlif məsələlərin həllində bunlardan çıxarılmış məntiqi nəticələrin incəliyi və ağıllılığını, digər tərəfdən, ehtimallar haqqında elm üzərində bərqərar olmuş ümumfaydalı təsisatları, onun hazırkı inkişafını və şübhəsiz ki, sonradan onun *Natural Fəlsəfə*nin mühüm məsələlərinə və siyasi məsələlərə tətbiqini nəzərə alırıqsa; nəhayət, əgər biz, nəzərə alırıqsa ki, hesablanma aparılması mümkün olmayan predmetlərdə belə, həqiqətin aşkara çıxarılmasında o, bizi olduqca etibar ediləsi baxışlara gətirir, bizə ağılın yol verə biləcəyi səhvlərdən qorunmağı öyrədir, onda biz, bizim düşüncələrimizi ifadə edə bilən digər belə layiqli elmin olmadığı və onu ictimai təhsili təşkil edən nəzəriyyələr sistemində daxil etmək olduqca faydalı olacağı nəticəsinə gəlirik».

* *Memorial de l'Artillerie, Paris, 1837, n⁰ IV*. Artilleriya sənəti üzrə bu məqalə-

lərin külliyyatının Brüssel nəşri 1839-da dərc olunmuşdur. Bu nəşrin n⁰ III-də, həmçinin *Poasson*un: «*Formules de probabilités relatives au résultat moyen des observations, qui peuvent être utiles dans l'Artillerie*» başlıqlı məqaləsi də dərc olunmuşdur.

** «*Essai philosophique sur les Probabilités*» əsərinin sonunda.

XIX əsrin 30-cu illərindən Гостехиздат nəşriyyatı tərəfindən buraxılan «Современная математика» seriyasında akademik S. N. Bernşteynin «Современное состояние теории вероятностей» adlı kitabı 1933-də işıq üzü gördü; bu kitaba onun iki məruzəsi daxil olunmuşdur, onlara giriş aşağıda dərc olunmuşdur.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

АКАД. С. Н. БЕРНШТЕЙН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Moskvada 1927-də, Ümumrusiya riyaziyyatçılar qurultayında oxunmuş məruzə.

Təşkilat komitəsi mənə Qurultayda ehtimal nəzəriyyəsinin müasir vəziyyəti və onun tətbiqləri haqqında məruzə etməyimi təklif etdi. Siz bilirsiniz ki, bu mövzu çox geniş bir mövzudur və buna görə də, bizi maraqlandıran bütün oblastın tam analizini verməyi məndən gözləməməlisiniz, belə ki, buna görə bir neçə məruzəçi və mənə verilən vaxtdan qat-qat çox olan zamanın zəruriliyi tələb olunmalıydı. Belə şəraitdə qarşımda duran əsas çətinlik, materialın seçilməsi, şərtin təşkilədiçi prinsipinin seçilməsi idi.

Mən belə düşünürəm ki, bu halda mənim qarşımda duran əsas məsələ – ehtimal nəzəriyyəsinin ümumi riyazi problemlərini və onun mühüm tətbiqlərini metodoloji cəhətdən birləşdirən müəyyən bir sintezi verməyə cəhd etməkdir. Bu nöqteyi-nəzərdən mən yalnız xüsusi maraq kəsb edən bir çox riyazi tədqiqatlar haqqında susmağa məcburam və digər tərəfdən ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqlərinə baxarkən uyğun oblastda mühüm rol oynayan məsələlərdən çox prinsipial əhəmiyyəti olan məsələlər üzərində daha çox dayanmalı olacağam.

Çox uzaq keçmişdə deyil, keçən yüzilliyin ikinci yarısına qədər, ehtimal nəzəriyyəsinin bir elmi tədqiqat metodu kimi əhəmiyyəti olduqca məhdud idi; təbiətdə baş verən təzahürlərin öyrənilməsində bu nəzəriyyənin tətbiqinə Bernulli, Laplas, Puasson, Kettle və b.-nin adları ilə bağlı ayrı-ayrı cəhdləri olduqca zəif əsaslandırılmışdı və layiqli olaraq, tənqid hədəfinə çevrilmişdi və bu da 40 il bundan əvvəl Bertranın ehtimal nəzəriyyəsi kursuna yazdığı əsərinin məşhur giriş sözündə özünün ən parlaq ifadəsini tapmışdı.

Lakin Bertranın skeptizmi, əgər belə ifadə etmək olarsa, ehtimal nəzəriyyəsinin elmin müxtəlif obastlarına sonrakı kortəbii tətbiqini nə yavaşdırmadı, nə də dayandırmadı. Artıq onun müasirləri Maksvell və Boltsmann molekulyar statistikamı fizikanın eksperimental əsaslandırılmış mühüm bölməsinə çevirirlər; digər tərəfdən Mendelin

elementar varislik qanununun kəşfi ilə əlaqədar, ehtimal nəzəriyyəsinin biologiyaya tətbiqi, yalnız mümkün olmayıb, eyni zamanda zərurətə çevrilir. Bu zaman bilik sahələrinin demək olar ki, hamısında – astronomiyada, meteorologiyada demoqrafiya və s.-də təsadüf və qanunauyğunluq arasında gizli bir əlaqənin olduğunu aşkara çıxaran geniş statistik material yığılır və bu əlaqənin, təsnifat problemlərinin və statistik sıraların xarakteristikalarının ehtimal nəzəriyyəsi əsasında analizi günün əsas məsələlərindən birinə çevrilir.

Hal-hazırda biz tam əminliklə deyə bilərik ki, insan biliyinin bundan sonrakı sistemləşdirilməsi və ya elmin inkişafı ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi olmadan mümkün deyildir və buna görə də, ən əvvəl belə bir suala cavab verilməlidir: bu nəzəriyyəyə əsaslanan elm ikinci dərəcəlidirmi və ya elmin surroqatıdır?

Elə buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə riyazi fənn kimi formal cəhətdən məntiqi əsaslandırılması xüsusi bir əhəmiyyət kəsb edir və bu fənni yalnız paradokslardan təmizləndikdən və aksiomatik qurulduqdan sonra, həndəsə kimi, ehtimal nəzəriyyəsinə də dəqiq obyektiv dərk etmə metodu kimi istifadə etmək mümkündür və onun tətbiqi hər bir xüsusi halda eksperimental və riyazi yoxlamamı zəruri və mümkün edir.

Sırf riyazi ehtimal nəzəriyyəsində, riyazi ehtimal adlanan əmsalın, hər hansı subyektiv və ya obyektiv praktiki əhəmiyyətinin olub-olmadığı maraq kəsb etməyə bilər. Yeganə riyət olunmalı tələb – ziddiyyətlərin olmamasıdır, məhz: verilən şərtlər ödənilməklə və qəbul olunmuş aksiomların yerinə yetirilməsi şərtlə göstərilən əmsalın müxtəlif hesablanma üsulları eyni bir nəticəyə gətirməlidir.

Bundan başqa, əgər biz ehtimal nəzəriyyəsinin nəticələrinin sadəcə ağıl oyunu olmamasını və empirik yoxlanıla bilinməsini istəyirsək, onda təkliflər və mülahizələrin yalnız elə toplularına baxmaq zəruridir ki, bunlar haqqında onların gerçək və ya yalnız olduğunu faktiki olaraq, müəyyənləşdirmək mümkün ola bilsin. Mahiyyət etibarilə bərpa olunmayan idrak prosesi məhz ondan ibarətdir ki, mümkün olan təkliflərdən bu və digərlərinin bizim qəbul edə bildiklərimiz gerçəkləşir, yəni baş verir və bu halda onların eyni zamanda inkar edilməsi yanlış və qeyri-mümkün olur.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə idrak metodu kimi qurulması tələb edir ki, təklifin gerçəkliyi istisnasız olaraq birqiymətli şəkildə vahidə bərabər götürülən riyazi ehtimalın müəyyən maksimal qiyməti ilə xarakterizə olunsun, təklifin mümkünsüzlüyü isə sıfıra bərabər götürülən ən kiçik ehtimala adekvat olsun. Təkliflərin sonlu topluları üçün göstərilən tələblərə əməl etmək çətin deyildir, çünki onların qəti zəruriliyi kifayət dərəcədə aydın etiraf olunmurdu, sonsuz toplulara baxdıqda isə paradokslar yaranır və yaranmaqda davam edir və mən bunlardan biri üzərində dayanmaq istəyirəm.

Mən məşhur bir məsələni nəzərdə tuturam: ixtiyari yazılmış bir kəsrin bölünməz olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələnin həlli Kroneker və Çebişevdən sonra, A. A. Markov tərəfindən onun klassik ehtimal hesabı kursunda verilmişdir.

ТӘСАДУҒИ КӘМІҢҖҮТЛӘР АРАСИДА АСИЛИҖЛАР ҲАҚҚИДА

Syurixdə 1932-də Beynəlxalq riyaziyyatçılar konqresində edilmiş məruzənin tərcüməsi.

1. Müasir elmin ən əsəbiyyəvi xüsusiyyətlərindən biri – onun ehtimal nəzəriyyəsi sxemlərinə ayırdığı böyük roldur. İlk baxışdan elmi mühakimələr metodunun başqa şəkllə salınması klassik elmin determinizminə zidd təəssürat yaradır, belə ki, determinizm nöqteyi-nəzərdən, hər bir konkret təzahür – differensial, funksional və ya digər tənlklrlə əlaqələnen bəzi müşahidə olunan kəmiyyətlərin toplusu ilə birqiymətli təyin olunur və baxılan təzahürə bütün aləmin təsiri tam mənası ilə bu tənlklrlərin birqiymətli həll olunması üçün zəruri sərhəd şərtlərlə ifadə olunur.

Lakin bu determinist düstur – yalnız ümumi eksperimental yoxlanılması mümkün olmayan prinsipial bir deklarasiyadır, çünki tamamilə eyni şərtlərdə sınağı təkrar etmək mümkün deyildir; buna görə də, praktikada dəqiq elmlər həmişə bir qədər başqa düsturdan –

yuxarıda qeyd olunanla yalnız təqribən mümkün ola bilən səbəbolma düsturundan istifadə edirlər. Məhz, real təzahür eyni kəmiyyətlərlə xarakterizə olunan abstrakt sxemlə əvəz olunur və fərz olunur ki, sərhəd şərtləri kainatın ümumi vəziyyətindən asılı olmadan çox və ya az dərəcədə eksperimental verilə bilər.

Aydın ki, bu səbəbolma prinsipi – praktiki cəhətdən faydalı, yeganə prinsipdir və o, determinizmin yuxarıdakı tam düsturuna zidd olmayaraq, mütləq və universal tətbiqə iddiada bulunmur; bundan başqa, gerçəkliyi asılı olmayan tamamilə dayanıqlı oblastlara ayıraraq, bununla da, bu prinsip xüsusi bir məntiqi mühakimənin zəruriliyini aşkar edir və bu da asılı olmayan kimi qəbul edilən təzahürləri başqa bir növ sistemdə birləşdirə bilər.

Məsələn, maddi nöqtənin hərəkətinin ox üzərində müsbət istiqamətin seçilməsindən asılı olmadığı haqqında fərziyyə riyazi şəkildə belə bir müddə ilə ifadə olunur: sürətin hər iki işarəsi bərabər ehtimallıdır. Eynilə də, verilən lotereya biletlərinin bərabər dəyərliliyi və ya simmetrikliliyi və lotereya sahiblərinin tirajın istehsalından fiziki asılı olmamazlığı onu ifadə edir ki, hər bir şəxsin uduş ehtimalı onda olan biletlərin sayına mütənəssibdir.

Ölbəttə ki, burada fərz olunan asılı olmamazlıq mütləq deyildir. Lakin stoxastik adlandırılan, bu tərzdə qurulan abstraktlaşdırılmış sxemlər müəyyən dərəcədə gerçəkliyə uyğun olur, necə ki, klassik elmin kazual sxemlərinin ətraf aləmdən asılı olmamazlığı fərz olunduğu kimi.

Sadə, ziddiyyətsiz aksiomatik bazaya əsaslanan Riyazi ehtimal nəzəriyyəsi, müşahidələr sayı olduqca böyük olduqda, praktiki cəhətdən adi deterministik sxemlərdən alınan, heç də az gerçək olmayan konkret görüntülərə gətirir və beləliklə, bu da, stoxastik sxemlər və onlarla təsvir olunan real təzahürlər arasında uyğunluğun olub-olmamasını sonsuz sayda üsullarını verir. Mən burada mənim gerçəkliyin hər hansı bir ümumi sxemə tamamilə gətirilə bilinməsinin qeyri-mümkünlüyü

ilə on beş il əvvəl verdim bu aksiomatikanın prinsipləri üzərində dayanmayacağam.

Yalnız onu qeyd edəcəyəm ki, mənim nöqtəyi-nəzərim, ümid edirəm ki, bu sonrakılardan kifayət qədər aydınlıqla aşkar olunacaqdır, empirik nöqtəyi-nəzərdən – praktiklərin əksəriyyətinin sükutla üstündən keçdikləri, prof. Mizesin kurslarında sisteməlik tədris olunan, ehtimalı tezliklə eyniləşdirən nöqtəyi-nəzərdən olduqca fərqlənir. Digər tərəfdən, mən burada xüsusilə qeyd etməyi özümə borc bilirəm ki, ehtimal nəzəriyyəsinin real aləmə faktiki tətbiqi üçün eyni ehtimala malik bütün təzahürlərin məntiqi birliyi-mətliliyini postulatlaşdırmaq zəruridir və ya da ki, eynilə 1 ehtimal yalnız mütləq yəqinliyə uyğundur.

Bela halda biz, hesablama nəticələri kimi tətbiqi üçün böyük ədədlər qanunu tipli mühüm teoremlər aldıqda, bunlara əsasən, hər hansı bir sınağın baxılan A nəticəsinin ehtimalı olduqca kiçikdir, $\frac{1}{N}$ -dən də

kiçikdir, burada N – olduqca böyük tam ədəddir; bu iddia sadəcə onu ifadə edir ki, baxılan sınağın A -ya obyektiv ekvivalent olan ən azı N sayda uyşmayan nəticələri vardır (yəni, elə nəticələr ki, bunlar arasında fərq yalnız sınağın gedişindən asılı olmayan əlamətlər və ya razılaşmalarla ifadə olunur) və bu nəticələrdən isə yalnız biri baş verir.

2. Bu ilkin qeydlərdən sonra biz elementar stoxastik sxemi elə ideallaşdırılmış sınaq kimi təyin edə bilərik ki, bu sınaqda dəqiq müəyyən olunmuş α şərtlər kompleksi ödənilməyi A hadisəsi ya baş verə bilər, ya baş verməz, həm də α şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında obyektiv əlaqə A hadisəsinin riyazi ehtimalı adlandırılan p skalyar kəmiyyəti ilə tam mənada xarakterizə olunur (verilən şərtlər ödənildikdə).

Bu sadə sxemə diqqətlə baxaq.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

МАТЕМАТИКА,

ЕЕ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1956

1956-da «Издательство АН СССР» nəşriyyatında «Математика, ее содержание, методы и значение» adlı üç cildlik kollektiv əsər işıq üzünə girdi. Girişdən bəzi parçalar belədir: «Bu kitabın tərtib olunmasında müəlliflər kollektivi sovet ziyalıların olduqca geniş dairəsini ayrı-ayrı riyazi fənlərin məzmunu və metodları ilə tanış etmək məqsədində olmuşlar ...», «Oxucunun ilkin riyazi biliyinin minimum səviyyəsi üçün yalnız orta məktəb kursunu bilməsi fərz olunur, lakin bu materialın mənimsənilməsi nöqtəyi-nəzərdən, üç cilddən hər biri digərindən fərqlidir ...», «Kitabdan bütünlüklə, əsas etibarilə, yalnız riyazi analiz metodlarının tətbiqində bəzi vərdişlərə malik oxucular istifadə edə bilərlər ...».

Bu əsərin 2-ci cildi, XI fəsil – Ehtimal nəzəriyyəsi – akademik A. N. Kolmogorov tərəfindən yazılmışdır və bu günə qədər təbiətşünaslıq və mühəndis mütəxəssisləri, riyaziyyat müəllimlərinin nümayəndələri üçün maraqlı doğurur.

§1. Ehtimal qanunauyğunluqları

Təbiət elmləri ilə müəyyən olunmuş ən sadə qanunauyğunluqlar – bizi maraqlandıran hər hansı hadisənin doğrudan da baş verib və ya baş verməməsi üçün şərtlərin təyin olunmasından ibarətdir; bu şərtlər aşağıdakı iki sxemdən biri ilə ifadə oluna bilər:

1) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetirsə, onda A hadisəsi yəqinliklə baş verir;

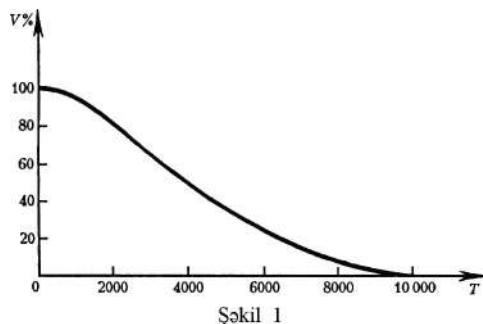
2) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetmirsə, onda A hadisəsi baş verə bilməz.

Birinci halda A hadisəsi S şərtlər kompleksinə nəzərən «yəqin» və ya «zəruri olan» hadisə, ikinci halda – «qeyri-mümkün» hadisə adlanır. Məs., atmosfer təzyiqi və $0^\circ < t < 100^\circ$ arasındakı t temperaturunda (– S şərtlər kompleksi) su yəqinliklə maye halında olur (A_1 yəqin hadisəsi), qaz və ya bərk halında isə ola bilməz (A_2 və A_3 qeyri-mümkün hadisələri).

S şərtlər kompleksi yerinə yetdikdə A hadisə bəzən baş verə bilirsə, bəzən isə baş verə bilmirsə, A hadisəsi bu şərtlər kompleksinə nəzərən

tasadüfi hadisə adlanır. Belə bir sual yaranır: *A* hadisəsinin *tasadüfiliyi* – *S* şərtlər kompleksi və *A* hadisəsi arasında heç bir qanunauyğun əlaqənin olmadığı kimi anlaşılmalıdır? Fərz edək ki, məs., müəyyən olunmuşdur ki, müəyyən bir zavodun istehsal etdiyi müəyyən tip (*S* şərtlər kompleksi) lampalar bəzən 2 000 saatdan artıq yanır (*A* hadisəsi), bəzən isə bu müddətdən az vaxt ərzində sönerək, yarırsız olur. Bununla belə zavodun məhsulunun keyfiyyət xarakteristikası üçün lampaların 2 000 saat işləməsi qabiliyyətini yoxlamaq məqsədilə sınaqlar aparılmalıdır? Bəlkə, lampaların praktik olaraq, hansının fasiləsiz yanması və bütün lampaların sıradan çıxması üçün konkret müddətlə (uyğun olaraq, 500 saat və 10 000 saat) kifayətlənmək gərəkdir? Aydınır ki, lampaların işləmə müddətinin yalnız $500 \leq T \leq 10000$ bərabərsizlikləri ilə xarakteristikası istehlakçının az qane edəcəkdir. Əgər istehlakçıya lampaların təqribən 80% hallarında 2000 saatdan az işləməyəcəyi barədə deyilsə, istehlakçı bu halda olduqca tam informasiya almış olur. *T* saatdan az, olmayaraq işləyən lampaların, ixtiyari *T* qiymətində, $v(T)$ faizini göstərmək üçün heç olmasa şəkil 1-də təsvir olunmuş qrafikdə lampaların daha tam xarakteristikasını da vermək olar.

$v(T)$ -nin əyrisi praktik olaraq, olduqca çox sayda (100 – 200) lampadan ibarət sınaq partiyası ilə sınaqların köməyiylə tapılır. Təbii ki, belə təyin olunmuş əyrinin yalnız o vaxt gerçək əhəmiyyəti olur ki, o, real qanunauyğunluğu yalnız baxılan sınaq partiyası üçün deyil, həm də materialların verilməsi keyfiyyətində və zavodda bərqərar istehsalat texnologiyasında istehsal olunan lampalar üçün düzgün əks etdirə bilsin, yəni digər sınaq partiyaları ilə aparılan sınaqlarda bu partiyalardakı lampalar da eyni şəraitdə istehsal olunmuşlarsa və sonda yaxın nəticələrə (yəni $v(T)$ -yə yaxın əyilərə) – birinci sınaq partiyası üçün sınaqlar nəticəsində alınmış əyriyə gətirsin. Bu belə anlaşılmalıdır ki,



Şəkil 1

sınaq partiyalarında $v(T)$ əyiləri ilə ifadə olunan *statistik qanunauyğunluq* – yalnız lampaların işləmə müddətini, onun hazırlandığı materialların keyfiyyəti və onun hazırlanma texnologiyası ilə əlaqələndirən *ehtimal qanunauyğunluğunu* əks etdirən bir qanunauyğunluqdur.

Bu ehtimal qanunauyğunluğu $P(T)$ funksiyası vasitəsilə verilir, burada $P(T)$ – verilən şərtlərdə, ayrıca bir lampanın *T* saatdan az yanmayacağı ehtimaldır.

A hadisəsinin *S* şərtlərində müəyyən bir

$$P(A|S) = p$$

ehtimalının varlığı haqqında hökm belə ifadə olunur: olduqca uzun müxtəlif sınaqlar seriyalarında (yəni *S* şərtlər kompleksi yerinə yetirilməklə aparılan sınaqlar) *A* hadisəsinin baş verməsi üçün alınan

$$v_r = \frac{H_r}{n_r}$$

tezlikləri təxminən eyni olub, *p*-yə yaxın olur (burada n_r – *r*-ci seriyadakı sınaqlar sayı, H_r – *A* hadisəsi baş verən sınaqların sayıdır).

Sınaqlar sayı çox olduqca, *v* tezliklərinin, «ümumiyyətlə», daha yaxın ola bildiyi $p = P(A|S)$ konstantının varlığı haqqında hipotez

(*S* şərtlər kompleksi və *A* hadisəsi arasında əlaqənin xarakteri ilə obyektiv şərtləşdirilmiş) *tasadüfi hadisələrin geniş sinfi üçün özünü yaxşı doğruldur*. Belə *tasadüfi hadisələr* təbii olaraq, *ehtimali – tasadüfi* hadisələr adlandırılır. Yuxarıda baxılan məsələ kütləvi istehsalatın ehtimal qanunauyğunluqları oblastına aiddir. Belə qanunauyğunluqların reallığı heç bir şübhə doğurmur. Kütləvi məhsulun statistik seçimi nəzərinin olduqca mühüm praktik üsulları bu qanunauyğunluqlara əsaslanır. Ehtimali qanunauyğunluqların yaranması cəhətdən ona yaxın oblast – *atəş nəzəriyyəsinə* əsas əhəmiyyət kəsb edən – mərmilərin səpələnməsinin ehtimal qanunauyğunluqları oblastıdır. Bu misal, ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının texniki məsələlərə real tətbiqinə aid ilk misallardan biri olduğundan, biz *atəş nəzəriyyəsinin* bəzi ən sadə məsələlərinə sonradan qayıdacağıq.

Sınaqların sayı *n*-in böyük qiymətlərində *p* ehtimalının *v* tezliyinə «yaxınlığı» barədə yuxarıdakı mülahizələr bir qədər aydın deyildir, biz *n*-in bu və ya digər qiymətlərində $v - p$ fərqinin nə dərəcədə kiçik olması haqqında heç bir söz demədik. *v*-nün *p*-yə yaxınlıq dərəcəsi §3-də kəmiyyətcə qiymətləndiriləcəkdir. Qeyd etmək maraqlıdır ki, bu sualla əlaqədar hər hansı bir qeyri-müəyyənliyi tamamilə istisna etmək olmaz. *v* və *p*-nin yaxınlığı haqqında müddəa, sualın incələnməsində göründüyü kimi, yalnız ehtimali xarakter daşıyır.

§ 2. Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları və əsas düsturları

Statistik qanunauyğunluqların böyük rolunun olduğu heç bir şübhə doğurmduğundan, qarşıya bunların öyrənilməsi üçün metodlar haqqında məsələ çıxır. İlk əvvəl onların sırf empirik eksperimental mümkünlüyü haqqında fikir yaranır. Ehtimali qanunauyğunluq kütləvi proseslərdə aşkar olduğundan, onun aşkar olunması üçün kütləvi eksperiment aparılması zəruridir.

Belə təsvirətinə yalnız qismən doğrudur. Bəzi ehtimali qanunauyğunluqlar eksperimental olaraq müəyyənləşdirib, bəzi ümumi fərziyələr vasitəsilə məntiqi yolla və ya hesablama yolu ilə bunlardan yeni ehtimali qanunauyğunluqlar almaq olar. Bunu nə cür etmək üsulunu göstərməzdən əvvəl, biz ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi əsas təriflərini və düsturlarını verməliyik.

Ehtimalın $v = \frac{m}{n}$ tezliyinin *normal qiyməti* kimi təsəvvüründən,

$0 \leq m \leq n$ və $0 \leq v \leq 1$ olduqda ixtiyari *A* hadisəsinin ehtimalı $P(A)$ -nin sıfır və vahid^{*} arasında qiymət aldığına hesab etmək təbii ki,

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1)$$

S şərtlər kompleksi yeyinə yetdikdə, hər ikisi eyni zamanda baş verməyən hadisələrə *uyuşmayan* hadisələr deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında cüt xalın düşməsi hadisəsi və üç xalının düşməsi uyuşmayan hadisələrdir. A_1 və A_2 hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə baş verən *A* hadisəsinə, A_1 və A_2 hadisələrinin *birləşməsi* deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında A_1 – 1 və ya 2 xalının, A_2 – 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisələri olarsa, A – 1, 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisəsidir. Aydınır ki, iki uyuşmayan A_1 və A_2 hadisələrinin və onların birləşməsi $A = A_1 \cup A_2$ hadisələrinin baş vermə sayları, uyğun olaraq, m_1 , m_2 və *m* olarsa, $m = m_1 + m_2$ bərabərliyi doğrudur, bu isə uyğun tezliklər üçün $v = v_1 + v_2$ bərabərliyini verir.

Bu – A_1 və A_2 uyuşmayan hadisələr, $A_1 \cup A_2$ onların birləşməsi olduqda aşağıdakı, ehtimalların toplanması aksiomunun:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (2)$$

* Bəzən bunlar *stoxastik* adlandırılır.

* $P(A|S)$ işarələnməsini qısalıq namına $P(A)$ ilə işarə edəcəyik.

bərabərliyi ilə ifadəsinin təbiiyyətinə gətirir.

Daha sonra U yaqın hadisəsi üçün

$$P(U) = 1 \quad (3)$$

qəbul etmək təbiidir.

Bütün riyazi ehtimal nəzəriyyəsi (1), (2) və (3) tipli sadə aksiomlar üzərində qurulur. Sırf riyazi nöqteyi-nəzərdən, *ehtimal* – «hadisənin» elə ədədi funksiyasıdır ki, o, bir sıra aksiomatik qeyd olunmuş xassələrə malikdir. Əgər hadisə anlayışının, hadisələrin birləşməsi və aşağıda tərif verilən hadisələrin *birgə baş verməsi* (rus. *совмещение событий*) kimi anlayışların özlərini aksiomatizasiyasında israr olunmazsa, ehtimalın (1), (2) və (3) düsturları ilə ifadə olunan xassələri elementar ehtimal nəzəriyyəsi adlandırılan nəzəriyyəsinin qurulması üçün yetərli əsasdır. Bu nəzəriyyəni öyrənmək istəyənlər üçün «hadisə» və «ehtimal» terminlərinin anlaşılmasına inamla yanaşmaq faydalıdır, lakin onu bilmək də faydalıdır ki, bu anlayışların tam mənası ilə formalaşması çətin olduğundan onların real mənası ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatlaşdırılmış təmiz riyazi şərhinin tam formal və aydın surətdə anlaşılmasına təsir etmir.

İxtiyari sayda baxılan $A_1, A_2, \dots, A_s$ hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəni bu hadisələrin birləşməsi adlandıracağıq. Onda ixtiyari sayda cüt-cüt uyğunmayan $A_1, A_2, \dots, A_s$ hadisələri və onların birləşməsi A hadisəsi üçün toplanma aksiomundan

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_s)$$

bərabərliyi alınır (ehtimalların toplanma teoremi adlandırılan).

Əgər bu hadisələrin birləşməsi yaqın hadisədirsə (yəni S şərtlər kompleksi hər dəfə yerinə yetdikdə A_k hadisələrindən biri hökmən baş verirsə), onda

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_s) = 1.$$

Bu halda $A_1, A_2, \dots, A_s$ hadisələr sistemi – hadisələrin tam sistemi adlanır.

İndi, ümumiyyətlə, iki – uyuşan A və B^* hadisələrinə baxaq. Əgər C hadisəsi A və B hadisələrinin hər ikisi baş verdikdə hadisədirsə, C hadisəsinə A və B hadisələrinin eyni zamanda baş vermə (birgəlik, kəsişməsi H. M.) hadisəsi adlandıracağıq ($C = AB$, $= A \cap B$ H. M.).

Məs., A – oyun zəri atıldıqda düşən xallar sayının cüt olması hadisəsi, B – düşən xalın 3-ə bölünən olması hadisəsi olarsa, onda C hadisəsi düşən xalın altıya bərabər olmasıdır.

Təkrarlanan n sayda (n – böyük fərz olunur) sınaqlarda A hadisəsinin m dəfə, B hadisəsinin l dəfə, lakin k dəfə A hadisəsi ilə birgə baş verdiyi fərz olunur. k/m nisbətini təbii olaraq, B hadisəsinin A şərtinə nəzərən şərti tezliyi adlandırmaq olar. $\frac{k}{m}, \frac{m}{n}$ və

$\frac{k}{n}$ tezliklərini bir-birilə əlaqələndirən

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{n} : \frac{m}{n}$$

düsturuna aşağıdakı tərif vermək təbiidir.

A şərtində B hadisəsinin *şərti ehtimalı* – $P(B|A)$, aşağıdakı nisbətə deyilir:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Əlbəttə, burada $P(A) \neq 0$ olduğu fərz olunur.

Burada, əgər A və B hadisələri mahiyyətcə bir-birilə əlaqəli deyildirlərsə, təbii olaraq, belə fərz etmək olar ki, A hadisəsi baş verərsə, ümumiyyətlə, bütün sınaqlara baxıldığı halda B hadisəsinin nə çox, nə az dəfə baş verməsinin əhəmiyyəti yoxdur, yəni təqribən

$$\frac{k}{m} \sim \frac{l}{n} \quad \text{və ya}$$

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n}.$$

Sonuncu təqribi bərabərlikdə $\frac{m}{n} = v_A$, – A hadisəsinin tezliyidir,

$\frac{l}{n} = v_B$, – B hadisəsinin tezliyidir, nəhayət, $\frac{k}{n} = v_{AB}$, – A və B

hadisələrinin birgəlik (kəsişməsi) hadisəsinin tezliyidir.

Biz görürük ki, bu tezliklər

$$v_{AB} \sim v_A \cdot v_B$$

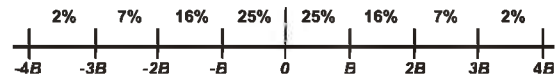
münasibəti ilə əlaqədirlər. Buna görə də, A , B və AB hadisələrinin ehtimalları üçün uyğun olaraq,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (4)$$

dəqiq bərabərliyini götürmək təbiidir.

(4) bərabərliyi A və B hadisələrinin *asılı olmamazlığının* tərifinin ifadəsidir.

İxtiyari sayda hadisələrin asılı olmamazlığının tərifini analogi vermək olar. Bundan başqa ixtiyari sayda sınaqların asılı olmamazlığının tərifini də vermək olar (bu kobud deyimdə belə anlaşılmalıdır ki, sınaqların bir hissəsinin bu və ya digər nəticəsi, digər sınaqların nəticəsinə heç bir tərzdə təsir etmir).



Şəkil 2

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasının müzakirəsinə biz §4-də bir daha qayıdacağıq.

İndi isə n sayda asılı olmayan sınaqlardan hər birində p ehtimalı ilə baş verən hər hansı A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalı P_k -ni hesablayaq. $\bar{A}$ ilə A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəni işarə edək. Aydındır ki,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

Sınaqların asılı olmamazlığının tərifinə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsindən və $n-k$ dəfə A hadisəsinin baş verməməsindən təşkil olunan hər hansı müəyyən ardıcılığın ehtimalı

$$p^k (1-p)^{n-k} \quad (5)$$

hasilinə bərabərdir.

Məs., $n=5$, $k=2$ olduqda nəticələrin $\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}$ ardıcılığının ehtimalı, – $p(1-p)p(1-p)(1-p)$ olacaqdır.

* analogi olaraq ixtiyari sayda $A_1, A_2, \dots, A_s$ hadisələrinin kəsişməsi – C hadisəsi, bütün bu hadisələr baş verdikdə baş verən hadisədir.

* Dəqiq olaraq, *sınaqların asılı olmamazlığı* aşağıdakı kimi anlaşılır. n sayda sınağı hər hansı cür iki qrupa bölək: A – birinci qrupun bütün sınaqlarının əvvəlcədən verilmiş hər hansı nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə, B – ikinci qrupun hər hansı əvvəlcədən verilmiş nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə olsun. Əgər ixtiyari bölgüdə və nəticələrin ixtiyari cür verildiyi halında A və B hadisələri (4) mənasında asılı olmazlarsa, sınaqlar *asılı olmayan* (külliyyətcə) sınaqlar adlanır.

Toplama teoreminə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsi və $n-k$ dəfə baş verməməsi ehtimalı bütün ardıcılıqların ehtimallarının cəmi P_k -yə bərabər olacaqdır, yəni (5)-ə əsasən, bütün belə ardıcılıqlar sayının $p^k(1-p)^{n-k}$ hasilinə bərabər olacaqdır. Belə ardıcılıqların sayı, aydındır ki, n elementdən k elementli birləşmələrin sayına bərabərdir, çünki k sayda əlverişli nəticə n sayda sınaqlar sırasında, istiyarı k yerdə ola bilər.

Beləliklə, nəticədə

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (6)$$

(binomial paylanma adlandırılan) münasibətini alırıq. Yuxarıda verilmiş tərif və düsturların nə cür tətbiq edildiyini görmək üçün atəş nəzəriyyəsinə aid bir misala baxaq.

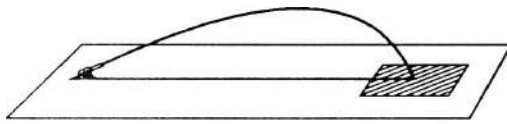
Hədəfin məhvi üçün hədəfə beş dəfə düşmə kifayətdir. Bizi belə bir sual maraqlandırır: 40 atəş nəticəsində zəruri olan beş dəfə düşməyə biz əmin ola bilərikmi? Bu məsələnin sırf empirik həll metodu aşağıdakı kimi ola bilər. Hədəfin verilmiş ölçüləri ilə verilən atəş məsafəsində hər dəfə 40 atəş açmaq şərtilə çoxlu (məs., 200) atəş açılır və beş dəfədən az olmamaq şərtlə hədəfə düşmə üçün neçə dəfə atəş açılması təyin olunmalıdır. Əgər bu nəticə 200 atəşdən 195-ində alınmışdırsa, onda P ehtimalı təqribən

$$P = \frac{195}{200} = 0,975$$

qiymətini alır.

Araşdırmanın baxılan sırf empirik resepti üzrə biz olduqca xüsusi bir məsələnin həlli üçün 8 000 mermi sərf etməli olardıq. Olbətə ki, praktikada belə hərəkət etmərlər. Əvəzində isə hədəfin ölçüləri nəzərə alınmadan verilən atəş məsafəsində mərmilərin səpələnməsi araşdırılır. Əslində isə, məsələnin uzaqlığı üzrə yayımlar və orta düşmə nöqtəsindən yan tərəflərə yayımlar, tezlik anlamında təsadüf olunan müxtəlif ölçülü yayımlar, şəkil 2-də təsvir olunan qanununu təbədir. Burada B hərfi ilə ehtimal yayıması kimi adlandırılmış yayıma işarə olunmuşdur. Ümumiyyətlə isə, ehtimal olunan yayıma, məsafə uzaqlığı üzrə yayımlar və yan tərəflərə yayımlar müxtəlifdir və atəş məsafəsinin artırılması ilə o da artır. Hər bir silah və mərmə növü üçün müxtəlif uzaqlıq məsafələri üzrə ehtimal olunan yayımlar artilleriya poliqlonlarında sınaq atışları vasitəsilə empirik olaraq tapılır. Bundan sonra bu tip mümkün ola bilən, yuxarıda qeyd olunduğu kimi qoyulan xüsusi məsələlərin həlli hesablanma yolu ilə aparılır.

Sadəlik üçün fərz edək ki, bizi maraqlandıran hədəf – bir tərəfi atəş xətti boyu istiqamətlənmiş, uzunluğu isə uzaqlıq üzrə ehtimal olunan yayımların iki mislinə bərabər, digər tərəfi isə atəş xəttinə perpendikulyar, uzunluğu yan tərəflərə ehtimal olunan yayımların iki mislinə bərabər, düzbucaqlı şəklindədir. Daha sonra fərz edək ki, hədəf yaxşı atəşə tutulmuşdur və mərmilərin orta uçuş trayektoriyası hədəfin mərkəzindən keçir.



Şəkil 3

Bir də fərz edək ki, yan tərəflərə yayıma və uzaqlıq üzrə yayıma bir-birindən asılı deyildirlər*. Onda verilmiş mərmənin hədəfə düşməsi üçün – onun uzaqlıq və yan tərəflərə yayımlarının uyğun ehtimal olunan yayımlarını aşması zəruri və kafidir. Şəkil 2-yə uyğun olaraq bu hadisələrdən hər biri, təxminən atılmış mərmilərin 50%-i üçün, yəni $1/2$ ehtimalı ilə müşahidə olunaçaqdır. Bu hadisələrin ikisi də birlikdə atılmış mərmilərin 25%-i üçün baş verəcəkdir, yəni ayrıca bir mərmənin hədəfə düşməsi ehtimalı –

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

ayrıca bir atəşdə hədəfə düşməməsi ehtimalı

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

olacaqdır.

Hər biri ayrı-ayrı atəşlərdə hədəfə düşmələr asılı olmayan hadisələr olduğundan (6) binomial düsturunu tətbiq edərək, 40 atəşdə yalnız k dəfə hədəfə düşmə ehtimalının

$$P_k = C_{40}^k p^k q^{40-k} = \frac{40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot (39-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k}$$

olduğunu alırıq. Onda bizi maraqlandıran, hədəfə beş dəfədən az

olunmaq şərtlə düşmə hadisəsinin ehtimalı – $P = \sum_{k=5}^{40} P_k$ düsturu ilə

ifadə olunacaqdır. Lakin bu ehtimalı $P = 1 - Q$, $Q = \sum_{k=0}^4 P_k$ düsturu

ilə hesablamaq daha münasibdir.

P_k ehtimallarını hesablamaq olur:

$$P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \sim 0,00001,$$

$$P_1 = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{39} \cdot \frac{1}{4} \sim 0,00013,$$

$$P_2 = \frac{40 \cdot 39}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{38} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sim 0,00087,$$

$$P_3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{37} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \sim 0,0037,$$

$$P_4 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{36} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \sim 0,0113,$$

və buradan

$$Q = 0,016, \quad P = 0,984$$

olduğunu alırıq.

P ehtimalı üçün aldığımız qiymət həttə vahidə yaxındır və o, qoyulan məsələnin yerinə yetirilməsini təmin edə biləcək mərmiləri sayının təyin olunmasında atış nəzəriyyəsinə, adətən, kafi sayılan ehtimaldan da çoxdur. Çox vaxt qoyulmuş məsələnin 0,95 ehtimalı ilə yerinə yetəcəyini təmin edən mərmilər sayını göstərməyin mümkün olduğu hesab edilir.

Baxılan misal bir qədər sxematik olsa da, ehtimal hesablamalarının mühümlüyünü kifayət qədər inandırıcı nümayiş etdirir. Ehtimal olunan yayımların atış məsafəsindən asılılığının sınaqdan asılılığını poliqlonda az da olsa, atışlar etməklə (bu kifayət edir) müəyyən etdikdən sonra, biz bəzi, çox da çətin olmayan hesablamaların köməyi ilə ən müxtəlif suallara cavab ala bilərik. Çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri də digər bütün oblastlarda da statistik qanunauyğunluqlara gətirir. Kütləvi müşahidələrin bilavasitə işlənilməsindən sonra bu statistik qanunauyğunluqlardan yalnız ən sadələri aşkar olunur, yəni yalnız ilkin ehtimallar tapılır. Sonra ehtimal nəzəriyyəsinin qanunlarının köməyi ilə, bu ilkin ehtimallar əsasında daha mürəkkəb hadisələrin ehtimalları hesablanır və bu hesablamalara əsaslanaraq, bizi maraqlandıran mürəkkəb təsadüfi hadisələri idarə edən statistik qanunauyğunluqlar haqqında nəticələr çıxarılır.

* Asılı olmamazlığın bu fərzinə sınaqla təsdiq olunur.

Bəzən ilkin ehtimallar olduqca inandırıcı simmetriya mülahizələrindən təyin oluna bilirdiyindən, kütləvi statistik material toplamağa ehtiyac duyulmur. Məs., oyun zəri, yəni bircins maddədən hazırlanmış kub, olduqca yüksək hündürlükdən atıldıqda öz üzrlərindən hər bir üzü üstə eyni – 1/6 ehtimalla düşməsi haqqında ənənəvi nəticəyə, bu nəticənin doğruluğunu sübut etmək üçün kifayət edəcək qədər müşahidə materialının toplanılmasından xeyli əvvəl gəlinmişdir. Bu növ sisteməlik sınaqlar, ehtimal nəzəriyyəsi bir elm kimi formalaşdıqdan sonra, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə dərslərlərin müəllifləri tərəfindən XVIII-XX əsrlərdə aparılmışdır. Bu sınaqların nəticəsi qanəddici olsa da, belə fəaliyyətin yeni analoji hallar üçün genişləndirilməsi çətin ki, maraq doğursun. Məs., hələ ki, bizə məlum olduğuna görə, heç bir kəs tərəfindən bircins materialdan hazırlanmış düzgün oniki üzünün atılması ilə bağlı olduqca geniş sınaqlar aparılmamışdır. Lakin əgər, məs., 12 000 belə eksperiment aparılıbsaydı, şübhəsiz ki, onikiüzlü hər bir üzü üstə təxminən min halda düşə bilərdi.

Simmetriya və ya bircinslik baxımından ilkin ehtimalların təyin olunması bir çox ciddi elmi məsələlərdə böyük rola malikdir, məs., heç bir qaydaya tabe olmadan (xaoitik; H. M.) hərəkət edən qaz molekullarının və ya qalaktika ulduzlarının toqquşması və ya bir-birinə yaxınlaşması kimi bütün məsələlərdə belə ehtimalların təyin olunması kimi.

Əlbəttə ki, belə daha incə hallarda heç olmasa şərtləşdirilmiş razılaşmalar delayısı ilə də olsa, bunlardan alınmış nəticələrin sınaqla müqayisəsi yolu ilə yoxlanılmalıdır.

§3. Böyük ədədlər qanunu və limit teoremləri

Sınaqların «böyük» seriyalarında hadisənin baş verməsi tezliklərinin onun ehtimalına «yaxın» olması haqqında müddəanın kəmiyyətə dəqiqləşdirilməsinə ehtiyacın duyulması tamamilə təbiiirdir. Bu məsələnin məlum incəliyi aydın təsəvvür olunmalıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi üçün ən tipik hallarda belə olur ki, olduqca uzun sınaqlar seriyalarında tezliyin hər iki «sərhəd» qiymətləri nəzəri olaraq mümkün olur, yəni

$$\frac{\mu}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad \text{və} \quad \frac{\mu}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

qiymətləri. Buna görə də, sınaqlar sayı n -in qiymətindən asılı olmayaraq, məs., tam yəqinliklə hökm etmək olmaz ki,

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \frac{1}{10}$$

bərabərsizliyi ödəniləcəkdir.

Məs., A – oyun zəri atıldıqda altı xalının düşməsi hadisəsidirsə,

onda sınaqları n dəfə təkrar etdikdə, $\left(\frac{1}{6}\right)^n > 0$ ehtimalı ilə altı xalı

həmişə alınacaqdır, yəni $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ehtimalı ilə altı xalının düşməsi

tezliyinin *vahidə* bərabər qiyməti alınacaqdır, $\left(1 - \frac{1}{6}\right)^n > 0$ ehtimalı ilə

altı xalı heç bir dəfə də düşməyəcəkdir, yəni altı xalının düşməsi tezliyi *sıfıra* bərabər olacaqdır.

Belə tip bütün məsələlərdə tezlik və ehtimal arasında yaxınlığın qeyri-trivial qiyməti tam yəqinliklə alınmır, bu, yalnız vahiddən kiçik ehtimalla alınır. Məs., isbat etmək olur ki, asılı olmayan sınaqlarda* baxılan hadisənin ehtimalı sabit p ədədinə bərabərdirsə, onda

$$n = 10000, \quad p \text{ isə ixtiyari olarsa } (0 < p < 1), \quad \frac{\mu}{n} \text{ tezliyi üçün}$$

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < 0,02 \quad (7)$$

bərabərsizliyi

$$P > 0,9999 \quad (8)$$

ehtimalı ilə ödəniləcəkdir.

Burada biz ilk əvvəl onu qeyd etmək istəyirik ki, bu tərzdə verilmiş

şərhə $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p ehtimalına yaxınlığı yeni daxil olunmuş P

ehtimalı ilə bağlıdır. 128. (8) qiymətləndirilməsinin real mənası belədir: n sınaqdan ibarət N sayda seriyalar apardıqda (7) bərabərsizliyinin ödənilməsi seriyaların sayı M -i hesabladıqda, N -in olduqca böyük qiymətlərində

$$\frac{M}{N} \approx P < 0,9999 \quad (9)$$

münasibəti təqribən ödəniləcəkdir. Lakin biz (9) münasibətini $\frac{M}{N}$ -in

P -yə yaxınlıq dərəcəsi cəhətdən, həm də etibarlılıq cəhətdən dəqiqləşdirmək istəsək, bu etibarlılıq baxımından bu yaxınlığın olacağını hökm

etmək olarsa, onda $\frac{\mu}{n}$ və p -nin yaxınlığına təbii etdiklərimizə

analoji surətdə davranmalıyıq. Lazım gələrsə, bu mülahizənin qeyri-məhdud sayda təkrar etmək olar, lakin tamamilə aydındır ki, bu biza son mərhələdə ehtimallara bu terminin primitiv kobud mənasında müraciət etmək zərurətindən tamamilə xilas olunmağa imkan yaradacaqdır.

Bu növ çətinliklərin ehtimal nəzəriyyəsinə xas olan bir xüsusiyyət olduğunu düşünmək olmaz. Real təzahürlərin riyazi öyrənilməsində biz onları həmişə sxemləşdiririk. Gerçək təzahürlərin nəzəri sxemdən yayımlarını öz növbəsində riyazi cəhətdən öyrənmək olar. Lakin buna görə, yayımların özləri də hər hansı surətdə sxemləşdirilməlidir və bu sxemdən isə ondan asılı olmayan yayımların formal riyazi analizi olmadan istifadə etmək olar.

Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, n sınaqdan ibarət bir seriyaya

$$P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < 0,02 \right\} > 0,9999 \quad (10)$$

qiymətləndirilməsini* real olaraq, təbii etdikdə biz eyni zamanda simmetriyanın hər hansı mülahizələrinə istinad edirik: (10) bərabərsizliyindən görünür ki, seriyaların böyük N qiymətlərində (7) münasibəti 99,99%-dən az olmayan hallarda ödəniləcəkdir; təbii olaraq, böyük əminliklə gözləmək olar ki, məsələn, (7) bərabərsizliyi n sınaqdan ibarət bizi maraqlandıran müəyyən bir seriyada ödəniləcəkdir, bu şərtlə ki, bu seriyanın digər seriyalar sırasında heç bir xüsusi seçilən bir vəziyyəti olduğuna bizim heç bir əsasımız olmasa.

Müxtəlif praktiki məsələlərdə nəzərə alınmayan ehtimallar müxtəlifdir. Yuxarıda qeyd olunmuşdu ki, mərmilərin nə qədər istifadə edilməsinin bu qoyulan məsələnin həllinə zamanət verən hesablamalarında qoyulan məsələnin 0,95 ehtimalı ilə həllindəki mərmilə sayının norması ilə kifayətlənmək olur, yəni 0,05-i aşmayan ehtimallar nəzərə alınmır. Bu onunla izah olunur ki, yalnız 0,01-dən kiçik olan ehtimallar nəzərə alınmadıqda, aparılan hesablamalar bizi mərmilə sayının normasının böyük olmasına gətirərdi, yəni praktik olaraq, bir çox hallarda bu məsələnin həlli üçün verilmiş zaman ərzində onun həllinin qeyri-mümkünlüyü və ya məmri ehtiyatının faktiki olaraq, istifadə oluna bilinəcəyi nəticəsinə gətirmiş olardı.

Bəzən, hətta eyni araşdırmalarda belə, 0,05-dən kiçik ehtimalların nəzərə alınmaması ilə hesablamalara əsaslanan statistik qaydalarla kifayətlənilir. Lakin bunu yalnız daha geniş material toplamaq çətin olduğu hallarda etmək olur. Belə qaydalara bir misal kimi aşağıdakı məsələyə baxaq. Fərz edək ki, hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində

* s. 1099-dəki haşiyəyə bax, (8)-in isbatı 1101-də verilir.

