М. Ә. ӘЗИМОВ
Ф. Һ. СӘЛИМОВ

ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

маариф · 1986

22. 161. 6
Ә 38

Әсәри әлјазмасына физика-ријазијјат елмләри доктору, проф. **Ә. Ш. ҺӘБИБЗАДӘ** рә'ј вермишдир.

Елми редактору: Азәрбајҹан ССР ЕА-нын мүхбир үзвү проф. **А. Ә. БАБАЈЕВ**

Әзимов М. Ә., Сәлимов Ф. Һ.

Ә 38 Интеграл һесабы. Дәрс вәсаити, Бакы, „Маариф“ нәшријјаты, 1986-ҹы ил, 296 сәһ. шәкилли.

Интеграл һесабы курсу ријази анализин әсас һиссәсини тәшкил едир. Програм әсасында јазылмыш бу әсәрдә ибтидаи функсија, әсас интеграллама методлары, мүәјјән интегралын тә'рифи, Дарбу cәмләри вә онун хассәләри, гејри-мәхсуси интеграл, мүәјјән интегралын тәгриби һесабланмасы, тәтбиги вә с. нәзәрдән кечирилмишдир.

Вәсаит али мәктәбләр үчүн нәзәрдә тутулмушдур.

$A\frac{1702050000-37}{M\ 652-86}$ 68—86

22. 161. 6

МҮГӘДДИМӘ

Ријази тәһсилини тамамлајан һәр бир шәхс бу елмин инкишаф мәрһәләләри илә јахындан таныш олмалыдыр.

Бу бахымдан тәгдим олунан „Интеграл һесабы" әсәри ријази анализин ән мүһүм һиссәләриндән бири олмагла мараглы инкишаф јолу кечмишдир. Функсијанын интегралланмасы мәсәләси илә XVIII әсрин әввәлләриндә Исаак Нјутон, Һотфрид Вилһелм Лејбнис мәшғул олмушлар. Лакин илк дәфә (кәсилмәз функсијалар үчүн) бу мәсәләнин мүкәммәл шәклиндә һәллини Огјустен Луи Коши вермишдир.

Даһа сонра бу анлајыш дүнјанын бир чох даһи ријазијјатчылары тәрәфиндән инкишаф етдирилмиш вә Георг Фридрих Бернһард Риман, Гастон Дарбу, Пастер Густав Лежан Дирихле, Һөлдер, Һарнах, Валле-Пуссен, Анри Луи Лебег, Емил Борел, Томас Стилтес, Данжуа, А. Ј. Хинчин вә с. интеграллары јаранмышдыр.

Интеграл һесабы бир сыра елмләрин (физика, астрономија, еһтимал нәзәријјәси, кимја, биолокија вә с.) инкишафында һәлледичи апарат олмушдур.

Мүвафиг програм әсасында јазылмыш „Интеграл һесабы" дәрс вәсаити ики һиссәдән вә сәккиз фәсилдән ибарәтдир. Биринчи һиссәдә гејри-мүәјјән интеграл, икинчи һиссәдә мүәјјән интеграл өјрәнилир.

I һиссәнин I фәслиндә интеграл һесабынын әсас мәсәләси, гејри-мүәјјән интегралын һәндәси мә'насы, онун хассәләри, II фәслиндә билаваситә интеграллама, интегралламада әвәзләмә методу, һиссә-һиссә интеграллама, ајырма методлары, садә кәсрләрин интегралланмасы, III фәслиндә ҹәбри чохһәдлиләрин вуруглара ајрылмасы, дүзкүн расионал кәсрин садә кәсрләрин ҹәми шәклиндә көстәрилмәси, Остроградски методу, IV фәслиндә садә иррасионал функсијаларын интегралланмасы, Ејлер әвәзләмәләри, онларын һәндәси мә'насы, биномиал диференсиалларын интегралланмасы, Абел әвәзләмәси, V фәслиндә синус вә косинусларын һасилләри иштирак едән функсијаларын вә бә'зи трансендент функсијаларын интегралланмасы, $f(\sin x, \cos x)$ шәклиндә олан функсијаларын интегралланмасы, кәтирмә дүстурлары, һиперболик функсијаларын интегралланмасы, гејри-мүәјјән әмсаллар методу, еллиптик интеграллар; II һиссәнин I фәслиндә ашағы вә јухары Дарбу ҹәмләри, онларын хассәләри, мүәјјән интегралын һесабланмасы, онун хассәләри, Валлис дүстуру, вә с., II фәслиндә биринҹи вә икинҹи нөв гејри-мәхсуси интеграллар, III фәслиндә трапесија методу, Симпсон дүстуру вә с., IV фәслиндә мүстәви фигурун саһәси, ҹисмин һәҹминин тә'јини, әјри гөвсүнүн узунлуғу, фырланма сәтһинин саһәси, V фәслиндә мүстәви әјрисинин статик моменти вә ағырлыг мәркәзинин тапылмасы вә с. VI фәслиндә параметрдән асылы мүәјјән интеграллар верилир.

Һәр бир тәклифин мүкәммәл нәзәри исбаты верилдикдән сонра кифајәт гәдәр мисал һәлл едилир, даһа сонра охуҹуларын өзләринин һәлл етмәләри үчүн чалышмалар верилир.

Китаб һаггында арзу вә гејдләри бу үнвана көндәрмәк хаһиш олунур: Бакы 111, Ә. Тагызадә күчәси, 4, „Маариф“ нәшријјаты.

I ҺИССӘ

ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

I ФӘСИЛ

ИБТИДАИ ФУНКСИЈА, ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘ'РИФЛӘР

§ 1. ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫНЫН ӘСАС МӘСӘЛӘЛӘРИ

Диференсиал һесабында, функсија верилдикдә бу функсијанын төрәмәси вә онун тапылмасы гајдалары өјрәнилир.

Төрәмәнин тапылмасы әмәлинә функсијанын диференсиалланмасы дејилир. Беләликлә, диференсиал һесабынын әсас мәсәләси, верилмиш $F(x)$ функсијасынын $F'(x)=f(x)$ төрәмәсинин вә ја $dF(x)=f(x)dx$ диференсиалынын тапылмасы мәсәләсидир. Мәсәлән, $F(x)=x^2$ оларса, $F'(x)=2x$ олар. Тәбии олараг бу мәсәләнин тәрси гојула биләр. Белә ки, $f(x)$ функсијасы верилләр, төрәмәси $f(x)$-ә бәрабәр олан функсијанын өзү ахтарылар. Башга сөзлә, $F'(x)=f(x)$ ифадәсиндә $f(x)$ верилир, $F(x)$-ин тапылмасы тәләб олунур.

Бу мәсәлә там нәзәри характер дашымагла бәрабәр онун физикада, механикада вә башга елмләрдә олдугча чохлу тәтбигләри вардыр. Мәсәлән, мадди нөгтәнин һәрәкәт ганунунун тапылмасы мәсәләси белә мәсәләдир. Тутаг ки, мадди нөгтәнин t-дән асылы һәрәкәт сүр'әти $V(t)$ верилмишдир. $V(t)$-нин верилдијини биләрәк һәрәкәт гануну олан $S(t)$ функсијасынын тапылмасы мәсәләси гојулур. Бу тип тәрс мәсәләләрә мәктәб ријазијјатынын бир чох бөлмәләриндә дә раст кәлмәк олур. Мәсәлән, вурманын тәрси бөлмә, мүсбәт там гүввәтә јүксәлтмәнин тәрси көкалма, логарифм вә с.

Ибтидаи функсија. Ибтидаи функсија анлајышы ријази анализ курсунун вачиб мәсәләләриндән биридир.

Фәрз едәк ки, $f:[a;\ b]\to R$ вә $F:[a,\ b]\to R$, $x\in[a,\ b]$ функсијалары

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

шәртини өдәјән ихтијари функсијалардыр.

Суал олунур ки, (1) бәрабәрлијини өдәјән $F(x)$ функсијасынын варлығы үчүн, $f(x)$ функсијасы һансы шәрти өдәмәлидир?

Г. Дарбу теореминә әсасән $[a,\ b]$ парчасында төрәмәси олан $F(x)$ функсијасы үчүн $F'_+(a)=f(a)$ вә $F'_-(b)=f(b)$

шәртләри өдәниләрсә, онда $F(x)$ функсијасы $A=F'_{+}(a)$ вә $B=F'_{-}(b)$ арасындакы бүтүн аралыг гијмәтләри алар. Онда (1) бәрабәрлијинә әсасән дејә биләрик ки, $f(x)$ функсијасы да $f(a)$ вә $f(b)$ арасындакы бүтүн гијмәтләри алар.

Демәли, (1)-дән гејд олунан $f(x)$ функсијасы кәсилмәз функсија олмалыдыр.

Тә'риф 1. *$f(x): J\to R$ (бурада J—интервал вә ја парчадыр) вә $F(x): J\to R$ функсијалары $\forall x\in J$ нөгтәсиндә $F'(x)=f(x)$ шәртини өдәјирсә, онда $F(x)$ функсијасына $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы дејилир.*

Елә һиссә-һиссә кәсилмәз функсија ола биләр ки, бу функсија үчүн јухарыда сөјләнән тә'риф өз күчүндә галмасын.

Мәсәлән, $f: x\to \operatorname{sgn} x$, $a\leqslant x\leqslant b$, $(a\cdot b<0)$ функсијасы һиссә-һиссә кәсилмәздир. Лакин бу функсијанын $[a, b]$ парчасында ибтидаи функсијасы јохдур. Доғрудан да бу функсија анчаг -1, 0,1 гијмәтләрини ала билдији үчүн, $F: [a; b]\to R$ функсијасынын төрәмәси илә үст-үстә дүшә билмәз, чүнки Дарбу теореминә көрә бу функсија -1 илә 1 арасындакы бүтүн гијмәтләри алмалыдыр. Көрүндүјү кими о, аралыг гијмәтләрин һамысыны ала билмир. Бу исә бахылан мисалын ибтидаи функсијасынын олмадығыны көстәрир.

Гејд. Ибтидаи функсијаја $[a, b]$ парчасында тә'риф вериләрсә, парча дахилиндә $F'(x)=f(x)$, парчанын уч нөгтәләриндә исә $F'(a+0)=f(a)$ вә $F'(b-0)=f(b)$ мүнасибәтләри өдәнмәлидир.

Мисал 1. Бүтүн әдәд охунда, $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$ олдуғу үчүн, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ функсијасы, $f(x)=x^3$ функсијасынын ибтидаи функсијасыдыр.

Мисал 2. $]-1; 1[$ интервалында $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ олдуғу үчүн, $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ функсијасы $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функсијасынын ибтидаи функсијасыдыр.

Мисал 3. $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ интервалында $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ олмасындан алырыг ки, $F(x)=\ln|x|$ функсијасы $f(x)=\frac{1}{x}$ функсијасынын ибтидаи функсијасыдыр.

Верилмиш функсијанын ибтидаи функсијасынын тапылмасы интеграл һесабынын әсас мәсәләсидир. Ибтидаи функсијанын тапылмасы мәсәләсинин һәлли јеканә олмајыб, сонсуз сајдадыр.

Доғрудан да, $F_1(x)=\sin x$, $F_2(x)=\sin x-15$, $F_3(x)=\sin x+1$ вә с. функсијалары $f(x)=\cos x$ функсијасынын ибтидаи функсијаларыдыр.

Үмумијјәтлә, $(\sin x+C)'=\cos x$ (бурада вә сонралар $C\in R$) олдуғу үчүн $F(x)=\sin x+C$ функсијасы, $f(x)=\cos x$ функсијасынын ибтидаи функсијасыдыр. Бу мисалдан көрүнүр ки, функсијанын бир ибтидаи функсијасы тапыларса, һәмин функсијанын $F(x)+C$ шәклиндә мүәјјән бир синиф ибтидаи функсијаларыны тапмаг олар.

Доғрудан да, $F'(x)=f(x)$ оларса, онда $(F(x)+C)'=f(x)$ олар.

Демәли, $F(x)+C$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы олар.

Теорем. ***]a, b[интервалында верилмиш кәсилмәз функсијанын ихтијари ики ибтидаи функсијасынын фәрги сабитдир.***

◀ Тутаг ки, фәрг $\varphi(x)$ функсијасына бәрабәрдир.*

$F_1(x)$ вә $F_2(x)$ функсијалары $f(x)$ функсијасынын истәнилән ики ибтидаи функсијасы олсун. Јә'ни $\forall x\in\,]a;\,b[$ үчүн

$$F_1'(x)=f(x),\quad F_2'(x)=f(x) \tag{1'}$$

олар.

$$F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x) \tag{2}$$

ишарә едәк. $\varphi(x)=C$ олдуғуну көстәрмиш олсаг, онда теорем исбат олунар $]a,\,b[$ интервалында $F_1(x)$ вә $F_2'(x)$ функсијаларынын төрәмәләри олдуғундан $\varphi(x)$-ин дә төрәмәси вар:

$$\varphi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x). \tag{3}$$

(1)-и (3)-дә нәзәрә алсаг:

$$\varphi'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Инди исә $\varphi(x)$ функсијасынын сабит олдуғуну көстәрәк $\varphi(x)$ функсијасы үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг етсәк, $a,\, b\supset x_1,\, x_2$ парчасында

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=(x_2-x_1)\varphi'(\xi)\ (x_1<\xi<x_2). \tag{4}$$

$\varphi'(\xi)=0$ олдуғуну (4) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=0$ ејнилик кими өдәнәр, онда

$$\varphi(x_2)=\varphi(x_1)=C \tag{5}$$

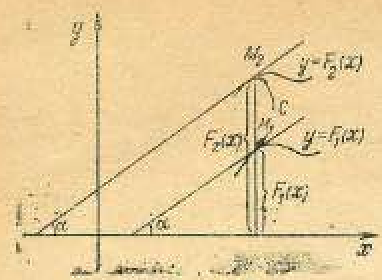
алынар. (5) илә (2)-ни тутушдурсаг:

$$F_1(x)-F_2(x)=C. \tag{6}$$

(6) ифадәсини $F_1(x)=F_2(x)+C$ шәклиндә јазмаг олар. Демәли, $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалар чохлуғу $F(x)+C$ ифадәси илә тамамилә ифадә едилир. ▶

---

* ◀ ишарәси тәклифин исбатынын башландығыны, ▶ ишарәси исә исбатын тамамландығыны көстәрир.



Шәкил 1

Теоремин һәндәси мә'насы ашағыдакы кимидир.

$y=F_1(x)$ вә $y=F_2(x)$ ејни бир $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалары олсун, ја'ни $\operatorname{tg}\alpha=F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$ олдуғундан, абсисләри ејни олан M_1 вә M_2 нөгтәләриндән бу әјриләрә чәкилән тохунанлар паралелдир (шәкил 1).

Башга сөзлә бу әјриләр мүәјјән мә'нада „паралелдир"* вә M_1, M_2 нөгтәләри арасындакы мәсафә C сабитинә бәрабәрдир.

Тә'риф 2 *]a, b[интервалында верилмиш $f(x)$ функсијасынын бүтүн ибтидаи функсијалар чохлуғуна, һәмин интервалда $f(x)$ функсијасынын гејри-мүәјјән интегралы дејилир вә*

$$\int f(x)\,dx$$

шәклиндә јазылыр. „Интеграл еф икс де икс" кими охунур. Тә'рифә көрә

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

Бурада $f(x)$—интегралалты функсија,
$f(x)dx$—интегралалты ифадә,
$F(x)$—интегралын функсионал һиссәси,
$\int$—интеграл ишарәси, C—интеграл сабитидир.

Функсијанын гејри-мүәјјән интегралынын тапылмасы әмәлинә функсијанын интегралланмасы дејилир.

Функсијанын диференсиалланмасы вә интегралланмасы әмәлләри гаршылыглы тәрс әмәлләрдир. Биз кәләчәкдә теорем кими исбат едәчәјик ки, $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмиш истәнилән кәсилмәз функсијанын ибтидаи функсијасы вардыр. Сөјләдијимиз бу факт ибтидаи функсијанын варлығына һөкм верир, анчаг бу ибтидаи функсијаны һәмишә сонлу сајда һесаб әмәлләри васитәсилә елементар функсијалар шәклиндә ифадә етмәк мүмкүн олмур. Мәсәлән,

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\sin x},\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int\sin x^2\,dx$$

вә $\int\cos x^2 dx$ интегралларынын ибтидаи функсијалары елементар функсијалар шәклиндә көстәрилә билмир.

---

* Нөгтәдә тохунанлары паралел олан әјриләр, һәмин нөгтәнин јахын әтрафында паралел әјриләр адланыр.

Бурада дөрдүнчү интеграл Пуассон интегралы адланыр. Истиликкечирмә вә диффузија нәзәријјәсиндә, бешинчи вә алтынчы интеграллара Френел интеграллары дејилир, онлардан оптика нәзәријјәсиндә истифадә олунур.

§ 2. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

Гејри-мүәјјән интегралларын тапылмасы мәсәләси, һәндәси олараг тохунанларынын бучаг әмсалы $f(x)$ олан $y=F(x)+C$ әјриләр аиләсинин тапылмасы демәкдир. Башга сөзлә, бучаг әмсалы $k=\operatorname{tg}\alpha=f(x)$ олан әјрини тә'јин етмәк лазымдыр.

Демәли,

$$F'(x)=f(x)=k ; \qquad (1($$

олан $F(x)$ функсијасыны тапмаг тәләб олунур. Ибтидаи функсијанын тә'рифинә көрә (1) бәрабәрлији көстәрир ки, $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасыдыр.

Беләликлә, гаршыја гојулан мәсәлә интеграл һесабынын әсас мәсәләси олан ибтидаи функсијанын тапылмасына кәтирилир, јә'ни

$$y=\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Бурадан ашкар олур ки, гојулан мәсәләнин шәртини бир јох, сонсуз сајда әјри өдәјир. $y=F(x)$—бу әјриләрдән биридирсә, ону өзүнә паралел көчүрмәклә башгаларыны алмаг олар (шәкил 2).

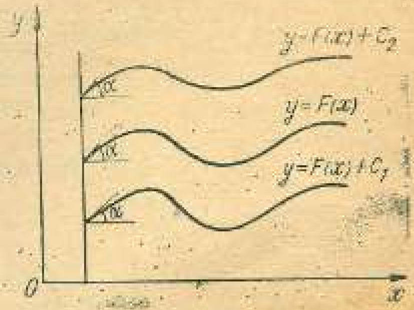
Әјриләр аиләсиндән мүәјјән бирини сечмәк үчүн әлавә шәрт дахил етмәк лазымдыр. Мәсәлән, $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән кечән әјринин тә'јин едилмәси тәләб олунарса, мәсәлә јеканә олараг һәлл едилир. Доғрудан да $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсинин координатлары

$$y=F(x)+C \qquad (2)$$

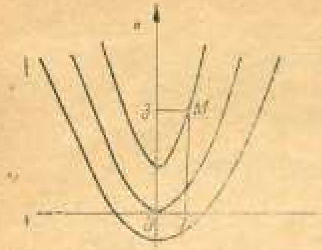
тәнлијини өдәмәли, јә'ни $y_0=F(x_0)+C$ вә ја $C=y_0-F(x_0)$ олмалыдыр. C-нин бу гијмәтини (2)-дә јазсаг мәсәләнин јеканә $y=F(x)-y_0-F(x_0)$ һәлли тапылар.

Мисал. $f(x)=2x$ функсијасынын ибтидаи функсијалары чохлуғуну тапын.

■ $F(x)=x^2$ функсијасы ибтидаи функсијалардан биридир. Онда $y=\int 2x\,dx=x^2+C$ функсијалары бүтүн ибтидаи функсијалар чохлуғудур. C-јә истәнилән 6, 4, 1, 0, —4, —2,. гијмәтләрини вермәклә, $y=x^2+6$, $y=x^2+4$, $y=x^2+1$, $y=x^2$, $y=x^2-4$ вә $y=x^2-2$



Шәкил 2



Шәкил 3

функсијаларыны аларыг. Бунларын графики, симметрија оху Oy олан параболалар аиләсидир (шәкил 3)

Бу мәсәлә үчүн башланғыч шәрти belә гојула биләр: $y=x^2+C$ вараболалар аиләсинә дахил олан ә M (1; 3) нөгтәсиндән кечән параболаны тә'јин един.

$x_0=1$, $y_0=3$ олдуғундан $3=1+C$ вә ја $C=2$ олар. Демәли, $y=x^2+2$ ахтарылан параболадыр.

$F(x)=x^2+C$ әјриләр аиләсинин ејни x-и үчүн тохунанларын бучаг әмсалы $k=y'=2x=f(x)$-ә бәрабәрдир. Беләликлә, ибтидаи функсијанын тапылмасы мәсәләсини һәндәси олараг ашағыдакы кими баша дүшүрүк: елә $y=F(x)$ функсијасы ахтарылыр ки, бу функсијаја чәкилән тохунанын бучаг әмсалы $k=\operatorname{tg}\alpha=F'(x)=f(x)$ ганунуна табе олсун. ■

§ 3. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Гејри-мүәјјән интегралын тә'рифиндән истифадә едәрәк ашағыдакы хассәләри исбат етмәк олар. Исбат просесиндә, иштирак едән функсијаларын интегралланан олдуғуну фәрз едәчәјик.

Хассә 1°. Гејри-мүәјјән интегралын төрәмәси интегралалты функсијаја, диференсиалы исә интегралалты ифадәјә бәрабәрдир.

◀ Тә'рифә көрә

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

(1) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндән төрәмә алсаг,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x),$$

ејни гајда илә

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx. \quad ▶$$

Хассә 2° Һәр һансы функсијанын диференсиалынын гејри-мүәјјән интегралы, бу функсија илә ихтијари сабитин чәминә бәрабәрдир:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

◀ $F(x)$ функсијасы, $F'(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олдуғундан

■ ишарәси мисал һәллинин башланмасыны вә гуртармасыны көстәрир.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

вә јa

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad \blacktriangleright$$

d символу интегралдан сонра кәлдикдә, бунлар бир-бирини јох едир вә нәтиҹәјә C сабити әлавә олунур.

Хассә 3°. Сабит вуруғу интеграл ишарәси алтындан чыхартмаг олар:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

бурада k ихтијари сабитдир.

$$\blacktriangleleft \quad d\left[\ \int f(x)\,dx\right] = k\left[d\int f(x)dx\right] = kf(x)\,dx$$

олдуғу үчүн

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad \blacktriangleright$$

Хассә 4°. Ики функсијанын ҹәбри ҹәминин интегралы, онларын интегралларынын ҹәбри ҹәминә бәрабәрдир:

$$\int \left[f(x) \pm \varphi(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)dx. \qquad (2)$$

◀ Әввәлә ону гејд едәк ки, (2) бәрабәрлији ики чохлулуғун бәрабәрлији мә'нада баша дүшүлүр.

Функсијанын ики ибтидаи функсијасынын бир-бириндән ихтијари сабитлә фәргләндијини нәзәрә алыб, $f(x)$-ин ибтидаи функсијасыны $F(x)$ вә $\varphi(x)$-ин ибтидаи функсијасыны $\Phi(x)$ ишарә етсәк, онда $F(x) \pm \Phi(x)$ функсијасы, $f(x) \pm \varphi(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олар:

$$[F(x) \pm \Phi(x)]' = F'(x) \pm \Phi'(x) = f(x) \pm \varphi(x). \quad \blacktriangleright$$

Аналожи олараг,

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx$$

бәрабәрлијинин доғру олдуғуну исбат етмәк олар.

II ФӘСИЛ

ӘСАС ИНТЕГРАЛЛАМА МЕТОДЛАРЫ

§ 1. БИЛАВАСИТӘ ИНТЕГРАЛЛАМА

Интеграллама әмәли диференсиалламанын тәрси олдуғу үчүн, бир сыра функсијаларын интегралыны билаваситә јазмаг олар. Бу интегралларa *ҹәдвәл интеграллары* дејилир.

1. $\int 0 \cdot dx = 0.$

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\mu+1} + C, \ \mu \neq -1, \ \mu \in R.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ x \in J, \ J \subset R \setminus \{0\}.$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (0 < a \neq 1), \ a = e$ оларса,

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad x \in R.$$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad x \in R.$

7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad x \in R.$

8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

10. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C, \ x \in J \subset R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z \right\}.$

11. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in J \subset R \setminus \{k\pi, \ k \in Z\}.$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C; \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases} \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C. \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C; \\ -\arccos x + C, \ |x| < 1. \end{cases}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \ |x| < |a| \end{cases}$$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec} x + C, \\ -\operatorname{arccosec} x + C, \ |x > 1. \end{cases}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$

(мәнфи ишарәси олан һалда $|x| > 1$ көтүрүлүр)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C|,$$

(мәнфи ишарәси олан һалда $|x| > a$ олмалыдыр)

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \quad |x| \neq 1,$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad |x| \neq a.$$

Билаваситә гејри-мүәјјән интегралын тә'рифиндән истифадә едәрәк јухарыдакы дүстурлардан бә'зиләрини исбат едәк.

1. $(x+C)'=1$ олдуғундан $\int 1\cdot dx = x + C$.

2. $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\right)'=x^{\mu}$ олдуғундан $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$.

3. Интегралалты $\frac{1}{x}$ функсијасы $x=0$ нөгтәсиндән башга һәр јердә кәсилмәздир.

а) $x>0$ оларса, $|x|=x$ вә $\ln|x|=\ln x$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Демәли, $x>0$ олдуғда $\int\frac{dx}{x}=\ln x + C = \ln|x| + C$.

б) $x<0$ оларса, $|x|=-x$ вә $\ln|x|=\ln(-x)$ олар. Дикәр тәрәфдән $[\ln(-x)]'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$ олдуғундан, $x<0$ һалы үчүн $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C=\ln|x|+C$.

4. $\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)'=\frac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$ олдуғундан $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

5. $(-\cos x + C)' = \sin x$ олдуғундан, $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $(\sin x + C)' = \cos x$ олдуғундан $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $(-\ln\cos x + C)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ олдуғундан $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

Галан дүстурларын доғрулуғуну јухарыда көстәрдијимиз гајда илә асанлыгла исбат етмәк олар.

Гејд 1. Интеграл дәјишәни x олмајыб, һәр һансы башга бир дәјишәнин функсијасы оларса, јухарыдакы дүстурлар өз күчүндә галыр.

Јә'ни

$$\int f(U)dU = F(U) + C,$$

бурада $U=\varphi(x)$.

Мисаллар

1. $\int \cos^4 x \sin x dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sin x dx = -d(\cos x)$ олдуғу үчүн,

$$\int \cos^4 x \sin x\, dx = -\int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C. \ ■$$

2. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $e^x dx = d(e^x)$ олдуғу үчүн,

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$ ■

Гејд 2. Бә'зи интеграллларын һесабланмасы үчүн ујғун чәдвәл интегралары тәртиб едилмир. Мәсәлән, интегралалты функсија кәсрдирсә вә бу кәсрин сурәти махрәчин төрәмәсинә бәрабәр оларса,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Доғрудан да, $f'(x)\,dx = d(f(x))$ олдуғундан

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d\,f(x)}{f(x)} = \int d(\ln|f(x)|) = \ln|f(x)| + C.$$

Мисал 3. $\int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2-15} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $d(x^3-2x^2-15) = (x^3-2x^2-15)'dx = (3x^2-4x)dx$ олдуғундан

$$\int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2-15} dx = \int \frac{d(x^3-2x^2-15)}{x^3-2x^2-15} = \ln|x^3-2x^2-15| + C.$$ ■

Мисал 4. $\int \frac{dx}{\sin x}$ интегралыны һесабламалы.

■ $$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

олдуғундан

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$ ■

Еjни гаjда илә

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$ ■

§ 2. ИНТЕГРАЛЛАМАДА ӘВӘЗЛӘМӘ МЕТОДУ

Бир чох һалларда верилмиш интеграллары асанлыгла чәдвәл интегралына билаваситә кәтирмәк олмур. Белә олан һалларда бә'зән әвәзләмә методундан истифадә едилир. Белә ки, $=\int f(x)dx$ интегралында x-и јени дәјишәнлә әвәз етмәклә интегралы садә шәклә кәтирмәк олур. Әвәзләмәнин сечилмәси стандарт олмајыб, интеграл һесаблајанын тәчрүбәси вә мәһарәтиндән асылыдыр.

$\int f(x)dx$ интегралыны һесабламаг үчүн $x=\varphi(t)$ әвәзләмәси апарылыр. Бурада $\varphi(t)$ функсијасынын бахылан интервалда кәсилмәз төрәмәси олдуғу нәзәрдә тутулур.

Бу һалда $dx=\varphi'(t)dt$ вә

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

дүстуру алыначагдыр.

◀ (1) бәрабәрлијиндә сағ вә сол тәрәфләрин диференсиалларынын бәрабәр олдуғуну көстәрмәк кафидир. Доғрудан да,

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

$$d\left(\int[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \quad ▶$$

Гејд. Бә'зи һалларда $x=\varphi(t)$ әвәзләмәси әвәзинә, бунун $t=\psi(x)$ кими тәрс әвәзләмәсини апармаг даһа мәгсәдәујғун олур.

Әвәзләмә методуна аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $x=a\sin t$ әвәзләмәсиндән, $dx=a\cos t\,dt$,

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\pm a\cos t.$$

$t\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ олдугда, $x\in[-a,+a]$ олар. t дәјишәнинин бүтүн гијмәтләриндә $\cos t>0$ олдуғундан $\sqrt{a^2-t^2}=a\cos t$. Беләликлә,

$$J=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t+C. \tag{2}$$

Апарылан әвәзләмәдән $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$ вә $\sin 2t=$ $=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$ олар. t вә $\sin 2t$ үчүн алынмыш гијмәтләри (2) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C. \quad ■$$

Мисал 2. $J=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a\neq 0)$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=\frac{x}{a}$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк,

$$J=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C. \quad ■$$

Мисал 3. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (|x|<a)$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=\frac{x}{a}$ әвәзләмәсиндән,

$$J=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C. \quad ■$$

Мисал 4. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sqrt{x^2+a}=t-x$ әвәзләмәсиндән, $x=\frac{t^2-a}{2t}$, $dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2+a}=t-x=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t}$ аларыг. Бунлары интегралда нәзәрә алсаг,

$$J=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C. \quad ■$$

Мисал 5. $J=\int(ax+b)^n dx\,(n\neq-1)$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=ax+b\ (dt=adx)$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк,

$$J=\frac{1}{a}\int t^n dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C. \quad ■$$

Мисал 6. $J=\int\frac{\arcsin ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\left(|x|<\frac{1}{a}\right)$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=\arcsin ax$ илә әвәз етсәк, $dt=\frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ олар вә

$$J=\frac{1}{a}\int tdt=\frac{1}{2a}t^2+C=\frac{1}{2a}(\arcsin ax)^2+C. \quad ■$$

Мисал 7. $J=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ интегралыны һесабламалы.

■ $x=a\operatorname{tg}\alpha$ илә әвәз етсәк, $dx=a\sec^2\alpha\,d\alpha$ олар вә

$$x^2+a^2=a^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=a^2\sec^2\alpha.$$

Бу ифадәләри интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{a\sec^2\alpha\,d\alpha}{a^4\sec^4\alpha} = \frac{1}{a^3}\int\frac{d\alpha}{\sec^2\alpha} = \frac{1}{a^3}\int\cos^2\alpha\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\int(1+\cos 2\alpha)d\alpha = \frac{1}{2a^3}\left[\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right] + C.$$

Апарылан әвәзләмәдән $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$ вә

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{ax}{a^2+x^2}$$

олдуғуну аларыг. Беләликлә,

$$J = \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C. \quad ■$$

Мисал 8. $J = \int\frac{dx}{3\cos^2x + 4\sin^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■ Интегралалты функсија үзәриндә садә чевирмә апарсаг, $t = \operatorname{tg}x$ әвәзләмәси илә ҹәдвәл интегралына кәлән интеграл алынар:

$$J = \int\frac{dx}{3\cos^2x+4\sin^2x} = \int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{3+4\operatorname{tg}^2x} = \int\frac{dt}{3+4t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}} + C \quad ■$$

Мисал 9. $J = \int\frac{dx}{3\cos^2x - 5\sin^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■ $z = \operatorname{tg}x$ илә әвәз етсәк,

$$J = \int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{3-5\operatorname{tg}^2x} = -\int\frac{dz}{5z^2-3} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}z-\sqrt{3}}{\sqrt{5}z+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\sin x - \sqrt{3}\cos x}{\sqrt{5}\sin x + \sqrt{3}\cos x}\right| + C. \quad ■$$

Чалышмалар	**Ҹаваблар**
1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$,	$6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C.$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{1+x}}$,	$2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + C.$
3. $\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx$,	$\frac{4x^2+10x+16}{12\sqrt{2x-5}} + C.$
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-2(\ln\|x\|)^2}}$,	$\frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{2}\ln\|x\|\right) + C.$
5. $\int\frac{8x+7}{x^2+x}dx$,	$\ln\|x^8+x^7\| + C.$
6. $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$,	$-\frac{2}{9}(1$ [illegible]

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$, $\arcsin\frac{x+3}{4}+C$.

8. $\int\frac{\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x-\sin^2x}{(\cos x-\sin x)(\sin x-2\cos x+1)}dx$, $\ln|\sin2x-2\cos x+1|+C$.

9. $\int\sqrt[3]{x+a}\,dx$, $\frac{3}{4}(x+a)\sqrt[3]{x+a}+C$.

10. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2x-\sin^2x}}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos^4x-\sin^2x}+C$.

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$.

12. $\int\sqrt{1+e^x}dx$, $2\sqrt{1+e^x}+2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C$.

§ 3. ҺИССӘ-ҺИССӘ ИНТЕГРАЛЛАМА МЕТОДУ

Интегралларын һесабланмасында сәмәрәли методлардан бири дә һиссә-һиссә интеграллама методудур. Бу методән чох, интеграл алтында трансендент функсија илә чохһәдлинин һасили олан һалларда тәтбиг едилир.

Теорем. *$U(x)$ вә $V(x)$ функсијалары $\{x\}$ чохлуғунда диференсиалланан оларса, вә бу чохлугда $V(x)\cdot U'(x$ функсијасынын ибтидаи функсијасы варса, онда һәми) чохлугда $U(x)\cdot V'(x)$ функсијасынын да ибтидаи функн сијасы вар вә*

$$\int U(x)V'(x)dx=U(x)V(x)-\int V(x)U'(x)dx \qquad (1)$$

дүстуру доғрудур.

◀ $[U(x)V(x)]'=U(x)V'(x)+U'(x)V(x)$

бәрабәрлијинин һәр тәрәфини dx-ә вуруб интегралласаг,

$$\int[U(x)\cdot V(x)]'dx=\int U(x)V'(x)dx+\int U'(x)V(x)dx$$

аларыг. Шәртә көрә $\{x\}$ чохлуғундан көтүрүлмүш һәр бир x үчүн $\int V(x)U'(x)dx$ интегралы вар вә

$$\int[U(x)V(x)]'dx=U(x)V(x)+C$$

Онда $\int U(x)V'(x)dx$ интегралы да вар. Беләликлә, (1) дүстуру доғрудур.

Гејд. Диференсиалын тә'рифинә вә инвариантлыг хассәсинә көрә (1) дүстуруну

$$\int UdV=UV-\int VdU \qquad (2)$$

шәклиндә јазмаг олар.

$U(x)$ вә $V(x)$ функсијаларынын бахылан чохлугда $(n+1)$ тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри варса, онда (1) дүстурунда $V(x)$ әвәзинә $(V(x))^n$ јазсаг,

$$\int UV^{(n+1)}dx=\int UdV^{(n)}=UV^{(n)}-\int V^{(n)}dU=UV^{(n)}-\int U'V^{(n)}dx.$$

Аналожи олараг

$$\int U'V^{(n)}dx=U'V^{(n-1)}-\int U''V^{(n-1)}dx,$$
$$\int U''V^{(n-1)}dx=U''V^{(n-2)}-\int U'''V^{(n-2)}dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int U^{(n)}V'dx=U^{(n)}V-\int U^{(n+1)}Vdx.$$

Ардычыл олараг бу бәрабәрликләрин һәр ики тәрәфини нөвбә илә +1 вә −1-ә вуруб топласаг,

$$\int UV^{(n+1)}dx=UV^{(n)}-U'V^{(n-1)}+U''V^{(n-2)}-\ldots+$$
$$+(-1)^nU^{(n)}V+(-1)^{(n+1)}\int U^{(n+1)}Vdx. \qquad (3)$$

(3)-ә үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру дејилир. Һиссә-һиссә интеграллама методу илә башлыча олараг,

$$x^n\ln^m x,\ x^n\sin\alpha x,\ x^n\cos\beta x,\ x^ne^{\alpha x},\ x^n\arcsin\alpha x,\ x^n\arccos\alpha x,$$
$$x^n\operatorname{arctg}x,\ x^n\operatorname{arcctg}x,\ x^n\operatorname{arcsec}\alpha x,\ x^n\operatorname{arccosec}\alpha x$$

функсијаларынын интеграллары һесабланыр. ▶

Һиссә-һиссә интеграллламада мүһүм мәсәлә U вә dV ифадәләринин даһа мүнасиб сечилмәсидир. Мәсәлән, $\int\operatorname{arctg}x\,dx$ интегралыны һесаблајаркән U вә dV бир гајда илә, јә'ни $U=\operatorname{arctg}x$ вә $dV=dx$ шәклиндә сечилир. Онда

$$dU=+\frac{dx}{1+x^2},\ V=x$$

олар. Беләликлә,

$$\int\operatorname{arctg}x\,dx=x\operatorname{arctg}x+\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Гејд едәк ки, U вә dV дүзкүн сечилмәдикдә, даһа мүрәккәб олан интеграл алына биләр.

Мәсәлән, $\int xe^xdx$ интегралында $U=e^x$, $dV=xdx$ кими ишарә етсәк, $dU=e^xdx$, $V=\frac{1}{2}x^2$ вә

$$\int xe^xdx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^xdx$$

алынар. Сағ тәрәфдәки интегралын верилмиш интегралдан даһа мүрәккәб олдуғу ашкар көрүнүр. Бу мәсәләдә U вә dV ифадәләри дүзкүн сечиләрсә, јә'ни

$$U=x,\ \ dV=e^xdx;\ \ dU=dx,\ \ V=e^x$$

оларса, онда

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = x(e^{x} - 1) + C.$$

Һиссә-һиссә интеграллама методуну тәтбиг етмәклә

$$J = \int e^{\alpha x} f(x)dx \tag{4}$$

интегралыны һесаблајаг. Бурада $f(x)$ функсијасы n-чи тәртибдән кәсилмәз төрәмәјә маликдир. (3) дүстуруну тәтбиг етсәк

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\Big[f(x) - \frac{1}{\alpha} f'(x) + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) - \frac{1}{\alpha^3} f'''(x) + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1}{\alpha^n} f^{(x)}_{(n)}\Big] + C$$

олдуғуну аларыг.

Хүсуси һалда $\alpha = -1$ оларса,

$$J = \int e^{-x} f(x)dx = -e^{-x}\left[f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(x)}_{(n)}\right] + C.$$

$f(x) = x^n$ оларса,

$$J = \int e^{-x} x^n dx = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n+2} + \cdots + n!) + C.$$

Бә'зи һалларда һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну ардычыл олараг бир нечә дәфә тәтбиг етдикдән сонра верилмиш интегралын өзү алыныр. Мәсәлән, $J = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$ интегралында $U = \sin \beta x$, $dV = e^{\alpha x}dx$ ишарә етсәк, $dU = \beta \cos \beta x dx$, $V = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ вә

$$J = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

аларыг. Сағ тәрәфдәки интеграла јенидән һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$U = \cos \beta x,\ dU = -\beta \sin \beta x,\ dV = e^{\alpha x} dx,\ V = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x};$$

$$J = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

Сонунчу ифадәни јухарыда нәзәрә алсаг,

$$J = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) -$$

$$- \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx + C$$

вә ја

$$J = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C.$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$J = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x}{\beta^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C,$$

Һиссә-һиссә интеграллама методунун тәтбигинә аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$, $(a>0)$, интегралыны һесабламалы.

■ Бу интегралда U вә dV бир гајда олараг $U=\sqrt{x^2+a}$, $dV=dx$ шәклиндә сечилир. Онда

$$dU=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}},\quad V=x,$$

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Дикәр тәрәфдән

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$
$$=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$$

Беләликлә,

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C \quad ■$$

Мисал 2. Јухарыдакы мисала аналожи олараг көстәрмәк олар ки,

$$\int\sqrt{a-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\ |x|\leqslant a.$$

Мисал 3. $\int x^k\ln\alpha x\,dx$, $(k\neq-1)$ интегралыны һесабламалы.

■ $U=\ln\alpha x$, $dV=x^kdx$ ишарә едиб $dU=\frac{dx}{x}$, $V=\frac{x^{k+1}}{k+1}$ олдуғуну, һиссә-һиссә интеграллама дүстурунда нәзәрә алсаг,

$$J=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln\alpha x-\frac{1}{k+1}\int x^kdx=\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln\alpha x-\frac{1}{k+1}\right)+C \quad ■$$

Мисал 4. $\int P(x)e^{\alpha x}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ ($P(x)$—n дәрәчәли чохһәдлидир) $V^{(n+1)}=e^{\alpha x}$, $u=P(x)$ ишарә едиб, үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк:

$$V^{(n)}=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x},\quad u'=P'(x),\quad V^{(n-1)}=\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x},\quad u''=P''(x),\ldots$$

Бу ифадәләри (3) дүстурунда нәзәрә алсаг,

$$J=\int P(x)e^{\alpha x}dx=e^{\alpha x}\left(\frac{P(x)}{\alpha}-\frac{P'(x)}{\alpha^2}+\frac{P''(x)}{\alpha^3}-\frac{P'''(x)}{\alpha^4}+\cdots\right)+C. \quad ■$$

Мисал 5. $J=\int P(x)\sin\beta x\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $V^{(n+1)}=\sin\beta x$, $u=P(x)$ гәбул едиб вә

$$V^{(n)}=-\frac{\cos\beta x}{\beta},\ u'=P'(x),\ V^{(n-1)}=-\frac{\sin\beta x}{\beta^2},\ u''=P''(x),\ldots$$

вә с. ифадәләрини үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстурунда јеринә јазсаг, онда

$$J=\int P(x)\sin\beta x dx=\sin\beta x\left(\frac{P'(x)}{\beta^2}-\frac{P'''(x)}{\beta^4}+\cdots\right)-$$
$$-\cos\beta x\left(\frac{P(x)}{\beta}-\frac{P'(x)}{\beta^2}+\cdots\right)+C.\ ■$$

Мисал 6. $J=\int P(x)\cos\alpha x dx$ интегралы әввәлки мисала аналожи оларaг һесабланыр.

$$J=\sin\alpha x\left(\frac{1}{\alpha}P(x)-\frac{1}{\alpha^3}P'(x)+\cdots\right)+$$
$$+\cos\alpha x\left(\frac{1}{\alpha^2}P'(x)-\frac{1}{\alpha^4}P'''(x)+\cdots\right).\ ■$$

Мисал 7. $J=\int x^k\ln^n x dx$, $(k\neq-1,\ k\in R,\ n\in N)$ интегралыны һесабламалы.

■ $U=\ln^n x,\ x^k dx=dV$ ишарә етсәк, онда

$$dU=n\ln^{n-1}x\frac{dx}{x},\quad V=\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$J=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^n x-\frac{n}{k+1}\int x^k\ln^{n-1}x dx+C\ ■$$

Мисал 8. $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $(n\in N,\ n\neq1)$ интегралыны һесабламалы.

■ $$J_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^n}dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-$$
$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}J_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$$

Ахырынчы интегралы һесабламаг үчүн

$$U=x,\ dV=\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$$

ишарә етсәк,

$$V=\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

олдуғуну аларыг. Алынан ифадәләри ахырынчы интегралда нәзәрә алсаг,

$$J_n=\frac{1}{a^2}J_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}J_{n-1}$$

вә ја

$$J_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}J_{n-1}\ ■$$

Ахырынчы дүстура кәтирмә дүстуру дејилир. Бурада $n\neq1$ көтүрүлмәлидир. $n=1$ олан һалы үчүн

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Бу дүстуру ардычыл тәтбиг етсәк,

$$J_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \cdot \frac{x}{a^4 (x^2 + a^2)^{n-2}} + \\ + \cdots + \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^{2n}} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Хүсуси һалда $n=2$ оларса,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Гејд. Бә'зи һалларда интегралларын һесабланмасында дәјишәнин әвәз едилмәси вә һиссә-һиссә интеграллама методларынын һәр икиси тәтбиг едилир.

Мәсәлән, $J = \int e^{\sqrt{x}} dx$, $x = t^2$ әвәз етсәк, $dx = 2tdt$

$$J = \int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int te^t dt$$

алыныр. Јенидән һиссә-һиссә интеграллама методуну тәтбиг етсәк ($U = t$, $dV = e^t dt$),

$$2 \int te^t dt = 2 \left(te^t - \int e^t dt \right) = 2 (te^t - e^t) + C$$

вә ја

$$J = 2 \left(\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} \right) + C.$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстурудан истифадә едәрәк интеграллары һесаблајын.

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int x^3 e^{-x^2} dx$,	$-\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C.$
2. $\int x \ln^2 x dx$,	$\frac{x^2}{2} (\ln x - 1) \ln x + \frac{x^2}{4} + C.$
3. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$,	$x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C.$
4. $\int x^2 \sin x dx$,	$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$
5. $\int \arccos x dx$,	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C.$
6. $\int \operatorname{arctg} x dx$,	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$
7. $\int \ln (x + a) dx$,	$(x + a) \ln (x + a) - x + C.$
8. $\int \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) dx$,	$x \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) - \sqrt{1 + x^2} + C.$
9. $\int \frac{\ln (\operatorname{arctg} x)}{1 + x^2} dx$,	$\operatorname{arctg} x [\ln(\lvert\operatorname{arctg} x\rvert) - 1] + C.$
10. $\int \cos (\ln x) dx$,	$\frac{x}{2} [\sin (\ln x) + \cos (\ln x)] + C.$

§ 4 АJЫРМА МЕТОДУ

Бу методу интеграл алтында $f: J \to \mathbf{R}$ функсиjасыны $f_i: J \to R\,(i=\overline{1,n})$, функсиjаларынын ҹəми шəклиндə көстəрмəк мүмкүн олдугда тəтбиг етмəк мəгсəдəуjғундур. Башга сөзлə бу метод

$$\int f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x)\,dx, \quad x \in J$$

типли интеграллара аиддир.

Мисал 1. $J = \int \frac{x^2}{(a-x)^n} dx, \, (n \in N, x \neq a)$ интегралыны һесаблаjын.

■ $x^2 = (a-x^2) - 2a(a-x) + a^2$ олдуғу үчүн

$$f(x) = \frac{(a-x)^2 - 2a(a-x) + a^2}{(a-x)^n} = \frac{1}{(a-x)^{n-2}} - \frac{2a}{(a-x)^n} + \frac{a^2}{(a-x)^n}$$

олар. Бурада

$$f_1(x) = \frac{1}{(a-x)^{n-2}}, \quad f_2(x) = -\frac{2a}{(a-x)^{n-1}}, \quad f_3(x) = \frac{a^2}{(a-x)^n}.$$

Алырыг ки,

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Бу интегралларын һəр бирини аjрыча һесабласаг,

$$J_1 = \int \frac{dx}{(a-x)^{n-2}} = \frac{1}{(n-3)(a-x)^{n-3}} + C_1,$$

$$J_2 = -\int \frac{2a\,dx}{(a-x)^{n-1}} = -\frac{2a}{(n-2)(a-x)^{n-2}} + C_2,$$

$$J_3 = \int \frac{a^2 dx}{(a-x)^n} = \frac{a^2}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C_3$$

олар. Онда

$$J = \sum_{k=1}^{3} J_k = \frac{1}{(n-3)(a-x)^{n-3}} - \frac{2a}{(n-2)(a-x)^{n-2}} + \frac{a^2}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C. \; ■$$

Мисал 2. $J = \int \frac{f(x)dx}{(x-a)^n}, \; (n \in N, \; a \neq x)$ һесабламалы.

■ Бурада $f(x)$ функсиjасынын Теjлор теореминин шəртлəрини өдəдиjи фəрз олунур.

Интегралы һесабламаг үчүн $x-a=u\,(dx=du)$ əвəзлəмəси апарыб, сонра $f(x)=f(u+a)$ функсиjасыны Теjлор сырасына аjырмаг кифаjəтдир:

$$f(x) = f(a+u) = f(a) + \frac{u}{1!} f'(a) + \frac{u^2}{2!} f'(a) + \cdots$$

Онда

$$J = \int \frac{f(x)dx}{(x-a)^n} = f(a) \int \frac{du}{u^n} + \frac{f'(a)}{1!} \int \frac{du}{u^{n-1}} + \frac{f''(a)}{2!} \int \frac{du}{u^{n-2}} + \cdots$$

Алынан интегралларын һәр бири чәдвәл интегралыдыр.

Хүсуси һалда $f(x)=P_к(x)$, $(k<n)$ чохһәдлиси оларса, бу чохһәдлини

$$P_к(x)=P_к(u+a)=P_к(a)+\frac{u}{1!}P'_к(a)+\frac{u^2}{2!}P''_к(a)+\cdots+\frac{u^к}{k!}P_к^{(к)}(a)$$

Тејлор ајрылышына ајырдыгдан сонра,

$$J=\int\frac{P_к(x)}{(x-a)^n}dx=P_к(a)\cdot\int\frac{du}{u^n}+P'_к(a)\int\frac{du}{u^{n-1}}+$$

$$+\cdots+\frac{P_к^{(к)}(a)}{k!}\int\frac{du}{u^{n-к}}$$

интеграллары асанлыгла һесабланыр. ■

Мисал 3. $J=\int\frac{(x^3-2)dx}{(x-1)^5}$ $(x\neq1)$ интегралыны һесабламалы.

■ Бурада $P(x)=x^3-2$ вә $a=1$. Јухарыда сөјләнилән гајданы тәтбиг едәк:

$$P(x)=x^3-2,\quad P(1)=-1;$$
$$P'(x)=3x^2,\quad P'(1)=3;$$
$$P''(x)=6x,\quad P''(1)=6;$$
$$P'''(x)=6,\quad P'''(1)=6.$$

Онда

$$\frac{x^3-2}{(x-1)^5}=\frac{-1}{(x-1)^5}+\frac{3}{1!}\cdot\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{6}{2!}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{6}{3!}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Беләликлә, алырыг ки,

$$\int\frac{(x^3-2)\,dx}{(x-1)^5}=\frac{1}{4(x-1)^4}-\frac{1}{3(x-1)^3}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+C.$$ ■

§ 5. САДӘ КӘСРЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Садә кәсрләр дедикдә,

$$\frac{1}{ax+b},\quad\frac{1}{(ax+b)^m},\quad\frac{Px+Q}{ax^2+bx+c},\quad\frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n},\quad n,\ m\in N$$

шәклиндәки кәсрләри баша дүшәҹәјик.

$J_1=\int\frac{dx}{ax+b}$ вә $J_2=\int\frac{dx}{(ax+b)^m}$ интеграллары $t=ax+b$ әвәзләмәси васитәсилә билаваситә чәдвәл интегралына кәлир. Доғрудан да $t=ax+b$ вә $dt=adx$ ифадәләрини интегралларда нәзәрә алсаг,

$$J_1=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C.$$

$$J_2=\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int t^{-m}dt=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C.$$

Үчүнчү тип садә кәсрин үмуми шәкилдә интегралына ке мәздән әввәл $P=0$, $Q=1$ һалына бахаг:

$$J_3=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{4adx}{4a^2x^2+4abx+4ac}$$

$$=2\int\frac{d(2ax+b)}{4a^2x^2+4abx+b^2+4ac-b}=2\int\frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^2+4ac-b^2}.$$

Бурада үч һал ола биләр: а) $4ac-b^2>0$, б) $4ac-b^2<$ с) $4ac-b^2=0$.

а) $4ac-b^2>0$ һалы үчүн $4ac-b^2=k^2$ вә $2ax+b=t$ әвәзлә мәси апарсаг,

$$J_3=2\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{2}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C;$$

б) $4ac-b^2<0$ оларса, $4ac-b^2=-k^2$ вә $2ax+b=t$ әвәзләмәләрини апарсаг,

$$J_3=2\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

вә ја

$$J_3=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C;$$

с) $4ac-b^2=0$ оларса, $2ax+b=t$ әвәзләмәсини апармаг кифајәтдир. Онда

$$J_3=2\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}+C=-\frac{2}{2ax+b}+C.$$

Беләликлә,

$$J_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2ax+b^2}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & (4ac-b^2>0);\\ \dfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C, & (4ac-b^2<0);\\ -\dfrac{2}{2x+b}+C, & (4ac-b^2=0).\end{cases}$$

Инди исә даһа үмуми һала бахаг:

$$J_4=P\int\frac{xdx}{ax^2+bx+c}+Q\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad P,\ Q,\ a,\ b \text{ вә } c\in R.$$

Бурада икинчи интеграл јухарыда һесабланмышдыр. Биринчи интегралы һесаблајаг:

$$J_1^* = \int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx -$$

$$-\frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}J_3.$$

Демәли,

$$J_4 = PJ_1^* + QJ_3$$

вә ја

$$J_4 = \begin{cases} \frac{P}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(Q-\frac{Pb}{2a}\right)\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\times \\ \qquad \times\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \quad (4ac-b^2>0); \\ \frac{P}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(Q-\frac{Pb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\times \\ \qquad \times\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, \quad (4ac-b^2<0) \\ \frac{P}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \left(Q-\frac{Pb}{2a}\right)\frac{2}{2ax+b} + C, \ (4ac-b^2=0). \end{cases}$$

Инди

$$J_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

интегралыны һесаблајаг:

$$J_n = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)^n} = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]^n}.$$

Сонунҹу ифадәдә $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}>0$ оларса,

$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=k^2$, $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}<0$ оларса, $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=-k^2$ ишарә едәҹәјик.

$x+\frac{b}{2a}=t$ әвәзләмәсини тәтбиг етсәк,

$$J_n = \frac{1}{a^n}\int \frac{dt}{(t^2\pm k^2)^n}$$

интегралыны аларыг ки, бу интеграл үчүн ашағыдакы кәтирмә дүстуру мә'лумдур (§ 4):

$$J_n = \pm\frac{t}{2a^nk^2(n-1)(t^2\pm k^2)^{n-1}} \pm \frac{1}{a^nk^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}.$$

Бурада

$$t = x + \frac{b}{2a} \text{ вә } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

J_n интегралыны һесабладыгдан сонра

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

интегралыны асанлыгла һесаблаја биләрик.

Доғрудан да, $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ əвəзләмәләрини апарсаг,

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{P}{a^n}\int \frac{t\,dt}{(t^2 \pm k^2)^n} + \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}}\int \frac{dt}{(t^2 \pm k^2)^n}.$$

Сағ тәрәфдәки интеграллары һесаблајаг.

Биринчи интеграл $t^2 \pm k^2 = z$, $2t\,dt = dz$ әвәзләмәси васитәсилә асанлыгла һесабланыр:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2 \pm k^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{2(1-n)z^{n-1}}.$$

Икинчи интегралы исә биз јухарыда кәтирмә дүстуру кими һесабламышыг.

Беләликлә,

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{P}{a^n}\cdot\frac{1}{2(1-n)(t^2 \pm k^2)^{n-1}} \pm \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}} \times$$
$$\times \frac{t}{2(n-1)k^2(t^2 \pm k^2)^{n-1}} \pm \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}.$$

Бурада

$$t = x + \frac{b}{2a},\quad \frac{c}{2a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Садә кәсрләрин интегралланмасына аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ интегралыны һесабламалы.

■ $J_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot J_{n-1}$

кәтирмә дүстурундан истифадә едәк. Бурада $n=3$, $a=1$ олдуғундан,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}J_2,\quad J_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}J_1$$

вә $J_1 = \operatorname{arctg} x + C$.

Беләликлә,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C. \quad ■$$

Мисал 2. $J = \int \frac{5x+8}{x^2-6x+13}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $$J=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-6)+23}{x^2-6x+13}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx+23\frac{dx}{(x+3)^2+4}$$

Сонунҹу интеграллары ајрылыгда һесаблајаг.

$$J_1=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx=\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}=\ln|x^2-6x+13|+C_1$$

Икинҹи интегралда $u=x+3$ əвəзлəмəси апараг.

$$J_2=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C_2.$$

Интегралларын бу гијмəтлəрини верилмиш интегралда јеринə јазсаг,

$$J=\frac{5}{2}\ln|x^2-6x+13|+\frac{23}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$ ■

Чалышмалар:	**Ҹаваблар:**
1. $\int\frac{dx}{8x^2-7x+5}$,	$\frac{2}{\sqrt{111}}\operatorname{arctg}\frac{16x-7}{\sqrt{111}}+C.$
2. $\int\frac{dx}{2x^2+3x+1}$,	$\ln\left\|\frac{2x+1}{2x+2}\right\|+C.$
3. $\int\frac{3x+2}{2x^2+x+4}dx$,	$\frac{3}{4}\ln\|2x^2+x+4\|+$ $+\frac{5}{2\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{3}}+C.$
4. $\int\frac{(3x+2)}{(x^2-3x+3)^2}dx$,	$\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$
5. $\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx$,	$-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+$ $+\frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$
6. $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$,	$\frac{3}{2}\ln\|x^2+2x+10\|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$
7. $\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$,	$\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$

III ФƏСИЛ

ЧОХҺƏДЛИНИН ВУРУГЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

§ 1. ҸƏБРИ ЧОХҺƏДЛИЛƏРИН ВУРУГЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

Тə'риф 1. $z=(x,\ y)=x+iy$ *комплекс дəјишəн,* $a_i\ (i=\overline{0,n})$ *ихтијари сабит комплекс əдəдлəр олдугда,*

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$$

шәклиндә функсиjаjа n дәрәчәли чәбри чохһәдли (полином) дејилир.

Үмуми чәбр курсундан мә'лум олдуғу кими $P(z)$ вә $Q(z)$ мүхтәлиф дәрәчәли чәбри чохһәдлиләрдирсә вә $Q(z)$-ин дәрәчәси $P(z)$-ин дәрәчәсиндән бөјүк дејилсә, онда

$$P(z)=Q(z)q(z)+r(z) \tag{1}$$

бәрабәрлиjи доғрудур.

Бурада $q(z)$-ин дәрәчәси $P(z)$ илә $Q(z)$-ин дәрәчәләри фәргинә бәрабәрдир, $r(z)$ исә дәрәчәси $Q(z)$-ин дәрәчәсиндән кичик олан чохһәдлидир. $P(z)$ бөлүнән, $Q(z)$ бөлән, $q(z)$ гисмәт, $r(z)$ исә галыг чохһәдлидир.

Тә'риф 2. *Истәнилән сабит комплекс әдәд сыфыр дәрәчәли чәбри чохһәдли дејилир.*

Бу һалда аjдындыр ки, истәнилән (сыфырдан фәргли) чохһәдлини сыфыр дәрәчәли чохһәдлиjә бөлмәк олар.

Тә'риф 3. *$P(a)=0$ оларса, a комплекс әдәдинә $P(z)$ чохһәдлисинин көкү дејилир.*

Теорем 1. ***(Безу)* n дәрәчәли чәбри чохһәдлини $z-a$ икиһәдлисинә бөлдүкдә алынан галыг, $z=a$ олдугда бөлүнәнин алдығы гиjмәтә бәрабәрдир.***

▶ Тутаг ки, $P(z)$ истәнилән n дәрәчәли чохһәдлидир, бу һалда (1) бәрабәрлиjинә көрә

$$P(z)=(z-a)q(z)+r(z). \tag{2}$$

(2) бәрабәрлиjиндә $z=a$ јазсаг, $P(a)=r(a)$. ▶

Теорем 2. ***$z=a$ комплекс әдәди $P(z)$ чохһәдлисинин көкү оларса, бу чохһәдли $z-a$ икиһәдлисинә бөлүнәр.***

▲ $r(z)$ галыг чохһәдлисинин дәрәчәси, $z-a$ икиһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олдуғу үчүн $r(z)=C$ олар. (2) бәрабәрлиjинә әсасән

$$P(z)=(z-a)q(z)+C. \tag{3}$$

Бу бәрабәрликдә $z=a$ јазсаг, $P(a)=C=0$ олур. ▶

Тәбии олараг гаршыjа белә бир суал чыха биләр.

Истәнилән чәбри чохһәдлинин көкү вардырмы? Бу суала Гаусун исбат етдиjи ашағыдакы теоремлә чаваб верилир.

Теорем 3. ***(Гаус)**. Дәрәчәси сыфыр олмаjан комплекс әмсаллы истәнилән чәбри чохһәдлинин һеч олмаса бир (һәгиги вә jа комплекс) көкү вардыр.***

Бу теорема чәбрин әсас теореми дејилир. Бурада теоремин исбатыны вермирик.

---

* Е. Безу (1730—1783) франсыз риjазиjjатчысыдыр, Парис Университетинин профессору, Франса Елмләр Академиjасынын академики олмушдур.

** К. Ф. Гаус (1777—1855) алман риjазиjjатчысыдыр. О, чәбрин әсас теореминин исбатыны, 1799-чу илдә мүдафиә етдиjи докторлуг диссертасиjасы ичиндә вермишдир.

1807-чи илдән өмрүнүн ахырынадәк Һеттинкен рәсәдханасынын директору вә университетин профессору вәзифәләриндә ишләмишдир.

Һәмин теоремдән истифадә едәрәк n дәрәчәли чохһәдлинин n сајда көкү олдуғуну көстәрәк.

▲ Тутаг ки, $P_n(z)$ ихтијари n дәрәчәли чохһәдлидир. Ҹәбрин әсас теореминә көрә $P_n(z)$ чохһәдлисинин һеч олмаса бир b_1 көкү вардыр. Онда

$$P_n(z)=(z-b_1)P_{n-1}(z) \tag{3_1}$$

олар. $P_{n-1}(z)$ чохһәдлиси $n-1\,(n\neq-1)$ дәрәчәлидир вә онун һеч олмаса бир b_2 көкү вардыр (теорем 3). Онда

$$P_{n-1}(z)=(z-b_2)P_{n-2}(z) \tag{3_2}$$

олар. $P_{n-2}(z)$ чохһәдлиси $(n-2)$ дәрәчәли чохһәдлидир. Бу мүһакимәни давам етдирсәк, аналожи олараг јаза биләрик.

$$P_{n-2}(z)=(z-b_3)P_{n-3}(z), \tag{3_3}$$

$$P_{n-3}(z)=(z-b_4)P_{n-4}(z), \tag{3_4}$$

. . . .

. . . .

$$P_1(z)=(z-b_n)c \tag{3_n}$$

(бурада c—сабитдир). (3_1), (3_2),…, (3_n) бәрабәрликләриндән

$$P_n(z)=(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)\cdot c \tag{4}$$

алынар.

c комплекс әдәди сыфра бәрабәр ола билмәз. Әкс һалда $P_n(z)$ чохһәдлиси n дәрәчәли чохһәдли олмазды.

(4) бәрабәрлијиндән $P_n(b_1)=P_n(b_2)=\cdots=P_n(b_n)=0$ олмасы ашкардыр, јә'ни b_1, b_2,…, b_n әдәдләринин һәр бири $P_n(z)$ чохһәдлисинин көкләридир.

(4) бәрабәрлијиндән көрүндүјү кими b_1, b_2,…, b_n әдәдләриндән башга $P_n(z)$ чохһәдлисинин һеч бир көкү јохдур.

Беләликлә, $P_n(z)$ чохһәдлисинин n көкү олдуғуну исбат етдик. ▶

Ајдынадыр ки, (4) бәрабәрлији $P_n(z)$ чохһәдлисинин хәтти вуруглара ајрылмасыны көстәрир.

Ҹәбрдән мә'лум олдуғу кими $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$ вә $Q_n(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\dots+b_{n-1}z+b_n$ чохһәдлиләри ејниликлә бәрабәр, јә'ни $P_n(z)=Q_n(z)$ оларса, $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$,…, $a_n=b_n$ олар. Белә исә $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$ вә $P_n(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)c$ чохһәдлиләринин әмсалларыны тутушдурсаг, $c=a_0$ олдуғуну көрәрик. $P_n(z)$ чохһәдлисиндә $a_0=1$ оларса, онда она кәтирилмиш чохһәдли дејилир.

Кәтирилмиш чохһәдли үчүн (4) дүстуру

$$P_n(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)$$

шәклиндә олар.

Јухарыда, истәнилән n дәрәҹәли чохһәдлинин n сајда көкү олдуғуну көстәрдик. Мә'лумдур ки, бунларын ичәрисиндә тәкрарланан көкләр дә ола биләр.

Тә'риф 4. *$P_n(z)=(z-b)^{\alpha}P_{n-\alpha}(z)$, $P_{n-\alpha}(b)\neq 0$ оларса, b әдәдинә $P_n(z)$ чохһәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкү дејилир. b_1, $b_2, \ldots,$ b_n әдәдләри $P_n(z)$ чохһәдлисинин ујғун олараг α_1, α_2 ,α_n тәкрарланан көкләри оларса,*

$$P_n(z)=a_0(z-b_1)^{\alpha_1}(z-b_2)^{\alpha_2}\cdots(z-b_n)^{\alpha_n} \tag{5}$$

олар. Бу бәрабәрлик $P_n(z)$ чохһәдлисинин вуруглара ајрылышыны ифадә едилир. Бурада $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$ олар.

Үмумијјәтлә, истәнилән чохһәдлини вуруглара ајырмаг үчүн онун көкләрини тапмаг лазымдыр.

(5) бәрабәрлијиндән төрәмә алсаг,

$$\begin{aligned}P_n'(z)&=\frac{\alpha_1}{z-b_1}\cdot P_n(z)+\frac{\alpha_2}{z-b_2}\cdot P_n(z)+\cdots+\frac{\alpha_n}{z-b_n}P_n(z)=\\&=a_0(z-b_1)^{\alpha_1-1}(z-b_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-b_n)^{\alpha_n-1}\times\\&\times[\alpha_1(z-b_2)\cdots(z-b_n)+\alpha_2(z-b_1)(z-b_3)\cdots(z-b_n)+\\&+\alpha_n(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_{n-1})].\end{aligned} \tag{6}$$

(6) бәрабәрлији көстәрир ки, b_1-ләр $P_n(z)$ чохһәдлисинин $\alpha_1>1$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда һәмин әдәдләр $P_n'(z)$ чохһәдлисинин $\alpha_i>1$ дәфә тәкрарланан көкү олар.

Демәли, $(z-b_1)^{\alpha_1-1}(z-b_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-b_n)^{\alpha_n-1}$ чохһәдлиси $P_n(z)$ вә $P_n'(z)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләнидир.

Тә'риф 5. Һәгиги әмсаллы

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \tag{7}$$

чохһәдлисиндә z-и онун гошмасы олан $\bar{z}$ дәјишәни илә әвәз етмәклә алынан $P_n(\bar{z})$ чохһәдлисинә, $P_n(z)$ чохһәдлисинин гошмасы дејилир.

Һәгиги әмсаллы кәтирилмиш (7) чохһәдлисинин мүһүм бир хассәсини исбат едәк.

Теорем 4. ***a әдәди һәгиги әмсаллы $P_n(z)$ чохһәдлисинин λ дәфә тәкрарланан комплекс көкүдүрсә, онда a әдәдинин гошмасы олан $\bar{a}$ әдәди дә һәмин чохһәдлинин λ дәфә тәкрарланан көкдүр.***

▲ Әввәлчә $P_n(\bar{z})=\overline{P_n(z)}$ олдуғуну көстәрәк. Доғрудан да (7) чохһәдлисинин әмсаллары һәгиги олдуғу үчүн, $(\bar{z})^n$ комплекс әдәдинин z^n-ин гошмасы олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир.

Комплекс әдәдләрин хассәләриндән мә'лумдур ки,

$$\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2. \tag{8}$$

Бу бахдығымыз һал үчүн $z_1=z_2=z$ гәбул етсәк (8) бәрабәрлијинә көрә

$$\overline{z^2}=(\bar{z})^2. \tag{8_1}$$

Јенә дә (8) бәрабәрлијиндә $z_1=z^2$, $z_2=z$ гәбул етсәк,

$$\overline{(z^3)}=\overline{(z^2)}\,\overline{(z)}=(\overline{z})^3. \tag{8_2}$$

Просеси аналожи олараг давам етдирсәк, истәнилән n үчүн

$$\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n. \tag{8_3}$$

Бу исә $P(\overline{z})$ чохһәдлисинин, һәгиги әмсаллы $P(\overline{z})$ чохһәдлисинин гошмасы олдуғуну көстәрир, јә'ни

$$\overline{P(z)}=P(\overline{z}).$$

Онда

$$P(z)=\overline{P(\overline{z})}. \tag{9}$$

Фәрз едәк ки, a әдәди верилмиш һәгиги әмсаллы $P_n(z)$ чохһәдлисинин λ дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда

$$P_n(z)=(z-a)^{\lambda}Q(z)\ (Q(a)\neq 0). \tag{10}$$

(9) вә (10) бәрабәрликләриндән

$$P_n(z)=\overline{(\overline{z}-a)^{\lambda}Q(\overline{z})} \tag{11}$$

олар. Дикәр тәрәфдән $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ мүнасибәтинә әсасән

$$\overline{(\overline{z}-a)^{\lambda}}=(\overline{\overline{z}-a})^{\lambda}=(z-\overline{a})^{\lambda}. \tag{12}$$

(12) ифадәсини (11) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг,

$$P_n(z)=(z-\overline{a})^{\lambda}Q^*(z). \tag{13}$$

Бурада $\overline{Q(\overline{z})}=Q^*(z)$ кими ишарә едилир. $Q^*(\overline{a})\neq 0$ олдуғуну көстәрсәк, онда $\overline{a}$ әдәдинин $P_n(z)$ чохһәдлисинин λ дәфә тәкрарланан көкү олдуғуну исбат етмиш оларыг. $\overline{Q(\overline{z})}=Q^*(z)$ бәрабәрлијинә әсасән $Q^*(\overline{a})=\overline{Q(\overline{\overline{a}})}=\overline{Q(a)}$; $Q(a)\neq 0$ олдуғундан

$$Q^*(\overline{a})\neq 0. \quad ▶$$

§ 2. ҺӘГИГИ ӘМСАЛЛЫ ЧӘБРИ ЧОХҺӘДЛИНИН КӘТИРИЛМӘЈӘН ВУРУГЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

Бундан сонра һәгиги дәјишәнли чохһәдлиләрлә мәшғул олачағымыз үчүн z әвәзинә x һәгиги дәјишәнини кәтүрәчәјик.

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ әдәдләри $P_n(x)$ чохһәдлисинин ујғун олараг $\beta_1, \ldots, \beta_m$ дәфә тәкрарланан һәгиги көкләри вә $a_1, \overline{a_1}, a_2, \overline{a_2}, \ldots, a_r, \overline{a_r}$ әдәдләри ујғун олараг $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ дәфә тәкрарланан гошма комплекс көкләрдирсә, онда теорем 4-ә әсасән

$$P_n(x)=(x-b_1)^{\beta_1}\cdot(x-b_2)^{\beta_2}\cdots(x-b_m)^{\beta_m}(x-a_1)^{\lambda_1}(x-\overline{a_1})^{\lambda_1}\times$$
$$\times(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\overline{a_2})^{\beta_2}\cdots(x-a_r)^{\lambda_r}(x-\overline{a_r})^{\lambda_r}, \tag{14}$$

$$[\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+2(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r)]=n.$$

ифадә едилир.

$a_k\ (k=\overline{1,\ i})$ көкләринин һәгиги вә хәјали һиссәләрини u_k вә v_k илә ишарә етсәк, $a_k=u_k+iv_k$, $\overline{a_k}=u_k-iv_k$ олар. Истәнилән k үчүн

$$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\overline{a_k})^{\lambda_k}=[(x-\overline{a_k})]\,(x-\overline{a_k})]^{\lambda_k}= \tag{15}$$

$$=[x-u_k-iv_k)\,(x-u_k+iv_k)]^{\lambda_k}=$$

$$[(x-u_k)^2+v_k^2]^{\lambda_k}=(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k}$$

алынар. Бурада $p_k=-2u_k$, $q_k=u_k^2+v_k^2$. Бу бәрабәрлији (14)-дә нәзәрә алсаг,

$$P_n(x)=(x-b_1)^{\beta_1}\cdots(x-b_m)^{\beta_m}(x_1^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\times$$

$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r}. \tag{17}$$

Нәтичә. Һәгиги әмсаллы чәбри чоxһәдли (17) шәклиндә кәтирилмәјән һәгиги вуругларын һасили илә ифадә олунур.

§ 3 ДҮЗКҮН РАСИОНАЛ КӘСРИН САДӘ КӘСРЛӘРИН ЧӘМИ ШӘКЛИНДӘ КӨСТӘРИЛМӘСИ

$\frac{f(x)}{g(x)}$ кәсринин мәхрәчи, там расионал функсија олмагла $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$ шәклиндә вуруглара ајрылдыгда вә $f(x)$ истәнилән там расионал функсија олдугда, $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ интегралыны илк дәфә 1702-чи илдә Лејбнис* һесабламышдыр.

Тә'риф 1. *Ики там расионал функсијанын нисбәтинә расионал кәср дејилир вә*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

шәклиндә јазылыр.

Бундан сонра биз, һәгиги әмсаллы расионал кәсрләрә бахачагыг.

---

* Һ. В. Лејбнис (1646—1716) алман ријазијјатчысыдыр. Онун елмләрин мүхтәлиф саһәләриндә (фәлсәфә, һүгуг елми, ријазијјат, физика, тарих, дилчилик, һесаблама машынларына аид вә с). самбаллы нәтичәләри вардыр.

1684-чү илдә диференсиал һесабына, 1686-чы илдә исә интеграл һесабына аид очеркләрини чап етдирмишдир. Бу очеркләрдә илк дәфә олараг диференсиал вә интегралын тә'рифләрини вермиш, d—диференсиал вә $\int$—интеграл ишарәләрини дахил етмишдир.

Тә'риф 2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *кәсриндә сурәтин дәрәчәси мәхрәчин дәрәчәсиндән кичик оларса она дүзкүн, әкс һалда дүзкүн олмајан расионал кәср дејилир.*

Мәсәлән, $\frac{3x+1}{x^3+x^2+2}$ кәсри дүзкүн, $\frac{2x^3+1}{x+1}$ кәсри исә дүзкүн олмајан кәсрдир.

Чохһәдлини чохһәдлијә бөлмәклә дүзкүн олмајан кәсри, там расионал ифадә илә дүзкүн кәсрин чәми шәклиндә көстәрмәк олар. Мәсәлән, $P^*(x)$ чохһәдлиси m, $Q^*(x)$ исә n дәрәчәли вә $m > n$ оларса,

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = u(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

кими јазмаг мүмкүндүр.

Бурада $u(x)$ расионал ифадә, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ исә дүзкүн расионал кәсрдир.

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} \cdots (x - b_m)^{\beta_m} \times$$
$$\times (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + p_rx + q_r)^{\lambda_r} \qquad (1)$$

шәклиндә n дәрәчәли чохһәдли олсун.

(1) бәрабәрлијиндә иштирак едән вуруглардан квадрат үчһәдлиләрин һәгиги көкләри јохдур, икиһәдли вуругларын исә көкләри анчаг һәгигидир.

Теорем 1. ***Мәхрәчи (1) шәклиндә олан $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кәсрини ашағыда көстәрилән садә кәсрләрин чәми шәклиндә ифадә етмәк олар:***

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{\beta_1}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \frac{B_1}{x-b_2} +$$
$$+ \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_2}}{(x-b_2)^{\beta_2}} + \cdots + \frac{C_1}{x-b_m} +$$
$$+ \frac{C_2}{(x-b_m)^2} + \cdots + \frac{C_{\beta_m}}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \qquad (2)$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_1}x+N_{\lambda_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} +$$
$$+ \frac{F_1x+D_1}{x^2+p_2x+q_2} + \cdots + \frac{F_{\lambda_2}x+F_{\lambda_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}} + \frac{E_1x+L_1}{x^2+p_rx+q_r} +$$
$$+ \frac{E_2x+L_2}{(x^2+p_rx+q_r)^2} + \cdots + \frac{E_{\lambda_r}x+L_{\lambda_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r}}.$$

Бурада

$$b_i,\ p_i,\ q_k \in R,\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,r},\ k=\overline{1,r}),\ A_i\left(i=\overline{1,\beta_i}\right)$$

$$B_i\left(i=\overline{1,\beta_r}\right),\ C_i\left(i=\overline{1,\beta_m}\right),\ M_i\left(i=\overline{1,\lambda_r}\right),\ N_i\left(i=\overline{1,\lambda_r}\right),$$

$$F_i\left(i=\overline{1,\lambda_2}\right),\ D_i\left(i=\overline{1,\lambda_2}\right),\ldots,\ E_i\left(i=\overline{1,\lambda_r}\right),\ L_i\left(i=\overline{1,\lambda_r}\right)$$

һәгиги гејри-мүәјјән сабитләрдир.