* (7) bərabərsizliyinin ehtimalı üçün (8) qiymətləndirilməsi belə yazılır.

müəyyən şərtlərlə istifadə olunan dərman 50% hallarda, yəni 0,5 ehtimalı ilə müsbət nəticə verir. Yeni dərman təklif olunur və onun köhnədən üstünlüyünü yoxlamaq üçün köhnə dərmanın effektivliyi müəyyən olunmuş 50% xəstələrdən qərəzsiz seçilmiş on nəfər üzərində onu yoxlamaq planlaşdırılır. Əgər on haldan səkkizində bu yeni dərman müsbət nəticə verərsə, onda onun üstün olduğu isbat olunmuş sayılır. Asanlıqla hesablamaq olar ki, belə qərar 0,05 tərtibdən ehtimalla səhv nəticə (yəni yeni dərmanın köhnəsi ilə eyni güclü və ya hətta ondan da pis olmasına baxmayaraq, onun üstün olduğu haqqında nəticə) almaq ehtimalının nəzərə alınması ilə əlaqədardır. Əslinə qaldıqda, on sınaqdan hər birində müsbət nəticənin ehtimalı p -yə bərabərdirsə, on sınaqda 10, 9 və 8 müsbət nəticə alınması ehtimalları, uyğun olaraq,

$$P_{10} = p^{10},$$

$$P_9 = 10 p^9 (1-p),$$

$$P_8 = 45 p^8 (1-p)^2,$$

olacaqdır. $p = \frac{1}{2}$ halında bu ehtimalları cəmləyərək,

$$P = P_{10} + P_9 + P_8 = \frac{56}{1024} \sim 0,05$$

olduğunu alırıq. Beləliklə, biz yeni dərmanın köhnəsi ilə doğrudan da, eynigüclü olduğunu fərz edərək, biz səhv qərar çıxarmaqla, yeni yeni dərmanın köhnəsindən, 0,05 tərtibdən ehtimalla yaxşı olduğu haqqında qərar verməklə risk edirik. Bu ehtimalı sınaqlar sayı ($n=10$) n -i artırıb təqribən 0,01 tərtib ehtimalla gətirmək üçün müəyyən olunmalıydı ki, yeni dərmanın üstünlüyü yalnız o halda sübut olunmuş sayılır ki, onun tərtibi on haldan doqquzunda müsbət nəticə vermiş olsun. Əgər bu tələb yeni dərmanın tərəfdarlarına olduqca sərt görünərsə, onda sınaqlar sayı n , 10-dan olduqca böyük götürülməlidir. Əgər, məs., $n=100$ olduqda yeni dərmanın üstünlüyü $\mu > 65$ olduğu hal üçün isbat olunmuş hesab edilərsə, onda səhv ehtimalı yalnız $P \approx 0,0015$ olacaqdır.

Əgər elmi tədqiqatlarda 0,05 ehtimalında norma açıqdan-açığa kifayət deyilsə, onda astronomik müşahidələr üzərində işlənilmələr qəbilindən olan akademik və ətraflı araşdırmalarda da 0,001 və ya 0,003 tərtib səhv ehtimalları da əksər hallarda nəzərə alınır. Buna baxmayaraq, ehtimal qanunauyğunluqlarının tərtibinə əsasən elmi nəticələr, bəzən də olduqca böyük yaqınlıya (yəni olduqca kiçik ehtimallar nəzərə alınmadan qurulmuş) malik olurlar. Bu haqda bir qədər sonra.

Baxılan misallarda biz artıq (6) binomial düsturunun xüsusi hallarını, yəni hər bir sınaqda p ehtimalı ilə müsbət nəticə ola bilən, n sayda asılı olmayan sınaqlarda yalnız m sayda müsbət nəticə hadisəsinin ehtimalı P_m üçün dəfələrlə

$$P_m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

düsturunu tətbiq etmişik. Bu düsturun köməyi ilə bu paragrafın əvvəlində

$$P = \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \quad (11)$$

ehtimalı haqqında qoyulmuş suala qayıdaq, burada μ – müsbət nəticələrin faktiki sayıdır*. Aydın ki, bu ehtimalı

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \quad (12)$$

* μ , – $m = 0, 1, \dots, n$ qiymətlərini P_m ehtimalları ilə alır, yəni $P\{\mu=m\}=P_m$.

bərabərsizliyini ödəyən P_m ehtimallarının cəmi şəklində yazmaq olar, yəni

$$P = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_m \quad (13)$$

cəmi şəklində; burada m_1 – (12) bərabərsizliyini ödəyən m -lərdən ən kiçiyi, m_2 – belə m -lərdən ən böyüyüdür.

(13) düsturunu n -in çox böyük qiymətlərində bilavasitə istifadə etmək çox çətindir. $p=1/2$ halı üçün Muavrın, ixtiyari p üçün ($0 < p < 1$, H. M.) Laplasın kəşf etdikləri asimptotik düsturlar – P_m ehtimallarını olduqca sadəliklə tapmağa və n -in böyük qiymətlərində asimptotikamı öyrənməyə imkan yaratdı. Bu düstur aşağıdakı təqribi bərabərliklə ifadə olunur:

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}. \quad (14)$$

Əgər p sıfır və ya vahidə çox yaxın olmazsa, onda 100 tərtibdən n qiymətlərində bu düstur artıq kifayət qədər dəqiq olur. Əgər

$$t = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (15)$$

işarələməsini götürsək, (14) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (16)$$

(13) və (16)-dan (11) ehtimalı üçün aşağıdakı təqribi ifadəni almaq olar:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(T), \quad (17)$$

burada

$$T = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}. \quad (18)$$

(17)-nin sağ və sol tərəflərinin fərqi p -nin sıfır və vahiddən fərqli sabit qiymətlərində $n \rightarrow \infty$ olduqda, ε -a görə sıfır müntəzəm yığılır. $F(t)$ funksiyası üçün ətraflı cədvəllər tərtib olunmuşdur. Bunlardan bəziləri aşağıda verilir:

T	1	2	3	4
F	0,68269	0,95450	0,99730	0,99993

$T \rightarrow \infty$ olduqda $F(T)$ funksiyasının qiyməti vahidə yaxınlaşır.

(17) düsturunun köməyi ilə

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < 0,02 \right\}$$

ehtimallarını $n=10000$ olduqda qiymətləndirək. $T = \frac{2}{\sqrt{p(1-p)}}$

olduğundan,

$$P \approx F \left(\frac{2}{\sqrt{p(1-p)}} \right)$$

olur. $F(T)$ funksiyası T artıqca monoton artdığından, P -nin p -dən asılı olmayan qiymətləndirilməsində T -nin ən kiçik mümkün

qiymətini (müxtəlif p qiymətlərində) götürmək lazımdır. T belə ən kiçik qiymətini $p=1/2$ olduqda alır və o, 4-ə bərabər olur. Buna görə də, təqribi olaraq,

$$P \geq F(4) = 0.99993. \quad (19)$$

(19) bərabərsizliyində (17) düsturunun təqribilik xüsusiyyətilə yaranan xəta nəzərə alınmamışdır. Bu xəta ilə bağlı qiymətləndirmə apararaq, hər hansı $P > 0.9999$ olduğunu müəyyən etmək mümkündür.

(17) düsturunun tətbiqi ilə baxılan misalla əlaqədar olaraq, qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə elmi əsərlərdə (17) düsturunun qalıq həddi verilən qiymətləndirilmələr üçün uzun müddət qənaətbəxş hesab olunurdu. Buna görə də, (17) və ona oxşar düsturların n -in çox da böyük olmayan və ya p ehtimallarının 0 və ya 1-ə çox yaxın qiymətlərində hesablamalarda tətbiqində (xüsusilə, böyük qiymətləri alan ehtimallar olduğu bir çox hallarda), çox vaxt mümkün ola bilən xətanın yağınlıqla müəyyən edilmiş qiymətləndirilmələrinə deyil, yalnız məhdud sayda misallar üçün belə növ nəticələrin yoxlanılması təcrübəsinə əsaslanırdı. Bundan başqa, daha ətraflı araşdırmalar göstərdi ki, yuxarıda verilmiş asimptotik düsturların praktiki sayılan bir çox mühüm hallarda qalıq həddinin yalnız qiymətləndirilməsinə deyil, eyni zamanda dəqiqləşdirilməsinə ehtiyac vardır (belə ki, qalıq hədd dəqiqləşdirilmədikdə çox böyük olur). Hər iki istiqamətdə ən tam nəticələr S. N. Bernşteynə aiddir.

(11), (17) və (18) münasibətlərini

$$P \left\{ \left| \frac{\mu - p}{n} \right| < t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\} \sim F(t) \quad (20)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar. t -nin olduqca böyük qiymətlərində (20) düsturunun sağ tərəfində n yoxdur və o, vahidə, yəni tam yağınlıya uyğun olan ehtimal qiymətinə olduqca yaxındır. Beləliklə,

bizə aydın oldu ki, *bir qayda olaraq*, $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p -dən yayınması

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ tərtibdəndir. Ehtimal qanunauyğunluqlarının müşahidələr sayının

kvadratik kökünə belə mütənəşib təsiri bir çox digər məsələlərdə də müşahidə olunur. Bəzən hətta bir qədər sadələşdirilmiş qaydada, populyarlaşdırma məqsədilə, « n -in kvadratik kökü qanunu » haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin əsas qanunu kimi də söylənilir. Bu fikir böyük rus riyaziyyatçısı P. L. Çevişevin müxtəlif ehtimal məsələlərini cəmlər və «tasadüfi kəmiyyətlərin» ədədi ortaları üçün «riyazi gözləmələrin» və «dispersiyaların» hesablamalarına sistemətik gətirilmə metodunun istifadə olunmasını daxil etdikdən sonra tamamilə aydın oldu.

Verilmiş S şərtlərində müəyyən ehtimallarla müxtəlif qiymətlər alan kəmiyyətə *tasadüfi kəmiyyət* deyilir. Bizim üçün yalnız sonlu sayda müxtəlif qiymətlər ala bilən tasadüfi kəmiyyətlərə baxmaq kifayətdir. Belə ξ tasadüfi kəmiyyətinin, ehtimal paylanması (belə deyilən kimi) göstərmək üçün onun mümkün ola bilən $x_1, x_2, \dots, x_r$ qiymətlərini və

$$P_s = P \{ \xi = x_s \}$$

ehtimallarını göstərmək kifayətdir. ξ kəmiyyətinin bütün müxtəlif mümkün ola bilən qiymətləri üzrə bu ehtimalların cəmi həmişə vahidə bərabərdir:

$$\sum_{s=1}^r P_s = 1.$$

Tasadüfi kəmiyyətə misal kimi n sınaqda müsbət nəticələr sayı μ -nü (yuxarıda şərh olunmuş) göstərmək olar.

ξ tasadüfi kəmiyyətinin *riyazi gözləməsi* -

$$M(\xi) = \sum_{s=1}^r P_s x_s$$

ifadəsinə, ξ kəmiyyətinin *dispersiyası*, - $\xi - M(\xi)$ yayımmasının kvadratının riyazi gözləməsinə, yəni

$$D(\xi) = \sum_{s=1}^r P_s (x_s - M(\xi))^2$$

ifadəsinə deyilir. Dispersiyanın kvadrat kökünə -

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)}$$

ifadəsinə *tasadüfi kəmiyyətin kvadratik orta yayınnması* deyilir.

Dispersiya və kvadratik orta yayınnmaların ən sadə tətbiqləri aşağıdakı məşhur Çebişev bərabərsizliyinə əsaslanır:

$$P \{ |\xi - M(\xi)| \leq t \sigma_\xi \} \geq 1 - \frac{1}{t^2}. \quad (21)$$

Bu bərabərsizlikdən görünür ki, ξ -nin $M(\xi)$ riyazi gözləməsindən yayınnmalarından σ_ξ -ni olduqca aşağı bilən yayınnması nadir hallarda ola bilər.

Tasadüfi kəmiyyətlərin

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(n)}$$

cəmlərini başqa şəkildə saldıqda, onların riyazi gözləmələri üçün

$$M(\xi) = M(\xi^{(1)}) + M(\xi^{(2)}) + \dots + M(\xi^{(n)}) \quad (22)$$

bərabərliyi həmişə doğrudur. Dispersiyalar üçün də analogi bərabərlik yalnız bəzi məhdudiyyətlərlə doğrudur, yəni

$$D(\xi) = D(\xi^{(1)}) + D(\xi^{(2)}) + \dots + D(\xi^{(n)}). \quad (23)$$

(23) bərabərliyinin ödənilməsi üçün kifayətdir ki, müxtəlif nömrəli $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri öz aralarında «korrelyasiya» olmasınlar, yəni $i \neq j$ qiymətlərində aşağıdakı bərabərlik ödənilsin:

$$M((\xi^{(i)} - M(\xi^{(i)}))(\xi^{(j)} - M(\xi^{(j)}))) = 0. \quad (24)$$

Əgər $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ asılı olmayan tasadüfi kəmiyyətlər** olarsa, (24) bərabərliyi həmişə doğrudur. Beləliklə, qarşılıqlı asılı olmayan tasadüfi kəmiyyətlər üçün (23) bərabərliyi həmişə ödənilir.

$$\xi = \frac{1}{n} (\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(n)})$$

ədədi ortaları üçün (23)-dən

* $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsali* aşağıdakı ifadəyə deyilir:

$$R = \frac{M((\xi^{(i)} - M(\xi^{(i)}))(\xi^{(j)} - M(\xi^{(j)})))}{\sigma_\xi^{(i)} \sigma_\xi^{(j)}}$$

Əgər $\sigma_\xi^{(i)} > 0$ və $\sigma_\xi^{(j)} > 0$ olarsa, (24) şərti $R=0$ olması ilə eynigüclüdür.

Korrelyasiya əmsali R tasadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılığı xarakterizə edir. Həmişə $|R| \leq 1$; $R = \pm 1$ yalnız $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$) xətti asılılığı halında olur. Asılı olmayan tasadüfi kəmiyyətlər üçün $R=0$.

** $x_1, x_2, \dots, x_m$ və $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymətlərini uyğun olaraq, ξ və η tasadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması tərifi görə onu ifadə edir ki, istəyən i və j qiymətlərində $A_i = \{ \xi = x_i \}$ və $B_j = \{ \eta = y_j \}$ hadisələri §2-də verilmiş tərifi mənasında asılı deyildirlər.

$$D(\xi) = \frac{1}{n^2} (D(\xi^{(1)}) + D(\xi^{(2)}) + \dots + D(\xi^{(n)})) \quad (25)$$

barabərliyi alınır.

İndi isə fərz edək ki, bütün toplananları üçün hər bu dispersiyalar hansı sabiti aşmur:

$$D\xi^{(i)} \leq C^2.$$

Onda (25)-dən

$$D(\xi) \leq \frac{C^2}{n}$$

və Çebışev barabərsizliyinə əsasən ixtiyari t üçün

$$P\left\{\left|\xi - M(\xi)\right| \leq \frac{tC}{\sqrt{n}}\right\} \geq 1 - \frac{1}{t^2}. \quad (26)$$

(26) barabərsizliyi Çebışevin verdiyi formada böyük böyük ədədlər qanunu kimi adlandırılan qanunu özündə əks etdirir: əgər $\xi^{(i)}$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və məhdud dispersiyalara malikdirsə, onda n artdıqca, onların ədədi ortası onların riyazi gözləmələrinin ədədi ortasından getdikcə az yayılacaqdır.

Daha dəqiq, əgər ξ -nin uyğun ədədi ortaları üçün və ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $n \rightarrow \infty$ olduqda,

$$P\left\{\left|\xi - M(\xi)\right| \leq \varepsilon\right\} \rightarrow 1 \quad (27)$$

münasibəti ödənilərsə,

$$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$$

təsədüfi kəmiyyətlər ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabedir, deyilir.

(26) barabərsizliyindən (27) limit münasibətini almaq üçün

$$t = \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{C}$$

əvəzləməsinə aparmaq kifayətdir.

(27) limit münasibətinin tətbiqi şərtlərinin, yəni böyük ədədlər qanununun tətbiqi şərtlərinin mümkün olduqca çox genişləndirilməsi məsələsinə A. A. Markov, S. N. Bernşteyn, A. Ya. Xinqin və başqalarının çoxsaylı araşdırmaları həsr olunmuşdur. Bu araşdırmaların prinsipial əhəmiyyəti vardır. Lakin daha mühüm əhəmiyyət kəsb edən araşdırma, $\xi - M(\xi)$ yayınmasının ehtimal paylanmasının tədqiqidir.

Ehtimal nəzəriyyəsində rus klassik məktəbinin böyük xidməti – olduqca geniş şərtlərlə

$$P\left\{t_1\sigma_\xi < \xi - M(\xi) < t_2\sigma_\xi\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt \quad (28)$$

barabərliyinin asimptotik (yəni n qeyri-məhdud artdıqca daha böyük dəqiqliklə) doğru olması faktının müəyyənləşdirilməsidir. Çebışev, toplananlar məhdud və qarşılıqlı asılı olmadığı halda, bu düstürün, demək olar ki, tam isbatını vermişdir. Markov Çebışevin mülahizələrindəki çatışmayan cəhəti tamamlamış və (28) düsturunun tətbiqi şərtlərini genişləndirmişdir. Daha geniş şərtlər A. M. Lyapunov tərəfindən verilmişdir. (28) düsturunu asılı toplananlar cəmi üçün S. N. Bernşteyn xüsusilə hər tərəfli döyənmişdi.

(28) düsturu olduqca çox sayda xüsusi məsələləri əhatə etmişdir ki, onun uzun müddət ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremi adlandırıldı. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən yeni inkişaf dövründə onun daha ümumi qanunauyğunluqlar sırasına aid olunmasına baxmayaraq, hal-hazırda belə onun əhəmiyyətini qiymətləndirmək çətinidir.

Əgər toplananlar asılı olmayandırlarsa və onların dispersiyaları eyni və barabərdirlərsə, (25) münasibətini nəzərə alaraq, (28) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq məqsədəuyğundur:

$$P\left\{\frac{t_1\sigma}{\sqrt{n}} < \xi - M(\xi) < \frac{t_2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt. \quad (29)$$

Göstərək ki, (29) münasibətindən bizim əvvəldə baxdığımız məsələnin,

$\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p etimallarından yayınmaları haqqında məsələnin həlli

alınır. Bu məqsədlə aşağıdakı kimi təyin olunan $\xi^{(i)}$ təsadüfi kəmiyyətlərini daxil edək:

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} 0, & i - \text{ci sınağın nəticəsi mənfəi olmuşdursa,} \\ 1, & i - \text{ci sınağın nəticəsi müsbət olmuşdursa.} \end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu halda

$$\mu = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(n)}, \quad \frac{\mu}{n} = \bar{\xi}.$$

$$M(\xi^{(i)}) = p, \quad D(\xi^{(i)}) = p(1-p), \quad M(\bar{\xi}) = p$$

və (29) düsturundan

$$P\left\{t_1\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{\mu}{n} - p < t_2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt$$

münasibəti alınır və $t_1 = -t$, $t_2 = t$ olduqda bu münasibətdən yenə də (20) düsturu alınır.

§ 4. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları haqqında əlavə qeydlər

Tezliklərinə dayanıqlıq xas olan təsadüfi hadisələrdən, yəni məlum şərtlərlə təkrar olunma sayı böyük olduqda tezlikləri hər hansı *normal hədd* – $P(A|S)$ ehtimalı ətrafında qruplaşmağa meylli təsadüfi hadisələrdən danışdıqda, biz §1-dəki şərhimizdə iki cəhətdən müəyyən bir qeyri-dəqiqliyə və qeyri-müəyyənliyə yol verdik. Yol verilmiş qeyri-dəqiqlikdən birincisi ondan ibarətdir ki, göstərmədik ki, tezliklərin dayanıqlılığının aşkar olunması üçün sınaqlar seriyasının zəruri olan sayı n_r nə qədər böyük götürülməlidir və ayrı-ayrı seriyalardakı

sınaqlar sayları $n_1, n_2, \dots, n_r$ olduqda $\frac{\mu_s}{n_s}$ tezliklərinin bir-birindən və

onların normal həddi p -dən mümkün ola bilən yayınmaları necədir. Belə qeyri-dəqiqlik yeni elmin anlayışlarının formalaşmasında qaçılmazdır. Bu nöqtənin və ya düz xəttin *fiziki* anlamda ən sadə metrik anlayışlarına xas olan məlum qeyri-müəyyənlikdən heç də çox deyildir. İşin bu tərəfi sonra §3-də dəqiqləşdirildi.

Bizim şərhimizdəki digər gizli mühüm qeyri-müəyyənlik – A hadisəsinin baş vermə tezliyinin dayanıqlılığını aşkara çıxaracaq seriyaların formalaşdırılması qaydası ilə bağlıdır.

Biz artıq gördük ki, statistik və ehtimali araşdırma metodlarına hadisələrin gedişatının qabaqcadan dəqiq fərdi surətdə söylənilməsi mümkün olmadığı hallarda müraciət olunur. Mümkün olduqca sırf təsadüfi hadisələri süni surətdə yaratmaq məqsədilə, xüsusilə, elə edirlər ki, A hadisəsi onun baş verməsi üçün normal tezlikdən daha tez-tez baş verəcəyi halların əvvəlcədən heç bir mümkün vasitələrlə seçilib-ayrılması mümkün ola bilinməsin.

Məs., dövlət istiqrazlarının tirajları belə təşkil olunur. Əgər istiqrazların ümumi sayı N -ə bərabər tirajında M saydası uduşlu

olmuşdursa, onda bir istiqrazın uduş ehtimalı – $p = \frac{M}{N}$ olacaqdır. Bu

o deməkdir ki, tiraja qədər bütün istiqrazların sayı n -i olduqca böyük götürsək belə, biz praktik olaraq, əmin olmalıyıq ki, μ sayda uduşlu

istiqrazların bütün istiqrazlar sayı n -ə nisbəti p -yə çox yaxın olacaqdır. Məs., cüt nömrəli istiqrazlar almağa üstünlük verən şəxsləri tək nömrəli istiqrazlar alan şəxslərdən heç bir sisteməlik üstünlüyü olmayacaqdır; eynilə də, istiqraz nömrələri sadə vuruğa ayrılan və ya nömrələri əvvəlki tirajdakı uduşlara düşən nömrələrin birləşmələrindən alınan nömrəli istiqrazlar almaq fikrində olanların da digərlərlə müqayisədə heç bir üstünlüyü olmayacaqdır və s.

Tamamilə eynilə, buraxılan məhsul üçün adi nəzarət keçmiş mərmilər normal qayda ilə götürüldükdə, yaxşı öyrədilmiş xidmət personalının verilən nümunədən qüsursuz silahdan atışında, biz təxminən bütün halların yarısında əvvəlcədən müəyyən olan B yayınmasından az olan – orta nöqtədən yayınmanı alacağıq. Bu mütənasiblik ardıcıl atışlar sırası üçün də dəyişilməyəcəkdir, hətta bu hal cüt və ya tək saylı (zaman üzrə növbələnmiş) atışlar üçün B -dən kiçik yayımların sayını ayrıca hesabladıqda belə dəyişir. Lakin biz xüsusilə biricins mərmiləri (onların çəkisi və s. görə) seçərsə, biz yayınmanı bir qədər azalda bilərək, elə mərmilər seriyasını ala bilərik ki, bu seriya üçün standart B yayınmasından böyük olan yayımlar bütün yayımların yarısından olduqca az olacaqdır.

Beləliklə, A -nın «ehtimali-təsadüfi» hadisə olduğunu söyləmək və ona

$$p = P(A|S)$$

ehtimalını qarşı qoymaq yalnız o halda mümkündür ki, sınaqlar seriyalarının formalaşdırılmasının mümkün üsullarının sinfi göstərilmiş olsun. Bu sinif göstərilərsə, onun S şərtlərinə də daxil olduğunu hesab edəcəyik.

Verilmiş S şərtlərində A -nın ehtimalı, – təsadüfi hadisə olması xassəsi və ehtimalının isə $p = P(A|S)$ olması, – S şərtləri və A hadisəsi arasında obyektiv xarakteri ifadə edir. Başqa sözlə, tamamilə təsadüfi hadisələr mövcud deyildir, hadisələr təsadüfi və ya zəruri o halda olur ki, onlara nə ilə əlaqədar baxılır, lakin müəyyən şərtlərdə hadisə tamamilə obyektiv olaraq təsadüfi ola bilər və onun bu xassəsi hər hansı müşahidəçinin bilik səviyyəsindən asılı olmur. Əgər belə bir müşahidəçinin olduğu fərz olunarsa ki, o, mərmilərin uçuşunu xüsusi hallarının fərqli xassələrini bütün təfəssilatı ilə hiss edə bilər və beləliklə, bunlardan hər birinin orta trayektoriyadan fərdi yayımlarını qabaqcadan söyləyə bilirsə, onda onun bu müşahidələrdə iştirak edib-etməməsinin mərmilərin ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə səpələnməsinə heç bir təsiri ola bilməyəcəkdir (əlbəttə, əgər atış bizim təsəvvür etdiyimiz müşahidəçinin göstərişi üzrə deyil, adi qaydada aparılarsa).

Bu barədə qeyd etmək ki, yuxarıda müzakirə olunmuş – seriyaların formalaşdırılmasında tezliklərin normal qiymət – ehtimal ətrafında qruplaşma anlamında sabitliyə meyllilik aşkar olduqda da, bu meyllilik bizim müdaxiləmizdən tamamilə asılı olmayan real şəraitdə də baş verir. Məs., qazda molekulların hərəkətlərinin məhz ehtimali-təsadüfi xarakterliliyi çox kiçik vaxt müddətinə və qazın olduğu qabın divarının hər hansı bir sahəsinə və ya qaz içərisinə yerləşdirilmiş cisimlərin səthinə böyük dəqiqliklə mütənasib olur. Zərbələrin sayı böyük olmadığı hallarda bu mütənasiblikdən yayımlar da ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə baş verir və Braun tipli təzahürlərə səbəb olur; bu haqda bir az sonra.

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasını izah edək. Xatırladaq ki, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (30)$$

düsturu ilə təyin olunur. Eyni zamanda onu da xatırladaq ki, A və B asılı olmayan hadisələr o halda adlanırdı ki, əgər (4)-ə əsasən

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

bərabərliyi ödənilmiş olsun. A və B hadisələrinin asılı olmamazlığından və $P(B) > 0$ şərtindən,

$$P(A|B) = P(A)$$

bərabərliyi alınır.

Asılı olmayan hadisələr haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin bütün teoremləri, (4) şərtini ödəyən ixtiyari hadisələrə və ya çox sayda hadisələrin qarşılıqlı asılı olmamazlığı halına, onun ümumiləşmələrinə tətbiq oluna bilər. Əgər bu tərif real asılı olmayan (səbəbi mənada) təsadüfi hadisələrin xassələrilə əlaqədar olmasaydı, bu teoremlər onda az maraq doğurardı.

Məsələn, aydındır ki, yeni doğulan uşağın oğlan olması ehtimalı olduqca dayanıqlı, $P(A) = 22/43$ qiymətinə bərabərdir. Əgər B – doğumun Yupiterin Marsla görüşdüğü gündə baş verdiyi şərti olarsa və planetlərin vəziyyətlərinin fərdi insan talelərini təyin etmədiyi də fərz edilərsə, onda $P(A|B)$ şərti ehtimalı, eyni $P(A|B) = 22/43$ ehtimalına bərabər olacaqdır, yəni oğlan uşaqlarının doğulmasının faktiki tezliyi belə xüsusi astroloji şərtlərdə də, məhz $22/43$ tezliyinə gətirəcəkdirdi. Belə hesablama ola bilsin ki, heç bir kəs tərəfindən kifayət qədər geniş miqyasda aparılmadığına baxmayaraq, onun nəticəsinə şübhə etməyə heç bir əsasımız yoxdur.

Bizim, məzmun etibarilə bir qədər köhnəlmiş bu misalı çəkməkdə məqsədimiz o oldu ki, göstərək ki, insan idrakının inkişafı yalnız təzahürlər arasındakı əsl əlaqələrin müəyyən olunmasından deyil, həm də təsəvvür olunan əlaqələrin təkzib olunmasından, yəni baxılan hallarda təzahürlərin hansısa iki çevrələrin asılı olmamazlığı haqqında tezis müəyyən olunmasından ibarətdir. Astroloqların bir-birilə bağlı olmayan iki təzahür çevrəsinin bir-birilə əlaqəli olduğunu göstərmək cəhdinin mənasızlığının sübutu belə klassik misallardan biri oldu.

Təbii ki, belə növ asılı olmamazlığı mücərrədləşdirmək olmaz. Məs., şübhəsiz ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə görə Yupiterin peyklərinin yerini dəyişməsi, məs., artilleriya mərmisinin uçuşuna təsir edir. Lakin aydındır ki, praktikada biz bu təsirləri nəzərə almaya bilirik. Fəlsəfi nöqteyi-nəzərdən, ola bilər ki, asılı olmamazlıq əvəzinə baxılan konkret şəraitdə bu və ya digər asılılıqların əhəmiyyətsizliyi barədə danışmaq daha düzgün olardı; bu nöqteyi-nəzər elə nöqteyi-nəzərlərdən biridir ki, onlar ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar əsl kəşf hesab olunurlar. Lakin bununla belə, hadisələrin asılı olmamazlığı termininin indi izah olunmuş konkret və nisbi anlamı – bütün təzahürlərin ümumi əlaqə prinsipilə, heç bir vəchlə, ziddiyyət yaratmır, o, yalnız bu prinsipin zəruri tamamlayıcısıdır.

Bu və ya digər hadisələrin asılı olmamazlığı haqqında fərziyyələrdən alınmış düsturlarla ehtimalların hesablanması yalnız o halda real maraq doğurur ki, əvvəlcə asılı olmayan hadisələr bu hadisələrin gedişatı ilə sonradan bir-birilə əlaqəli olurlar. Məs., kosmik şüalanma hissəciklərinin onların keçdiyi mühit hissəcikləri ilə toqquşması ehtimalını, hissəciklərin hərəkətinin onların yaxınlığında sürətlə hərəkət edən kosmik şüalanma hissəciklərinin görünməsinə qədər bu hissəciklərin yerini dəyişməsindən asılı olmayaraq, baş verməsi fərziyyəsi şərtlə hesablamaq olar. Düşmənin gülləsinin fırlanan pərin qanadına dəyməsi ehtimalını, pərin oxa nəzərən vəziyyətinin güllənin trayektoriyasından asılı olmaması fərziyyəsi şərtlə (əlbəttə ki, bu fərziyyə pərin fırlanması nəzərə alınmaqla propellerlərdən açılan atəşin məxsusi gülləsinə nəzərən səhv olardı) hesablamaq olar və s.; belə misalların sayını qeyri-məhdud davam etdirmək olar.

Hətta belə demək olar ki, harada ki, ehtimal qanunauyğunluqları olduqca aydın şəkildə baş verir, biz bir-birindən tam mənası ilə asılı olmayan çox saylı faktorların olmasına da, bu və ya digər bir-birilə zəif əlaqəli faktorların təsirini görürük.

Bu heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bu və ya digər asılı olmamazlıqlar haqqında fərziyyələri hər yerdə tənqidsiz daxil etmək olar. Əksinə, bu belə bir məcburiyyət yaradır ki, birincisi, asılı olmamazlıq haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün olduqca mükəmməl kriterilər işlənilməlidir, ikincisi isə faktorlar arasındakı asılılığın nəzərə alınması zərurəti yarandıqda, lakin bu asılılıqlar ehtimali qanunauyğunluqların dəyişilmiş və mürəkkəb şəkildə aşkara çıxmasına səbəb olduqca baş verə bilən aralıq hallar, xüsusilə, mükəmməl surətdə araşdırılmalıdır. Yuxarıda artıq qeyd olunmuşdur ki, bu istiqamətlərdən ikincisində ehtimal nəzəriyyəsinin klassik rus məktəbi çox geniş araşdırmalar aparmışdı.

Asılı olmamazlıq məsələsinə baxılmasını yekunlaşdıraraq, qeyd edək ki, iki hadisənin asılı olmamazlığının (4) düsturu ilə tərif kimi, bir neçə təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığının formal tərif, bir-birilə səbəbən bağlı olmayan təzahür çevrələrinə aidlik mənasında real asılı olmamazlıq anlayışından daha geniş anlam daşıyır.

Fərz edək ki, ξ nöqtəsi $[0, 1]$ parçasına elə düşür ki,

$$0 \leq a < b \leq 1$$

olduqda, bu nöqtənin $[a, b]$ parçasına düşməsi ehtimalı bu parçanın uzunluğu $b - a$ -ya bərabərdir. Asanlıqla göstərmək olur ki, ξ nöqtəsinin absisinin onluq kəsrlərə

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \dots$$

ayrılışında α_k işarələmələri öz mənşəi etibarilə bir-birilə əlaqəli* olsalar da, bir-birilə qarşılıqlı asılı deyildirlər. (Bu mülahizədən bir çox nəzəri və bir qədər də praktiki maraq kəsb edən nəticələr alınır).

Asılı olmamazlığın formal tərifinin belə çevikliyi onun üçün qüsurlu sayılmamalıdır. Əksinə bu, asılı olmamazlıq haqqında bu və ya digər fərziyyələrlə müəyyən olunmuş teoremlərin tətbiq oblastının yalnız genişlənməsinə səbəb oldu. Bu teoremlər, asılı olmamazlıq real mülahizələrə əsaslandırılmaqla postulatlaşdırıldığı kimi, asılı olmamazlığı araşdırılan hadisələrin və təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimal paylanmaları haqqında əvvəllər qəbul edilmiş fərziyyələrə əsaslanaraq, hesablamə ilə isbat olunur.

Ümumiyyətlə, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi aparatının formal strukturunun tədqiqi maraqlı nəticələrə gətirmişdir. Belə aydın oldu ki, bu aparatın müasir riyaziyyatın əsas obyektlərinin, tədricən, nəzərdə tutulan təsnifatlaşdırılmasında tamamilə müəyyən və xüsusi yeri vardır.

Bizi artıq iki A və B hadisələrinin birgə baş verməsi anlayışını (yəni AB) və birləşməsi anlayışını (yəni $A \cup B$) vermişik. Xatırladaq ki, A və B hadisələri, onların birgə baş verməsi mümkün olmadıqda, yəni $AB = N$ olduqda uyuşmayan hadisələr adlanır, burada N – qeyri-mümkün hadisənin işarələməsidir.

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas aksiomu: $AB = N$ olduqda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

bərabərliyinin ödənilməsi müddəasıdır (bax, §2).

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının – təsadüfi hadisələr və onların ehtimallarının xassələri müstəvi fiqurları və onların sahələrinin xassələrinə tamamilə analogidir. Kifayətdir ki, AB – iki fiqurun kəsişməsi (onların ümumi hissəsi) kimi, $A \cup B$ – onların birləşməsi kimi N kimi, şərti daxil olunmuş «boş fiqur», $P(A)$ isə A fiqurunun sahəsi kimi anlaşılın və onda nəzərdə tutulmuş bu çərçivədə analogiya tam mənası ilə aydın olur.

Üçölçülü fiqurların həcmliəri də bu xassələrə malikdir.

Hal-hazırda həcmliər və sahələr nəzəriyyələrini xüsusi hal kimi tərkibində saxlayan belə oxşar tip qurumların ən ümumi nəzəriyyəsi – ümumi ölçü nəzəriyyəsidir.

Yalnız qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsində ümumi ölçü nəzəriyyəsi və ya xüsusi olaraq, sahələr və həcmliər nəzəriyyəsi ilə müqayisədə bəzi spesifik cəhətlər vardır: ehtimal heç vaxt vahiddən böyük olmur. Bu maksimal ehtimalı zəruri baş verən U hadisəsi alır, yəni

$$P(U) = 1.$$

Analogiya səthi anlam daşıyır. Belə görünür ki, riyazi ehtimal nəzəriyyəsi formal cəhətdən bütünlüklə xüsusi bir fərziyyə irəli

sürülməklə ölçü nəzəriyyəsi kimi qurula bilinər, bu şərtlə ki, buna görə «bütün U fəzasının» ölçüsü vahidə bərabər götürülməlidir**.

Məsələyə belə yanaşma riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin formal olaraq qurulmasına tam aydınlıq gətirməklə yanaşı, ehtimal nəzəriyyəsinin tamamilə konkret proqresinə və bu nəzəriyyə ilə əlaqəli riyazi nəzəriyyələrin də formal olaraq qurulmasına səbəb oldu. Ehtimal nəzəriyyəsində həqiqi dəyişənli funksiyaların metrik nəzəriyyəsində işlənilmiş incə metodlar müvəffəqiyyətlə istifadə olundu. Ehtimal metodları, eyni zamanda, riyaziyyatın onunla əlaqəli oblastlarının məsələlərində «analogiyaya» görə deyil, onların yeni oblastlara formal olaraq ciddi şəkildə keçirilməsi yolu ilə tətbiq olundu. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarının tətbiq oluna bilindiği hər yerdə, heç olmazsa baxılan oblastın real təsadüfiliyə heç bir ümumi cəhəti olmadıqda, bu aksiomların nəticələri də tətbiq oluna bilinir.

Aksiomaşdırılmış ehtimal nəzəriyyəsinin mövcudluğu – ehtimalı «təyin etmək» üçün, onları təbii-elmi əminliklə bilavasitə birləşdirməyə üstünlük verərək və onlara əsaslanaraq, formal olaraq ciddi riyazi nəzəriyyə qurmağa xidmət edən üsulları seçmək kimi yanlış bir addıma yol verməkdən çəkindirir. Belə təriflər (ehtimal «təyin etmək» üçün; H. M.), təxminən, həndəsədə nöqtənin «tərifini» («təyin edilməsini»; H. M.) – fiziki cismi hər bir tərəfdən sonsuz dəfə kəsərək, onu hər dəfə kiçiltməyə, məs., onun diametrini hər dəfə iki dəfə azaltmağa uyğun olardı.

Belə təriflərə – ehtimalın sınaqların sayı qeyri-məhdud artırıldıqda tezliklərin limiti kimi baxılan tərif də aiddir. Sınaqların ehtimalı xarakterliliyi haqqında fərziyyə öz-özlüyündə (hər hansı bir təzahürün «təsədüföülü» haqqında fərziyyə kimi) yalnız bəzi şərtlər dəyişilmədən ödənildikdə doğru olur və bu şərtlər uzun müddət qeyri-məhdud olaraq və qeyri-məhdud dəqiqliklə dəyişilmədən yerinə yetə bilinmir. Buna görə də,

$$\frac{\mu}{n} \rightarrow p$$

limitə dəqiq keçilməsinin real mənası olmur. Belə limitə keçilmədə tezliklərin dayanıqlılıq prinsipinin ifadə oluna bilinməsi – sınaqların sonsuz ardıcılıqlarının axtarışı üçün məqbul sayılan üsulların təyin olunmasını zəruri edir, bu isə yalnız riyazi fiksasiya oluna bilər. Əgər nəticədə elə bir özünəməxsus nəzəriyyənin qurulması alınsaydı ki, digər başqa yollarla onun ciddi əsaslandırılmasına müyəssər oluna bilinməzdi və belə olduqda, anlayışların belə ağırlaşdırılmasına ciddi yanaşmaya ehtiyac yaranardı. Lakin yuxarıda qeyd olunduğu kimi riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin ölçü nəzəriyyəsinin müasir vəziyyətində əsaslandırılması, sadəcə olaraq,

$$P(U) = 1$$

şərtinin əlavə olunması ilə yerinə yetirilir.

Ümumiyyətlə, ehtimal anlayışının real analizində onun formal tərifinin verilməsinə heç də hökmən cəhd göstərmək zəruri deyildir. Mənə belə gəlir ki, ehtimal haqqında sırf formal nöqtəyi-nəzərdən aşağıdakı şərhədən artıq olan heç bir şey söyləmək olmaz: $P(A|S)$ ehtimalı elə bir ədəddir ki, S şərtlərində və bu şərtlər ödənilməklə seriyaların formalaşdırılmasında tezliklər bu ədəd ətrafında qruplaşmağa meyilli olurlar və bu seriyaların sayı əgəlabatan qədər artıqca və şərtlərin biricinsliyi də pozulmadıqda, bu meyil olduqca böyük bir aydınlıq və dəqiqliklə, baxılan konkret şəraitdə, seriyaların qəbul saylarında kafi etibarlılığa və dəqiqliyə çatma-çata aşkar olunur.

Həqiqətdən də, mühüm məsələ bu tərifin formal dəqiqləşdirilməsi deyil, şərtlərin mümkün olduqca geniş aydınlığıdır ki, bu şərtlərdə belə tip ehtimalı təsadüfiliyə aşkar olunsun. Aydınlıqla anlaşılmalıdır ki, hər hansı bir təzahürün ehtimalı xarakteri haqqında hipotez, yalnız olduqca

* ξ ədədinin

$$\xi = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \dots$$

ayrılışında da n -in ixtiyari qiymətində α_k işarələmələri eyni şərtləri ödəyirlər.

** Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi həll olunan məsələlərinin mahiyyəti etibarilə müstəqil riyazi fənn olaraq qalır; ehtimal nəzəriyyəsi üçün əsas nəticələr (§3-də şərh olunmuşlara oxşar şəkildə) sırf ölçü nəzəriyyəsi nöqtəyi-nəzərindən süni və lazımsız görünür.

nadir hallarda, statistik yoxlamaya bilavasitə əsaslanı bilər. Yalnız ehtimal metodlarının hər hansı yeni oblastda ilk müdaxiləsində, iş çox vaxt onunla başlanılırdı ki, tezliklərin sabitliyi empirik olaraq qeyd olunurdu. §3-dəki deyilənlərə əsasən, tezliklərin sabitliyin ε dəqiqliyinə qədər

statistik aşkar olunması üçün $n=1/\varepsilon^2$ sınaqlarından ibarət seriyalardan istifadə etmək zəruridir. Məs., baxılan konkret məsələdə 0,0001 dəqiqliyi ilə təyin olunacaq ehtimalı almaq üçün bu təxminən hər biri 100 000 000 sınaqdan ibarət sınaqlar seriyaları ardıcılığını aparmaq zəruridir. Ehtimali təsadüfi hipotezi olduqca çox hallarda simmetriya mülahizələri əsasında və ya ayrı-ayrı təzahürlər sıralarının kəsişməsinə dəki praktiki asılı olmamazlıq mülahizələri əsasında daxil olunur və s.

Sonra bu hipotez dolayı yolla yoxlanılır. Məs., sonlu həcmli qablarında qaz molekulalarının sayı 10^{20} tərtib ədədlərlə ifadə olunduğundan və

qazların kinetik nəzəriyyəsinin ehtimali nəticələrinə uyğun olan $\sqrt{n}$ ədədi çox böyük olduğundan, həqiqətən də, bu nəticələr böyük dəqiqliklə doğrudur. Məs., sakit havada, asılmış plastinkanın əks üzlərinə olunan təzyiq, hətta bizim gözümlə üçün mikroskopik sayılan ölçülər üçün belə ciddiyyə eyni olur, hətta bu üzlərdən birinə olunan təzyiq digər üzə olunan təzyiqdən, sınağın müvafiq qoyuluşunda, faizin mində biri qədər artıq olduqda baxmayaraq belə, bu nəzərə çarpmaya bilinirdi.

§ 5. Determinik və təsadüfi proseslər

Bütün təzahürlərin səbəbi şərtləşdirilmə prinsipi, real proseslərin differensial tənliklərin köməyiylə öyrənilməsi metodunda ən sadə riyazi ifadəsini tapır.

Öyrənilən sistemin t anında vəziyyətinin n sayda

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

parametrləri vasitəsilə təyin olunduğu fərz olunur. Bu parametrlərin dəyişilmə sürəti, məlum olduğu kimi zaman üzrə

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$$

törəmələri ilə ifadə olunur.

Əgər bu sürətlər parametrlərin qiymətlərinin funksiyaları olarsa, onda biz aşağıdakı differensial tənliklər sistemini alırıq:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Qalileyin cisimlərin düşmə qanunu ilə başlanan riyazi təbiətşünaslığın yaranması dövründə kəşf olunmuş təbiət qanunlarının böyük əksəriyyəti məhz bu şəkildə ifadə olunur. Qaliley öz kəşfini göstərilən standart formaya sala bilməmişdi, çünki o vaxt müvafiq riyazi anlayışlar hələ işlənilməmişdi. Bunu Nyuton etmiş oldu.

Mexanikada və fizikanın bir çox digər oblastlarında ikinci tərtib differensial tənliklərə prinsipial nöqtəyi-nəzərdən müraciət heç bir yenilik gətirmir, belə ki, sürətləri yeni

$$v_k = \dot{x}_k$$

işarələmələri ilə götürdükdə, biz bu kəmiyyətlərin ikinci tərtib törəmələri üçün

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \dot{v}_k$$

ifadəsini alırıq və n sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ kəmiyyətləri üçün ikinci tərtib tənliklər $2n$ sayda $x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ kəmiyyətləri üçün birinci tərtib tənliklərə çevrilir. Məsələn, ağır cismin Yer atmosferinə düşməsi məsələsinə baxaq. Fərz edərək ki, yalnız Yer

səthindən çox da yuxarı olmayan hündürlüklərə baxılır, mühitin müqavimətinin hündürlükdən deyil, yalnız sürətdən asılı olduğunu da fərz edəcəyik. Öyrənilən sistemin vəziyyəti iki parametrlə xarakterizə olunur: cismin yer səthindən məsafəsi z və onun sürəti v ilə. Bu iki kəmiyyətin zaman üzrə dəyişməsi iki differensial tənliklə təyin olunur:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g - f(v) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

burada g — ağırlıq qüvvəsinin təcili, $f(v)$ — baxılan cisim üçün hər hansı «müqavimət qanunudur».

Əgər sürətlər çox da böyük olmazsa və cisim olduqca böyük həcmli olarsa, məs., orta ölçülü daş bir neçə metr hündürlükdən düşdükdə havanın müqavimətini nəzərə almamaq olar, (31) tənlikləri

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

tənliklərinə çevrilir. Əgər t_0 başlanğıc anında z və v kəmiyyətlərinin qiymətlərinin z_0 və v_0 olduğu fərz olunarsa, onda (32) tənliklərini asanlıqla həll edərək, düşmə prosesini bütünlüklə təsvir edən

$$z = z_0 - v(t - t_0) - g \left(\frac{t - t_0}{2} \right)^2$$

düsturunu almaq olur. Məs., $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ olduğunu fərz etsək, Qalileyin kəşf etdiyi

$$z = z_0 - \frac{g t^2}{2}$$

düsturunu alırıq.

Ümumi halda (31) tənliklərinin inteqrallanması bir qədər çətindir, lakin prinsipial nəticə ($f(v)$ funksiyaları üzərinə qoyulan olduqca ümumi məhdudiyyətlə) eyni olur: başlanğıc t_0 anında z_0 və v_0 qiymətləri üzrə cismin Yer səthinə düşdüyü t anına qədər (t də daxil olmaqla) bütün anlarda z və v -nin qiymətləri birqiymətli təyin olunur. Cismin z -in mənfii qiymətlərində düşməyə davam etməsini fərz edərək, qeyd etdiyimiz məhdudiyyəti də istisna etmək olar. Bu tərzdə sxemləşdirilmiş məsələ üçün belə nəticə çıxarmaq olar: əgər $f(v)$ funksiyası v artıqda monoton artırsa və $v \rightarrow \infty$ olduqda sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda cismin düşməsi məhdudiyyətsiz davam etdikdə, yəni t dəyişəni qeyri-məhdud artdıqca, v sürəti sabit c limitinə yaxınlaşır və c , —

$$g = f(c)$$

tənliyinin həllidir.

Qoyulmuş məsələnin riyazi analizindən alınmış bu nəticə belə baxdıqda aydındır: cismin düşmə sürəti, ağırlıq qüvvəsinin təcili havanın müqaviməti ilə tarazlaşana qədər, artır. Açıq paraşütlə tullanmada v stasionar sürəti — saniyədə beş metrə yaxın sürət, olduqca tez qərarlaşır*. Açılmamış paraşütlə uzun çəkən tullanmada havanın müqaviməti azdır və buna müvafiq olaraq, stasionar sürət çox olur və yalnız paraşütcü olduqca böyük məsafə qət etdikdən sonra bu sürət qərarlaşır.

Yüngül cisimlərin enməsində, məs., havaya atılmış lələk və ya tükün, başlanğıc vaxtda sürətli hərəkəti hiss olunacaq qədər çox olmur və buna görə də, bəzən bu hərəkət tamamilə görünməz olur. Enmənin stasionar sürəti tez bir zamanda qərarlaşır və məlum yaxınlaşma ilə həmişə $v = c$ götürmək olar. Bu halda bir differensial tənlik

$$\dot{z} = -c$$

tənliyi qalır ki, o da asanlıqla inteqrallanır və nəticədə

* burada nəzərdə tutulur ki, v sürəti özünün sabit limit qiyməti c -yə praktik olaraq, kifayət qədər yaxın olur.

$$z = z_0 - c(t - t_0)$$

tənliyi alınır. Tamamilə sakit havada tük belə enəcəkdir.

Bizim yuxarıda baxdığımız deterministik konsepsiya dinamik sistemlərin müasir nəzəriyyəsində tamamilə ümumi şəkildə şərh olunur; bu sahədə bir sıra mühüm işlər sovet riyaziyyatçıları – N. N. Boqolyubov, V. V. Stepanov və bir çox digər riyaziyyatçılar tərəfindən yerinə yetirilmişdir. Bu ümumi nəzəriyyə xüsusi halları və real təzahürlərin elə riyazi sxemlərini əhatə edir ki, bunlarda sistemin vəziyyəti, bir və ya bir neçə funksiyaların parametrlərinin sonlu sayı ilə təyin olunur, necə ki, bu məs., kəsilməz mühit mexanikası üçün tipik haldır. Belə hallarda «sonsuz kiçik» vaxt ərzində vəziyyətin elementar dəyişilməsi qanunauyğunluqları adi differensial tənliklərlə deyil, xüsusi törəməli tənliklər və ya başqa vasitələrlə verilir. Lakin real proseslərin bütün riyazi deterministik sxemlərində ümumi cəhət – birincisi, öyrənilən sistemin vəziyyəti o halda hərtərəfli surətdə təyin olunmuş hesab edilir ki, o, hər hansı ω riyazi obyektə ilə verilsin (n sayda həqiqi ədədlərin sistemin bir və ya bir neçə funksiyası və s. ilə); ikincisi, $t > t_0$ anlarındakı ardıcıl qiymətlər başlanğıc t_0 anına uyğun ω_0 qiyməti ilə birqiymətli təyin olunur:

$$\omega = F (t_0, \omega_0, t) .$$

Biz artıq gördük ki, differensial tənliklərə ifadə olunan proseslər halında F funksiyasının tapılması üçün $t = t_0$ olduqda $\omega = \omega_0$ başlanğıc şərtlərlə bu differensial tənliklər inteqrallanmalıdır.

Mexanistik materializmin nümayəndələri hesab edirdilər ki, təsvir olunan sxem real təzahürlərin determinikliyi – səbəbiyyətin fiziki prinsipinin dəqiq və əsl ifadəsidir. Laplasın ideyasına əsasən, dünyanın baxılan anda vəziyyəti sonsuz sayda differensial tənliklərə tabe olan sonsuz sayda parametrlərlə təyin olunur. Əgər müəyyən bir «hərtərəfli ağıl» bütün bu tənlikləri yaza və onları inteqrallaya bilsəydi, onda o, Laplasın fikrinə görə, sonsuz zaman ərzində dünyanın bütün evolyusiyasını tam dəqiqliyi ilə əvvəlcədən söyləyə bilərdi.