Бу теореми исбат етмәк үчүн әввәлчә ашағыдакы ики лемманы исбат едәк.

Лемма 1. Һәгиги a әдәди $\frac{p(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсринин мәхрәчинин k дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, јә'ни $Q(x)=$ $=(x-a)^k Q_1(x)$ оларса, һәмин кәсри $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}=$ $=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{L(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ шәклиндә јазмаг олар. Бурада $Q_1(a)\neq 0$, $A=\frac{P(a)}{Q(a)}$, $L(x)$ исә һәгиги әмсаллы чохһәдлидир.

◀ Ашағыдакы фәргә бахаг:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}.$$

A әмсалыны елә сечәк ки, $P(x)-AQ_1(x)$ чохһәдлиси $x-a$ фәргинә бөлүнсүн, јә'ни $P(x)-AQ_1(x)=(x-a)L(x)$ мүнасибәти өдәнилсин. $P(x)-AQ_1(x)$ чохһәдлисинин $x-a$ фәргинә бөлүнмәси үчүн $P(a)-AQ_1(a)=0$ олмасы зәрури вә кафидир (Безу теореми). Онда A әмсалынын мүмкүн гијмәти $A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$ олар. $Q_1(x)$ чохһәдлиси $x-a$ икиһәдлисинә бөлүнмәдији үчүн $Q_1(a)\neq 0$ олмалыдыр. Демәли, $A=\frac{P(x)}{Q(a)}$ олдугда $\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$ кәсрини $x-a$ вуруғуна ихтисар едәрәк ону $\frac{L(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ шәклиндә јаздыгдан сонра

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{L(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$$

олдуғуну аларыг. ▶

Нәтичә. $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$ оларса,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{P_n(x)}{Q_1(x)},\qquad(3)$$

бурада $A_1, A_2, \ldots, A_k$—гејри-мүәјјән һәгиги әдәдләр, $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ дүзкүн расионал кәсрдир.

Доғрудан да, лемманы n дәфә тәтбиг етсәк,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)},$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}=\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}Q_1(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_1(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Бу бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг (3) ејнилији алынар.

Лемма 2. (3) ајрылышы јеканәдир, $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ исә дүзкүн кәсрдир.

Лемма 3. $a=\alpha+i\beta$ вә $\bar{a}=\alpha-i\beta$ гошма комплекс әдәдләри, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — дүзкүн расионал кәсрин мәхрәчинин $m\geqslant 1$ дәфә тәкрарланан көкләридирсә, јәни $Q(x)=(x+px+q)^mQ_1(x)$ оларса, һәмин кәсри

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}, \qquad (4)$$

кими ики кәсрин чәми шәклиндә көстәрмәк олар. Бурада M вә N гејри-мүәјјән һәгиги сабитләр, $p=-2a$, $q=\alpha^2+\beta^2$, $P_1(x)$ исә һәгиги әмсаллы чохһәдлидир.

◀ Ашағыдакы фәргә бахаг:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^mQ_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}=\frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^mQ_1(x)}.$$

x^2+px+q үчһәдлисинин көкләри $a=\alpha+i\beta$, $\bar{a}=\alpha-i\beta$ олдуғундан, сағ тәрәфдәки кәсрин сурәти олан

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x) \qquad (5)$$

чохһәдлисинин бу үчһәдлијә бөлүнмәси үчүн a вә $\bar{a}$ әдәдләринин (5) чохһәдлисинин көкләри олмасы зәрури вә кафидир. Онда

$$P(a)-(Ma+N)Q_1(a)=0 \qquad (6)$$

вә

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)=(x^2+px+q)\cdot P_1(x). \qquad (7)$$

(6) бәрабәрлијиндән

$$Ma+N=\frac{P(a)}{Q_1(a)} \text{ вә ја } M\cdot(\alpha+i\beta)+N=\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)} \qquad (8)$$

олдуғуну аларыг. (8) ифадәсиндә һәгиги вә хәјали һиссәни ајырсаг,

$$M\cdot(\alpha+i\beta)+N=E+iL.$$

Бурадан $M\alpha + N = E$, $M\beta = L$ олдуғундан

$$M = \frac{L}{\beta}, \; N = E - \frac{L\alpha}{\beta} \tag{9}$$

əмсаллары јеканə олараг тəʼјин едилəр. M вə N (9) ифадəси илə тəʼјин олунарса, (5) чохһəдлиси $x^2 + px + q$ үчһəдлисинə бөлүнəр. Јəʼни (7) бəрабəрлији доғру олар.

Белəликлə, (4) дүстурунун доғру олдуғу исбат едилди. Бурада $Q_1(x)$ чохһəдлисинин көклəри $\alpha + i\beta$ вə $\alpha - i\beta$ əдəдлəриндəн фəргли, $P_1(x)$ һəгиги əмсаллы чохһəдли, $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}$ кəсри исə дүзкүн кəсрдир. ▶

Бу леммадан ашағыдакы нəтичə алынар: $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$ оларса,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \\ + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)} \tag{10}$$

олар. Бурада M_i вə $N_i \, (i = \overline{1, m})$ гејри-мүəјјəн һəгиги əдəдлəрдир. Үчүнчү лемманы n дəфə тəтбиг етсəк,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)},$$

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q)^{m-2} Q_1(x)},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Бу бəрабəрликлəри тəрəф-тəрəфə топласаг, (10) дүстуруну алмыш оларыг.

Инди исə əсас теоремин исбатына кечəк.

Шəртə көрə

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ \times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r}.$$

Јухарыдакы леммалара əсасəн $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кəсрини

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x - b_1)^{\beta_1} Q_1(x)}$$

шəклиндə ифадə етмəк олар. Бурада

$$Q_1(x) = (x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_m)^{\beta_m} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ \times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r}.$$

Биринчи леммадан алынан нәтичәјә көрә

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-b_1)^{\beta_1}}+\frac{A_2}{(x-b_2)^{\beta_1-1}}+\cdots+\frac{A_{\beta_1}}{x-b_1}+\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Бурада $Q_1(x)=(x-b_2)^{\beta_2}Q_2(x)$. Дикәр тәрәфдән $Q_2(x)=$ $=(x-b_3)^{\beta_3}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r}$,

$$\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-b_2)^{\beta_2}Q_2(x)}$$

ифадәсинә биринчи леммадан чыхан нәтичәни јенидән тәтбиг етсәк,

$$\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}=\frac{B_1}{(x-b_2)^{\beta_2}}+\frac{B_2}{(x-b_2)^{\beta_2-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta_2}}{x-b_2}+\frac{\psi_1(x)}{Q_2(x)}.$$

Беләликлә, $Q(x)$ чохһәдлиси бирдәрәчәли икиһәдлиләрдән ибарәт олан һалда биринчи лемма вә ондан чыхан нәтичәни тәтбиг етмәклә

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-b_1)^{\beta_1}}+\frac{A_2}{(x-b_1)^{\beta_1-1}}+\cdots+\frac{A_{\beta_1}}{x-b_1}+\frac{B_1}{(x-b_2)^{\beta_2}}+\cdots+$$

$$+\frac{B_{\beta_2}}{x-b_2}+\frac{C_1}{(x-b_m)^{\beta_m}}+\frac{C_2}{(x-b_m)^{\beta_m-1}}+\cdots+\frac{C_{\beta_m}}{x-b_m}+\frac{\psi_l(x)}{Q_l(x)} \qquad (11)$$

алырыг. (11) дүстурунда ахырынчы дүзкүн кәсрин мәхрәчинин һәгиги көкләри јохдур. $Q_l(x)$ анчаг квадрат үчһәдлиләрдән ибарәтдир вә көкләри хәјалыдыр.

$$Q_l(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r}$$

олдугундан, үчүнчү лемманы вә бундан чыхан нәтичәни тәтбиг етсәк,

$$\frac{\psi_l(x)}{Q_l(x)}=\frac{\psi_l(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}Q_{l+1}(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda_1}x+N_{\lambda_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{\psi_{l-1}(x)}{Q_{l+1}(x)} \qquad (12$$

Аналожи олараг $\frac{\psi_{l+1}(x)}{Q_{l+1}(x)}$ һәгиги әмсаллы дүзкүн кәср үчүн (12)-јә ујғун дүстуру јаза биләрик. Беләликлә, јухарыдакы (11) вә (12) дүстурларыны нәзәрә алсаг (2) ејнилијини аларыг. ▶

§ 4. ҺӘГИГИ ӘМСАЛЛЫ КӘСРЛӘРИН САДӘ КӘСРЛӘРӘ АЈРЫЛМАСЫНА АИД МИСАЛЛАР

1°. Ихтисар олунмајан дүзкүн расионал кәсрин интегралына бахаг:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Бурада $P(x)$ вә $Q(x)$ һәгиги әмсаллы чохһәдлиләрдир. Мәхрәч тәкрарланмајан һәгиги көкләри олан чохһәдли олсун. Јә'ни

$$Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_m).$$

Биринчи лемма вә ондан чыхан нәтичәјә әсасән

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_m)}=\frac{A_1}{x-b_1}+\frac{A_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{A_m}{x-b_m} \qquad (1)$$

олар. (1) ејнилијиндә $P(x)\equiv R(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг сабитләр асанлыгла тапылыр. Доғрудан да (1) ејнилијиндә

$$\begin{aligned}P(x)\equiv R(x)=A_1(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_m)+\\+A_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_m)+\cdots+\\+A_m(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{m-1}).\end{aligned} \qquad (2)$$

(2) ејнилијиндә $x=b_1$ оларса,

$$P(b_1)=A_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_m).$$

$x=b_2$ оларса,

$$P(b_2)=A_2(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_m)$$

вә нәһајәт $x=b_m$ оларса,

$$P(b_m)=A_m(b_m-b_1)(b_m-b_2)\cdots(b_m-b_{m-1}).$$

Ахырынчы бәрабәрликләрдән

$$A_1=\frac{P(b_1)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_m)},$$

$$B_2=\frac{P(b_2)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_m)},\ \ldots,\ A_m=\frac{P(b_m)}{(b_m-b_1)\cdots(b_m-b_{m-1})}$$

тапылар. Бу гијмәтләри (1) бәрабәрлијиндә јазсаг вә һәр тәрәфи dx-ә вуруб интегралласаг, сағ тәрәфдәки кәсрләрин мәхрәчләри хәтти икиһәдли олдуғундан бу интегралларын ибтидаи функсијалары логарифмик функсијалар олар.

Мисал 1. $J=\int\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x-2)}dx$ интегралыны һесаблајын.

■ (1) ејнилијини тәтбиг етсәк,

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Јухарыда шәрһ едилдији кими

$$x-1=A(x^2-4)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2) \qquad (3)$$

бәрабәрлији ејнилик олдуғу үчүн x-ин бүтүн гијмәтләриндә доғрудур, $x=-1;\ -2;\ 2$ гијмәтләри версәк $2=3A$, $-3=4B$, $1=12C$, бурадан исә $A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{12}$ алырыг. Беләликлә,

$$J=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{2}{3}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{12}\ln|x-2|+C. \quad ■$$

Чох һалларда бу әмсаллар ашағыдакы гаjда илә тапылыр. Белә ки, (3) аjрылышыны кәсрдән гуртарыб сағ тәрәфи x-ин дәрәчәсинә көрә jаздыгдан сонра, сағ вә сол тәрәфдәки x-ләрин уjғун дәрәчәләринин әмсалларыны бир-биринә бәрабәр едиб, ахтарылан A, B вә C мәчһул сабитләринә көрә, үч хәтти тәнлик алырыг вә нәтичәдә бу тәнликләр системиндән ахтарылан мәчһуллар тапылыр. (3) еjнилиjини

$$x-1=(A+B+C)x^2+(3C-B)x+(2C-2B-4A)$$

шәклиндә jазыб ики чохһәдлинин еjниликлә бәрабәрлиjи шәртиндән истифадә етсәк,

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{l} A+B+C=0, \\ 3C-B=1, \\ 2C-2B-4A=-1. \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

олар. Бу системи һәлл етдикдә $A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{12}$.

2°. $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсри дүзкүн кәсрдир вә мәхрәчин тәкрар олунан һәгиги көкләри вар.

Мисал 2. $\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$ интегралыны һесаблаjын.

■ Биринчи леммадан чыхан нәтичәjә әсасән,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)}$$

вә jа

$$1\equiv A(x+2)^2+B(x+1)(x+2)^2+C(x+1)^2+D(x+2)(x+1)^2$$

Бу еjниликдә $x=-2$ олдугда $C=1$; $x=1$ олдугда $A=1$ алынар. B вә D әмсалларыны тапмаг үчүн сағ тәрәфи x-ин дәрәчәсинә көрә jазсаг,

$$1=(B+D)x^3+(A+5B+C+4D)x^2+$$
$$+(4A+8B+2C+3D)x+(4A+4B+C+2D).$$

Сонунчудан

$$\left\{\begin{array}{l} B+D=0, \\ 5B+4D=-2. \end{array}\right.$$

Бурадан $B=-2$; $D=2$ тапырыг. Беләликлә,

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2}-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+2)^2}+$$
$$+2\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{1}{x+1}-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+2}+2\ln|x+2|+C=$$
$$=2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}+C. \blacksquare$$

3°. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ интегралында, $\frac{F(x)}{Q(x)}$ кәсри дүзкүн кәср, мәх рәч тәкрар олунмајан квадрат үчһәдлиләр, онларын көкләр исә комплекс әдәдләрдир.

Мисал 3. $\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} dx$ интегралыны һесабла малы.

■ Икинчи леммаја әсасән,

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

вә ја

$$x+1=(Ax+B)(x^2+4x+5)+(Cx+D)(x^2+x+2).$$

сағ тәрәфи x-ин дәрәчәсинә көрә јазсаг,

$$x+1=(A+C)x^3+(4A+B+C+D)x^2+$$
$$+(5A+4B+2C+D)x+(5B+2D),$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} A+C=0, \\ 4A+B+C+D=0, \\ 5A+4B+2C+D=1, \\ 5B+2D=1. \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

системини һәлл едәрәк $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$ тапы рыг.

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)+C. \quad ■$$

4°. $\int \frac{P(x)dx}{Q(x)}$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кәср, мәхрәч тәкрарланан квадрат үчһәдлиләр, онларын көкләри исә комплекс әдәдләрдир.

Мисал 4. $J=\int \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Мәхрәчин тәкрар комплекс көкләри олдуғундан, икинчи леммадан чыхан нәтиҹәјә әсасән,

$$\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+3},$$

$$x^7+x^5+x^3+x=x^7(C+M)+x^6(D+N)+x^5(A+8C+E+7M)+$$
$$+x^4(B+8D+F+7N)+x^3(6A+21C+4E+16M)+$$

$$+x^2(6B+21D+4F+16N)+x(9A+18C+4E+21M)+$$
$$+(9B+18D+4F+12N).$$

Бурадан

$$\begin{array}{c|l} x^7 & C+M=1, \\ x^6 & D+N=0, \\ x^5 & A+8C+E+7M=1, \\ x^4 & B+8D+F+7N=0, \\ x^3 & 6A+21C+4E+16M=1, \\ x^2 & 6B+21D+4F+16N=0, \\ x^1 & 9A+18C+4E+12M=1, \\ x^0 & 9B+18D+4F+12N=0. \end{array}$$

Тәнликләр системиндән, $F=D=B=N=0$, $A=-5$, $C=19$, $M=-18$, $E=-20$ тапылар. Бу гијмәтләри јухарыда нәзәрә алсаг,

$$J=-5\int\frac{xdx}{(x^2+2)^2}+19\int\frac{xdx}{x^2+2}-20\int\frac{xdx}{(x^2+3)^2}-18\int\frac{xdx}{x^2+3}=$$
$$=\frac{5}{2(x^2+2)}+\frac{19}{2}\ln(x^2+2)+\frac{10}{x^2+3}-9\ln(x^2+3)+C.$$ ■

5°. $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кәсрдир, мәхрәчин тәкрарланмаjан һәгиги вә комплекс көкләри вардыр.

Мисал 5. $J=\int\frac{xdx}{(x^2-1)(x^2+1)}$ интегралыны һесабламалы.

■ Мәхрәчин мүхтәлиф ики һәгиги $x=1$, $x_2=-1$ вә ики комплекс $x_3=i$, $x_1=-i$ көкү вардыр. Она көрә дә

$$\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

вә ја

$$x=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+1)$$

олар. Сағ тәрәфи x-ин дәрәҹәсинә көрә јазсаг,

$$x=x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+(A-B-D)$$

олар. Бу ејниликдән ашағыдакы систем алынар.

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & A-B+D=0, \\ x^1 & A+B-C=1, \\ x^0 & A-B-D=0. \end{array}$$

Системи һәлл етдикдә $A=B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=0$ алынар, бу гијмәтләри јухарыда нәзәрә алсаг

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln|x-1|+$$

$$+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C. \blacksquare$$

Мисал 6. $J=\int\frac{xdx}{x^3+1}$ интегралыны һесаблајын.

■ Мәхрәчи вуруглара ајырсаг $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Көрүндүјү кими мәхрәчин бир һәгиги вә бир гошма комплекс көкү вардыр.

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

вә ја $x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{l} A+B=0, \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0. \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

Бурадан $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$.

$$J=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C. \blacksquare$$

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\frac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$,	$-\frac{1}{2x}+\frac{5}{4}\ln|x|-\frac{1}{36}\ln|x-2|-$ $-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln|x+1|+C.$
2. $\int\frac{(x^3+1)dx}{x(x-1)^3}$,	$-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|+C.$
3. $\int\frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$,	$-\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C.$
4. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-5)}$,	$\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{2}{5}\ln|x+2|+$ $+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C.$

5. $\int \frac{(5x^2-3)dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$, $\frac{7}{15}\ln|x-2|+\frac{1}{5}\ln|3x-1|-$
$-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C.$

6. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$, $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+$
$+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C.$

7. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$, $-\frac{x}{3(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln|x^2+x+1|+$
$+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+C.$

§ 4. ОСТРОГРАДСКИ* МЕТОДУ

Бу метод расионал кәсрләрин интегралланмасыны даһа, садә шәкилдә ифадә етмәклә, апарылан һесабламаны кифајәт гәдәр асанлашдырыр.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

($P(x)$ вә $Q(x)$ чохһәдлиләрдир) дүзкүн кәср оларса,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{H(x)}{U(x)}+\int \frac{R(x)}{V(x)}dx \qquad (1)$$

дүстуру доғрудур. Бурада $H(x)$, $U(x)$, $R(x)$ вә $V(x)$ чохһәдлиләрдир, $H(x)$-ин дәрәчәси $U(x)$-ин дәрәчәсиндән, $R(x)$-ин дәрәчәси исә $V(x)$-ин дәрәчәсиндән кичикдир.

$U(x)$ чохһәдлиси $Q(x)$ вә $Q'(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләни, $V(x)$ исә $Q(x)$ чохһәдлисинин $U_1(x)$ чохһәдлисинә нисбәтидир. (1) дүстуруна Остроградски дүстуру дејилир.

$\frac{H(x)}{U(x)}$ кәсри, $\int \frac{P(x)dx}{Q(x)}$ интегралынын дүзкүн расионал һиссәсидир. $\int \frac{R(x)dx}{V(x)}$ интегралынын нәтичәси логарифм, арктанкес вә сабитин комбинасијасындан ибарәтдир. Остроградски методу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсрини садә кәсрләрә ајырмадан вә интеграллама әмәли апармадан интегралын бүтүн расионал һиссәсини тапмаға имкан верир.

Бу методла һәгиги әмсаллы расионал кәсрин интегралланмасы гајдасыны шәрһ едәк.

---

* В. М. Остроградски 1801-чи илдә индики Полтава вилајәтинин Пашенна кәндиндә анадан олмушдур. Ону бир сыра өлкәләрин ЕА-на фәхри үзв сечмишләр.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

интегралы вериләрсә вә

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdots(x-b_m)^{\beta_m}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r} \qquad (2)$$

оларса, $Q(x)$ вә $Q'(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләни олан $U(x)$ чохһәдлисини тә'јин едәк. $Q(x)$ чохһәдлиси (2) бәрабәрлији илә ифадә олунурса, $U(x)$-ин дәрәчәси $Q(x)$-дә иштирак едән вуругларын дәрәчәсиндән бир ваһид аз, јә'ни

$$U(x) = (x-b_1)^{\beta_1-1}(x-b_2)^{\beta_2-1}\cdots(x-b_m)^{\beta_m-1}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r-1}$$

олар. $V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)}$ олдуғу үчүн,

$$V(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_m)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_rx+q_r)$$

олачагдыр.

$U(x)$ вә $V(x)$ чохһәдлиләри тапылдыгдан сонра (1) дүстуру јазылыр. Бурада $H(x)$ вә $U(x)$ чохһәдлиләри һәләлик мүәјјән дејил. $H(x)$ вә $R(x)$-ин дәрәчәләри, ујғун оларaг, $U(x)$ вә $V(x)$ чохһәдлиләринин дәрәчәләриндән бир ваһид аз гејри-мүәјјән әмсаллы чохһәдлиләрдир.

Беләликлә, $H(x)$ вә $R(x)$ чохһәдлиләрини гејри-мүәјјән әмсалларла јаздыгдан сонра Остроградски дүстурунун һәр тәрәфиндән төрәмә алыб,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{H(x)}{U(x)}\right]' + \frac{R(x)}{V(x)}$$

нәтичәни ортаг мәхрәчә кәтирдикдән сонра сағ вә сол тәрәфдәки кәсрләрин сурәтләринин ејнилликлә бәрабәр олмасындан истифадә едәрәк, мә'лум гајда илә $H(x)$ вә $R(x)$ чохһәдлиләринә дахил олан гејри-мүәјјән әмсаллары тапырыг. Беләликлә, һәмин чохһәдлиләр тамамилә мүәјјән едилир. Бундан сонра $\int \frac{R(x)}{V(x)}dx$ интегралы асанлыгла һесабланыр.

Бу дејиләнләри әсасландырмаг үчүн, бә'зи анлајышлар дахил едәк. Әввәлчә ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем. ***а комплекс әдәди Q(x) чохһәдлисинин*** α ***дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, о һәм дә Q'(x)-ин (α—1) дәфә тәкрарланан көкүдүр. (α > 1 олмалыдыр, α = 1 оларса, а әдәди Q'(x) чохһәдлисинин көкү дејил).***

◀ Шәртә көрә a комплекс әдәди $Q(x)$ чохһәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкүдүр:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\varphi(x), \quad (\varphi(a) \neq 0).$$

Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфиндән төрәмә алсаг,

$$Q'(x) = \alpha(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x) + (x-a)^{\alpha}\varphi(x).$$

$$\alpha\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)=\psi(x) \tag{3}$$

илә ишарә етсәк,

$$Q'(x)=(x-a)^{\alpha-1}\psi(x) \tag{4}$$

олар. (3) бәрабәрлијиндә $\psi(a)=\alpha\varphi(a)\neq 0$ олмасы ашкардыр. Беләликлә, (4) бәрабәрлији a комплекс әдәдинин $Q'(x)$ чохһәдлисинин $(\alpha-1)$ дәфә тәкрарланан көкү олдугуну көстәрир.

Бундан башга чәбр курсундан бир нечә анлајышы јада салаг.

Тә'риф 1. *$f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин һәр биринин бөлүндүјү чохһәдлијә, бу чохһәдлиләрин ортаг бөләни дејилир.*

Тә'риф 2. *$f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин һәр һансы бир ортаг бөләни, онларын истәнилән ортаг бөлүнәнинә бөлүнүрсә, онда бөјүк ортаг бөләнә $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләни дејилир вә*

$$D=[f(x),\ \varphi(x)] \tag{5}$$

кими ишарә едилир.

Онда, $R(x)=D[f(x),\ \varphi(x)]$ олар.

Остроградски дүстурунда $Q(x)$ вә $Q'(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләнини тапмаг үчүн Евклид алгоритминдән истифадә едилир. Бурада $\varphi(x)$-ин дәрәчәси, $f(x)$-ин дәрәчәсиндән бөјүк дејилдир. $f(x)$ чохһәдлисини $\varphi(x)$-ә бөлдүкдә алынан гисмәти $q(x)$, галығы исә $r_1(x)$ илә ишарә етсәк,

$$f(x)=\varphi(x)\,q(x)+r_1(x) \tag{6_1}$$

олар. Бурада $r_1(x)$-ин дәрәчәси $\varphi(x)$-ин дәрәчәсиндән кичик олдуғундан $\varphi(x)$-и $r_1(x)$-ә бөлә биләрик вә (6_1) дүстуруна әсасән

$$\varphi(x)=r_1(x)q_1(x)+r_2(x) \tag{6_2}$$

аларыг. $r_2(x)$ галыг чохһәдлисинин дәрәчәси, $r_1(x)$-ин дәрәчәсиндән кичик олдуғу үчүн

$$r_1(x)=r_2(x)q_2(x)+r_3(x). \tag{6_3}$$

Просеси бу гајда илә давам етдирсәк,

$$r_2(x)=r_3(x)q_3(x)+r_4(x), \tag{6_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)q_{k-1}(x)+r_k(x) \tag{6_k}$$

алынар. Бу просесдә һәр дәфә галығын дәрәчәси һеч олмаса бир ваһид азалмышдыр. Буну истәнилән k сајда апардыгда нәтичәдә $(k+1)$-чи аддымда галыг сыфыр дәрәчәли чохһәдли олар. Јә'ни

$$r_{k-1}(x)=r_k(x)\,q_k(x). \tag{6_{k+1}}$$

Инди исә сыфырдан фәргли $r_k(x)$ галыг чохһәдлисинин $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләни олдуғуну көстәрәк.

Бунун үчүн:

а) $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин һәр биринин $r_k(x)$-ә бөлүндүјүнү;

в) $r_k(x)$ чохһәдлисинин $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин истәнилән $r_0(x)$ ортаг бөләнинә бөлүндүјүнү көстәрмәк кифајәтдир.

(6_{k+1}) бәрабәрлијинә әсасән $r_{k-1}(x)$ чохһәдлиси $r_k(x)$-ә бөлүнүр. Онда (6_k) бәрабәрлијинә әсасән $r_{k-2}(x)$ чохһәдлиси дә $r_k(x)$-ә бөлүнәр.

Беләликлә, (6_{k+1}), (6_k), …, (6_3), (6_2), (6_1) бәрабәрликләри илә јухары һәрәкәт етмәклә $\varphi(x)$ вә $f(x)$ чохһәдлиләринин $r_k(x)$ чохһәдлисинә бөлүндүјү исбат олунур.

$r_0(x)$-ин $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин истәнилән ортаг бөләни олдуғуну фәрз едәк. Онда (6_1) бәрабәрлијинә көрә $r_1(x)$ чохһәдлиси $r_0(x)$-ә бөлүнүр, (6_2) бәрабәрлијинә әсасән $r_2(x)$, (6_3) бәрабәрлијинә әсасән $r_3(x)$, (6_4)-ә әсасән $r_4(x)$ дә $r_0(x)$-ә бөлүнәр. (6_1), (6_2), …, (6_k), (6_{k+1}) бәрабәрликләри илә ашағы һәрәкәт етмәклә $r_k(x)$-ин, $r_0(x)$-ә бөлүнмәси исбат едилир. Бунунла ики чохһәдлинин ән бөјүк ортаг бөләнинин тапылма просесини әсасландырдыг.

Мисал. $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3$ вә $\varphi(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ чохһәдлиләри үчүн $D=[f(x), \varphi(x)]$-и тә'јин едәк.

Гисмәтдә кәср әмсал алынмасын дејә $f(x)$-и 2-јә вураг (буну һәмишә етмәк олар, чүнки ән бөјүк ортаг бөлән сыфыр үстлү вуруг дәгиглији илә тә'јин едилир):

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 2x^4-4x^3-8x^2+8x-6 \\ \underline{2x^4-5x^3-4x^2+3x} \end{array} & \dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{x} \\ x^3-4x^2+5x-6 & \end{array}$$

x^3-4x^2+5x-6 чохһәдлисини 2-јә вуруб бөлмәни давам етдирәк:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 2x^3-8x^2+10x-12 \\ \underline{2x^3-5x^2-4x+3} \end{array} & \dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{1} \\ -3x^2+14x-15 & \end{array}$$

$r_1(x)=-3x^2+14-15$ чохһәдлиси, $f(x)$-ин $\varphi(x)$-ә бөлүнмәсиндән алынан галыг, $(x+1)$ исә гисмәтдир.

Инди исә $\varphi(x)$-и 3-ә вуруб $r_1(x)$ галыг чохһәдлисинә бөләк:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 6x^3-15x^2-12x+9 \\ \underline{6x^3-28x^2+30x} \end{array} & \dfrac{-3x^2+14x-15}{2x-13} \\ 13x^2-42x+9 & \end{array}$$

јенә 3-ә вурсаг

$$\begin{array}{r} -\,39x^2-182x-195 \\ \underline{39x^2-126x+27} \\ 56x-168 \end{array}$$

$r_3(x)=56x-168=56(x-3)$. Инди исә $r_1(x)$ чохһәдлисини $r_2(x)$-ә бөлсәк, $r_3(x)=0$ олар. Бу исә о демәкдир ки, $r_1(x)$ чохһәдлиси $r_2(x)$-ә бөлүнүр. Демәли, $r_2(x)=x-3$ икиһәдлиси $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чохһәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләнидир.

Мисал 1. $I=\int\frac{3x^4+4}{x^3(x^2+1)^2}dx$ интегралыны һесаблајаг.

■ $Q(x)=x^3(x^2+1)^2$, $U(x)=x^2(x^2+1)$, $V(x)=x(x^2+1)$ олар. Онда (1) дүстуруна әсасән

$$\int\frac{3x^4+4}{x^3(x^2+1)^2}dx=\frac{A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3}{x^2(x^2+1)}+\int\frac{B_0x^2+B_1x+B_2}{x(x^2+1)}dx$$

олар. Ахырынчы бәрабәрлијин һәр тәрәфиндән төрәмә алсаг,

$$\frac{3x^4+4}{x^3(x^2+1)^2}=\left(\frac{A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3}{x^2(x^2+1)}\right)'+\frac{B_0x^2+B_1x+B_2}{x(x^2+1)},$$

вә ја

$$\frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}=\frac{(3A_0x^2+2A_1x+A_2)(x^3+x)-(A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\cdot(4x^2+2)}{x^3(x^2+1)^2}+$$

$$+\frac{B_0x^2+Bx^1+B_2}{x(x^2+1)}.$$

Сонунчу ифадәнин сағ тәрәфини ортаг мәхрәчә кәтирдикдән сонра

$$\begin{aligned}3x^4+4=&(3A_0x^2+2A_1x+A_2)(x^2+x)-(A_0x^3+A_1x^2+\\&+A_2x+A_3)(4x^3+2)+(B_0x^2+B_1x+B_2)(x^4+x^2)=\\&=B_0x^6+(-A_0+B_1)x^5+(B_2-B_0-2A_1)x^4+\\&+(B_1-3A_2-A_0)x^3+(B_2-4A_3)x^2-A_2x-2A_3.\end{aligned}$$

ејнилијини аларыг. Бу ејнилик әсасында гурулмуш

$$\begin{array}{l|l} x^6 & B_0=0, \\ x^5 & B_1-A_0=0, \\ x^4 & B_0+B_2-2A_1=3, \\ x^3 & A_0-3A_2+B_1=0, \\ x^2 & B_2-4A_3=0, \\ x^1 & -A_2=0, \\ x^0 & 2A_3=4. \end{array}$$

тәнликләр системиндән $A_0=A_2=B_0=B_1=0$, $A_1=-\frac{11}{2}$, $A_3=$ $=-2$, $B_2=-8$ тапылыр.

$$J=\int\frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^2}dx=\frac{-\frac{11}{2}x^2-2}{x^2(x^2+1)}-8\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=-\frac{11x^2+4}{2x(x^2+1)}-$$

$$-8\int\frac{dx}{x}+8\int\frac{xdx}{x^2+1}=-\frac{11x^2+4}{2x\,(x^2+1)}-8\ln|x|+4\ln(x^2+1)+C. \quad ■$$

Мисал 2. $J=\int\frac{3x^4+6x+4)\,dx}{(x^3+2x-1)^2}$ интегралыны һесаблајаг.

■ Бу мисалда $Q(x)=(x^3+2x-1)^2$ вә $Q'(x)=2(x^3+2x-1)\times$ $\times(3x^2+2)$, онларын ән бөјүк ортаг бөләни $U(x)=x^3+2x-1$,

$$V(x)=\frac{Q(x)}{U(x)}=x^3+2x-1,$$

олар.

$$J=\int\frac{3x^4+6x+4}{(x^3+2x-1)^2}dx=\frac{H(x)}{x^3+2x-1}+\int\frac{R(x)}{x^3+2x-1}dx.$$

Мә'лумдур ки, бурада $H(x)$ вә $R(x)$, дәрәчәләри икидән бөјүк олмајан чохһәдлиләрдир.

$$\int\frac{3x^4+6x+4}{(x^3+2x-1)^2}dx=\frac{A_0x^2+A_1x+A_2}{x^3+2x-1}+\int\frac{B_0x^2+B_1x+B_2}{x^3+2x-1}dx$$

бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндән төрәмә алыб, әввәлки мисалдакы кими һәрәкәт етсәк,

$$\frac{3x^4+6x+4}{(x^3+2x-1)^2}=\frac{(2A_0x+A_1)(x^3+2x-1)}{(x^3+2x-1)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-(A_0x^2+A_1x+A_2)(3x^2+2)}{(x^3+2x-1)^2}+\frac{B_0x^2+B_1x+B_2}{x^3+2x-1}$$

олар. Бәрабәрлијин сағ тәрәфини ортаг мәхрәҹә кәтириб сурәтләри бәрабәрләшдирсәк:

$$3x^4+6x+4=B_0x^5+(B_1-A_0)x^4+(2A_1+2B_0+B_2)x^3+$$

$$+(2A_0-3A_2-B_0-2B_1)x^2+(2A_0-B_1+2B_2)x+(-A_1-B_2-2A_2),$$

олар ки, бурадан да

$$\begin{array}{c||l}
x^5 & B_0=0,\\
x^4 & B_1-A_0=3,\\
x^3 & B_2+2B_0-2A_1=0,\\
x^2 & 2B_1-B_0-3A_2-2A_0=0,\\
x^1 & 2B_2-B_1-2A_0=6,\\
x^0 & -A_1-B_2-2A_2=4
\end{array}$$

системини аларыг. Бурадан исә $A_1=B_0=B_1=B_2=0$, $A_0=-3$, $A_2=-2$. Онда

$$J=\int\frac{3x^4+6x^2+4}{(x^3+2x-1)^2}dx=-\frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}+C. \quad ■$$

Гејд 1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ интегралында x^2+px+q вуругу јүксәк дәрәҹәдән иштирак едәрсә, бу интегралы һесабламаг үчүн адәтән үмуми методдан истифадә едилир. Јә'ни $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсри садә кәсрләрә ајрылыр вә гејри-мүәјјән әмсаллар тапылдыгдан сонра ону „dx“-ә вуруб интеграллајырлар. Бу һалда һесаблама чох вахт апарыр. Одур ки, бу типли интеграллары Остроградски дүстурундан истифадә едәрәк һесабламаг даһа әлверишлидир.

Мисал 3. $J=\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$ интегралыны һесабламалы.

■ $Q(x)=(x^4-1)^3,\ Q'(x)=3(x^4-1)^2\cdot 4x^3=12x^3(x^4-1)^2,$

$U(x)=(x^4-1)^2,\ V(x)=\frac{Q(x)}{U(x)}=\frac{(x^4-1)^3}{(x^4-1)^2}=x^4-1.$

Остроградски дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=\frac{ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h}{(x^4-1)^2}+$$
$$+\int\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right]dx.$$

Һәр тәрәфдән төрәмә алсаг,

$$\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h}{(x^4-1)^2}\right]'+$$
$$+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

вә ја

$$\begin{aligned}1=&(7ax^6+6bx^5+5cx^4+4dx^3+3ex^2+2fx+g)(x^4-1)-\\&-ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h)\cdot 8x^3+\\&+[A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+\\&+(Mx+N)(x^2-1)](x^4-1)^2.\end{aligned}\tag{7}$$

(7) ејнилијиндә $x=1$ олдугда,

$$1=-8(a+b+c+d+e+f+g+h);$$

$x=-1$ олдугда,

$$1=8(-a+b-c+d-e+f-g+h);$$

$x=i$ олдугда исә,

$$\begin{cases}a-c+e-g=\frac{1}{8},\\ d-b-f+h=0\end{cases}$$

олар. Биринчи ики тәнликдән,

$$b+d+f+h=0,\quad a+c+e+g=-\frac{1}{8}$$

олур. Ашағыдакы системә бахаг:

$$\left\{\begin{array}{l} b+d+f+h=0, \\ -b+d-f+h=0 \end{array}\right.$$

бурадан, $b+f=d+h=0$ олар.

$$\left\{\begin{array}{l} a+c+e+g=-\frac{1}{8}, \\ a-c+e-g=\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

системиндән исә $a+e=0$, $c+g=-\frac{1}{8}$ алыныр. Даһа сонра (7) әмсалларыны мүгајисә етсәк:

$$\begin{array}{l|l} x^{11} & 0=A+B+M \\ x^{10} & 0=7a-8a+A-B+N \\ x^{9} & 0=6b-8b+A+B-M, \\ x^{0} & 1=-g+A-B-N, \\ x^{3} & 0=-4d-8h+A+B+M \\ x^{1} & 0=-2f+A+B-M, \\ x^{2} & 0=-3e+A-B-N, \\ x^{4} & 0=-5c+g-8g-2(A-B-N); \end{array} \quad \text{вә ја} \quad \left\{\begin{array}{l} A+B+M=0, \\ A-B+N=a, \\ A+B-M=2b, \\ A-B-N=1+g, \\ d=-2h, \\ A+B-M=2f, \\ A-B+N=3e, \\ A-B-N=\frac{-5e+7g}{2} \end{array}\right.$$

Бу системдән $h=d=b=f=e=a=0$, $c=\frac{7}{32}$, $g=-\frac{11}{32}$,

$$A=\frac{21}{128},\quad B=-\frac{21}{128},\quad M=0,\quad N=-\frac{21}{64}$$

алырыг. Беләликлә,

$$J=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x+C. \quad ■$$

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$,	$-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left\|\frac{x+1}{x-1}\right\|+C.$
2. $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$,	$\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\left\|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right\|+$ $+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$
3. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$,	$\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$
4. $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$,	$\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\left\|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right\|+$ $+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

5. $\int \frac{x^3dx}{(x^2+2x+2)}$ $\qquad \frac{1}{x^2+2x+1}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

6. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$, $\qquad \frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|-$

$\qquad -\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+C.$

7. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$, $\qquad \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-$

$\qquad -\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x+C.$

IV ФӘСИЛ

ИРРАСИОНАЛ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

§ 1. САДӘ ИРРАСИОНАЛ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Иррасионал функсијалары интегралламаг үчүн башлыҹа олараг әвәзләмә методундан истифадә едилир. Әвәзләмә нәтиҹәсиндә верилмиш иррасионал ифадә, јени дәјишәнә көрә расионал шәклә кәтирилир ки, буна да интегралын расионаллашдырылмасы дејилир. Гејд едәк ки, интеграллары расионаллашдырмаг һеч дә һәмишә мүмкүн дејил. Иррасионал функсијаларын интегралланмасында бир сыра һаллары нәзәрдән кечирәк.

1°. Интеграл алтындакы функсија $f\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ шәклиндә оларса ($\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$ олдуғу нәзәрдә тутулур), бурада f функсијасы, x вә $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$-дән асылы расионал функсија, m натурал әдәд α, β, γ вә $\delta\in R$. Бурада $\Delta=0$ оларса, α, β, γ вә δ әмсаллары мүтәнасиб олар, јә'ни $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ нисбәти x-дән асылы олмаз. Башга сөзлә, бу нисбәт сабит әдәд олар ки, бу һал үчүн интеграл алтындакы функсија бир дәјишәндән асылы ади расионал кәср олар. Бу һал үчүн интегралын һесабланмасыны билирик.

$I=\int f\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}dx\right)$ интегралыны расионаллашдырмаг үчүн $t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр.

Доғрудан да,

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}; \quad x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}; \quad d = \frac{m(\alpha\delta - \gamma\beta)t^{m-1}}{(t - \gamma t^m)^2}\, dt$$

олдуғуну интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = m(\alpha\delta - \gamma\beta) \int f\left(t, \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \beta t^m}\right) \frac{t^{m-1}}{(\alpha - \gamma t^m)^2}\, dt$$

олар. Бу исә расионаллашмыш интегралдыр.

2°. Интегралалты функсија

$$f = \left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right],$$

бурада $r_1, s_1; r_2, s_2; \ldots r_n, s_n \in N$, f функсијасы $x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots$ $\ldots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}$ аргументләриндән асылы расионал функсијадыр. Интегралы расионаллашдырмаг үчүн $z^s = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ әвәзләмәси апарылыр. Бурада s әдәди $s_1, s_2, \ldots, s_n$ әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнәнидир. Әвәзләмәдән

$$x = \frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}, \quad dx = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\, s z^{s-1}}{(\alpha - \gamma z^s)^2}\, dz;$$

$$\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{r_k}{r_k}} = z^{s \cdot \frac{r_k}{s_k}} = z^{v_k}, \ (k = \overline{1, n})$$

алырыг.

Бурада v_k там әдәддир, s әдәди исә s_k $(k = \overline{1, n})$ әдәдләринә бөлүнүр.

Беләликлә,

$$J = (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot s \int f\left(\frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}, z^{v_1}, z^{v_2}, \ldots, z^{v_n}\right) \times$$

$$\times \frac{z^{s-1}\, dz}{(\alpha - \gamma z^s)^2} \int \varphi(z)\, dz.$$

$\varphi(z)$ расионал функсија олдуғундан белә функсијаларын интеграллама методлары бундан әввәлки фәсилдә верилмишдир.

Г е ј д: Хүсуси һалда $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = \beta = 0$ оларса верилмиш интеграл

$$J = \int f\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$$

шәклинә дүшәр вә $x = t^s$ әвәзләмәси илә расионаллашар.

Мисал 1.

$$J=\int\frac{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}-1}{(x-1)^2\left[\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right]}dx$$

интегралыны һесаблајаг.

■ $\frac{x+1}{x-1}=t^6$ әвәзләмәсиндән $x=\frac{1+t^2}{t^6-1}$, $x-1=\frac{2}{t^6-1}$, $dx=-\frac{12t^5}{(t^6-1)^2}$ алырыг. Бунлары интегралда јеринә јазсаг,

$$J=-3\int\frac{t^4-t^3}{t+1}dt=-\int\left(t^3-2t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt=$$

$$=-3\left[\frac{t^4}{4}-\frac{2}{3}t^3+t^2-2t+2\ln|1+t|\right]+C. \quad ■$$

Бурада $t=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$.

§ 2. ЕЈЛЕР* ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИ

Ејлер әвәзләмәләри илә

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{1}$$

шәклиндәки интеграллар расионаллашдырылыр.

Ејлерин биринчи әвәзләмәси. $a>0$ оларса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$ әвәзләмәси (1)-дә интегралалты функсијаны расионал шәклә кәтирир. Әвәзләмәдән

$$ax^2+bx+c=(t+x\sqrt{a})^2=t^2+2tx\sqrt{a}+ax^2,$$

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},$$

$$dx=-2\cdot\frac{\sqrt{a}\,t^2-tb-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{x}}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}=-\frac{t^2\sqrt{a}-tb+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}},$$

алынар.

Интегралда x, dx вә $\sqrt{ax^2+bx+c}$ јеринә, t-дән асылы гијмәтләрини јазсаг интеграл расионаллашар.

---

[*] Леонард Ејлер (1707—1783). Исвечрә ријазијјатчысыдыр. О илк тәһсилини Базел кимназијасында алмышдыр. О, Бернуллинин рәһбәрлији алтында о дөвр үчүн гијмәтли олан бир сыра мәсәләләрин һәллиндән өтрү 1723-чү илдә елмләр макистри дәрәчәсини алмышдыр. 1726-чы илдә Петербург ЕА-на дә'вәт олунмуш, 1730-чу илдә физика кафедрасынын мүдири, 1733-чү илдә исә академик сечилмишдир.

Мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $a=1>0$ олдугу үчүн $\sqrt{x^2+3x-1}=t+x$ әвәзләмәси апараг. Онда

$$x^2+3x-1=(t+x)^2=t^2+2tx+x^2 \text{ вә ја } x=\frac{t^2+1}{3-2t},$$

$$dx=2\frac{-t^2+3t+1}{(3-2t)^2}dt;\quad \sqrt{x^2+3x-1}=\frac{1+3t-t^2}{3-2t}.$$

олар. Сонунчу ифадәләри интегралда нәзәрә алсаг,

$$J=2\int\frac{(3-2t)^2(1+3t-t^2)dt}{(t^2+1)(1+3t-t^2)(3-2t)}=\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-x\right)+C.\ ■$$

Мисал 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ әвәзләмәсиндән $a^2=t^2-2xt$ вә $tdt-xdt-tdx=0$, $tdx=(t-x)dt$ вә ја $\frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t}$. Беләликлә,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t-x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.■$$

Бу интегралы бә'зән чәдвәл интеграллары сырасына дахил едирләр.

Ејлерин икинчи әвәзләмәси. $c>0$ оланда, $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$ әвәзләмәси апарылыр. Јухарыдакы гајда илә $x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$,

$$dx=2\frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{t^2\sqrt{c}-bt-a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

олар. x, dx вә $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ифадәләринин t-јә көрә алынмыш гијмәтләрини интегралда нәзәрә алсаг, интеграл алты $f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ функсијасы расионал шәклә дүшәр.

Мисал 1. $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2-5x+3}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sqrt{-x^2-5x+3}=tx+\sqrt{3}$ әвәз едәрәк,

$$x=-\frac{2t\sqrt{3}+5}{t^2+1};\quad dx=2\cdot\frac{t^2\sqrt{3}+5t-\sqrt{3}}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{-x^2-5x+3}=xt+\sqrt{3}=-\frac{t^2\sqrt{3}+5t-\sqrt{3}}{t^2+1}$$
талырыг.

Беләликлә,

$$J=\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2-5x+3}}=2\int\frac{dt}{2t\sqrt{3}+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|2t\sqrt{3}+5|+C. \quad ■$$

Бурада

$$t=\frac{\sqrt{-x^2-5x+3}-\sqrt{3}}{x}.$$

Ејлерин үчүнчү әвәзләмәси. ax^2+bx+c үчһәдлисинин һәгиги көкләри варса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-h)$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр.

Бурада h, квадрат үчһәдлинин көкләриндән биридир. Икинчи көкүн k олдуғуну фәрз етсәк,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-h)(x-k)}$$

олар. Әвәзләмәни нәзәрә алсаг

$$\sqrt{a(x-h)(x-k)}=t(x-h),\ a(x-h)(x-k)=t^2(x-h)^2$$

вә ја

$$a(x-k)=t^2(x-h)$$

олар. Сонунчу бәрабәрликдән алынан

$$x=\frac{ht^2-ka}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{at(h-k)}{t^2-a};$$

$$\sqrt{a(x-h)(x-k)}=t\left(\frac{ht^2-ka}{t^2-a}-h\right)=\frac{t(h-k)a}{t^2-a}$$

ифадәләрини (1) интегралында јеринә јазсаг

$$J=\int f\left(\frac{ht^2-ka}{t^2-a},\ \frac{ta(h-k)}{t^2-a}\right)\frac{at(h-k)}{t^2-a}\,dt$$

алырыг ки, бу да расионал функсијанын интегралыдыр.

Мисал 1. $J=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+2x-3}}$ интегралыны һесабламалы.

■ x^2+2x-3 үчһәдлисинин көкләри 1 вә 3 олдуғу үчүн

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{(x-1)(x+3)}=t(x-1)$$

әвәзләмәси верилмиш интегралы расионаллашдырыр. Доғрудан да, әвәзләмәдән

$$x+3=t^2(x-1) \text{ вә ја } x=\frac{t^2+3}{t^2-1},\quad dx=\frac{-8t}{(t^2-1)^2}dt,$$

$$x+3=\frac{4t^2}{t^2-1}, \quad \sqrt{x^2+2x-3}=\frac{4t}{t^2-1}.$$

Алынмыш ифадәләри верилмиш интегралда нәзәрә алсаг,

$$J=-\int\frac{(t^2-1)(t^2-1)8t\,dt}{6t^2(t^2-1)^2t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}+C.$$

$t=\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J=\frac{x-1}{2\sqrt{x^2+2x-2}}+C. \blacksquare$$

Гејд 1. Һәмишә $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функсијасынын тә'јин областында онун интегралыны Ејлер әвәзләмәси васитәсилә тапмаг мүмкүндүр. Доғрудан да $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функсијасынын һәгиги гијмәт алмасы үчүн $\sqrt{ax^2+bx+c}$ гијмәти һәгиги олмалыдыр. Бу исә о заман мүмкүндүр ки, $ax^2+bx+c\geqslant 0$ олсун. Беләликлә, квадрат үчһәдлинин көкләри һәгиги олдуғда, $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функсијасынын интегралы үчүнчү әвәзләмә васитәсилә расионаллашыр.

Квадрат үчһәдлинин һәгиги көкләри јохдурса, о һалда $\alpha+i\beta$ вә $\alpha-i\beta$ кими гошма комплекс көкләри вардыр. Онда

$$ax^2+bx+c=a[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]=a[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

$a>0$ олдуғда $a[(x-\alpha)^2+\beta^2]>0$ олар. Демәли, јухарыда көстәрилән һалда, $(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функсијасынын интегралы биринчи әвәзләмә васитәсилә расионаллашыр.

Гејд 2. Иррасионал ифадәләрин интегралланмасы үчүн тәтбиг едилән бу әвәзләмәләр бә'зән мүрәккәб һесабламалара сәбәб олур. Лакин елә хүсуси әвәзләмәләр вар ки, ону тәтбиг етдикдә интеграл расионаллашыр.

Бу хүсуси һаллара аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 2. $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-3}}$ интегралыны һесабламалы.

$\blacksquare$ Интегралда $x=\frac{1}{t}\left(dx=-\frac{dt}{t^2}\right)$ әвәзләмәси апарсаг

$$J=-\int\frac{dt}{\sqrt{5-3t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}\,t+C$$

вә x дәјишәнинә гајытсаг,

$$J=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{1}{x}+C. \blacksquare$$

Мисал 3. Бә'зән $x=a\sin t$ вә $x=a\cos t$ шәклиндә әвәзләмәләрдән истифадә етмәк даһа сәмәрәли олур.

$\blacksquare$ Мәсәлән, $x=a\sin t$ әвәзләмәси $J=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ интегралыны садәләшдирир.

Доғрудан да,

$$J=\int\frac{a^2\sin^2t\,\cos t\,dt}{\sqrt{a^2-a\sin^2t}}=a^2\int\sin^2t\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{t}t-\frac{a^2}{4}\sin^2 t+C.$$

əвəзləмəдəн, $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$,

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2},$$

алырыг. Бу гиjмəтлəри јеринə јазсаг,

$$J=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \quad ■$$

Мисал 4. $J=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $x=a\operatorname{tg} t\left(dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}\right)$ əвəзləмəси даһа мүнасибдир. Доғрудан да,

$$J=\int\frac{1}{a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)\sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)}}\cdot\frac{a\,dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C.$$

Даһа сонра $\sin t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ ејнилијиндə $\operatorname{tg} t=\frac{x}{a}$ гиjмəтини јазмагла

$$J=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C. \quad ■$$

1°. Иррасионал ифадəлəри интеграллајан заман, бə'зəн һиссə-һиссə интеграллама методуну тəтбиг етмəк лазым кəлир.

Мисал 1. $J=\int\sqrt{ax^2+b}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Ашкардыр ки,

$$J=\int\frac{ax^2+b}{\sqrt{ax^2+b}}dx=\int\frac{ax^2dx}{\sqrt{ax^2+b}}+b\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

Əввəлчə, һиссə-һиссə интеграллама методуну тəтбиг едəрəк,

$$J_1=\int\frac{ax^2dx}{\sqrt{ax^2+b}}$$

интегралыны һесаблајаг.

$$u=x,\ du=dx,\ V=\int\frac{axdx}{\sqrt{ax^2+b}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int(ax^2+b)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+b)=\sqrt{ax^2+b}.$$

Алынан ифадəлəри J_1-дə нəзəрə алсаг,

$$J_1=x\sqrt{ax^2+b}-\int\sqrt{ax^2+b}\,dx=x\sqrt{ax^2+b}-J.$$

Дикәр тәрәфдән

$$J_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}}\right|+C.$$

J_1 вә J_2 интегралларынын бу гијмәтләрини верилмиш интегралда нәзәрә алсаг.

$$J=\frac{x}{2}\sqrt{ax^2+b}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}}\right|+C. \blacksquare$$

2°. Интеграл алтында $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ифадәси иштирак етдији һалда бә'зән квадрат үчһәдлинин шәклини дәјишдириб сонра исә әвәзләмә апармаг даһа мәгсәдәујғун олур.

Мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралыны һесабламалы.

■ Квадрат үчһәдлини ашағыдакы кими чевирәк.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+l\right].$$

Бурада $l=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, $a>0$ оларса,

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+l}}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+l}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+$$

$$+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2a+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C. \blacksquare$$

Икинчи һалда $a<0$ олмагла $4ac-b^2>0$ оларса, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ифадәси x-ин һеч бир гијмәтиндә, һәгиги гијмәт ала билмәз. Буна көрә дә $a<0$, $b^2-4ac>0$. олдугда интегралын мә'насы вар.

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=k^2\,(x>0),\ l=-k^2,\ k=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\,|a|}$$

ишарә етсәк, онда

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+l\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2\right]=|a|\left[k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

Беләликлә,

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}+C=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C.\ ■$$

Мисал 2. $J_1=\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $\int udv=uv-\int vdu$ дүстуруну тәтбиг едәк.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u,\ du=\frac{(2ax+b)dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}},\ dx=dv,\ v=x;$$

$$J_1=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\int\frac{(2ax^2+bx)dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}=x\sqrt{ax^2+bx+c}-$$

$$-\int\frac{2(ax^2+bx+c)-(bx+2c)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=x\sqrt{ax^2+bx+c}-J_1+$$

$$+\frac{b}{4a}\int\frac{(2ax+b)-\frac{4ac-b^2}{b^2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=x\sqrt{ax^2+bx+c}-J_1+$$

$$+\frac{b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{4a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Нәһајәт

$$J_1=\frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Ахырынчы ифадәдә иштирак едән интеграл јухарыда һесабланан интеграл олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J_1=\frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a}J$$

олар. Бурада

$$J=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+C, & a>0 \text{ оланда},\\ \frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C, \left(k=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\right), & a<0 \text{ оланда}.\ ■\end{cases}$$

Мисал 3. $J=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

■ Интегралалты функсијада ашағыдакы кими чевирмә апараг:

$$J=\frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)\frac{2aN-bM}{M}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{2aN+bM}{M}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Сағ тәрәфдәки биринчи интеграл билаваситә чәдвәл интегралына кәлир, икинчи исә 6-чы мисалда һесабладығымыз интеграл олдуғу үчүн $J=\frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{2aN-bM}{2a}J_1$.

Бурада $J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. ■

Мисал 4. $J=\int(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Јенә дә интеграл алтында ашағыдакы кими чевирмә апарсаг,

$$J=\int(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=$$

$$=\frac{M}{2a}\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}dx+\left(N-\frac{bM}{2a}\right)\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

олар. Сағ тәрәфдәки биринчи интеграл билаваситә чәдвәл интегралына кәтирилир, икинчини исә 2-чи мисалда һесабламышыг. Беләликлә,

$$J=\frac{M}{6a}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}+\left(N-\frac{bM}{2a}\right)J_1+C. \quad ■$$

J_1 интегралы 2-чи мисалда һесабланыб.

Мисал 5. $J=\frac{xdx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$ интегралыны һесаблаjаг.

■ $J=\int\frac{xdx}{\sqrt{2+4x-x^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{6-(x-2)^2}}$.

$x-2=t(x=t+2,\ dx=dt)$ әвәзләмәсини апарсаг,

$$J=\int\frac{(t+2)dt}{\sqrt{6-t^2}}=2\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}+\int\frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}$$

вә jа

$$J=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-2\sqrt{2+4x-x^2}+C. \quad ■$$

3°. $P_m(x)$, m дәрәчәли чохһәдли олдугда

$$J=\int\frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{1}$$

типли интеграллары һесабламаг үчүн әввәлчә

$$J_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{2}$$

интегралыны һесаблајаг. Сонунчу интеграл үчүн кәтирмә (реккурент) дүстуру верәк. Садәлик үчүн, $ax^2+bx+c=y$ илә ишарә етсәк,

$$J_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{y}}. \tag{3}$$

Ашағыдакы ифадәнин төрәмәсини алаг:

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)'=(m-1)x^{m-2}\sqrt{y}+\frac{x^{m-1}y^1}{2\sqrt{y}}$$

вә ја

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)'=\frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{y}}=$$

$$=ma\frac{x^m}{\sqrt{y}}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\,\frac{x^{m-1}}{\sqrt{y}}+(m-1)c\,\frac{x^{m-2}}{\sqrt{y}}. \tag{4}$$

(4) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини интеграллаcаг,

$$x^{m-1}\sqrt{y}=maJ_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bJ_{m-1}+(m-1)cJ_{m-2}$$

олар. Ахырынчыны J_m-ә көрә һәлл етсәк,

$$J_m=\frac{1}{ma}\,x^{m-1}\sqrt{y}-\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)b}{ma}\,J_{m-1}-\frac{(m-1)c}{ma}J_{m-2}, \tag{5}$$

(5) ифадәсиндә $m=1$ вә $m=2$ јазмагла,

$$J_1=\frac{1}{a}\sqrt{y}-\frac{b}{2a}J_0 \text{ вә } J_2=\frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\sqrt{y}+$$

$$+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)J_0$$

аларыг. Бурада $J_0=\int\frac{dx}{\sqrt{y}}$.

Просеси бу гајда илә давам етдирсәк,

$$J_m=Q_{m-1}(x)\sqrt{y}+\lambda J_0 \tag{6}$$

алынар. Бурада $Q_{m-1}(x)$, $(m-1)$ дәрәчәли чохһәдли, λ исә гејри-мүәјјән сабитдир.

Беләликлә, (2) интегралыны (6) дүстуруна әсасән

$$J=\int\frac{P_m(x)dx}{\sqrt{y}}=Q_{m-1}(x)\sqrt{y}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{y}} \tag{7}$$

шәклиндә јаза биләрик. Бурада $Q_{m-1}(x)$ гејри-мүәјјән әмсаллы, дәрәчәси $P_m(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән бир ваһид аз олан чохһәдли. λ исә гејри-мүәјјән сабитдир.

Мисал 6. $\int\frac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ интегралыны һесаблајаг.

■ Јухарыда верилән изаһата әсасән $Q(x)=Ax^2+Bx+C$ шәклиндә олар. (5) дүстуруна әсасән

$$J=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=$$

$$=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Сонунчу бәрабәрлијин һәр тәрәфиндән төрәмә алыб, ортаг мәхрәчә кәтирдикдән сонра, сурәтләри бәрабәрләшдирсәк,

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+(Ax^2+Bx+C)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

вә ја

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+C)(x+1)+\lambda,$$

олар. Сонунчу бәрабәрликдән ашағыдакы системи аларыг.

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} 3A=1 \\ 5A+2B=0 \\ 4A+3B+C=-1 \\ 2B+C+\lambda=-1. \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

Системдән $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{6}$, $C=\frac{1}{6}$, $\lambda=\frac{1}{2}$-и тапыб, бу гијмәтләри јухарыда нәзәрә алсаг,

$$J=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Бурада

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$ ■

4°. $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ шәкилли интеграллары һесабламаг үчүн даһа бир методдан истифадә едилир. Бурада $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ әвәзләмәсини апарсаг, истәнилән $H(x, y)$ чоxһәдлисини

$$H(x, y)=W_1(x)+yW_2(x) \tag{8}$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Бурада $W_1(x)$ вә $W_2(x)$ чоxһәдлиләри анчаг x-дән асылыдыр.

Доғрудан да,

$$H(x, y)=\sum_{i,j=0}^{n}a_{i,j}x^iy^j=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_{ij}y^j\right)x^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(a_{i_0}+a_{i_1}y+a_{i_2}y_2+\cdots+a_{i_n}y^n\right)x^i=$$

$$= a_{00} + a_{01}y^2 + \cdots + a_{0n}y^n + a_{11}yx + a_{12}y^2x + \cdots +$$

$$+ a_{1n}y^nx + a_{20}x^2 + a_{21}yx + \cdots + a_{2n}y^nx^2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ a_{n_0}x^n + a_{n_1}yx^n + a_{n_2}y^2x^n + \cdots + a_{nn}y^nx^n =$$

$$= W_1(x) + y\omega_1(x) + y^2\omega_2(x) + \cdots + y^n\omega_n(x).$$

Әвәзләмәдән

$$y^{2n} = (ax^2 + bx + c)^n \text{ вә } y^{2n+1} = y^{2n}\cdot y = (ax^2 + bx + c)^n y$$

олар вә (9) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә y-ин јүксәк дәрәчәләрини квадрат үчһәдли вә y-ин һасили илә әвәз етсәк,

$$y\omega_1(x) + y^2\omega_2(x) + \cdots + y^n\omega_n(x) = yW_2(x).$$

Беләликлә, истәнилән $H(x, y)$ чохһәдлисини (8) шәклиндә көстәрмәк олар.

Истәнилән расионал функсијаны ики чохһәдлинин нисбәти кими көстәрмәк мүмкүн олдуғу үчүн

$$f(x, y) = \frac{W_1(x) + yW_2(x)}{W_3(x) + yW_4(x)}. \tag{10}$$

Бурада $W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$, $W_4(x)$ чохһәдлиләрдир. (10) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки кәсрин сурәт вә мәхрәчини $W_3(x) - yW_4(x)$ ифадәсинә вурсаг, мәхрәчдә

$$[W_3(x) - yW_4(x)][W_3(x) + yW_4(x)] = W_3^2(x) - y^2W_4(x) = P_1(x)$$

чохһәдлиси алынар.

$$f(x, y) = \frac{[W_1(x) + yW_2(x)][W_3(x) - yW_4(x)]}{P_1(x)} =$$

$$= \frac{W_1(x)W_3(x) - W_2(x)W_4(x)y^2 + [W_2(x)W_3(x) - W_1(x)W_4(x)]y}{P_1(x)}$$

олар. $y = ax^2 + bx + c$ олдуғундан,

$$f(x, y) = \frac{P_2(x) + yP_3(x)}{P_1(x)} = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} + \frac{yP_3(x)}{P_1(x)} = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} + \frac{P_3(x)}{P_1(x)}\cdot\frac{y^2}{y}.$$

$T(x) = \dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}$ вә $S(x) = \dfrac{P_3(x)y^2}{P_1(x)}$ әвәзләмәси апарсаг, бурада $T(x)$ вә $S(x)$ расионал функсијалардыр),

$$f(x, y) = T(x) + \frac{1}{y}S(x)$$

олдуғуну аларыг. Беләликлә,

$$\int f(x, y)dx = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx =$$

$$= \int T(x)dx + \int\frac{S(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \tag{11}$$

(11) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә иштирак едән биринчи интеграл, расионал функсијанын интегралы олдуғу үчүн асанлыгла һесабланыр. Әкәр $P_3(x)y^2$ чохһәдлисинин дәрәчәси $P_1(x)$-ин дәрәчәсиндән бөјүк оларса,

$$S(x) = W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Бурада $W(x)$, $P(x)$ вә $Q(x)$ чохһәдлиләрдир. $P(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси $Q(x)$-ин дәрәчәсиндән кичикдир.

$\int \frac{S(x)dx}{y}$ интегралы

$$\text{I} \int \frac{W(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{II} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$\text{III} \int \frac{(Ax+B)dx}{(\alpha x^2+\beta x+c)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралларындан биринә кәтирилир. Биринчи интегралын ачылышы илә танышыг.

$J = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралыны һесаблајаг.

Һәлли. $x - \alpha = \frac{1}{t}$ $(x > \alpha)$ илә әвәз етсәк $dx = -\frac{dt}{t^2}$,

$$ax^3 + bx + c = \frac{(a\alpha^r + b\alpha + c)\,t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2}$$

олар. $x < \alpha$ олан һал үчүн дә һесаблама аналожи апарылыр.

Беләликлә,

$$J = -\int \frac{t^{r-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^r + b\alpha + c)\,t^2 + (2a\alpha + b)\,t + a}}$$

интегралыны алырыг. Бунун һесабланмасы биринчи интегралда олдуғу кимидир. Үчүнчү тип интегралы һесабламаздан габаг бир сыра хүсуси һаллара бахаг.

1° $J = \int \frac{Axdx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}$ интегралыны һесабламалы.

Һәлли. $t = \sqrt{ax^3+c}$ әвәз етсәк, $ax^2 + c = t^2$,

$$x^2 = \frac{t^2-c}{a}, \quad xdx = \frac{1}{a}\cdot tdt.$$

Алынмыш бәрабәрликләри интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{Adt}{\alpha t^2 + (c\gamma - ac)}$$

интегралыны јаларыг ки, бунун да һесабланмасы мә'лумдур.

Мисал 7. $J = \int \frac{xdx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=\sqrt{x^2+4}$ әвәзләмәси апарсаг, $x^2=t^2-4$, $xdx=tdt$ олар. Онда

$$J=\int\frac{dt}{2t^2-7}=\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{7}{2}}}{t+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C. \quad ■$$

$$2^\circ.\ J=\int\frac{Adx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}} \tag{12}$$

интегралыны һесабламалы

Һәлли. $\sqrt{ax^2+c}=xt$ әвәз етсәк, $x^2=\frac{c}{t^2-a}$, $xdx=-\frac{ctdt}{(t^2-a)^2}$; $\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}=-\frac{tcdt}{(t^2-a)^2}\cdot\frac{1}{x^2t}=-\frac{dt}{t^2-a}$ олар. Онда

$$J=-\int\frac{Adt}{\gamma t^2+(\alpha c-\gamma a)}$$

алынар. Бу интегралын һесабланмасы ашкардыр.

Мисал 8. $J=\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sqrt{x^2+4}=xt$ әвәз етсәк, $x^2=\frac{4}{t^2-1}$, $\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{dt}{1-t^2}$, $J=$ $=-\int\frac{dt}{t^2+7}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{7}}+C.$ ■

$3^\circ.\ J=\int\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}dx$ интегралы

$$J=J_1+J_2=\int\frac{Axdx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}+\int\frac{Bdx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}$$

интегралларынын чәминә бәрабәрдир ки, бунларын да һәр бирини јухарыда һесабладыг. Инди исә даһа үмуми олан

$$J=\int\frac{(Ax+B)dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{13}$$

$$(\beta^2-4\alpha\gamma<0,\quad a\neq 0)$$

интегралыны (12) интегралына кәтирмәк мүмкүндүр. Доғрудан да,

1. $\alpha:a=\beta:b$ оларса, $x=-\frac{b}{2a}+z$ әвәзләмәси (13) интегралыны (10) интегралы шәклинә кәтирир.

$\beta^2-4\alpha\gamma>0$ оларса, онда $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ квадрат үчһәдлисинин көкләри һәгиги олар, бу һалда һесабламa чох асандыр.

2. α, β әдәдләри a вә b илә мүтәнасиб олмадыгда, јә'ни $\alpha b-\beta a\neq0$ оларса, онда

$$x=\frac{pz+q}{z+1},$$

әвәзләмәси апарыб p вә q-ну елә сечмәк олар ки, (13) интегралы (12) шәклинә дүшәр. Әвәзләмәдән истифадә етдикдән сонра

$$J=\pm\int\frac{(Lz+M)dz}{(\alpha_1z^2+\beta_1z+\gamma_1)\sqrt{a_1z^2+b_1z+c_1}}$$

алынар. Интеграл гаршысындакы ишарә $z>-1$ вә ја $z<-1$ олмасындан асылыдыр.

Бурада

$$L=(Ap+B)(p+q), \qquad M=(Aq+B)(p+q),$$
$$\alpha_1=\alpha p^2+\beta p+\gamma, \qquad a_1=ap^2+bp+c,$$
$$\beta_1=2\alpha pq+\beta(p+q)+2\gamma, \qquad b_1=2apq+c(p+q)+2c,$$
$$\gamma_1=\alpha q^2+\beta q+\gamma, \qquad c_1=aq^2+bq+c.$$

p вә q-ну елә сечәк ки, $\beta_1=0$, $b_1=0$ олсун. Онда

$$\begin{cases}2\alpha pq+\beta(p+q)+2\gamma=0;\\ 2apq+b(p+q)+2c=0,\end{cases}$$

олмалыдыр. $\alpha b-a\beta\neq0$ олдугда системин һәгиги көкләри вардыр.

Мисал 9. $J=\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+2x+6)\sqrt{2x^2+4x+1}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\alpha:a=\beta:b\,(1:2=2:4)$ олдуғу үчүн $x=-\frac{4}{2\cdot2}+z=z-1$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр. Онда

$$J=\int\frac{(2z-1)dz}{(z^2+5)\sqrt{2z^2-5}}$$

олар ки, бу типли интеграллары јухарыда һесабламышыг. ■

Мисал 10. $J=\frac{(2x-5)dx}{(3x^2-10x+9)\sqrt{5x^2-12x+8}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $x=\frac{pz+q}{z+1}$ әвәзләмәсини апарсаг p вә q гејри-муәјјән сабитләрини

$$\begin{cases}6pq-10(p+q)+18=0,\\ 10pq-12(p+q)+16=0\end{cases}$$

системиндән тә'јин етмәк олар. Доғрудан да $pq=2$, $p+q=3$, вә ја $p=1$, $q=2$ олар. Онда әвәзләмә $|z|>1$, јә'ни $x>1$,

$$x=\frac{z+2}{z+1}=1+\frac{1}{z+1}$$

олар.

$$J=\int\frac{(3z+1)dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}=3\int\frac{zdz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}+$$
$$+\int\frac{dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}.$$

Сағ тәрәфдәки интегралларын һесабланмасы илә танышыг. Беләликлә,

$$J=\frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{z^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}}+C.$$

$$z=-\frac{x-2}{x-1} \text{ вә } \sqrt{z^2+4}=\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{x-1}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J=\frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}}+C.$$

Һала $x>1$ һалы үчүндүр.

$z<-1$ оларса ($x<1$),

$$J=-\frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{z^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}}+C.$$

$$z=-\frac{x-2}{x-1},\ \sqrt{z^2+4}=-\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{x-1}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J=-\frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}}+C. \blacksquare$$

Верилмиш интегралы x-ин бүтүн гијмәтләриндә һесабладыг. Инди исә даһа үмуми олан

$$J=\int\frac{W(x)dx}{(x-\alpha)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралыны һесаблајаг. Әввәлҹә $r>1$ олан һала бахаг. Онда интеграл

$$J=\frac{Ax^{r-1}+Bx^{r-2}+\cdots+C}{(x-\alpha)^{r-1}}\sqrt{ax^2+bx+c}+D\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

шәклинә дүшүр. Бурада $A_1B_1C, \ldots, D$ сабитләри гејри-мүәјјән әмсаллардыр.

Мисал 11. $J=\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}dx$ интегралыны һесабламалы.

$\blacksquare$

$$J=\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1}+C\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Алынмыш бәрабәрлији диференсиалласаг,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}}=-\frac{Ax+A+2B}{(x-1)^3}\sqrt{x^2+1}+$$
$$+\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{C}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Онда

$$x^2+1=-x^2(2A+B-C)-x(A+B+2C)-(A+2B-C),$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{l} 2A+B-C=1, \\ A+B+2C=0, \\ A+2B-C=1 \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

системини аларыг. Системдән исә $A=B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$ олдуғу тапылыр. Беләликлә,

$$J=\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}. \blacksquare$$

Ахырынҹы интеграл $x-1=\frac{1}{t}$ әвәзләмәси илә һесабланыр.

$$J=\int\frac{W(x)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралыны һесаблајаг. Бурада $W(x)$, дәрәҹәси $2r$-дән кичик олан чохһәдлидир, $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ үчһәдлисинин исә комплекс көкләри вардыр. Јә'ни $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, $r=1$ олдугда $W(x)$ бир дәрәчәли чохһәдли олар ки, бу һала да бахмышыг. $r>1$ олан һалда

$$J=\frac{Ax^{2r-3}+Bx^{2r-4}+\dots+C}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{(Dx+E)dx}{(\alpha x^2+\beta x+c)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

бурада $A, B, \dots, C, D, E$ гејри-муәјјән әмсаллардыр. Сағ тәрәфдәки ахырынчы интегралын һесабланмасыны исә билирик.

§ 3. ЕЈЛЕР ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИНИН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

Ејлерин әвәзләмәләрини, онун һәндәси шәрһиндән дә асанлыгла алмаг олар. Доғрудан да,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx. \tag{1}$$

Интеграл алтында јерләшән ашағыдакы икитәртибли әјријә бахаг:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c} \text{ вә ја } y^2=ax^2+bx+c, \tag{2}$$

бурада (x, y) нөгтәси әјринин чари нөгтәсидир.

(1) интегралынын расионаллашдырылмасы мәсәләси, (2) икитәртибли әјрисинин x вә y чари координатларынын, һәр һансы параметрдән асылы расионал шәкилдә көстәрилмәси илә ејникүчлүдүр.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн (2) әјриси үзәриндә гејд олунмуш ихтијари (α, β) нөгтәсини көтүрәк. Бу нөгтә әјри үзәриндә олдуғу үчүн (2) тәнлијини өдәмәлидир. Һәмин нөгтәдән кечән кәсәнин тәнлији $y-\beta=t(x-\alpha)$ олар.

$$\begin{cases} y=cx^2+bx+c, \\ y-\beta=t(x-\alpha) \end{cases}$$

системиндән x вә y-и тапаг. Онда

$$[\beta+t(x-\alpha)]^2=ax^2+bx+c$$

вә ја

$$2\beta t(x-\alpha)+t^2(x-\alpha)^2=ax^2+bx+c-\beta^2. \tag{3}$$

Дикәр тәрәфдән билирик ки,

$$\beta^2=a\alpha^2-b\beta+c. \tag{4}$$

(4)-ү (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$2\beta t(x-\alpha)+t^2(x-\alpha)^2=a(x^2-\alpha^2)+b(x-\alpha) \tag{5}$$

олар. $(x-\alpha)$-ја ихтисар етсәк,

$$2\beta t+t^2(x-\alpha)=a(x+\alpha)+b,$$
$$x(t^2-a)=a\alpha+b-2\beta t-at^2,$$
$$x=\frac{\alpha(a-t^2)+b-2\beta t}{t^2-a}=-\alpha+\frac{b-2\beta t}{t^2-a}=r(t). \tag{6}$$

(6)-дан исә ашағыдакы алыныр:

$$x-\alpha=-2\alpha+\frac{b-2\beta t}{t^2-a}, \tag{7}$$

(7)-ни кәсәнин тәнлијиндә нәзәрә алсаг,

$$y=\beta-\alpha+r(t)=s(t). \tag{8}$$

Кәсәнин

$$y-\beta=t(x-\alpha)$$

тәнлијиндән

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-\beta=t(x-\alpha) \tag{9}$$

әвәзләмәси (1) интегралыны расионаллашдырыр. Доғрудан да

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(r(t), s(t)\right)r'(t)dt.$$

Фәрз едәк ки, ax^2+bx+c үчһәдлисинин λ вә μ кими ики һәгиги көкү вар. Бу о демәкдир ки, (2) әјриси Ox охуну ики $(\lambda; 0)$ вә $(\mu; 0)$ нөгтәләриндә кәсир. Бу нөгтәләрдән биринчисини $(\alpha; \beta)$ нөгтәси әвәзинә көтүрсәк (9) бәрабәрлији

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$

шәклиндә олар. Бу исә Ејлерин үчүнчү әвәзләмәсидир. $c>0$ оларса, (2) әјриси oy охуну $(0; \pm\sqrt{c})$ нөгтәсиндә кәсир. Бунлардан бирини $(\alpha; \beta)$ нөгтәси кими гәбул етсәк, (9)-дан

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{c}=tx \tag{10}$$

олдуғуну аларыг ки, бу да Ејлерин үчүнчү әвәзләмәсидир.

Нәһајәт, әјринин сонсуз узаглашмыш нөгтәсини $(\alpha; \beta)$ нөгтәси һесаб етмәклә Ејлерин биринчи әвәзләмәсини алмаг олар.