Lakin əslində riyazi sonsuzluq kəmiyyətə, gerçək aləmin keyfiyyətə hərtərəfli ifadə olunması ilə müqayisədə, olduqca kobuddur. Nə parametrlərin sonsuz sayda daxil edilməsi, nə kəsilməz mühitlərin vəziyyətlərinin fəzanın nöqtəsinin funksiyası vasitəsilə təsviri, real proseslərin sonsuz mürəkkəbliyinin adekvat inikası deyildir.

Real proseslərin araşdırılması həmişə məsələyə daxil olunan parametrlər sayının artırılması istiqamətində aparılır; ümumiyyətlə isə, baxılan proseslərin hesablamaları üçün istifadə olunan riyazi sxemdə «sistemin vəziyyətini» ayrıca təyin edən ω -nın xarakteristikasını hər dəfə mürəkkəbləşdirmək məqsəduyğun deyildir. Tədqiqatçının məharəti əsas etibarilə ondan ibarətdir ki, o, elə sadə Ω fəza fəzası tapmalıdır ki (yəni ω qiymətlərinin elə çoxluğunu və ya sistemin mümkün vəziyyətlərinin çoxluğunu), bu fəza real prosesi bu fəzada ω nöqtəsinin determinikləşmiş yerdəyişmə prosesi ilə əvəz etdikdə, real prosesin bütün *mümkün* cəhətlərini nəzərə almağa imkan yaratmış olsun.

Lakin biz real prosesin mühüm cəhətlərini seçib, ayırd etdikdən sonra müəyyən bir qalıq alırıq ki, onun təsadüfi olduğunu qəbul etmək məcburiyyətində oluruq. Nəzərə alınmayan təsadüfi faktorlar prosesin gedişatına həmişə müəyyən bir təsir göstərir. Riyazi cəhətdən öyrənilən olduqca az proseslər mövcuddur ki, nəzəriyyə ilə müşahidələri müqayisə etdikdə, bunlar üçün nəzərə alınmamış təsadüfi faktorların təsirini görmək mümkün olmurdu. Planetlərin cazibə qüvvəsinin təsiri altında hərəkəti nəzəriyyəsi ilə vəziyyət ya belədir və ya sanki belədir: planetlər arasında məsafələr onların ölçüləri ilə müqayisədə o qədər böyükdür ki, onların maddi nöqtə kimi ideallaşdırılmış təsviri demək olar ki, həmişə təbiiq oluna bilər; planetlərin hərəkət etdikləri fəza elə «seyrəklənmiş» materiya ilə doludur ki, onun müqaviməti itəcək qədər kiçikdir; planetlərin kütləsi o dərəcədə böyükdür ki, onların hərəkətində işıq təzyiqi demək olar ki, heç bir rol oynamır. Belə olduqca gözəl

şərtlər belə bir nəticə çıxarmağa əsas verir ki, n sayda maddi nöqtədən ibarət sistemin hərəkəti haqqında məsələnin həlli $6n$ sayda parametrlərlə (sistemin «vəziyyətinin» parametrləri ilə)** təsvir olunur, vəziyyətin dəyişməsi yalnız cazibə qüvvəsi nəzərə alınaraq hesablanılır və bu da planetlərin hərəkətlərinin müşahidələri ilə olduqca yaxşı üst-üstə düşür.

Planetlərin hərəkəti halı ilə artilleriya mərmisinin uçuş halı bir qədər yaxındır, bu halda mərmimin hərəkət tənliyinə havanın müqavimətinin daxil edildiyi fərz olunur. Bu – riyazi araşdırma metodunun olduqca tez və sürətlə böyük uğurlar qazanmış olduğu klassik oblastlardan biridir. Lakin burada təsiredici təsadüfi faktorların rolu artır, olduqca böyükdür və mərmilərin səpəlməsi, yəni onların baxılan atəş üçün təyin olunmuş normal başlanğıc şərtlərə və atəş vaxtı atmosferin orta vəziyyətinə uyğun nəzəri trayektoriyadan yayınmaları, onlarla metrlərlə, böyük məsafələrdə isə hətta yüz metrlərlə ölçülür. Belə yayınmaların qismən başlanğıc istiqamətin və başlanğıc sürətin normadan təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən kütlənin və mərmimin müqavimət əmsalından təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən də küləyin qeyri-sabitliyi və şiddətlənmələri və real Yer atmosferində hökmran olan dəyişkən və olduqca mürəkkəb rejimlə bağlı digər təsadüfi şəraitlər nəticəsində yaranır.

Mərmilərin səpəlməsi ehtimal nəzəriyyəsinin metodları ilə ətraflı surətdə öyrənilir və bu araşdırmaların nəticələri atəş praktikası üçün olduqca mühümdür.

Əslində təsadüfi təzahürlərin tədqiqi nə anlam daşıyır? Belə təəvvür yaranır ki, təzahürün baxılan sxemləşdirilməsində təsadüfi «qalıq» o qədər böyük olmuşdur ki, onu nəzərə almamaq mümkün deyildir; bu halda yeganə mümkün ola bilən yol ondan ibarətdir ki, təzahürün təsviri yeni parametrlər daxil edilərək, mürəkkəbləşdirildikdən sonra, belə mürəkkəbləşdirilmiş sxemdə təzahür, determinizmə olunan təzahürlərin elə həmin riyazi sxemi üzrə, daha ətraflı tədqiq olunmalıdır.

Bu – bir çox hallarda praktik olaraq mümkün olmayan bir yoldur. Məs., maddi cismin enməsinin araşdırılmasında, onun qeyri-sabit şiddətli külək axını olan (adətən, turbulent axın adlandırılan) strukturlu atmosferdə enməsində iki – z və v parametrləri əvəzinə bu strukturun tam təsviri üçün tamamilə çox böyük bir riyazi aparat daxil etmək lazım gələrdi.

Lakin bu çətin yol, əslində yalnız o hallarda zəruri olur ki, bizim prosesin gedişatına qalıq «təsadüfi» faktorların təsvirini hərtərəfli və hər bir fərdi hal üçün nəyin hesabına olursa-olsun izləyə bilmək tələb olunsun. Xoşbəxtlikdən, həqiqətdə, bir çox hallarda bizim real tələbatlarımız tamamilə başqa bir şeylə bağlıdır: yalnız olduqca böyük zaman parçasında və ya öyrənilən prosesin olduqca çox dəfələrlə təkrar olunmasında təsadüfi faktorların təsirinin toplam effektini qiymətləndirmək zərurəti yarandığı hallarda.

Misal kimi qumun su axını ilə çayda və ya bu və ya digər süni hidro-texniki qurğuda yerini dəyişməsinə baxaq. Adətən, bu yerini dəyişmə elə baş verir ki, qum dənələrinin əksəriyyəti dibdə sakit vəziyyətdə olur və dibin yaxınlığında yalnız hərdənbir baş verən burulğanlar qum dənələrini yerindən qopararaq elə həmin anda olduqca uzaq məsafəyə, hər hansı yeni bir yerdə gözlənilmədən dayanana qədər, apara bilir. Sırf nəzəri cəhətdən hər bir belə qum dənəsinin hərəkəti fərdi olaraq, hidromexanika qanunları ilə hesablanıla bilər. Onda buna görə biz dibin başlanğıc halı və axın haqqında hərtərəfli olaraq, hökmən məlumatlı olmalıyıq, qum dənəsinin hərəkətini addımbaaddım hesablamalıyıq, hər hansı sakit vəziyyətdə olan qum dənəsinin hərəkəti gətirmək üçün tələb olunan təzyiq olunmuş anları qeyd edərək, yerindən tərpənmiş qum dənəciklərinin dayandığı ana qədər etdikləri yerdəyişmələri izləməliyik. Real elmi tədqiqat üçün bu məsələnin belə qoyuluşunun absurd olması aydındır. Lakin buna baxmayaraq, orta nəticələr və ya dibdəki nasosların su axınları ilə yerini dəyişmələrinin statistik qanunauyğunluqları (belə deyiliş qəbul edilmişdir) tamamilə öyrənilə bilər.

** Hər bir nöqtənin üç koordinatı və sürətin üç komponenti.

* Cisimlərin enməsinə dair yuxarıda verilmiş misalda Ω – iki ədədin (z, v) sistemidir, yəni müstəvidir.

Çoxsaylı təsadüfi faktorların təsirinin tamamilə aydın statistik qanunauyğunluqlara gətirdiyi misalların sayını asanlıqla çoxaltmaq olar. Perspektivliyinin genişliyinə görə və eyni zamanda belə tip ən məşhur və ən maraqlı olan misallardan birinə kinetik qaz nəzəriyyəsinə baxılmışdır; bu misalda görünür ki, molekulların çoxsaylı təsadüfi toqquşmalarının birgə təsirindən elə dəqiq qanunauyğunluqlar yaranır ki, qazın bir tam kimi divarlara təzyiqi, bir qazın digər qazda diffuz yayılması və s. bu qanunauyğunluqlara tabedir.

§ 6. Markov tip təsadüfi proseslər

§5-də

$$\omega = F(t_0, \omega_0, t)$$

tənliyinin köməyiylə yazılmış deterministik sxemi bilavasitə ümumiləşdirilmiş ehtimalı sxemin qurulması A. A. Markovun xidmətidir. Düzdür. Markov yalnız belə bir hala baxmışdı ki, öyrənilən sistemin faza fəzası sonlu sayda vəziyyətlərdən ibarət hala baxmışdı, yəni $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ və o, sistemin vəziyyətindəki dəyişiklikləri yalnız t -ni diskret addımlara ayıraraq öyrənirdi. Lakin o, belə olduqca sxemləşdirilmiş modeldə bir sıra qanunauyğunluqları aşkar etməyə nail ola bilməmişdi.

Markov, sistemin ω vəziyyətini $t > t_0$ anında onun t_0 anındakı ω_0 vəziyyətinə görə birqıymətli təyin edən F funksiyası əvəzinə

$$P(t_0, \omega_0, t, \omega_j)$$

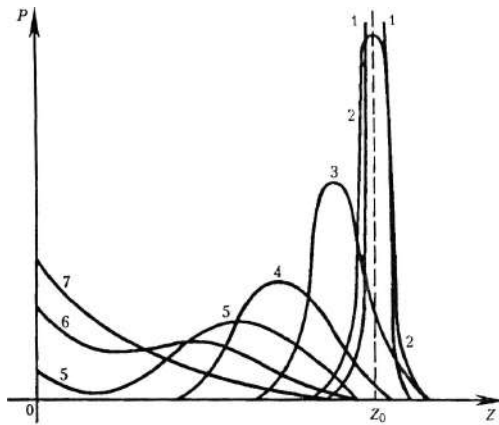
ehtimallarını daxil edir: $P(t_0, \omega_0; t, \omega_j)$ – sistem t_0 anında ω_0 vəziyyətində olduqda onun t anında ω_j vəziyyətində ola bilməsi ehtimalıdır. Markov bu ehtimalları –

$$t_0 < t_1 < t_2$$

münasibətini ödəyən ixtiyari üç t_0, t_1, t_2 anları üçün

$$P(t_0, \omega_0; t_2, \omega_j) = \sum_{k=1}^n P(t_0, \omega_0; t_1, \omega_k) P(t_1, \omega_k; t_2, \omega_j) \quad (33)$$

münasibətlə əlaqələndirir; bu münasibəti Markov proseslərinin əsas tənliyi adlandırmıq olar.



Şəkil 4

Faza fəzası kəsilməz çoxoxobrazlı olduqda, (t_0, t) zaman parçasında ω_0 vəziyyətindən ω vəziyyətinə keçid üçün $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ ehtimal sıxlıqlarının varlığı olan hal ən tipik haldır. Bu halda t_0 və t anları arasındakı müddət ərzində ω_0 vəziyyətindən hər hansı ω vəziyyətinə

keçid ehtimalı, ω_0 və ω . Ω faza fəzasının G oblastına aid olduqda,

$$P(t_0, \omega_0, t, G) = \int_G p(t_0, \omega_0; t, \omega) d\omega \quad (34)$$

düsturu şəklində yazılır, burada $d\omega$ – faza fəzasında həcm elementidir*. $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ ehtimal sıxlığı üçün (33) əsas tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$p(t_0, \omega_0, t_2, \omega_2) = \int_{\Omega} p(t_0, \omega_0; t_1, \omega_1) p(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2) d\omega \quad (35)$$

(35) tənliyini həll etmək olduqca çətin, lakin məlum məhdudiyyətlərlə bu tənlikdən xüsusi törəməli tənliklər almaq olar və bunların öyrənilməsi asan olur. Bu tənliklərdən bəzilərini çox da ciddi olmayan fiziki mülahizələrdən fizik Fokker və Plank tərəfindən alınmışdır. Stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi kimi adlandırılmış nəzəriyyə tam şəkildə sovet alimləri tərəfindən qurulmuşdu (S. N. Bəməsteyn, A. N. Kolmoqorov, I. Q. Petrovskiy, A. Ya. Xinqin və b.).

Biz bu tənliklər barədə burada yazmayacağıq.

Stoxastik differensial tənliklər metodu imkan yaradır ki, məs., sakit atmosferdə çox kiçik cismnin orta enmə sürəti c , onun ölçüləri kiçik olduğundan havanın molekullarının onun qarşı tərəflərinə zərbələri nəticəsində yaranan «Braun hərəkətinin» sürətindən çox kiçik olduğundan tamamilə qorallaşmadıqda, bu cismnin hərəkəti haqqında məsələni asanlıqla həll etmək mümkün olur.

c – orta enmə sürəti, D – diffuziya əmsali olsun. Ügər fərz edəriksə ki, hissəcik Yer səthində ($z=0$) qala bilmir, yəni Yer səthinə çatan kimi Braun qüvvələrinin təsiri altında atmosferdə yenidən hərəkətini davam etdirir, t_0 anında hissəciyin z_0 hündürlüyündə olduğunu fərz edəriksə, hissəciyin t anında z hündürlüyündə olacağının ehtimal sıxlığı –

$$p(t_0, z_0; t, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left[e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}} + e^{-\frac{(z+z_0)^2}{4D(t-t_0)}} \right] e^{-\frac{c(z-z_0)}{2D} - \frac{c^2(t-t_0)}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cz}{D}} \int_{\frac{z+z_0-c(t-t_0)}{2\sqrt{D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Şəkil 4-də t -nin ardıcıl anlarında $p(t_0, z_0; t, z)$ əyrilərinin nə cür dəyişməsi təsvir olunmuşdur.

Biz görürük ki, hissəciyin hündürlüyü orta qiymətə azalır və onun vəziyyəti get-gedə qeyri-müəyyən (daha çox «təsadüfi») olur. Ən maraqlısı odur ki, ixtiyari t_0 və z_0 qiymətlərində və $t \geq 0$ olduqda

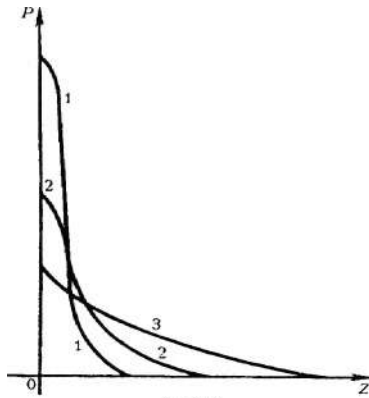
$$p(t_0, z_0; t, z) \rightarrow \frac{c}{D} e^{-\frac{cz}{D}} \quad (36)$$

münasibəti ödənilir, yəni hissəciyin hündürlükləri üçün limit paylanması vardır və hissəciyin yerləşdiyi hündürlüyün riyazi gözləməsi t artdıqca müsbət limitə yaxınlaşır.

* Əslində, (34) bərabərliyi ehtimal sıxlığının tərifidir. $p d\omega$ kəmiyyəti – t_0 -dan t anına qədər keçən müddətdə ω_0 vəziyyətindən həcm elementi $d\omega$ -ya keçid ehtimalıdır (sonsuz kiçiklə tərtib dəqiqliklə).

$$z^* = \frac{c}{D} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{cz}{D}} dz = \frac{D}{c} \quad (37)$$

Beləliklə, hissəcik yerdən yuxarıda olmasın basıma baxmayaraq, ağır qüvvəsinin təsiri altında həmişə aşağı enməyə meyilli olur, o, bu prosesi qeyri-məhdud sürətdə davam etdikcə (atmosferdə təsadüfi dolaşma hərəkəti edərək), orta hesabla müəyyən bir müsbət hündürlükdə olacaqdır. Əgər biz başlanğıc z_0 qiymətini z^* -dən kiçik götürmüş olsaydıq, onda belə olacaqdı ki, olduqca böyük müddətdən sonra hissəciyin orta vəziyyəti başlanğıcdan hündür olacaqdır, necə ki, bu $z_0 = 0$ olduqda Şəkil 5-də təsvir olunmuşdur.



Şəkil 5

Aynca götürülmüş bir hissəcik üçün söhbət gedən z^* orta qiymətləri yalnız riyazi gözləmələrdir, lakin olduqca çox sayda hissəciklər üçün böyük ədədlər qanununa görə bunlar real olaraq alınacaqdır: bu növ hissəciklərin hündürlük üzrə yerləşməsi sıxlığı qeyd olunan qanunauyğunluqlarla baş verəcəkdir və xüsusilə də, kifayət qədər böyük zaman keçdikdən sonra (36) düsturu ilə uzlaşaraq stabilizasiyacaqdır.

Bütün bu deyilənlərin hamısı c və D -nin atmosferin vəziyyəti ilə bağlı əvvəlcədən müəyyən edilmiş kəmiyyətlər olduğu fərz edildiyindən, yalnız havaya az konsentrasiyada qarışmış qazlara və üstünlərə tətbiq oluna bilər. Lakin bəzi mürəkkəbləşdirilmələrlə bu nəzəriyyə atmosferi təşkil edən qazların qarşılıqlı diffuziyasına və bu diffuziya əsasında yaranan hündürlüklər üzrə sıxlıqların paylanmalarına tətbiq oluna bilər.

Hissəciklərin ölçüləri artdıqca $\frac{c}{D}$ nisbəti artır və buna görə də, onların yerlərini dəyişmə prosesi diffuzion xarakter özünə §5-də baxılmış qanunlar üzrə qanunauyğun enmə xarakterinə malik olur. Nəzəriyyə sırf diffuziya hərəkəti və belə qanunauyğun enmə arasındakı bütün keçidləri izləməyə imkan verir.

Turbulent yerini dəyişmənin təsiri nəticəsində çəkili hissəciklərin atmosferdə hərəkəti məsələsi olduqca mürəkkəbdir, lakin prinsip etibarilə bu məsələ də analogi ehtimal metodlarına tabe oluna bilər.

Ədəbiyyat

Populyar ədəbiyyat

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей. 3-е изд., М. – Л., 1952.

Müasir universitet kursları

Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946.

Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей. 2-е изд., М. – Л., 1954.

Xüsusi monoqrafiya

Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, пер. с англ., М., 1953.

Эйнштейн А., Смолуховский М., Брауновское движение, пер. с нем., Сб. статей, М. – Л., 1936.

ENSİKLOPEDİK MƏQALƏLƏR.

XIX əsrin əvvəllərinə qədər ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika məsələlərinə çox az yer ayrılmışdı. Bu mövzu üzrə ən ilkin (bəlkə də birinci) məqalə – X. Volfun (Ch. Wolff, 1716) «Stoxastika. Təkliflər məharəti», «Leksikon» (Mathematisches Lexicon) məqaləsi olmuşdu; bu məqalənin rus dilinə tərcüməsi «Математический энциклопедический словарь» (М., 1988, s. 776) adlı Ensiklopediyada dərc olunmuşdur. D. Didronun (D. Diderot) Ensiklopediyasında (Encyclopedie, P., 1751-80) və onun sistemləşdirilmiş nəşrinə (Encyclopédie méthodique, P., 1782-1832) J. D'Alambert (J. D'Alembert) və M. Kondersenin (M. Condorcet) ehtimal nəzəriyyəsi üzrə yazdıqları məqalələr dərc olunmuşdu; həmi və məzmununa görə əsas məqalə – «Probabilité» M. Konderscya məxsusdur.

XX əsrin əvvəllərinə qədər rus dilində nəşr olunmuş ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika bir o qədər də diqqət yetirilməmişdi, bu da görünür ki, elmlərin formalaşması ilə əlaqədar olmuşdu. Yalnız «Большая Советская энциклопедия» adlı ensiklopediyanın 1-ci nəşrinə, 1936-da, xüsusilə də, A. N. Kolmoqorovun bu redaksiyaya gəlişindən sonra, bu sahədə canlanma hiss olundu.

«Большая Советская энциклопедия»-nın 2-ci nəşrinə nəzəri-ehtimali tematika olduqca layiqli işıqlandırılmışdır. Məs., 18 məqalə A. N. Kolmoqorov tərəfindən yazılmışdır ki, bunlardan ən mühümləri aşağıda verilir.

БӨYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU – elə bir ümumi prinsipdir ki, bu prinsipə əsasən çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri, bəzi olduqca ümumi şərtlərdə, təsadüfdən asılı olmayan nəticəyə gətirir. B. ə. q.-nın

dəqiq ifadəsi və onun tətbiqi üçün şərtlər ehtimal nəzəriyyəsində verilmişdir. B. ə. q. – təsadüflük və zərurilik arasındakı dialektik əlaqənin ifadələrindən biridir. B. ə. q.-nın xüsusi halı, ilk dəqiq isbat olunmuş teoremi Ya. Bernulliye məxsusdur (1713-də ölümündən sonra dərc olunmuşdur), Bernulli teoremini Puasson ümumiləşdirmişdir və onun «Mülahizələrin ehtimalı haqqında tədqiqat» («Исследование о вероятности суждений», 1837) əsərində «böyük ədədlər qanunu» termini ilk dəfə istifadə olunmuşdu. Bu terminin ən ümumi anlamı P. L. Çebışevin «Orta kəmiyyətlər haqqında» («О средних величинах») əsərində əsaslandırılmışdır. Bu müasir anlamda B. ə. q.-nda iddia olunur ki, dəqiq göstərilən bəzi şərtlər ödənildikdə, olduqca böyük n qiymətlərində x_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortası –

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

vahidə olduqca yaxın ehtimalla öz riyazi gözləməsi $a = M\bar{x}$ -dən olduqca az fərqlənir [bax, Riyazi gözləmə (Ожидание математическое)].

Çebışevin isbat etdiyi teoremin dəqiq ifadəsi belədir: əgər $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri cüt-cüt asılı olmayan və məhdud dispersiyaları (bax) olan, yəni

$$D(x_k) = M\{x_k^2\} - M(x_k)^2 \leq C$$

şətinə ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ixtiyari müsbət $\varepsilon > 0$ qiymətində $|\bar{x} - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalı $n \rightarrow \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır.

$\bar{x}$ ədədi ortasının və ya

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \bar{x}$$

cəminin özünün uyğun riyazi gözləmələri a -dan və

$$A = \mathbf{M}(X) = na$$

kəmiyyətindən yayınmalarının daha dəqiq xarakteri ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində göstərilmişdir. $x - a$ yayınmalarının

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ tərtibdən, buna müvafiq olaraq, $X - A$ yayınmalarının isə $\sqrt{n}$

tərtibdən olduğu hal, ən tipik hal sayılır, baxmayaraq ki, a və A riyazi gözləmələri 1 və n tərtibdəndirlər. Məsələnin sadələşdirilmiş populyar şərtlərində bu münasibətlər bəzən « n -in kvadrat kökü qanunu» adlandırılır: asılı olmayan təsadüfi toplananların sayı artdıqca onların cəmi n -ə mütənəşib olaraq artır, lakin bu qanunauyğun orta qiymətdən təsadüfi yayınmalar yalnız $\sqrt{n}$ -ə mütənəşib olaraq artır. Bununla belə, məsələnin daha mürəkkəb anlaşılması üçün, daha dəqiq ifadələnmələrə müraciət etmək zəruridir; hər halda B. ə. q.-nın təsiri haqqında bu «kobud» təsəvvür, toplananların sayının nə dərəcədə böyük götürülməyəyi və B. ə. q.-nın bundan sonra bu və ya digər hansı bir dəqiqliklə ödəniləcəyi haqqında mülahizə yürütməyə imkan yaradacaqdır.

Məs., əgər hər bir x_k toplananı yalnız iki – 1 və 0 qiymətlərini,

$x_k = 1$ qiymətini p_k ehtimalı ilə və $x_k = 0$ qiymətini $1 - p_k$ ehtimalı ilə alsas, asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$a = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{n}$$

olur, $\bar{x}$ isə $\frac{m}{n}$ tezliyinə çevrilir, burada m , $-k \leq n$ nömrəli və 1-ə

bərabər bütün r_k -ların sayıdır. Bu halda B. ə. q. onu ifadə edir ki, n -in

böyük qiymətlərində $\frac{m}{n}$ tezliyi ehtimalların ədədi ortasına çox yaxın

olur. Bu – Puasson B. ə. q.-dur. Puasson teoremi dəqiq belə ifadə olunur: əgər $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – qarışıqlıq asılı olmayan təsadüfi hadisələrdirsə, m , $-k \leq n$ nömrəli, həqiqətən də, baş verəcək A_k hadisələrinin

sayı olduqda, $\frac{m}{n}$ tezlikləri üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\left| \frac{m}{n} - a \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyin ehtimalı $n \rightarrow \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır. Puasson teoreminin ciddi isbatını P. L. Çebişev «Ehtimal nəzəriyyəsinin bir ümumi təklifinin elementar isbatı» («Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», 1843) məqaləsində vermişdir. Bernulli teoremi Puasson teoreminin xüsusi halıdır, bu halda bütün p_k -lar eyni bir p ədədinə ($0 < p < 1$) bərabər götürülür. Bernulli teoremində $a = p$ və B. ə. q.-nda hökm olunur ki,

n -in böyük qiymətlərində, vahidə olduqca yaxın ehtimalla, $\frac{m}{n}$ tezliyi p ehtimalına olduqca yaxın olacaqdır.

B. ə. q.-nın mənası və əhəmiyyəti haqqında təsəvvür aşağıdakı misaldan aydın olur. Qapalı qabda N sayda qaz molekulu vardır. Kinetik nəzəriyyəyə əsasən hər bir molekul qabın içərisində digər

molekullar tərəfindən və qabın divarlarından məruz qaldığı çoxsaylı zərbələr altında xaosik hərəkət edir. Seçilmiş zaman parçasının t saniyəsi ərzində qabın divarının hər hansı σ sahəsinə dəyən molekul bu sahəyə f_k impulsunu verir. f_k impulsu tipik təsadüfi kəmiyyətdir, baxılan qazın vəziyyəti yalnız bu impulsun

$$a = \mathbf{M}(f_k)$$

riyazi gözləməsini təyin etdiyindən baxılan molekulun impulsunun faktiki qiyməti baxılan zaman parçasında ən müxtəlif qiymətlər (əgər baxılan molekul σ sahəsinə dəyməmişdirsə, sıfırdan başlayaraq) ala bilər. Bütün molekulardan baxılan müddət ərzində σ sahəsinə ötürülən impulsların cəmi –

$$F = \sum_{k=1}^N f_k,$$

– riyazi gözləməsi $A = Na$ -ya bərabər təsadüfi kəmiyyətdir. Lakin burada B. ə. q.-na əsasən (burada bu qanun N çox böyük ədəd olduğundan xüsusi bir dəqiqliklə aşkar olunur) F , həqiqətən də, ayrı-ayrı molekulların hərəkətində təsadüfi təsirlərdən demək olar ki, asılı olmur, yəni, demək olar ki, dəqiqliklə öz riyazi gözləməsi A -ya bərabər olur. Kinetik nəzəriyyə nöqteyi-nəzərindən bununla belə bir fakt izah olunur: σ sahəsinə qazın təzyiqi praktiki olaraq, ciddi surətdə sabitdir və xaosik olaraq dəyişmir.

Çox vaxt B. ə. q.-nu, qaz molekulları ilə əlaqədar məsələdə olduğu kimi, təsadüfi toplananların sayı o qədər də böyük olmadığı halda tətbiq etmək məcburiyyəti yaranır; bu halda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin bu cəmin riyazi gözləməsindən yayınmaları olduqca böyük ola bilər. Bu halda bu yayınmaları qiymətləndirməyi bacarmaq olduqca mühümdür. Məs., hər birində 100 ədəd hər hansı bir məmulat olan 1 000 partiyanın hər birindən ixtiyari 10 saydası sınaq üçün götürülmüşdür və yoxlanılmış 10 000 məmulatın 125-i qüsurlu olmuşdur. Əgər n_k ilə k -cı partiyadakı qüsurlu məmulatların sayını işarə edərixsə, onda qüsurlu məmulatların ümumi sayı –

$$n = \sum_{k=1}^{1000} n_k$$

olacaqdır; k -cı partiyadan sınaq üçün götürülmüş on məmulat arasında qüsurların sayının (təsadüfi kəmiyyətdir) riyazi gözləməsi

$$S_k = \frac{10}{100} n_k$$

olacaqdır, hər birində 10 məmulat olmaqla 1000 yoxlamada qüsurlu məmulatların ümumi sayının riyazi gözləməsi isə

$$S = \sum_{k=1}^{1000} S_k = \frac{1}{10} n$$

olacaqdır. B. ə. q.-a əsasən, $\frac{1}{10} \cdot n \sim 125$ götürmək təbiidir, yəni

100 000 məmulatdan ibarət bütün partiyalarda 1250 qüsurlu vardır. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyiylə daha dəqiq araşdırma belə nəticəyə gətirir: əgər hər bir partiyadan seçilmiş məmulatlar, doğrudan da, ixtiyari qaydada seçildirsə, onda kifayət qədər əminliklə hökm etmək olar ki, faktiki olaraq, $1000 < n < 1500$, lakin $1100 < n < 1400$ götürülsə, belə qiymətləndirilmə kifayət qədər etibarlı olmayacaqdır, $1200 < n < 1300$ qiymətləndirilməsi üçünsə heç bir ciddi əsas yoxdur. n üçün daha dəqiq qiyməti yalnız olduqca çox məmulatı sınaqdan keçirərək almaq olar.

Toplananların asılı olmamazlığı, əgər B. ə. q.-nın tətbiqlərinin əksəriyyətində yerinə yetirilsə də, bu yalnız bu və ya digər yaxınlaşma ilə olur. Məs., qazın ayrı-ayrı molekullarının hərəkətinə aid birinci misalda bu hərəkətlərin bir-birindən asılı olmadığını iddia edə bilmərik.

Buna görə də, a s ı l ı l ı toplananlar halında B. ə. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlərin olduqca tam surətdə araşdırılmasının böyük əhəmiyyəti vardır. Bu istiqamətdə əsas riyazi işlər A. A. Markov, S. N. Bernşteyn və A. Ya. Xinqinə məxsusdur. Keyfiyyət etibarilə bu araşdırmaların nəticələrindən belə iddia etmək olar ki, əgər mühum asılılıq yalnız bir-birilə qonşu və ya yaxın (nömrələrinə görə) toplananlar arasında olarsa, uzaq nömrəli toplananlar arasında asılılıq isə olduqca zəif olarsa, B. ə. q.-nu tətbiq etmək olar. Məs., temperatur və ya havanın təzyiqi üzərindəki meteoroloji müşahidələrin nəticələrinin sıralarında vəziyyət belədir. Buna görə də, baxılan bir bölgədə, ilin verilən bir anında temperatur və təzyiqlərin çoxillik orta qiymətləri baxılan ərazi üçün obyektiv xarakteristika olan və bunlar üçün hesablanmış riyazi gəzləmələrə yaxın olur.

B. ə. q. ilə bağlı məsələlərin riyazi tərəfi «Ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri» və «Ehtimal nəzəriyyəsi» (bax) məq.-də ətraflı işlənmişdir. B. ə. q.-nun tətbiqlərində onun tətbiq olunması üçün şərtlərin nisbətən sadə riyazi ifadə olunmuşlarından istifadə etmək, adətən, kifayət edir, lakin onları real vəziyyətlə ədəqədər olaraq, olduqca diqqətlə yoxlamaq gərəkdir.

Əd.: Чебышев П. Л., О средних величинах, Полное собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; Бернштейн С. Н., О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей, в кн.: Научное наследие П. Л. Чебышева [Сб. статей], в. 1, М. – Л., 1945; Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946; Колмогоров А. Н., Роль русской науки в развитии теории вероятностей, «Ученые записки Московского гос. ун-та», 1947, в. 91, с. 53-64; Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Теория вероятностей в кн.: Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. Сб. статей под ред. А. Г. Куроша [и др.], М. – Л., 1948; Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, М. – Л., 2-е изд., 1950.

A. N. Kolmogorov (БСЭ-2, 1950, том 5).

İNFORMASIYA — kibernetikanın (bax) əsas anlayışıdır. Bizim təfəkkürümüzün bizi maraqlandıran kəmiyyətlər və ya təhəhürlər haqqında nəticə çıxarmaq üçün bu və ya digər «verilənlərdəki» İ. üzərində işləməyə qadir olduğu barədə təsəvvürün hamı üçün anlaşılan olduğunu hesab etmək olar (məs., $x^2=1$ tənliyindəki İ.-nin, $x=\pm 1$ kimi nəticənin çıxarılmasında, baxılan gün ərzində meteoroloji stansiyalar şəbəkəsinin müşahidə nəticələrindəki İ.-nin qarşıdakı gün üçün hava proqnozunda). Kibernetikada belə növ təsəvvürlər ümumiləşdirilir və qəbul olunur, canlı orqanizm (şüurlu və şüursuz) və ya avtomatik işləyən maşınla yerinə yetirilən ixtiyari idarəetmə və ya tənzimləmə prosesində «giriş signallarındakı» İ.-nin yenidən işlənilib, «çıxış signallarına» ötürülməsi baş verir. İ. nəzəriyyəsi (bax, *Информационная теория*, 51 т.) rabitə texnikasının ehtiyacları ilə bağlı yaranmışdı və o, teleqraf lentində tire və nöqtələrə, elektrik impulslarına və s. obyektlərə İ. daşıyıcıları kimi baxır. Bütün bu hallarda İ.-nin m i q d a r ı, onun etibarlılığının çox və ya az tamlığı barədə danışmaq olar. İ. haqqında bu anlayışın dəqiq tərfi və müxtəlif fikirlərin mənası barədə sual yaranırdı və çoxdan bəri müxtəlif xüsusi hallara tətbiq olunaraq, uğurla həll olunurdu. Bu qəbildən məntiqi problemlər bütün genişliyi ilə yalnız kibernetikada və İ. nəzəriyyəsində yaranır. İ.-ya onun 1) miqdarı, 2) məzmunu, 3) verilməsi üsulu nöqtəy-nəzərindən baxmaq olar.

Misal 1. Beşrəqəmli ədəd verildikdə ondakı minlik və onluqlar göstərilirdi haldakı İ., ondakı onluqların və vahidlərin göstərilirdi haldakı İ. qədərdir və yalnız onun vahidləri göstərilirdi haldakı İ.-dan iki dəfə çoxdur. Ədədin yalnız vahidlərinin göstərilirdi haldakı İ., onun vahidlərinin və onluqların göstərilirdi İ.-nin tərkibində daşınır və o, bu sonuncunun yarısını təşkil edir.

Misal 2.

$$x^2 - y^2 = 0 \quad (1)$$

münasibətinin x və y məchulları barədə daşdığı İ.,

$$x - y = 0 \quad (2)$$

münasibətdəki İ.-nin tərkibində daşınır (çünki (2) (1)-dən alınır), lakin onunla üst-üstə düşür [çünki (1) və (2) tənlikləri eyni güclü

deyidirlər] (2) və (3)

$$x + y = 0 \quad (3)$$

münasibətlərində daşınan informasiya

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

bərabərlikləri ilə verilən informasiya ilə üst-üstə düşür [çünki (2–3) tənliklər sistemi (4) sistemi ilə eynigüclüdür]. (2) – (3) və (4) sistemlərində daşınan İ. yalnız hansı formada verilməsi ilə fərqlənirlər.

Müxtəlif verilənlərin daşdığı İ.-lərin məzmun etibarilə üst-üstə düşməsi şərtləri barədə daha mürəkkəb məsələlər riyazi statistikada yaranmış və əsasən ing. statistiki R. Fişer (1921) tərəfindən həll olunmuşdu. Statistika çoxsaylı müşahidə nəticələri ilə iş görür və bunları tamamilə göstərmək əvəzinə, adətən, onların bəzi «sərbəst xarakteristikalarını» göstərir. Bəzən belə «əvəzləmədə» «İ. itkisi» yaranır, lakin bəzi şərtlərdə yeni alınmış xarakteristikalar bütün verilənlərdə olan bütün İ.-ni daşıyır. Bu halda yeni alınmış xarakteristikaların məsələnin *məqbul statistikalar* sistemini əmələ gətirir (bax, 51 t.).

İ. miqdarını ölçmək üçün ümumi üsullar haqqında ilk dürüst təkliflər, məncə, R. Fişərə (riyazi statistikanın problemləri ilə bağlı) və R. Hartliyə (İ.-nin rabitə kanalları ilə ötürülməsi və yaddaş qurğularında İ.-nin qorunub saxlanılması ilə bağlı) aiddir. Bu təkliflər öz axırıncı ifadəsini Amerika alimi K. Şennonun (1948) yaratdığı İ. nəzəriyyəsində tapmış oldu.

Fərz olunur ki, əvvəlcədən məlumdur ki, a hadisəsi

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

variantlarından birində baş verə bilər, bu barədə b məlumatı isə

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

tiplərindən biri ola bilər. İ. nəzəriyyəsində fərz olunur ki, a və b birgə ehtimal paylanmasına malikdirlər:

$$P(a = a_i, b = b_j) = p(a_i, b_j)$$

və bu paylanma a və b -nin paylanmalarını ayrı-ayrılıqda təyin edir:

$$p(a_i) = \sum_j p(a_i, b_j),$$

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j).$$

Şennonun görə a hadisəsi barədə b -də olan İ. miqdarı

$$I(a, b) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log_2 \frac{p(a_i, b_j)}{p(a_i)p(b_j)} \quad (5)$$

düsturu ilə ifadə olunur (İ. nəzəriyyəsində loqarifm 2 əsasına görə götürülür). Əgər hər bir b_j -yə yeganə bir a_i uyğun olursa və bu a_i

üçün $p(a_i, b_j)$ ehtimalı müsbət olarsa, yəni a_i variantı b_j ilə birqiymətli təyin olunarsa, onda asanlıqla hesablamaq olar ki,

$$I(a, b_j) = H(a) = \sum_i p(a_i) \log_2 p(a_i). \quad (6)$$

$H(a)$ kəmiyyəti $p(a_i)$ paylanmasının entropiyasıdır; $H(a)$, — a hadisəsinin baş verməsi üçün a_i variantlarından hansının baş verməsinin zəruriliyini dəqiq göstərmək üçün tam İ. miqdarına bərabərdir. b_j -nin verilməsi a_i -ni birqiymətli təyin edə bilmədiyi bütün digər hallarda

$$I(a, b) < H(a).$$

$$I(a, b) \geq 0$$

münasibəti həmişə doğrudur;

$$I(a, b) = 0$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğru olur ki, a və b bir-birindən asılı olmasınlar, yəni

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j)$$

bərabərliyi ödənilsin. a hadisəsinin baş verməsi variantı birqiymətli göstərildiyi halda $\bar{I}$ miqdarı aşağıdakı şərtlə təyin olunur:

$$I(a, a) = H(a);$$

$$p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_m) = \frac{1}{m}$$

olduqda o,

$$H(a) = \log_2 m$$

maksimum qiymətini alır.

Bu nəticə $\bar{I}$ miqdarının ehtimal nəzəriyyəsinə daxil olmayan $\bar{I}$ miqdarının digər mümkün ifadəsinə uyğundur. Əgər

$$2^{k-1} \leq m < 2^k$$

münasibəti ödənilərsə, onda

$$H(a) = \log_2 m \sim n$$

münasibəti təqribən ödənilir, burada n – ikilik işarələrinin (0 və ya 1) sayıdır və o, ixtiyari tam ədədin $1 \leq i \leq m$ sərhədlərində (yəni mümkün olan a_i qiymətlərinin nömrəsi i -nin) ikilik sistemində yazılışı üçün kifayət edir.

A. N. Kolmoqorov (BCƏ-2, 1958, tom 51).

KORRELYASIYA (riy.), – təzahürlər (təsədüfi hadisə və ya proseslər) arasında əlaqədir. K. anlayışı funksional asılılıq anlayışından daha ümumdür (bax, *Функция*). Məs., məlumdur ki, uca boylu valideynlərin uşaqları da kiçik boylu valideynlərin uşaqları ilə müqayisədə uca boylu olurlar. Bununla belə, ata və ananın boyu məlum olduğu halda hər bir ayrı-ayrı halda uşağın boyunu hesablamaq mümkün deyildir. İki təzahür arasında K. iki halda yaranır: ya bu təzahürlərdən biri bu təzahürü təyin edən səbəblər arasında olduqda və ya hər iki təzahürə təsir göstərən ümumi səbəblər olduqda. İki təzahür arasında K. haqqında mülahizənin obyektiv mənə daşması üçün zəruridir ki (funksional asılılıq kimi xüsusi hal istisna olunur), baxılan təzahürlər qeyri-məhdud dəfə təkrar oluna bilsin və bu zaman baş verə biləcək kombinasiyaların ehtimalları (bax, *Вероятность*) haqqında danışmaq mümkün ola bilsin.

İki hadisə arasında K. İki – A və B hadisələrinə baxaq. $\bar{A}$ ilə A hadisəsinə əks olan hadisəni (yəni A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəni), $\bar{B}$ ilə B -yə əks hadisəni işarə edək. Əgər B hadisəsi A hadisəsi hər dəfə baş verdikdə baş verirsə və əksinə, A hadisəsi hər dəfə B hadisəsi baş verdikdə baş verirsə, onda A və B hadisələri bir-birilə *düz funksional asılılıqla* əlaqədirlər. Əgər A hadisəsi, yalnız və yalnız, B hadisəsi baş vermədikdə baş verirsə, onda A və B *tərs funksional asılılıqla* əlaqədirlər. Bu iki hal istisna olunmaqla, A və B hadisələri arasında asılılığı qiymətləndirmək üçün ehtimal anlayışından hökmən istifadə olunmalıdır. $P_A(B)$, – A hadisəsi baş verdiyi halda B hadisəsinin ehtimalı, $P_{\bar{A}}(B)$, – A hadisəsi baş vermədiyi halda B hadisəsinin ehtimalı olsun. Əgər $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ olarsa, onda B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir. $\rho_B = P_A(B) - P_{\bar{A}}(B)$ fərqi B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən reqressiya əmsalı deyilir.

Belə bir misala baxaq: difterianın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab istifadə olunur. Zərdabın istifadə olunmasını A , xəstənin

sağlmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab tətbiq olunduqda bütün xəstələr sağlansaydı və əgər o, tətbiq olunmadıqda onların hamısı ölsəydi, onda bu düz funksional asılılıq olardı; əgər $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$

olsaydı, yəni sağalma halları həm zərdab tətbiq olunduqda, həm də tətbiq olunmadıqda bərabər olsaydı, onda aydındır ki, zərdabın tətbiqi mənasız olardı, çünki onsuz, yuxarıda verilmiş tərifə görə, B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın tətbiqi) asılı olmazdı. Əgər, məs., $P_A(B) = 0,97$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,85$ olarsa, onda reqressiya əmsalı

$\rho_B = 0,12$, zərdabın tətbiqi və sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərirdi.

Reqressiya əmsalı ρ_B – funksional əlaqə müsbət olduqda $+1$, B -nin A -dan asılı olmadığı halda – sıfıra, funksional əlaqə mənfi olduqda -1 -ə bərabərdir; digər hallarda 0 , -1 və $+1$ arasında, sıfırdan fərqli qiymətlər alır. Misalların çoxunda A və B arasında əlaqəni A hadisəsinin B -yə nəzərən analoji $\rho_B = P_A(B) - P_{\bar{A}}(B)$ reqressiya əmsalı ilə deyil,

hökmən ρ_B əmsalının vasitəsilə təyin etmək üçün heç bir əsas yoxdur.

Bu halda A və B hadisələri arasında K. əmsalı – $R = \pm \sqrt{\rho_A \rho_B}$ istifadə oluna bilər. R -in işarəsi reqressiya əmsallarının hər ikisinin işarəsi ilə üst-üstə düşməlidir (onların hər ikisinin də işarəsi həmişə eyni olur). K. əmsalı, yalnız və yalnız, o halda sıfıra bərabər olur ki, A və B asılı olmayan hadisələr olsun (əgər B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildirsə, onda asanlıqla isbat olunur ki, A hadisəsi də B -dən asılı deyildir və yalnız onlar arasında funksional asılılıq olduğu halda o, ± 1 -ə bərabər olur, yəni $R = \pm 1$ olur.

İki kəmiyyət arasında K. Əgər x -in hər bir qiymətinə tamamilə müəyyən bir $y = f(x)$ kəmiyyəti uyğun olarsa, y kəmiyyəti x -dən funksional asılıdır. Əgər belə asılılıq yoxdursa, onda statistik təzahürlər halında (bu təzahürlərin müəyyən ehtimallarla qeyri-məhdud surətdə təkrarlanan olduğu hallarında) biz, x -in hər bir mümkün qiyməti üçün uyğun $M_x(y) = f(x)$ riyazi gözləməsini təyin edə bilərik (bax).

$y = f(x)$ tənliyinə y kəmiyyətinin x -ə nəzərən reqressiya tənliyi (x, y) müstəvisində $y = f(x)$ əyrisinə y -in x -ə nəzərən reqressiya əyrisi deyilir. y -in riyazi gözləməsini (şortsiz riyazi gözləməsini) $a_y = M(y)$ ilə işarə edək. x və y kəmiyyətləri asılı olmadıqları halda

reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olur [çünki, bu halda $M_x(y) = M(y) = a_y$]. Qeyd edək ki, reqressiya tənliyinin $y = a_y$ olmasından x və y -in asılı olmamalılığı alınmır; məs., x dəyişdikdə y -in riyazi gözləməsi dəyişməz qala bilər, lakin y -in heç olmasa,

$M_x(y - a_y)^2$ ilə ölçülə bilən orta dəyişikliyi x -dən asılı ola bilər. Reqressiya tənliyinin y -in dəyişməsinə nə dərəcədə yaxşı verə bilməsini təyin etmək, başqa sözlə, x və y arasındakı asılılığın funksional asılılığa nə dərəcədə yaxın olduğunu təyin etmək arzusu təbiidir. Bu suala cavabı y -in x -ə korrelyasion nisbəti verir [Pirson tərəfindən daxil olunmuşdur, bax]:

$$P_y = + \sqrt{1 - \frac{M[y - M_x(y)]^2}{M(y - a_y)^2}}$$

$P_y = 0$, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olduqda olur; yəni y -in riyazi gözləməsi x -dən asılı olmasın; $P_y = +1$ – yalnız y -in x -dən asılı olduğu halda doğrudur. Digər hallarda P_y , -0 və $+1$ arasında qiymətlər alır.

Praktiki olaraq, reqressiya tənliyi məhdud sayda, məhdud dəqiqliyə malik müşahidələr üzrə hesablanır. Sığın verilənləri bilavasitə korrelyasion cədvəllə ifadə olunur; bu cədvəldə x və y kəmiyyətlərinin qiymətlərinin verilən hər hansı kombinasiyasının müşahidələrin

neçəsində alındığı göstərilir (bax, cədvəl 1-də sxematik misal).

Cədvəl 1

y	x									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	–	1	–	–	–	–	–	1	1
2	1	1	2	–	–	–	1	2	–	2
3	–	2	1	3	1	1	–	4	2	–
4	–	–	–	1	4	3	4	1	–	–
5	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–

Əgər x -in hər bir ayrıca qiymətinə çoxsaylı ayrı-ayrı müşahidələr uyğun olursa, onda regressiya əyrisi $y = f(x)$ təqribi olaraq olduqca sadə təyin oluna bilər: hər bir $x = x_i$ qiyməti üçün y kəmiyyətinin orta qiyməti $\bar{y}_i$, müşahidələrdə verilmiş $x_i = x_i$, $\bar{y}_i = f(x_i)$ qiyməti ilə təyin olunur və o, regressiya əyrisini təqribən ifadə edir. Lakin hər bir $x = x_i$ qiymətinə uyğun müşahidələr sayı kifayət qədər böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirə bilər.

Cədvəl 2-də cədvəl 1-də verilmiş qiymətlərə uyğun $\bar{y}_i$ -lər verilir. Sadə sağlam düşüncədən belə nəticəyə gəlmək olur ki, regressiya əyrisi $y = f(x)$, $x = 1$ olduqda təxminən 1,5-dən təxminən 4-ə qədər $x = 5$ və ya 6 ətrafında qalaraq, x -in sonrakı artan qiymətlərində yenidən aşağı enməlidir. Lakin, məs., $x = 2$ olduqda, $\bar{y}_i$ -nin əlavə maksimumunun $x = 3$ olduqda $\bar{y}_i$ -nin sonradan azalması kimi halları, müşahidələrin verilmiş sayında tamamilə təsadüfi hesab oluna bilər.