§ 4. БИНОМИАЛ ДИФЕРЕНСИАЛЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{1}$$

шәклиндә ифадәјә биномиал диференсиал дејилир. Бөјүк рус алими П. Л. Чебышев, (1) ифадәсинин интегралынын елементар функсијалар васитәсилә ифадә олунмасы һаггында ашағыдакы теореми исбат етмишдир.

Теорем.

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{2}$$

интегралы

1) ***$p\in Z$ там әдәд олдугда;***

---

* Пафнутиј Лвович Чебышев (1821—1894) көркәмли рус ријазијјатчысыдыр. 1847-чи илдә Петербург университетинә дә'вәт олунмуш, бурада „Мугајисәләр нәзәријјәси" адлы докторлуг диссертасијасыны мүдафиә етмишдир.

1859-чу илдә Петербург ЕА-нын академики сечилмишдир. О ејни заманда Берлин (1871), Болонија (1873), Парис (1874), Исвечрә (1893) вә с. ЕА-нын фәхри үзвү сечилмишдир.

2) $\frac{m+1}{n}$ *там әдәд олдугда;*

3) $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ ***там әдәд олдугда, елементар функсијалар васитәсилә ифадә едилир.***

◀ $a\neq 0$ вә $b\neq 0$ олдуғуну фәрз едәк. Бу шәртләрдән һәр һансы бири өдәнилмәзсә, онда (2) интегралы чәдвәл интегралы олар. p, m вә n ејни вахтда там әдәдләр оларса, онда (2) интегралы расионал ифадәнин интегралы олар ки, belә интеграллары һесабламағы билирик.

Биринчи һалын исбаты. m вә n кәсрләринин үмуми мәхрәчини λ илә ишарә едәк. Бу һалда $x=t^{\lambda}$ әвәзләмәси (2) интегралыны расионаллашдырар.

Доғрудан да, $m=\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $n=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $x^m=t^{m\lambda}=t^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\lambda}=t^{\mu_1}$,

$$x^n=t^{n\lambda}=t^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\lambda}=t^{\mu_2};\quad dx=\lambda t^{\lambda-1}dt,$$

бурада μ_1 вә μ_2 тамдыр. Бу ифадәләри (2) интегралында јазсаг,

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\lambda\int t^{\mu_1}(a+bt^{\mu_2})^p t^{\lambda-1}\,dt.$$

μ_1, μ_2, p вә λ там әдәдләр олдуғу үчүн, бу интеграл расионаллашмышдыр. Биринчи һал исбат олунду.

Икинчи һалын исбаты. $p=\frac{r}{s}$ шәклиндә кәср, $\frac{m+1}{n}$ исә там әдәд олдугда, көстәрәк ки, $a+bx^n=t^s$ әвәзләмәси илә (2) интегралы расионаллашыр. Әкәр $z=x^n$ оларса,

$$dz=nx^{n-1}dx,\quad dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz,\quad x^m=z^{\frac{m}{n}}$$

ифадәләрини (2)-дә јеринә јазсаг:

$$J=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}}(a+bz)^p z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p\cdot z^{\frac{m+1}{n}-1}dz=$$

$$=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q dz.$$

Бурада $q=\frac{m+1}{n}-1$ илә ишарә едилмишдир.

Демәли, $\frac{m+1}{n}$ там әдәд оларса, $a+bx^n=a+bz=t^s$ әвәзләмәси апарсаг, (2) интегралы расионаллашар. Доғрудан да (2) интегралында $a+bx^n=t^s$ әвәзләмәси апарсаг,

$$x=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}(t^s-a)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\cdot\frac{1}{n}(t^s-a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\,dt.$$

олар Бу гијмәтләри (2)-дә јеринә јазсаг,

$$J=\frac{s}{n\sqrt[n]{b^{m+1}}}\int(t^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}t^{r+s-1}\,dt,$$

Бурада r вә $s\in Z$, $\frac{m+1}{n}$ исә шәртә көрә там әдәддир. Беләликлә, икинчи һал үчүн (2) интегралынын расионаллашдығыны исбат етдик.

Үчүнчү һалын исбаты. $\frac{m+1}{n}+p$ сыфыр вә ја там әдәддирсә вә $ax^{-n}+b=t^s$ әвәзләмәси (2) интегралыны расионаллашдырыр. Әвәзләмәдән

$$x^n=\frac{a}{t^s-b},\quad a+bx^n=x^nt^s=\frac{at^s}{t^s-b},\ x=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{t^s-b}},$$

$$(a+bx^n)^p=\frac{a^pt^p}{(t^s-b)^p},\quad dx=\frac{s\sqrt[n]{a}\,t^{s-1}(t^s-b)^{\frac{1}{n}-1}}{a(t^s-b)^{\frac{2}{n}}}dt$$

алырыг. Бу ифадәләри (2) интегралында јазсаг,

$$J=\int x^m(a+bx^n)^pdx=-\frac{s}{n}a^{\frac{m+1}{n}+p}\int\frac{t^r(t^s-b)^{\frac{1}{n}-1}\,t^{s-1}dt}{(t^s-b)^{\frac{m}{n}}(t^s-b)^p(t^s-b)^{\frac{2}{n}}}=$$

$$=-\frac{s}{a}a^{\frac{m+1}{n}+p}\int\frac{t^{r+s+1}}{(t^s-b)^{\frac{m+1}{n}+p+1}}\,dt. \blacktriangleright$$

Гејд. Јухарыда сөјләдијимиз үч һалын һеч бири өдәнилмәдикдә (2) интегралы елементар функсијалар васитәсилә ифадә едилмир.

Ашағыдакы мисаллары һәлл едәк:

Мисал 1. $J=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $P=-3$, $m=n=\frac{1}{2}$ олдуғу үчүн $x=z^2$ ($dx=2zdz$) әвәзләмәси апармаг лазымдыр:

$$J=2\int\frac{z^2dz}{(1+z)^3}=2\int\frac{z^2+1-1}{(1+z)^3}\,dz=2\int\frac{z^2-1}{(1+z)^3}\,dz+2\int\frac{dz}{(1+z)^3}=$$

$$=2\int\frac{(z+1-2)dz}{(1+z)^3}+2\int\frac{dz}{(1+z)^3}=2\int\frac{dz}{1+z}-$$

$$-4\int\frac{dz}{(1+z)^2}+2\int\frac{dz}{(1+z)^3}=2\ln|1+z|+\frac{4}{1+z}-$$

$$-\frac{1}{(1+z)^2}+C=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+\frac{4}{(1+\sqrt{x})}-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+C. ■$$

Мисал 2. $J=\int\frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}=\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $P=-2$, $m=-1$, $n=\frac{1}{3}$, m вә n кәсрләринин ортаг мәхрәҹи 3 олдуғу үчүн $x=z^3(dx=3z^2dz)$ әвәзләмәси верилмиш интегралы расионал шәклә кәтирир:

$$J=3\int\frac{dz}{z(1+z)^2}=3\int\frac{1+z-z}{z(1+z)^2}dz=3\int\frac{dz}{z(1+z)}-$$

$$-3\int\frac{dz}{(1+z)^2}=3\int\frac{1+z-z}{z(1+z)}dz+\frac{3}{1+z}=3\int\frac{dz}{z}-3\int\frac{dz}{1+z}+\frac{3}{1+z}=$$

$$=3\ln|z|-3\ln|1+z|+\frac{3}{1+z}+C=3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C. ■$$

Мисал 3. $J=\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ интегралыны һесабламалы.

■. Верилмиш интегралда $m=3$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$ вә $s=2$, $\frac{m+1}{n}=2$ там олдуғу үчүн $1+x^2=z^2$ әвәзләмәсини апарсаг, онда

$$x^2=z^2-1,\ x=\sqrt{z^2-1},\ dx=\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}dz;$$

$$J=\int z^2(z^2-1)\,dz=\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{3}z^3+C=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C. ■$$

Мисал 4. $J=\int\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}dx=\int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}dx$ интегралыны һесабламалы.

■. Ашкардыр ки, $m=-6$, $n=3$, $p=\frac{2}{3}$, $s=3$ вә

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-6+1}{3}+\frac{2}{3}=-1.$$

Одур ки, $x^{-3}+2=t^3$ әвәзләмәси апармалыјыг. Бурадан

$$x=\frac{1}{(t^3-2)^{\frac13}};\quad dx=-\frac{t^2dt}{(t^3-2)^{\frac43}};\quad x=\frac{1}{(t^3-2)^3}$$

вә

$$I=\int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac23}dx=\int\frac{x^2t^2}{x^4}dx=\int\frac{t^2dx}{x^4}=$$

$$=-\int\frac{(t^3-2)^{\frac43}}{(t^3-2)^{\frac43}}\cdot t^4dt=-\frac{t^5}{5}+C=-\frac15(x^{-3}+2)^{\frac53}+C. \ ■$$

Мисал 5. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac12}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $m=-1,\ n=2,\ p=-\frac12,\ s=2,\ \frac{m+1}{a}=0$ олдугу үчүн интеграл $a^2-x^2=t^2$ әвәзләмәси илә һесабланыр:

$$x^2=a^2-t^2,\ x=\sqrt{a^2-t^2},\quad dx=-\frac{tdt}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

$$I=\int x^{-1}(a^2-x^2)^{-\frac12}dx=-\int\frac{tdt}{t(a^2-t)^2}=\int\frac{dt}{t^2-x^2}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right|+C. \ ■$$

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$	$2\left(1+x^{\frac13}\right)^{\frac32}+C.$
2. $\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)},$	$\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}},$	$\frac14\ln\left\|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right\|-\frac12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$
4. $\int x^{-2}(a+x^3)^{-\frac23}dx,$	$-\frac{3x^2+2}{2a^2x(a+x^3)^{\frac23}}+C.$
5. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}},$	$-\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax}+C.$

6. $\int \sqrt[3]{x}\left(2+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} dx$. $\quad \frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{5}{4}}+C.$

7. $\int \sqrt[4]{\left(1+\sqrt{x}\right)^3} dx$. $\quad \frac{8}{77}\left(7\sqrt{x}-4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{7}{4}}+C.$

§ 5. АБЕЛ* ӘВӘЗЛӘМӘСИ

Бу әвәзләмә

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^{2n+1}}} \qquad (1)$$

шәклиндә интегралларын һесабланмасында тәтбиг олунур. (1) интегралында

$$y=ax^2+bx+c \qquad (2)$$

ишарә етсәк, $J=\int \frac{dx}{y^{\frac{2n+1}{2}}}$ олар. $(\sqrt{y})'=t$ әвәзләмәсиндән

$$t=\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (3)$$

алынар.

(3) бәрабәрлијини квадрата јүксәлдиб кәсрдән гуртарсаг,

$$4t^2y=(y')^2=4a^2x^2+4abx+b^2. \qquad (4)$$

(2) бәрабәрлијинин һәр тәрәфини $4a$-ја вуруб алынан нәтичәдән (4) бәрабәрлијини чыхсаг

$$4(a-t^2)y=4ac-b^2 \qquad (5)$$

ва нәһајәт (5) ифадәсиндән y-и тә'јин едиб алынан бәрабәрлији n-чи дәрәчәдән гүввәтә јүксәлтсәк,

$$y^n=\left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{(a-t^2)^2} \qquad (6)$$

алырыг. (3) бәрабәрлијиндән алынмыш $t\sqrt{y}=ax+\frac{b}{2}$ ифадәсини диференсиалласаг:

---

* Нилс Һенрих Абел (1802—1829) Норвеч ријазијјатчысыдыр. Һәлә 1823-чү илдә (Осло университетиндә охудугу вахт, беш дәрәчәли тәнликләрин һәлли илә мәшгул олмушдур. 1825—1826-чы илләрдә бир сыра харичи өлкәләрдә, о чүмләдән дә Парисдә олмуш, бурада һазырда Абел функсијалары адланан функсијалар һаггында јаздыгы ме'муарыны Парис академијасына тәгдим етмишдир. 1827—1828-чи илләрдә еллиптик функсијалар нәзәријјәсини, 1829-чу илдә исә чәбри тәнликләрин һәлли һаггында јаздыгы мемуары нәшр етдирмишдир. Абел аз мүддәт јашамасына бахмајараг, демәк олар ки, ријази анализин бүтүн саһәләринә аид мүкәммәл әсәрләр јазмышдыр.

$$\sqrt{y}\,dt-t^2dx=adx$$

вә ја

$$\sqrt{y}\,dt=(a-t^2)dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{dt}{a-t^2}. \qquad (7)$$

6) вә (7) бәрабәрликләриндән

$$\frac{dx}{y^{\frac{2n+1}{2}}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n(a-t^2)^{n-1}dt.$$

Онда

$$\int\frac{dx}{y^{\frac{2n+1}{2}}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n\int(a-t^2)^{n-1}dt.$$

Сағ тәрәфдәки интегралалты ифадә чохһәдлидир. Демәли, верилмиш интеграл Абел әвәзләмәси илә чохһәдлинин интегралланмасына кәтирилди

Хүсуси һалда $n=1$ оларса,

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{4}{4ac-b^2}\cdot\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+C.$$

Гејд едәк ки, $J=\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^{2n+1}}$ интегралынын һесабланмасы, бундан әввәл һесабланмыш интеграла кәтирилир. Доғрудан да $J=M\int\frac{xdx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}+N\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}=$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b-b)}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}dx+N\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}=$$

$$=\frac{M}{a}\int\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки биринчи интегралы һесабламаг үчүн $ax^2-bx+c=z\,[dz=(2ax+b)dx]$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}=\int\frac{dz}{z^{\frac{2n-1}{2}}}=\int z^{-\frac{2n+1}{2}}dz=$$

$$=-\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{1}{z^{\frac{2n-1}{2}}}=\frac{2}{2z-1}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Нәтичәдә

$$=\frac{M}{a(1-2n)}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2n+1}{2}}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n\int(a-t^2)^{n-1}dt.$$

Ахырынҹы интегралы јухарыда һесабламышыг. Бурада

$$t=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

V ФӘСИЛ

ТРАНСЕНДЕНТ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

§. 1. СИНУС ВӘ КОСИНУСЛАРЫН ҺАСИЛЛӘРИ ИШТИРАК ЕДӘН ФУНКСИЈАЛАРЫН ВӘ БӘ'ЗИ ТРАНСЕНДЕНТ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ.

$f_1(x)=\sin mx\cos nx$, $f_2(x)=\sin mx\sin nx$, $f_3(x)=\cos mx\cos nx$ шәклиндә олан функсијаларын интегралланмасы. Бурада мәктәб курсундан мә'лум олан

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (3)$$

дүстурларындан истифадә едәҹәјик.

$J_1=\int\cos mx\cos nx\,dx$ интегралыны һесабламаг үчүн (1) дүстурундан истифадә едәҹәјик.

$$J_1=\frac{1}{2}\int\cos(m-n)xdx+\frac{1}{2}\int\cos(m+n)xdx=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C, & m\neq n \text{ олдугда}\\[2mm] \dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2nx}{4n}+C, & m=n \text{ олдугда}\end{cases}$$

Ејни гајда илә (2) дүстуруну тәтбиг етсәк, $J_2=\int\sin mx\sin nxdx$.

$$J_2=\frac{1}{2}\int\cos(m-n)xdx-\frac{1}{2}\int\cos(m+n)xdx=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C, & m\neq n \text{ олдугда}\\[2mm] \dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2nx}{4n}+C, & m=n \text{ олдугда.}\end{cases}$$

Аналожи оларат:

$$J_3 = \int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int \sin(m-n)x dx + \frac{1}{2} \int \sin(m+n) x dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos(m-n)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C, & m \neq n \text{ олдугда} \\ -\frac{\cos 2nx}{4n} + C, & m = n \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Бә'зи трансендент функсиjаларын интегралланмасы.

$$J = \int P_n(x) f(x) dx \qquad (4)$$

интегралына бахаг.

Бурада $P_n(x)$ чохһәдлиси n дәрәчәлидир. Ашағыдакы һаллара бахаг.

1° $f(x) = \ln \varphi(x)$.

■ $\varphi(x) > 0$ функсиjасы расионал функсиjадыр.

$u = \ln \varphi(x)$, $dV = P_n(x) dx$ әвәз етсәк,

$$du = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx \quad V = \int P_n(x) dx = Q_{n+1}(x) \qquad (5)$$

(5)-и (4)-дә нәзәрә алсаг,

$$J = \int P_n(x) \ln \varphi(x) dx = Q_{n+1}(x) \ln \varphi(x) - \int \frac{Q_{n+1}(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} dx,$$

$\varphi(x)$ вә $\varphi'(x)$ функсиjалары расионал функсиjалар олдуғу үчүн ахырынчы интегралы һесабламаг олар. ■

2°. $f(x) = \arcsin x$ оларса, $u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$dV = P_n(x) dx, \quad V = \int P_n(x) dx = Q_{n+1}(x)$$

әвәзләмәләрини (4)-дә нәзәрә алсаг

$$J = Q_{n+1}(x) \arcsin x - \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ахырынчы интегралы һесабламышыг (IV фәсил, § 2, (7)). ■

3°. $f(x) = \arccos x$ оларса,

$$J = Q_{n+1}(x) \arccos x + \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

интегралыны аларыг ки, бунун да һесабланмасы ашкардыр.

4°. $f(x) = \operatorname{arctg} \varphi(x)$ оларса, $u = \operatorname{arctg} \varphi(x)$,

$$du = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} dx, \quad dV = P_n(x) dx, \quad V = Q_{n+1}(x)$$

әвәзләмәләриндән сонра

$$J = Q_{n+1}(x)\operatorname{arctg}\varphi(x) - \int \frac{Q_{n+1}(x)\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx$$

интегралыны аларыг ки, интегралалты функсија расионал олдуғу үчүн бунун һесабланмасы ашкардыр.

$f(x) = \operatorname{arcctg}\varphi(x)$ оларса, дөрдүнчү һала ујғун олараг һесаблама апарарыг.

§ 2. $f(\sin x, \cos x)$ ШӘКЛИНДӘ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Бурада $f(u, v)$ функсијасы u вә v дәјишәнләринин расионал функсијасыдыр. $f(u, v)$ функсијасында u дәјишәнини $-u$ илә әвәз етдикдә $f(-u, v) = -f(u, v)$ оларса, онда бу функсија u-ја нәзәрән тәк, $f(-u, v) = f(u, v)$ оларса, u-ја нәзәрән чүт функсијадыр. Ејни гајда илә $f(u, -v) = -f(u, v)$ оларса, $f(u, v)$ функсијасы v дәјишәнинә нәзәрән тәк, $f(u, -v) = f(u, v)$ оларса, һәмин v дәјишәнинә нәзәрән чүт функсијадыр.

$f(u, v)$ функсијасында һәр ики дәјишәни $-u$ вә $-v$ илә әвәз етдикдә $f(-u, -v) = f(u, v)$ оларса, онда функсија һәр ики дәјишәнә көрә чүт функсијадыр.

$f(u, v)$ функсијасы расионал функсија олдуғу үчүн, ону ики чохһәдлинин нисбәти шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр.

$$f(u, v) = \frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} \tag{1}$$

Бурада $\varphi(u, v)$ вә $\psi(u, v)$ функсијалары u вә v-дән асылы чохһәдлиләрдир. $f(u, -v) = -f(u, v)$ олдуғундан, (1)-дә

$$\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} = \frac{-\varphi(u, v)}{\psi(u, -v)}. \tag{2}$$

(2) бәрабәрлијинә төрәмә тәнасүбүн хассәсини тәтбиг етсәк,

$$\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} = \frac{\varphi(u, v) - \varphi(u, -v)}{\psi(u, v) + \psi(u, -v)}. \tag{3}$$

Бурада

$$\varphi(u, v) = a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + \cdots + a_{n-1} v + a_n. \tag{4}$$

$a_i(i = \overline{0, n})$, u-дан асылы мүәјјән чохһәдлидир. (4) бәрабәрлијиндә v-ни $-v$ илә әвәз етсәк,

$$\varphi(u, -v) = a_0(-v)^n + a_1(-v)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-v) + a_n \tag{4_1}$$

олар. (4) вә (4_1) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәф чыхсаг,

$$\varphi(u, v) - \varphi(u, -v) = a_0[v^n - (-v)^n] + a_1[v^{n-1} - (-v)^{n-1}] + \cdots +$$
$$+ a_{n-1}[v - (-v)] + (a_n - a_n). \tag{5}$$

(6) бәрабәрлијиндә $k=2m$ оларса, $v^k-(-v)^k$ фәргләри сыфра бәрабәр олур. Демәли, $\varphi(u, v)-\varphi(u, -v)$ чохһәдлисиндә v-нин анчаг тәк дәрәчәси иштирак едәр. Бу һалда

$$\varphi(u, v)-\varphi(u, -v)=\varphi_1(u, v)\cdot v. \qquad (6)$$

$\varphi_1(u, v)$ функсијасында v-ләр анчаг чүт дәрәчәдән иштирак едир. Јә'ни,

$$\varphi_1(u, v)=F(u, v^2) \qquad (7)$$

(6) вә (7)-дән

$$\varphi(u, v)-\varphi(u, -v)=F(u, v^2)\cdot v. \qquad (8)$$

Аналожи олараг көстәрмәк олар ки, $\psi(u, v)-\psi(u, -v)$ чохһәдлисиндә v анчаг чүт дәрәчәдән иштирак едир. Јә'ни

$$\psi(u, v)-\psi(u, -v)=\Phi(u, v^2) \qquad (9)$$

(3), (8) вә (9) бәрабәрликләрини (2)-дә нәзәрә алсаг,

$$f(u, v)=\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)}=\frac{\varphi(u, v)-\varphi(u, -v)}{\psi(u, v)+\psi(u, -v)}=\frac{F(u, v^2)v}{\Phi(u, v^2)}=\chi(u, v^2)\cdot v. \qquad (10)$$

Бурада $\varkappa(u, v^2)$ функсијасы u вә v^2-ындан асылы расионал функсијадыр.

Әввәлчә $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $-\pi<x<\pi$ универсал әвәзләмәси васитәсилә

$$J=\int f(\sin x, \cos x)dx \qquad (11)$$

интегралынын расионаллашмасы мәсәләсини өјрәнәк. Әвәзләмәдән

$$x=2\operatorname{arctg} t, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

олар. Дикәр тәрәфдән билирик ки,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

x, dx, $\sin x$ вә $\cos x$-ин бу гијмәтләрини (11)-дә нәзәрә алсаг,

$$J=\int f\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\varphi(t)dt$$

олар. Бурада $\varphi(t)$ функсијасы t дәјишәнинә нәзәрән расионал функсијадыр.

Универсал әвәзләмә, $f(\sin x, \cos x)$ шәкилли бүтүн функсијаларын интегралыны һесабламаға имкан версә дә, бә'зи һалларда бу һесаблама чох вахт тәләб едир. Белә олдугда башга әвәзләмәләр сечмәклә мәгсәдә даһа тез наил олмаг олар. Ашағыдакы һаллары нәзәрдән кечирәк.

1. $J=\int f(\sin x, \cos x)dx$ интегралында, $\cos x$ функсијасыны $-\cos x$ илә әвәз етдикдә, интегралалты функсија ишарәсини дәјишәрсә, јә'ни

$$f(\sin x, -\cos x)=-f(\sin x, \cos x)$$

оларса, $t=\sin x$ әвәзләмәси илә интеграл расионаллашар. Доғрудан да, $f(\sin x, \cos x)$ функсијасы $u=\sin x$, $v=\cos x$ дәјишәнләриндән асылы расионал функсија олдуғундан

$$f(\sin x, \cos x)=f(u, v)=\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)}=\frac{F(u, v^2)v}{\Phi(u, v^2)}=$$

$$=\chi(u, v^2)\cdot v=\chi(\sin x, \cos^2 x)\cos x$$

Беләликлә, интегралалты функсија $\chi(\sin x, \cos^2 x)\cos x$ шәклинә дүшәр вә $t=\sin x(dt=\cos x dx)$ әвәзләмәси илә верилмиш интеграл расионаллашар:

$$J=\int f(\sin x, \cos x)\,dx=\int \chi(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx=$$

$$=\int \chi(t, 1-t^2)\,dt=\int \chi_1(t)dt.$$

$X_1(t)$ функсијасы t-дән асылы расионал функсијасыдыр. Белә интегралларын һесабланмасы исә мә'лумдур. Хүсуси һалда $J=\int \sin^m x \cos^{2n-1} x dx$ $(m, n\in N)$ оларса, интегралалты функсија $\cos x$-ә нәзәрән тәк функсија олдуғу үчүн $t=\sin x$ әвәзләмәси верилмиш интегралы расионаллашдырыр. Доғрудан да

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2, \; dt=\cos x dx$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J=\int \sin^m x \cos^{2n-2} x\cdot\cos x dx=\int \sin^m x\left(\cos^2 x\right)^{n-1}\cos x dx=$$

$$\int t^m(1-t^2)^{n-1}\,dt$$

алынар ки, бу да расионал функсијанын интегралы олдуғу үчүн асанлыгла һесабланыр.

2. $f(\sin x, \cos x)$ функсијасында $\sin x$ функсијасыны $-\sin x$ илә әвәз етдикдә,

$$f(-\sin x, \cos x)=-f(\sin x, \cos x)$$

оларса $t=\cos x(dt=-\sin x dx)$ әвәзләмәси апарылыр.

$$f(\sin x, \cos x)=\varphi(\sin^2 x, \cos x)\sin x$$

олдуғу үчүн

$$J=\int \varphi(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx=\int \varphi(1-\cos^2 x, \cos x)\sin x dx=$$

$$=-\int \varphi(1-t^2, t)\,dt=\int \varphi_1(t)\,dt.$$

Бурада $\varphi_1(t)$ функсијасы t-дән асылы расионал функсијадыр. Хүсуси һалда $J=\int \sin^{2n-1}x\cdot\cos^m x dx$ оларса, интегралалты функсија $\sin x$-ә нәзәрән тәк функсија олдуғу үчүн $t=\cos x$ әвәзләмәси интегралы расионаллашдырыр:

$$J=\int \cos^m x\,(\sin^2 x)^{n-1}\sin x dx=\int \cos^m x\,(1-\cos^2 x)^{n-1}\sin x dx=$$

$$=-\int t^m(1-t^2)^{n-1}\cdot dt.$$

3. $J=\int f(\sin x, \cos x)dx$ интегралында интегралалты функсија $f(-\sin x, -\cos x)=f(\sin x, \cos x)$ шәртини өдәјирсә, $t=\operatorname{tg}x$ илә әвәз едәрәк, $\sin x=\cos x\cdot\operatorname{tg}x$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $\cos x$-дән вә $\operatorname{tg}x$-дән асылы расионал $f(\cos x\cdot\operatorname{tg}x, \cos x)$ функсијасыны аларыг. Бурада $\cos x$-и $-\cos x$ илә әвәз етдикдә шәртә көрә функсија ишарәсини дәјишмир. Она көрә

$$f(\sin x, \cos x)=f(\cos x\cdot\operatorname{tg}x, \cos x)=f_1(\cos^2 x, \operatorname{tg}x)=$$

$$=f_1\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg}x\right)=f_2(\operatorname{tg}x).$$

Сонунчу бәрабәрликдән көрүнүр ки, $t=\operatorname{tg}x$ әвәзләмәси интегралалты функсијаны расионаллашдырыр.

Гејд 1. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, јухарыда бахдығымыз үч һал галан бүтүн һаллары әһатә едир. Доғрудан да $f(u, v)$ ихтијари расионал функсија олдуғда

$$f(u, v)=\frac{f(u,v)-f(u,-v)}{2}+\frac{f(u,-v)-f(-u,-v)}{2}+\frac{f(u,v)+f(-u,-v)}{2}$$

олур. $f_1(u, v)$ функсијасы v-јә нәзәрән тәк-дир, $f_2(u, v)$, u-ја нәзәрән тәк-дир, $f_3(u, v)$ исә $f(-u, -v)=f(u, v)$ бәрабәрлијини өдәјир. Бу һалда уйғун оларағ $t=\sin x$, $t=\cos x$ вә $t=\operatorname{tg}x$ әвәзләмәләри тәтбиг олунур.

Гејд 2. (II)-дә интегралалты функсијаны $f(\sin x, \cos x)=\psi(\sin x)\cos x$ шәклиндә ифадә етмәк мүмкүндүрсә, о һалда (II) интегралы $t=\sin x$ әвәзләмәси илә расионал функсијанын интегралына кәтирилир. Доғрудан да,

$$J=\int f(\sin x, \cos x)dx=\int \psi(\sin x)\cos x dx$$

интегралында $t=\sin x(dt=\cos x dx)$ әвәзләмәси апарсаг,

$$J=\int \psi(\sin x)\cos x dx=\int \psi(t)dt,$$

бурада $\psi(t)$ функсијасы t дәјишәниндән асылы расионал функсијадыр.

Гејд 3. (I)-дә интегралалты функсијаны $f(\sin x, \cos x)=\psi(\cos x)\sin x$ шәклиндә ифадә етмәк оларса, о һалда $t=\cos x$ әвәзләмәси апарылыр:

$$J=\int \psi(\cos x)\sin x dx=-\int \psi(\cos x)\,d(\cos x)=-\int \psi(t)dt.$$

Гејд 4. Интегралалты функсијаны $f(\sin x, \cos x)=\varphi(\operatorname{tg}x)$ шәклиндә көстәрмәк мүмкүн оларса,

$$t=\operatorname{tg}x\ \left[dt=\sec^2 x dx=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx\right]$$

әвәзләмәси тәтбиг едилир:

$$J=\int\varphi(\operatorname{tg}x)\,dx=\int\varphi(t)\frac{dt}{1+t^2}=\int F(t)\,dt,$$

бурада $F(t)$—рационал функсијадыр.

Јухарыдакы һаллара аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J=\int\frac{dx}{5+4\sin x}$ интегралыны һесабламалы.

■ $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ универсал әвәзләмәсини тәтбиг етсәк,

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$J=2\int\frac{dt}{5t^2+8t+5}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.\ ■$$

Мисал 2. $J=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x-\cos^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■ $f(\sin x,-\cos x)=\frac{-\cos x}{\sin x-(-\cos x)^2}=-\frac{\cos x}{\sin x-\cos^2x}=$

$=-f(\sin x,\cos x)$

олдуғу үчүн $t=\sin x$ әвәзләмәси апармағ лазымдыр. $dt=\cos x\,dx$, $\cos^2x=1-\sin^2x=1-t^2$ ифадәләрини интегралда нәзәрә алсағ,

$$J=\int\frac{dt}{t-(1-t^2)}=\int\frac{dt}{t^2+t-1}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sin x+1-\sqrt{5}}{2\sin x+1+\sqrt{5}}\right|+C.\ ■$$

Мисал 3. $J=\int\frac{3\sin x\,dx}{2\cos x+\cos^2x+3\sin^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■ $f(-\sin x,\cos x)=\frac{3(-\sin x)}{2\cos x+\cos^2x+3(-\sin x)^2}=$

$=-\frac{3\sin x}{2\cos x+\cos^2x+3\sin^2x}=-f(\sin x,\cos x)$ олдуғу үчүн $t=\cos x$ әвәзләмәси апарылыр. Онда $dt=-\sin x\,dx$, $\sin^2x=1-\cos^2x=$ $=1-t^2$, $J=\int\frac{dt}{2t^2-2t+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}}=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{7}-1}{2t+\sqrt{7}-1}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\cos x-\sqrt{7}-1}{2\cos x+\sqrt{7}-1}\right|+C.\ ■$$

Мисал 4. $J=\int\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■ Јохласаг көрәрик ки, $f(-\sin x,\ -\cos x)=f(\sin x,\ \cos x)$. Онда, $t=\operatorname{tg}x$ әвәзләмәси илә

$$J=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{a+b\operatorname{tg}^2x}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{a+b\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)+C.\ ■$$

Мисал 5. $J=\int\frac{\cos^2x}{\sin^6x}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Бу мисалда да $f(-\sin x,\ -\cos x)=f(\sin x,\ \cos x)$ олдуғундан, $t=\operatorname{tg}x$ әвәз етсәк, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2x=\frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2x=\frac{t}{1+t^2}$ вә бунлары интегралда нәзәрә алсаг,

$$J=\int\frac{(1+t^2)^3dt}{(1+t^2)^2t^6}=\int\frac{1+t^2}{t^6}dt=-\frac{1}{5t^5}-\frac{1}{3t^3}+C=$$

$$=-\frac{1}{5\operatorname{tg}^5x}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}+C.\ ■$$

§ 3. КӘТИРМӘ ДҮСТУРЛАРЫ

Кәтирмә дүстурлары әсасән һиссә-һиссә интеграллама методу васитәсилә чыхарылыр. Тутаг ки,

1. $$J_n=\int\sin^n xdx,\quad n\in N \tag{1}$$

интегралыны һесабламаг тәләб олунур. $u=\sin^{n-1}x$, $dv=\sin xdx$ ишарә едиб, $du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx$, $v=\int\sin xdx=-\cos x$ олдуғуну $\int udv=uv-\int vdu$ дүстурунда јазсаг,

$$J_n=\int\sin^nxdx=-\sin^{n-1}x\cos x+(n+1)\int\sin^{n-2}x\cos^2xdx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int\sin^nxdx,$$

даһа сонра ахырынчы интегралы сол тәрәфә кечирсәк

$$J_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}J_{n-2} \tag{2}$$

алынар. (2) дүстуру кәтирмә дүстуру адланыр. Ахырынчы интеграл (1) типли интеграл олмагла, бурада интегралалты функсијанын дәрәчәси ики ваһид азалмышдыр. Јенә дә (2) интегралы үчүн јухарыдакы просеси тәкрар етсәк, ики һәдд алынар ки, бунлардан бири интегралсыз, дикәри исә интеграл-ла олмагла дәрәчәси јенидән ики ваһид азалмыш олар. Просеси бу гајда илә давам етдирсәк, ахырынчы интеграл: n чүт олдугда $\int dx$, n тәк олдугда исә $\int \sin x dx$ шәклиндә олар.

(1) интегралына аналожи олараг:

2. $J_n = \int \cos^n x dx = \int \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ олдуғуну көстәрмәк олар.

3. $J_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$ интегралыны һесаблајаг.

Һәлли. $J_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, d(\operatorname{tg} x) - J_{n-2} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

Ејни гајда илә

$$J_n = \int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

4. $J_n = \int \sec^n x dx$, $n \geqslant 2$.

Һәлли. $J_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$ кими јазыб һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$u = \sec^{n-2} x, \; du = (n-2) \sec^{n-1} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x dx;$$

$$dv = \sec^2 x dx, \quad v = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x.$$

Онда

$$J_n = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x -$$

$$- (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x -$$

$$- (n-2) J_{n-2} + (n-2) J_n.$$

Груплашдырма апарыб J_n-ни тапсаг:

$$J_n = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

олдуғуну аларыг.

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$J_n = \int \operatorname{cosec}^n x dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{ctg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

5. $J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$, $\quad m \neq 1$; n; $m \in N$.

Һәлли.

$$J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = - \int \frac{\sin^{n-1} x d(\cos x)}{\cos^m x},$$

чевирмәсиндән сонра һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк:

$$u = \sin^{n-1}x, \quad du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx; \quad dV = \frac{d(\cos x)}{\cos^m x}$$

$$v = \frac{\cos^{1-m}x}{1-m}, \quad J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx =$$

$$= -\left[\frac{\sin^{n-1}x}{(1-m)\cos^{m-1}x} - \frac{n-1}{1-m}\int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos^{m-2}x}\,dx\right]$$

вә ја

$$J_{n,m} = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{\sin^{n-1}x}{\cos^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}J_{n-2,m-2}.$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$J_{n,m} = \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos^{n-1}x}{\sin^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}J_{n-2,m-2}.$$

6. $J_{n,m} = \int \frac{dx}{\sin^n x\cos^m x}$, $m, n \in N$.

Һәлли.

$$J_{n,m} = \int \frac{dx}{\sin^n x\cos^m x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x\cdot\cos^m x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^{n-2}x\cos^m x} + \int \frac{dx}{\sin^n x\cos^{m-2}x}$$

вә ја

$$J_{n,m} = J_{n-2,m} + J_{n,m-2}.$$

7. $J = \int \sin^m x\cos^n x\,dx$ шәклиндә интеграллары һесабламаг үчүн әввәлчә бир сыра хүсуси һаллара бахаг.

1°. m—мүсбәт тәк әдәд, јә'ни $m=2k+1$ олсун.

$$J_1 = \int \sin^{2k+1}x\cos^n x\,dx = \int \sin^{2k}x\cos^n x\sin x\,dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\,dx = \int \cos^n x\left[1 - k\cos^2 x + \frac{k(k-1)}{2!}\cos^4 x -\right.$$

$$\left. - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cos^6 x + \cdots + (-1)^k\cos^{2k}x\right]\sin x\,dx =$$

$$= \int \cos^n x\sin x\,dx - k\int \cos^{n+2}x\sin x\,dx +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2}\int \cos^{n+4}x\sin x\,dx - \cdots + (-1)^k\int \cos^{n+2k}x\sin x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}}{n+1} + \frac{k}{n+3}\cos^{n+3}x - \frac{k(k-1)}{2!(n+5)}\cos^{n+5}x +$$

$$+ \cdots + (-1)^k\frac{\cos^{n+2k+1}x}{n+2k+1} + C.$$

2°. Бу, n мүсбәт тәк олан һалдыр:

$$I_2 = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx.$$

Бундан әввәлки мисала аналожи олараг

$$I_2 = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{k}{m+3} \sin^{m+3} x +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \frac{\sin^{m+5} x}{m+5} - \dots + (-1)^k \frac{\sin^{m+2k+1} x}{m+2k+1} + C$$

аларыг.

3°. $m+n = -2k$, $k \in N$ һалында интегралалты функсија ики шәкилдә ола биләр:

а) интегралалты функсија кәср олуб, сурәтдә синус, мәхрәҹдә исә косинус олмагла, онларын дәрәҹәләри мүхтәлифдир. Әкәр сурәт вә мәхрәҹин дәрәҹәләри ҹүтдүрсә (вә ја тәкдирсә), онда $t = \operatorname{tg} x$ вә ја $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси интегралалты функсијаны расионаллашдырар.

б) интегралалты функсија кәср олуб, сурәт сабит, мәхрәҹ исә синус вә косинусларын дәрәҹәләри һасилләриндән (бу һасилдә синус вә косинусун һәр икисинин дәрәҹәси ҹүт вә ја тәк олмалыдыр) ибарәтдирсә, јенә дә $t = \operatorname{tg} x$ вә ја $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр.

Гејд. Интеграл алтындакы функсијада кәсрин сурәтиндә синус олдугда $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәси, әкс һалда $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси даһа мәгсәдәујғундур.

Үчүнҹү һалын а) вә б) бәндләринә аид мисаллар һәлл едәк.

$J = \int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2l+2} x} dx \, (k, l \in N, l \geqslant k)$ интегралыны һесабламалы.

Һәлли. $m = 2k$, $n = -(2l+2)$, $m+n = 2k-2l-2 = -2(l-k)-2$ мәнфи ҹүт әдәд олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр. Онда

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

олдуғуну интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{(\sin^2 x)^k}{(\cos^2 x)^l \cdot \cos^2 x} dx = \int t^{2k} (1+t^{k})^{l-k} dt.$$

$(1+t^2)^{l-k}$ ифадәсини бином кими ачдыгдан сонра интеграл асанлыгла һесабланыр.

Мисал 1. $J = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $m=4$, $n=-8$, $m+n=-4$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәси лазымдыр. Бу һал үчүн

$$J=\int\frac{t^4(1+t^2)^4}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int t^4(1+t^2)\,dt=$$

$$=\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{\mathrm{tg}^5x}{5}+\frac{\mathrm{tg}^7x}{7}+C. \quad ■$$

2. $J=\int\frac{\sin^{2k+1}x}{\cos^{2l+1}x}dx,\quad k;\ l\in N,\ l>k.$

Һәлли. $m=2k+1$, $n=-2l-1$; $m+n=-2(l-k)$ мәнфи чүт әдәд олдуғу үчүн $t=\mathrm{tg}\,x$ әвәзләмәсини апарсаг,

$$J=\int\frac{(\sin^2x)^k\sin x}{(\cos^2x)^l\cos x}dx=\int t^{2k+1}(1+t^2)^{l-k-1}dt.$$

Бу интегралын һесабланмасы мә'лумдур.

Мисал 2. $J=\int\frac{\sin^3x}{\cos^7x}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $m=3$, $n=-7$, $m+n=-4$ мәнфи чүт әдәд олдуғу үчүн $t=\mathrm{tg}\,x$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр:

$$J=\int\frac{t^3(1+t^2)^2}{1+t^2}dt=\int t^3(1+t^2)\,dt=\frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{6}+C=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^4x}{4}+\frac{\mathrm{tg}^6x}{6}+C. \quad ■$$

3. $J=\int\frac{\cos^{2k+1}x}{\sin^{2l+1}x}dx,\quad k,\ l\in N,\ l>k.$

Һәлли. $n=2k+1$, $m=-2l-1$, $m+n=-2(l-k)$ чүт әдәд олдуғу үчүн $t=\mathrm{ctg}\,x$ әвәзләмәси апарылыр.

$$dx=-\frac{dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

олдуғуну интегралда нәзәрә алсаг,

$$J=\int\frac{(\cos^2x)^k\ \cos x}{(\sin^2x)^l\sin x}dx=-\int t^{2k+1}(1+t^2)^{l-k-1}dt$$

алынар. Бу интегралын һесабланмасы мә'лумдур.

Мисал 3. $J=\int\frac{\cos^3x}{\sin^9x}dx$ интегралыны һесабламалы

■ $m=-9$, $n=3$, $m+n=-6$ олдуғу үчүн вә интеграл алтындакы кәсрин сурәтиндә $\cos x$ олдуғу үчүн $t=\mathrm{ctg}\,x$ әвәзләмәси мәгсәдәујғундур. Онда

$$J=-\int t^3(1+t^2)^2dt=-\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}-\frac{t^8}{8}+C=$$

$$=-\frac{\mathrm{ctg}^4x}{4}-\frac{\mathrm{ctg}^6x}{6}-\frac{\mathrm{ctg}^8x}{8}+C. \quad ■$$

4. $J=\int \frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2l+2}x}dx, \quad k,\ l\in N,\ l\geqslant k.$

Бу интеграл биринчи һалда олдуғу кими һесабланыр. Лакин интегралалты кәсрин сурәтиндә $\cos x$ олдуғу үчүн $t=\mathrm{ctg}\,x$ әвәзләмәси апармаг лазым кәлир.

Гејд. Јухарыда көстәрилән мисалларда m вә n-ин анҹаг там олдуғуну гејд етмишдик. Бахдығымыз һалларда m вә n кәср дә ола биләр, лакин $m+n=-2k$ олмасы шәрти зәруридир.

Мисал 4. $J=\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^9 x}}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{9}{2}$, $m+n=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-4$ олдуғу үчүн $t=\mathrm{tg}\,x$ әвәзләмәсини тәтбиг едәк. Онда

$$J=\int t^{\frac{1}{2}}(1+t^2)^2\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+C=$$

$$=2\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+\frac{1}{7}\mathrm{tg}^3x\right)+C. \ ■$$

Мисал 5. $J=\int \sqrt[3]{\frac{\cos^8 x}{\sin^8 x}}dx$ интегралыны һесабламалы.

$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{8}{3}$, $m+n=-2$ олдуғу үчүн $t=\mathrm{ctg}\,x$ әвәзләмәси лазымдыр.

$$J=-\int t^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(\sqrt{1+t^2})^{\frac{8}{3}}}{(\sqrt{1+t^2})^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=-\int t^{\frac{2}{3}}dt=$$

$$=-\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C=-\frac{3}{5}\mathrm{ctg}\,x\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2x}+C. \ ■$$

Мисал 6. $J=\int \mathrm{tg}^{\frac{1}{2}}x\sec^6 x dx$ интегралыны һесабламалы.

$$■\ J=\int \frac{\sin^{\frac{1}{2}}x}{\cos^{\frac{1}{2}}x}\cdot\frac{dx}{\cos^6 x}=\int\frac{\sin^{\frac{1}{2}}x}{\cos^{\frac{13}{2}}x}dx.$$

Бурада $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{13}{2}$; $m+n=-6$ олдуғу үчүн $t=\mathrm{tg}\,x$ әвәзләмәси апарылыр:

$$J=\int t^{\frac{1}{2}}(1+t^2)^2dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C=$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{3}+\frac{2\operatorname{tg}^3 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{11}\right)+C. \quad ■$$

5. $m+n=0$, $m;\ n\in N$.

а) $J=\int\frac{\sin^k x}{\cos^k x}dx,\quad k\in N.$

Һәлли. $m=k$, $n=-k$ олдугундан $m+n=0$ олар. Онда, $t=\operatorname{tg} x$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр:

$$J=\int\operatorname{tg}^k x dx=\int t^k\frac{dt}{1+t^2}.$$

Сонунҹу интеграл рационал кәсрин интегралы олдугу үчүн асанлыгла һесабланыр.

б) $J=\int\frac{\cos^k x}{\sin^k x}dx,\ k\in N.$

Һәлли. Бурада $m=-k$, $n=k$, $m+n=0$, $n>0$ олдугу үчүн $t=\operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси апарылыр:

$$J=\int\frac{\cos^k x}{\sin^k x}dx=\int\operatorname{ctg}^k x dx=-\int\frac{t^k dt}{1+t^2}.$$

Биз јухарыда $J_{n,m}=\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx$ интегралынын хүсуси һалларына бахдыг. Үмуми шәкилдә бу типли интеграллары һесабламаг үчүн һиссә-һиссә интеграллама дүстурундан истифадә едәҹәјик

$$J_{m,n}=\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx=\int\sin^{m-1}x\cos^n x\sin x dx,\quad m,\ n\in N,$$

$$m\neq n,\ n\neq-1,$$

интегралында

$$u=\sin^{m-1}x,\quad dv=\cos^n x\sin x dx$$

ишарә етсәк,

$$du=(m-1)\sin^{m-2}x\cos x dx=-\int\cos^n x d(\cos x)=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}$$

олар. Онда

$$J_{n,m}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x dx. \qquad (3)$$

Дикәр тәрәфдән

$$\int\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x dx=\int\sin^{m-2}\cos^n x(1-\sin^2 x)dx=$$

$$=\int\sin^{m-2}x\cos^n x dx-\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx=\int\sin^{m-2}x\cos^n x dx-J. \qquad (4)$$

(4) бәрабәрлијини (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$J_{n,m}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cos^n x dx-\frac{m-1}{n+1}J_{n,m}.$$

Ахырынчы ифадәдән

$$J_{n,m}=-\frac{1}{m+n}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cos^{n}x\,dx \quad (5)$$

аларыг. (5) ифадәсинә аналожи оларак көстәрмәк олар ки,

$$J_{n,m}=\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx=\frac{1}{n+m}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+$$

$$+\frac{n-1}{n+m}\int\sin^{m}x\cos^{n-2}x\,dx, \quad (6)$$

бурада $m\neq-1$, $m+n\neq0$.

Гејд 1. m вә n мүсбәт там әдәдләр оларса (5) вә (6) дүстурларындан истифадә едилир.

$J_{m,n}=\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx$ интегралында $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $m,n\in N$ оларса, $t=\sin^2x$ əвәзләмәси мәгсәдәујғундур.

$$dt=2\sin x\cos x\,dx,\quad \sin^{m}x\cos^{n}x\,dx=\frac{1}{2}\sin^{m-1}x(1-\sin^2x)^{\frac{n-1}{2}}\times$$

$$\times2\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{\frac{m-2}{2}}dt$$

олдуғу үчүн

$$J_{n,m}=\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{\frac{m-1}{2}}dt=\frac{1}{2}J_{\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}}.$$

Ахырынчы интеграл биномиал диференсиалын интегралы олдуғу үчүн Чебышев теоремини тәтбиг етмәк лазымдыр.

Гејд 2. Интеграл алтындакы функсија синус вә ја косинусдан асылы олуб, чүт дәрәчәдәндирсә, јә'ни:

$$\int\sin^{2n}x\,dx,\quad \int\cos^{2n}x\,dx,\quad n\in N$$

оларса, $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$ вә $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$ дүстурлары васитәсилә интеграл алтындакы функсијанын дәрәчәсини азалтмаг олар.

Мисал 7. $J=\int\cos^4x\,dx=\int(\cos^2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos2x)^2dx=$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos2x+\cos^22x)dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos2x\,dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int(1+\cos4x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+\sin2x+\frac{1}{8}\sin4x\right)+C.\ ■$$

Чалышмалар:	Чаваблар:
1. $\int \sin^3 x dx$,	$-\cos x \quad \frac{\cos^3 x}{3}+C.$
2. $\int \cos^7 x dx$,	$\sin x - \sin^3 x - \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$
3. $\int \frac{dx}{\cos^{12} x}$,	$\operatorname{tg} x + \frac{5}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^5 x + \frac{10}{7}\operatorname{tg}^7 x +$ $+ \frac{5}{9}\operatorname{tg}^9 x + \frac{1}{11}\operatorname{tg}^{11} x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x}$,	$-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x - \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x +$ $+ \ln\lvert\operatorname{tg} x\rvert + C.$
5. $\int \frac{dx}{\sin^8 x \cdot \cos^4 x}$,	$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{ctg} x - \frac{10}{3}\operatorname{ctg}^3 x -$ $- \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + C.$
6. $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$,	$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C; \ a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left\lvert\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b^2-a^2}}\right\rvert + C, \\ b^2 > a^2. \end{cases}$
7. $\int \frac{\sin x dx}{(a + b\sin x)^2}$,	$\frac{a\cos x}{(b^2-a^2)(a+b\sin x)} + \frac{b}{b^2-a^2}\int\frac{dx}{a+b\sin x}.$
8. $\int \sin x\sqrt{1+m^2\sin^2 x}dx$,	$-\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+m^2\sin^2 x} -$ $-\frac{1+m^2}{2m}\arcsin\frac{m\cos x}{\sqrt{1+m^2}} + C.$
9. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)\cos x}$,	$\frac{1}{2(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\rvert + C.$
10. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos x}$,	$-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\lvert\sin x - \cos x\rvert + C.$

§ 4. ҺИПЕРБОЛИК ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Һиперболик вә тәрс һиперболик функсијалар

Тригонометрик функсијалара ујғун олараг алты һиперболик функсија мөвчуддур. Бу функсијалара e^x вә e^{-x} функсијаларынын хәтти комбинасијасы васитәсилә тә'риф верилир.

1. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (синус һиперболик).

2. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (косинус һиперболик).

3. $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (танкенс һиперболик).

4. $\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (котанкенс һиперболик).

5. $\operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ (секанс һиперболик).

6. $\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ (косеканс һиперболик).

Ујғун тәрс функсијалар ашағыдакылардыр.

$y = \operatorname{Arsh} x$ (ареасинус һиперболик), $y = \operatorname{Arch} x$ (ареакосинус һиперболик), $y = \operatorname{Arth} x$ (ареатанкенс һиперболик), $y = \operatorname{Arcth} x$ (ареакотанкенс һиперболик), $y = \operatorname{Arsch} x$ ареасеканс һиперболик), $y = \operatorname{Arcsch} x$ ареакосеканс һиперболик

Тригонометрик функсијалар үчүн олан дүстурлар, һиперболик функсијалар үчүн дә өз күчүндә галыр:

1. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

2. $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

3. $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$.

4. $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

5. $\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$,

6. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

7. $\operatorname{sch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x$.

8. $\operatorname{csch}^2 x = \operatorname{cth}^2 x - 1$.

9. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$.

10. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

11. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.

12. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}$.

13. $\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$, $\operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{2 \operatorname{th} x}$.

14. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

15. $\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$, $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$.

16. $\mathrm{th}\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}x-1}{\mathrm{ch}x+1}}$, $\mathrm{cth}\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}x+1}{\mathrm{ch}\,x-1}}$.

17. $\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y=\frac{1}{2}\,[\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}\,(x-y)]$.

18. $\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}y=\frac{1}{2}\,[\mathrm{sh}\,(x+y)+\mathrm{sh}\,(x-y)]$.

19. $\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y=\frac{1}{2}\,[\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)]$.

Һиперболик функсиjалары диференсиаллама дүстурлары ашағыдакы кимидир:

1. $(\mathrm{sh}x')=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$, $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$.

2. $(\mathrm{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$, $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$.

3. $(\mathrm{th}\,x)'=\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)'=\frac{\mathrm{ch}^2x\ \mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$, $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$.

4. $(\mathrm{cth}\,x)'=\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)'=\frac{\mathrm{sh}^2x-\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{sh}^2x}=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}=-\mathrm{csch}^2x$,

$(\mathrm{cth}\,x)'=-\mathrm{csch}^2x$.

5. $(\mathrm{sch}\,x)'=\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)'=-\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=-\mathrm{th}x\cdot\mathrm{sch}\,x$, $(\mathrm{sch}\,x)'=$

$=-\mathrm{th}\,x\cdot\mathrm{sch}\,x$.

6. $(\mathrm{csch}x)'=\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)'=-\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2x}=-\mathrm{cth}x\cdot\mathrm{csch}x$.

7. $y=\mathrm{Arsh}x$, $x=\mathrm{sh}y$, $1=\mathrm{ch}y\cdot y'$ бәрабәрлиjиндән $y'=\frac{1}{\mathrm{ch}y}=$

$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2y+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\mathrm{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Еjни гаjда илә

8. $(\mathrm{Arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

9. $(\mathrm{Arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

10. $(\mathrm{Arcth}x)'=-\frac{1}{1-x^2}$.

11. $(\mathrm{Arsch}x)'=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

12. $(\mathrm{Arcsch}\,x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Һиперболик вә тәрс һиперболик функсијаларын интегралланмасы.

Һиперболик функсијаларын чәдвәл интеграллары:

1. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

2. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C = \begin{cases} \operatorname{Arsh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, & a > 0; \\ \operatorname{Arch}\left(\frac{x}{a}\right) + C, & a < 0. \end{cases}$$

6. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + C, & |x| < a; \\ -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + C, & |x| > a. \end{cases}$$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg} e^x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1} + C.$

Инди исә һиперболик функсијалардан асылы расионал функсијаларын интегралыны һесаблајаг.

1°. $J = \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx, \qquad (1)$

(1) интегралыны һесабламаг үчүн

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = t \qquad (2)$$

әвәзләмәси апармаг кифајәтдир. (2)-дән

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2} \qquad (3)$$

вә

$$\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{\operatorname{sch} \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right) =$$

$$=\frac{1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{1-t^2}, \tag{5}$$

олар. (1)-дә (3), (4) вә (5)-и нәзәрә алсаг,

$$J=\int R(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1-t^2}=\int R^*(t)\,dt. \tag{6}$$

олдуғуну аларыг. (6)-да $R^*(t)$—расионал функсија олдуғу үчүн онун интегралыны асанлыгла һесаблаја биләрик.

2°. $J=\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ типли интегралы әвәзләмә васитәсилә ашағыдакы тип интеграллардан биринә кәтирмәк олур:

$$J_1=\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx, \tag{6_1}$$

$$J_2=\int R(x,\ \sqrt{x^2+a^2})\,dx, \tag{6_2}$$

$$J_3=\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx. \tag{6_3}$$

J_1, J_2 вә J_3 интегралларынын һәр биринда ујғун һиперболик функсија илә әвәзләмә апарсаг, бу интегралларын һәр бири расионал шәклә дүшәр.

Доғрудан да (6_1) интегралында $x=a\,\mathrm{th}\,t\ \left(dx=\frac{a\,dt}{\mathrm{ch}^2 t}\right)$ әвәзләмәси апарсаг,

$$J_1=\int R\left(a\,\mathrm{th}\,t,\ \frac{a}{\mathrm{ch}\,t}\right)\frac{a}{\mathrm{ch}^2 t}\,dt=\int R_1(e^t)\,dt.$$

Ејни гајда илә J_1 интегралыны һесабламаг үчүн $x=a\,\mathrm{sh}t(dx=a\,\mathrm{ch}t dt)$, J_3 интегралыны һесабламаг үчүн $x=a\,\mathrm{ch}t$ $(dx=a\,\mathrm{sh}t dt)$ әвәзләмәләрини апарсаг,

$$J_2=\int R(a\mathrm{sh}t,\ a\mathrm{ch}t)\,a\mathrm{ch}t dt=\int R_2(e^t)\,dt,$$

$$J_3=\int R(a\mathrm{ch}t,\ a\mathrm{sh}t)a\mathrm{sh}t)\,a\mathrm{sh}t dt=\int R_3(e^t)\,dt$$

интегралларыны алмыш оларыг ки, бунларын да һесабланмасы ашкардыр.

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\frac{\mathrm{th}^5 x}{\mathrm{sch}^4 x}dx$,	$\frac{1}{4\mathrm{sch}^4 x}-\frac{1}{\mathrm{sch}^2 x}-\ln\mathrm{sch}x+C$,
2. $\int\frac{\mathrm{ch}^3x-\mathrm{sh}^3x}{\mathrm{ch}^3x+\mathrm{sh}^3x}dx$,	$\frac{1}{3(1+\mathrm{th}x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{th}x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$,
3. $\int x\mathrm{cth}\,x dx$.	$x\mathrm{cth}x+\ln\mathrm{sh}x+\frac{x^2}{2}+C$,
4. $\int\mathrm{sh}\,\alpha x\cdot\mathrm{sh}\,\beta x dx$,	$\frac{\alpha\mathrm{ch}\alpha x\cdot\mathrm{sh}\beta x-\beta\mathrm{sh}\alpha x\cdot\mathrm{ch}\beta x}{\alpha^2+\beta^2}+C$,

5. $\int \frac{x+\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}dx$, $\qquad (x-1)(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2x+$
$+\operatorname{ch}2x)+C$

6. $\int \frac{dx}{e^{2x}\operatorname{ch}^4 x}$, $\qquad -\frac{1}{3e^{2x}\operatorname{ch}^3 x}+C.$

7. $\int \frac{e^x dx}{1-\operatorname{ch} x}$, $\qquad \frac{1+\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh} x}-x-\ln(1-\operatorname{ch}x)+C.$

8. $\int \operatorname{arcsh}(\operatorname{sh}x)\operatorname{ch}x dx$, $\qquad \operatorname{sh}x\arcsin(\operatorname{sh}x)+\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x}+C.$

9. $\int \operatorname{arcsh}x\cdot\operatorname{sh} x dx$, $\qquad \operatorname{ch}x\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-x+C.$

10. $\int\frac{dx}{(1+\operatorname{ch}x)^2}$, $\qquad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C.$

§ 5. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ӘМСАЛЛАР МЕТОДУ

Бу метод интегралалты функсијанын ибтидаи функсијасынын шәкли мә'лум олан һалларда тәтбиг едилә биләр.

1°.
$$J=\int e^{kx}P_n(x)\,dx, \qquad (1$$

бурада $P_n(x)$ функсијасы n дәрәчәли чохһәдлидир.

(1) интегралына һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$J=\int e^{kx}P_n(x)dx=\frac{1}{2}e^{kx}P_n(x)-\frac{1}{k}\int e^{kx}P_n'(x)dx \qquad (2)$$

аларыг. (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки интеграл (1) шәклиндәдир, лакин $P_n'(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси $P_n(x)$-ин дәрәчәсиндән бир ваһид кичикдир. Просеси n дәфә тәкрар етсәк

$$J=\frac{e^{kx}}{k}P_n(x)-\frac{e^{kx}}{k^2}P_n'(x)+\frac{e^{kx}}{k^3}P_n''(x)\pm\cdots\pm\frac{1}{k^n}\int e^{kx}P_n^{(n)}(x)dx$$

аларыг. $P_n^{(n)}(x)=\text{const}$ олдуғу үчүн, ахырынчы интеграл асанлыгла һесабланар. Беләликлә,

$$\int e^{kx}P_n(x)dx=Q_n(x)e^{kx}+C. \qquad (3)$$

Бурада $Q_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$, n дәрәчәли гејри-мүәјјән әмсаллы чохһәдлидир. Беләликлә, (1) интегралынын һесабланмасы $A_i\,(i=\overline{0,\ n})$ гејри-мүәјјән әмсалларынын һесабланмасына кәтирилир. (3) бәрабәрлијиндән төрәмә алсаг

$$e^{kx}P_n(x)=ke^{xk}Q_n(x)+e^{kx}Q_n'(x)$$

вә ја

$$P_n(x)=kQ_n(x)+Q_n'(x). \qquad (4)$$

(4) ејнилијиндә x-ин ујғун дәрәчәләринин әмсалларыны бәрабәр етмәклә A_0, $A_1,\ldots$, A_n-ләрә нәзәрән хәтти тәнликләр

системи алыныр вә бурадан гејри-мүәјјән әмсаллар јеканә олараг тә'јин едиләр.

2°. Интегралалты функсија $f(x)=P_n(x)\cos kx+Q_n(x)\sin kx$ шәклиндә оларса (бурада $P_n(x)$ вә $Q_n(x)$, n дәрәчәли чохһәдлиләрдир, онда бу функсијаларын ибтидаи функсијасы $F(x)= =S_n(x)\cos kx+T_n(x)\sin kx$ шәклиндә олар. Бурада $S_n(x)$ вә $T_n(x)$ гејри-мүәјјән әмсаллы n дәрәчәли чохһәдлиләрдир. Демәли,

$$\int[P_n(x)\cos kx+Q_n(x)\sin kx]dx=S_n(x)\cos kx+T_n(x)\sin kx. \quad (5)$$

$P_n(x)$ вә $Q_n(x)$ чохһәдлиләринин дәрәчәләри бәрабәр олмаса, сыфыр әмсаллар дахил етмәклә онларын дәрәчәләрини бәрабәрләшдирмәк олар. (5) бәрабәрлијиндән төрәмә алсаг

$$P_n(x)\cos kx+Q_n(x)\sin kx=S_n'(x)\cos kx+T_n'(x)\sin kx- \\ -kS_n(x)\sin kx+kT_n(x)\cos kx \quad (6)$$

олар. (6) ејнилијиндә ујғун әмсаллары бир-биринә бәрабәр етмәклә ахтарылан гејри-мүәјјән әмсаллар тапылар.

Беләликлә, $\int[P_n(x)\cos kx+Q_n(x)\sin kx]dx$ интегралынын һесабланмасы, $S_n(x)$ вә $T_n(x)$ чохһәдлиләринин гејри-мүәјјән әмсалларынын тапылмасына кәтирилир.

Мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J=\int(x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■. Јухарыда дејиләнләрә әсасән,

$$\int(x^3-2x^2+5)\,e^{3x}\,dx=(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0)e^{3x}+C.$$

Һәр тәрәфдән төрәмә алсаг,

$$x^3-2x^2+5=3A_3x^3+3x^2(A_2+A_3)+x(3A_1+2A_2)+(3A_0+A_1)$$

олар. Ујғун әмсаллары бәрабәрләшдирсәк,

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} 3A_3=1, \\ 3A_2+3A_3=-2, \\ 3A_1+2A_2=0, \\ 3A_0+A_1=5 \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

системини аларыг ки, бурадан $A_3=\frac{1}{3}$, $A_2=-1$, $A_1=\frac{2}{3}$, $A_0=\frac{13}{9}$ тапылар. Онда

$$\int(x^3-2x^3+5)e^{3x}dx=\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{x^2}{3}+2x+\frac{13}{3}\right)e^{3x}+C. \quad ■$$

Мисал 2. $J=\int(x^2+x+1)\sin x\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $J=(A_0+A_1x+A_2x^2)\sin x+(B_0+B_1x+B_2x^2)\cos x+C.$
Һәр тәрәфдән төрәмә алсаг

$$(x^2+x+1)\sin x=[(A_1-B_0)+(2A_2-B_1)x-B_2x^2]\sin x+$$
$$+[(A_0+B_1)+(A_1+2A_2)x+A^2x^2]\cos x.$$

Беләликлә,

$$\begin{cases} A_1-A_0=1, \\ 2A_2-B_1=1, \\ \quad -B_2=1, \\ A_0+B_1=0, \\ A_1+2A_2=0, \\ \quad A_2=0 \end{cases}$$

системини аларыг.

Бурадан да $A_2=0$, $B_2=-1$, $A_0=1$, $A_1=2$, $B_0=1$ олдуғу алыныр. Тапылан сабитләри јухарыда нәзәрә алсаг

$$\int(x^2+x+1)\sin x dx=(-x^2-x+1)\cos x+(2x+1)\sin x+C.$$ ■

Мисал 3. $J(x^2+3x+5)\cos 2x dx.$

■ $\int(x^2+3x+5)\cos 2x dx=(A_0x^2+A_1x+A_2)\cos 2x+$
$$+(B_0x^2+B_1x+B_2)\sin 2x+C.$$

Төрәмә алыб,

$$(x^2+3x+5)\cos 2x=2B_0x^2\cos 2x+x(2B_1+2A_0)\cos 2x+$$
$+(A_1+2B_2)\cos 2x-2A_0x\sin 2x+2(B_0-A_1)x\sin 2x+(B_1-$
$-2A_2)\sin 2x$, ујғун әмсаллары бирләшдирсәк,

$$\begin{cases} 2B_0=1; \\ 2(B_1+A_0)=3; \\ A_1+2B_2=6; \\ 2A_0=0; \\ 2(B_0-A_1)=0; \\ B_1-2A_2=0, \end{cases}$$

системи, бурадан исә $B_0=\frac{1}{2}$, $A_0=0$, $A_1=\frac{1}{2}$, $B_1=\frac{3}{2}$, $B_3=\frac{9}{4}$, $A_2=\frac{3}{4}$ тапылыр. Нәтичәдә

$$J=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C$$

олачагдыр. ■

Мисал 4. $J=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx,\ a_1b-ab_1\neq 0.$

■ $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$
вә ја

$$a_1\sin x+b_1\cos x=(Aa-Bb)\sin x+(Ab+Ba)\cos x$$

алынар. Ујғун әмсаллары бәрабәр етмәклә,

$$\begin{cases} Aa-Bb=a_1, \\ Ab+Ba=b_1 \end{cases}$$

системини аларыг. Бурадан A вә B әмсаллары тапылыр:

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, \quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}.$$

Беләликлә,

$$J=\int\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\cdot\frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx+\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\cdot x+\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=$$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{a^2+b^2}\cdot x+\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C. \blacksquare$$

Мисал 5. $J=\int\frac{(a\sin x+b\cos x)dx}{(a_1\sin x+b_1\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)}$, a_1b $-b_2a_1\neq0$ интегралыны һесабламалы.

$$\blacksquare \quad \frac{a\sin x+b\cos x}{(a_1\sin x+b_1\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)}=\frac{A}{(a_1\sin x+b_1\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)}$$

$$\times\frac{B}{(a_2\sin x+b_2\cos x)}.$$

Онда

$$a\sin x+b\cos x=(Aa_2+Ba_1)\sin x+(Ab_2+Bb_1)\cos x$$

олар вә

$$\begin{cases} Aa_2+Ba_1=a, \\ Ab_2+Bb_1=b \end{cases}$$

системини аларыг. Бу системи һәлл етсәк,

$$A=\frac{a_1b-ab_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad B=\frac{ab_2-a_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Беләликлә,

$$J=\frac{a_1b-ab_1}{a_1b_2-a_2b_1}\int\frac{dx}{a_1\sin x+b_1\cos x}+\frac{ab_2-a_2b}{a_1b_2-a_2b_1}\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x}.$$

Сонунчу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки интеграллар $=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ әвәзләмәси илә асанлыгла һесабланыр. $\blacksquare$

Мисал 6. $J=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $a\neq b$.

$$\blacksquare \quad \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{A\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{B\cos(x+b)}{\sin(x+b)},$$

бурада A вә B гејри-мүәјјән сабитләрдир. (7) ејнилијиндән

$$1=A\sin(x+b)\cos(x+b)+B\sin(x+a)\cos(x+b)$$

вә ја

$$1=\frac{A}{2}\left[\sin(b-a)+\sin(2x+a+b)\right]+$$
$$+\frac{B}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(2x+a+b)\right].$$

Ујғун әмсаллары бәрабәр етсәк,

$$\begin{cases}\Big(-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B,\ \sin(a-b)=1,\\ \Big(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\Big)\sin(2x+a+b)=0.\end{cases}$$

Бурадан $A+B=0$, $(B-A)\sin(a-b)=2$;

$$B=-A,\ A=-\frac{1}{\sin(a-b)},\quad B=\frac{1}{\sin(a-b)}$$

алынар, A вә B үчүн тапылмыш бу гијмәтләри (7)-дә нәзәрә алсаг,

$$J=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right]=\frac{1}{\sin(a-b)}[\ln|(x+b)|-$$
$$-\ln|\sin(x+a)||+C=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.\ ■$$

Мисал 7. $J=\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$, $\left(a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right)$ һесабламалы.

■ $J=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}$.

$$\frac{1}{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}=\frac{A\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{B\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}},\qquad(8)$$

бурада A вә B гејри-мүәјјән сабитләрдир. (8) ејнилијиндән:

$$1=A\cos\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}+B\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}=$$
$$=\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-a}{2}+\frac{x+a}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)-\cos\left(\frac{x-a}{2}+\frac{x+a}{2}\right)\right]$$

олар. Ујғун әмсаллары бәрабәрләшдирсәк,

$$\begin{cases}A+B=\cos a,\\ A-B=0\end{cases}$$

олдуғуну аларыг.

$A=B=\frac{1}{2\cos a}$ олдугу системдән асанлыгла тапылыр. Бу гијмәтләри (8)-дә јазсаг вә сонра dx-ә вуруб интегралласаг:

$$J=\frac{1}{\cos a}\left[\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\right]+C=$$

$$=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C. \quad ■$$

Мисал 8. $J=\int \operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+a)dx$, $(a\neq k\pi,\ k\in Z)$ интегралыны һесабламалы.

■ Интегралалты функсијада садә чевирмә апарсаг,

$$J=\int\left[\frac{\sin x\sin(x+a)+\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}-1\right]dx=$$

$$=-x+\int\frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$$

олар. Саг тәрәфдәки интегралы J_1 илә ишарә едиб ону һесаблајаг:

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{[\cos(x+a-x)+\cos(x+a+x)]+[\cos(x+a-x)-\cos(x+a+x)]}{\cos x\cos(x+a)}dx=$$

$$=\int\frac{\cos a dx}{\cos x\cos(x+a)}.$$

Инди исә саг тәрәфдәки

$J_2=\int\frac{dx}{\cos x\cos(x+a)}$ интегралыны һесаблајаг.

$$\frac{1}{\cos x\cos(x+a)}=\frac{A\sin x}{\cos x}+\frac{B\sin(x+a)}{\cos(x+a)}$$

(9) ејнилијиндән A вә B гејри-мүәјјән сабитләрини тапаг.

$$1=A\sin x\cos(x+a)+B\sin(x+a)\cos x=\frac{1}{2}A[(\sin(x-x-a)+$$

$$+\sin(x+x+a)]+\frac{B}{2}[\sin(x+a-x)+\sin(x+a+x)]$$

вә ја

$$(B-A)\sin a+(A+B)\sin(2x+a)=2.$$

Бурадан

$$B=-A,\ A=\frac{1}{\sin a},\quad B=-\frac{1}{\sin a}.$$

Бу гијмәтләри (9)-да јазсаг вә сонра dx-ә вуруб интегралласаг:

$$J_2=\frac{1}{\sin a}\left[\int\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}dx-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx\right]=\frac{1}{\sin a}\text{in}\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|+C.$$

Беләликлә, аларыг ки,

$$J=-x+\operatorname{ctg}a\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|+C. \quad ■$$

Мисал 9. $J=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}, \quad a^2+b^2\neq 0.$ (10)

■ $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x).$ (11)

(11)-дән асанлыгла тапырыг ки,

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, \quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+a^2}.$$

(11)-и (10)-да нәзәрә алсаг,

$$J=A\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx. \qquad (12)$$

(12) бәрабәрлијинин саг тәрәфиндәки икинчи интегралы һесабламаг үчүн $a\sin x+b\cos x=t$ әвәзләмәсини апараг. Онда

$$J_1=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+C.$$

Беләликлә,

$$J=A\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)}-$$

$$-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C.$$

Бурада

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right),$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad ■$$

Мисал 10. $J=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+d_1}{a\sin x+b\cos x+d}dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $a_1\sin x+b_1\cos x+d_1=A(a\sin x+b\cos x+d)+$
$+B(a\cos x-b\sin x)+D.$ (14)

(14) ејнилијини верилмиш интегралда нәзәрә алсаг

$$J=\int\frac{A(a\sin x+b\cos x+d)+B(a\cos x-b\sin x)+D}{a\sin x+b\cos x+d}dx=$$

$$=A\int\frac{a\sin x+b\cos x+d}{a\sin x+b\cos x+d}dx+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x+d}dx+$$

$$+D\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+d}=D\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+d}+$$

$$+Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+d|.$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},\quad D=d_1-Ad.$$

əмсаллары (14) ејнилијиндəн тапылыр. ■

Мисал 11. $J=\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+d_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$ (15)

интегралыны һесабламалы.

■ $a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+d_1\cos^2 x=(a\sin x+b\cos x)(A\cos x-$
$-B\sin x)+D(\sin^2 x-\cos^2 x).$ (16)

Ујғун əмсалары бəрабəр етмəклə,

$$\begin{cases} a_1=D-aB; \\ 2b_1=aA-bB; \\ d_1=Ab+D \end{cases}$$

системини аларыг. Бу системдəн

$$A=\frac{b(d_1-a_1)+2ab_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{a(d_1-a_1)-2bb_1}{a^2+b^2},\quad D=\frac{a_1b^2+a^2d_1-2abb_1}{a^2+b^2}$$

олдуғуну аларыг.

(16) ејнилијини (15) интегралында нəзəрə алсаг

$$J=A\sin x+B\cos x+D\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=$$
$$=A\sin x+B\cos x+\frac{D}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|+C,$$

бурада

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

§ 6. БƏ'ЗИ ХҮСУСИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

$$J=\int\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k}dx,\ k\in N,\ k>1,\ x\neq a. \qquad (1$$

$\varphi(x)$ исə $e^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$ $(\alpha\in R)$ функсијаларындан бириди

$u=\varphi(x)$, $dv=\frac{dx}{(x-a)^k}$ гəбул едиб, һиссə-һиссə инте

граллама дүстуруну тəтбиг етсəк,

$$\int\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k}dx=-\frac{\varphi(x)}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{\varphi'(x)}{(x-a)^{k-1}}dx$$

олар. Јенидəн

$$\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha e^{\alpha x},\ (\sin\alpha x)'=\alpha\cos\alpha x,\quad (\cos\alpha x)'=-\alpha\sin\alpha x$$

олдуғуну

$$\int\frac{\varphi'(x)}{(x-a)^{k-1}}dx \qquad (2$$

интегралында нəзəрə алсаг, јенə дə (1) типли интеграл алмы
оларыг. (2) интегралында, интегралалты функсијанын мəхр

чинин дәрәчәси бир әксик олар. Һиссә-һиссә интеграллама просесини ардычыл олараг k дәфә тәкрар етсәк

$$J_1=\int\frac{e^{\alpha x}}{(x-a)}dx,\quad J_2=\int\frac{\sin\alpha x}{x-a}\quad \text{вә}\quad J_3=\int\frac{\cos\alpha x}{x-a}dx \tag{3}$$

интегралларыны алмыш оларыг.

J_1 интегралында $a=0$, $e^{\alpha x}=z$ гәбул етсәк, $\alpha x=\ln z$ $\left(dx=\frac{dz}{\alpha z}\right)$, $x=\frac{1}{\alpha}\ln z$ олар. Онда

$$J_1=\int\frac{dz}{\ln z}. \tag{4}$$

Ејни гајда илә

$$J_2=\int\frac{\sin x}{x},\quad J_3=\int\frac{\cos x}{x}dx \tag{5}$$

олдуғуну аларыг.

J_1, J_2 вә J_3 интегралларыны елементар функсијалар васитәси илә ифадә етмәк мүмкүн дејил.

(4) вә (5) интегралларыны

$$\mathrm{Li}x=\int\frac{dx}{\ln x},\quad \mathrm{si}x=\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \mathrm{ci}x=\int\frac{\cos x}{x}dx$$

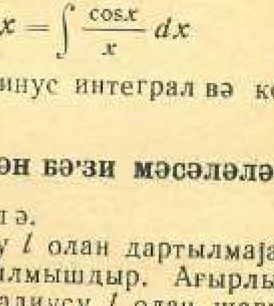
илә ишарә едиб, логарифма интеграл, синус интеграл вә косинус интеграл кими адландырырлар.

§ 7. ЕЛЛИПТИК ИНТЕГРАЛА КӘТИРИЛӘН БӘ'ЗИ МӘСӘЛӘЛӘР

1. Рәггасын рәгсинә аид мәсәлә.

m күтләли P мадди нөгтәси, узунлугу l олан дартылмајан вә күтләси нәзәрә алынмајан сапдан асылмышдыр. Ағырлыг гүввәсинин тә'сири алтында P нөгтәси радиусу l олан, шагули мүстәвидә јерләшән чеврә бојунча һәрәкәт едир. Рәггас башланғыч $t=0$ анында шагули вәзијјәтдән $\alpha<\frac{\pi}{2}$ бучағы алтында дәјишдикдә, рәггасын һәрәкәт ганунуну тә'јин етмәк тәләб олунур (рәггасын башланғыч сүр'әти сыфырдыр) (шәкил 4).