Cədvəl 2

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_i$	1,5	2,7	2,0	3,2	4,1	4,4	3,4	2,8	2,2	1,7

İki kəmiyyət arasında normal K. (eht. nəz.-də, H. M.) 45. Akad. S. N. Bernşteynin nəzəri cəhətdən ən müfəssəl surətdə öyrənmiş olduğu bir sıra əsaslara görə, iki x və y kəmiyyətləri arasında korrelyasion asılılıq əksər hallarda məlum yaxınlaşma ilə normal sayılır, yəni koordinatları x və y olan nöqtənin (x, y) müstəvisinin hər hansı bir g oblastına düşməsi ehtimalı təqribən

$$\frac{1}{\Delta} \iint_g e^{-\frac{1}{2(1-R^2)} \left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2R(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x \sigma_y} \right]} dx dy$$

integralı ilə ifadə olunacaqdır, burada $\Delta = 2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}$,

$a_y = M(y)$, $\sigma_y = \sqrt{M(y-a_y)^2}$, – y kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

və kvadratik orta yayınması, $a_x = M(x)$, $\sigma_x = \sqrt{M(x-a_x)^2}$, – x kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və kvadratik orta yayınması və nəhayət, R , – x və y kəmiyyətlərinin K. əmsəlidir:

$$R = \frac{M\{(x-a_x)(y-a_y)\}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Normal K. halında regressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$y = a_y + \rho_y(x - a_x),$$

burada

$$\rho_y = R \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

yəni normal K. halında regressiya əyrisi – düz xəttidir. Normal K. halında korrelyasion Piron nisbəti P_y korrelyasiya əmsalı R -ə bərabərdir. K. əmsalının x və y arasında normal asılılıqdan olduqca çox fərqlənən əlaqələr halında, asılılıq ölçüsü kimi istifadə edilməsi, bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, K. əmsalı hətta y x -dən funksional asılı olan halda belə sıfıra bərabər ola bilər. Cədvəl 1-dən y -in x ilə olduqca güclü əlaqəsi olduğunu görürük, lakin bununla belə K. əmsalı sıfıra yaxındır. Bir də qeyd edək ki, normal K. halında x -in y -ə nəzərən regressiya tənliyi –

$$x = a_x + \rho_x(y - a_y)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\rho_x = R \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Cədvəl 3. – Əsgəri xidmətə çağırılanların boyu və çəkisi arasında korrelyasion əlaqə

Çəki kq	boy sm-lə								
	154-ə kimi	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-dən çox
45-ə kimi	32	42	29	9	1	2	–	–	–
45-49	63	304	421	233	60	9	3	–	–
49-53	40	273	952	1.050	433	91	13	2	–
53-57	13	174	874	1.730	1.288	482	60	12	1
57-61	7	43	317	1.175	1.543	947	219	29	–
61-65	–	7	87	381	903	866	360	61	7
65-69	–	1	4	61	245	377	231	80	8
69-73	–	–	1	13	43	86	91	48	9
73-77	–	–	2	2	6	27	31	14	13
77-dən çox	–	–	–	–	5	10	9	11	3

ρ_y və ρ_x əmsalları y -in x -ə nəzərən və x -in y -ə nəzərən regressiya əmsalları adlanır. ρ_x və ρ_y -in işarələri həmişə eynidir (və R -in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki, $R = +\sqrt{\rho_x \rho_y}$. K. əmsalı faktiki olaraq, aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$R^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

burada $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$, n – müşahidələr sayı, x_i və y_i , – x və y -in i -ci müşahidədəki qiymətləridir. Bu düstur – verilən

müşahidələr sırasının empirik K. əmsalı adlandırılan R^* üçün bilavasitə verilən K. əmsalıdır. Ayrı-ayrı müşahidələrin sayı n -in böyük qiymətlərində R^* empirik K. əmsalı əsl K. əmsalı R -ə yaxın olur.

Cədvəl 3 normal K. hipotezi ilə yaxşı uzlaşan korrelyasion əlaqəyə bir misəldir. Burada empirik K. əmsalı $R^* = 0,6279$ -a bərabərdir.

Cədvəl 1. – 624 ədəd Şimal şam ağaclarının gövdələrin diametrlərinin və hündürlüklərinin paylanması.

Diametr sm.-lərə	Hündürlük (m.-lərə)														
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
14-17															10
18-21															47
22-25															98
26-29															134
30-33									7	3	2				114
34-37	2	2	5	1	15	9	29	14	31	18	7	1			98
38-41	1	3	3	12	18	24	30	43	35	26	12	6			53
42-45	1	1	1	3	7	18	18	29	33	19	16	4			32
46-49					1	5	3	17	10	13	6	8			22
50-53						1	2	4	7	6	2				12
54-57								2	3	4	1	1	1	1	3
58 və daha çox									1	1	1				1
Cəmişi	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624

Müşahidələr sayı tamamilə kifayət edir ki, R -in R^* -ya olduqca yaxın olduğu hesab edilsin.

Toplam K. (rus. множественная K.). İkiden çox hadisələr və kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Bir çox təbii məsələlərdə (məs., məhsuldarlığın proqnozu, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti məlum kəmiyyətlər sırası ilə əlaqələndirən regressiya tənliklərinin təbii olunması böyük əhəmiyyətə malikdir. Toplam K. halında çox da olmayan müşahidələrdən alınmış verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq olduqca təhlükəlidir. K. nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı regressiya tənliklərinin təbii olunması üçün bu və ya digər şəraitlərdə kifayət ediləcək müşahidələr sayının nə qədər olmasının aydınlaşdırılmasıdır.

Əd.: Определения и основные понятия, см. – Б е р н с т е й н С. Н., Теория вероятностей, 3 изд., М. – Л., 1934; С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями, [М.], 1926; Т s c h u p r o w А. А., Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Lpz., 1925.

A. N. Kolmogorov (БСЭ-1, 1937, том 34).

KORRELYASIYA (r i y a z i s t a t i s t i k a d a) – ümumiyyətlə, ciddi funksional asılılığa malik olmayan statistik və ehtimali asılılıqdır. Funksional asılılıqdan fərqli olaraq, korrelyasion asılılıq yalnız o halda yaranır ki, dəyişənlərdən biri yalnız ikincinin verilənlərindən deyil, həmçinin bir sıra dəyişən şərtlərdən də asılı olur və ya hər iki dəyişən onların hər ikisi üçün ümumi olan müəyyən şərtlərdən asılı olur. Bu növ asılılıq cədvəl 1-də verilmişdir (bax, səh. 1149). Cədvəldən görünür ki, şam ağacının hündürlüyü o r t a q i y m ə t ə artdıqda, onların gövdələrinin diametri də artır; lakin verilmiş hündürlüklü şam ağaclarının (məs., 23 m.) diametrlərinin paylanması olduqca yayınmalara malik olur. Əgər orta hündürlüyü 23-metrlik şam ağacları 22-metrlik ağaclardan qalın gövdəli olarsa, ayrı-ayrı şam ağacları üçün bu nisbət fərqli dərəcədə pozula bilər.

Belə bir misala baxaq: difteriyanın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab təbii olunur. Zərdabın təbii olunmasını A , xəstənin sağalmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab təbii olduğunda bütün xəstələr sağalmış olsaydı, lakin onun təbii olunmadığı bütün hallarda bütün xəstələr dünyalarını dəyişmiş olardırsa, onda düz ciddi asılılıq halı ilə qarşılaşırdıq: əgər $P(B \setminus A) = P(B \setminus \bar{A})$ bərabərliyi ödənilsəydi, yəni sağalma hallarının nisbi miqdarları, zərdabın təbii edilib-edilməməsindən asılı olmayaraq eyni olardı, onda aydındır ki, yuxarıda verilən tərifi uyğun olaraq B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın təbii) asılı olmamalı idi. Məs., əgər $P(B \setminus A) = 0,97$, $P(B \setminus \bar{A}) = 0,85$ olarsa, onda regressiya əmsalının $\rho_B = 0,12$ qiyməti

zərdabın təbii ilə sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərmiş olardı.

Düz ciddi asılılıqda regressiya əmsalı $\rho_B = +1$, B hadisəsi A -dan asılı olmadıqda $\rho_B = 0$, əks ciddi asılılıq halında $\rho_B = -1$; digər hallarda regressiya əmsalı -1 və $+1$ arasında sıfır bərabər olmayan qiymətlər alır. Bir çox məsələlərdə A və B arasındakı əlaqəni regressiya əmsalının

$$\rho_A = P(A \setminus B) - P(A \setminus \bar{B})$$

analoji ifadəsinin köməyiylə deyil, hökmən ρ_B əmsalı vasitəsilə ölçmək üçün heç bir əsas yoxdur. Bu halda hətta A və B hadisələri arasında korrelyasiya əmsalı

$$R = \pm \sqrt{\rho_A \rho_B}$$

də istifadə oluna bilinər. R -in işarəsi regressiya əmsallarının hər ikisinin də əmsalının işarəsi ilə üst-üstə düşməlidir (bunlar həmişə eyni işarəlidir). K. əmsalı – yalnız və yalnız, A və B hadisələri asılı olmadıqları halda sıfır bərabər olur (əgər B hadisəsi A -dan asılı deyildirsə, onda A hadisəsinin B -dən asılı olmamazlığı asanlıqla isbat olunur) və ± 1 qiymətlərini, yalnız və yalnız, ciddi asılı olmamazlıq halında alır.

İki kəmiyyət arasında korrelyasiya. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında ciddi (funksional) əlaqə yoxdursa, müəyyən ehtimalların olduğu hallarda, ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər bir mümkün $\xi = x$ qiyməti üçün uyğun $M(\eta | \delta = x) = f(x)$ şərti riyazi gözləməsini təyin etmək olur (bax, Ожидание математическое). $y = f(x)$ tənliyi – η kəmiyyətinin ξ -yə nəzərən regressiya tənliyi, $x \in y$ müstəvisində $y = f(x)$ əyrisi isə η -nın ξ -yə nəzərən regressiya əyrisi adlandırılır. $m_\eta = M(\eta)$ ilə η -nın şərtsiz riyazi gözləməsini işarə edək. ξ və η – asılı olmayan kəmiyyətlər olduqda, regressiya tənliyi $y = m_\eta = \text{const}$ münasibətilə ifadə olunur, yəni $M(\eta | \xi = x) = M(\eta)$ olduqda bütün şərti riyazi gözləmələr şərtsiz riyazi gözləmələrlə üst-üstə düşür. Tərsi həmişə doğru olmur. ξ -nin aldığı qiymətlər dəyişdikcə regressiya tənliyinin η -nın dəyişməsinə necə təsir etməsini təyin etmək arzusu başqa sözlə asılılığın ciddi asılılığa nə dərəcədə yaxın olmasını təyin etmək arzusu təbiidir. Bu məqsədlə $\xi = x$ verilmiş qiymətində η -nın şərti dispersiyasından və ya onun orta qiyməti – η -nın regressiya əyrisi ətrafında dispersiyası –

$$\sigma_{\eta/\xi}^2 = M[\eta - M(\eta | \xi = x)]^2$$

kəmiyyətindən istifadə etmək olar. Əlaqə göstəricisi kimi, adətən,

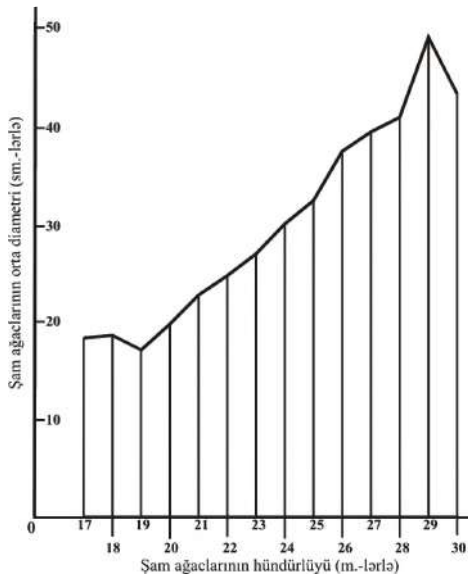
$$\theta_{\eta\xi}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\eta\xi}^2}{\sigma_{\eta}^2}$$

– korrelyasion münasibətinə baxılır, burada σ_{η}^2 – η kəmiyyətinin dispersiyasıdır. $\theta_{\eta\xi}^2$ korrelyasion münasibəti də analoji təyin olunur. $\theta_{\eta\xi}^2$ kəmiyyəti, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = m_{\eta}$ şəklində olduğu halda, yəni η -nın riyazi gözləməsi ξ -dən asılı olmadığı halda sıfıra bərabər olur. $\theta_{\eta\xi}^2$ – η kəmiyyətinin ξ -dən ciddi asılılığı halında +1-ə bərabər olur. Digər hallarda $\theta_{\eta\xi}^2$, – 0 və +1 arasında qiymətlər alır.

Ehtimalı reqressiya əyrisi olduqca geniş korrelyasion cədvəl üzrə tətbiqi olaraq yenidən bərpə oluna bilər; $f(x)$ -in təqribi qiyməti kimi η -nın $\xi = x$ olduğu haldakı müşahidələrdə aldığı qiymətlərin ədədi ortası götürülür. Lakin ξ -nin hər bir qiymətinə uyğun müşahidələrin sayı çox da böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirib çıxarır.

Şəkilə, araşdırılmış şam ağaclarının diametrlərinin orta uzunluğunun onların hündürlüyündən asılılığı, cədvəl 2-yə (bax, səh. 1149) müvafiq olaraq, statistik reqressiya əyrisi təsvir olunmuşdur. Göründüyü kimi bu xətt orta hissədə əsl qanunauyğunluğu yaxşı ifadə edir. Reqressiya xəttinin 29 və 30 m.-ə hündürlüyə uyğun nöqtələri materialın kifayət qədər olmaması səbəbindən etibarlı deyildirlər. 17, 18 və 19 m. hündürlüklərə uyğun nöqtələr materialın seçilməsi sistemi ilə təhrif olunmuşdur: cədvələ yalnız diametrləri ≥ 14 sm. olan şam ağacları daxil olmuşdur.

Riyazi statistikada (bax) məhdud statistik material üzrə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin təqribi tapılması üçün digər, daha mükəmməl üsullar, həmçinin statistik tapılmış belə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin dəqiq qiymətləndirilməsi üsulları işlənmişdir (bax, Reqressiya).



şam ağaclarının orta diametrlərinin hündürlükdən asılılığı üçün reqressiyanın statistik asılılığı

İki kəmiyyət arasında normal korrelyasiya. ξ və η kəmiyyətləri arasındakı korrelyasiyon asılılığın bir çox hallarda məlum yaxınlaşması ilə normal olduğunu sovet riyaziyyatçısı S. N. Bernşteyn bir sıra əsaslandırılmışlarla ən mükəmməl surətdə nəzəri cəhətdən öyrənmişdir, yəni o göstərmişdir ki, koordinatlar x və y olan nöqtənin xOy müstəvisinin hər hansı G oblastına düşməsi ehtimalı təqribi olaraq

$$\frac{1}{\Delta} \iint_{\Delta} e^{Q(x,y)} dx dy$$

integralı ilə ifadə olunacaqdır, burada

$$Q(x,y) = \frac{-1}{2(1-R^2)} \left[\frac{(x-m_{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2} + \frac{(y-m_{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2} - \frac{2R(x-m_{\xi})(y-m_{\eta})}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} \right],$$

$$m_{\xi} = M(\xi), \quad m_{\eta} = M(\eta),$$

$$\sigma_{\xi}^2 = M(\xi - M(\xi))^2, \quad \sigma_{\eta}^2 = M(\eta - M(\eta))^2$$

– ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi və dispersiyası,

$\Delta = 2\pi\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}\sqrt{1-R^2}$ və R – ξ və η kəmiyyətlərinin K əmsalıdır –

$$R = \frac{M(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}}.$$

Normal K halında reqressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$y = m_{\eta} + \rho(x - m_{\xi}),$$

burada

$$\rho_{\eta} = R \frac{\sigma_{\eta}}{\sigma_{\xi}},$$

yəni reqressiya əyrisi – düz xəttidir. Normal K halında korrelyasion münasibət $\theta_{\eta\xi}^2$ – korrelyasiya əmsalı R -ə bərabərdir. Normaldan olduqca fərqlənən əlaqələr halında ξ və η arasında asılılıq ölçüsü olaraq, K əmsalının istifadə olunması bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, K əmsalı hətta η -nın ξ -dən asılı olduğu halda belə sıfıra bərabər ola bilər. Bir də onu qeyd edək ki, normal K halında ξ -nin η -ya nəzərən reqressiya tənliyi

$$x = m_{\xi} + \rho_{\xi}(y - m_{\eta})$$

şəkildə ifadə olunur, burada

$$\rho_{\xi} = R \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\eta}}.$$

ρ_{η} və ρ_{ξ} əmsalları η və ξ -yə nəzərən və ξ -nin η -ya nəzərən reqressiya əmsalları adlandırılır. ρ_{η} və ρ_{ξ} -nin işarəsi həmişə eynidir (və R -in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki,

$$R = \pm \sqrt{\rho_{\xi}\rho_{\eta}}.$$

(ξ , η) kəmiyyətlərinin eyni bir ikiölçülü paylanmasına müvafiq müşahidələrin sayı böyük olduqda, yuxarıda təyin edilmiş statistik korrelyasiya əmsalı r , nəzəri korrelyasiya əmsalı R -ə yaxındır. Riyazi statistikada R -in r üzrə təyin olunmasının dəqiq qiymətləndirmə metodları işlənmişdir.

Toplam korrelyasiya. İkiden çox hadisə və ya kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Antropoloji dəyişənlər arasında toplam K aydın ifadə olunmuş şəkildə müşahidə olunur. Bu vəziyyət bir sıra sovet alimlərinin araşdırmalarında şəxsi istifadə əşyalarının (geyimin, ayaqqabının və s.) kütləvi istehsalında əhəlinin tələbatının (geyimin, suvalda öyrənilməsinin) təmin edən standartlar sisteminin hazırlanması üçün zəmin olmuşdur.

Cədvəl 2. Orta diametrləri asılılığı (cədvəl 1-in verilənləri üzrə)

	Hündürlük (m.-lərlə)														Cəmişi
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Şam ağaclarını sayı	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624
Orta diametr (sm.-lərlə)	18,5	18,8	17,7	20	22,9	25	27,2	30,1	32,7	38,3	40	41,8	42,8	43,5	31,2

Bir çox təbiiqi məsələlərdə (məs., məhsulun proqnozlaşdırılması, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti bir sıra məlum kəmiyyətlərlə əlaqələndirilən regressiya tənliklərinin tərtib edilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. Toplam K. halında müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük ədəd olmadığı halda verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq xüsusilə təhlükəlidir. K. nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı regressiya tənliklərinin tərtib olunması üçün, bu və ya digər hallarda, müşahidələrin kifayətedici sayının təyin olunmasıdır.

K. nəzəriyyəsi üzərində qurulmuş nəticələrin əsaslandırılması üçün zəruridir ki: 1) seçilmiş ehtimal sxeminin verilən hadisə və ya prosedə tətbiq edilə bilinməsi əsaslandırılın; 2) toplanılmış materialın reprezentativ olub-olmadığı diqqətlə yoxlanılsın, yəni toplanmış materiallarda döyrənən dəyişənlərin paylanmasının təyin olunacaq ehtimal paylanmasından sistematik yayınması üçün səbəblərin olmadığı yoxlanılsın.

K.-nın ölçülməsində empirik üsulların düzgün tətbiqi – yalnız onun məhiyyətinin, baxılan təzahürlərin təbiətinin düzgün anlaşıldığı halında mümkündür. K. – hadisə və ya proseslərin ümumi əlaqə qanununun təzahürüdür. Onun funksional əlaqədən fərqli «natamam» xarakterinin mənbəi, elə məhz həmin qanundur – başqa şərtlərdən asılılığı mövcud olmasıdır.

Burjua elmi çox vaxt bu natamamlıqdan əlaqə qanununu inkar etmək üçün istifadə edir. İngilis bioloq F. Qalton varislər və əcdadların əlamətləri arasında əlaqəni tədqiq edərək, bütün diqqətini onun natamamlığına yönəltmişdi və nəticədə orta göstəricilərin növünə regressiya «qanununu» almışdı; bu «qanun», daniya bioloqu V. İohansen tərəfindən bu asılılığın tamamilə inkar edilməsi kimi «qanuna» çevrildi və bu da özlüyündə «təmiz xətlərin» dayanıqlılığı haqqında antidarvin nəzəriyyəsinə gətirdi. Digər tərəfdən unutmamaq olmaz ki, iki təzahür (əlamət) arasında K. heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bunlardan biri – səbəb, digəri nəticədir, necə ki, bəzən burjua alimləri bunu aktları tərtib etmək məqsədilə öz istədikləri sənəyə yönəldirlər. K. – yalnız bu əlamətlərdəki dəyişmələrdəki paralelizmi ölçür; bu dəyişikliklərin mənbəi isə üçüncü bir hər hansı faktorun hər iki əlamətə təsiri ola bilər.

Əd.: С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, К., 1912; Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., 1926; Р о м а н о в с к и й В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Теория и методы антропологической стандартизации применительно к массовому производству изделий личного пользования, М., 1951.

RIYAZİ STATİSTİKA – natamam verilənlər üzrə statistik kollektivlərin xassələrinin riyazi təsviri və təyin olunması haqqında elmdir. Hər hansı müəyyən əlamətlərinə görə tam və biricins vəhdətdə birləşmiş, digər əlamətlərinə görə isə qruplara və ya siniflərə bölünmüş (məs., müəyyən bir zaman anında müəyyən bir ölkənin yaş qrupları üzrə bölünmüş əhali) əşyalar və ya təzahürlər çoxluğuna **statistik kollektiv** deyilir. Statistik kollektivin qruplara və ya siniflərə bölgüsünə səbəb əlamətlər statistik kollektivin arqumentləri adlanır. Statistik kollektivin üzvlərinin sayı onun həcmi təşkil edir. Statistik kollektivin ayrı-ayrı qruplarında və ya siniflərindəki üzvlərinin sayı onların elementlərinin sayı və ya onların arqumentlərinin uyğun qiymətlərinin tezlikləri adlanır.

R. s. iki növ məsələyə baxır: təsviri və normativ. Təsviri məsələlər ayrı-ayrı konkret statistik kollektivlərin təsviri ilə həll olunur və bu təsvir

– onların statistik xarakteristikalarının və ya ümumi əlamətlərin (orta qiymətlərinin, dispersiyalarının, momentlərinin və s.) tezliklərin paylanması qanunauyğunluqların və arqumentlərin arasındakı əlaqələrin müəyyənəşdirilməsində ibarətdir. R. s.-nin normativ məsələləri – baxılan statistik kollektiv üçün müəyyən olunmuş xassələrin, bir hissəsi verilən kollektiv olan, lakin daha ümumi döyrənilməmiş kollektivə (ümumi statistik kollektiv) və ya verilən kollektivə analoji kollektivlər toplusuna köçürülə bilinməsi mümkünlüyünü araşdırmaqdan ibarətdir. Bu halda bəzi əlavə şərtlərdə, verilən kollektiv təsadüfi seçim və ya sadəcə olaraq, ümumi kollektivdən seçim adlanır; R. s.-nin mühüm bölmələrindən biri – seçimlər nəzəriyyəsinin əsas problemi ondan ibarətdir ki, seçimin həcmi və xarakteri təyin olunmalı, bunlar əsasında seçim haqqında verilən dəqiqliklə və ehtimalla ümumi çoxluq üçün də istifadə oluna bilsin. Statistik xarakteristikalara orta qiymətlər, dispersiya, momentlə haqqında nəzəriyyədə və statistik xarakteristikaların qiymətləndirmə nəzəriyyəsində baxılır. Statistik kollektivlərin tezliklərinin paylanmasındakı qanunauyğunluqların təsiri ilə paylanma ayrılmasının nəzəriyyəsi, onların arqumentləri arasında əlaqələrin təsviri ilə korrelyasiya və birləşmələr (assosiasiyalar) nəzəriyyəsi məşğul olur.

Orta qiymətlər, dispersiya, momentlər. Statistik kollektivlərin təsvir edilməsindən ibarətdir ki, bu cədvəllərdə kollektivlərin arqumentləri, sinifləri, bu siniflərin elementlərinin sayı və cədvəllərin diaqramm, poliqon, histoqram (pilləvari qrafiklər) və s. şəklində həndəsi təsvirləri göstərilir. Statistik kollektivlərin döyrənilməsində sonrakı ən mühüm vasitə kimi, orta qiymətlərin – statistik kollektivin vəziyyətini təsvir edən statistik xarakteristikaların tərtib olunmasıdır. Məs., birölcülü S statistik kollektivinə (bir miqdar arqumenti bir ədəd olan kollektiv) baxaq, S – aşağıdakı cədvəllə təsvir olunur:

x	$x_1 \ x_2 \dots x_s$	$\sum n_x = n$
n_x	$n_1 \ n_2 \dots n_s$	

bu cədvəldə $x_1, x_2, \dots, x_s$, – x arqumentinin qiymətləri, $n_1, n_2, \dots, n_s$ isə x -in bu qiymətləri müşahidə olunmuş halların sayıdır. S üçün x arqumentinin ədədi orta və ya sadəcə $\bar{x}$ orta qiyməti –

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_x x_s$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və o, ən sadə və geniş yayılmış statistik xarakteristikadır. Orta qiymətlər arasında mühümlərdən biri də medianıdır (bax) və bu xarakteristika arqumentin elə qiyməti ilə təyin olunur ki, x -in S -də bu qiymətdən kiçik və böyük qiymətləri eyni tezliklə təsadüf olunur. Ən çox istifadə olunan bu orta qiymətlərdən başqa, harmonik, həndəsi və s. orta qiymətlərə də baxılır. Mühümlüyü etibarilə növbəti statistik xarakteristikalar – statistik kollektivdə arqumentin qiymətlərinin səpələnmə ölçüləridir: kvadratik orta yayınma, dispersiya, ehtimalı yayınma, mütləq orta yayınma, kvartillər və s. Bu ölçülərdən ən çox istifadə olunanlar kvadratik orta yayınma və dispersiyalar; kvadratik orta yayınma

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum n_x (x_s - \bar{x})^2$$

bərabərliyi ilə, təyin olunur, dispersiya isə σ^2 -na bərabərdir. Əsl kollektivlərin əksəriyyəti üçün kvadratik orta yayınmanın belə bir

xassəsi vardır ki, x -in kollektivdə olan bütün qiymətlərindən 99%, $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ intervalında yerləşir. Beləliklə, σ nə qədər kiçik olarsa, arqumentin qiymətləri onun orta qiyməti ətrafında o qədər çox toplanacaqdır. Hər hansı statistik xarakteristikanın dəqiqliyini və etibarlılığını təyin edir və buna görə də, statistik xarakteristikanın kvadratik orta yayımlarının axtarılması – R. s.-nin mühüm məsələlərindən biridir. Kvadratik orta yayıma və ya $\bar{x}$ orta qiymətinin

kvadratik orta xətası $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ -ə bərabərdir.

Dispersiyanın orta qiymətləri və ölçüləri statistik kollektivlərin öyrənilməsində daha ümumi vasitələrin – *momentlər* adlandırılan xarakteristikaların xüsusi halıdır, bu momentlərdən başlanğıc, mərkəzi və ixtiyari başlanğıc momentləri qeyd etmək olar. Başlanğıc momentlər –

$$m_h = \frac{1}{n} \sum n_x x_s^h$$

bərabərliyi ilə, mərkəzi momentlər –

$$\mu_h = \frac{1}{n} \sum n_x (x_s - \bar{x})^h$$

bərabərliyi ilə, ixtiyari a başlanğıcı ətrafında momentlər –

$$v_h = \frac{1}{n} \sum n_x (x_s - a)^h$$

düsturu ilə təyin olunur; h – momentin tərtibi adlanır və ixtiyari müsbət qiymətlər alır. Birinci başlanğıc moment – $\bar{x}$ orta qiymətidir, ikinci mərkəzi moment – σ^2 dispersiyasıdır, üçüncü mərkəzi momentin vasitəsilə arqumentin paylanması asimmetriyasını ölçən asimmetriya əmsalı – $K = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ qurulur və dördüncü mərkəzi momentin

vasitəsilə paylanmanın yüksək və ya alçaq zirvəli olmasını ölçən eksses

– $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ xarakteristikası (forma xarakteristikası H. M.) qurulur.

Daha yüksək tərtib momentlər R. s.-də çox nadir hallarda istifadə olunur. Yeniliklə R. s.-də momentlərə analogi, onlara nisbətən bəzi üstünlüklərə malik, R. Fişerin kumulyantlarından istifadə etməyə başlamışlar.

Paylanmalar və paylanma ayrılırları. Birölçülü statistik kollektivlərin təsviri üçün digər vasitə – bəzi paylanmalar və *paylanma ayrılırları* (bax). Belə paylanmalardan ən mühümləri – Puassonun binomial paylanması və normal və ya Gauss paylanmasıdır. Birincisi – hər bir sınaqda sabit ehtimalla baş verən, asılı olmayan sınaqlarda hər hansı hadisənin tezliklərinin paylanması ilə müqayisə oluna bilən paylanmaların təsvir olunmasına xidmət edir. İkinci – nadir hadisələr və proseslərin paylanmalarının təsviri üçün istifadə olunur, üç uşaq, dörd uşağın doğulması, radioaktiv maddələrin parçalanmasında α -hissəciklərin buraxılması və s.).

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (A)$$

tənliyi ilə verilən normal paylanma, R. s.-də nəzəri və praktiki, fundamental rol oynayır və çoxsaylı asılı olmayan və ya sanki asılı olmayan səbəblərin təsiri nəticəsində yaranan arqumentlərə toplananlar kimi baxdıqda, bu arqumentlərin paylanmasının təsvirinə xidmət edir (məs., belə arqument insan boyu ola bilər ki, bircins böyük bir kollektiv üçün onun paylanması normal paylanma qanununa dəqiqliklə təbədir). (A) tənliyi həndəsi anlamda, kəsilməz paylanmaların (arqumenti kəsilməz paylanmaların) təsviri üçün paylanma ayrılırlarından biri – normal ayrını ifadə edir. Bu paylanmalar ümumi şəkildə

$$y = n f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada θ_i – verilən konkret paylanma üçün müəyyən qiymətlər alan paylanma parametrləridir. Paylanma ayrısı

vasitəsilə verilmiş α və β sərhədləri arasında arqumentin

qiymətlərinin tənlikləri – $n_{\alpha\beta} = n \int_{\alpha}^{\beta} f dx$ tapılır və paylanma ayrılırları

nəzəriyyəsinin məsələsi – müxtəlif paylanmalar və ya onların sinifləri üçün f funksiyasının uyğun formalarının axtarılması və θ_i parametrlərinin qiymətlərinin axtarılmasının elə üsullarının müəyyənləşdirilməsidir ki, hesablanmış $n_{\alpha\beta}$ tezlikləri verilmiş kollektivin bütün (α, β) sinifləri üçün müşahidə olunmuş tezliklərə mümkün qədər yaxın ola bilsinlər.

Parametrlərin axtarılması üçün ən çox istifadə olunan: ən kiçik kvadrlar üsulu (bax) və momentlər üsuludur. Birinci üsul ondan ibarətdir ki, parametrlərin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar paylanmanın hesablanmış müşahidə olunmuş tezlikləri arasında fərqlərin kvadrları cəminin minimumunu təmin etsin, ikincisi – θ_i -nin elə qiymətlərinin tapılmasından ibarətdir ki, bunlar paylanma ayrısı üzrə və verilmiş paylanma üzrə hesablanmış birinci tərtibdən başlayaraq, $[(S-1)$ -ci tərtibə qədər] momentlərin bərabər olmalarını təmin edə bilsin. 112. Axır vaxtlarda R. Fişerin təklifinə görə ən böyük doğruxaoxşarlıq üsulu tətbiq olunmağa başlanılmışdır, bu metod ondan ibarətdir ki, θ_i parametrlərinin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar müşahidə olunmuş tezliklərə bərabər müşahidə ehtimalına mütənasib olan, doğruxaoxşarlıq kəmiyyətləri adlanan xüsusi bir kəmiyyətin maksimum qiymət olmasını təmin edə bilsin.

$f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ funksiyasının ən çox istifadə olunan formaları – K. Pirsonun

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1x + b_2x^2}$$

differensial tənliyi ilə təyin olunan funksiyadır və Puasson paylanmasına və normal paylanmaya ümumiləşməyə yardımçı – Şarlye sıralarıdır. $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ paylanma ayrısına ümumi kollektivdə arqumentin paylanma qanunu kimi baxıldıqda, f funksiyasının formasının nəzəri əsaslandırılması və θ_i parametrlərinin tapılmış qiymətlərinin qiymətləndirilməsi kimi məsələlər yaranır. f funksiyasının forması ümumi kollektivin real təbiəti haqqında mülahizələr əsasında seçilə bilinər, θ_i parametrlərinin qiymətləndirilməsi ən sadə yolla – onların kvadratik orta xətlərinin axtarılması ilə alınır. Bu qiymətləndirilmə məsələsinin dəqiq həlli o halda alınır ki, araşdırılan konkret paylanmanın verdiyi seçimlərə analogi seçimlərin sonsuz toplusunda θ_i parametrlərinin paylanmasını tapmaq mümkün olun. Paylanma ayrısı tapıldıqda bu ayrı üzrə tezliklər hesablandıqdan sonra belə bir sual doğur: bunlar müşahidə olunmuş tezlikləri nə dərəcədə bərpa edə bilər. Bu məsələnin həlli üçün ən çox Pirsonun uzlaşma kriterisi

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_x - n_x')^2}{n_x'}$$

istifadə olunur, burada, n_x' – hesablanmış və n_x – müşahidə olunmuş tezliklərdir və bu kriteri xüsusi cədvəllərin köməyiylə təsadüfi $n_x - n_x'$ fərqlərinin ehtimallarını tapmağa imkan verir; bu fərqlər müşahidə olunmuş fərqlərin ehtimallarına ya bərabərdir və ya ondan kiçikdir; P kiçik olduqda n_x və n_x' arasında uzlaşma qeyri-kafi hesab olunur.

S e ç i m i m e t o d. R. s.-nin normativ məsələlərinin həlli üçün ən mühüm vasitə – seçimi metodudur. Öyrənilən statistik kollektiv sonsuz və ya olduqca böyük və hərtərəfli statistik araşdırma üçün çətin olduqda və ya hər hansı digər səbəblərə görə hərtərəfli araşdırıla bilinmədikdə

(məs., bu araşdırma obyektlərinin xarab olması və ya tamamilə sıradan çıxması ilə əlaqədar olarsa) ümumi kollektivin yalnız hər hansı bir hissəsi öyrənilir və bu hissə isə elə seçilir ki, bu hissədə öyrənilən arqumentin paylanması onun ümumi kollektivdəki paylanmasına olduqca yaxın olsun. Buna görə seçim müəyyən stoxastik sxemlərə müvafiq aparılır və bu seçimin həcmi qənaətbəxş olmalıdır. R. s.-da yalnız arqumenti normal paylanmaya tabe olan ümumi kollektivdən seçimlər kifayət qədər tam öyrənilmişdir. Bunlar, həm də normal paylanmanın R. s. metodlarında istisna rolu olması cəhətindən çox mühümdür. Müasir R. s.-da kiçik həcmli, yəni həcmi çox kiçik də ola bilən ixtiyari həcmli seçimlər, xüsusilə, mühüm rol oynayır. Bunların nəzəriyyəsinin mühümlüyü ondan aydın olur ki, biologiyada, aqronomiyada, texnikada və s. statistik araşdırmaları əksər hallarda həcmi böyük olmayan kollektivlər verir. Kiçik həcmnin əsas problemi – bu seçimlərdə müxtəlif statistik xarakteristikaların dəqiq paylanmalarının axtarılmasıdır. Məs., arqumenti normal paylanmaya tabe kollektivlərin ixtiyari verilmiş həcmli seçimlərdə orta qiymətin, dispersiyanın və bəzi digər xarakteristikaların paylanmaları məlumdur. Bu paylanmalar ən yeni statistik kriterilərin: *t*-Student, *z*-Fişer və s. kimi kriterilərin və s. yaranmasına səbəb oldu; bunlar da olduqca geniş və hərtərəfli tətbiqlər tapmış bir sıra ən yeni statistik araşdırma metodların əsasını təşkil etmiş oldu.

Çoxözlü statistik kollektivlər – bir neçə arqumentli kriterilərdir. Bunların öyrənilməsində statistik asılılıqların əsas öyrənilmə problemi ilə bağlı bir sıra yeni məsələlər yaranır. Statistik asılılıqlar funksional asılılıqlara qarşı qoyulur və məs., ikik arqument üçün aşağıdakı kimi təyin olunur: əgər *y*-in şərti paylanmaları, yəni *y*-in *x*-in verilmiş qiymətlərinə uyğun palanmaları *x*-in dəyişməsi ilə dəyişirsə, *y* bu halda *x*-dən statistik asılıdır, deyilir (bax, həm də *Korrelyasiya*). Statistik sıraların dayanıqlılıq nəzəriyyəsi, zaman sıraları nəzəriyyəsi və assosiasiya nəzəriyyəsi – statistik kollektivlərin keyfiyyət arqumentləri arasında əlaqəni öyrənən nəzəriyyə də R. s.-ya aiddir.

R. s.-ya aid ilk məsələlər Artıq ya Bernulli və Laplasın əsərlərində. Ehtimal nəzəriyyəsinin ictimai, iqtisadi, mədəni və demografik məsələlərə tətbiqi ilə əlaqədar baxılırdı. Lakin onun banisi A. Kettle (1796-1874) hesab olunur; o, riyazi statistika metodlarını demografiya və antropometriyada tətbiq etmişdi. Müasir R. s.-nın baniləri Fransiz Qalton (1822-1911) və Karl Pirsון (1857-1936) hesab olunur; Qalton korrelyasiya nəzəriyyəsinin və biometriyanın əsasını qoymuş, Pirsון isə bunları geniş surətdə inkişaf etdirərək R. s.-nın bir sıra müasir metodlarını yaratmışdır (momentlər nəzəriyyəsi, paylanma ayrılır, χ^2 -kriterisi və s.). Ən son dövrdə Ronald Fişer statistik xarakteristikaların qiymətləndirilməsinin ümumi nəzəriyyəsinə. Dispersion analiz metodları, kiçik seçimlər nəzəriyyəsi və b.). Son dövrlərin riyaziyyatçı statistiklərindən Qauss və Puasson paylanmalarını ümumiləşdirən sıraları qurmuş Şarlye və A. Çuprovu qeyd etmək olar. R. s.-nın statistikanın riyazi üsullarının aparatı kimi rolu haqqında, bax, *Statistika* məqaləsinə.

Əd.: Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., Математические методы в статистике Сб. ст. под ред. Г. Л. Ритца, пер. и обработ. С. П. Бобров, М., 1927; Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1924; Л а х т и н Л. К., Кривые распределения ..., М., [1922]; Э л ь д е р - т о н В. П., Кривые распределения численностей и корреляция, пер. с англ., М., 1924; С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Р о м а н о в с к и й В. И., Элементы теории корреляции, 2 изд. Ташкент, 1928; Y u l e G. U. An Introduction to the theory of Statistics, 10 ed., L., 1932; F i s h e r R. A., Statistical methods for research workers, 5 ed., L. – Edinburgh, 1934; A n d e r s o n O. N., Einführung in die mathematische Statistik, W., 1935; D a r m o i s G., Statistique mathématique, P., 1928; J o r d a n C h., Statistique mathématique, P., 1927; R i s s e r R. et T r a y n e r d C. E., Les principes de la statistique mathématique, P., 1933.

РИЯЗИ СТАТИСТИКА.

М ү н д ər i c a t:

- I. Riyazi statistikanın predmeti.
- II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi.
- III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları.
- IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi.
- Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması.
- V. Seçimi metod.
- VI. Riyazi statistikanın qarşısındakı məsələləri.
- VII. Tarixi məlumat.

Riyazi statistika – riyaziyyatın bir bölməsidir, elmi və praktik nəticələri üçün statistik verilənlərin sistemləşdirilməsi, yenidən işlənilməsi və istifadə olunmasının riyazi metodlarına həsr olunmuşdur. Burada statistik verilənlər – bu və ya digər əlamətlərə malik, çox və ya az geniş hər hansı çoxluğun obyektləri sayı haqqında məlumatlara deyilir (məs., 1a və 2a cədvəllərində verilənlər belələridir).

I. Riyazi statistikanın predmeti.

Obyektlər çoxluğunun statistik təsviri – bir tərəfdən, çoxluğun obyektlərindən hər birinin fərdi təsviri, digər tərəfdən, çoxluğun onun ümumi – ayrı-ayrı obyektlərə ayrılmasını heç də tələb etməyən xassələri üzrə təsviri arasında aralıq bir vəziyyət tutur. Statistik verilənlər, birinci üsulla müqayisədə çox və ya az dərəcədə heç bir əlamətləri ilə seçilmirlər və yalnız məhz fərdi verilənlər mühüm olan hallarda, məhdud əhəmiyyət kəsb edirlər (məs., müəllim siniflə tanış olarkən, ondan əvvəlki müəllimin qoymuş olduğu əla, yaxşı, kafi və qeyri-kafi qiymətləri ifadə edən ədədlər statistikasında vəziyyət haqqında yalnız olduqca səthi məlumat alacaqdır). Digər tərəfdən çoxluğun kənardan müşahidə olunmuş toplum xassələri haqqında verilənlərlə müqayisədə, statistik verilənlər işin mahiyyətinə daha dərin varmağa yardım edir.

Məs., süxurun granulometrik analizinin verilənləri (yəni süxuru əmələ gətirən hissəciklərin ölçüləri üzrə paylanması haqqında verilənlər) hissələrə ayrılmamış nümunələrinin yoxlanılması ilə müqayisədə dəyərli əlavə informasiya verir və müəyyən dərəcədə onun xassələrini izah etməyə, onun nə cür yaranmasını izah etməyə imkan yaradır.

Obyektlərin bu və ya digər çoxluqları haqqında statistik verilənlərə baxılmasına əsaslanan araşdırma metodu statistik metod adlanır. Statistik metod ən müxtəlif bilik oblaslarında tətbiq olunur. Lakin müxtəlif təbiətli obyektlərə tətbiqdə statistik metodun cəhətləri o qədər özünəməxsusluğu ilə seçilir ki, məs., ictimai-iqtisadi statistikanı [sözün əsl mənasında *statistika* adlandırılan (bax)], fizika statistikanı (bax, *Statistik fizika*), ulduz statistikasını (bax, *Ulduz astronomiyası*) və s. bir elm kimi birləşdirmək mənasız olardı.

Biliyin müxtəlif oblaslarında statistik metodun ümumi cəhətləri bu və ya başqa qruplara daxil olan obyektlərin sayının hesablanmasına, kəmiyyət əlamətlərinin paylanmasının baxılmasına, seçim metodunun tətbiqinə (geniş bir çoxluğun bütün obyektlərinin ətraflı araşdırılması çətin olduğu hallarda), bu və ya digər nəticələrin çıxarılması üçün müşahidələr sayının yetərli olub-olmadığını qiymətləndirdikdə ehtimal nəzəriyyəsinin istifadə olunmasına gətirilir. Araşdırmanın statistik metodlarının məhz bu f o r m a l r i y a z i, öyrənilən obyektlərin spesifik təbiətinə etinasızlıq kimi cəhət R. s.-nın predmetini təşkil edir.

II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi.

R. s.-nın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi müxtəlif hallarda müxtəlif xarakter daşıyır. *Ehtimal nəzəriyyəsi* (bax) kütləvi hadisə və ya prosesləri deyil, təsadüfi hadisə və ya prosesləri, məhz «ehtimali-təsadüfi» hadisə və ya prosesləri, yəni elələri öyrənir ki, onlara uyğun ehtimal paylanmaları haqqında danışmaq mənə kəsb etsin. Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi, ixtiyari təbiətli, ehtimali-təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan belə, kütləvi hadisə və ya proseslərin statistik öyrənilməsində müəyyən rol oynayır. Bu – ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan *seçim metodu* nəzəriyyəsi (bax) və ölçmə xətaləri nəzəriyyəsi (bax, *Xətalər nəzəriyyəsi*) vasitəsilə həyata keçirilir. Bu hallarda ehtimal qanunlarına öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri deyil, onları araşdırma üsulları tabe olur.

Ehtimal nəzəriyyəsi ehtimal hadisələrin statistik araşdırılmasında ən mühüm rol oynayır. Burada R. s.-nin ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan: ehtimali hipotezlərin statistik yoxlanılması nəzəriyyəsi, ehtimal paylanmalarının və bunlara daxil olan parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsi və s. kimi bölmələri tam mənası ilə tətbiqini tapa bilərlər. Bu daha dərin statistik metodların tətbiq oblası olduqca dardır, çünki burada tələb olunur ki, öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri kifayət qədər müəyyən ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsunlar. Məs., radioqəbuledici cihazlarda turbulent su axınlarının və ya fluktuasiyalarının rejiminin statistik öyrənilməsi stasionar ehtimali proseslər (stasionar stoxastik proseslər, H. M., bax) nəzəriyyəsi əsasında aparılır. Lakin həmin nəzəriyyənin iqtisadi zaman sıralarına tətbiqi kobud səhvlərə gətirə bilər, belə ki, bu halda, stasionar prosesin tərifinə daxil edilmiş: uzun müddət ərzində ehtimal paylanmalarının zamandan asılı olmayaraq dəyişməzliyi haqqında fərziyyə, bir qayda olaraq mümkünsüzdür.

Ehtimal qanunauyğunluqları böyük ədədlər qanunu (bax, *Böyük ədədlər qanunu*) əsasında statistik ifadə oluna bilinir (ehtimallar – tezliklər kimi, riyazi gözləmə – orta qiymətlər kimi götürülür).

III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları.

n obyektədən ibarət öyrənilən toplu hər hansı *keyfiyyət* əlaməti A -ya görə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə ayrılır. Bu bölgüyə uyğun *statistik paylanma* ayrı-ayrı siniflərdəki obyektlərin sayı

(«tezlikləri») – $n_1, n_2, \dots, n_r$ $\left(\sum_{i=1}^r n_i = n \right)$ göstərilməklə verilir. n_i -lərin

əvəzinə uyğun – $h_i = \frac{n_i}{n}$ nisbi tezlikləri göstərilir (bunlar isə aydındır

ki, $\sum_{i=1}^r h_i = 1$ şərtini ödəyir). Əgər

Cədvəl 1a – kütləvi məhsulu statistik araşdırılmasında detalın mm.-lərlə diametrinin paylanması.

Diametr	Əsas seçim	1-ci seçim	2-ci seçim	3-cü seçim
13.05–13.09	–	–	1	1
13.10–13.14	2	–	–	–
13.15–13.19	1	–	1	1
13.20–13.24	8	–	–	–
13.25–13.29	17	1	2	1
13.30–13.34	27	1	1	2
13.35–13.39	30	2	3	1
13.40–13.44	37	2	1	1
13.45–13.49	27	1	–	–
13.50–13.54	25	2	1	–
13.55–13.59	17	–	–	–
13.60–13.64	7	1	–	2
13.65–13.69	2	–	–	1
Cəmişi	200	10	10	10
$\bar{x}$	13,416	13,430	13,315	13,385
S^2	2,3910	0,0990	0,1472	0,3602
σ	0,110	0,105	0,128	0,200

Cədvəl 1b – olduqca böyük qruplaşdırma intervalları halında əsas seçimin (cədvəl 1a-dan) detalının diametrinin paylanması.

Diametr	Detalların sayı
13.00–13.24	11
13.25–13.49	138
13.50–13.74	51
Cəmişi	200

hər hansı kəmiyyət dəyişəni öyrənilirsə, onda onun n obyektədən ibarət topludakı paylanmasını həmin dəyişənin müşahidə olunmuş $x_1, x_2, \dots, x_r$ qiymətlərini artan qaydada bilavasitə hesablamqla vermək olar. Lakin n -in böyük qiymətlərində bu olduqca ağır üsuldur və eyni zamanda paylanmanın mühüm xassələrini aydın aşkar etmir (bir kəmiyyət dəyişəni olan paylanmanın ən sadə xarakteristikaları və təsviri üsulları haqqında ətraflı məlumat üçün bax, *Variasion sırası, Paylanmalar*). Praktikiada n -in olduqca böyük qiymətlərində adətən, müşahidə olunmuş olunmuş x_i qiymətlərinin tam cədvəli tərtib olunmur və sonrakı işlərdə bütünlüklə elə cədvəllərdən istifadə olunur ki, müvafiq seçilmiş intervallar üzrə müşahidə olunmuş qiymətləri qruplaşdırıqda, bunlarda yalnız siniflərdəki obyektlərin sayı göstərisin.

Məs., Cədvəl 1a-nın birinci sütununda 0,05 mm uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırılmış detalların diametrlərinin ölçmə nəticələri verilmişdir. Əsas seçim texnoloji prosesin normal gedişatına uyğundur. 1-ci, 2-ci və 3-cü seçimlər istehsalın bu normal gedişatının dayanıqlılığını yoxlamaq üçün bəzi zaman intervallarından bir edilmişdir. Cədvəl 16-da 0,25 mm uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırma detalların əsas seçiminin ölçmə nəticələri verilmişdir. Adətən, hər birində 15-20% x_i qiymətləri olan 10-20 intervallar üzrə

qruplaşdırma, paylanmanın bütün mühüm xassələrinin olduqca tam şəkildə aşkar olunması və paylanmanın əsas xarakteristikalarının etibarlı hesablanması üçün kifayət edir (bunlar barədə aşağıda; bax). Belə qruplaşdırılmış verilənlər üzrə tərtib olunmuş *histoqram* (bax) paylanmanı əyani təsvir edir. Olduqca kiçik qruplaşma əsasında tərtib olunmuş histoqram adətən çoxzırvəli olur və paylanmanın mühüm xassələrini əyani əks etdirmir.

Şəkil 1.-də misal kimi Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənlərinə əsasən 200 diametrin paylanmasının histoqramı, şəkil 3-də həmin paylanmanın 0,01 mm intervalında histoqramı verilmişdir (müvafiq cədvəl böyük olduğundan verilmir).

Digər tərəfdən çox böyük intervallar üzrə qruplaşdırma paylanmanın xarakteri barədə aydın təsəvvürün itməsinə və paylanmanın orta qiyməti və digər xarakteristikalarının hesablanılmasında kobud xətalara səbəb ola bilər (bax, cədvəl 16 və uyğun histoqrama şəkil 2-də).

R. s. çərçivəsində qruplaşdırma intervalları haqqında məsələyə yalnız belə formal cəhətdən baxıla bilinir: paylanmanın riyazi təsvirinin tamlığı, qruplaşdırılmış verilənlər üzrə orta qiymətlərin hesablanması dəqiqliyi və s. Öyrənilən çoxluqdakı keyfiyyətə müxtəlif qruplara ayırmaq məqsədi qruplaşmalar haqqında bax, *Qruplaşdırma, statistikada*.

İki dəyişənin birgə paylanması öyrəniləndə ikigirişli cədvəllər istifadə olunur. İki keyfiyyət dəyişənin birgə paylanmasına misal cədvəl 2a-nı göstərmək olar.

Cədvəl 2a – Moskva Mərkəzi universiteti işçilərinin arasında qripə xəstələnməmiş və xəstələnməmiş qrip əleyhinə zərər almış və almamış işçilərin paylanması (1939).

	Xəstələnməmə	Xəstələnmə	Cəmi
Zərər almış	1675	150	1825
Zərər almamış	497	4	501
Cəmişi	2172	154	2326

Ümumi halda material A əlaməti üzrə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə B əlaməti üzrə $B_1, B_2, \dots, B_s$ siniflərinə ayrıldıqda cədvəl eyni zamanda A_r və B_s siniflərindən olan obyektlərdəki obyektlərin sayı n_{ij} -lərdən ibarət olur.