Рәггасын вәзијјәти $\varphi=\sphericalangle AOP$ бучағы илә тә'јин едилир. Рәггаса шагули истигамәтдә ашағы јөнәлмиш ағырлыг гүввәси вә сапын дартылма гүввәси тә'сир едир. Тутаг ки, мадди нөгтә чеврәнин PA гөвсү бојунча t мүддәтиндә s јолу кетмишдир. Ашкардыр ки, $s=l\varphi$ олар. Ағырлыг гүввәсинин компоненти олан тохунма гүввәси $PB=mg\sin\theta$ олур. Дикәр тәрәфдән Нјутонун икинчи ганунуна әсасән



Шәкил 4.

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -mg\sin\vartheta.$$

Бурада $s=l\theta$ олдуғуну нәзәрә алыб m-и ихтисар етсәк ријази рәггасын тәнлији адланан

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1}$$

тәнлији алыныр.

s гөвс узунлугу A-дан P-јә доғру артан олдуғундан вә ағырлыг гүввәсинин компоненти олан тохунма гүввәси бу истигамәтин әксинә олдугу үчүн ишарә мәнфи көтүрүлүр.

(1) тәнлијинин һәлли илә мәшғул олаг. Бу мәгсәдлә онун сол тәрәфини $\frac{d\theta}{dt}$-јә, саг тәрәфини исә $d\theta$-ја вурсаг

$$l\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}dt = -g\sin\theta\, d\theta \tag{1'}$$

олур. $\frac{d^2\theta}{dt^2}dt = d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ олдуғуну (1')-дә нәзәрә алсаг

$$l\frac{d\theta}{dt}d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -g\sin\theta d\theta \tag{2}$$

(2) бәрабәрлијиндән интегралласаг,

$$l\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\cos\theta + C \tag{3}$$

алынар.

C сабитини тә'јин етмәк үчүн, мәсәләнин шәртиндән истифадә едәк. Јә'ни $t=0$ гијмәтиндә бучаг сүр'әти $\frac{d\theta}{dt}=0$ олдугу үчүн $\theta=\alpha$ һесаб едилир. (3) ифадәсиндән

$$2g\cos\alpha \pm C=0$$

вә ја

$$C=-2g\cos\alpha.$$

C үчүн алынан бу гијмәти (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$l\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\theta-\cos\alpha) \tag{4}$$

олур. $\frac{g}{l}=h^2$ ишарә етсәк вә $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ олмасындан, $\cos\theta-\cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ алынар.

Бу фәрги (1)-дә нәзәрә алсаг

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4h^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

вә ја

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2h\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\,. \tag{5}$$

(5)-дән

$$dt = \frac{d\theta}{2h\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

асанлыгла алынар. Ахырынчы бәрабәрлији интегралласаг

$$t = \frac{1}{h}\int\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \qquad (6)$$

олар. Ахырынчы интегралы садәләшдирмәк үчүн

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi \qquad (7)$$

әвәзләмәси апараг. Бурада φ јени дәјишәндир. (7) ифадәсиндән диференсиал алсаг,

$$\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi$$

$$\frac{d\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}. \qquad (8)$$

(8) бәрабәрлијини (6)-да нәзәрә алсаг,

$$ht = \int\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \qquad (9)$$

алынар.

(7) бәрабәрлијиндән $\sin^2\frac{\theta}{2}$ гијмәтини (9)-да јазсаг

$$ht = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}$$

олар.

$\sin\frac{\alpha}{2} = k$, $(0 < k < 1)$ ишарә етсәк,

$$t = \frac{1}{h}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Сағ тәрәфдәки интеграл хүсуси әһәмијјәт кәсб едир.

§ 8. ЕЛЛИПТИК ИНТЕГРАЛЛАР

IV фәсилдә

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

интегралынын һесабланмасы илә мәшғул олмушуг.

Тәбии оларағ

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})\,dx, \tag{1}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\,dx \tag{2}$$

интегралларын һесабланмасы мәсәләси гаршыја чыхыр. Бу вә ја дикәр мәсәләләрин һәллиндә бу интеграллара тез-тез раст кәлинир.

(1) вә (2) интеграллары елементар функсијалар васитәсилә ифадә едилмирсә, бу интеграллара **еллиптик**, елементар функсијалар васитәси илә ифадә едилирсә, **псевдоеллиптик** интеграллар дејилир.

(1) вә (2) интегралларында иштирак едән чохһәдлиләрин әмсаллары һәгигидир вә тәкрар көкләри јохдур. Әкс һалда, хәтти һиссә көкдән чыха биләр, нәтичәдә интеграл бизә мә'лум олан тип интеграллара кәләр.

(1) вә (2) интегралларынын әһәмијјәтини нәзәрә алараг, бә'зән интегралалты функсија үчүн чәдвәл тәртиб етмәк лазым кәлир. Анчаг функсијада чохлу параметрин олмасы бу иши кифајәт гәдәр чәтинләшдирир. Бу чәтинлији арадан галдырмаг үчүн (1) вә (2) интегралларыны **каноник** шәклә салмаг лазым кәлир. Ону да гејд едәк ки, (1) интегралы, (2) интегралына асанлыгла кәтирилир. Доғрудан да, үч дәрәчәли чохһәдлинин һеч олмаса бир һәгиги көкү олдуғу үчүн (һәмин көкү x_0 илә ишарә едәк)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + px + q)$$

олар. $x - x_0 = \pm t^2$ әвәзләмәси апарсаг (1) интегралы (2) интегралы шәклинә дүшәр. Она көрә (2) интегралыны өјрәнмәк кифајәтдир.

Чәбрдән мә'лумдур ки, һәр бир (һәгиги әмсаллы) дөрд дәрәчәли чохһәдлини ики квадрат үчһәдлинин һасили шәклиндә јазмаг олар:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p_1x + q_1).$$

Һәмишә хәтти вә ја кәср хәтти әвәзләмә тапмаг олар ки, квадрат үчһәдлинин һәр бирини хәттиләшдирәр. Белә бир әвәзләмәдән сонра (2) интегралы

$$\int \frac{R(t^2)dt}{A(1 + mt^2)(1 + m_1t^2)} \tag{3}$$

шәклинә дүшәр. Даһа сонра әлавә әвәзләмәләр дахил етсәк (3) интегралы

$$\int \frac{R_1(z^2)dt}{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}, \quad (0 < k < 1), \tag{4}$$

бурада R — мүәјјән рационал функсијадыр. Сада елементар әвәзләмәләр васитәси илә (4) интегралы ашағыдакы үч шәклә кәтирилир.

$$1.\ \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2(1-k^2z^2)}},\quad 2.\ \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$3.\ \int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Үчүнчү интеграла h—комплекс әдәд ола биләр.

Ж. Лиувилл*) исбат етмишдир ки, бу интеграллар елементар функсијалар васитәсилә ифадә едилмир.

А. Лежандр** бу интеграллары ујғун олараг 1-чи, 2-чи вә 3-чү нөв еллиптик интеграл адландырмышдыр. Лежандр $z=\sin\varphi\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ әвәзләмәси васитәси илә бу интегралларын шәклини дәјишдирмишдир. Бунлардан биринчиси

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

интегралына, икинчиси

$$\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

(биринчи интеграла $\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ әлавә олунур) интегралына, нәһајәт үчүнчү интеграл көстәрилән әвәзләмә васитәсилә

$$\int\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\sqrt{1-h^2\sin^2\varphi}}$$

интегралына чеврилир.

Мәсәлә. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ еллипс гөвсүнүн узунлуғуну тапмалы.

Һәлли. Бу мәгсәдлә еллипсин

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi \\ y=b\cos\varphi \end{cases}$$

---

[*] Жозеф Лиувил (1809—1882) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр. 1836-чы илдә „Ријазијјат вә тәтбиги ријазијјат“ журналынын әсасыны гојмуш, ва бу журналда илк дәфә олараг Е. Галуанын елми нәтичәләрини чап етдирмишдр. Онун мүхтәлиф елм саһәләриндә санбаллы нәтичәләри вардыр. О илк дәфә көстәрмишдир ки, e әдәди $ae^2+be+c=0$ тәнлијинин көкү ола билмәз.

[**] Адријен Мари Лежандр (1752—1833) франсыз ријазијјатчысыдыр. Әсас елми нәтичәләри ријази анализә, әдәдләр нәзәријјәсинә вә с. аиддир. Ријази анализдә мүһүм әһәмијјәт кәсб едән Лежандр чохһәдлиси онун ады илә бағлыдыр. Илк дәфә олараг сада әдәдләрин пајланма ганунуну вермишдир.

параметрик тәнлијиндән истифадә едәчәјик. Мә'лумдур ки, дүзбучаглы координат системиндә истәнилән әјри гөвсүнүн диференсиалы

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \tag{5}$$

дүстуру илә тә'јин едилир. $dx=a\cos\varphi d\varphi$, $dy=-b\sin\varphi d\varphi$ бәрабәрликләрини (5)-дә нәзәрә алсаг

$$ds=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\sqrt{a^2(1-\sin^2\varphi)+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

Бурада $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ишарә етсәк (еллипсин ексентриситети),

$$ds=a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{6}$$

олдуғуну аларыг.

(6) бәрабәрлијини интегралласаг,

$$s=a\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

олар ки, буна да икинчи нөв еллиптик интеграл дејилик.

$$J=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{7}$$

биринчи нөв еллиптик интегралында $\sin\varphi=x$ илә әвәз етсәк

$$\cos\varphi d\varphi=dx,\quad d\varphi=\frac{dx}{\cos\varphi}=\frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Алынан бу ифадәләри (7)-дә нәзәрә алсаг,

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Беләликлә, биринчи нөв еллиптик интегралы алдыг.

II ҺИССӘ

МУӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

I ФӘСИЛ

РИМАН* ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. БӘ'ЗИ ТӘ'РИФЛӘР

$[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын тә'јин олундуғуну фәрз едәк вә бу парчаны ихтијары көтүрүлмүш:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$

нөгтәләри илә n сајда парчалара бөләк.

Тә'риф 1. *$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < \cdots < x_n = b$ шәртини өдәјән нөгтәләр вериләрсә, $[a, b]$ парчасында бөлкү верилмишдир вә символик олараг $\{x_k\}$ илә ишарә едилир.*

Тәриф 2. *$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ парчаларынын узунлуғуну ујғун олараг $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ нөгтәләриндә функсијанын гијмәтинә вуруб топласаг, алынан*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (1)$$

чәминә $f(x)$ функсијасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун интеграл чәми дејилир.

Гејд едәк ки, $[a, b]$-нин мүхтәлиф гајда илә парчалара бөлсәк вә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ ихтијари сечилсә, верилмиш $f(x)$ функсијасы үчүн $[a, b]$ парчасында истәнилән сајда интеграл чәмләри дүзәлтмәк олар.

Беләликлә, (1) интеграл чәми парчаларын бөлүнмә гајдасындан вә бу парчаларда $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ нөгтәләринин сечилмәсиндән асылыдыр.

$0 < x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ ишарә етсәк, (1) интеграл чәмини

---

* Георг Фридрих Бернһард Риман (1826—1836) алман ријазијјатчысыдыр.

1851-чи илдә Геттинкен университетиндә докторлуг дәрәчәси алмыш вә 1854-чү илдән өмрүнүн ахырына кими һәмин университетдә әввәлчә досент вә сонра профессор вәзифәсиндә ишләмишдир. Риман аз мүддәтдә бир сыра фундаментал әсәрләр јазмагла дүнјанын даһи ријазијјатчылары сәвијјәсинә јүксәлмишдир.

Риман өмрүнүн ахырынчы ајларыны Италијада јашамыш вә ағыр хәстәликдән сонра 40 јашында орада вәфат етмишдир.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (2)$$

әклиндә јазмаг олар.

Белә ки, $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ парчасына бә'зән хүсуси парча, $\in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәсинә исә аралыг нөгтә дејилир. $[x_{k-1}, x_k]$ $= \overline{1, n})$ хүсуси парчаларынын ән бөјүјүнүн узунлуғуну $= \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ илә ишарә едиб, она $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн диаметри ејәҹәјик.

Тә'риф 3. *Ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ арса ки, $\lambda < \delta$ олдугда, истәнилән $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ нөгтәләри үчүн $|J - \sigma| < \varepsilon$ олур, онда J әдәдинә $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн диаметри сыфра јахынлашдыгда (2) интеграл ҹәмләринин лимити дејилир вә*

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

шәклиндә јазылыр.

Тә'риф 4. *Верилмиш $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун интеграл ҹәминин $\lambda \to 0$ јахынлашдыгда лимити варса, бу функсија $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланан адланыр.*

J әдәдинә $f(x)$ функсијасынын Римана көрә мүәјјән интегралы дејилир вә белә ишарә едилир:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

(„интеграл a-дан b-јә еф икс де икс" кими охунур).

a вә b ујғун олараг ашағы вә јухары интеграллама сәрһәдләри адланыр. Бурада $[a, b]$ — интеграллама парчасы, $f(x)$ — интегралалты функсија, $f(x)\,dx$ — интегралалты ифадә вә x — интеграллама дәјишәни адланыр. Интеграл ҹәминин гурулмасына вә онун лимитинин һесабланмасына аид бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1. $f(x) = \cos x$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интеграл ҹәминин лимитини һесабламалы.

■ $[a, b]$ парчасыны ашағыдакы гајда илә n бәрабәр һиссәјә бөләк: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{b}{n}$, $x_2 = \frac{2b}{n}$, ..., $x_{k-1} = \frac{(k-1)\,b}{n}$, $x_k = \frac{kb}{n}$, ..., $x_{n-1} = \frac{(n-1)\,b}{n}$, $x_n = b$. Беләликлә, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ парчаларынын һәр биринин узунлуғу $x_k - x_{k-1} = \frac{kb}{n} - \frac{(k-1)\,b}{n} = \frac{b}{n}$ олар. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k =$

$=\overline{1, n}$) әвәзинә исә һәр бир парчанын сағ учуну, јә'ни $\xi_k = x_k$ нөгтәсини көтүрүб интеграл чәми дүзәлдәк. Онда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\cos x_k =$$

$$= \frac{b}{n}\left(\cos\frac{b}{n} + \cos\frac{2b}{n} + \ldots + \cos\frac{nb}{n}\right)$$

ифадәси $f(x)$ функсијасынын интеграл чәмидир. Бу чәмин лимитини һесаблајаг. Лимити һесабламаг үчүн сағ тәрәфдәки ифадәни $2\sin\frac{b}{2n}$ -ә вураг вә һәм дә бөләк. Онда

$$\sigma = \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b}{2n}}\left(2\cos\frac{b}{n}\cdot\sin\frac{b}{2n} + 2\cos\frac{2b}{n}\cdot\sin\frac{b}{2n} + \right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{3b}{n}\cdot\sin\frac{b}{2n} + \ldots + 2\cos\frac{nb}{n}\cdot\sin\frac{b}{2n}\right).$$

Сағ тәрәфдә иштирак едән һәр бир һәдди синусларын фәрги кими ифадә етсәк,

$$\sigma = \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b}{2n}}\left[\left(\sin\frac{3b}{n} - \sin\frac{b}{2n}\right) + \left(\sin\frac{5b}{2n} - \sin\frac{3b}{2n}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sin\frac{7b}{2n} - \sin\frac{5b}{2n}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{(2n+1)b}{2n} - \sin\frac{(2n-1)b}{2n}\right)\right] =$$

$$= \frac{b}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{b}{2n}}\left[\sin\frac{(2n+1)b}{2n} - \sin\frac{b}{2n}\right] =$$

$$= \frac{b}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{b}{2n}}\cdot\left[\sin\left(1 + \frac{1}{2n}\right)b - \sin\frac{b}{2n}\right]$$

олар. Лимитә кечәрәк

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sin\left(1 + \frac{1}{2n}\right)b = \sin b$$

вә $\lim\limits_{k\to\infty}\sin\frac{b}{2n} = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma = \sin b. \quad \blacksquare$$

Парчаларын һәр биринин узунлуғу $\frac{b}{n}$ олдуғундан $\lambda = \frac{b}{n}$ көтүрсәк, $n \to \infty$ олдугда $\lambda \to 0$.

Мисал 2. $f(x)=a^x$ $(a>0)$ функсијасынын [0, 1] парчасында интеграл ҹәминин лимитини һесаблајын.

■ [0, 1] парчасыны $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ $(k=\overline{0, n-1})$ кими n бәрабәр һиссәјә бөләк вә ξ_k әвәзинә һәр бир парчанын сол учундакы $\xi_k=x_k$ $(k=\overline{0, n-1})$ нөгтәсини көтүрүб интеграл ҹәмини дүзәлдәк. Онда

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k-1}-x_k);$$

$$x_{k-1}-x_k=\frac{1}{n};\quad \xi_k=x_k=\frac{k}{n};\quad f(\xi_k)=f(x_k)=a^{\frac{k}{n}}$$

олдуғундан

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\left(1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+\ldots+a^{\frac{n-1}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{a^{\frac{1}{n}}a^{\frac{n-1}{n}}-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{a-1}{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}.$$

Сонунҹу ифадә $f(x)=a^x$ функсијасынын [0, 1] парчасында интеграл ҹәмидир. Онун лимитини һесабламаг үчүн әввәлҹә мәхрәҹин лимитини һесаблајаг.

Бу мәгсәдлә $\frac{1}{n}=t$ илә әвәз етсәк ($n\to\infty$ олдугда $t\to 0$).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}$$

олар. Ахырынҹы лимити һесабламаг үчүн исә $a^t-1=y$ илә әвәз етсәк, $a^t=1+y$ вә

$$t\ln a=\ln(1+y);\quad t=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$$

алынар. $t\to 0$ олдугда, $y\to 0$. Беләликлә,

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\ln a=\ln a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=$$

$$=\ln a\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\right]=\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln a$$

олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a$ олур.

Онда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma=\frac{a-1}{\ln a}. \quad ■$$

Мисал 3. $f(x)=x^2$ функсиjасынын $[-1,\ 2]$ парчасында интеграл чәминин лимитини һесабламалы.

■ $[-1,\ 2]$ парчасыны $[x_{\kappa-1},\ x_\kappa]$, $(\kappa=1, 2, \dots, n)$ кими n бәрабәр һиссәjә бөләк, $\xi_\kappa\ (\kappa=\overline{1, n})$ әвәзинә исә һәр бир парчанын саг учундакы нөгтәни көтүрсәк вә

$$x_\kappa-x_{\kappa-1}=\frac{2-(-1)}{n}=\frac{3}{n};\ \xi_\kappa=x_\kappa=-1+\frac{3}{n}\kappa,\ (\kappa=\overline{1, n})$$

$$f(\xi_\kappa)=x_\kappa^2=\left(-1+\frac{3}{n}\kappa\right)^2$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\sigma=\sum_{\kappa=1}^{n}f(\xi_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1})=\sum_{\kappa=1}^{n}f(x_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1})=$$

$$=\frac{3}{n}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(-1+\frac{3}{n}\kappa\right)^2$$

вә jа

$$\sigma=\frac{3}{4}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(1-\frac{6}{n}\kappa+\frac{9}{n^2}\kappa^2\right)=$$

$$=\frac{3}{n}\left[n-\frac{6}{n}(1+2+\dots+n)\right]+\frac{9}{n^2}\left[(1^2+2^2+\dots+n^2)\right].$$

Даһа сонра,

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

олдугуну нәзәрә алсаг,

$$\sigma=\frac{3}{n}\left[n-\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

Сағ тәрәфи садәләшдириб лимитә кечсәк,

$$\sigma=3-9\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma=3$$

олдугуну аларыг. ■

(2) интеграл чәми һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем. ***(2) интеграл чәминин лимити варса, бу лимит јеканәдир.***

◀ Әксини фәрз едәк. Фәрз едәк ки, J_1 вә J_2, (2) интеграл чәминин мүхтәлиф лимитләридир. Мүәјјән олмаг үчүн $J_1 < J_2$ гәбул едиб, ε-ну ашағыдакы кими сечәк:

$$\varepsilon = \frac{J_2 - J_1}{2} > 0.$$

Фәрзијјәмизә көрә J_1 вә J_2 мүхтәлиф әдәдләр олуб, (2) интеграл чәминин лимитләридир. Онда лимитин тә'рифинә әсасән ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ әдәди вардыр ки, $\Delta x_k < \delta$ олдугда,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - J_1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - J_2 \right| < \varepsilon$$

вә ја

$$J_1 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < J_1 + \varepsilon \tag{3}$$

$$J_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = J_2 + \varepsilon. \tag{4}$$

$J_2 - J_1 = 2\varepsilon$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J_1 + \varepsilon = J_2 - \varepsilon \tag{5}$$

бәрабәрлијини аларыг.

(3), (4) вә (5)-дән

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < J_1 + \varepsilon = J_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

алынар. Ахырынчы бәрабәрсизликдән зиддијјәт алындығындан $J_1 = J_2$ олмалыдыр. ▶

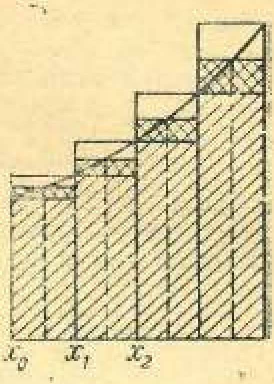
§ 2. ИНТЕГРАЛ ЧӘМИНИН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

интеграл чәми, отурачаглары $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ пар чалары вә һүндүрлүјү $f(\xi_k)$ $(\xi_k \in [x_{k-1}, x_k])$ олан дүзбучаглыларда ибарәт пилләвари фигурун саһәсини ифадә едир (шәкил 5

Римана көрә интеграллана билән ункси̇јаја мисал олараг $f(x) = C =$ $= \text{const}$ функсијасыны көстәрмәк лар. Бурада

$$\int_a^b C\,dx = C(b - a).$$



Шәкил 5

Доғрудан да $[a, b]$ парчасынын стәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү вә ихтијари ${}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси үчүн $f(\xi_k) = C$ лдуғундан верилмиш функсијанын нтеграл чәми

$$= C(x_1 - x_0) + C(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$- C(x_k - x_{k-1}) + \ldots + C(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= C(x_n - x_0) = C(b - a)$$

ә ја

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} C(b - a) = \int_a^b C dx.$$

(2) интеграл чәминдән көрүндүјү кими $f(x)$ функсијасыын $[a, b]$ парчасында интеграллана олмасы үчүн бу функијанын мәһдуд олмасы зәруридир. Башга сөзлә $[a, b]$ парасында мәһдуд олмајан функсија Римана көрә интеграллана ејил.

$[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсүнү көтүрәк. $f(x)$ ункси̇јасы $[a, b]$-дә мәһдуд олмадығындан онда һеч олмаса ир хүсуси парчада, мәсәлән $[x_{k-1}, x_k]$-да гејри-мәһдуд олаг. Јердә галан хүсуси чәмләрә дахил олан $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1},$ ${}_{+1}, \ldots, \xi_n$ нөгтәләрини ихтијари олараг сечәк вә

$$\sigma_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

лә ишарә едәк.

$f(x)$ функсијасы $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында гејри-мәһдуд олдуундан, истәнилән $M > 0$ әдәди үчүн елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгәси вар ки, $|f(\xi_k)| \geqslant \frac{|\sigma_1| + M}{\Delta x_k}$.

Ахырынчыдан $|f(\xi_k)|\, \Delta x_k \geqslant |\sigma_1| + M$ олар. Онда

$$\sigma = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \right| = |\sigma_1 + f(\xi_k)\, \Delta x_k| \geqslant$$
$$\geqslant |f(\xi_k)|\, \Delta x_k - |\sigma_1| \geqslant M.$$

Демәли, ихтијари $M > 0$ әдәди үчүн һәмишә елә бөлкү тапмаг олар ки, онун диаметри сыфра јахынлашдыгда буна ујғун интеграл чәми $|\sigma| > M$ олар. Лежан—Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал нөгтә олдугда}, \\ 0, & x \text{ иррасионал нөгтә олдугда} \end{cases}$$

функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд олмасына бахмајараг Римана көрә интегралланан дејил. Доғрудан да ξ_k әвәзинә расионал нөгтәләр көтүрсәк, буна ујғун интеграл чәми:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a,$$

иррасионал нөгтәләр көтүрсәк исә буна ујғун интеграл чәми

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\eta_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

олур.

Беләликлә, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ вә $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$-нын сечилмәси лә Дирихле функсијасынын интеграл чәми $\sigma(\xi) = b - a \neq 0$ ә $\sigma(\eta) = 0$ олур. Буна көрә дә Дирихле функсијасынын интеграл чәминин лимити јохдур.

§ 3. АШАҒЫ ВӘ ЈУХАРЫ ДАРБУ[1] ЧӘМЛӘРИ

$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд, $\{x_k\}$ исә һәмин парчанын истәнилән бөлкүсү олсун. Бу функсија парчада мәһдуд олдуғундан һәмин парчанын ихтијари $[x_{k-1}, x_k]$ һиссәсиндә дә мәһдуд олар. Одур ки, $f(x)$ функсијанын $[a, b]$ парчасынын һәр бир хүсуси $[x_{k-1}, x_k]$ һиссәсиндә ашағы m_k вә јухары M_k дәгиг сәрһәдләри вар.

Беләликлә,

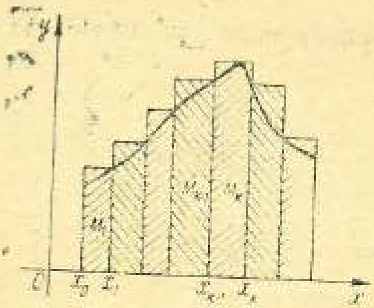
$$M_k = \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x); \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x).$$

Тә'риф 1. *$[a, b]$ парчасынын $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ $(k = \overline{1, n})$ һиссәләриндә функсијанын дәгиг ашағы вә дәгиг јухары сәрһәдләрини ујғун олараг һәмин парчаларын узунлугларына вуруб топладыгда алынан*

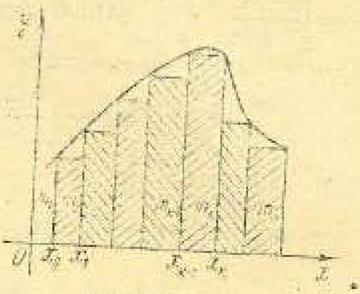
$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,$$

---

[1] Гастон Дарбу (1812—1917) франсыз ријазијјатчысыдыр. 1887—189 чы илләрдә сәтһләр нәзәријјәсинә аид 4 чилдлик фундаментал әсәр ја мышдыр.



Шәкил 6



Шәкил 7

$$S = \sum_{\kappa=1}^{n} M_\kappa (x_\kappa - x_{\kappa-1}) = \sum_{\kappa=1}^{n} M_\kappa \Delta x_\kappa$$

чәмләринә ашағы вә јухары Дарбу чәмләри дејилир.

Дарбу чәмләринин һәндәси мә'насы

Абсис оху үзәриндә көтүрүлмүш $[a, b]$ парчасы, һәмин парчада мәнфи олмајан кәсилмәз $y = f(x) \geqslant 0$ функсијасынын графики вә Ox охуна перпендикулјар $x = a$, $x = b$ дүз хәтләри илә әһатә олунмуш әјрихәтли трапесијаны нәзәрдән кечирәк.

Вејерштрас* теореминә көрә парчада кәсилмәз функсија өзүнүн ән бөјүк вә ән кичик гијмәтини алдығы үчүн, јухары Дарбу чәми, әјрихәтли трапесијаны дахилинә алан пилләвары фигурун саһәсинә (шәкил 6), ашағы Дарбу чәми исә әјрихәтли трапесијанын дахилиндә јерләшән пилләвары фигурун саһәсинә бәрабәрдир (шәкил 7).

Јухары вә ашағы Дарбу чәмләринин гурулмасына аид мисал.

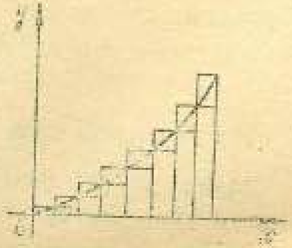
Мисал. [0, 1] парчасында тә'јин олунмуш $f(x) = x^2$ функсијасы үчүн ашағы вә јухары Дарбу чәмләрини гурмалы (шәкил 8).

■ [0, 1] парчасыны n бәрабәр һиссәјә бөләк. Парчалары ујғун олараг

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \Delta_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots,$$
$$\Delta_\kappa = \left[\frac{\kappa-1}{n}, \frac{\kappa}{n}\right], \ldots, \Delta_n = \left[\frac{n-1}{1}, 1\right]$$

илә ишарә едәк.

$f(x) = x^2$ функсијасы [0, 1] парчасында артан олдуғундан һәр бир



Шәкил 8

---

* Карл Вејерштрас (1815—1897) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

$\Delta_\kappa=\left[\frac{\kappa-1}{n},\ \frac{\kappa}{n}\right]$ парчасында функсијанын ән кичик вә ән бөјүк гијмәти ујғун олараг

$$m_\kappa=\left(\frac{\kappa-1}{n}\right)^2;\quad M_\kappa=\left(\frac{\kappa}{n}\right)^2$$

олар. Демәли,

$$m_1=0,\ m_2=\left(\frac{1}{n}\right)^2;\ m_3=\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ldots,\ m_\kappa=\left(\frac{\kappa-1}{n}\right)^2,\ldots,$$

$$m_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2;$$

$$M_1=\left(\frac{1}{n}\right)^2,\quad M_2=\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ldots,\quad M_\kappa=\left(\frac{\kappa}{n}\right)^2,\ldots,M_n=1=\left(\frac{n}{n}\right)^2;$$

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_\kappa=\ldots=\Delta x_n=\frac{1}{n}$$

олар. Онда

$$s=\sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa\Delta x_\kappa=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right].$$

Дикәр тәрәфдән $\sum_{\kappa=1}^{n}\kappa^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$s=\sum_{\kappa=1}^{n-1} m_\kappa\Delta x_\kappa=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

$$S=\sum_{\kappa=1}^{n} M_\kappa\Delta x_\kappa=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Бурадан

$$\lim_{n\to\infty} s=\lim_{n\to\infty} S=\frac{1}{3}.$$

Интеграл чәминин хассәси

Мәһдуд $f(x)$ функсијасы үчүн, $[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_\kappa\}$ бөлкүсүнә ујғун интеграл чәми, $\xi_\kappa\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa$ $(\kappa=\overline{1,n})$ нөгтәсинин сечилмәсиндән асылы олмајараг ашағ

Дарбу чәминдән кичик, јухары Дарбу чәминдән исә бөјүк дејилдир. Јә'ни,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

◀ Бурада s вә S, $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ашағы вә јухары Дарбу чәмләридир. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуддур. Демәли, истәнилән $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси үчүн

$$m_k < f(\xi_k) \leqslant M_k \tag{1}$$

олар. (1) бәрабәрсизлијини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ вуруб топласаг.

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S. \ ▶$$

Лемма 1. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә тә'јин едилмиш мәһдуд функсијадыр. $[a, b]$ парчасынын гејд олунмуш ихтијари $\{x_k\}$ бөлкүсү, $\varepsilon > 0$ исә ихтијари мүсбәт әдәд оларса, бу һал үчүн $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ аралыг нөгтәсини елә сечмәк мүмкүндүр ки, интеграл чәми илә јухары Дарбу чәми үчүн

$$0 \leqslant S - \sigma(\xi_k) < \varepsilon \tag{2}$$

вә $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ аралыг нөгтәсини елә сечмәк олар ки, интеграл чәми илә ашағы Дарбу чәми

$$0 < \sigma(\eta_k) - s < \varepsilon \tag{3}$$

бәрабәрсизлијини өдәјәр.

◀ Әввәлчә (2) бәрабәрсизлијини исбат едәк. Шәртә көрә $\{x_k\}$ гејд олунмуш ихтијари бөлкүдүр. Тә'рифә көрә

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x).$$

Ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(x = \overline{1, n})$ тапмаг олар ки,

$$0 \leqslant M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{4}$$

олсун.

(4) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) > 0$ вуруб топласаг

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

вә ја $0 \leqslant S - \sigma < \varepsilon$ алынар.

(3) бәрабәрсизлији аналожи исбат едилир.

Һәгигәтән, $\inf\limits_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)=m_k$ олдуғундан, истәнилән $\varepsilon>0$ көрә елә $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси тапмаг олар ки,

$$0\leqslant f(\eta_k)-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (5)$$

(5) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$ вуруб топласаг

$$0\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\,\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon$$

вә ја

$$0\leqslant\sigma-s<\varepsilon. ▶$$

§ 4. ДАРБУ ЧӘМЛӘРИНИН ХАССӘЛӘРИ

Хассә 1. Верилмиш бөлкүјә јени бөлкү нөгтәләри әлавә етдикдә ашағы Дарбу чәми азалмыр, јухары Дарбу чәми исә артмыр.

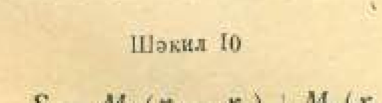
◀ $[a, b]$ парчасынын биринчи $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ашағы вә јухары Дарбу чәмләрини s_1 вә S_1 илә ишарә етсәк (шәкил 9),

Шәкил 9

$$s_1=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\\+\ldots+m_k(x_k-x_{k-1})+\\+m_n(x_n-x_{n-1}),$$

$$S_1=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+\\+M_k(x_k-x_{k-1})+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1})$$

олар. Верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсүнә јени бир $\widetilde{x}_k\in[x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси дахил етмәклә алынан $\{x_k'\}$ бөлкүсүнә ујғун Дарбу чәмләри



Шәкил 10

$$s_2=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\\+\cdots+\widetilde{m}_k(\widetilde{x}_k-x_{k-1})+\\+\widetilde{\widetilde{m}}_k(x_k-\widetilde{x}_k)+\ldots+\\+m_n(x_n-x_{n-1}),$$

$$S_2=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+\widetilde{M}_k(\widetilde{x}_k-x_{k-1})+\\+\widetilde{\widetilde{M}}^k(x_k-\widetilde{x}_k)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1}).$$

о (шәкил 10).

Беләликлә, s_1-ин $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ифадәсиндә $m_k \Delta x_k$ һәдди, s_2-нин $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ифадәсиндә $\widetilde{m}_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) + \widehat{m}_k(x_k - \widetilde{x}_k)$ ики һәддин ҹәми илә әвәз едилир.

Бурада $\inf\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant \widetilde{x}_k} f(x) = \widetilde{m}_k$; $\inf\limits_{\widetilde{x}_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) = \widetilde{\widetilde{m}}_k$ олдуғундан дәгиг ашағы сәрһәдин тә'рифинә көрә

$$m_k \leqslant \widetilde{m}_k, \tag{1}$$

$$m_k \leqslant \widetilde{\widetilde{m}}_k \tag{2}$$

олар. (1) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) > 0$, (2) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $(x_k - \widetilde{x}_k) > 0$ вуруб,

$$m_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) \leqslant \widetilde{m}_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1})$$

$$m_k(x_k - \widetilde{x}_k) \leqslant \widetilde{\widetilde{m}}_k(x_k - \widetilde{x}_k),$$

сонра топласаг,

$$\widetilde{m}_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) + \widetilde{\widetilde{m}}_k(x_k - \widetilde{x}_k) \geqslant m_k(x_k - x_{k-1})$$

олдуғу алынар. Бу ахырынҹы бәрабәрсизлик $s_1 \leqslant S_2$ олдуғуну көстәрир. Аналожи олараг јухары Дарбу ҹәминин анҹаг азалан олдуғуну көстәрмәк олар. Бу мәгсәдлә $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун јухары Дарбу ҹәмини S_1 вә $\{x_k'\}$ бөлкүсүнә ујғун јухары Дарбу ҹәмини S_2 илә ишарә едәк.

S_1 ифадәсиндә $M_k(x_k - x_{k-1})$ һәддинин әвәзинә S_2-дә $\widetilde{M}_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) + \widetilde{\widetilde{M}}_k(x_k - \widetilde{x}_k)$ ҹәми иштирак едир.

$$\sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) = \widetilde{M}_k; \quad \sup_{\widetilde{x}_k \leqslant x \leqslant x_k} f(x) = \widetilde{\widetilde{M}}_k$$

олдуғундан вә функсијанын $[a, b]$ парчасынын һиссәләриндә дәгиг јухары сәрһәдди бүтүн парчадакы дәгиг јухары сәрһәддини ашмадығыны нәзәрә алсаг

$$\widetilde{M}_k \leqslant M_k, \tag{3}$$

$$\widetilde{\widetilde{M}}_k \leqslant M_k \tag{4}$$

олар. (3) вә (4) бәрабәрсизликләрини ујғун олараг

$$(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) > 0 \text{ вә } (x_k - \widetilde{x}_k) > 0$$

бәрабәрсизликләринә вуруб топласаг,

$$\widetilde{M}_k(\widetilde{x}_k - x_{k-1}) + \widetilde{\widetilde{M}}(x_k - \widetilde{x}_k) \leqslant M_k(x_k - x_{k-1})$$

алынар. Бу исә $S_2 \leqslant S_1$ олдуғуну көстәрир. ▶

Хассә 2. $[a, b]$ парчасынын мүхтәлиф бөлкүсүнүн ашағы Дарбу чәми ихтијари бөлкүјә ујғун јухары Дарбу чәмләринин һеч бириндән бөјүк дејил.

◀ $[a, b]$ парчасынын ихтијары ики $\{x_k'\}$ вә $\{x_k''\}$ бөлкүсүнү көтүрәк.

$$a = x_0' < x_1' < \ldots < x_{k-1}' < x_k' < \ldots < x_{n-1}' < x_n' = b$$

бөлкүсүнә ујғун Дарбу чәмләрини s_1 вә S_1 илә, икинчи $a = x_0'' < x_1'' < \ldots < x_{k-1}'' < x_k'' < \ldots < x_{n-1}'' < x_n'' = b$ бөлкүсүнә ујғун Дарбу чәмләрини s_2 вә S_2 илә ишарә едәк.