$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$, $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$ düsturları ilə A_i və B_j siniflərinin özündəki obyektlərin sayı alınır (aydındır ki, $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij} = \sum_{i=1}^r n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{\bullet j} = n$, burada n – öyrənilən toplusunun bütün obyektlərinin sayıdır). Sonradan aparılacaq araşdırmanın məqsədindən asılı olaraq nisbi tezliklərdən bəziləri hesablanır, məs.:

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad h_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \quad h_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n},$$

$$h_{i(j)} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}, \quad h_{(i)j} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}.$$

Məs., qripə xəstələnlərə zərər təsirini öyrənilməsində cədvəl 2a-dan istifadə edərək, cədvəl 2b-də verilmiş nisbi tezlikləri hesablamaq təbiidir.

Cədvəl 2 b – Nisbi tezliklər
(cədvəl 2a-dakı verilənlərə uyğun)

	Xəstələnməyənlər	Xəstələnlər	Cəmişi
Zərər almış	0,918	0,082	1,000
Zərər almamış	0,992	0,008	1,000

İki kəmiyyət dəyişəninə birgə paylanması üçün cədvəllər *Korrelasiya* məq.-də verilmişdir (bax).

Cədvəl 1a qarışıq hala misaldır: material hər hansı bir keyfiyyət əlaməti üzrə (istehsal prosesinin orta səviyyəsinin təyini olunması üçün əsas seçmə aid olunma və bu normal səviyyənin saxlanılmasının yoxlanılması üçün müxtəlif zaman anlarında aparılmış üç seçmə aid olunma) və hər hansı bir kəmiyyət əlaməti üzrə (detalların diametri) qruplaşdırılır.

Bir kəmiyyət əlamətinin (dəyişənin) paylanmasının ən sadə ümumi xarakteristikaları aşağıdakılardır:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

və ya

$$D^2 = \sum_{k=1}^r h_k a_k^2 - \bar{x}^2,$$

burada r – qruplaşdırılma intervallarının sayı, a_k – onların ortaları (cədvəl 1a halında bu ortalar – 13,07; 13,12; 13,17; 13,22 və s.). Əgər material olduqca böyük intervallar üzrə qruplaşdırılmışdırsa, onda belə hesablama olduqca kobud nəticələrə gətirir. Bəzən belə hallarda qruplaşdırma düzəlişlər kimi xüsusi düzəlişlərdən istifadə etmək yaxşı nəticə verir. Lakin bu düzəlişlər yalnız müəyyən ehtimali fərziyyələr şərtində məna kəsb edir.

Müxtəlif tip paylanmalar və onların digər xarakteristikaları barədə bax, *Variation sıra*, *Paylanmalar*. İki və ya daha çox dəyişənlərin (əlamətlərin) birgə paylanması haqqında bax, *Korrelasiya* və *Regressiya*.

IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi. Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması.

Yuxarıda yalnız bəzi seçilmiş ən sadə statistik təsvir üsulları şərh olunmuşdu və bunlar hal-hazırda yaxşı işlənmiş anlayışlar və hesablama texnikası sistemi ilə olduqca geniş bir fənn mövzudur. Statistik təsvirin üsulları maraqlıdır, lakin öz-özlüyündə deyil, yalnız öyrənilən hadisə və ya proseslərin təbii olduqları qanunauyğunluqlar haqqında, bu və ya digər müşahidə olunmuş statistik paylanmalara hər

bir ayrıca halda gətirmiş səbəb haqqında statistik materialdan bir vasitə olaraq maraqlıdır.

Məs., cədvəl 2a-da göstərilən verilənləri belə nəzəri sxemlə əlaqələndirmək təbiidir. Univermanın hər bir işçisinin qripə xəstələnməsini təsadüfi hadisə hesab etmək olar, çünki işin və müayinə olunmuş işçilərin həyatlarının ümumi şərtləri bu və başqa bir işçinin xəstələnməsi faktının özünü deyil, yalnız xəstələnmənin hər hansı ehtimalını (bax) təyin edə bilər. Statistik verilənlərə görə, zərər almış və zərər almamış xəstələnməsi ehtimalları (p_1 və p_0) müxtəlifdir: bu verilənlər p_1 -in p_0 -dan olduqca kiçik olduğunu fərz etməyə əsas verir. R. s.

qarşısında belə məsələ durur: müşahidə olunmuş $h_1 = \frac{4}{501} \approx 0,008$ və

$h_0 = \frac{150}{1825} \approx 0,082$ tezlikləri üzrə p_1 və p_0 ehtimallarını qiymətləndirmək və yoxlamaq ki, statistik material kifayət edirmi ki, $p_1 < p_0$

olduğu qəbul edilməmiş hesab olunsun (yəni zərər olunduqda xəstələnmə ehtimalı həqiqətən azdır). Qoyulmuş suala kafi cavab cədvəl 2a-nın verilənləri halında R. s.-nin incə vasitələri olmadan belə olduqca inandırıcıdır. Lakin olduqca şübhəli hallarda R. s.-da işlənmiş xüsusi kriterilərə müraciət etmək zəruridir.

Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri, istesalatın normal gedişində hesablama üçün diametri 13,40 mm. olan detalların hazırlanmasındakı dəqiqliyin müəyyənəndirilməsi məqsədi ilə toplanılmışdır. Bu halda müəyyən nəzəri mülahizələrlə əsaslandırılmış ən sadə fərziyyə – ayrı-ayrı detalların diametrinə

$$P\{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (1)$$

– normal – ehtimal paylanmalarına təbii təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılmalıdır. Əgər bu fərziyyə doğrudursa, onda a və σ^2 parametrlərinin ehtimal paylanmasının orta qiymətini və dispersiyasını – kifayət qədər dəqiqliklə statistik paylanmanın uyğun xarakteristikaları üzrə qiymətləndirmək olar (müşahidələr sayı olduqca böyük, yəni $n=200$ olduğuna görə). Nəzəri dispersiya – σ^2 üçün

statistik qiyməti kimi $D^2 = \frac{S^2}{n}$ statistik dispersiyasına deyil,

$$s^2 = \frac{S^2}{n-1}$$

– meylsiz statistik qiymətinə üstünlük verilir. Nəzəri kvadratik orta yayınma üçün meylsiz statistik qiymətin ümumi ifadəsi (ixtiyari ehtimal paylanmasında yaraya bilən) yoxdur. σ üçün statistik qiymət kimi (ümumimiyətlə, meylli) əksər hallarda S istifadə olunur. a və σ üçün $\bar{x}$ və s statistik qiymətlərinin dəqiqliyi uyğun dispersiyalarla verilir və bunlar (1) normal paylanması halında aşağıdakı münasibətlərlə verilir:

$$\sigma_a = \frac{\sigma^2}{n} \sim \frac{s^2}{n},$$

$$\sigma_{s^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1} \sim \frac{2s^4}{n},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2n} \sim \frac{s^2}{2n},$$

burada $\sim$ işarəsi n -in böyük qiymətlərində təqribi bərabərliyi ifadə edir. Beləliklə, statistik qiymətlərə $\pm$ işarəsi kvadratik yayınmanı əlavə etməyi şərtləşərək, (1) normal paylanması fərziyyəsində n -in böyük qiymətlərində

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \sigma &= x \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

olduğunu alırıq. Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri halında (2) düsturlarından

$$\alpha = 13,416 \pm 0,008,$$

$$\sigma = 0,110 \pm 0,006$$

alınır. Seçimin $n=200$ olması «böyük seçimlər» nəzəriyyəsinin bu düsturlardan istifadənin qanuniliyi üçün kifayət edicidir.

Nəzəri ehtimal paylanmasının parametrlərinin qiymətləndirilməsi haqqında sonrakı məlumatlar barədə «Statistik qiymətlər», «Etibarlı sərhədlər» məq-nə bax. Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənlərinin köməyiylə paylanmanın normal olduğu, müşahidələrin asılı olmamalı olduğu barədə ilk hipotezləri yoxlaya bilmək üçün üsullar barədə bax, *Paylanmalar, Qeyri-parametrik metodlar, Hipotezlərin statistik yoxlanılması* məq-nə.

Cədvəl 1a-nın sonrakı sütunlarının verilənlərinə baxdıqda, bu sütunların hər birinin 10 ölçmə əsasında tərtib olunduğu nəzərə alınarsa, böyük seçimlər nəzəriyyəsinin düsturlarından yalnız birinci «yanəşmə» kimi istifadə etmək olar, belə ki, bu düsturlar yalnız $n \rightarrow \infty$ olduqda limit düsturları kimi təyin olunmuşdu. α və σ parametrlərinin təqribi statistik qiymətləri olaraq əvvəlki kimi x və s kəmiyyətləri istifadə olunur, lakin bu statistik qiymətlərin dəqiqliyi və etibarlılığı üçün *kiçik seçimlər* (bax) nəzəriyyəsinin tətbiq etmək zəruridir. Cədvəlin birinci sütunu üzrə qiymətləndirilmiş α və σ parametrləri normal üç seçim üçün cədvəl 1a-nın sonuncu sətrində R. s.-nin qaydaları üzrə $\bar{x}$ və s üçün yazılmış qiymətləri müqayisə etdikdə aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olur: birinci seçim istehsal prosesinin gedişatında mühüm dəyişikliklər olacağını fərz etməyə heç bir əsas vermir, ikinci seçim α orta diametrinin azalması nəticəsinə gəlməyə əsas verir (bax, «*Student kriterisi*»), üçüncü seçim – dispersiyasının artması haqqında nəticəyə gətirir (bax, «*Xi-kvadrat kriterisi*»).

Parametrlərin statistik qiymətləri və hipotezlərin yoxlanılması üçün ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan bütün qaydalar yalnız müəyyən $\omega < 1$ – *mühümlük ölçüsü* ilə tətbiq oluna bilər, yəni bu qaydalar $\alpha = 1 - \omega$ ehtimal ilə səhv nəticələrə gətirə bilər. Əgər normal paylanma və nəzəri dispersiyanın məlum olduğu hipotezi ilə α -nı $\bar{x}$ üzrə

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

qaydası üzrə qiymətləndirsək, onda səhv ehtimalı α -ya bərabər olacaqdır və α k ilə aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir (bax, cədvəl 3):

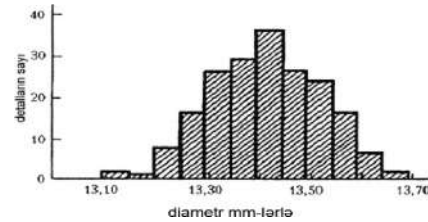
$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

Verilmiş konkret şərtlərdə mühümlük ölçüsünün rəşional seçilməsi haqqında məsələ (məs., kütləvi məhsula statistik nəzarətin qaydalarının işlənilməsində) olduqca mühümdür. Bu zaman mühümlük ölçüsü yalnız yüksək olan (vahidə yaxın) qaydaları tətbiq etmək arzusunə əks olan bir vəziyyət yaranır ki, müşahidələr sayı məhdud olduqda belə qaydalarla yalnız çox zəif nəticələr çıxarılır (bunlar, tezliklərin hiss olunacağı bərabərsizliyində belə ehtimalların bərabərsizliyini müəyyənləşdirməyə imkan vermir və s.).

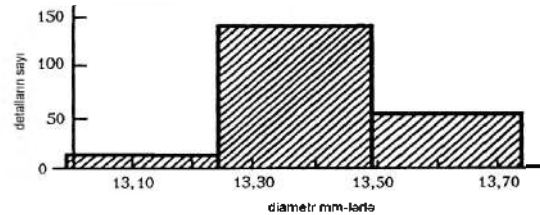
Cədvəl 3 – α və $\omega = 1 - \alpha$ -nın k -dən asılılığı.

k	1,96	2,58	3,00	3,29
α	0,050	0,010	0,003	0,001
ω	0,950	0,990	0,997	0,999

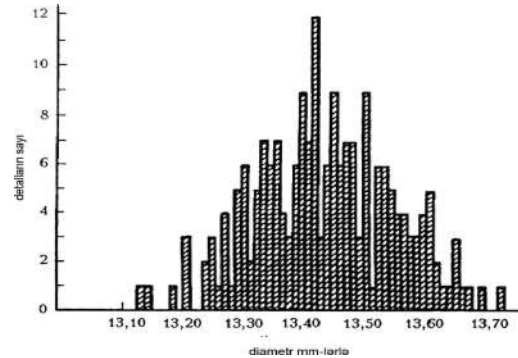
IV bölmədə ehtimal paylanmasının və ya onun parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün n sayda müşahidələrin nəticələrinin *asılı olma mənzili* (lakin bu qeyd olunmamışdı) nəzərdə tutulmuşdu (bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* və xüsusilə də, *asılı olmamalıq*). *Asılı* müşahidələrin istifadəsinə yaxşı öyrənilmiş misal – N obyektəndən ibarət «ümumi çoxluqdan» $n < N$ obyektəndən ibarət aparılmış «seçim» üzrə statistik paylanma və ya parametrlərinin qiymətləndirilməsidir.



Şəkil 1. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histogramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0,05 mm.



Şəkil 2. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histogramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0,5 mm.



Şəkil 3. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histogramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0,01 mm.

V. Seçimi metod.

Terminoloji qeyd. Çox vaxt ehtimal paylanmasının qiymətləndirilməsi üçün aparılmış n sayda müşahidə toplusunu da «seçim» adlandırırlar. IV bölmədə istifadə olunmuş «kiçik seçimlər nəzəriyyəsi» termini bununla izah olunur. Belə terminologiya onunla əlaqələndirilir ki, bir çox hallarda ehtimal paylanması təsəvvürdə fərz olunan sonsuz «ümumi çoxluqdan» statistik paylanma kimi güman olunur və şərti olaraq hesab edilir ki, müşahidə olunan n obyekt bu çoxluqdan «seçilir». Belə fərzlərin aydın bir məgzi yoxdur. Sözün əsl mənasında seçimi metod həmişə ilkin ümumi çoxluğun sonlu olduğunu fərz edir.

Seçimi metodun tətbiqinə aid aşağıdakı misala baxaq. N məlumatdan ibarət partiyada X sayda qüsurludur. Bu partiyadan ixtiyari qaydada $n < N$ məmulatdan idarət seçim aparılır (məs., $n=100$, $N=10000$). Seçimdəki qüsurlu məmulatlar sayı x -in m -ə bərabər olması ehtimalı –

$$P\{x=m\} = \frac{n! (N-n)! X! (N-X)!}{m! (n-m)! (X-m)! (N-X-n+m)! N!}$$

(*hiperhəndəsi paylanma*, H. M., bax)

düsturu ilə təyin olunacaqdır. Beləliklə, x və $h = \frac{x}{n}$ nisbi tezliyi təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, bunların paylanması X parametrlərindən və ya ki, $H = \frac{X}{N}$ parametrlərindən asılıdır. Seçimi h nisbi tezliyi üzrə

H nisbi tezliyinin qiymətləndirilməsi məsələsi, n asılı olmayan sınaqlar halında olduğu kimi, h tezliyi üzrə, P ehtimalının nisbi qiymətləndirilməsi məsələsinə olduqca oxşardır. n -in böyük qiymətlərində, ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində

$$p \sim h$$

təqribi bərabərliyi, nisbi tezliyin qiymətləndirilməsi məsələsində

$$H \sim h$$

təqribi bərabərliyi vahidə yaxın ehtimalla ödənilir. Lakin H -in qiymətləndirilməsi məsələsində düsturlar olduqca mürəkkəbdir, h -in H -dan yayınmaları isə ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində (həmin n qiymətlərində) h -in p -dən yayınmasından orta hesabla bir qədər kiçikdir. Beləliklə, partiyada qüsurlu məmulatların hissəsi H -in n həcmli verilmiş seçimdə qüsurlu məmulatların hissəsi h üzrə qiymətləndirilməsi (N -in ixtiyari qiymətində), n asılı olmayan sınaqlarda p ehtimalının h nisbi tezliyi üzrə qiymətləndirilməsi ilə

müqayisədə bir qədər dəqiq olur. $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$ olduqda seçimlə bağlı

məsələdəki düsturlar p ehtimalının qiymətləndirilməsilə bağlı məsələnin düsturlarına asimptotik olaraq keçir (bax, *Seçimi metod*).

VI. Riyazi statistikanın qarşısındakı məsələləri.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsi və ümumiyyətlə, sabit ehtimal paylanması ilə verilən n sayda asılı olmayan sınaqların nəticələrindən istifadə olunmaqla çıxarılmış statistik nəticələr nəzəriyyəsi və qeyd olunmuş n həcmli seçimlər halı üçün seçimi metod nəzəriyyəsi – R. s.-nın ən çox işlənmiş bölmələri olaraq hesab edilir. Klassik korrelyasiya nəzəriyyəsi asılı olmayan müşahidələr toplusu əsasında, kəmiyyətlər arasında asılılıq öyrənir. Məs., ξ və η kəmiyyətləri arasında asılılıq – hər biri ξ və η kəmiyyətlərinin araşdırılan birgə paylanmasına tabe (x_i, y_i) qiymətlər cütünü verən n sayda, öz aralarında asılı olmayan müşahidələr vasitəsilə araşdırılır. Kəmiyyət dəyişənləri (əlamətləri) arasında asılılıq *dispersion analiz* (bax) köməyi ilə analogi sxem üzrə aparılır.

Asılı müşahidələrin tədqiq metodları, R. s.-da, yalnız zaman sıraları nəzəriyyəsində, əsas etibarilə, onların stasionarlığının olduqca məhdudlaşdığı hallarında dərin surətdə işlənmişdi. (bax, *Stasionar ehtimalı (stoxastik H. M.) proseslər*). Statistik eksperimentin planlaşdırılması da böyük əzəmiyyətə malikdir. Ən sadə halda bu – verilən mühümlük ölçüsü ilə tələb olunan dəqiqliklə və təmizləmə nəticələrin alınması üçün zəruri olan, müşahidələr sayı n -in təyin olunması məsələsidir. Lakin çox vaxt müşahidələr sayını aprior təyin etmək mümkün olunur (və ya məqsədəuyğun olunur, beləki müşahidələr sayını əvvəlcədən qeyd etmədik və onu yalnız eksperimentin gedişində təyin etdikdə, onun riyazi gözləməsini azaltmaq mümkündür). Müşahidələr sayı əvvəlcədən qeyd olunmayan, lakin eksperimentin gedişində təyin olunan statistik eksperimentin metodlarını, hazırda ümumi – *ardıcıl analiz* adı altında birləşdirilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, bu növ ən sadə üsullar çoxdan işlənmişdi [bax, məs., *Statistik qəbul nəzarəti* məq.-də ikiqat seçim metodu]. Ciddi dedikdə, kütləvi məhsul nəzarətin statistik metodları – R. s.-nın hələ təşəkkül tapmamış bölməsinin təbii oblasıdır; bu oblası seçimi statistik verilənlər üzrə proseslərin tənzimləməsi problemlərinə həsr olmuşdur və burada statistik qaydalar, verilmiş mühümlük ölçüsünə görə nəticələrin alınması məsələsilə deyil, tənzimlənən prosesin müəyyən gedişatının təmin olunması

məsələsilə diktə olunur (məs., məhsulun keyfiyyətinin verilmiş səviyyəsinə zəmanət verən istehsal rejiminin müəyyənləşdirilməsi).

VII. Tarixi məlumat.

R. s.-nın ilkin əsaslarını, artıq, ehtimal nəzəriyyəsinin təməlini qoymuş alimlərin – İsveçrə riyaziyyatçısı Y. Bernulli (XVII əsrin sonu – XVIII əsrin əvvəli), fransız riyaziyyatçıları P. Laplas (XVIII əsrin 2-ci yarısı – XIX əsrin başlanğıcı) və S. Puassonun (XIX əsrin 1-ci yarısı) əsərlərində tapmaq olurdur. Rusiyada V. Y. Bunyakovski (1846) ehtimal nəzəriyyəsinin əsasında R. s.-nın metodlarını demografiya və sığorta məsələlərinə tətbiq etməklə inkişaf etdirdi. R. s.-nın bütün sonrakı inkişafında XIX əsrin 2-ci yarısı – XX əsrin başlanğıcı dövründə rus klassik ehtimal nəzəriyyəsi məktəbinin işləri həlledici rol oynadı (P. L. Çebışev, A. A. Markov, A. M. Lyapunov, S. N. Bernşteyn). Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri mahiyyət etibarilə xətlər nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlarda metodunun əsasında işlənmişdir [alman riyaziyyatçısı K. Qauss (XIX əsrin 1-ci yarısı) və rus riyaziyyatçısı A. A. Markov (XIX-un sonu – XX əsrin başlanğıcı)]. Burjuva ədəbiyyatında əksər hallarda R. s.-nın baniləri kimi adlandırılan A. Kettle (XIX ə., Belçika), F. Qalton (XIX ə., İngiltərə) və K. Pirsonun (XIX-in sonu – XX əsrin başlanğıcı) işləri çox böyük əhəmiyyətə malik idi, lakin ehtimal nəzəriyyəsinin nailiyyətlərindən istifadə səviyyəsinə görə rus məktəbinin işlərindən geri qalırdı, lakin R. s. metodlarının ictimai və bioloji elmlərdə istifadə sahəsində onların işləri mürtəcə istiqamətli idi. R. s. metodlarının təbii üçün zəruri olan funksiyalar cədvəllərini tərtibi üzrə geniş işlər K. Pirson tərəfindən aparılırdı. Kiçik seçimlər nəzəriyyəsinin, hipotezlərin yoxlanılması və statistik qiymətləndirilməsi, ardıcıl analiz ümumi nəzəriyyəsinin yaradılmasında ingilis-amerikan məktəbinin olduqca gənc nümayəndələrinin [Styudent (təxəllüsü V. Qosset), R. Fişer, E. Prison – İngiltərə, Y. Neyman, A. Vald – ABŞ] rolu olduqca mühümdür; onlar fəaliyyətə 20-ci əsrin 20-ci illərində başlamışdılar. SSRİ-də R. s. sahəsində V. İ. Romonovski, Y. Y. Slutski mühüm nəticələr almışdı: Y. Y. Slutski stasionar sıralarla bağlı statistika üzrə mühüm işlər görmüşdür, N. V. Smirnov R. s.-nın qeyri-parametrik nəzəriyyəsinin əsaslarını qoyaraq, mühüm nəticələr almışdı: R. s.-nın əsasında kütləvi istehsalın tədqiqi və nəzarətinin statistik metodları, hidrologiya sahəsində, iqlimşünaslıqda, ulduz astronomiyasında və s. statistik metodlar xüsusi bir intensivliklə işlənmişdi. Sovet alimləri R. s. sahəsində burjuva elm məktəblərinin səhv metodoloji qoyuluşu, formalizmi və sadələşməni tənqid edirdilər. Biologiya və ictimai elmlərə R. s.-nın tətbiqi məsələlərinə sovet elmində yenidən baxılmışdı, bu elmlərdə burjuva alimləri axtarılan məqsədlərdə R. s.-nın formal metodlarından xüsusilə tez-tez istifadə edirdilər.

Əd. Р о м а н о в с к и й В. И. Элементарный курс математической статистики, М., – Л., 1939; М и т р о п о л ь с к и й А. К., Техника статистического исследования, М., – Л., 1931; е г о ж е, Статистическое исследование, т. 1-2, Л., 1952; Д л и н А. М., Математическая статистика в технике, 2 изд., М., 1951; Б о р д а ч е в Н. А. и Ж у р а в л е в А. Н., Статистические методы анализа и контроля качества продукции, хода технологического процесса и состояния производственного оборудования, в кн.: Машиностроение. Энциклопедический справочник, т.15, М., 1950 (стр. 597-647); Р о м а н о в с к и й В. И., Математическая статистика, М., – Л., 1938; К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; А р л е й Н. и Б у х К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; P e a r s o n K., Tables for statisticians and biometricians, pt 1-2, L., 1930-31; K e n d a l l M. G., The advanced theory of statistics, v. 1-2, L., 1948; H a l d A., Statistical theory with engineering applications, N. Y. – L., 1952; е г о ж е, Statistical tables and formulas, N. Y., 1952.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÜSULU – təqribi hesablamalar metodudur, əsas məsələsi – bir və ya bir neçə naməlum kəmiyyətin axtarılmasıdır; bu kəmiyyətlərin əsl qiymətlərinə ən yaxın olanları – axtarılan kəmiyyətlərlə ifadə olunan digər kəmiyyətlərin ölçmə qiymətləri və hesablanmış qiymətlər arasındakı fərqlər kvadratlının

minimumunu təmin edən qiymətlərdir. Məs., $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ ölçmə qiymətlərinin təyin olunacaq $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymətlərindən müəyyən şəkildə asılı olduğu, yəni bunların funksiyaları olduğu fərz olunur:

$$y'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Fərz edək ki, müşahidələrin sayı (n), naməlum kəmiyyətlərin sayından (m) çoxdur. Fərz olunur ki, bu müşahidələrdə (n müşahidə xətalari ilə birlikdə) $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ kəmiyyətləri üçün $y_1, y_2, \dots, y_n$ nəticələri alınmışdır. Fərz edək ki, ölçmələrin hamısı eynilə dəqiq deyildir və onların nisbi dəyərləri $p_1, p_2, \dots, p_n$ çəkiliyi ilə qiymətləndirilir və bu çəki uyğun ölçmə xətalərinin kvadratik ortalarının kvadratlara tərs mütənasib, hər hansı müsbət ədədlərdir; p_i kimi həmçinin xüsusi, dəqiq elə ölçmələrin sayını göstərmək olar ki, y_i - onlardan ortada olanlarıdır. İndi isə y -in ölçmə qiymətlərinin hesablanmış qiymətlərdən yayımlarının çəkili kvadratlının cəmi olan $S = \sum p_i (y_i - y'_i)^2$ cəmini götürək. Onda naməlum $x_1, x_2, \dots, x_m$ kəmiyyətlərinin axtarılması üçün Ə. k. k. ü. ondan ibarətdir ki, onlar üçün ən yaxşı elə yaxın qiymətləri götürülür ki, onlar S cəminin minimumunu təmin etmiş olsunlar. Bu qiymətlər, differensial hesabın məlum qaydalarına əsasən

$$\sum_{i=1}^n p_i (y_i - y'_i) \frac{\partial y'_i}{\partial x_h} = 0$$

tənliklərdən tapılır; bu tənliklər $\frac{\partial y'_i}{\partial x_h}$ törəmələrini sıfıra bərabər götürməklə alınır və normal tənliklər adlanırlar.

Əgər f_i funksiyaları

$$\bar{y} = a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \dots + a_m^{(i)} x_m, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tənliklərinə görə xətti funksiyalardursa, onda normal tənliklər $x_1, x_2, \dots, x_m$ -ə görə xətti tənliklər sistemi olur və bu tənliklərin həlli yaxşı məlumdur və çox və ya az dərəcədə asan yerinə yetirilə bilər.

Əgər f_i funksiyaları $x_1, x_2, \dots, x_m$ -ə görə xətti funksiyalar olmasalar, onda normal tənliklərin həlli çox çətin ola bilər. Beləliklə, Ə. k. k. ü. ən böyük uğurla və ən çox halda gətirilə bilirdikdə tətbiq oluna bilər. Məsələn, dəmirin maqnitləşdirilməsində meydana gəlinliyi H maqnit induksiya B ilə $B = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$ şəkildə bərabərliklə əlaqədirlər.

burada x_1 və x_2 ölçmə yolu ilə B və H -in alınmış qiymətlərinə görə tapılmalıdır. Burada $f = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$, - x_1 və x_2 -nin qeyri-xətti funksiyasıdır. Lakin bizim bu tənliyimizi asanlıqla ona ekvivalent olan

$\frac{1}{B} = \frac{1}{H} x_1 + x_2$ tənliyinə çevirmək olar ki, burada $\frac{1}{B}$ və $\frac{1}{H}$, - B və H ilə birlikdə məlum olacaqlar və x_1 və x_2 isə bu tənliyə artıq xətti olaraq daxil olur. Ə. k. k. ü. ən çox xətlər nəzəriyyəsinə tətbiqdə işlənmişdir. Bu nəzəriyyə onun əsas tətbiqlərinə baxaq.

Bir naməlum olan hal. Fərz olunur ki, naməlum x kəmiyyətinin axtarılması üçün n sayda asılı olmayan müşahidə aparılmışdır. Əgər p_i ilə aparılan ölçmələrin çəkiliyi işarə olunarsa,

onda Ə. k. k. ü.-na əsasən, x -in $\sum_{i=1}^n p_i (x_i - x)^2$ cəmini minimuma

çevirə bilən təqribi qiyməti $\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$ olacaqdır. p_i çəkiliyi x_i

qiymətlərinin kvadratik orta xətalərinin kvadratlara tərs mütənasibdirlər, yəni $p_i = \frac{K}{\sigma_i^2}$, burada $\sigma_i^2 = M(x_0 - x'_i)^2$, x_0 , - x'_i

tesadüfi dəyişənin riyazi gözləməsidir, x'_i , - x -in i -ci ölçmə nəticəsindəki mümkün qiymətidir. Ölçülərdə sabit xəta olmaqla x_0 kəmiyyəti x -in əsl qiyməti kimi götürülür. x kəmiyyəti üçün alınmış təqribi $\bar{x}$ qiymətinin çəkisi $P = \sum p_i$ bərabərliyi ilə təyin

olunur, $x_0 \approx \bar{x}$ təqribi bərabərliyinin kvadratik orta xətası $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{P}}$

düsturu ilə verilir, burada σ - ayrıca bir ölçmənin kvadratik orta xətası vahid çəki ilə ifadə edir və

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

təqribi bərabərliyi ilə təyin olunur.

Bezi əlavə fərziyyələrlə göstərmək olar ki, $x_0 - \bar{x}$ fərqi orta xəta və σ_x^2 dispersiyasına malik normal paylanma qanununa tabedir, məs., $x_0 - \bar{x}$ xətasına, bir-birindən asılı olmayan çoxsaylı faktorların eyni zamanda təsirindən yaranan biri digərindən asılı olmayan eyni kiçik tərtibli çoxsayda elementar xətlər cəmi kimi baxmaq olar. Bu halda, $x_0 - \bar{x}$ xətasının paylanma qanununun məlum olması - $\bar{x}$ və x_0 arasında mümkün ola bilən müxtəlif yayımların ehtimalları ehtimalların integral cədvəlləri üzrə hesablanmasına və beləliklə də, x kəmiyyətinin alınmış təqribi qiymətinin dəqiqliyi dərəcəsini də qiymətləndirməyə imkan yaradır.

Çoxsayda naməlumlar olan hal. Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan, $p_1, p_2, \dots, p_n$ çəkiliyi ölçmələr nəticəsində y kəmiyyəti isə naməlum $x_1, x_2, \dots, x_m$ kəmiyyətləri ilə $y = a_1 x + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$ xətti münasibətilə əlaqədardır, $m < n$, $a_1, a_2, \dots, a_m$ parametrləri isə bizim ölçmələrimiz üçün dəqiq, biza məlum olan $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) qiymətlərin alır. Bu halda x_i üçün Ə. k. k. ü. ilə ən yaxşı təqribi qiymətlərin tapılması - onların

$$\sum_{i=1}^n p_i (y_i - a_1^{(i)} x_1 - \dots - a_m^{(i)} x_m)^2$$

cəminə minimum verə bilən qiymətlərin tapılmasına gətirilir.

Bu qiymətlər aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$x_1 \sum p_i a_1^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_1^{(i)} a_2^{(i)} + \dots + x_m \sum p_i a_1^{(i)} a_m^{(i)} = x_1 \sum p_i y_i a_1^{(i)}$$

$$x_1 \sum p_i a_m^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_m^{(i)} a_2^{(i)} + \dots + x_m \sum p_i a_m^{(i)} a_m^{(i)} = x_1 \sum p_i y_i a_m^{(i)}$$

$\bar{x}_n$ -in təqribi alınmış qiymətlərinin çəkiliyi $\frac{\Delta}{\Delta_{hh}}$ -a bərabərdir, burada

Δ - normal tənliklərdə $x_1, x_2, \dots, x_m$ -lərin əmsallarından tərtib olunmuş determinant, Δ_{hh} isə $\sum p_i a_h^{(i)} a_h^{(i)}$ elementinə uyğun bu determinantın minorudur; x_h^0 , - x_h -in gerçək qiyməti olsun, onda $x_h^0 \approx \bar{x}_h$ təqribi bərabərliyinin kvadratik orta xətası -

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{\sum p_i \lambda_i^2}{n-m} \frac{\Delta_{hh}}{\Delta}}$$

olacaqdır, burada $\lambda_i = y_i - \sum_{h=1}^m a_h^{(i)} \bar{x}_h$.

İndi araşdırdığımız məsələnin xüsusi halı – y və x kəmiyyətləri arasında empirik əlaqənin parabolik əyri şəklinə salınmasıdır, yəni bu kəmiyyətlər üçün müşahidə və ölçmələr nəticəsində y_i , x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) cütləri n_i tezlikləri ilə alınmışdır, yəni Ə. k. k. ü.-na əsasən y və x arasında $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ($m < n$) şəklində (burada $a_1, a_2, \dots, a_m$ naməlum kəmiyyətlər fərz olunur) ən yaxşı təqribi asılılığın axtarılması ilə aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$S_0a_0 + S_1a_1 + \dots + S_ma_m = T_0,$$

$$S_1a_0 + S_2a_1 + \dots + S_{m+1}a_m = T_1,$$

.....

$$S_ma_0 + S_{m+1}a_1 + \dots + S_{2m}a_m = T_m,$$

burada

$$S_0 = \sum n_i, \quad S_1 = \sum n_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i x_i^2 \text{ və s.},$$

$$T_0 = \sum n_i y_i, \quad T_1 = \sum n_i y_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i y_i x_i^2 \text{ və s.}$$

Əgər biz $a_1, a_2, \dots, a_m$ -lərin

$$\sum n_i (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

cəminə minimum verən qiymətləri axtarsaq, bu normal tənliklər alınır.

Sonda qeyd edək ki, Ə. k. k. ü.-nin baniləri Qauss və Lejandr olmuşdur. Lejandr Ə. k. k. ü.-ni ilk dəfə özünün «*Nowelles méthodes pour la détermination des comètes*» (1805-06) əsərində daxil etmişdir. Bu üsulu Qauss Lejandrdan asılı olmadan kəşf etmiş və onu özünün məşhur «*Theoria motus corporum coelestium*» (1809) əsərində nəşr etdirmişdir. Ə.k.k.ü.-nin ilk elmi əsaslandırılması Qaussa aiddir; o, bunu ədədi orta prinsipindən xətlərin normal paylanması qanununun köməyi ilə etmişdir. Sonrakı Ə. k. k. ü. ilə bir çox tədqiqatçılar, o cümlədən, Laplas, Qlişer, Enke, Bessel, A. A. Markov və b. məşğul olmuşlar. Ə. k. k. ü.-nin ən ciddi və gözəl əsaslandırmalarından biri Markova aiddir.

Əd.: М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924, гл. VII; К р ы л о в А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3 изд., Л. – М., 1935; Ш и л о в П. И., Способ наименьших квадратов, 2 изд., М., 1936; Ч е б о т а р е в А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, 2 изд., М., 1936; G a u s s C. F r., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, B., 1887; D e l t h e i l R., Erreureset moindres carrés, P., 1930.

A

Abel integral tənliyi 7
 - qrupu 8
 - teoremləri 8
 - tipli teoremlər 8
Abstrakt erqodik teorem 9
 - həlledici qayda 9
Açıq xidmət sistemi 9
 - təsadüfi çoxluq 9
Açım(i) seçimin 9
Adamar matrisi 9
Adaptasiya alqoritmı 9
Adaptə olunmuş (uzlaşdırılmış) təsadüfi proses 9
F – **Adaptiv** funksiya 9
 - idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı 9
 - prosedur 9
 - statistik qiymət 9
Addım(ı) paylanmanın 9
 - vuruğu 10
Addımı, arifmetik paylanmanın 10
Additiv funksional integral tip-
 li 10
 - (i) Markov prosesinin 10
 - (i) Viner prosesinin 10
 - funksiya 10
 - funksiyası çoxluqları 10
 - küy 10
 - məsələlər(i) ədədlər nəzəri-
 yəsinin 10
 - model 11
 σ – ölçü 11
 - təsadüfi proses 11
Affin şəyp 11
Ağac(i) imtinalar 11
 - təsadüfi 11
Ağacvari xətti kod 11
 - kod 11
Axin 11
 - Bernulli axını 11
 - kəsilməz 11
 - ölçülən 11
K – **Axin** 11
 - parametri 11
Axını σ – cəbrlərin 11
Axının intensivliyi 12
Axırıncı gələne ilk xidmət (AGİX)
 12
Akaike informasiya kriterisi 12
 - kriterisi 12
**Aksiomatik kvant meydan nəzəri-
 yəsi** 12
Aktiv dəyişən 12
 - eksperiment 12
Aldous – Rebollo şərti 12
Aleksandrov fəzası 12
 - teoremi 12
Alfa – eksessiv funksiya 13
 - faktor analiz 13
 - nüvəsi, potensialların 13
 - potensial 13
Alqoritmik entropiya 13
Alle paradoksu 14
Alt pillə anı 14
 - boyu 14
 - indeksi 14
 - təsadüfi kəmiyyətləri 14
Alternativ 14
 - hipotez 14
 - meteoroloji proqnoz 14
Alternənən bərpə prosesi 14
Altproses 15

**Altsinfi, vəziyyətlərin Markov
 zəncirinin** 15
Altşəbəbə 15
Amplitud modulyasiya 15
Amplitud – modulyasiyalanmış
 harmonik rəqs 16
 - impulsal proses 16
 - təsadüfi proses 16
 - tezlikli xarakteristika 17
Analitik xarakteristik funksiya 17
Analoqlar metodu 17
Anderson bərabərsizliyi 17
 - Yensen teoremi 18
Andre inikas prinsipi 18
An(i) dayanmanın 18
Ani spektral sıxlıq 8
 - vəziyyət 18
Anosov dinamik sistemi 18
Ansari – Bredli kriterisi 18
Antiferromaqnit model 18
Antisimmetrik Fok fəzası 19
 - seçmə metodu 19
Antitetik dəyişənlər metodu 19
Aparı əmsalı 19
 - əmsalları 19
 - vektoru 19
Aparıcı funksiya 19
 - ölçüsü, axının 19
Aposterior ehtimal 19
 - orta qiymət 19
 - paylanma 19
 - risk(i) həlledici funksiya-
 nın 20
Approksimasiya teoremi 20
**Approksimasiyası, mürəkkəb pay-
 lanmaların daha sadələ-
 rilə** 20
(K, Φ) – **approksiməedici funksio-
 nal** 20
Approksiməolunan hadisə 20
Aprior ehtimal 20
 - informasiya 20
 - informasiyadan istifadə 20
 - paylanma 20
 - risk(i) həlledici funksiya-
 nın 21
Ardıcıl analiz 21
 - dekodla(n)ma 24
 - etibarlı sərhədlər 25
 - kriterisi ehtimallar nisbətinin 26
 - qiymətləndirmə 27
 - qiymətləndirmə planı 27
 - planlaşdırılması, eksperimentlərin 27
 - simpleks metod 29
 - statistik qiymət 29
 - statistik qiymətlər 29
 - struktur 29
 - yoxlanılması, hipotezlərin 30
Arifmetik modeləşdirmə(s)i təsa-
 düfi proseslərin 31
 - paylanma 31
**Arifmetikası, ehtimal paylanmaları-
 nın** 31
ARİSO – proses 31
Arksinus qanunu 31
 - paylanması 32
Arktangens qanunu təsadüfi
 matrislər üçün 32
Aronşayn – Kolmoqorov teoremi 32
ARSO – prosesi 32
Artan təsadüfi proses 32
Artım nöqtəsi 33
Asılı hadisələr(i) 33
Asılı olmamazlıq 33

- xassəsi, hadisələr sinfinin 35
 - kriterisi 35
 - olmayan (statistik asılı olmayan) hadi-
 sələr 36
**Asılı olmayan hadisələr külliyyat-
 ı** 36
 - cəbrləri 36
 - cəbrləri, P ehtimalına nəzərən 36
 - σ – cəbrləri 36
 - P ehtimalına nəzərən 36
Asılı olmayan hadisələr sinifləri 36
 - külliyyatı 36
 - seyrəklənmə(s)i nöqtəvi pro-
 sesin 36
 - sınaqlar 36
 - sınaqların effektiv / ekvivalent sayı
 37
 - spektral tipi, ölçülərin 37
Asılı olmayan təsadüfi hadisələr 37
 - cüt-cüt 37
 - yerindəyişmə(s)i nöqtəvi pro-
 sesin 37
 - sınaqlar 37
Asılılıq 37
 - radiusu 38
Asimmetrik kanal 38
Asimetriya əmsalı 38
Asimetriyası, paylanmanın 39
Asimptotik asılı olmamazlıq 39
 - olmayan təsadüfi kəmiyyətlər 39
Asimptotik ayrılış 39
 - (i) paylanmanın 40
 - (i) statistik qiymətin ris-
 kin 41
 - (i) statistik qiymətlərin 41
Asimptotik Beyes kriterisi 41
 - birgə effektiv statistik qiymətlər ardıcıl-
 lığı 41
 - çoxalması, vəziyyətlərin Markov
 zəncirinin 42
 - dayanıqlılıq ehtimala görə 42
 - defekt 42
 - effektiv statistik qiymət 42
 - effektivlik(y) kriterinin 42
**Asimptotik effektivliyi, statistik qiy-
 mələrin** Bahadur görə 43
 - Raoya görə 43
 - Volfovitşə görə 43
 - əhəmiyyətsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıl-
 lığı 44
 - əhəmiyyətsizlik 44
 - ən güclü kriteri 44
 - ən güclü meylsiz kriteri 44
 - qiymətləndirmə nəzəriyyəsi 44
 - meylsiz kriteri 48
 - meylsiz statistik qiymət 48
 - məqbuluğu(ş)u statistik krite-
 rinin 49
Asimptotik minimaks kriteri 49
 - statistik qiymət 49
Asimptotik müntəzəm ən güclü
 kriteri 49
 - paylanma 49
Asimptotik nisbi effektivlik Bahadur
 görə 50
 - Hoces–Lemana görə 50
 - Pitmanə görə 50
Asimptotik normal ardıcılıq 50
 - çevirmə 50
 - statistik qiymət 50
 - təsadüfi kəmiyyətlər 51
 - normallıq 51
 - optimal kriteri 51
 - Pirson çevirməsi 51

- plan 51
- sıxlıq(ğ) çoxluğun 51
- Asinxron** çoxgirişli kanal 51
- kanal 51
- Assosiyalanmış spektri, prosesin** 51
- Asta dəyişən funksiya** 51
- Aşağı dəyəri** (qiyməti), oyunun 51
- etibarlı sərhəd 51
- kvartil 51
- limit(i) təsadüfi hadisələr ardıcılığıının 51
- Asimptotik sərhəd(i)** təsadüfi hadisələr ardıcılığıının 52
- funksionalı 52
- Aşkarlanma məsələsi, pozulmanın** 52
- Aşma** 52
- Aşma – enmə** 52
- müddəti 52
- Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın** 52
- Atom** 54
- Atomik komponent** 54
- ölçü 54
- paylanma 55
- Atsiklik / Aperiodik Markov zənciri** 55
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 55
- Attraktor** 55
- Avtoinformativlik ölçüsü** 55
- Avtokorreqram(i)** təsadüfi prosesin 55
- Avtokorelyasion funksiya** 55
- Avtokorelyasiya(s i)** təsadüfi prosesin 55
- funksiyası, xüsusi 55
- Avtokovariasion funksiya** 55
- Avtokovariasiya(s i)** təsadüfi prosesin 56
- xüsusi avtokovariasiya funksiyası 56
- Avtomat ehtimalı** 56
- Avtomatik təsnifat** 56
- Avtomodel limiti, paylanmanın** 56
- limiti, təsadüfi meydanın 56
- paylanması, vəziyyətlərin 56
- proses 56
- Avtomodellik** 56
- tənlilikləri 56
- **Avtomorfizm(i)** ölçülü fəzanın 56
- sıfır modulu üzrə 56
- K – **Avtomorfizm** 56
- Avtoreqressiv** – inteqrallanan sürüşən orta proses 56
- model 57
- proses 57
- proses kəsri tərtibli 57
- spektral statistik qiymət 57
- Avtoreqressiya** 57
- Ayırdetmə zolağı və hesablama zolağı** 58
- A – **ayırıcı plan** 58
- Ayrılan ehtiyatda saxlama** 58
- xarakteristik funksiya 58
- Markov zənciri 58
- şəxələnən proses 58
- Ayrılanlıq** 59
- kriterisi 59
- Ayrılış qanunu** 59
- Ayrılmayan paylanma** 59
- şəxələnən proses 59

B

- Bakster teoremi** 61
- Balanslanmış blok plan** 61
- Banax fazası** dayanıqlı p tip 61
- Sazonov xassəli 61
- L_P^n -ni özündə muntəzəm saxlayan 61
- PIP xassəli 62
- p kotip 62
- p tip 62
- Banax – Mazur məsafəsi** 63
- Barimarkəz(i)** ehtimal ölçüsünün 63
- Bartl – Danford – Şvarts teoremi** 63
- Bartlett** korrelyasion pəncərəsi 63
- kriterisi 63
- statistik qiyməti 63
- Bartlett – Şeffe kriterisi** 63
- Baş komponentlər analizi** 63
- metodu 64
- Bayes düsturu** 64
- BBQKİ tənliliklər zənciri** 64
- Bell ədədləri** 64
- Bellman optimalıq prinsipi** 64
- tənliliyi 64
- – Harris prosesi 64
- Belyayev alternativi** 64
- Benford qanunu** 64
- Ber σ – cəbri** 64
- çoxluğu 64
- funksiyası 64
- ölçüsü 64
- sinfi 65
- təsnifatı 65
- Berens – Fişer problemi** 65
- Berq metodu** avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün 65
- Berlinq bərabərsizliyi** 65
- Bernşteyn bərabərsizliyi** 65
- teoremi 66
- Bernulli axını** 66
- ardıcılığı 66
- avtomorfizmi 66
- dolaşması 66
- endomorfizmi 67
- ədədləri 68
- paylanması 68
- sxemi 68
- sınaqları 68
- teoremi 69
- təsadüfi kəmiyyəti 69
- vektoru 69
- yerinidəyişməsi 69
- Berr paylanması** 70
- Berri – Esseen bərabərsizliyi** 70
- teoremi 70
- Bertran məsələsi** 71
- paradoksu 71
- Bessel operatoru** 71
- prosesi 71
- Beta** – approksimasiya 71
- – paylanma 72
- – paylanma çoxölçülü 73
- Beyes düsturu** 73
- həlledici funksiyası 73
- həlledici qaydası 73
- həlli 73
- kriterisi 73
- ölçməsi 73
- prinsipi 74
- reqressiyası 74
- riski 74
- statistik qiyməti 74
- strategiyası 74
- Beyes yanaşması** 74
- empirik 74
- statistik məsələlərə 76
- yayınması 77
- Bərabərçəkili dinamik sistem** 77
- paylanma 77
- potensial 77
- statistik mexanika 77
- Bərabərehtimallı yerləşmə sxemi, hissəciklərin; qruplarla yerləşmənin bərabərehtimallı sxemi** 77
- yerləşməsi hissəciklərin 77
- Bərpa(s i) Markov prosesinin** 77
- axını 77
- anı 78
- funksiyası 78
- intervalı 78
- nəzəriyyəsi 78
- Bərpa prosesi** 78
- superpozisiya 79
- Bərpa teoremi** 79
- elementar 80
- tənliliyi 80
- Bəyaz küy** 80
- diskret 81
- kəsri 81
- tezliklərin sonlu zolağında 81
- Bəyazlanma** 81
- Bhattaçarya – Rao sferik məsafəsi** 82
- Bixətti model(i)** təsadüfi prosesin 82
- Bikompekt topoloji $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ fəzasında** 82
- Bilyard** 82
- Bimodal paylanma** 82
- Binar münasibətlər statistikası** 83
- şəxələnən proses 83
- təsadüfi proses 83
- Binomial əmsal** 83
- paylanma 84
- seçim 85
- Bir ehtimal fəzası metodu** 86
- Biraddımlı keçid ehtimalı** 86
- Bircins xaos** 86
- izotrop korrelyasion funksiya 86
- kanal 86
- keçid funksiyası 86
- korrelyasion funksiya 86
- Markov prosesi 86
- Markov zənciri zaman üzrə 86
- ölçü 86
- Puasson ölçüsü 86
- sinifi, funksiyaların Renyiyə görə 86
- Bircins təsadüfi meydan** 86
- proses asılı olmayan artımlı 86
- proses zaman üzrə 86
- ümumiləşmiş meydan 87
- və həndəsi proses 87
- və izotrop həndəsi proses 87
- və izotrop təsadüfi meydan 87
- Birgə ölçmə** 88
- paylanma 88
- sıxlığı, ehtimal paylanmalarının 88
- Birxətli xidmət sistemi** 88
- Birinci Laplas qanunu** 88
- Birkanallı xidmət sistemi** 88
- Birkhoff – Xinqin erqodik teoremi** 88
- Birqiymətlik xassəsi çoxluğun ölçüyə nəzərən** 88

Birləşdirilmiş spektri, prosesin 85
Birləşmə(sı) hadisələrin 85
 - /cəm(i) təsadüfi hadisələrin 85
 - təkrarsız 88
Birölçülü diffuziya 89
 - ; sərhədlərinin təsnifatı 89
 - təsadüfi proses 90
Birparametrlı Eyler ədədləri 90
Birşəçimli Styudent kriterisi 90
Birtərəfli Bernulli yerdəyişməsi 90
 - doğurucu 90
 - paylanma 90
 - sonsuz bölünən paylanma 90
 - Styudent kriterisi 90
Bispektr 90
Bispektral funksiya 90
 - sıxlıq 90
Bit 90
Blekman – Tyuki metodu 90
Blekuell teoremi 91
Blok 91
 - dekodla(n)ması 91
 - kod 91
 - plan 91
 - sxem 92
 - struktur 92
 - tezlik 92
Blyumental – Getur – Mak – Kin teoremi 92
Boxner integralı 92
 - – Xinqin teoremi 93
Boks – Cenkins metodu 93
 - proses 94
Boks – Uilson metodu 94
Boqolyubov tənliliklər zənciri 94
Bolşev approksimasiyası 94
Boltsman paylanması 94
 - statistikasi 94
 - tənliliyi 95
Bonferroni bərabərsizliyi 95
Borel cəbri 96
Borel σ - cəbri 96
 - çoxluğu 96
 - funksiyası 96
 - qanunu, gücləndirilmiş böyük ədədlərin 96
 - inikası 97
Borel meydanı, çoxluqların 97
 - , hadisələrin 97
 - mənada ölçülən funksiya 97
 - modeli 97
 - ölçüsü 97
 - «sıfır – vahid» kriterisi 97
 - teoremi 97
Borel – Kantelli lemması 97
 - – Levi lemması 97
 - – Tanner paylanması 97
Boş bloklar kriterisi 97
 - qutular kriterisi 98
Boyskaut bıçağı (qatlanan bıçaq) metodu 98
Boze – Eynşteyn modeli 98
 - statistikasi 99
Bozon fəzası 99
Bölgü 99
 - (sü) natural ədədin 99
 K – 99
Bölünən / Dizyunkt ölçülər ailəsi 99
 - statistika 100
Bölünənlik şərti 100
Bölünmə prinsipi 101
Böyük ədədlər qanunu 101
 - Banax fəzalarında 104

- - qeyri-stasionar təsadüfi proseslər üçün 104
 - Markov prosesləri üçün 105
 - stasionar təsadüfi proseslər üçün 106
 - təsadüfi çoxluqlar üçün 106
 - təsadüfi meydanlar üçün 106
Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu 107
 - stasionar təsadüfi proseslər üçün 109
 - təsadüfi çoxluqlar üçün 110
Böyük kanonik ansambl 110
 - dim.-ölçülər effekti 110
Böyük yayınmalar empirik paylanma funksiyası üçün 111
 - təsadüfi dolaşma üçün 112
 - təsadüfi proseslər üçün 114
 - ehtimalları 116
Braun ekskursiyası 116
Braun hərəkəti çoxparametrlili 116
 - ekskursiya 116
 - prosesi 117
 - prosesi çoxölçülülüyü 117
Braun körpüsü 117
 - meandr 117
 - mələfəsi 117
 - proqnozlanma metodu 117
 - vərəqi 118
Bucaq modulyasiyası 118
 - tezliyi 118
Bufer yaddaş 118
Bul cəbri normalanmış 118
 - funksiyası təsadüfi 118
 - modeli 118
Bunyakovski bərabərsizliyi 118
Burgers tənliliyi 118
Burkholder – Qandi – Devis bərabərsizlikləri 118
Butstrap – qiymət 119
 - qiymətləndirmə metodu 119
 «-» metod 119
 - paylanma 121
Bütün regressiyalar metodu 121
Byeneme – Çebişev bərabərsizliyi 121
Byuffon halqası 121
 - iynə məsələsi 121
 - Silvestr məsələsi 122

C

Calaşdırı(lı)ma(sı) təsadüfi proseslərin 123
Cari ödəmə 123
Cazibə oblastı 123
 - dayanıqlı qanunun 123
 - qrupda dayanıqlı paylanmanın 124
 - operator dayanıqlı paylanmanın 124
 - sərhədi 126
Cessen – Vintner teoremi 126
Ceyms – Steyn statistik qiyməti 126
Cəbr , A çoxluğunun doğurduğu 127
 * – 127
Cəbri dekodlama 127
 - , hadisələrin 127
 σ – cəbri , hadisələrin 128

- , kvazilokal müşahidələnlərin 128
 - , müşahidələnlərin 128
 - , silindrik çoxluqların 129
 - təsadüfi tənlilik 129
Cəknayf metodu 129
Cəmi, təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin 129
Cəmlənmə sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 129
 p – cəmləyici operator 129
Cırılşan paylanma 129
Cırılşmayan paylanma, məxsusi paylanma 130
 - şaxələnmə proses 130
Cırılşmış ikiölçülü normal paylanma 130
 - ölçü 130
Ciddi dayanıqlı paylanma 130
Ciddi Markov xəssəsi 130
 - prosesi 130
Conson – Uelç çevirməsi 131
Cüt – cüt asılı olmamazlıq 131
Cütlüyün korrelyasiya əmsalı 131

Ç

Çatılabilən sərhəd 132
 - vəziyyət 132
Çatılmayan sərhəd 132
 - vəziyyət, Markov zənciri üçün 132
Çatım müddəti / defekt 132
Çebişev bərabərsizliyi 132
 - ; çoxölçülü analoqlar 133
 - teoremi 133
Çekon – Cemison teoremi 133
Çentsov statistik qiyməti paylanma sıxlığının 133
Çernov sərhədi 133
Çevirmə düsturu 134
Çevirməsi, zamanın 134
Çevrilmiş Markov prosesi 134
 - zənciri 134
Çəki 135
 - (si) plan nöqtələrinin 135
 - matrisi 135
Çəkiləmə planı 135
Çəkili ən kiçik kvadratlar metodu 135
 - kvadratik yayınma 135
Çəp fırlanması, faktor oxlarının 135
 - Viner prosesi 135
Çıxıqlar metodu 135
Çıxış ehtimalının sıxlığı 135
 - intensivliyi 135
 - siqnalı 135
Çjun təkrar loqarifm qanunu 135
Çoxaldılması, vəziyyətlər(in) Markov zəncirlərinin 135
Çoxaltma funksiyası 135
Çoxgirişli kanal 135
 - qoşmalılıq cədvəli 136
Çoxgirişlilik 136
 - təsadüfi 137
Çoxxətli xidmət sistemi 137
Çoxkanallı xidmət sistemi 137
Çoxkaskadlı xidmət sistemi 137
Çoxkomponentli kanal 137
 - məlumatlar mənbəi 137
Çoxqat qarışma 137
 - stoxastik integral 138
 - Viner integralı 138

Çoxölçülü Beta paylanma 138
 - Braun hərəkəti prosesi 138
 - müşahidə 138
 - normal paylanma 138
 - paylanma 138
 - sıxlıq 139
 - statistik analiz 139
 - şkallanma 142
 - təsadüfi dolaşma 143
 - təsadüfi kəmiyyət 143
 - təsadüfi proses 144
 - verilənlərin sturuktur modeli 144
 - verilənlərin vizualizasiyası 144
 - Viner prosesi 145
Çoxparametrlı Braun prosesi 145
Çoxtərəfli kanal 145
Çoxzırvəli paylanma 145

D

Dadlı metrikaçı 146
 - şərti 146
Daxil edilmiş bərpa prosesi 146
 - Markov zənciri 147
 - şəxələnen proses 147
Daxiletmə və xaricetmə metodu 147
Dairəvi qanun 148
Dar topologiya 148
Dar yığılma 148
 - topologiyası 148
Darlıq teoremi 148
Darmua – Skitoviç teoremi 18
Daşıyıcı(sı) ölçünün 148
 - (sı) planı 148
 - siqnal 148
 - tezlik 148
Davamolunması, ölçülərin 148
Dayaq nöqtəsi, planı 149
Dayanıqlı alqoritm 149
 - altfəza 149
Dayanıqlı paylanma 149
 - Banax fəzasında 151
 - integral çevirmələri 151
 - qrupda 151
 - sıralarla ifadə 152
 - təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası 153
 - funksiyası 153
 - göstəricisi 153
 - proses 153
 - semi - qrup 154
 - statistik qiymət 154
 - təsadüfi çoxluq 154
 - tipi, paylanmanın 154
 - vəziyyət 154
Dayanıqlılıq(ğ ı), ehtimal paylanmalarının kompozisiyaya ayrılışlarının 154
 - ehtimala görə zəif və güclü mənada 155
 - xidmət sistemlərinin 155
 - Markov proseslərinin 157
 - paylanmaların xarakterizasiyalarının 157
 - regenerativ proseslərin 158
 - statistik prosedurun 158
 - stoxastik modelin 159
 - stoxastik modelin kəmiyyəti statistik qiymətlər 159
 - təsadüfi təyinedici elementləri differensial tənliklərin 160

Dayanıqlılıq parametri 161
Dayanıqlılıq teoremi xidmət sistemləri nəzəriyyəsində 161
 - metrik yanaşma 161
 - sınaq funksiyaları metodu 162
 - yeniləşmələr metodu 162
Dayanma anı 163
 - axına nəzərən 163
Dayson paylanması 164
Debütü, çoxluğun 164
Defekt 164
 - asimptotik 164
 - (i) dolaşmanın, çatım 164
 - (i) kriterinin 165
Dekodlama 166
 - ardıcıl 166
 - cəbri 166
 - mürəkkəbliyi 166
 - siyahı ilə 166
Dekodla(n)ma(sı) blok 166
 - doğruxaoxşarlıq maksimumu üzrə 166
Demodulyasiya 166
 - kompleks 166
Demoqrafik statistika 166
Dendoqram 168
Desil 168
Desimasiya 168
Determinik kaos nəzəriyyəsi 169
 - kanal 169
 - taktlı interval 169
Devis bərabərsizlikləri 169
Dəqiq aşağı sərhəd(i) təsadüfi hadisələrin 169
 - endomorfizm 169
 - plan 169
 - yuxarı sərhəd(i) təsadüfi hadisələrin 169
 - zolaq 169
Dəstəiz ölçü 169
Dəyər 169
 - (i) modelin 169
 - (i) oyunun 169
 - funksiyası 169
Dəyişən fərqlər metodu 169
 - kod, zaman üzrə 170
Dəyişənşərləli ölçü 170
Dinkin düsturu 170
Diaqnostik yoxlaması Boks və Cenkinə görə 170
Diaqram metodu 170
 - texnikası 171
Differensial entropiya 171
 - operator, təsadüfi əmsalları; spektral nəzəriyyə 171
Differensiallanması, sistemin 172
 - təsadüfi prosesin 172
Diffuz ölçü 173
Diffuzion proses 173
 - əksədici sərhədli 173
 - idarəolunan 173
 - qrupda 173
 - şəxələnen 175
Diffuziya əmsalları 176
 - vektoru 176
Dixotomik təsadüfi proses 176
Dik yüksəliş metodu 176
Dilatasiya 176
Dinamik proqnoz 176
Dinamik proqramlama; həssas kriterilər 176

- stoxastik 177
 - Riçardson ədədi 177
Dinamik sistem 177
 - xalis nöqtəvi spektrli 177
 - kiçik stoxastik kükrəntilər 177
 - (i) statistik mexanikanın 178
Diofant yaxınlaşmaları; erqodik məsələlər 178
Dirak ölçüsü 178
Dirixle fəzası 178
 - forması 178
 - məsələsi stoxastik 178
 - paylanması 178
Diskontlama 179
 - əmsali 179
Diskret ansambl 179
 - ayrılış(i) Karunen – Loev 179
 - bəyaz küy 179
 - bölünənlik xassəsi, verilənlərin hissəsinin 179
 - ehtimal paylanması 179
 - Fure çevirməsi 179
 - mənbə 180
 - modulyasiya 180
 - ölçü 180
 - paylanma 180
 - paylanma funksiyası 180
 - renormrup 180
 - seçimi, prosesin 180
 - təsadüfi kəmiyyət 180
Diskretizasiya problemi 181
Diskretlənən təsadüfi meydan 181
Diskriminant analiz 181
 - funksiya 182
 - model 183
Diskriminasiya eksperimentlərin planlaşdırılması 183
Dispersion analiz 184
 - qarışıq model 186
 - metod ədədlər nəzəriyyəsində 187
 - nisbət paylanması 187
Dispersiya 187
 - (sı) empirik paylanmanın 189
 - statistik qiymət 189
 - təsadüfi çoxluğun 189
Dissipasiya(sı) turbulentlik enerjisinin 189
Dissipativ Markov zənciri 189
Dizyunkt spektral tipi, ölçülərin 189
 - təsadüfi hadisələr ardıcılığı 189
DLR – şərti 189
Doc planı 189
Doğruaoxşarlıq funksiyası 189
Doğruaoxşarlıq nisbəti 189
 - monoton 190
 - təsadüfi proseslər üçün 190
 - kriterisi 190
Doğruaoxşarlıq prinsipi gücləndirilmiş 191
 - zəif 191
 - tənliyi 191
Doğum anı 191
 - və ölüm prosesi 191
Doğuran funksional(i) ölçülərin kəsilməz konvolüsiya semi-qrupunun 191
Doğuran funksiya ehtimalı 192
 - eksponensial 192
 - (sı) ədədi ardıcılığın 192
 - (sı) momentlərin 192

- (s) tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin 193
- (s) təsadüfi kəmiyyətin 193
- (s) təsadüfi vektorun 193
- Doğuran operator** 193
- (u) diffuzion prosesin 193
- (u) prosesin 193
- Doğurucu** 193
- Dolaşma** 193
- Doldurulma** 193
- Dominar vektor** 193
- vektorlar ardıcılığı 193
- Dominarlanan ailəsi, paylanmaların** 193
- Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipi** 193
- Döblin şərti** 193
- teoremi 194
- universal qanunu 194
- Dual Markov prosesi** 194
- öngörül proyeksiya 194
- Dub bərabərsizlikləri** 194
- Dub mərkəzləndirici funksiyası** 194
- sabitləri 194
- – Meyer ayrılığı 195
- Dublama / birdəfəlik ehtiyatda saxlama** 195
- Dublaşdırma texnikada** 195
- Düyün / dayaq nöqtəsi planı** 195
- Düyünlər modeli** 195
- Düz tənliyi, Kolmoqorovun** 195
- Düzbucaqlı paylanma** 195
- Düzəldici strategiya** 195
- Düzəliş, kəsilməzlik üçün** 195
- Düzgün dəyişən funksiya** 195
- statistik qiymət 196
- Dvoretzki lemması** 196
- proseduru 196
- – Rocers teoremi 196

E

- Edcvort sırası** 197
- – Kramer ayrılığı 197
- Effektiv statistik qiymət** 198
- Effektivlik(yi) ikinci tərtib statistik qiymətlərin** 198
- resursun 199
- statistik prosedurun 199
- Effektivliyi, proqnozun meteorologiyada** 199
- saxlama əmsalı 200
- Ehtimal** 200
- kvant fizikasında 200
- ,aposteriori 201
- apriori 202
- əlaqəlik, ehtimalı təsadüfi qrafın 202
- Ehtimal fəzası** 202
- təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu 202
- metodu 202
- ; integral ehtimalı 202
- ; keçid ehtimalı 202
- ; udum ehtimalı Markov zəncirində 203
- kombinatorikası 204
- metodları ədədlər nəzəriyyəsinə 207
- metrikalarının müqayisəsi 207
- Ehtimal metrikası** 208
- ; bircinslik 208
- ; requlyarlıq 208
- ; struktur 209

- Ehtimal məsafəsi** 210
- Ehtimal nəzəriyyəsi** 210
- cəbri strukturlarda 215
- Ehtimal olunan yayını** 215
- Ehtimal ölçüsü** 215
- qrupda 216
- Ehtimal paylanmalarının arifmetikasi** 217
- Abel qruplarında 217
- paylanması 218
- vərəqi normal 218
- Ehtimalı, səhv təsnifin** 219
- Ehtimalı avtomat** 219
- Borel ölçüsü 219
- doğuran funksiya 219
- ədədlər nəzəriyyəsi 219
- həlli, differensial tənliklərin 224
- xarakterizasiya(s) qrupların 225
- kodlama 226
- Ehtimalı proqnozu, havanın** 226
- keyfiyyətin statistik qiyməti 227
- proses 227
- Ehtimalları, böyük yayınmaların** 227
- Ehtiyatda saxlama** 227
- çoxqat 228
- müvəqqəti 228
- optimal 228
- ümumi 228
- ; struktur tip ehtiyatda saxlama 228
- Ekskursiya(s) Braun hərəkətinin** 228
- Markov prosesinin 228
- Viner prosesinin 228
- Eksperiment xətası** 229
- Eksponensial ailəsi, paylanmaların** 229
- avtoregressiv model 229
- avtoregressiv proses 229
- bərabərsizlik 229
- çevirmə(s) təsadüfi trayektoriya uzunluğunun 230
- p – dayanıqlılıq 230
- doğuran funksiya 230
- paylanma 230
- Eksses(i) dolaşmanın** 230
- paylanmanın 231
- əmsalı 231
- Ekssessiv funksiya Markov zənciri üçün** 231
- Viner prosesinin hissəsi üçün 232
- α – Ekssessiv funksiya 232
- Ekssessiv ölçü Markov zənciri üçün** 232
- α – Ekssessiv ölçü 232
- Ekstrapolyasiya(s) təsadüfi proseslərin** 232
- Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması** 232
- qiymətlər paylanması 233
- statistik məsələ 234
- Ekvivalent additiv funksionallar** 234
- bölgülər 234
- ölçülər 234
- təsadüfi kəmiyyətlər 234
- yığılan ardıcılıqları, təsadüfi kəmiyyətlərin 235
- yüklər 235
- Ekvivariant statistik qiymət** 235
- Elayinq** 235
- Elementar çoxluq** 235
- ehtimal 235

- hadisə 235
- hadisələr fəzası 235
- ölçü 235
- Elfinq ekvivalentlik teoremi** 235
- Elliptik qanun** 236
- tənlik; Monte-Karlo metodu ilə həll 236
- Emiqrasiya şəxələnən prosesdə** 236
- Empirik Beyes həlledici funksiyası** 236
- statistik qiyməti 236
- yavaşması 237
- kovariasion matris 237
- moment 237
- orta qiymət(i) təsadüfi çoxluğun 237
- ortoqonal funksiyalar 237
- ölçü 238
- paylanma 238
- paylanma funksiyası 239
- proses 239
- regressiya əyrisi 239
- təsir funksiyası 239
- Endomorfizm dəqiq** 239
- sıfır modulu üzrə 239
- ölçülü fəzanın 240
- Energetik norma** 240
- spektr 240
- Enerji** 240
- səviyyəsi 240
- Enerjisi, hissəciyin** 240
- Eninə korrelyasion funksiya** 240
- Enqset düsturu** 240
- Enliklə – impulsal modulyasiya** 240
- Enmə** 240
- Entropik güc** 240
- kriteri 240
- Entropiya** 240
- alqoritmik 241
- (s) bölgünün 241
- differensial 241
- (s) dinamik sistemin 241
- (s) dinamik sistemin, topoloji 242
- (s) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin 242
- (s) qrupda təsadüfi dolaşmanın 242
- nisbi 242
- (s) ölçülən D bölgüsünün 243
- prefiks 243
- (s) sonlu obyektlərin 243
- (s) stasionar prosesin 243
- şərti 243
- ε – Entropiya 243
- W – Entropiya 243
- Epidemik proses** 243
- Epsilon – entropiya ε - entropiya** 243
- Erqodik Markov zənciri** 244
- məsələləri(i) Diofant yaxınlaşmalarının 244
- nəzəriyyə 246
- sinif(i) Markov zəncirinin 248
- Erqodik teoremlər** 248
- Markov prosesləri üçün 249
- stasionar təsadüfi proseslər və bircins meydanlar üçün 250

-- Viner prosesləri üçün 252
 - təsadüfi proses 252
Erqodiklik 253
Erlanq düsturu 254
 - paylanması 254
Eroziya 254
Esseen teoremi 254
Etibarlı çoxluq 254
 - ehtimal 254
 - interval 254
 - qiymətləndirmə 255
 - limit 256
 - oblast 256
 - sərhəd 256
Etibarlı zolaq 256
 -- α hüdudlu 256
 - zona 257
Etibarlılığın optimizasiyası 257
 - riyazi nəzəriyyəsi 257
Etibarlılıq 260
 - əmsali 260
Etibarlılıq funksiyası 260
 -- , etibarlılıq əmsali 260
 - göstəriciləri, sistemin 260
 - göstəricisi 261
 - hüdudu / səviyyəsi 261
 - nəzəriyyəsi; analitik - statistik metod 261
Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi 262
 - meydanı 262
 - şeypi 262
 - yanaşması 262
Evolusion senzurlama 262
Evolusional stoxastik differensial tənlik 262
Evolusionar spektral funksiya 263
 -- ifadə 264
 -- ölçü 264
Eyler ədədləri 264
Eynşteyn – Smoluxovski modeli 264

Ə

Ədədi simulyasiya(s ı), təsadüfi təzahürün 265
Əhəmiyyətsiz çoxluq 265
 - zona 265
Əks hadisə 265
Əksedici baryer 265
 - sərhəd 265
Əlaqələr modeli 265
Əlaqəli vəziyyətlər(i) Markov zəncirinin 265
Əlavə müşahidələnlər 265
Əlverişli elementar hadisə A hadisəsi üçün 265
Ən böyük doğruxoxşarlıq metodu 265
 --- prinsipi 266
 - ciddi kriteri 266
Ən dəqiq etibarlı çoxluq 266
 - invariant etibarlı çoxluq 266
 -- sərhəd 266
Ən əlverişsiz paylanma 266
 -- paylanma 267
 - güclü kriteri 267
 - kiçik eksessiv majorant 268
 - kiçik kvadratlar çekili metodu 268
Ən kiçik kvadratlar metodu 268
 ---- qiymətləndirilmiş kovariasion matrisli 273
 ---- məhdudiyyətli 273
 - sadə nöqtəvi proses 274

- selektiv etibarlı çoxluq 274
«Ən yaxın qonşu» algoritmi 274
 -- ümumi əcdad 274
Ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymət 274
 --- proqnoz 274
Əngələdavamlılıq 274
Əngələdayanıqlı statistik qiymət 274
Əngəlləyici parametrlər 274
Əsas bərpə teoremi 275
 - hipotez 275
Əvəzləmə / permutasion / yerdəyişmə təsadüfi/substision 275
Əyri xətti stoxastik integral 275

F

Faktor 276
Faktor analiz 276
 --; modelin identifikasiyası 277
 --; sxemlər 277
 - çoxluq 277
 - eksperiment 277
 - model 279
Faktorial moment 279
 - oxlarının fırlanması 279
 - semi - invariant 280
FaktORIZASION EYNİLİKLƏR 280
FaktORIZASIYA metodu 282
 - teoremi 282
Faktorların qarşılıqlı təsir effekti 282
Faktorsistem(i) dinamik sistemin 283
Fano algoritmi 283
 - bərabərsizliyi 283
Faydalılıq funksiyası 283
 - nəzəriyyəsi 283
Faza 286
 - diaqramı 286
Faza fəzası Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin 286
 -- təsadüfi prosesin 286
 - keçidi 287
 - modulyasiyası 287
 - sıxlığı 287
 - spektri 287
 - tezlik xarakteristikası 287
 - yerindəyişməsi 287
Fazaca modulyar rəqs / ossilyasiya 287
Fefferman bərabərsizliyi 288
Feller həlli stoxastik differensial tənliyin 288
 - keçid funksiyası 288
 - Markov zənciri 288
 - prosesi 288
 - semi - qrupu 289
Fermi – Dirak statistikası 289
Fermion fəzası 289
Fernik teoremi 289
Feynqlər / donmalar kanalında 289
Feynman – Kas düsturu 289
Fərq psevdomententi 289
Fərqlər funksiyası, meteoroloji itkilərin 289
 - şkalası 289
Fərqli ölçmələrin xaric olunması 289
Fəza(s ı) 2-cinöv kəsilməyə malik olmayan funksiyalar 290

S – Fəza 290
 σ – Fəza 290
 - , σ topologiya ilə 291
Fəzası elementar hadisələr 291
 - , həllərin (qərarların) 291
 - , kəsilməz funksiyaların 291
 - , ölçülərin 291
Fəzası vəziyyətlərin Markov zəncirinin 291
 -- təsadüfi prosesin 291
Fəzavi statistik struktur 291
Fi – şaxələnən proses 291
Fidusal ehtimal 292
 - interval 292
 - paylanma 292
Fiktiv vəziyyət 293
Filtr fazası 293
Filtrasiya(s ı) semi - martingalın 293
 - signalın 293
 - təsadüfi proseslərin 293
Filtrasiya tənliyi diffuzion prosesin filtrasion sıxlığı üçün 293
 -- diffuzion proseslər üçün 294
Filtrin gücləndirmə əmsali 294
Filtrlənmiş Puasson prosesi 294
Final ehtimal 294
 -- şaxələnən prosesin 294
 - ödəmə 294
 - tip şaxələnən prosesdə 294
Finit axın 294
 - potensial 294
 - sərhəd 294
Fisk integralı 294
 - – Stratonoviç integralı 294
Fişer approksimasiyası 294
 - çevirməsi 294
 - z – çevirməsi 294
 - dəqiq kriterisi 295
 - F' – paylanması 296
 - z – paylanması 296
 - – İrvin kriterisi 297
 - – Yeyts kriterisi 297
Fiziki realizasiya olunma şərti 297
 - spektr sıxlığı 297
 - statistik hava proqnozu 297
FKJ – bərabərsizliyi 297
Fok fəzası 297
 - ifadəsi kommutativ və anti - kommutativ münasibətlərdə 297
Fokker – Plank tənliyi 298
 -- – Kolmoqorov tənliyi 298
Forsayt metodu 298
 - münasibəti 298
Forte – Xarkeviç – Rozanov spektri 298
Forte – Kas teoremi 298
 - – Murve metrikası 299
Foster kriterisi 299
Fraktal 299
 - Braun hərəkəti 300
Fundamental lemma(s ı) riyazi statistikanın 300
Fundamental matris Markov zəncirinin 300
Funksional ehtiyatda saxlama 300
 - integral 300
Furye çevirməsi diskret 300
 -- qrupda ehtimal paylanmalarının 300
 -- sonlu 301
 -- sürətli 301

-- Stiltjes çevirməsi 301

G

Gelfand integralı 302

Generator(u) korrelyasion pəncərənin 302
- prosesin 302

Genişləndirilmiş stoxastik integral 302

Geniş yayımlı kanal 303

Gəncleşən paylanma 303

Gətirilmiş açım 303

Gibbs fenomeni 303

- limit vəziyyəti 304
- paylanması 304
- postulatı 305
- sıxlığı 305
- sonlu vəziyyəti 305
- təsadüfi meydanı 305

Giriş axını 306

-- ixtiyari keçmiş təsir-
siz 307

-- keçmiş məhdud təsirli-
liyə malik 307

-- keçmiş təsirsiz 307

-- rəqulyar, keçmiş təsir-
siz 307

-- sinqulyar, keçmiş təsir-
siz 307

- braki 307

- qanunu 307

- paylanması 307

- siqnalı 307

Gözləmə müddəti 307

Gözlənilən faydalılıq 307

- gəlir kriterisi 307

Güc(ü) statistik kriterinin 307

- funksiyası, kriterinin 308

- spektri 308

**Gücləndirilmiş prinsipi, doğruxaox-
şarlığın** 308

Gücləndirmə əmsalı 308

- birzərvəli paylanma 308

**Güclü Feller xassəsi Markov pro-
seslərinin** 308

-- keçid funksiyası 308

-- prosesi 308

- harmoniklənməlik(y i) t ə s a d ü f i
prosesin 309

- infinitezimal operator 309

- ölçülən inikas 309

- təsadüfi xətti operator 309

- unimodal / güclü təkzərvəli paylanma
309

- yığılma 309

Güclü gücləndirmə əmsalı 309

H

Haar ölçüsü 310

Hadisə 310

A hadisəsi B hadisəsini doğurur 310

Halqası, çoxluqların 310

σ – halqası, çoxluqların 310

τ – hamar ölçü 310

Hamarla(n)ma bərabərsizliyi 310

Hamarlama parametri 311

Hamarlayıcı paylanma 311

Hamburger teoremi 311

Hamilton strategiyası 311

Han teoremi, y ü k l ər h a q q ı n d a
311

Hanning pəncərəsi 311

Hant prosesi 311

Hardi entropiyası 311

Harmonik ayrılış metodu 311

**Harmonik funksiya, Markov pro-
sesi üçün** 311

-- Markov zənciri üçün 311

- interpolasiya 312

- ortalama 312

Harmoniklənmə korrelyasion funksiya
312

- təsadüfi meydan 312

- təsadüfi proses 312

Harmoniklənmə şərtləri 313

Harris qayıdışlı Markov zənciri 314

Harrison mövsüm modeli 314

Hartli 315

**Hartman – Vintner – Ştrassen teo-
remi** 315

Hasil(i) σ – cəbrlər ailəsinin
315

- ehtimal fəzalarının 315

- ölçülən fəzalarının 315

- ölçülərin 315

Hausdorff psevdometrikası 316

- strukturu ehtimal metrika-
sının 316

- teoremi 316

Hazırolma əmsalı 316

Helli teoremi 316

Hellinger integralı 316

- metrikası 316

- məsafəsi 317

- prosesi 318

Hemming pəncərəsi 318

Hennan – Kuinn kriterisi 318

Hermite müsbət funksiyası 318

- təsadüfi matrisi 319

Hesabi – additiv funksiyası, çoxluqlar
319

- ehtimali avtomat 319

- Markov zənciri 319

- tip σ – cəbr 320

**Hesablanılma məsələləri k o m b i -
nator analizdə** 320

Heteroskedastik regressiya 320

Heyzenberq modeli 320

Həddənziyadəlik 320

Həlləddici funksiya 321

-- ;Beyes həlləddici funk-
siya 321

-- invariant 321

-- meylsiz 321

-- məqbul 321

-- minimal 321

-- ;minimal tam sinif 321

-- müntəzəm yaxşı 321

-- optimal 321

-- randomlanmamış 321

-- randomlanmış 321

-- ;tam sinif 321

- kriteri 321

- qayda 321

Həndəsi ehtimallar 322

- erqodik Markov zənciri 322

- paylanma 322

Həndəsi proses 323

-- izotrop 324

-- stasionar (bircins) 324

**Həndəsələşdirilməsi, statistik nəzə-
riyyənin** 324

Həssaslıq kobud xətalara 324

Hidrodinamik limit 324

-- keçidi 324

- tənlik 324

Hidrodinamika tənlikləri 324

Hilbert çevirməsi 325

- təsadüfi funksiyası 325

Hille – İosida teoremi 325

Hiperhəndəsi paylanma 325

Hiperqrup 326

Hiper – yunan – latın kubu 326

-- kvadratı 326

Hissəvi xətti aqreqat 326

-- proses 326

Histoqram 326

Hitsuda – Skoroxod konstruksiyası
327

Hodges statistik qiyməti 327

Holl teoremi 327

-- Uinters modeli 327

Homoskedastik regressiya 327

Hotelling kriterisi 327

- T^2 – paylanması 328

- T^2 – statistikasi 329

Höfdinq ölçüsü 329

Hölder bərabərsizliyi 329

Hörst fenomeni 329

X

Xalis Beyes strategiyası 331

- strategiya 331

- vəziyyət 331

Xaos 331

- bircins 332

Xarakteristik çevirmə 332

Xarakteristik funksional 332

-- (i) təsadüfi ölçünün 335

Xarakteristik funksiya 335

-- analitik 335

-- metodu 335

- göstərici, dayanıqlılıq parametri 336

- operator(u) 336

Xarakterizasion teoremlər 337

-- Abel qruplarında ehti-
mal paylanmaları üçün 337

Xarakterizasiyası, paylanmaların 338

Xaricetmə metodu 339

Xarici ölçü 339

Xəta 339

- ehtimal olunan 339

- (sı) eksperimentin 339

- kvadratik orta 339

- sistematik 339

- standart 339

- təsadüfi 339

Xətalər integralı 339

- nəzəriyyəsi 339

- vektoru 340

Xətti approksimasiya 340

**Xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiy-
yətlər** 340

----- ardıcılığı 340

- cəbr stoxastik 340

- filtr 340

- funksiya, meylsiz statistik

qiymət almaq üçün 341

- hipotez 341

- ifadə olunan təsadüfi proses 342

- interpolasiya(sı) r e q r e s s i y a
funksiyasının 342

- kod 342

- korrelyasiya 342

- kriteri 342

- rəq statistikası 342

- regression eksperiment 342

- regressiya 342

- rəqulyar stasionar proses 343

- sistem 343

Xətti statistik qiymət 343
 --- ən kiçik dispersiyalı 343
 --- məqbul 343
Xətti stoxastik differensial tənlik 343
 ---- həllərin dayanıqlılığı 343
 -- parabolik tənlik ikinci tərtib 344
 - tənlik; Monte-Karlo metodu ilə həll 344
Xəttivari Markov prosesi 344
Xi – dağılma 344
Xi – kvadrat kriteri 344
 -- paylanma 347
 - – paylanma 347
Xidmət qaydası 348
Xidmət sistemi 348
 -- açıq 348
 -- birxətli 348
 -- birkanallı 348
 -- çoxxətli 348
 -- çoxkanallı 348
 -- çoxkaskadlı 348
 -- dayanıqlılıq 348
 -- gözlənməli, birkanallı 348
 -- gözlənməli, çoxkanallı 349
 -- imtinalarlı 350
 -- qapalı 350
 -- natamam girişli 350
 -- tamgirişli 350
Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi 350
 --- asimptotik metodlar 352
 --- əlavə dəyişənlər metodu 353
 --- invariantlıq problemi 353
 - sistemlərinin statistik modeləşdirilməsi 353
 - şəbəkəsi 353
Xinçin bərabərsizliyi asılı olmayan funksiyalar üçün 354
 - düsturu 355
 - spektral funksiyası 355
Xinçin teoremi 355
 -- ayrılış (faktorizasiya) haqqında 355
 -- xidmət sistemi nəzəriyyəsinə 355
 -- stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinə 355
 - – Kolmoqorov teoremi 356
Xüsusi koherentlik 356
 - korrelyasion funksiya 356
Xüsusi kovariasiya əmsalı 356
 - / Marginal paylanma 357
 - semi – qrupların hesabı / arifmetikası 357
 - semimartinqal 357

i

İdarəedicilik ardıcılığı 358
İdarəetmə paylanmış parametrlərli sistemləri 358
İdarəolunan diffuzion proses 358
 - Markov prosesi 360
 - Markov zənciri 360
 - obyekt 361
 - semi – Markov prosesi / semi – Markov qərar qəbulətmə prosesi 361

- sırayışvari Markov prosesi 361
 - sırayışvari proses 361
 - təsadüfi ardıcılıq 362
İdarəolunan təsadüfi proses 362
 --- diskret zamanlı 362
İdarəolunma 366
İdeal qaz 366
 - metrika 367
İdempotent ölçü qrupda 368
İflas məsələsi 368
İki təsadüfi kəmiyyət arasında məsafə 369
İkiqat ardıcılıq(ğı) təsadüfi kəmiyyətlərin 369
 - stasionar təsadüfi proses 369
İkiqat stoxastik matris 370
 - - Puasson prosesi (Koks prosesi) 370
İkiqollu bandit 371
İkili Markov prosesi 371
İkilik simmetrik kanal 371
 - vahid(i) informasiya miqdarının 371
İkinci Laplas qanunu 372
İkiölçülü normal paylanma 372
İkişəçimli T^2 -statistikası 372
İkişəçimli Styudent kriterisi 372
İkitərəfli Bernulli yerindəyişməsi 373
 - eksponensial paylanma 373
 - etibarlı interval 373
 - hipotez 373
 - Markov prosesi 373
 - Styudent kriterisi 373
 - üstlü paylanma 373
İkizirvali paylanma 373
İqlim / Klimat 373
 - norması 373
 - proqnozu 374
 - sistemi 374
 - zaman sıraları 374
İqlimin stoxastik modelləri 374
İlk çatım anı / ilk çıxış müddəti 374
 - çıxış anı 374
 - çıxış müddəti 374
 - daxilolma / ötürmə anı 374
 - keçmə anı, sərhədi 374
 - qayıdış anı 375
 - mühüm rəqəm qanunu 375
İlkin hipotez 376
 - / başlanğıc paylanma(sı) Markov zəncirinin (prosesinin) 376
İllüstrativ dəyişən 376
İmitasiyası, təsadüfi təzahürün 376
 - şəxələnmə proses 376
İmpuls əngəl 376
 - – fəzalı modulyasiya prosesi 376
İmpulsal – bərpa prosesi 376
 - keçid funksiyası 376
 - küy 376
İmpulsal proses taktlı intervallarla modullanmış 377
 - - , sabit taktlı intervallı 377
 - Puasson prosesi 377
 - səda funksiyası 377
 - təsadüfi proses 377
İmtina (sıradan çıxma) 378
 - axtarışı 378
 - üçün orta işləmə müddəti 378
İmtinalar ağacı 378
İmtinası, elementin 378
 - sistemin 378
İmtinasız / fasiləsiz işləmə ehtimalı 378

- işləmə müddətinin paylanma funksiyası α_1 rejimində 378
İmtinasızlıq 378
İmtinaya qədər qamma – faizli işləmə müddəti 378
 - - orta işləmə müddəti 378
İndeks(i) təsadüfi kəmiyyətin; paylanmanın 378
İndikator(u) hadisənin 379
 - dəyişən 379
 - metrika 379
 - , çoxluğun 379
İndividual erqodik teorem 379
İnersion proqnoz 379
İnfinitezimal matris 379
 - operator 379
 - sistemi, ölçülərin 380
İnformant 380
İnformasion ardıcılıq 381
 - dayanıqlılıq 381
 - ehtiyatda saxlama 382
 - korrelyasiya əmsalı 382
İnformasion matris 382
 - - Fişer informasiyası üzrə 382
 - metrika(sı) Riman 383
 - məsafə 383
 - ölçü 384
 - sıxlıq 385
 - yayınma(sı) Kullbak – Leybler – Sanovun 385
İnformasiya 385
 - apriori 385
İnformasiya miqdarı 385
 - - qeyri – parametrik 386
 - nəzəriyyəsi 386
 - ötürmə sürəti 390
İnformativlik 390
 - (y i) dəyişənlər toplusunun 390
İnikas prinsipi 390
İnteqral bərpa teoremi 391
 - çevirmə 391
 - ehtimalı 391
 - həndəsə 392
 - limit teoremi 393
 - miqyas(i) korrelyasiyanın 394
 - struktur(u) ehtimal metrikasının 394
 - , trayektoriyalar üzrə 394
İnteqrallanma Boxnerə görə 394
 - Pettisə görə 394
İnteqrallanması, təsadüfi prosesin 394
İnteqrallanmış spektr(i) qeyri – stasionar prosesin 394
İntensivlik 394
 - (y i) axının 394
 - anı 394
 - (y i) düzxətlər prosesinin 394
 - funksiyası, imtinanın 394
 - qızılğülü 394
 - ölçüsü 394
İntensivliyi, lif prosesinin 395
 - , prosesin 395
İnterdesil açım (genişlik) 395
 - genişlik 395
İnterferens kanal 395
İnterval statistik qiymət 395
 - verilənlərin statistikası 395
İntervallar şkalası 395
 σ – invariant halqa 395

- kriteri 395
- ölçü 396
- σ -- ölçü 396
- paylanma 396
- paylanmalar ailəsi 396
- Invariant statistik qiymət** 396
- struktur 396
- statistika 396
- Invariantlıq statistik oyunlar nəzəriyyəsində** 396
- (ğ) statistik prosedurun 397
- Invariantlıq prinsipi Banax fəzalarında** 398
- xidmət sistemi nəzəriyyəsində 398
- sanki yəqin 398
- təsadüfi proseslər üçün 398
- yığılma sürəti 399
- İnversiya** 400
- İonesku Tulçi teoremi** 400
- İrrequlyar nöqtə** 400
- İstiqamət qızılğulu** 400
- İstiqamətləndirici statistika** 400
- İstiqamətlənmiş çoxluq** 400
- İşarə metodu, korrelyasion analizin** 400
- İşarələr kriterisi** 400
- İşarəvi – invariant ailə(s) təsadüfi kəmiyyətlərin** 401
- İşarəvi korrelyasiya funksiyası** 401
- İtki funksiyası** 401
- İto düsturu** 401
- ifadəsi 401
- prosesi 402
- stoxastik integralı 402
- – Nisio teoremi 402
- – Ventsel düsturu 402
- İyerarx prosedurları, təsnifatın** 402
- İynə** 402
- İzinq modeli** 402
- İzinvermə qabiliyyəti** 403
- İzomorfizmi, dinamik sistemlərin** 403
- İzotrop sonlu fəza** 404
- İzotrop təsadüfi çoxluq** 404
- meydan 404
- proses 404

J

Jirina prosesi 405
Jordan ayrılığı 405

K

Kafi statistik qiymət 406
Kafi statistika 406

- minimal 407
- zəruri 407
- topologiya 407
- Kafilik statistik oyunlar nəzəriyyəsində** 407
- Kahan daralma prinsipi** 407
- Kalibrəmə modeli statistik mexanikanın** 407
- Kalman filtri** 408
- – Byusi metodu 408
- Kanal additiv küylü** 408
- asimmetrik 409
- asinxron 409
- bircins 409
- çoxgirişli 409
- çoxkomponentli 409
- çoxtərəfli 409
- determinik 409

- genişyayimli 409
- ikilik simmetrik 409
- interferens 409
- kvant rabitə kanalı 409
- (i) Gauss 409
- qeyri–antisipativ 409
- ;ötürücülük qabiliyyəti 409
- pisləşmiş 409
- ;rabitə kanalı 409
- semideterminik 410
- sıfır xətalı 410
- simmetrik 410
- sinxron 410
- sinxronizasiya xətləri 410
- sonlu yaddaşlı 410
- stasionar 410
- şəbəkə 410
- tərs rabitəli 410
- vəziyyətləri sayı sonlu 411
- yaddaşsız 411
- Kanonik kəmiyyət** 411
- Kanonik korrelyasiya** 411
- əmsalları 412
- Kanonik korrelyasiyalar analizi** 412
- və kəmiyyətlər 412
- ölç(ül)mə 412
- parametr 412
- paylanma 413
- spektral tənlik 413
- və natural parametrizasiya 413
- Kantor paylanması** 414
- Kantoroviç metriki** 414
- məsafəsi 414
- teoremi 415
- Karateodari teoremi ölçülər haqqında** 415
- Karleman kriterisi** 415
- şərti 415
- Karunen teoremi** 415
- Karunen – Loev ayrılığı** 415
- diskret 416
- Kaskad desimasiya** 417
- kod 417
- Kateqoriq hava proqnozu** 417
- Keçid ehtimalı Markov zəncirində** 417
- sıxlığı 417
- funksiyası 417
- intensivliyi 418
- matrisi 418
- sıxlığı 418
- Kemeni medianı** 418
- məsafəsi 419
- Kempbell ölçüsü** 419
- teoremi 419
- Kendall əmsalı rəq korrelyasiyasının** 419
- KEPSTR** 420
- Kepteyn paylanmaları** 420
- Kesten amenabellik kriterisi** 420
- Keyfiyyətə dayanıqlılıq(ğ) stoxastik modellərin** 420
- Keyfiyyətli roblastlıq** 421
- Kəmiyyət roblastlığı** 421
- Kəmiyyətə dayanıqlılıq(ğ) stoxastik modellərin** 421
- Kənar funksiya** 421
- Kəşik – ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqları** 421
- paylanma 421
- seçim 421
- təsadüfi kəmiyyət 422
- Kəsilməz axın** 422

σ – kəsilməz funksiyası 422
Kəsilməz paylanma 422

- semi-qrup 422
- Kəsişmə(s) / hasil(i) təsadüfi hadisələrin** 423
- Kəskin fərqlənən müşahidələr, a ş – ma – enmələr** 423
- Kəsmə metodu** 423
- Kəsri Bəyaz küy** 423
- Braun hərəkəti 424
- Kəsri faktor eksperiment** 424
- plan 424
- küy prosesi 424
- Ki Fan metriki** 424
- Kiçik kanonik ansambl** 424
- yayınmalar təsadüfi proseslər və dolaşmalar üçün 424
- Kifer – Veys məsələsi** 425
- – Volfovits proseduru stoxastik approksimasiyanın 425
- Kimyəvi potensial** 425
- Kinetik köçürmə tənliyi bir hissəcik halında paylanma funksiyası üçün** 425
- Klark düsturu** 426
- Klassifikator** 426
- Klaster** 426
- – anlayışı 426
- model 426
- – prosedur 426
- Klasterlərə ayrılış metodu** 426
- Kobud xətlər modeli** 426
- Kod** 427
- ağacvari 427
- (u) blok 427
- xətti 427
- (u) kaskad 427
- konvolyusion 427
- qeyri–müntəzəm 427
- qruplu 427
- rekurrent 427
- ;sürət 427
- şəbəkəvari 427
- şəbəkəvari xətti 427
- tsiklik 427
- uzunluğu 427
- ;yaddaş 427
- ardıcılığı 427
- məsafəsi 428
- söz 428
- Koder** 428
- Kodla(n)ma** 428
- baxışla 428
- ehtimalı (stoxastik) 428
- kombinator 428
- ;mürəkkəbli 428
- təsadüfi 428
- universal 428
- baxışla 428
- Kodlama teoremləri** 428
- Kodlanma(s) əlavə informasiyalı mənbənin** 428
- məlumatlar mənbənin 428
- Koherentlik** 429
- əmsalı 430
- spektri 430
- Kokran teoremi** 430
- Koks nöqtəvi prosesi** 430
- prosesi 430
- Kolmoqorov aksiomatikası ehtimal nəzəriyyəsinin** 430
- bərabərsizliyi 431
- düsturu 432

- kriterisi 432
- metrikası 432
- modeli 432
- oxşarlıq hipotezi 432
- orta kəmiyyətləri 432
- paylanması 433
- statistikası 433
- şərti 433
- Kolmoqorov teoremi seçimi** funksiyaların kəsilməzliyində 433
- sonlu-ölçülü paylanmalar haqqında 434
- uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında 434
- «üçsıra» haqqında 434
- Kolmoqorov tənlikləri** 434
- ikincimomentlər üçün 436
- Kolmoqorov tənliyi** düz 437
- tərs 437
- üçdəiki qanunu 437
- – Arak teoremi 437
- – Deyev şərti 437
- Kolmoqorov – Dub bərabərsizliyi** 437
- kvazimartinqallar üçün 437
- – Petrovski məsələsi 437
- – Smirnov kriterisi 437
- – Smirnov statistikası 439
- Kombinator analiz** 439
- ədədlər 442
- integral həndəsə 443
- kodlama 443
- konfigurasiya 427
- məsələlər klassik 443
- riyaziyyat 445
- Kombinatorika** 445
- , ehtimalı 445
- Kompakt** 445
- ölçü 445
- təkrar loqarifm qanunu 445
- Kompaktifikasiyası, faza fəzasının** 445
- Kompaktlıq(ğ) ölçülər ailəsinin** 445
- μ – Kompaktlıq 445
- Kompensator** 446
- (u) nöqtəvi prosesin 446
- Kompleks demodulyasiya** 447
- Gauss prosesi 447
- Komponent analiz** 447
- Kompozisiya** 447
- paylanmaların 448
- metodu 448
- Kompozisiyalı semi – qrup** 448
- Kompozisiyası, stoxastik nüvələrin** 448
- Konfigurasiya** 448
- Konflikt** 448
- Konflyuent analiz** 448
- Konkordasiya əmsalı** 449
- Konsentrasiya funksiyası** 449
- Konservativ keçid funksiyası** 449
- /infinitesimal matris 449
- zolaq 449
- Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi** 449
- Kontaklar prosesi** 450
- Kontinual alternativlər** 450
- integral 450
- Kontinuallıq** 451

- Kontrast** 451
- Konvolyusion(u) ehtimal ölçülərinin** 451
- kod 452
- Konvolyusion semi - qrup(u) ehtimal ölçülərinin** 452
- , ölçülərin; kanonik ifadə 453
- Konyuksiya(sı) /uyuşma(sı) hadisələrin** 454
- Kornış – Fişer ayrılığı** 454
- Korolyuk teoremi** 455
- Korrektləmə qaydaları** 455
- Korrektləyici kod, xətanı** 455
- Korrelqram** 455
- Korrelometr** 455
- Korrelyasion analiz** 455
- asılılıq 455
- bərabərsizliklər 455
- cədvəl 456
- funksional 456
- Korrelyasion funksiya** 456
- harmonikləşən 457
- xüsusi 457
- işarəvi 457
- qarşılıqlı 457
- qiymətləndirmə 457
- ortalanmış 458
- polyar 458
- reley 458
- seçimi 459
- statistik mexanikada 459
- ümumiləşmiş 459
- matris 459
- meydan 460
- nəzəriyyə 460
- nisbət 460
- ölçü 460
- pəncərə 460
- tənliklər 461
- üsul 461
- Korrelyasiya** 462
- əmsalı 463
- funksiyası 464
- radiusu 464
- Korrelyator** 464
- Korvin qrupu** 464
- Kosinor – analiz** 464
- Kospekt və kvadrat spektr** 464
- Kospekttral funksiya** 464
- sıxlıq 464
- Koşi paylanması** 464
- – Bunyakovski bərabərsizliyi 465
- Kotelnikov teoremi** 465
- – Şennon düsturu 466
- Kovariasion analiz** 466
- funksiya 466
- Kovariasion funksiya qarşılıqlı** 466
- seçimi 466
- Kovariasion matris** 466
- ;spektral ayrılış 466
- operator(u) ehtimal ölçüsü - nün 466
- pəncərə 467
- Kovariasiya** 467
- (sı) təsadüfi qapalı çoxluğun 467
- , xüsusi kovariasiya funksiyası 468
- Köçürmə – qoşma məsələsi** 468
- məsələsi; statistik model - ləşdirmə 468
- teoremi 468
- Kök(ü) təsadüfi ağacın** 468
- Kökləri – kompakt qrup** 468

- Körpü, Braun körpüsü** 468
- Kraft – Mak – Millan bərabərsizliyi** 468
- Kramer bərabərsizliyi** 468
- çevirməsi 468
- sırası 469
- şərtləri 469
- teoremi 469
- Kramer – Mizes kriterisi** 470
- – Smirnov kriterisi 470
- Rao bərabərsizliyi 470
- – Vold teoremi 471
- – Mod – Yagers prosesi 471
- Kreyn teoremi** 471
- Krilov statistik qiymətləri, paylanmanın** 471
- Krikkeberq ayrılığı** 471
- Kriptoqrafiya** 471
- Kriteri statistik** 474
- A – kriteri 474
- D – kriteri 474
- E – kriteri 474
- FPE – kriteri 474
- L_C – kriteri 474
- χ^2 – kriteri 474
- t – kriteri 474
- T^2 – kriteri 474
- ω^2 – kriteri 474
- Φ_α – kriteri 475
- Kritik ehtimal** 475
- funksiya 475
- hüdud, p – qiymət, müşahidə olunan ölçü 475
- indeks 475
- qiymət 475
- nöqtə 475
- oblast 475
- şaxələnən proses 475
- Kritikalı şaxələnən proses** 476
- Kritiküstü şaxələnən proses** 476
- Kross – periodogramı** 477
- – spektral sıxlığı 477
- Kubo – Anderson prosesi** 477
- Kullbak yayınnması** 477
- Kullbak – Leybler dağılınlığı** 477
- - informasiyon kəmiyyəti 477
- Kullbak – Leybler informasiyon məsafəsi** 477
- - – Sanov informasiyon yayınnması 477
- Kumulyant** 477
- Kumulyanta** 477
- Kumulyativ spektr** 477
- Kumulyativ spektral funksiya** 477
- - sıxlıq 477
- Kunita – Vatanabe bərabərsizlikləri** 477
- Kükrəntilər metodu** 478
- Kütləvi xidmət nəzəriyyəsi** 478
- Kvadratik balanslaşdırılmış model** 478
- xarakteristika(sı) martinqalı 478
- xəta 478
- inteqrallanan martinqal 478
- itki funksiyası 479
- Kvadratik orta xəta / standart xəta** 479
- - reqressiya 479
- - yayınma 479
- - yayınma(sı) seçimin 479
- risk 479

- variasiya(sı) martinqalın 479
- / standart yayınma 479
- Kvadratur** düsturlar təsadüfi düyünlərli 479
- spektr 480
- spektral funksiya 480
- spektral sıxlıq 480
- Kvant** Braun hərəkəti 480
- dekodla(n)ması 480
- dinamik semi-grup 480
- ehtimal nəzəriyyəsi 480
- Evklid meydanı 480
- kodla(n)ması 480
- Kvant meydan nəzəriyyəsi** aksiomatik 480
- Evklid 480
- konstruktiv 480
- nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin 481
- ölçməsi 483
- rabitə kanalı 484
- stoxastik differensial tənliyi 484
- stoxastik hesabı 484
- təsadüfi prosesi 484
- vəziyyəti 485
- Kvantil** 485
- asimptotik düsturlar 485
- Kvantlama zaman üzrə** 485
- Kvantlanması, məlumatların** 486
- Kvapen** teoremi 486
- Şvarts teoremi 486
- Kvartil** 486
- məsafə 486
- Kvaziəçim(i)** seçimin 486
- Kvazidiffuzion proses** 486
- Kvazihamar Markov prosesi** 486
- Kvaziinfinitezimal operator** 486
- Kvaziinvariant ölçü** 486
- σ – kvaziinvariant ölçü 487
- Kvazikəsilməz proses, soldan** 487
- Kvazikəsilməzlik, soldan** σ – cəbrlər axının 487
- Kvazikompaktlıq şərti** 487
- Kvazimartinqal** 487
- Kvazimetrika** 487
- Kvaziməqbul statistik** 487
- Kvaziölçü** 487
- Kvazirequlyar sistem** 487
- Kvazisimmetrik paylanma** 487
- Kvazivariasion bərabərsizlik** 487
- diffuzion prosesləri impulsal idarəetmə məsələləri 487

Q

- Qalerkin yaxınlaşması** 489
- Qalıq, paylanmanın** 489
- Qalıq cəmi, kvadratların** 489
- ekvivalent ardıcılıqları, təsadüfi kəmiyyətlərin 489
- hadisə 489
- Qalıqlar** 489
- Qallager funksiyası** 489
- Qalma müddəti** 489
- Qalton – Vatson prosesi** 489
- Qamma** – aproksimasiya 489
- faizli işləmə (imtinaya qədr) müddəti 490
- Qamma – paylanma** 490
- Qapalı çoxluq** 491
- xidmət sistemi 491
- plan 491
- sinif 491
- təsadüfi çoxluq 491
- Qarışdırma metodu** 491

- Qarışıq(ğ)ı** vəziyyətlərin 491
- Qarışıq avtoregressiv – sürüşən orta** modeli 491
- proses 491
- prosesi, çevrilənlik şərti 492
- model(i) dispersion analizi 492
- moment 492
- oyun 492
- strategiya 492
- Qarışıqlar fəzası** 492
- Qarışma** 492
- çoxqat 492
- K – qarışma 492
- Qarışma şərtləri** təsadüfi meydana üçün 493
- təsadüfi proses üçün 493
- Qarşılıqlı asılı olmamazlıq** 494
- faza spektri 494
- korrelyasion funksiya 494
- korrelyasiya funksiyası 494
- kovariasion funksiya 495
- Qarşılıqlı kovariasiya funksiyası** 495
- operatoru 495
- kvadratik xarakteristika 495
- reley korrelyasion funksiyası 495
- spektr 495
- Qarşılıqlı spektral funksiya** 495
- sıxlıq 495
- təsir 495
- təsir(i) faktorların 495
- Qauss bərabərsizliyi** 495
- bəyaz küyü 495
- çevirməsi 495
- dinamik sistemi 495
- kanalı 496
- kovariasiyası 496
- qanunu 496
- Markov prosesi 497
- modeli 498
- Qauss ölçüsü** 498
- Banax fəzasında 498
- Qauss paylanması** 499
- lokal kompakt Abel qrupunda 499
- Qauss prosesi** 499
- statistik məsələlər 500
- Viner inteqralları ilə ifadəsi 500
- semimartinqalı 501
- silindrik ölçüsü 502
- Qauss təsadüfi çoxluğu** 502
- elementi 502
- kəmiyyəti 502
- matrisi 503
- vəziyyəti 503
- Laplas paylanması 504
- Markov teoremi 504
- Nyuton metodu 504
- Qaydalı statistik** 504
- şkala 505
- Qaydıdış orta müddəti** 505
- Qaydıdış hadisə** 505
- Markov prosesi 505
- Markov zənciri 505
- V – qaydıdış Markov zənciri 506
- vəziyyət 506
- Qaydıdışlıq(ğ)ı** təsadüfi dolaşmanın 506
- Qaydıdışsız Markov zənciri** 506
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 506
- Qeyd olunmuş / sürüşən ehtiyatda saxlama** 506

- Qeyri – antisipativ funksiya** 506
- strategiya 506
- təsadüfi proses 506
- Qeyri – atomik ölçü** 506
- paylanma 506
- Qeyri – bircins** Markov zənciri 506
- şəxələnən proses, zaman üzrə 506
- Qeyri – dissipativ** Markov zənciri 507
- Qeyri – ədədi** təbiəti obyektlərin statistikası 507
- Qeyri – həssaslıq problemi** 507
- Qeyri – xətti** avtoregressiv prosesi 488
- filtrasiya(sı) təsadüfi proseslərin 507
- korrelyasiya 508
- modellər(i) təsadüfi proseslərin 509
- proqnozlanma(sı) təsadüfi proseslərin 509
- regression eksperiment 509
- regressiya 510
- tənlik, Monte-Karlo metodu ilə həll 510
- Qeyri – kommutativ** ehtimal nəzəriyyəsi 510
- inteqrallama nəzəriyyəsi 513
- Qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər** 513
- Qeyri – metrik çoxölçülü şkallanma** 513
- Qeyri – məhdud təsadüfi dolaşma** 513
- Qeyri – məxsusi paylanma** 513
- Qeyri – məqbul / mənfı olmayan müəyyən funksiya** 513
- Qeyri – məqbul statistik qiymət** 513
- Qeyri – mərkəzi xi** – kvadrat paylanma 513
- T^2 – paylanması 514
- χ^2 – paylanması 514
- Qeyri – mərkəzilik parametri** 514
- xi – kvadrat kriterisi 514
- Qeyri – müəyyənliklər münasibəti** 514
- Qeyri – mühüm vəziyyət(i)** Markov zəncirinin 514
- vəziyyətlər sinfi Markov zəncirinin 514
- Qeyri – mümkün hadisə** 514
- Qeyri – müntəzəm kod** 514
- Qeyri – parametrik** diskriminant analiz 515
- informasiya miqdar 515
- kriteri 515
- qiymətləndirilmə(sı) ehtimal sıxlığının 516
- qiymətləndirmə 516
- regression analiz 519
- spektral statistik qiymət 521
- statistik qiymət(i) spektral sıxlığının 521
- təsnif 521
- yoxlanılması, hipotezlərin 521
- Qeyri – periodik** Markov zənciri 524
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 524
- Qeyri – regulyar şəxələnən proses** 524
- Qeyri – səlis** çoxluq 524
- çoxluqlar statistikası 524
- Qeyri – simmetrik təsadüfi matris** 525
- Qeyri – stasionar axın** 525

Qeyri – stasionar təsadüfi proses:
böyük ədədlər qanunu 525
--- ; spektral nəzəriyyələr 525

Qeyri – stasionarlıq rəngi 526

Qeyri – tarazlıqlı statistik mexanika
526

Qəbul olunma ədədi 526

Qəribə attraktor 526

Qırılan Markov prosesi 526

Qırılma anı 526

Qırılmayan Markov prosesi 526

Qırmızı küy 526

Qismən balanslanmış blok plan 526

- Beyes yanaşması 526

- cazibə əbədi sonsuz bölü-
nən G qrupunun 526

**Qiymətləndirilməsi, minimal məsə-
fənin** 527

Qlison teoremi 527

Qlivenko teoremi 527

- – Kantelli teoremi 527

Qlobal kriteri 527

- limit teoremləri 527

Qnedenko teoremi 527

Qocalan paylanma 528

Qoşma köçürmə məsələsi 528

- paylanmalar 528

Qoşmalıq cədvəli, əlamətlərin 528

Qram – Şarlıye sırası 529

Qranulometriya 530

**Qrenander – Rozenblatt tip statis-
tikalar(i) spektral sıxlığının**
530

Qriffits bərabərsizlikləri 530

Qrin alfa-funksiyası 530

- funksiyası 530

- α - funksiyası 530

Qross topologiyası 530

Qruplu kod 530

Qrupda diffuzion proses 531

Qrupla gecikmə 531

Qumar, oyun 531

Qursa stoxastik məsələsi 531

Qırşayıcı funksiyası, gücün 531

Qırşayıcısı, signalın 531

- , təsadüfi prosesin 531

**Qüvvət sırası Kolmoqorov
tənliyinin** 531

Qüvvətüstlü momentlər problemi
532

L

Laq 533

Laqlar / paylanmış lokal model 533

Lanjeven tənliyi 533

Laplas metodu 533

- paylanması 533

- teoremi 534

- – Gauss paylanması 534

Latın altkvadrati 534

- düzbucaqlısı 534

- kubu 534

- kvadrati 535

Lay 536

Laylanmış seçim 536

Laylı seçim metodu 536

Lebeq ayrılığı 536

- ölçüsü 536

- teoremi 536

Lebovits bərabərsizliyi 536

Leksikoqrafik münasibət 536

Leman – Şeffe teoremi 536

Lenard – Cons potensialı 536

Levenberq – Markvardt metodu 536

**Levi ayrılığı asılı olmayan
artımlırlı təsadüfi pro-
seslərin** 537

- bərabərsizliyi 537

- inikası 538

Levi kanonik ifadəsi 538

--- Banax fəzasında 538

- metrikası 538

- meydanı 539

- ölçüsü 540

- sinfi 540

- sistemi Markov prosesi

üçün 540

- spektral funksiyası 540

- teoremi 540

**Levi – Xinqin düsturu semi-
martinqallar üçün** 540

-- kanonik ifadəsi 540

-- Kramer teoremi 540

-- Pareto paylanması 541

-- Proxorov metrikası 541

Levinson algoritmi 541

- – Derbin algoritmi 542

Ləngidici baryer 542

- vəziyyət 542

Ləngimə / gecikmə 542

- əmsalı 542

- pəncərəsi 542

Liflər prosesi 542

Limit teoremləri 542

- - diofant yaxınlaşmalarının
metrik nəzəriyyəsinin 542

-- kompakt qruplarda 546

-- Markov prosesində nis-
bətələr üçün 548

-- Markov prosesləri
üçün 548

-- Markov zəncirində
nisbətələr üçün 548

-- Markov zəncirləri
üçün 548

-- martinqal və semi-
martinqallar üçün 549

-- stoxastik differensial
tənliklər üçün 552

-- təsadüfi çoxluqlar
üçün 554

-- təsadüfi matrislər
üçün 555

-- təsadüfi proseslər
üçün 556

-- təsadüfi proseslər
üçün; martinqal metodla-
rı 562

- teoremlərinin davamolanlığı 563

**Limiti, təsadüfi hadisələr ardıcılığı-
nın** 564

Lindeberq şərti 564

- - təsadüfi matrislər

üçün 564

- – Feller teoremi 564

Lindelöf xassəsi 565

Linnik dispersion metodu 565

- sinfi 565

- yığılma zonaları 565

Littl düsturu 565

Liuvill stoxastik differensial tənliyi
565

Logistik paylanma 565

Lokal bərpə teoremi 566

- bircins təsadüfi meydan 566

- bircins təsadüfi proses asılı ol-
mayan artımlırlı 566

- erqodik teoremi 566

- ən güclü kriteri 566

- inteqrallanan proses 567

- izotrop təsadüfi meydan 567

- limit teoremləri 567

Lokal martinqal 567

-- ; inteqral ifadə 568

- sonlu ölçü 568

Loqarifmik doğruxaoxşarlıq funksiyası
568

- normal paylanma 568

- paylanma 569

Loqnormal paylanma 569

Lyapunov bərabərsizliyi 569

- kəsiş 569

- stoxastik funksiyası 569

- şərti 570

- teoremi 570

Lyusian 570

M

Mahalanobis metrikası 571

- məsafəsi 571

**Mahiyyyətə tam sinif(f) kriteri-
lərin** 571

**Maksimal addım(i) paylanma-
nın** 571

Maksimal doğruxaoxşarlıq metodu
571

-- prinsipi 573

-- spektral statistik qiyməti 573

-- statistik qiyməti 573

- entropiya; spektral statis-
tik qiymət 573

- korrelyasiya əmsalı 574

- kütlə metodu 574

- kriteri 574

- sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 575

Maksvell paylanması 575

- – Bolsman statistikası 576

Maliyyə riyaziyyatı 576

Mallyavin hesabı 579

- stoxastik törəməsi 580

Maltus parametri 580

Mann – Uitni kriterisi 581

Marginal doğruxaoxşarlıq funksiyası
581

- paylanma 581

- paylanma funksiyası 581

- yanaşma 581

Markov anı 581

- avtomorfizmi 581

- bərabərsizliyi 581

Markov bərpə prosesi 581

-- tənliyi 581

- dinamik semi - qrupu 581

Markov xassəsi 581

-- geniş mənada 582

- inikası; dinamik inikas 582

- keçid funksiyası 582

- Gauss prosesi 582

- məlumatlar mənbəi 582

- modeli 583

- ölçüsü 583

Markov prosesi 583

-- ; additiv funksional 585

-- bircins 586

-- ; böyük ədədlər qanunu
585

-- ; çevirmələr 586

-- ; çevrilmiş 587

-- ; davamı 587

-- ; dayanıqlılıq 587

-- Dirixle forması 587

- ;ekskursiya 588
- ;enerji 588
- ;faza fəzası 588
- ;faza fəzasının kompaktifikasiyası 588
- ;funktional 589
- ;geniş mənada 589
- ;hissəsi 589
- ;xəttivari 589
- ;idarəolunan 589
- ;ikili / dual 589
- ;ikitərəfli 589
- ;infinitezmal xarakteristikalar 589
- ;keçid funksiyası 590
- ;kvazihamar 590
- ;qarşılıqlı təsirli 590
- ;qayıdışlı 591
- ;qərarların qəbulu 591
- ;qırılan 591
- ;qırılmayan 591
- ;Levi sistemi 591
- ;limit teoremləri 591
- ;limit teoremləri nisbətlər üçün 591
- ;lokal müddət 591
- ;mərkəzi limit teoremi 592
- ;mütləq paylanma 592
- ;normal 592
- ;rezolvent 592
- ;sağ 593
- ;sərhəd şərti 593
- ;sıçrayışvari 593
- ;sıfır vahid qanunu 594
- ;standart 594
- ;stasionar 594
- ;statistik məsələlər 594
- ;şərti 594
- ;topoloji qayıdışlı 594
- ;trayektoriyaların daxili xassələri 594
- ;vəziyyətləri çoxluğu hesabı 594
- ;vəziyyətləri çoxluğu sonlu 597
- ;zamanın təsadüfi əvəzlənməsi 600
- ;sıçrayışvari idarəolunan 601
- semi-grupu 601
- strategiyası 601
- Markov təsadüfi dolaşması** 601
- ;meydanı 601
- L-- ;meydanı 602
- yerindəyişməsi 602
- yerləşməsi, hissəciklərin 602
- Markov zənciri** 602
- ;açılmış formada 607
- ;atsiklik / aperiodik 607
- ;ayrılan 607
- ;ayrılmayan 607
- ;bircins 607
- ;çevrilmiş 607
- ;daxil edilmiş 607
- ;dissipativ 607
- ;ekssessiv funksiya 608
- ;ekssessiv ölçü 608
- ;erqodik 608
- ;erqodik sinif 608
- ;əlaqəli vəziyyətlər 608
- ;faza fəzası 608
- ;fundamental matris 608
- ;harmonik funksiya 608
- ;Harris qayıdışlı 608
- ;hesabı 608
- ;idarəolunan 608
- ;keçid ehtimalı 608
- ;klassik mənada 608

- ;qayıdışlı 608
- ;qayıdışsız 608
- ;qeyri-bircins 608
- ;qeyri-dissipativ 608
- ;qeyri-periodik 608
- ;limit teoremləri 608
- ;limit teoremləri nisbətlər üçün 608
- ;mürəkkəb 608
- ;mütləq paylanma 608
- ;orta qayıdış müddəti 609
- ;periodik 609
- ;potensial nəzəriyyəsi 609
- ;requlyar 609
- ;statistik modelləşdirmə 609
- ;təkrar loqarifm qanunu 609
- ;tranzitiv 609
- ;tsiklik 609
- ;tsiklik vəziyyət 609
- ;uducu vəziyyət 609
- ;vəziyyətlərin altsinfi 609
- ;vəziyyətlərin çoxaldılması 609
- ;vəziyyətlərin əhəmiyyətli sinfi 609
- ;vəziyyətlərin mühüm sinfi 609
- ;vəziyyətlərin müsbət sinfi 609
- ;vəziyyətlərin sıfır sinfi 609
- ;vəziyyətlərin təsnifatı 609
- Martin kompaktı** 611
- sərhədi Markov prosesinin 611
- Martinqal** 612
- dayandırılmış 615
- ;kvadratik xarakteristika 615
- kvadratik integrallanan 615
- ;kvadratik variasiya 615
- ;limit teoremləri 616
- lokal 616
- ;moment eynilikləri 616
- ;öngörül xarakteristika 616
- öngörül kvadratik variasiya 616
- çevirməsi 616
- problemi 616
- Masse kriterisi** 617
- Median** 617
- -- ;meylsiz statistik qiymət 617
- Mellin – Stiltjes çevirməsi** 617
- Mellous C_p - kriterisi** 617
- Meşə təsadüfi** 617
- Meta teoremi** 617
- Meteoroloji informasiyanın optimal istifadəsi** 617
- itkilər funksiyası 618
- ölçmələrin statistik nəzəriyyəsi 618
- proqnoz alternativ 619
- zaman sıralarının əlaqəliliyi 619
- Metrik çoxölçülü şkalə(n)ma** 620
- entropiya(s) i) dinamik sistemin 620
- ətraf 620
- invariant 620
- izomorfizm 620

- məsafələr metodu 620
- tranzitiv stasionar təsadüfi proses 620
- tranzitivlik 620
- Meydan; σ – meydən** 620
- Meyer ayrılışı** 620
- Meyl** 620
- (i) statistik qiymətin 620
- Meylədüzəliş metodu** 620
- Meylli statistik qiymət** 621
- Meylsiz etibarlı çoxluq** 621
- həlledici funksiya 621
- xətti statistik qiymət 621
- kriteri 621
- ölçmə 621
- plan 621
- Meylsiz statistik qiymət** 621
- orta mənada 622
- ;risk funksiyasına nəzərən 622
- Meylsizlik statistik oyunlar nəzəriyyəsində** 622
- (y) i) statistik prosedurun 622
- Məhdud şəxələnen proses** 623
- təkrar loqarifm qanunu 623
- təsadüfi xətti operator 623
- variasiya 623
- Məhdudlayıcı** 623
- Məhdudluq ehtimala görə** 623
- Məxsusi ədədlər, empirik kovariasion matrislərin kənar məxsusi ədədləri** 623
- / cırlaşmayan paylanma 623
- Məqbul həlledici funksiya** 623
- kriteri 623
- matris 624
- plan 624
- Məqbul statistik qiymət** 624
- xətti 624
- topologiya 624
- yerindəyişmə(s) i) ölçünün 624
- zolaq 625
- Məqbulluq(ğ u) həlledici funksiyanın** 625
- statistik kriterinin 625
- statistik prosedurun 625
- təsnifat prosedurunun 626
- Məqsədyönlü proyeksiyalə(n)ma(s) i) çoxölçülü verilənlərin** 626
- Məlumat** 626
- Məlumatlar mənbəi** 626
- çoxkomponentli 627
- Markov 627
- yaddaşsız 627
- Məlumatların bərpəolunma dəqiqliyi** 627
- hasilolunma sürəti 628
- kvantlanması 628
- Mənbə məlumatların** 628
- Mənbələr və kanallar şəbəkələri** 628
- Mənfi binomial paylanma** 629
- hiperhəndəsi paylanma 630
- korrelyasiya 630
- müəyyən funksiya 630
- müəyyən nüvə 631
- polinomial paylanma 631
- Mənsubluq funksiyası** 631
- Mərkəz(i) təsadüfi kəmiyyətin** 631
- Mərkəzi qarışıq moment** 631
- Mərkəzi limit teoremi** 631
- Banax fəzasında 634
- qruplarda 636

--- Markov prosesləri üçün 637
 --- təsadüfi çoxluqlar üçün 637
 --- təsadüfi determinantlar üçün 637
 - moment 637
Mərkəzlənmə və normalanma(s i) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının 638
Mərkəzlənmiş korrelyasion funksiya 638
 - qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası 638
 - qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası təsadüfi proseslərin 638
Məşğulluq periodu 638
Mikrokanonik paylanma 638
Miqrasiya şəxslənən prosesdə 638
Miqyas çevirməsi 638
Miqyas parametri 638
 - ;statistik qiymət 638
Minimaks həll (qərar) 639
 - kriterisi 639
 - risk 639
 - statistik qiymət 639
 - strategiya statistik oyunlar nəzəriyyəsində 639
 - yanaşma 639
Minimaksliq(ğ i) statistik prosedurun 639
 - kriterisi 640
Minimal ekssessiv funksiya 640
 - həlledici funksiya 640
 - kafi statistika 640
 - kəsiyi, qrafın 640
 - metrika 640
 - metrikalar metodu 641
 - məsafə funksionalı / MM funksional 641
 - məsafə statistik qiymət 641
 - tam sinif(f i) kriteriləri 641
 - tam sinif(f i) strategiyaların 641
 - zənciri, qrafın 641
 - zəncirlər və kəsiklər metodu 641
Minkovski bərabərsizliyi 641
 - əməlləri 642
 - fəzası 642
 - funksionalı 642
 - gözənilən ölçüsü 642
Minlos teoremi 643
Mizes bərabərsizliyi 643
Moda 643
Modal – meylsiz statistik qiymət 643
Model 643
F – model 643
XY - model 643
XYZ - model 643
 $P[\varnothing]_2$ – modelləri, kvant meydan nəzəriyyəsinin 643
Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların 644
Modelləyici formula 645
Modulyasiya və demodulyasiya 645
Modulyasiyalanmış siqnal 646
Moment 646
 - ölçüsü nöqtəvi prosesin 647
 - spektral sıxlığı 648
 - spektri 648
Momentlər funksiyası 648

Momentlər metodu 649
 -- riyazi statistikada 649
Momentlər problemi 649
 -- qüvvət üstlü 649
Monoton artan hadisələr ardıcılığı 649
 - azalan hadisələr ardıcılığı 649
 - çoxluqlar sinfi 649
 - doğruxaoxşarlıq nisbəti 650
 - invariant 650
 - paylanma 651
 - strukturu, sistemin 651
Monte – Karlo metodu 651
 --- ;alqoritmin zamanətli dəqiqliyi 652
 --- ;elliptik tənliklərin həlli 652
 --- ;xətti tənliklərin həlli 652
 --- ;qeyri-xətti tənliklərin həlli 652
 --- ;statistik paylanmanın naməlum sıxlığının qiyməti 652
 --- ;zəruri işin həcmi 652
Morqan ədədləri 652
Mozaika 652
Mövsüm dəyişmələri 652
 - effekti 653
 - modeli / Harris mövsüm modeli 653
Muavr – Laplas teoremi 653
Mud kriterisi 653
Multiextremal eksperimentlərin planlaşdırılması 654
Multikollinearlıq 654
Multimodal paylanma 654
Multinomial paylanma 654
Multiplikativ erqodik teorem 654
 - funksional 655
 - funksiya 655
 - model 655
Multivariant nöqtəvi proses 655
Mur qrupu 655
Mustafa teoremi 655
Mühüm element(i) sistemin 655
 - prediktorların seçilməsi 655
 - sinfi, vəziyyətlərin Markov zəncirinin 656
Mühüm vəziyyət(i) Markov zəncirinin 657
Mühümlük kriterisi 657
 - ölçüsü 657
Mükəmməl ölçü 657
Müntəzəm approksimasiya, semi-martinqal 658
 - ən güclü kriteri 658
 - faktor eksperiment 658
 - integrallanan funksiya 658
 - integrallananlıq 658
 - kəsilməz semi - qrup 658
 - kvadratik metrika 658
 - metrika 659
 - optimal plan 659
 - optimal strategiya 659
 - paylanma 659
 - sonsuz kiçiklik şərti 660
 - speysinq 660
 - tutarlı qiymətləndirmə 660
Müntəzəm yığılma(s i) empirik paylanmaların 660
 - - paylanmaların 661
Mürəkkəb hipotez 661
 - Markov zənciri 661
Mürəkkəblik(y i) kodlama və dekodlamanın 661

- paylanmanın modelləşdirilməsinin; statistik qiymət 661
 - sonlu obyektlərin 661
 - sözün 661
Müsbət müəyyən funksiya 661
 - müəyyən nüvə 662
 - vəziyyət 662
 - vəziyyətlər sinfi Markov zəncirinin 662
Müstəvi – sıxlaşmış ailə(s i) ehtimal ölçülərinin 662
Müşahidə xətası 662
 - olunan ölçü 662
Müşahidələnen 662
Müşahidələrin davamolanma çoxluğu 663
 - dayandırılma çoxluğu 663
 - yenidən işlənməsi 663
Müşayiətedici funksional 663
 - sonsuz bölünən paylanma 664
Mütləq kəsilməz paylanma 664
 - - təsadüfi kəmiyyət 664
 - kəsilməzlik 664
 - kəsilməzliyi, ölçülərin 665
Mütləq moment 665
 - - r tərtib 666
 - paylanma(s i) Markov zənciri və ya Markov prosesinin 666
 - psevdoment 666
 - şkala 666
 - tezlik 666

N

Nadaraya – Vatson statistik qiyməti 667
Nat 667
Natamam blok planı 667
 - girişli xidmət sistemi 667
 - latin kvadratı 667
Natural additiv funksional 667
 - parametrlər 667
 - parametrləşmə 667
 - psevdoment 667
 - vahid(i) informasiya miqdarının, nat 667
Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi 667
Naykvist tezliyi 667
Nelson meydanı 667
Neyman erqodik teoremi 667
 - $C(\alpha)$ – kriterisi 668
 - metodu, etibarlı intervalların 668
 - strukturu 668
 - – Pirson lemması 669
 - – Ulam sxemi 669
Nəsillər metodu 669
Nəzarət / kontrol kartı 669
 - olunan dəyişənlər(i) regression eksperimentin 669
 - / kontrol planı 669
 - – ehtimali xassə 669
 - korreloqram 669
Nisbi bikompakt çoxluq 669
 - effektivlik(y i) kriterinin 670
 - entropiya 670
 - kompakt çoxluq 670
 - kompaktlıq(ğ i) ölçülər ailəsinin 670
 - tezlik 670
Nişan 670
Nişanlanmış nöqtəvi proses 670
Nişanlar fəzası 670
Nominal əlamət 670

- şkala 670
- Nomoqram** 670
- Norma(sı) təsadüfi elementi** 671
- Normal aproksimasiya** 671
- Normal cazibə** əlaqəli dayanıqlı G qanununun 671
- - zonası 671
- fəza 671
- keçid funksiyası 671
- Markov prosesi 672
- paylanma 672
- sinfi, çoxluqların 673
- tənlilər sistemi 673
- təsadüfi element 674
- təsadüfi kəmiyyət 674
- tipli proses 674
- yığılma zonası 674
- Normalanma(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının** 674
- Normalanmış** Adamar matrisi 674
- Bul cəbri 674
- korrelyasion funksiya 674
- qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası təsadüfi proseslərin 674
- latın düzbucaqlısı 674
- ölçü 674
- təsadüfi kəmiyyət 674
- Nöqtəvi paylanma qanunu** təsadüfi çoxluğun 675
- Nöqtəvi proses** 675
- - ;aparıcı funksiya 676
- - ;asılı olmayan seyrəklənmə 676
- - asılı olmayan yerindəyişmə 676
- - ən sadə 676
- - ;intensivlik 676
- - keçmiş məhdud təsirli 676
- - (i) Koks 676
- - ;kompensator 676
- - qrupda 676
- - ;moment ölçüsü 677
- - multivariant 677
- - nişanlanmış 677
- - ordinar 677
- - (i) Puasson 677
- - sadə 677
- - sonsuz bölünən 677
- - stasionar 677
- statistik qiymət 677
- Nöqtəvi təsadüfi meydan** 678
- - proses qoyulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli 678
- Növbə** 679
- ;uzunluğu 679
- ;uzunluq kəmiyyəti 679
- Növbələr nəzəriyyəsi** 679
- Nüvə** 679
- (sı) potensialların 679
- α - - (sı) potensialların 679
- Nüvə statistik qiyməti** 679
- - sıxlığın 679

O

- Oxşar kriteri** 680
- oblast 681
- statistika 681
- Oxşarlıq nəzəriyyəsi** 681
- Oqava konstruksiyası** 681
- Omeqa** – kvadrat paylanma, ω^2 - paylanma 681
- Operativ hazırolma əmsali** 682

- Operativ xarakteristika(sı) alternativ əlamətə görə nəzarət planının** 682
- - kriterinin 682
- Operator** dayanıqlı paylanma 682
- metodu 683
- ölçü 683
- stoxastik differensial tənlik 683
- Operatorqiymətli ölçü** 685
- Opsional** çoxluq 685
- proses 685
- proyeksiyası, prosesin 685
- Optimal** an 685
- Beyes həlli / π – optimal həll 685
- Optimal dayanma** 686
- - (sı) təsadüfi prosesin 686
- ε – - anı 686
- ehtiyatda saxlama 686
- həlledici funksiya 687
- interpolasiya meteorologiyada 687
- kriteri 688
- Optimal strategiya** 688
- ε – optimal strategiya 688
- Optimallığın yoxlanılması, planın** 688
- Optimallıq(ğ) statistik prosesdün** 688
- prinsipi stoxastik 689
- təliyi 689
- Ordinal dəyişən** 689
- əlamət 689
- yanaşma 689
- model(i) 689
- nöqtəvi proses 689
- Ordinarlığı, axının** 689
- Orey teoremi** 690
- Ornşteyn metrikası** 690
- - Ulenbek prosesi 690
- Orta əlaqə alqoritmi** 691
- faydalılıq 691
- gəlir kriterisi 691
- işlənilmə müddəti 691
- kəmiyyət 691
- k – orta kəmiyyətlər metodu 691
- vektoru 691
- Orta qiymət** 691
- - (i) μ ehtimal ölçüsünün 691
- - (i) təsadüfi çoxluğun 692
- Orta qiymət(i) / riyazi gözləmə(sı) təsadüfi elementin** 692
- - - - təsadüfi funksiyanın 692
- - - - təsadüfi kəmiyyətin 692
- metrika 692
- modulyar regressiya 692
- Orta müddət(i) qayıdışın** 692
- - udulmaya qədər 692
- mütləq yayınma(sı) seçimin 692
- nisbi yayınma(sı) seçimin 692
- risk 692
- yaşama müddəti 692
- yığılma çəkili 693
- Ortalanma(sı) oyunun** 693
- prinsipi təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün 693
- Ortalanmış energetik spektri** 694
- güc spektri 694
- korrelyasion funksiya 694
- Ortalanmış spektral funksiya** 694

- - sıxlıq 694
- yayınma 695
- Ortaölçülül çoxluq** 695
- Ortoqonal ayrılış(lı) təsadüfi prosesin** 695
- bloklar 695
- cədvəl 695
- fırlanma(sı) faktor oxlarının 695
- funksiyalar empirik 695
- kublar 695
- kvadratlar 696
- latın düzbucaqlıları 696
- latın kvadratı 696
- planlaşdırılma 696
- regressiya 696
- təsadüfi matris 696
- Ossilyar təsadüfi proses** 697
- Oyun statistik** 697
- Oyunu, iki şəxs** 697

Ö

- Ölçmə / ölçülmə** 700
- xətası 700
- Ölçmə şkalası** 700
- - təsnifat 700
- Ölçmələr nəzəriyyəsi** 700
- Ölçü** 701
- asılı olmayan qiymətlərli 704
- (sü) birölçülül diffuziyanın 704
- ;daşıyıcısı 704
- (sü) kriterinin 704
- ;məqbul yerindəyişmə 704
- ortoqonal qiymətlərli 704
- təsadüfi 704
- ;variasiyası 704
- σ – ölçü 704
- Ölçülən axın** 704
- bölgü 704
- Ölçülən çoxluq** 704
- C – ölçülən çoxluq 704
- fəza 704
- Ölçülən funksiya** 704
- σ – ölçülən funksiya 705
- inikas 705
- qrup 705
- paralelepiped 705
- seçmə 705
- semi - axını 705
- vektor fəza 705
- Ölçülənlik** Boxnerə görə 706
- Lebeqə görə 706
- Luzinə görə 706
- Ölçülərin qovuşması** 706
- Ölçülməyən çoxluq** 706
- Ölçülül fəza** 706
- dim. – ölçülül / dimensionluq** 707
- dim. – ölçünün azaldılması** 707
- Öləzilənməsi** Markov prosesi - nin 707
- Öngörül çoxluq** 707
- dayanma anı 707
- xarakteristika(sı) martinqalın 707
- kvadratik variasiya(sı) martinqalın 707
- Markov anı 707
- proses 707
- proyeksiyası, prosesin 707
- təsadüfi proses 708

Örtüm ehtimalı / etibarlı ehtimal 708
 Ötüm / eksses anı 708
 - - kəmiyyəti 708
 - müddəti / eksses 708
 Ötürmə əmsali 708
 Ötürücü funksiya 708
 Ötürücülük qabiliyyəti, kanalın 708
 Öyrədicə seçim 709
 Özü-özünə ayrılan paylanma 709

P

τ – paçka 710
 Palm axını 710
 - düsturları 710
 - funksiyaları 710
 - paylanması 710
 Palm – Xinqin teoremi 710
 - - tənlikləri 711
 Parabolik interpolasiya 711
 - regressiya 711
 Parametrik model; spektral sıxlığın identifikasiyası 711
 - - ; tərtdibin seçilməsi 712
 - ölçüsü, axının 713
 - spektral statistik qiymət 713
 Parçalanma metodu 713
 Parçalayıcı an 714
 Pareto paylanması 714
 - planlar çoxluğu 714
 Parzen korrelyasion pəncərəsi 714
 - kriterisi avto regressiv ötürücü funksiyanın 714
 - statistik qiyməti 714
 Paskal paylanması 714
 Passiv eksperiment 714
 Patnayk çevirməsi 714
 Payerls şərti 715
 - tənliyi 715
 Paylanma 715
 - , bircins fəzada ehtimal paylanması 715
 - (s) ehtimalın 716
 - (s) empirik kovariasion matrisin məxsusi ədədlərin vektorlarının 717
 - kvazisimmetrik 717
 - (s) təsadüfi çoxluğun 717
 - (s) təsadüfi kəmiyyətin 717
 - (s) təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyanının 717
 - (s) təsadüfi qapalı çoxluğun 718
 - (s) təsadüfi matrisin 718
 B – paylanma 718
 F – paylanma 718
 χ – paylanma 718
 χ^2 – paylanma 718
 Γ – paylanma 718
 ω^2 – paylanma 718
 t – paylanma 718
 T^2 – paylanma 718
 U – paylanma 718
 W – paylanma 718
 z – paylanma 718
 Paylanma funksiyası; asimptotik düsturlar 718
 - - təsadüfi kəmiyyətin 718
 - indeksi 719

- qanunu 719
 Paylanma sıxlığı; asimptotik düstur 719
 - - çoxölçülü 719
 Paylanmalar eynitipli 719
 - semi - qrupu 719
 - tipi 720
 Paylanmaların kompozisiyası 720
 - konvolyusiyası 720
 - qarışığı 720
 - yığılması 720
 Paylanmanın atomu 720
 - qalığı 720
 - mərkəzi 720
 - səpələnməsi 720
 Paylanmış gecikmələr modeli 720
 Periodik korrelyar təsadüfi proses 721
 - Markov zənciri 722
 - paylanmış təsadüfi proses 722
 - vəziyyət(i) Markov zəncirinin 722
 Periodoqram 722
 - statistikasi spektral sıxlığının 723
 Periodu, yaşama müddətinin 723
 Perkolyasiya 723
 - nəzəriyyəsi 723
 - /sızma prosesi 724
 Perron kökü 724
 Persentil 724
 Pettis inteqralı 724
 - teoremi 724
 Pille anı 724
 - - birinci (k-ci) 724
 - - paylanması 724
 Pille boyu 724
 - - birinci (k-ci) 724
 - - paylanması birinci (k-ci) 724
 - cütü 724
 - indeksi birinci (k-ci) 724
 - nöqtəsi, birinci (k-ci) ciddi üst 724
 - nöqtəsi, birinci (k-ci) üst 724
 Pilləvari Markov prosesi 724
 Pilləvari təsadüfi proses 724
 - - - asılı olmayan artımlarla 725
 Piroqov – Sinay teoremi 725
 Pirson çevirməsi 726
 - əyriyə 726
 - paylanmaları 726
 - ranq korrelyasiya əmsali 727
 - teoremi 727
 Pisarenko spektral statistik qiyməti 727
 Pitman statistik qiyməti 727
 Plan 728
 Φ – Plan 728
 - matrisi 728
 Planlaşdırılması, eksperimentin 728
 - - ardıcıl 730
 - - hipotezlərin yoxlanılması üçün 730
 - - riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün 730
 - - eksperimentlərin 731
 - - , imitasion eksperimentin 731
 - - , multiektremal eksperimentlərin 732
 - - , süzgəcləyici eksperimentlərin 732
 Planşerel eyniliyi 732
 Polinomial bircins xaos 732
 Polinomial / multinomial əmsal 732
 - - paylanma 732
 - regressiya 732
 - - sxem 732

- yerləşməsi, hissəciklərin 732
 Polispektr 733
 Polispektral funksiya 733
 - sıxlıq 733
 Pollaçek – Spitsər eyniliyi 733
 Polski fazası 733
 Polyar çoxluq 733
 - korrelyasion funksiya 733
 - metodu, korrelyasion analizin 734
 Populyasion genetikanın ehtimal paylanmaları 734
 Potensial 738
 α – potensial 738
 - (i) Gibbs meydanının 738
 - - martinqallar nəzəriyyəsinə 739
 - - əngələdayanılıqlıq 739
 - funksiya 739
 Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün 739
 - - Markov zənciri üçün 742
 Poya hesablamə nəzəriyyəsi 743
 - paylanması 743
 Poya teoremi 744
 - - qeyri-məhdud təsadüfi dolaşmalar üçün 744
 Pozulma anı 744
 Prediktant 744
 Prediktor 744
 Prediktorların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi 744
 Prefiks çoxluq 744
 Prinsipial tay 744
 Prioritet 744
 Prioritetli sistem 744
 Produkt – vəziyyət 744
 Proxorov kriterisi 744
 - metrikası 745
 - şərti 745
 - teoremi təsadüfi proseslər üçün 745
 Proqnozlaşdırmanın Braun metodu 745
 Proqnozlaşdırma, təsadüfi proseslərin 745
 Proqnozu, havanın ehtimalı 745
 - - kateqoriq 745
 - - keyfiyyətin statistik qiyməti 745
 - - statistik 746
 Proqressiv ölçülən proses 746
 Prosentil 746
 (E, h) – proses 746
 (G, h) – proses 746
 (G, h_u) – proses 746
 (M_λ, h) – proses 746
 h – proses 746
 Protominimal metrika 746
 Proyeksiya(sı) ranq statistikasının 746
 - təsadüfi çoxluğun 746
 Proyektiv limit ölçülərin proyektiv sisteminin 746
 - sistemləri, ölçülərin 747
 - statistik qiymət 747
 Psevdointeqral 747
 Pseudomoment 748
 Pseudomoment, fərq 748
 Pseudotəsadüfi ədəd 748
 Puankare teoremi qayıdış haqqında 748
 Puasson axını 748

- aparıcı funksiya 748
- Bul modeli 748
- cəmləmə düsturu 748
- həndəsi prosesi 749
- küyü 749
- nöqtəvi prosesi 749
- ölçüsü 750

Puasson paylanması 750

- lokal kompakt Abel qrupunda 751
- mürəkkəb/ümumiləşmiş 751
- ümumiləşmiş 751

Puasson prosesi 752

- impulsal 752
- ümumiləşmiş 752
- şəbəkəsi 753
- teoremi 753
- təsadüfi meydanı 753

R

Rabitə kanalı 754

Rademaxer ardıcılığı 754

- teoremi 754

Radon fəzası 754

- ölçüsü 754

Radon – Nikodim xassəsi Banax fəzasının 754

- teoremi 755
- törəməsi 755

Radonlayıcı operator 755

Randomizasiya 756

- (s) kriteriləri, kriterilərin yerdəyişmələri 756
- (s) oyunun 756

Randomlanmamış həll 756

- həlledici funksiya 756
- kriteri 756
- strategiya 756

Randomlanmış bloklar planı 756

Randomlanmış həlledici funksiya 756

- qayda 756
- kriteri 756
- oyun 756
- plan 756
- statistik qiymət 756
- strategiya, qarışıq strategiya 757

Ranq korrelyasiya əmsalı 757

- korrelyasiyası 757
- kriterisi 758
- statistikası 758

Ranqlanma 758

Ranqlar cəmi kriterisi 758

- vektoru 758

Rao kriterisi 759

Rao – Blekuell teoremi 760

- Kolmoqorov teoremi 760

Rao – Kramer bərabərsizliyi 760

- Volfovits bərabərsizliyi 760

Raykov teoremi 760

Realizasiya 760

- (s) təsadüfi funksiyanın 760

Reduksiyası, verilənlərin (əlamətlərin) 760

Redüslənmiş (standart növ) latin kvadratı 761

- sxemi, eksperimentin 761
- şəxələnen proses 761

Regenerasiya 761

- anı 761
- müddəti 761

Regenerativ proses 761

- dayanıqlılıq 762

Rekord qiymət 762

Rekurrent axın 762

- ən kiçik kvadrlar metodu sonlu yaddaşlı 762
- hadisə 763
- kod 763
- qiymətləndirmə 763
- statistik qiymət 764

Regression analiz 764

- dəyişəni, regressor 765

Regression eksperiment 765

- matrisi 766
- eksperimentlərin planlaşdırılması 766
- əmsallar matrisi 769
- model 771

Regression proqnoz 771

- xətası 771
- statistik qiymət 771

Regressiya 771

- düzxətti 771
- əmsalı 771
- əyrisi 771

Regressiya funksiyası 771

- xətti interpolasiya 771

- müşahidələr üzrə statistik qiymət 771

- xətti / əyrisi 772

- matrisi 772

- müstəvisi 772

- səthi 772

- spektri 772

- tənliyi 772

Regressogram 773

Regressor 773

Requlyar birölçülü diffuziya 773

- çoxluq 773
- Dirixle forması 773
- Markov zənciri 773
- nöqtə çoxluq üçün 773
- ölçü 773
- sərhəd nöqtəsi 773
- şərti ehtimal 773
- təsadüfi meydan 773

Requlyarlanma sərhədi 773

Requlyarlığı, ölçünün 773

Requlyarlıq(ğ) təsadüfi prosesinin trayektoriyasının 773

Reley feyding / donması 773

- korrelyasion funksiya 773
- metodu korrelyasion funksiyaların təyin olunmasının 774

- paylanması 774

- prosesi 775

Renormalizasion çevirmə 775

- qrup 775

Renyi entropiyası 776

- kriterisi 776
- paylanma funksiyası 777
- statistikası 777

Reprezentativ xəta 777

- seçim 777

Restriktiv statistik qiymət 777

Revuz ölçüsü 777

Rey prosesi 777

- rezolventi 777
- Nayt kompaktifikasiyası 778

Rezolvent 778

- (i) asılı olmayan artımlarlı təsadüfi prosesin 778

- eyniliyi 778

- tənliyi 778

Rəqəmsal modulyasiya 778

Ridc statistik qiymət 778

Riçardson üçdə dörd qanunu 778

Riman informasiya metrikası 778

Risk 779

- minimaks 779
- (i) strategiyanın 779
- funksiyası 779

Riss ayrılığı 779

Riyazi gözləmə 779

- (s) empirik paylanmanın 780

- (s) təsadüfi çoxluğun 780

- (s) təsadüfi elementin 780

Riyazi statistika 780

- asimptotik metodlar 786

- qeyri-parametrik metodlar 789

- statistikanın cədvəlləri 790

- stereologiya 791

Robast statistik qiymət 791

Robastlıq(ğ) statistik prosedurun 793

Robbins – Monro proseduru stokastik approksimasiyanın 794

Rossberq teoremi 795

Rozenblatt – Parzen statistik qiyməti paylanma sıxlığının 795

S

Sabit kod, zaman üzrə 796

- taktlı interval 796

Sadə hipotez 796

inikas(i) Banax fəzasının 796

- kəsiyi, qrafın 796

- metrika 796

- nöqtəvi proses 796

- təsadüfi kəmiyyət 796

- zənciri, qrafın 796

Sağ Markov prosesi 796

- Palm paylanması 797

- təsadüfi dolaşma 797

Sanki Borel funksiyası 797

- invariant kriteri 797
- separabelqiymətli inikas 797
- stasionar təsadüfi proses 797

Sapoqov teoremi 797

Sayıç ölçü(s) nöqtəvi prosesin 797

- proses 797

Sazonov xassəsi Banax fəzasının 798

- teoremi 798

- topologiyası 798

Seçilməsi, ən yaxşı obyektin 798

Seçim 798

- açım 799

- kəsik 799

- laylanmış 799

- reprezentativ 799

- senzurlanmış 799

- səpələnmə 799

Seçimi asimmetriya əmsalı 799

- baş komponentlər 799

- bloklar 799

- dispersiya 799

- ehtimal fəzası 799

- eksses əmsalı 799

- funksiya 800

- xarakteristika 800

- intervallar (aralıqlar) 800
- kəsilməzlik(y i) t ə s ə d ü f i p r o - s e s i n 800
- korreloqram 800
- korrelyasion funksiya 800
- korrelyasiya əmsalı 800
- kovariasion funksiya 801
- kovariasiya 801
- kvantil 801
- median 801
- metod 801
- moment 802
- nöqtə 802
- orta 802
- paylanma 803
- rəqressiya əmsalı 803
- statistik araşdırma 803
- tezlik 804
- vahid 804
- verilənlərin çəkiləndirilməsi 804
- Seçimin həcmi** 804
- Seçki məsələsi** 804
- Seçmə metodu** 805
- Sehrli kvadrat** 805
- Selektor** 805
- Semi - additivlik** 805
- Semi - axın** 805
- Semi – cəbri, çoxluqların** 805
- Semi – dairəvi qanun** 805
- Semi - dayanıqlı paylanma q r u p d a** 805
- proses 805
- Semi – deterministik kanal** 805
- Semi – halqası, çoxluqların** 805
- Semi - interkvartil genişlik** 805
- Semi - invariant** 805
- spektral sıxlıq 806
- Semi – kəsilməz birinci təsadüfi proses** asılı olmayan artımları 806
- yuxarıdan model 806
- yuxarıdan (aşağıdan) sonsuz bölünən proses 806
- Semi - qrup** 806
- Semi – Markov prosesi** 806
- idarəolunan 807
- ; qeyd olunmuş vəziyyət
- də qalma müddəti 810
- qərarların (həllərin) qəbul edilməsi 810
- təsadüfi çoxluğu 810
- Semi – polyar çoxluq** 810
- Semi – variasiya(s i) vektor öl- çünün** 810
- Semimartinqal** 810
- ; limit teoremləri 810
- Semimartinqalın filtrasiyası** 810
- Sentil** 810
- Senzurla(n)ma** 810
- Senzurlama; təsadüfi** 811
- anı 811
- anı, potensial 811
- Senzurlanma evolyusion** 811
- Senzurlanmış seçim** 811
- Seperabel σ – cəbri** 811
- münasibət 811
- proses 811
- Serial korrelyasiya əsmalı** 812
- Seriyalar kriterisi** 812
- sxemi, üçbucaq sxemi 812
- Sevastyanov düsturu** 813
- prosesi 813
- Seyrəklənmə** 813

- (s i) axının 813
- Seyrəklənmiş / zərif çoxluq** 813
- Səda funksiyası** 814
- , filtrin 814
- Sədd** – avtoreqressiv proses 814
- modeli 814
- nöqtəsi 814
- Səhv, xəta, fərq** 814
- dekodlama ehtimalı 814
- Səpələnmə(s i) paylanmanın** 815
- seçimin 815
- təsadüfi kəmiyyətin 815
- ellipsoidi 815
- Səpələnmiş ölçü** 815
- Sərbəst enerji** 815
- qaz 816
- Markov meydanı 816
- meydan 816
- Sərhəd** – çıxış 816
- – giriş 816
- məsələləri təsadüfi dolaş- malar üçün 816
- prosesi 818
- Səsvermə prosesi** 818
- Sferalar üzrə dolaşmalar metodu** 818
- Sferik Bhattaçarya – Rao məsafəsi** 819
- simmetrik paylanma 819
- Viner prosesi 820
- Sferiklik kriterisi** 820
- Sıçrayış anı** 820
- Sıçrayışlar ölçüsü** 820
- Sıçrayışvari Markov prosesi** 820
- proses idarəolunan 821
- təsadüfi proses 821
- Sıfır çoxluq** 821
- sinfi, vəziyyətlərin M a r k o v zəncirinin 821
- Sıfır – vahid qanunu** 821
- - - M a r k o v prosesləri üçün 821
- vəziyyəti M a r k o v zənciri- nin 822
- Sıfıral seriyalar sxemi** 822
- Sığortalamanın riyazi nəzəriyyəsi** 822
- Sıx ölçü** 823
- yerləşmə sərhədi 823
- Sıxlığı, çıxış ehtimalının** 823
- ehtimal paylanmasının 823
- ölçülər ailəsinin 823
- Sıxlığı, paylanmanın; asimptotik düstur** 824
- ; müşahidələr üzrə sta- tistik qiymət 824
- , stoxastik nüvənin 825
- Sıxlıq(ğ ı) keçid ehtimalların- nın** 825
- stoxastik differensial tənliyin həllinin paylan- masının 825
- təsadüfi matrisin pay- lanmasının 825
- Sıxlıq, ehtimal sıxlığı** 825
- operatoru 826
- Sınaq** 827
- Sınaqların asılı olmamazlığı** 828
- Sırf artım prosesi** 828
- atomik ölçü 828
- kəsilen martinqal 828
- Sızma / perkolyasiya nəzəriyyəsi** 828
- Siqma – cəbri, çoxluqların** 828
- , hadisələrin 828

- Siqma cəbrlər / σ – cəbrlər axını** 828
- - cəmi / birləşməsi 828
- – topoloji fəza 828
- Siqnal / küy nisbət** 828
- Siqnalın seçilib ayrılması ə n g ə l - lər fonunda** 828
- Siqnatur(u) y e r d ə y i ş m ə n i n (permutasionun)** 828
- Silindr** 828
- F – - 828
- Silindrik σ – cəbr** 828
- çoxluq 829
- ehtimal 829
- ölçü 829
- Simmetrik bölünən statistika** 830
- faktor eksperiment 830
- Fok fəzası 830
- kanal 830
- Qauss paylanması 830
- paylanma 830
- stoxastik differensial tənlik 830
- stoxastik inteqral 830
- təsadüfi matris 830
- Simmetrizasiya** 830
- bərabərsizlikləri 831
- metodu 831
- Simpleks metod** 831
- Simpson paylanması** 831
- Sinay bilyardı** 831
- Sinxron çoxgirişli kanal** 832
- kanal 832
- nöqtəvi proseslər 832
- Sinqulyar ayrılış** 832
- komponenti, ölçünün 832
- Sinqulyar paylanma** 832
- - funksiyası 832
- Sinqulyarlığı, ölçülərin** 832
- K – sistem 832
- Y – sistem 833
- Sistematik xəta** 833
- Siyahı dekodlaması** 833
- Skalyar cırlaşan ölçü** 834
- ölçülən inikası 834
- Skedastik xətt** 834
- Skeylinq münasibət** 834
- – proses 834
- Skoroxod stoxastik törəməsi** 834
- topologiyası 2 - c i n ö v k ə s i l - m ə s i olmayan funksiyala- rın $D[0,1]$ fəzasında 834
- Slepian bərabərsizliyi** 835
- müqayisə teoremi 835
- Slustki erqodik teoremi** 835
- limit sinusoidal teoremi 836
- şərti 836
- – Yul effekti 835
- Smirnov kriterisi** 836
- paylanması 837
- statistikas 837
- teoremi 837
- Snedekor paylanması** 837
- Sol Palm paylanması** 837
- təsadüfi dolaşma 837
- Son qərar funksiyası** 837
- Sonlu – additiv çoxluq funksiyası** 837
- bölgü 837
- ehtimal avtomatı 837
- Furye çevirməsi 837
- Markov zənciri 837
- ölçü 838
- σ – - ölçü 838
- σ – Sonlu ölçülü altçoxluq 838
- - çoxluq 838
- - paylanma 838

- təsadüfi çoxluq 838
- variasiya 838
- Sonsuz bölünən nöqtəvi proses** 838
- Sonsuz bölünən paylanma** 838
- asimptotikası 840
- ayrılış 840
- Banax fəzasında 841
- birtərəfli 841
- qrupda 841
- qrupda; daxilolma problemi 841
- Laplas çevirməsi 842
- müşayiətedici 842
- struktur 842
- M** --- 842
- Sonsuz bölünən paylanmaların ikilik xassəsi** 843
- qarışması 844
- Sonsuz bölünən proses** 844
- aşağıdan (yuxarıdan) səmikəsilmez 844
- təsadüfi çoxluq 844
- kiçilik şərti 844
- latın kvadratı 845
- Spektr(i) dinamik sistemin** 845
- faza spektri 845
- (i) koherentlik 845
- (i) Kolmoqorov 845
- kumulyativ 845
- (i) qarşılıqlı faza 845
- (i) planın 845
- (i) prosesin 845
- (i) sonsuz bölünən paylanmanın 845
- (i) stasionar təsadüfi prosesin 845
- (i) təsadüfi bircins meydanın 845
- (i) təsadüfi prosesin 845
- Spektal analiz(i) təsadüfi proseslərin və meydanların** 845
- zaman sıralarının 847
- analizator(u) stasionar təsadüfi prosesin 848
- Spektal ayrılış(i) kovariasion matrisin** 849
- təsadüfi funksiyanın 849
- Spektral funksiya** 851
- evolyusionar 851
- kumulyativ 851
- qarşılıqlı 851
- ortalanmış 851
- (s) sonsuz bölünən paylanmanın 851
- statistik qiymət 851
- (s) təsadüfi matrisin 851
- Spektral moment** 852
- ölçüsü 852
- nəzəriyyələri(i) qeyri-stasionar təsadüfi proseslərin 852
- ölçü 854
- pəncərə(s) 854
- semi-invariant 854
- Spektral sıxlıq kumulyativ** 856
- qarşılıqlı 856
- qeyri-parametrik statistik qiymət 856
- ortalanmış 858
- (g) n - ölçülü fəzada stasionar təsadüfi prosesin və ya bircins təsadüfi meydanın 858

- Spektal tiplər asılı olmayan** 859
- dizyunkt 859
- (i) ölçünün 859
- Spektoqram** 859
- Spesifik faktor** 859
- Speysinq** 859
- Spirmen əmsal rəng korrelyasiyasının** 859
- Spitser – Roqozin eyniliyi** 860
- Splayn – statistik qiymət** 860
- Stabil statistik qiymət** 860
- Standart Braun hərəkəti prosesi** 860
- xəta 860
- Markov prosesi 860
- Viner prosesi 860
- yayınma 860
- Standartizasiya** 860
- Stasionar artımlarlı təsadüfi proses** 861
- əlaqəli təsadüfi proseslər 861
- həndəsi proses 861
- kanal 861
- kovariasion funksiya 861
- kovariasiya(s) təsadüfi çoxluğun 861
- Markov prosesi 861
- nişanlanmış nöqtəvi proses 861
- nöqtəvi proses 861
- ölçü 861
- Stasionar paylanma** 861
- (s) bircins Markov zəncirinin 862
- Stasionar proses; statistik məsələlər** 862
- ümumiləşmiş 862
- Puasson axını 862
- strategiya 862
- təsadüfi çoxluq 862
- təsadüfi proses 862
- Stasionar təsadüfi proses; böyük ədədlər qanunu** 865
- böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu 865
- Stasionarlığı, axının** 865
- Stasionarlıq geniş mənada** 865
- Statistik analiz(i) təsadüfi meydanların** 865
- təsadüfi proseslərin 867
- Statistik asılı ansamblar** 867
- olmamazlıq 867
- olmamazlıq(g) ansambların 867
- Statistik asılı olmayan ansamblar** 867
- hadisələr 867
- cəm 867
- dayanıqlılığı, tezliklərin 867
- erqodik teorem 867
- həlledici qaydalar kateqoriyası 867
- həllər nəzəriyyəsi 868
- həllərin ümumi nəzəriyyəsi 870
- hidromexanika 871
- hipotez 871
- hipotezlərin yoxlanılması 871
- xarakteristika 874
- Statistik kriteri** 874
- məqbulluq 874
- tam sinif 874
- $C(\alpha)$ 875
- qəbul nəzarəti 876
- Statistik qiymət** 877
- tam sinif 877
- G – statistik qiymət** 877

- G_2 – statistik qiymət** 877
- L – statistik qiymət** 877
- M – statistik qiymət** 877
- R – statistik qiymət** 879
- qiymətləndirmə 879
- mexanika 881
- Statistik məsələlər qruplarda və bircins fəzalarda** 883
- (i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin 884
- model 888
- Statistik modeləşdirilmə(s) i) xidmət sistemlərinin** 888
- köçürtmə məsələlərinin 888
- Markov zəncirlərinin 889
- modeləşdirmə 889
- nəzarət, keyfiyyətə 890
- nəzəriyyəsi, qrupların 892
- Statistik oyun** 892
- invariantlıq prinsipi 894
- kafilik prinsipi 894
- meylsizlik prinsipi 894
- plan 894
- proqnozu, havanın 894
- Statistik prosedur** 895
- dayanıqlılıq 895
- effektivlik 895
- invariantlıq 895
- meylsizlik 895
- məqbulluq 895
- minimakslik 895
- optimallıq 895
- robustlıq 895
- tam sinif 895
- proyeksiyası, planın 896
- seçim 896
- sınaqlar metodu 896
- struktur 896
- test 897
- vəziyyət 897
- Statistika** 897
- (s) binar münasibətlərin 897
- bölünən / ayrılan 897
- (s) interval verilənlərinin 897
- invariant 897
- kafi 897
- kvaziməqbul 897
- (s) kriterinin 897
- (s) qeyri-ədədi təbiətli obyektlərin 897
- (s) qeyri-səlis çoxluqların 899
- oxşar 899
- (s) rəng 899
- tabe 899
- tam 899
- (s) təsadüfi çoxluqların 899
- yardımçı 899
- zəruri 900
- R/S – statistika** 900
- T^2 – statistika** 900
- Stek – alqoritm** 900
- yaddaş 900
- Steyn effekti** 900
- Stilyes – Minkovski integralı** 900
- Stirlinq ədədləri** 900

Stoxastik axın(i) diffeomorfi-
 zmlerin 901
Stoxastik analiz 901
Stoxastik aproksimasiya 901
 -- kəsilməz zamanda 903
 -- ; modifikasiyalar 904
 - ardıcılıq 905
 - asılı olmamazlıq 905
 - attraktor 905
 - ayrılış(i) statistik qiymətlə-
 rin 905
 - bazis 905
Stoxastik differensial 905
 -- həndəsə 906
Stoxastik differensial tənlik 910
 --- ; diffuzion proses do-
 ğuran 914
 --- genişləndirilmiş sto-
 xastik inteqral ayrılışı is-
 tifadə edən 916
 --- ; güclü həll 916
 --- ; həllər üçün aşkar
 düsturlar 916
 --- ; həllərin dayanıqlılığı
 916
 --- ; həllərin güclü yega-
 nəliyi 917
 --- ; həllərin zəif yeganə-
 liyi 917
 --- ; həllin çevirməsi 917
 --- ; həllin momentləri 917
 --- ; həllin varlığı haqqın-
 da lokal teoremlər 918
 --- xüsusi törəmələri 918
 --- ; xüsusi törəmələri
 determinik tənliklərlə
 əlaqə 919
 --- ixtiyari meydanlarda
 919
 --- ; inteqro-differensial
 operator 920
 --- keçirici sərhədli 921
 --- ; kiçik parametrlər üzrə
 ayrılışlar 921
 --- (yi) kvant 921
 --- ; limit teoremləri 921
 --- (yi) Liuvill 921
 --- ; Markov həlləri 921
 --- ; müqayisə teoremləri
 921
 --- (yi) Navye-Stoks 922
 --- operator 922
 --- ; parametrlər üzrə diffe-
 rensiallanma 923
 --- ; partlayış kriterisi 923
 --- sərhədləri 923
 --- simmetrik 924
 --- ; sonlu fərqli aproksi-
 masiya 924
 --- ; sonlu fəza intervalın-
 da 925
 --- ; S.d.t-in həllərinə uyğun
 ölçülərin mütləq kəsil-
 məzliyi 925
 --- ; Stratonoviç formasın-
 da; kükrəntilərə nəzərən
 dayanıqlılıq 925
 --- ; Stratonoviç formasın-
 da simmetrik stoxastik
 differensial tənlik 926
 --- ; təkrar loqarifm qanu-
 nu 927
 --- (yi) ters 927
 --- ; zəif həll 927
 - dinamik proqramlaşdırma 927

- eksperiment 928
 - eksponent 928
 - ekvivalent təsadüfi proseslər 828
 - ekvivalentlik 928
 - fərqlənməməzlik 929
 - hesab 929
 - hesablama alqoritmı 929
 - həndəsə 929
Stoxastik xətti cəbr 930
 -- parabolik tənlik ikinci tərtib
 930
 -- requlyator 930
Stoxastik inteqral 930
 -- çoxqat 931
 -- əyrixətli 931
 -- genişləndirilmiş 931
 -- Hilbert fəzası 931
 -- lokal martinqal üzrə
 932
 -- martinqal ölçüsü üzrə
 934
 -- martinqal üzrə 935
 -- ; paylanmanın qiymət-
 ləri 935
 -- semimartinqal üzrə
 935
 -- simmetrik 935
 -- (i) Stratonoviç 935
 -- təsadüfi meydanda əy-
 ri üzrə 936
 -- təsadüfi ölçü üzrə 937
 -- tənlik; martinqal və təsa-
 düfi ölçü üzrə 938
 - interval 938
Stoxastik kəsilməz keçid funksiyası
 938
 -- təsadüfi proses 938
 - konvolusyon ümumiləşmiş
 938
 - matris 938
 - məhdudluq 939
 - model; dayanıqlılıq 939
Stoxastik modellər 939
 -- (i) iqlimin 939
 - müəyyən proses 940
 - /ehtimali nüvə 940
 - optimal idarəetmə diskret za-
 manlı 941
 - ölçü 941
 - proses 941
 - semi-grup 941
 - törəmə 942
Strategiya 942
 - ; tam sinif 942
Stratonoviç stoxastik inteqralı 943
 λ - struktur(u) ehtimal metri-
 kanın 943
 ξ - struktur(u) ehtimal metri-
 kanın 943
Struktur funksiya(sı) 943
 -- sistemin 944
 - matris 944
 - münasibətlər analizi 945
 - ölçü 945
 - parametrlər 945
Styudent kriterisi 945
 - paylanması 946
Styudentləndirilmiş qalıq 947
Subadditiv erqodik teorem 947
Sub - Markov inikası 947
 - keçid funksiyası 947
 - semi-grupu 947
Submartinqal 947
Substoxastik matris 947
 - nüvə 947
Sudakov - Dadli teoremi 947

Supereffektiv statistik qiymət 947
Supermartinqal 948
Superpozisiya metodu 948
Support(u) ölçünün 949
Suslin fəzası 949
Sürət; kod sürəti 949
Sürətli Furry çevirməsi 949
Sürüşən / qeyd olunmuş ehtiyatda
 saxlama 949
Sürüşən orta metodu 949
 -- modeli 950
 -- prosesi 950
**Süzgecləyici eksperimentlərin plan-
 laşdırılması** 951

S

Şaxələnmə proses 953
 φ şaxələnmə proses 955
 -- ayrılan 955
 -- ayrılmayan 955
 -- binar 955
 -- cırlaşan 955
 -- ; cırlaşma 955
 -- daxil edilmiş 955
 -- diffuzion 955
 -- dolaşmalı 956
 -- emiqrasiyalı 956
 -- enerjili 956
 -- ; final ehtimalları 956
 -- hissecikləri qarşılıqlı-
 təsirli 956
 -- hisseciklərinin tipləri
 sayı sonlu 957
 -- immiqrasiyalı 957
 -- ; keçid fenomenləri 958
 -- kritik 958
 -- kritikaltı 958
 -- ; kritiklik 958
 -- kritiküstü 958
 -- qeyri-regulyar 958
 -- məhdud 958
 -- miqrasiyalı 958
 -- redüslənmiş 958
 -- regulyar 958
 -- ; regulyarlıq 958
 -- tənzimlənən 958
 -- təsadüfi mühitdə 958
 -- ümumi 959
 -- yaşından asılı 959
 -- zaman üzrə qeyri-bir-
 cins 959
Şaxələnmə təsadüfi dolaşma 959
 -- meydan 960
Şaxələnmə şərti 960
Şaxələr və ehtimallar sərhədləri
 metodu 960
Şarlı paylanması 960
Şennon düsturu 960
 - entropiyası 960
 - informasiyası 960
 - teoremi 960
**Şepard düzəlişi diskretizasi-
 ya üçün** 960
 -- qruplaşdırma üçün 961
Şerman paylanması 961
Şeyp 961
Şəbəkə(sı) ölçülərin 961
 - paylanmaların 961
Şəbəkəvari xətti kod 961
 - kod 961
 - model(i) statistik mexani-
 kanın 961
Şəbəkəvari paylanma 962
 -- unimodal 962
Şərti Beyer riski 962

- doğruyaoxşarlıq funksiyası 962
- Şərti ehtimal** 962
- - paylanması 963
- Şərti entropiya** 963
- - (s) bölgünün 963
- faydalılıq 963
- informasiya miqdarı 963
- kriteri 963
- Markov prosesi 964
- orta 964
- paylanma 965
- paylanma funksiyası 965
- riyazi gözləmə 966
- sıxlıq 966
- Şibata kriterisi** 966
- Şoke tutumu** 966
- Şovene kriterisi** 966
- Şönberq teoremi** 966
- Şrödinqer tənliyi təsadüfi potensiallı** 966
- Şteyner sinfi** 967
- Ştrassen invariantlıq prinsipi** 967
- teoremi 967
- təkrar loqarifm qanunu 967
- Şur ifadəsi matrisin** 967
- Şvarts bərabərsizliyi** 967
- - Rissanen kriterisi 967
- Şvinger funksiyası** 967

T

- Tabe statistika** 968
- Tam ailəsi, paylanmaların** 968
- Beyes yanaşma 968
- blok planı 968
- ehtimal düsturu 968
- ehtimal fəzası 968
- Tam faktor eksperiment** 968
- - plan 968
- işləmə müddəti 968
- qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı 968
- qərəzsizlik 969
- qrupu, hadisələrin 969
- Latin kvadratı 969
- ölçü 969
- p - plan 969
- randomlandırılmış plan 969
- risk 969
- sinif(f) kriterilərin 969
- statistika 969
- stoxastik bazis 969
- variasiya 969
- variasiya metrikası 969
- yığılma 969
- Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası** 969
- - ölçü 970
- kəsilmə additiv funksional 970
- müsbət inikas 970
- normal fəza 970
- Tamamilə ölçülən proses** 970
- - proyeksiyası, prosesin 970
- təsadüfi ardıcılıq 971
- Tamamlanma** 971
- (s) ehtimal fəzasının 971
- (s) ölçünün 971
- prinsipi 971
- Tamamlayan hadisə A hadisəsinə** 971
- Təmgirlişli xidmət sistemi** 971
- Təmligi, funksiyalar sinfinin** 971
- Hausdorfa görə** 971
- Tənninməsi / müəyyən olunması, obrazların** 972
- Tauber teoremləri** 972

- Tay** 973
- Teleqraf prosesi** 973
- siqnalı 973
- Termodinamik entropiya** 973
- limit keçidi 973
- Temperatur Qrn funksiyası** 973
- Test** 973
- Teylor stoxastik düsturu** 973
- Tezlik** 973
- ; blok tezliyi 973
- (y) təsadüfi hadisənin 973
- Tezlik – zaman spektral sıxlığı** 974
- Tezliklər poliqonu** 974
- Tezliklərin dəyişdirilməsi / elayzing** 974
- üst-üstə düşməsi / tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzing 974
- Tezlikli – modulyar ossilyasiya** 975
- modulyasiya 975
- Təbii sərhəd** 975
- Tədqiqi statistik analiz(i) verilənlərin** 975
- Tədqiqi donma / feyding** 975
- Tədrici Markov xassəsi** 975
- yayınmalar zonaları 975
- Təhrif ölçüsü** 975
- Təkmil ehtimal fəzası** 975
- Təkrar loqarifm qanunu** 975
- - Banax fəzasında 976
- - empirik ölçülər üçün 977
- - Markov zəncirləri üçün 978
- - Viner prosesi üçün 978
- Təkrarlanmalar təsadüfi ardıcılıqlarda** 978
- Təklirvəli paylanma** 979
- Təminlik ehtimalı** 979
- hidrologiyada 979
- Təmirəyararlılıq** 979
- göstəriciləri, sistemin 979
- Tənzimlənen şaxələnen proses** 979
- Tərs bərabərsizliyi Kolmoqorovun** 979
- funksiyalar metodu 979
- stoxastik differensial tənlik 980
- Tərs tənliyi, diffuziyanın** 980
- Kolmoqorov 980
- Təsadüfi ağac** 980
- axın 981
- axtarış 981
- ardıcılıq 981
- avtomat 982
- bölgü 982
- Bul funksiyası 982
- cəm 983
- çoxgirişlilik 984
- Təsadüfi çoxluq** 984
- - açıq 985
- - böyük ədədlər qanunu 985
- - dayanıqlı 985
- - dispersiya 985
- - izotrop 985
- - qabarıq 985
- - qapalı 985
- - (ğ) Gauss 985
- - limit teoremləri 985
- - nöqtəvi 985
- - nöqtəvi paylanma qanunu 985
- - orta qiymət 985
- - paylanma 985
- - proyeksiya 985

- ;riyazi gözləmə 985
- - (ğ) semi-Markov 985
- - sonlu 985
- - sonsuz bölünən 985
- - stasionar 985
- - ;statistika 985
- - determinant 985
- Təsadüfi dolaşma** 986
- - çoxölçülü 987
- - ;qayıdışlılıq 988
- - qrupda 988
- - qrupda, lokal teoremlər 989
- - (s) Markov 990
- - öz-özünü kəsməyən 990
- - ;sərhəd funksionalı 990
- - təsadüfi mühidə 990
- - , aşağıdan kəsilməz 991
- - , yuxarıdan kəsilməz 991
- - ehtimal ölçüsü 991
- element 991
- ədəd 992
- əvəzetmə 992
- fenomen 992
- Təsadüfi funksiya** 993
- - ;dar mənada xassə 994
- - ;geniş mənada xassə 994
- - ;korrelyasion nəzəriyyə 994
- - ;modelləşdirmə 994
- - ;spektral ayrılış 994
- - ;spektral ölçü 994
- - (s) zamanın 994
- - hadisə 994
- - xəta 995
- - xətti operator 995
- - inikas 995
- Təsadüfi kəmiyyət** 996
- - ;çevirmə 998
- - kəsik 998
- - ;modelləşdirmə 998
- - normalanmış 998
- - ;sərhədlərin qiymətləndirilməsi 998
- - sonlu qrupda 998
- - , gələcəkdən asılı olmayan 999
- - limite görə sabit 999
- - kəsik(y) çoxüzlünün 999
- Təsadüfi kodla(n)ma** 999
- - sərhəd 999
- - kompakt çoxluq 1000
- - kükrənti(s) dinamik sistemin 1000
- - kvadratur düstur 1001
- - qabarıq çoxluq 1001
- Təsadüfi qraf** 1001
- - ;əlaqəlilik ehtimalı 1002
- Təsadüfi matris** 1002
- - (i) Hermit 1002
- - (i) Gauss 1002
- - qeyri-simmetrik 1002
- - ;limit teoremləri 1002
- - ortoqonal 1002
- - simmetrik 1002
- - ;spektral funksiya 1002
- - unitar 1002
- - meşə 1003
- Təsadüfi meydan** 1003
- - bircins 1004
- - bircins artımlı 1004
- - bircins və izotrop 1004
- - böyük ədədlər qanunu 1004
- - harmoniklənen 1004

- izotrop 1005
- izotrop artımlarlı 1005
- lokal bircins 1005
- lokal izotrop 1005
- lokal kompakt qrupda 1005
- nöqtevi 1006
- (i) Puasson 1006
- rəqulyar 1006
- ;statistik analiz 1006
- şaxələndən 1006
- ümumiləşmiş 1006
- mozaika 1006
- nöqtevi proses 1006
- ölçü 1006
- parametrlər 1008
- plan(i) eksperimentin 1008
- planlaşdırılma 1008
- Təsadüfi proses** 1008
- ;arifmetik modelləşdirilmə 1011
- artan 1011
- asılı olmayan artımlarlı 1011
- asılı olmayan artımlarlı, asimptotik xassələr 1015
- asılı olmayan artımlarlı, çatım anı və ötürmə (eksses) kəmiyyətinin paylanması 1015
- asılı olmayan artımlarlı, dayanıqlı 1016
- asılı olmayan artımlarlı, xarakteristik funksiya 1016
- asılı olmayan artımlarlı, izotrop 1016
- asılı olmayan artımlarlı, Levi ayrılığı 1016
- asılı olmayan artımlarlı, lokal xassələr 1016
- asılı olmayan artımlarlı, ordinal bircins 1017
- asılı olmayan artımlarlı, rezolvent 1017
- asılı olmayan artımlarlı, yuxarı və aşağı səddlərin paylanması 1017
- bixətli model 1018
- binar 1018
- çoxölçülü parametrlili 1018
- çoxölçülü zamanlı 1018
- ;differensiallama 1018
- dixotomik 1018
- diskret komponentli 1018
- diskret zamanlı 1018
- doğruxa oxşarlıq nisbəti 1018
- erqodik 1019
- ;filtrasiya 1019
- harmoniklənən 1019
- xətti ifadə olunan 1019
- idarə olunan 1019
- ikiqat stasionar 1019
- ikinci növ kəsilmələri olmayan 1019
- impulsal 1019
- ;integrallanma 1019
- interpolasiya 1020
- invariantlıq prinsipi 1020
- ;kanonik ifadə 1020

- ;kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər 1021
- kənquru tip 1022
- ;kəsilmələr 1022
- kvant 1024
- qarşılıqlı asılı olmayan qiymətlərli 1024
- ;qeyri-xətli antisipativ 1024
- ;qeyri-xətli filtrasiya 1024
- ;qeyri-xətli modeller 1025
- ;qeyri-xətli proqnozlaşdırma 1025
- ;qurşayan 1025
- ;limit teoremləri 1025
- Loev mənada harmoniklənən 1025
- ;maksimum 1025
- nöqtevi 1026
- opsional 1026
- ortalanmış spektrli 1026
- ;ortoqonal ayrılış 1026
- ossilyar 1026
- öngörül 1026
- periodik korrelyarlanmış 1026
- periodik paylanmış 1026
- pillevari 1027
- ;proqnozlaşdırma, ekst-rapolyasiya 1027
- progressiv ölçülən 1027
- Rozanov mənada harmoniklənən 1027
- sayıcı 1027
- ;sədd modeli 1027
- sıçrayışvari 1027
- ;sıfırlar 1027
- ;sonluölçülü paylanmışlar 1027
- stasionar 1028
- stasionar artımlarlı 1028
- ;statistik analiz 1028
- ;stoxastik ekvivalentlik 1028
- stoxastik kəsilməz 1028
- tamamilə ölçülən 1028
- ;trayektoriyaların rəqulyarlığı 1028
- ;uzlaşmış 1030
- ümumiləşmiş 1030
- vahidi 1030
- zaman üzrə bircins 1030
- zəif harmoniklənən 1030
- seçmə qaytarmamaq şərti 1030
- şeyp 1030
- teleqraf signalı 1031
- təkrarsız seçim 1031
- Təsadüfi tənlik cəbri** 1031
- qrupda 1031
- vektor 1032
- və psevdotesadüfi ədədlər 1032
- yerdəyişmə / permutasiya 1033
- yerləşmə 1033
- yük 1034
- zaman anı 1034
- Təsdiqedicilə analizi, verilənlərin** 1034
- Təsir funksiyası empirik** 1034
- Təsirləndirici** 1034
- Təsniqedicilə əlamət** 1034
- dəyşən 1034
- Tiplərin yığılması** 1034

- Toqquşmalar metodu qiymətləndirilmənin** 1034
- Tolerant interval** 1035
- sərhədlər 1035
- Tolerantlıq** 1035
- Toplam koherentlik** 1035
- korrelyasiya əmsali 1035
- müqayisələr 1035
- rəq. korrelyasiya əmsali 1036
- rəqressiya 1036
- Toplayıcılıq (gü) limit teoremlərinin** 1036
- S – topologiya** 1036
- Topoloji entropiya (s) dinamik sistemin** 1036
- σ – – feza 1036
- Transfer – matris** 1037
- Transversal (i) latin kvadratının** 1037
- Tranzitiv Markov zənciri** 1037
- Trayektoriya** 1037
- (s) Markov zənciri 1037
- Trayektoriyaların təsadüfi uzunluğu; eksponensial çevirmə** 1037
- Trend** 1037
- (i) meteoroloji kəmiyyətin 1037
- Tripleti, öngörül xarakteristikalarının** 1038
- Tsiklik kod** 1038
- Markov zənciri 1038
- sinif (f) Markov zənciri vəziyyətlərinin 1038
- tezlik 1038
- vəziyyət (i) Markov zəncirinin 1038
- Tutarlı kriteri** 1038
- statistik qiymət 1039
- Tutum** 1039
- F – tutum** 1039
- Tyuki korrelyasiya pəncərəsi** 1039
- – Hennik statistik qiyməti 1039

U

- Uaytman funksiyası** 1040
- Uducu baryer** 1040
- Uducu vəziyyət** 1040
- Markov zəncirinin 1040
- Udum ehtimalı** 1040
- Uduş funksiyası** 1040
- Uilkokson kriterisi** 1040
- Uilks paylanması** 1040
- Ulnzorlanmış orta qiymətlər** 1041
- Uışart paylanması 1041
- paylanması ümumiləşmiş 1041
- Unimodal / təkzərvəli paylanma** 1042
- şəbəkəvari paylanma 1042
- Unitar təsadüfi matris** 1042
- Universal kodlanma** 1043
- optimal plan 1043
- ölçülən strategiya 1043
- tutarlılıq xassəsi 1043
- Uonq prosesi** 1043
- Urbanik cəbr** 1043
- Urn sxemi** 1043
- Ursell funksiyaları** 1044
- Uyşan müşahidələndən** 1044
- Uyşmayan hadisələr** 1044
- müşahidələndən 1044
- / dizyunkt təsadüfi hadisələr 1044
- «Uzaq qonşu» alqoritmli 1045
- F – uzlaşdırılmış funksiya** 1045

Uzlaşma əmsalı / konkordans əmsal 1045

Uzlaşma kriterisi 1045

- ;deterministik interpretasiya 1045

Uzlaşmış paylanmalar 1045

- təsadüfi proses 1045

Uzunömürlülük 1046

Uzunömürlülüğü, sistemin / elementin 1046

Ü

Üç sıra teoremi 1047

- siqma qaydası 1047

Üçbucaq paylanma 1047

Üçdə iki qanunu 1047

Üfüq(ü) modelin 1047

Ümumi çoxluq 1047

- qarşılıqlı struktur funksiyası 1047

- statistik analizi, müşahidələrin 1047

- struktur funksiyası 1049

- şəxələnen proses 1049

Ümumiləşmiş arksinus paylanması 1049

- Beyes statistik qiymət 1049

- blok plan 1049

- dispersiya 1049

- korrelyasion funksiya 1049

- Gauss prosesi 1049

- ölçü 1049

- Puasson paylanması 1049

- Puasson prosesi 1049

- regression eksperiment 1050

- spektral sıxlıq 1050

- stasionar proses 1050

- stoxastik konvolusiyaya 1051

- təsadüfi meydan 1051

- təsadüfi proses 1052

- Uışart paylanması 1053

Üst pillə anı 1053

-- boyu 1053

-- indeksi 1053

-- təsadüfi kəmiyyətləri 1053

Üstlü paylanma 1053

Üstünlük indikatoru 1053

- meydanı 1053

- münasibəti 1053

Üstünlüklər analizi 1053

V

Vahidi (sporadik) təsadüfi proses 1054

Vald eyniliyi 1054

- kriterisi 1054

- reduksiyası 1054

- riski 1054

- – Hefdinq bərabərsizliyi 1054

Van Dantsiq sinfi 1055

- der Varden kriterisi 1055

- Hov teoremləri 1055

Vandermond təsadüfi determinanti 1055

Vapnik – Çervonenkis sinfi 1055

Variasion bərabərsizliklər stoxastik idarəetmədə 1055

- prinsip statistik mexanikada 1056

- sıra 1057

Variasiya(sı) ölçünün 1057

- əmsalı 1057

Varşamov – Hilbert sərhədi 1057

Vatanabe teoremi 1057

Vaytman funksiyası 1058

Vektor – birins və izotrop təsadüfi meydanı 1058

- kriterisi eksperiment planlaşdırılmasının 1058

- ölçü 1058

- təsadüfi proses 1058

Vektorlar konfigurasiyası 1058

Ventsel şərti 1058

Vergəci, təsadüfi ədədlərin 1058

Verilənlər pəncərəsi 1059

Verilənlərin hissəsi 1059

Veybull paylanması 1059

Veyl düsturu 1059

Vəziyyət 1059

- dövrü Markov zənciri və zıyyətlərinin dövrü 1059

- vektoru 1059

- **Vəziyyət, avtomatın** 1059

Vik forması 1059

- monomu 1059

- nizamlanması 1059

Viqner paylanması 1060

- semi - dairəvi qanun 1060

Vilkkokson kriterisi 1060

Vilson təsiri 1060

- – Hilferti çevirməsi 1060

Viner funksionalı 1060

-- ;ortoqonal sıralara ayrılış 1061

- inteqralı 1061

- körpüsü 1061

- martinqalı 1062

- meydanı 1062

- ölçüsü 1063

Viner prosesi 1063

-- anieksolunan 1065

-- çəp 1065

-- çoxölçülülük 1065

-- çoxparametrlilik 1065

-- ;ekskursiya 1065

-- ;erqodik teoremlər 1065

-- kəsilməzlik modulu 1065

-- Li qrupunda 1065

-- ;maksimum və minimum paylanması 1066

-- ;prosesin hissəsinin ekssessiv funksiyası 1066

-- sferik 1066

-- standart 1066

-- yarımoxda 1066

- prosesinin funksionalı 1067

- sosisi 1067

- vərəqi 1067

Vinoqrad metodu 1068

Virial ayrılış 1068

Virtual gözləmə müddəti 1068

Vitali sistemi 1068

- teoremi 1068

- – Han – Saks teoremi 1068

Vlasov tənliyi 1068

Vold ayrılışı 1069

Voronoy mozaikası 1069

Vuruğu statistik qiyməti, paylanma funksiyasının 1069

Vurulma sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 1069

Y

Yaddaş(ı) kodun 1070

Yaxın hipotezlər 1070

Yaxınlaşan hipotezlər 1070

Yaxınlıqlar analizi 1070

- ölçüsü 1070

Yalın izi 1070

Yalvarı funksiya 1070

- reqresiyaya 1070

- statistik qiymət 1071

Yanq – Mills meydanı 1071

Yanlış korrelyasiya 1071

Yardımcı statistika 1071

Yaşama müddəti 1072

-- paylanması 1072

Yayınmalar funksiyası 1072

Yeganəlik teoremi xarakteristik funksiyalar üçün 1074

Yeniləşdirən proses 1074

Yeniləşdirici hadisə 1074

- komponentlər 1074

Yensen bərabərsizliyi 1074

Yerdəyişən hadisə 1074

Yerdəyişmə(sı) / permutasion(u) sonlu çoxluğun elementlərinin 1075

-- təsadüfi 1075

Yerdəyişmələr kriterisi 1075

Yerinəyişdirmə parametri 1075

-- ;statistik qiymət 1075

Yerinəyişmiş ekskursiya 1075

Yerləşmə / aranjman 1075

- təsadüfi 1076

Yerləşməsi, hissəciklərin bərabərəhtimallı 1076

-- qruplarla 1076

-- ;Markov yerləşməsi 1077

-- ;polinomial yerləşmə 1077

Yeyts düzəlişi 1077

Yəqin hadisə 1077

Yəqinlik 1078

Yığılma ehtimala görə 1078

- (sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin 1078

- əsas etibarilə 1079

- (sı) inteqral funksional- lərin 1079

- (sı) inteqral tipli funksio- nalların paylanmalarının 1079

- kvadratik orta 1079

- ölçüyə görə 1079

- (sı) paylanmaların 1080

- ;paylanmaların çəki ilə orta yığılması 1080

- (sı) paylanmaların mo- ment xarakteristikala- rının 1080

- paylanmaların muntə- zəm yığılması 1080

- paylanmaya görə 1080

- sanki yəqin,vahid ehti- malla 1080

- tam 1081

- tamamilə 1081

- p tərtib orta 1081

- (sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının 1081

- (sı) təsadüfi kəmiyyətlə- rin 1082

- (sı) tiplərin 1082

- vahid ehtimalla 1082

- variasiyaya görə 1082

- zəif 1083

C – yığılma(sı) təsadüfi pro- seslərin 1083

D – yığılma(sı) təsadüfi pro- seslərin 1083

ƒ – yığılma(sı) paylanma- lərin 1083

$\mathcal{F}$ – yığılma(sı) təsadüfi proseslərin 1083

G – yığılma 1083

Yığılmanı yaxşılaşdıran çevirmə 1083

Yığılmanın ekstremal kriterisi 1083

Yığım metodu 1084

Yuxarı etibarlı sərhəd 1084

- kvartil 1084

- qiyməti, oyunun 1084

- limit(i) təsadüfi hadisələr ardıcılığının 1084

- sərhəd(i) təsadüfi hadisələr ardıcılığının 1084

- sərhəd funksionalı 1084

- və aşağı ardıcılıqlar (funksiyalar) 1084

Yul prosesi 1085

Yul – Uoker statistik qiymətləri 1085

- – tənlikləri 1086

Yunan – Latin kubu 1086

-- kvadratı 1086

Yuva vahidi 1086

Yük; ümumiləşmiş ölçü, dəyişən şərtlə ölçü 1086

Yüklənmə funksiyası 1087

Z

Zaman xarakteristikası, filtrin 1088

- pəncərəsi 1088

- – selektiv feyding / donması 1088

- sırası 1088

Zaman üzrə diskretizasiya / kvantlama 1088

-- kvantlama / diskretizasiya 1088

-- orta qiymət 1088

Zəif doğruxaoxşarlıq prinsipi 1088

- harmonikləşməlik(yi) təsadüfi prosesin 1088

- izomorf dinamik sistemlər 1088

- kompakt şəbəkə(sı) ehtimal ölçülərinin 1088

- nisbi kompaktlıq(ğı) ehtimal ölçüləri ailəsinin 1088

- ölçülən inikas 1089

- paylanma 1089

- pilləli artan təsadüfi kəmiyyətlər 1089

- təsadüfi xətti operator 1089

- topologiya 1089

Zəif yığılma 1089

-- (sı) ehtimal ölçülərinin 1090

-- (sı) ölçülərin 1090

-- (sı) topoloji fəzada ölçülər şəbəkəsinin 1090

Zərif / seyrəklənmiş çoxluq 1090

Zəruri kafi statistika 1091

- statistika 1091

- topologiya 1091

Zigel problemi 1091

- – Tyuki kriterisi 1091

Zirvə(sı) paylanmanın 1091



ALLAHVERDİYEV Calal Eyvaz oğlu 17 sentyabr 1929-cu ildə Şuşa şəhərində anadan olmuşdur. Orta təhsilini Şuşa və Bakı şəhərlərində almışdır. 1946–1951-ci illərdə Azərbaycan Dövlət Universitetinin Fizika-riyaziyyat fakültəsini bitirmişdir. 1951–1953, 1954–1956-cı illərdə MDU-nun Mexanika-riyaziyyat fakültəsinin aspirantı olmuşdur (Elmi rəhbəri – akademik M. V. Keldiş).

1955-ci ildə namizədlik dissertasiyasını müdafiə şurasına təqdim etmiş, 1957-ci ildə MDU Mexanika-riyaziyyat fakültəsində namizədlik dissertasiyasını müdafiə etmişdir.

1956–1960-cı illərdə ADU-da müəllim, baş müəllim, dosent vəzifələrində çalışmışdır.

Allahverdiyev C. 1960-cı ildən AEA-nın hesablama mərkəzinin müdiri, həmin ilin oktyabrından elmi işlər üzrə direktor müavini vəzifəsində fəaliyyət göstərmişdir. 1965-ci ildən isə AEA-nın Kibernetika İnstitutunda şöbə (laboratoriya) müdürüdür. 1968-ci ilin sentyabrında elmlər doktoru və 1969-cu ildə SSRİ Nazirlər sovetinin yanında AAK-nın qərarı ilə professor adına layiq görülmüşdür.

1969-cu ildən AEA-nın Kibernetika İnstitutunun direktor müavini, 1970–1988-ci illər ərzində həmin institutun direktoru olmuşdur.

1998–2004-cü illərdə ADU-nun elmi işlər üzrə prorektoru, 1994-cü ildən Tətbiqi riyaziyyat fakültəsində kafedra müdürüdür.

Allahverdiyev C. E. 1972-ci ildən AEA-nın müxbir üzvü, 2001-ci ildən AMEA-nın həqiqi üzvüdür.

Allahverdiyev C. E. 1972-ci ildə Azərbaycan Dövlət mükafatına, 1982-ci ildə əməkdar elm xadimi adına layiq görülmüşdür.

C. E. Allahverdiyevin Funksional analiz və Tətbiqi funksional analiz sahələrindəki elmi işləri bir çox xarici ölkələrdə bu sahədə nəşr olunan kitab və monoqrafiyalarda Allahverdiyev teoremi, Allahverdiyev prinsipi adı ilə verilmiş və onun nəticələri istifadə və tətbiq olunmuşdur.

Allahverdiyev prinsipi ixtiyari tamamsız operatorun sonlu ölçülü operatorlarla ən yaxşı yaxınlaşmasını tapmağa imkan verir, o cümlədən, ixtiyari sonlu ölçülü operatorların daha kiçik operatorlarla ən yaxşı yaxınlaşmasını tapmağa imkan verir.

Allahverdiyev prinsipinin Banax fəzasına ümumiləşməsi Allahverdiyevin aldığı ən uğurlu nəticələrindən biridir.

C. E. Allahverdiyevin elmi rəhbərliyi altında 7 nəfər elmlər doktoru, 25-dən artıq elmlər namizədi adına layiq görülmüşlər.

Allahverdiyev C. E. Azərbaycanda riyaziyyatın inkişafında dərin iz qoymuş, vətəninə dərin məhəbbətlə sevməli ziyalı alimlərdəndir.



ƏHMƏDOVA (Rzayeva) Həqiqət Məmmədrza qızı 1941-ci il 22 iyun-da Quba şəhərində, müəllim ailəsində anadan olmuşdur. Orta məktəbi Qubada bitirmişdir (1948-1958); Ali təhsilini 1958-1963-cü illərdə ADU-nin mexanika-riyaziyyat fakültəsində almışdır.

1963-də AEA-nın Kibernetika İnstitutunda, 1963-cü ilin noyabr ayından Tacikistan Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat İnstitutunda elmi işçi vəzifəsində çalışmışdır.

1966-69-cu illərdə AEA Kibernetika İnstitutunun aspirantı (rəhbəri akademik Z. İ. Xəlilov) olmuş, sonradan akademik A. V. Skoroxodun elmi rəhbərliyi ilə, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi sahəsində namizədlik dissertasiyasını (1976-1980) müdafiə etmişdir.

1973-ci ilin oktyabrından AEA-nın Kibernetika İnstitutunda elmi işçi, baş elmi işçi vəzifələrində çalışmışdır. Hazırda Kibernetika İnstitutunun aparıcı elmi işçisidir.

1973-cü ildən ADU-nun mexanika-riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat və fizika fakültələrində “Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika”, “Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsini” tədris edir.

2002-ci ildən BDU-da “Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika” kafedrasında dosent vəzifəsində çalışır. Ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsinin metodologiyasını tədris edir. 18 məqalənin, 5 kitabın müəllifidir. Məqalələri Kiev, Moskva, ABŞ-da çap olunmuşdur.

ELMİ ƏSƏRLƏRİ

1. **Riyazi statistikanın elementləri** (metodik vəsait), Bakı, 2000;
2. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika** (dərslük), Bakı, 2002;
3. **Azərbaycanca – türkçə – rusca – ingiliscə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika terminləri lüğəti**, Bakı, 2002, (həmmüəlliflər C. E. Allahverdiyev, A. C. Hacıyev);
4. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı** (metodik vəsait), Bakı, 2009;
5. Ya. Bernulli. **Böyük ədədlər qanunu haqqında.** / tərcümə H. M. Əhmədova;
6. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika tarixindən** (nəşrə hazırdır).



HACIYEV Asəf Hacı oğlu 29 may 1951-ci ildə Gəncə şəhərində anadan olmuşdur.

1973-cü ildə M. V. Lomonosov adına Moskva Dövlət Universiteti-nin mexanika-riyaziyyat fakültəsini, 1978-ci ildə aspiranturasını və 1990-cı ildə doktoranturasını bitirmişdir.

1980-ci ildə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində aldığı mühüm nəticələrə görə elm və texnika sahəsində Azərbaycan Lenin komsomolunun mükafatına layiq görülmüşdür.

1986-cı ildə Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə Ümumdünya Bernulli cəmiyyətinin üzvü seçilmişdir.

1996-cı ildən AMEA-nın kibernetika institutunun laboratoriya rəhbəri vəzifəsində çalışır.

1996-cı ildən Azərbaycan Respublikası Milli Məclisin birinci çağırış, 2000-ci ildə ikinci və 2006-cı ildə üçüncü çağırış deputatı seçilmişdir. Elm və təhsil komissiyasının üzvüdür. 2002-2003-cü illərdə Milli Məclis – Avropa Birliyi əməkdaşlıq qrupunun rəhbəri və 2002-ci ildən Qara Dəniz İqtisadi Əməkdaşlıq Təşkilatının (QDİƏT) parlament assambleyasında Milli Məclisin nümayəndə heyətinin başçısıdır.

2001-ci ildən Bakı Dövlət Universitetində kafedra müdiri vəzifəsində çalışır.

2001-ci ildə Azərbaycan Milli elmlər akademiyasının müxbir üzvü seçilmişdir.

Dünyanın aparıcı elmi mərkəzlərinin dəvəti ilə – ABŞ, İsveç, İtaliya, Portuqaliya və digər ölkələrdə mühazirələr oxumuş, elmi araşdırmalar aparmışdır.

2001-ci ildə dünyanın 5 aparıcı aliminin təqdimatı ilə Beynəlxalq Statistika İnstitutunun üzvü seçilmişdir.

2003-cü ildən AMEA-nın Riyaziyyat üzrə Elmi tədqiqatların təşkili və əlaqələndirilməsi şurasının sədridir. 2003-2008-ci illərdə Kibernetika institutu nəzdində müdafiə şurasının sədr müavini, 2009-cu ildən sədridir.

2004-cü ildən Üçüncü dünya elmlər akademiyasının (Triest, İtaliya) üzvü və 2005-ci ildə Əbdüs Salam adına Nəzəri Fizika üzrə Beynəlxalq elmi mərkəzin (senior associate) senyor asosiyet vəzifəsinə seçilmişdi.

2006-2008-ci illərdə Qara Dəniz İqtisadi Əməkdaşlıq Təşkilatının (QDİƏT) Parlament Assambleyasının vitse-prezidenti seçilib. 2000-ci ildən adı gedən təşkilatda Azərbaycan nümayəndə heyətinin rəhbəridir.

2006-cı ildə ABŞ-ın CRDF fondunun qrantına layiq görülmüşdür.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində dünyanın aparıcı nəşrlərində çap olunmuş 100-dən çox elmi məqalənin müəllifidir.

A. Hacıyevin elmi rəhbərliyi altında 3 nəfər elmlər doktoru, 4 nəfər elmlər namizədi adına layiq görülmüşlər.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası. C. E. Allahverdiyev, H. M. Əhmədova, A. H. Hacıyev. – B., 2009. – 1191 səh.

“Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası” – Ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika və onun elm və texnikanın müxtəlif sahələrdə tətbiqi üzrə məlumat nəşridir. Ensiklopediyanın 1-ci hissəsi, əsas etibarilə, xülasə məqalələrdən, ayrı-ayrı problemlərə və metodlara həsr olunmuş məqalələrdən, əsas anlayışların tərifləri verilən qısa məlumatlardan ibarətdir. Ensiklopediyada tətbiqi məsələlərə – informasiya nəzəriyyəsi, kütləvi xidmət nəzəriyyəsi, etibarlılıq nəzəriyyəsi, eksperimentin planlaşdırılması, fizika, geofizika, genetica, demoqrafiya, meteorologiya, riyazi sığorta nəzəriyyəsinə və texnikanın qarışıq oblastlarına böyük yer ayrılmışdır. Hər bir məqalənin sonunda istifadə olunan ədəbiyyat verilir. Məqalələrin adı eyni zamanda rus və ingilis tərcüməsində də verilmişdir. Ensiklopediyanın 2-ci hissəsi – “Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı” – P. Laplasın “Essai philosophique sur les probabilités” adlı görkəmli əsərinin (1908-də A. K. Vlasovun rus dilinə tərcüməsindən) Azərbaycan dilinə tərcüməsi ilə başlanır. Daha sonra V. Ya. Bunyakovskinin “Основания математической теории вероятностей” (СПб., 1846) adlı ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərsliyindən giriş, son və tarixi oçerk, Ş. N. Bernşteynin “Современное состояние теории вероятностей” (М., 1927. Syurix, 1932) adlı iki məruzəsi və nəhayət, A. N. Kolmoqorovun «Математика, ее содержание, методы и значение» (М., 1956) kitabının 2-ci cildindən «Теория вероятностей» fəslі, ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının elementar şərhі verilmişdir. Müntəxəbatın sonuncu hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın (М., 1937-58) 1-ci və 2-ci nəşrlərində yerləşdirilmiş, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən rus dilindən tərcümədir.

Ensiklopediyaya daxil olan məqalələr tələbələr, aspirantlar, riyaziyyat sahəsində çalışan elmi işçilər və öz tədqiqatlarında və praktiki fəaliyyətlərində ehtimal metodlarını tətbiq edən digər elm sahəsində çalışan elmi işçilər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Yığılmağa verilmiş XX.XX.XXXX. Çapa imzalanmış XX.05.2009.

Formatı 84x108 1/16. Ofset kağızı №1. Ofset çap üsulu.

Həcmi ç.v. tiraj 300. Sifariş №.

Qiyməti müqavilə ilə.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA ENSİKLOPEDİYASI

***C. E. ALLAHVERDİYEV,
H. M. ƏHMƏDOVA,
A. H. HACIYEV***

Direktor: Ş.ALIŞANLI
Mətbəənin müdiri: Ə.MƏMMƏDOV
Texniki redaktor: T.AĞAYEV
Kompüter tərtibçisi: A.QABİLQIZI

Yığılmağa verilmişdir: 01.07.2009.

Çapa imzalanmışdır: 07.01.2010.

Nəşrin ölçüsü: 84x108 1/16.

Həcmi: 74,5 ç.v.

Sifariş: 02. Sayı: 500.

Qiyməti müqavilə əsasında.

«ELM» RNPM-nin mətbəəsində çap olunmuşdur.

İSTİQLALİYYƏT, 8.