Биринчи $\{x_k'\}$ вә икинчи $\{x_k''\}$ бөлкүләрини бирләшдириб үчүнчү $\{x_k\}$ бөлкүсүнү алаг. Ахырынчы бөлкүјә ујғун Дарбу чәмләрини s_3 вә S_3 илә ишарә едәк. Биринчи хассәјә әсасән

$$s_1 \leqslant S_3; \quad S_3 \leqslant S_2 \tag{5}$$

вә Дарбу чәмләринин тә'рифинә көрә

$$s_3 \leqslant S_3$$

олар. (5) вә (6) бәрабәрсизликләриндән:

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2.$$

Аналожи олараг $s_2 \leqslant S_1$. ▶

Нәтичә. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәһдуд $f(x)$ функсијасы үчүн ашағы вә јухары Дарбу чәмләри чохлуғу дүзәлтмәк олар. Икинчи хассәјә көрә ашағы Дарбу чәмләри чохлуғу јухарыдан (мәсәлән, истәнилән јухары Дарбу чәминдән бөјүк дејил) вә јухары Дарбу чәмләри чохлуғу исә ашағыдан (мәсәлән, истәнилән ашағы Дарбу чәминдән кичик дејил) мәһдуддур. Демәли, $[a, b]$ парчасынын ихтијари бөлкүләринә ујғун, верилмиш функсијанын јухары Дарбу чәмләри чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәди вә ашағы Дарбу чәмләри чохлуғунун исә дәгиг јухары сәрһәди вардыр.

Тә'риф 1. *$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында мүмкүн олан бүтүн бөлкүләринә ујғун $\{S\}$ јухары Дарбу чәмләри чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәдинә $f(x)$ функсијасынын јухары Дарбу интегралы, һәмин функсијанын $\{s\}$ ашағы Дарбу чәмләри чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдинә исә функсијанын ашағы Дарбу интегралы дејилир вә ујғун олараг: $\overline{J} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (јухары Дарбу интегралы) вә $\underline{J} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (ашағы Дарбу интегралы) кими ишарә едилир.*

Лемма 2. Ашағы Дарбу интегралы јухары Дарбу интегралыны ашмыр:

$$\underline{J} \leqslant \overline{J}.$$

◀ Әксини фәрз едәк. Јә'ни $\underline{J} > \overline{J}$ олсун. Белә олдугда, $\underline{J} - \overline{J} = \varepsilon > 0$ олар. Дикәр тәрәфдән јухары Дарбу интегралынын тә'рифинә көрә $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k'\}$ бөлкүсү вар ки, буна ујғун јухары Дарбу чәми үчүн

$$S' < \overline{J} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Аналожи олараг $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k''\}$ бөлкүсүнү көстәрмәк олар ки, буна ујғун ашағы Дарбу чәми ашағыдакы бәрабәрсизлији өдәјир, јә'ни

$$s'' > \underline{J} - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

(7) вә (8) бәрабәрсизликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$S' - s'' < \overline{J} + \varepsilon \quad \text{вә} \quad \overline{J} - \underline{J} = -\varepsilon$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, $S' - s'' < 0$ вә ја $s'' > S'$ алынар. Бу исә Дарбу чәмләринин икинчи хассәсинә аиддир. Демәли, $\underline{J} \leqslant \overline{J}$ олар. ▶

$[a, b]$ парчасынын ихтијары бөлкүсү $\{x_k\}$ вә бу бөлкүнүн диаметри λ олсун. $\{x_k\}$ бөлкүсүнә l сајда ихтијари јени нөгтә дахил едилдикдән сонра алынан бөлкүнү $\{x_k'\}$ илә ишарә едәк. S вә s чәмләри $\{x_k\}$ бөлкүсүнә, S_1 вә s_1 исә $\{x_k'\}$ бөлкүсүнә ујғун Дарбу чәмләридирсә, онда ашағыдакы лемма доғрудур.

Лемма 3. $S - S_1$ вә $s_1 - s$ фәргләри үчүн

$$S - s_1 \leqslant (M - m)\, l\lambda, \quad s_1 - s \leqslant (M - m)\, l\lambda$$

бәрабәрсизликләри доғрудур. Бурада

$$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x); \quad m = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Үмумилији позмадан $\{x_k\}$ бөлкүсүнә јеканә јени $\widetilde{x}$ нөгтәсини дахил едиб,

$$S - S_1 \leqslant (M - m)\lambda$$

вә

$$s_1 - s \leqslant (M - m)\lambda, \quad (l = 1)$$

бәрабәрсизликләринин доғру олдуғуну исбат едәк.

$\widetilde{x} \in [x_{k-1}, x_k]$ олсун. Бу һалда $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун јухары S Дарбу чәминдә иштирак едән һәдләрдән анчаг бир

$M_k\Delta x_k$ һәдди, $\{x_k'\}$ бөлкүсүнә ујғун S_1 Дарбу чәминин ики $M_k'(\tilde{x}-x_{k-1})$, $M''(x_k-\tilde{x})$ һәдләри чәми илә әвәз едилир. (Бурада M_k, M_k', M_k'', m_k, m_k', m_k'', $f(x)$ функсијасынын ујғун олараг $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, \tilde{x}]$, $[\tilde{x}, x_k]$ парчаларында дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләридир.) S вә S_1 чәмләринин галан бүтүн һәдләри ејнидир. Демәли,

$$S-S_1=M_k\Delta x_k-[M_k'(\tilde{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\tilde{x})]$$

олар. Дәгиг сәрһәдин хассәләринә әсасән,

$$M_k\leqslant M;\ m\leqslant m_k',\ m_k\leqslant M_k''.$$

Бунлары нәзәрә алсаг,

$$S-S_1\leqslant M_k\Delta x_k-m[(\tilde{x}-x_{k-1})+(x_k-\tilde{x}_k)]=$$
$$=(M-m)\Delta x_k\leqslant(M-m)\lambda$$

алынар. Аналожи олараг ашағы Дарбу чәмләринин фәрги үчүн дә $s_1-s\leqslant(M-m)\lambda$ олдуғуну көстәрмәк олар. Доғрудан да $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ашағы Дарбу чәминин, јә'ни s-ин бир $m_k\Delta x_k$ һәдди, $\{x_k'\}$ бөлкүсүнә ујғун s_1 Дарбу чәминдә ики һәддин чәми $m_k'(\tilde{x}-x_{k-1})+m_k''(x_k-\tilde{x})$ илә әвәз едилир. Бу чәмләрин галан һәдләринин һамысы ејни олдуғундан

$$s_1-s\leqslant m_k'(\tilde{x}-x_{k-1})+m_k''(x_k-\tilde{x})-m_k\Delta x_k$$

олар.

$$m_k'\leqslant m_k\leqslant M,\quad m_k''\leqslant M_k\leqslant M$$

вә $m\leqslant m_k$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S_1-S\leqslant M[(\tilde{x}-x_{k-1})+(x_k-\tilde{x})]-m\Delta x_k=$$
$$=(M-m)\Delta x_k\leqslant(M-m)\lambda.\ \blacktriangleright$$

Тә'риф 2. *$\forall\varepsilon>0$ көрә елә $\delta>0$ тапмаг мүмкүндүрсә ки, $\lambda<\delta$ олдугда $|S-A|<\varepsilon$ оларса, A әдәдинә јухары Дарбу чәмләринин лимити дејилир, вә $\lim\limits_{\lambda\to0}S=A$ кими јазылыр.*

Ашағы Дарбу чәмләринин лимитинин дә тә'рифи аналожи олараг верилир. Белә ки ихтијари $\varepsilon>0$ көрә елә $\delta>0$ тапмаг мүмкүндүрсә ки, $\lambda<\delta$ олдугда $|S-B|<\varepsilon$ оларса, B әдәдинә ашағы Дарбу чәмләринин лимити дејилир вә $\lim\limits_{\lambda\to0}s=B$ јазылыр.

Дарбу леммасы. Јухары Дарбу чәминин лимити (бөлкүнүн диаметри $\lambda\to0$ олдугда) јухары Дарбу интегралына вә ашағы Дарбу чәминин лимити ашағы Дарбу интегралына бәрабәрдир.

$$\lim_{\lambda\to0} S = \overline{J}, \quad \lim_{\lambda\to0} s = \underline{J}.$$

◀ Әввәлчә лемманын биринчи һиссәсини исбат едәк.

Хүсуси һалда $f(x) = C = \text{const}$ оларса, истәнилән бөлкү үчүн $S = C(b-a) = \overline{J}$ вә демәли, $\lim\limits_{\lambda\to0} S = \overline{J}$ олур. $f(x)$ функсијасы сабит олмајан һал үчүн,

$$M = \sup_{x\in[a,\,b]} f(x) > m = \inf_{x\in[a,\,b]} f(x).$$

Јухары Дарбу интегралынын тә'рифинә әсасән истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\{\overline{x_k}\}$ бөлкүсү вар ки, буна ујғун јухары Дарбу чәми

$$\overline{\varepsilon} - J < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

шәртини өдәјир.

$[a, b]$ парчасынын уч нөгтәләри илә үст-үстә дүшмәјән бөлкү нөгтәләринин сајыны l илә ишарә едәк.

Фәрз едәк ки, $\{x_k\}$ бөлкүсү, диаметри

$$\lambda < \delta = \frac{\varepsilon}{2l(M-m)}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари бөлкүдүр вә S онун јухары Дарбу чәмидир.

$\{x_k\}$ бөлкүсүнә, јени l сајда нөгтәләр әлавә етмәклә алынан бөлкүнү $\{x_k'\}$ илә ишарә едәк.

Лемма 3-ә көрә бу бөлкүнүн јухары S' Дарбу чәми

$$0 \leqslant S - S' \leqslant (M-m)\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

шәртини өдәјир.

Дикәр тәрәфдән $\{x_k'\}$ бөлкүсүнү, башга јолла да алмаг олар. Бунун үчүн $\{\overline{x_k}\}$ бөлкүсүнә $\{x_k'\}$ бөлкүсүнүн $[a, b]$ парчасынын уч нөгтәләри илә үст-үстә дүшмәјән нөгтәләрини әлавә етмәк кифајәтдир. Одур ки, $\overline{J}$-нин тә'рифинә вә Дарбу чәмләринин биринчи хассәсинә әсасән:

$$\overline{J} \leqslant S' \leqslant \overline{S} \text{ вә ја } 0 \leqslant S' - \overline{J} \leqslant \overline{S} - \overline{J} \tag{11}$$

(9) бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг, ахырынчы (11) бәрабәрсизлији

$$0 \leqslant S' - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

олар. (12) вә (11)-дән

$$S' - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2}, \; S - S' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сонунчу бәрабәрсизликләри тәрәф-тәрәфә топласаг, $S - \overline{J} < \varepsilon$ алынар. Демәли, $\lim\limits_{\lambda \to 0} S = \overline{J}$ олар. ▶

Ашағы Дарбу чәми үчүн $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \underline{J}$ олдуғу аналожи олараг исбат едилир.

Теорем 1. ***$[a, b]$ парчасында мәһдуд $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада интегралланан олмасы үчүн $\underline{J} = \overline{J}$ олмасы зәрури вә һәм дә кафидир.***

◀ Шәрт зәруридир. $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын Римана көрә интегралланан олдуғуну фәрз едәк. Белә олан һалда бу функсијанын интеграл чәминин ($\lambda \to 0$) сонлу лимити вар. Интеграл чәминин лимитинин тә'рифинә көрә елә $\delta > 0$ вар ки, $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн истәнилән дахили ξ_k нөгтәси үчүн $\lambda < \delta$ олдугда $|J - \sigma(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Лемма 1-ә әсасән верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсүндә $\xi_k', \xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәләрини елә сечмәк олар ки,

$$S - \sigma(\xi_k'') < \frac{\varepsilon}{4} \text{ вә } \sigma(\xi_k'') - s < \frac{\varepsilon}{4} \tag{13}$$

өдәниләр. Дикәр тәрәфдән верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн ејни заманда

$$|J - \sigma(\xi_k')| < \frac{\varepsilon}{4}; \quad |J - \sigma(\xi_k'')| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{14}$$

бәрабәрсизликләри дә өдәнилир.

$$S - s = [S - \sigma(\xi_k')] + [\sigma(\xi_k') - J] + [J - \sigma(\xi_k'')] + [\sigma(\xi_k'') - s]$$

ејнилијинә бахаг.

Чәмин модулу модулларын чәминдән бөјүк дејилдир. Онда (13), (14) бәрабәрсизликләрини нәзәрә алсаг,

$$S - s < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \tag{15}$$

Дикәр тәрәфдән истәнилән бөлкү үчүн

$$s \leqslant \underline{J} \leqslant \overline{J} \leqslant S \tag{16}$$

олдуғундан, (15) бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг,

$$0 \leqslant \overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$$

олар. ε ихтијари олдуғундан, $\underline{J} = \overline{J}$.

Шәрт кафидир. Јә'ни

$$\underline{J} = \overline{J} = A \tag{17}$$

оларса,

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланан олмасыны көстәрмәк лазымдыр. Бурада $\overline{J} = \lim\limits_{\lambda \to 0} S$, $\underline{J} = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$ олдуғундан, (16) бәрабәрсизлијиндән вә (17) бәрабәрлијиндән ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, истәнилән $\lambda < \delta$ шәртини өдәјән бөлкү үчүн

$$\underline{J} - s = A - s < \varepsilon; \quad S - \overline{J} = S - A < \varepsilon, \tag{18}$$

олар.

Интеграл чәминин

$$s \leqslant \sigma(\xi_k) \leqslant S$$

хассәсини (18)-дә нәзәрә алсаг,

$$A - \varepsilon < s \leqslant \sigma(\xi_k) \leqslant A + \varepsilon$$

вә ја

$$|A - \sigma(\xi_k)| < \varepsilon.$$

Сонунчу бәрабәрсизлик $\lambda < \delta$ шәртини өдәјән истәнилән бөлкү үчүн доғрудур. Ахырынчыдан $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ алынар. Бу исә функсијанын интегралланан олдуғуну көстәрир. ▶

Теорем 2. (Әсас теорем) ***$[a, b]$ парчасында мәһдуд $f(x)$ функсијасынын интегралланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн олмасыдыр ки, $S - s < \varepsilon$ шәрти өдәнилсин.***

▶ Шәрт зәруридир. Јә'ни $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интегралланан олмасы верилир. Бундан әvvәлки теоремдә көстәрдик ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланан олдуғда ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\lambda < \delta$ шәртини өдәјән, истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн $S - s' < \varepsilon$ өдәнилир.

Шәрт кафидир. Истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, $S - s < \varepsilon$ олар. Көстәрәк ки, функсија һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр. (16) бәрабәрсизлијиндән

$$s \leqslant \underline{J} \leqslant \overline{J} \leqslant S$$

вә ахырынчы бәрабәрсизликдә $S - s < \varepsilon$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$$

олар, ε ихтијари олдуғундан $\overline{J} = \underline{J}$ алыныр, бу исә бундан габагкы теоремә әсасән функсијанын интегралланан олмасыны көстәрир. ▶

Теорем 1. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсија һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр.*

◀ $[a, b]$ парчасыны n сајда $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=\overline{1, n})$ кими парчалара бөләк. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә кәсилмәздир. Демәли, һәмин функсија бу кичик парчаларын һәр бириндә дә кәсилмәз олар. Дикәр тәрәфдән Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән $f(x)$ функсијасы кичик парчаларда да өзүнүн ән кичик вә ән бөјүк гијмәтләрини алыр. Бу гијмәтләри ујғун олараг m_k вә M_k $(k=\overline{1, n})$ илә ишарә етсәк,

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$$

олар. $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында елә $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәләри вар ки, $f(\xi'_k)=M_k$; $f(\xi''_k)=m_k$ олар. Бу гијмәтләри нәзәрә алсаг,

$$S-s=\sum_{k-1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}[f(\xi'_k)-f(\xi''_k)](x_k-x_{k-1}) \tag{1}$$

олар. Функсија кәсилмәз олдуғундан һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәздир.

Јә'ни ихтијари $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ вардыр ки, $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=\overline{1, n})$ парчасындан көтүрүлмүш ихтијари $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәләри үчүн $[\xi_k-\xi''_k]<\delta$ олдугда

$$|f(\xi'_k)-f(\xi''_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

өдәниләр. Әкәр $\{x_k\}$ бөлкүсүнү елә сечсәк ки, $\lambda<\delta$ олсун, онда (1)-дән

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})$$

вә ја

$$S-s<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

олар. Бу исә $f(x)$ функсијасынын Римана көрә интегралланан олдуғуну көстәрир. ▶

Теорем 2. *$[a, b]$ парчасында монотон функсија һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр.*

◀ $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында азалмајан олан һала бахаг. $f(x) \equiv \text{const}$ олдугда теорем ашкардыр. Одур ки, $f(b) > f(a)$ фәрз едәчәјик. $\varepsilon > 0$ ихтијари мүсбәт әдәд олсун.

$[a, b]$ парчасыны, диаметри λ олан $\{x_k\}$ бөлкүсү илә n һиссәјә бөләк вә $\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ гәбул едәк.

$$S - s = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

фәргини гијмәтләндирәк. Бурада M_k вә m_k, $f(x)$ функсијасынын $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ парчасында ујғун олараг дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләридир. (2)-дән

$$S - s < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k - m_k}{f(b) - f(a)}. \qquad (3)$$

Азалмајан функсија үчүн

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = f(b) - f(a) \qquad (4)$$

олар (бурада $M_k = m_{k+1}$ $(k = \overline{1, n})$, $M_n = f(b)$, $m_1 = f(a)$). (4) вә (3)-дән $S - s < \varepsilon$ алынар. Демәли, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланандыр. ▶

Теорем 3. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмиш мәһдуд функсија оларса вә истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн бу функсијанын бүтүн кәсилмә нөгтәләрини өртән вә узунлугларынын үмуми чәми ε-дан кичик олан сонлу сајда интерваллар көстәрмәк мүмкүндүрсә, онда $f(x)$ функсијасы һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр.***

◀ $[a, b]$ парчасында функсијанын дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләрини ујғун олараг M вә m илә ишарә едәк. Бурада ики һала бахаг:

1) $f(x) = M = m = \text{const}$. Бу һал үчүн $f(x)$ функсијасынын интегралланан олдуғуну көрдүк.

2) $M > m$ олан һала бахаг. $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олсун. $f(x)$ функсијасынын кәсилмә нөгтәләрини, узунлуглары чәми $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ әдәдини ашмајан сонлу сајда интервалларла өртәк. $[a, b]$ парчасынын бу интерваллара дахил олмајан нөгтәләри сонлу сајда кәсишмәјән парчалар чохлуғуну тәшкил едир. Бунлара әлавә парчалар дејәк. Әлавә парчаларын һәр бириндә $f(x)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан Кантор теореминә әсасән, һәмин парчаларда мүнтәзәм кәсилмәз олар.

Јә'ни ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $\delta_i > 0$ тапмаг олар ки, i-чи парчаја дахил олан истәнилән ξ', ξ'' нөгтәләри үчүн $|\xi' - \xi''| < \delta_i$ олдугда $|f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ олур. $\delta = \min\limits_i \delta_i$ олсун. Әлавә парчалары елә бөлкү илә хүсуси һиссәләрә бөләк ки, бунларын һәр биринин узунлуғу δ-дан бөјүк олмасын, онда $к$-чы хүсуси парчада $f(x)$ функсијасынын дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләри фәрги $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-дан бөјүк олмаз.

Әлавә парчалары вә бу парчаларын учлары илә бирләшән јухарыда сөјләдијимиз сонлу сајда интервалларын бүтүн бөлкүләрини бирләшдирсәк, $[a, b]$ парчасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнү аларыг. $[a, b]$ парчасынын үмуми $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k = \Sigma' (M_k - m_k)\,\Delta x_k + \\ + \Sigma'' (M_k - m_k)\,\Delta x_k \qquad (5)$$

алынар. (5) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки биринчи чәм кәсилмә нөгтәләрини өртән интервалларын бөлкүсүнә ујғун чәмдир. Икинчиси исә јердә галан бүтүн һиссәләрин бөлкүсүнә ујғун чәмдир.

Истәнилән $к$ үчүн $M_k - m_k \leqslant M - m$ олдуғундан,

$$\Sigma' (M_k - m_k)\,\Delta x_k \leqslant (M - m)\Sigma' \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f(x)$ функсијасы әлавә парчаларда мүнтәзәм кәсилмәз олдуғундан,

$$\Sigma'' (M_k - m_k)\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Беләликлә, елә $\{x_k\}$ бөлкүсү көстәрдик ки, бунун үчүн $S - s < \varepsilon$ олур.

Демәли, $f(x)$ интегралланандыр. ▶

Нәтичә 1. $[a, b]$ парчасында мәһдуд вә һәмин парчада сонлу сајда кәсилмә нөгтәләри олан $f(x)$ функсијасы һәмин парчада интегралланандыр. Хүсуси һалда $[a, b]$-дә һиссә-һиссә кәсилмәз функсија һәмин парчада интегралланандыр. Һәгигәтән, бундан габагкы теоремин шәртинә көрә, кәсилмә нөгтәләрини өртән бәрабәр узунлуглу вә боју $\frac{\varepsilon}{2p}$-дән бөјүк олмајан интервалларын сечилмәси кифајәтдир. Бурада p кәсилмә нөгтәләринин сајыдыр.

Гејд 1. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса вә $\varphi(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын сонлу сајда нөгтәләриндән башга һәр јердә $f(x)$ илә үст-үстә дүшәрсә, о һалда $\varphi(x)$ дә $[a, b]$ парчасында интегралланандыр вә

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорем 4. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, M вә m, $f(x)$ функсијасынын дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләридирсә вә $\varphi(x)$ функсијасы $[m, M]$ парчасында тә'јин олунмагла***

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2|$$

Липшис шәртини өдәјирсә, о һалда $g(x) = \varphi[f(x)]$ мүрәккәб функсијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланар.

◀ Бурада $\forall x_1, x_2 \in [m, M]$ парчасындан көтүрүлмүш истәнилән әдәд, L исә мүсбәт әдәддир. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Бу һалда $\varepsilon > 0$ үчүн $[a, b]$-нин елә $\{x_к\}$ бөлкүсүнү тапмаг олар ки, $S - s < \frac{\varepsilon}{L}$ олар. $\{x_к\}$ бөлкүсүнә ујғун, $[x_{к-1}, x_к]$ $(к = \overline{1, n})$ хүсуси парчаларында $f(x)$ функсијасынын дәгиг ашағы вә јухары сәрһәдләри $M^*_к$, $m^*_к$ $(к = \overline{1, n})$ олсун. $\varphi(x)$ функсијасы Липшис шәртини өдәдијиндән $\forall x, y \in [x_{к-1}, x_к]$ нөгтәләри үчүн

$$g(x) - g(y) \leqslant |g(x) - g(y)| \leqslant |\varphi[f(x)] - \varphi[f(y)]| <$$
$$< L\,|f(x) - f(y)| \leqslant L(M_к - m_к)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

$g(x) - g(y) \leqslant L(M_к - m_к)$ олдуғундан, $M^*_к - m^*_к \leqslant L(M_к - m_к)$ олар. Доғрудан да $[x_{к-1}, x_к]$ парчасына дахил олан елә ики $\{x_к\}$ вә $\{y_к\}$ ардычыллығыны тапмаг олар ки,

$$\lim_{n\to\infty} g(x_к) = M^*_к \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = m^*_к$$

$g(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын $\{x_к\}$ бөлкүсүнә уғун јухары вә ашағы Дарбу чәмләрини S^* вә s^* илә ишарә етсәк,

$$S^* - s^* = \sum_{к=1}^{n} (M^*_к - m^*_к)\,\Delta x_к \leqslant L \sum_{к=1}^{n} (M_к - m_к)\,\Delta x_к < \varepsilon$$

олар. Бу исә $g(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интегралланан олдуғуну көстәрир. ▶

Инди исә даһа үмуми теореми исбат едәк.

Теорем 5. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, бу функсијанын $[a, b]$ парчасында***

дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләри M вә m исә, $\varphi($ функсијасы $[m, M]$ парчасында кәсилмәздирсә, $g(x)$ $=\varphi[f(x)]$ мүрәккәб функсијасы $[a, b]$ парчасында Р мана көрә интегралланандыр.

◀ $\max\limits_{m\leqslant t\leqslant M} |\varphi(t)| = L$ вә $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олсун. ε_1 $= \dfrac{\varepsilon^2}{b-a+2L}$ ишарә едәк.

$\varphi(x)$ функсијасы $[m, M]$-дә кәсилмәз олдуғундан Г. Ка тор теореминә әсасән һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәзди

Јә'ни $\forall s, t \in [m, M]$ нөгтәләри үчүн елә $\delta > 0$ әдәди в ки, $|s-t| < \delta$ олдугда $|\varphi(s)-\varphi(t)| < \varepsilon$ олар. δ-ны е сечәк ки, $\delta < \varepsilon$ олсун. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a,$ парчасында интегралланан олдуғундан $[a, b]$ парчасынын е $\{x_\kappa\}$ бөлкүсү вар ки, бу бөлкү үчүн $S - s < \delta^2$ алынар.

$$\sup_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f(x) = M_\kappa, \qquad \inf_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f(x) = m_\kappa,$$

$$\sup_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} g(x) = M_\kappa^*, \qquad \inf_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} g(x) = m_\kappa^*$$

ишарә едәк.

1-дән n-ә кими там әдәдләри ики A вә B чохлуғуна бөлә белә ки $M_\kappa - m_\kappa < \delta$ оларса, $\kappa \in A$ вә $M_p - m_p > \delta$ олдуғ $p \in B$ олсун, $\kappa \in A$ олдугда, $M_\kappa - m_\kappa < \delta$ олдуғундан вә $\varphi($ функсијасы $[m, M]$ парчасында мүнтәзәм кәсилмәјән олд ғуна көрә $M_\kappa^* - m_\kappa^* < \delta$ олар. Һәгигәтән $\kappa \in A$ оларса,

$$M_\kappa - m_\kappa = \sup_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f(x) - \inf_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f(x).$$

Башга сөзлә $x,\ y \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ олдугда, $f(x) - f(y) = s -$ фәрги мүтләг гијмәтчә δ-дан кичик олар. Јә'ни $|s - t| <$ бурада $s = f(x)$, $t = f(y)$ олдуғу нәзәрдә тутулур. Беләлик лә, φ функсијасынын $[m, M]$ парчасында мүнтәзәм кәсилм јән олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$|\varphi[f(x)] - \varphi[f(y)]| = |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Ахырынчы бәрабәрсизлик, $\forall x, y \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ үчүн доғр олдуғундан, онда

$$\sup_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} \varphi[f(x)] - \inf_{x\in[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} \varphi[f(x)] < \varepsilon$$

олар. $\kappa \in B$ оларса, $M_\kappa^* - m_\kappa^* \leqslant 2L$ олур. $[a, b]$ парчасынын $\{x_\kappa\}$ бөлкүсүнә ујғун $g(x)$ функсијасынын јухары вә ашағ Дарбу cәмләрини S^* вә s^* ишарә етсәк

$$S^* - s^* = \sum_{\kappa=1}^{n} (M_\kappa^* - m_\kappa^*)\Delta x_\kappa = \sum_{\kappa\in A} (M_\kappa^* - m_\kappa^*)\Delta x_\kappa +$$

$$+\sum_{\kappa\in B}(M_\kappa^* - m_\kappa^*)\,\Delta x_\kappa \leqslant \varepsilon_1\ (b-a) + 2L\sum_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa.$$

$\sum\limits_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa$ ифадәсини гијмәтләндирәк.

$$\delta\cdot\sum_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa \leqslant (M_\kappa - m_\kappa)\,\Delta x_\kappa \leqslant \sum_{\kappa=1}^{n}(M_\kappa - m_\kappa)\,\Delta x_\kappa$$

(бурада $(M_\kappa - m_\kappa)\,\Delta x_\kappa$ топлананларынын һамысынынын мүсбәт олмасындан истифадә едилир).

Сечилмиш $\{x_\kappa\}$ бөлкүсү үчүн

$$\sum_{\kappa=1}^{n}(M_\kappa - m_\kappa)\,\Delta x_\kappa = S - s < \delta^2$$

олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\delta\cdot\sum_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa \leqslant \sum_{\kappa=1}^{n}(M_\kappa - m_\kappa)\,\Delta x_\kappa < \delta^2$$

вә ја $\sum\limits_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa < \delta$ алынар. Беләликлә,

$$S^* - s^* \leqslant \varepsilon_1(b-a) + 2L\sum_{\kappa\in B}\Delta x_\kappa \leqslant \varepsilon_1(b-a) + 2L\delta <$$

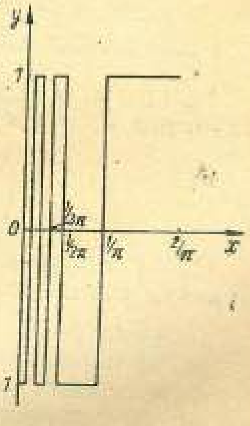
$$< \varepsilon_1(b-a) + 2L) = \varepsilon,$$

бурада $\delta < \varepsilon_1$ олмасы нәзәрә алынмышдыр. Демәли, $g(x) = \varphi[f(x)]$ функсијасы Римана көрә интегралланандыр. ▶

Нәтичә 2. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланандырса, онда $|f(x)|^\alpha$-да һәмин парчада интегралланандыр (бурада α — истәнилән мүсбәт әдәддир). Доғрудан да $\varphi(t) = t^\alpha$ — кәсилмәз функсија олдуғундан, бундан габагкы теореми тәтбиг етмәк кифајәтдир.

Хүсуси һалда $\alpha = 2$ көтүрсәк, $f^2(x)$ функсијасынын да интеграллана олдуғуну көрәрик. Биз кәләчәкдә бу хүсуси һалдан истифадә едәчәјик.

Мисал. $f(x) = \operatorname{sign}\sin\dfrac{1}{x}$ функсијасы $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ парчасында верилир вә $f(0) = 0$ олдуғу нәзәрдә тутулур (шәкил 11).



Шәкил 11

$x_к = \frac{1}{\pi к}$ $(к = 1, 2, 3, \ldots)$ нөгтәләринин һамысы верилмиш функсија үчүн биринчи нөв кәсилмә нөгтәләридир. Сыфыр нөгтәси исә бу функсија үчүн икинчи нөв кәсилмә нөгтәсидир. $\varepsilon > 0$ гејд едиб $x = 0$ нөгтәсини $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ интервалы илә өртәк. Бу интервалын харичиндә бу функсијанын анчаг сонлу p сајда кәсилмә нөгтәләри олар. p әдәди верилмиш ε-дан асылыдыр. Бу нөгтәләрин һәр бирини, узунлуғу $\frac{\varepsilon}{2\pi}$-дән кичик интервалла өртәк.

Беләликлә, верилмиш функсијанын кәсилмә нөгтәләри сонлу сајда интервалла өртүлмүш олур. Бу интервалларын үмуми узунлуғу $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$-дан кичик олар. Демәли, бундан габагкы теоремә әсасән $f(x)$ функсијасы $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ парчасында интегралланандыр. Беләликлә, бу мисалда сонсуз сајда кәсилмә нөгтәси олан функсијанын интегралланан олдуғуну көстәрдик.

Гејд 2. $|f(x)|$ функсијасынын интегралланан олмасындан үмумијјәтлә $f(x)$ функсијасынын интегралланан олмасы чыхмыр.

Һәгигәтән, $[a, b]$-дә тә'јин олунмуш $(b > a)$

$$D_1(x) = \begin{cases} -1, & x\text{—ррасионал олдугда,} \\ 1, & x\text{—расионал олдугда} \end{cases}$$

функсијасына бахаг.

$|D_1(x)| = 1$ олдуғу үчүн интегралланандыр. Лакин истәнилән $\{x_к\}$ бөлкүсү үчүн $S = b - a$, $s = a - b$ олдуғундан функсија интегралланан дејил $\left(\lim\limits_{\lambda \to 0} S \neq \lim\limits_{\lambda \to 0} s\right)$.

§ 6. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Теорем. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздирсә вә $F'(x) = f(x)$ оларса, онда***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

(1) дүстуруна Нјутон—Лејбнис дүстуру дејилир. Бу дүстур интеграл һесабынын әсас дүстурудур.

Теореми belә дә ифадә етмәк олар:

$[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын мүәјјән интегралы бу функсијанын ибтидаи функсијасынын интегралын јухары вә ашағы сәрһәдләриндәки гијмәтләри фәргинә бәрабәрдир.

◀ $F(x)$ ибтидаи функсијасынын

$$F(b) - F(a)$$

гијмәтләри фәргинә бахаг. Бу фәрг, ибтидаи функсијалар чохлуғунун һәр бири дикәриндән сабитлә фәргләндијиндән, ибтидаи функсијанын сечилмәсиндән асылы дејил.

Ашағыдакы ејнилијә бахаг:

$$[F(b) - F(a)] = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + \\ + [F(x_k) - F(x_{k-1})] + \ldots + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \\ + [F(b) - F(x_{n-1})],$$

бурада, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$

Сағ тәрәфдәки һәр бир фәргә Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәдбиг едәк:

$$\begin{aligned} &F(x_1) - F(x_0) = F'(\xi_1)(x_1 - x_0), \\ &F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi_2)(x_2 - x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned} \qquad (3)$$

бурада,

$$\begin{aligned} &x_0 < \xi_1 < x_1, \\ &x_1 < \xi_2 < x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} < \xi_n < x_n = b. \end{aligned}$$

(3) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, (2) ејнилији

$$F(b) - F(a) = F'(\xi_1)(x_1 - x_0) + F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \qquad (4)$$

шәклиндә олар.

Шәртә көрә $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$ олдуғу үчүн (4) ејнилијиндән

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \qquad (5)$$

олдуғуну алырыг.

(5) ејнилијинин сағ тәрәфини

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (6)$$

интеграл җәми шәклиндә јазсаг,

$$F(b) - F(a) = \sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

олар. (6) ејнилијиндә $(x_k - x_{k-1})$ фәргләринин ән бөјүјүнүн узунлуғуну λ илә ишарә едиб $\lambda \to 0$ јахынлашмагла лимитә кечсәк,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_0^b f(x)\,dx.$$

Сол тәрәф λ-дан асылы олмадығы үчүн исә

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \blacktriangleright$$

Гејд 1. $F(b) - F(a)$ фәрги $[F(x)]_a^b$ вә ја $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$ кими дә ишарә едилир. Јә'ни Нјутон—Лејбнис дүстуру

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

шәклиндә јазылыр.

Нјутон—Лејбнис дүстурунун үстүнлүјү ондадыр ки, интеграл чәми дүзәлтмәдән билаваситә мүәјјән интеграл һесабланыр. Мисаллара бахаг.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$ ■

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$ ■

3. $\int_0^2 2x\,dx = x^2\big|_0^2 = 4 - 0 = 4.$ ■

4. $\int_{-1}^{+1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

■.

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}\ln 3 -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \qquad ■$$

Гејд 2. Нјутон—Лејбнис дүстуру анчаг $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олдугда тәтбиг едилир. Бу шәрт нәзәрә алынмаса һесабламада сәһв етмәк олар.

Мәсәлән, $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2}$ интегралында Нјутон—Лејбнис дүстуруну формал олараг тәтбиг етсәк,

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2}=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}.$$

Лакин $\frac{1}{x^2}$ функсијасы $[-1, 2]$-дә гејри-мәһдуд олдуғундан интегралланан дејил.

§ 7. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Гејд едәк ки, мүәјјән интегралын тә'рифини биз $a<b$ олан һалда вермишик. Бу мәһдудијјәти арадан галдырмаг үчүн $a=b$ олдугда, $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=0$ вә $a>b$ олдугда $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=$ $=-\int\limits_{b}^{a}f(x)\,dx$ кими тә'јин едәчәјик.

Хассә 1. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә интегралланандырса, онда $f(x)$, $[a, b]$-нин дахилиндә јерләшән истәнилән $[c, d]$ парчасында да интегралланандыр.

◀ Функсија $[a, b]$-дә интегралланан олдуғундан истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, $S-s<\varepsilon$ олар. $\{x_k\}$ бөлкүсүнә c вә d нөгтәләрини әлавә етсәк Дарбу чәмләринин хассәсинә көрә јени бөлкүнүн јухары вә ашағы Дарбу чәмләри S' вә s' үчүн дә $S'-s'<\varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәниләр.

Инди исә бүтүн $[a, b]$ парчасыны бөлән $\{x_k'\}$-нын $[c, d]$-јә ујғун бөлкүсүнү $\{x_k\}$ илә ишарә едиб бу ахырынчы бөлкүјә ујғун јухары вә ашағы Дарбу чәмләрини $\overline{S}$ вә $\overline{s}$ илә ишарә едәк. $\overline{S}-\overline{s}$ фәргинин һәр бир мүсбәт $(M_k-m_k)\Delta x_k$ һәдди $S'-s'$ фәргинә дахил олдуғуну нәзәрә алсаг, $\overline{S}-\overline{s}\leqslant S'-s'$ олар. Демәли, $f(x)$ функсијасы $[c, d]$-дә интегралланандыр.

Хассә 2. $f(x)$ функсијасы $[a, c]$ вә $[c, b]$ парчаларында интегралланандырса, $[a, b]$-дә дә интегралланандыр вә ашағыдакы бәрабәрлик доғрудур:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{c}f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)\,dx.$$

1) $a < c < b$ олсун. $\forall\varepsilon > 0$ сечәк. $[a, c]$, $[c, b]$ парчаларынын уjғун олараг $\{x_k'\}$ вә $\{x_k''\}$ бөлкүләрини елә көтүрәк ки, бу парчаларын һәр бириндә јухары вә ашағы Дарбу чәмләри үчүн $S - s < \frac{\varepsilon}{2}$ шәрти өдәнилсин. $[a, b]$ парчасынын $\{x_k'\}$ вә $\{x_k''\}$ бөлкүләриндән дүзәлмиш јени бөлкүнү $\{\tilde{x}_k\}$ илә ишарә едиб, буна уjғун јухары вә ашағы Дарбу чәмләрини $\tilde{S}$, $\tilde{s}$ илә көстәрсәк, $\tilde{S} - \tilde{s} < \varepsilon$ олар. Демәли, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Инди исә c нөгтәсини өз дахилиндә сахлајан $[a, b]$ парчасынын истәнилән бөлкүсүнүн $\{x_k\}$ олдуғуну фәрз едәк. Белә олдуғда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{\xi_k\in[a,c]} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\xi_k\in[c,\,b]} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Бу бәрабәрликдә $\lambda \to 0$ олмагла лимитә кечсәк,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

олар.

2) $c < a < b$ олсун. Икинчи хассәјә әсасән $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$-дә интегралланан олдуғуну көстәрмәк олар. Доғрудан да, шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[c, b]$ парчасында интегралланан, $[a,b] \subset [c, b]$ вә $c < a < b$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

олар. $\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3) $a < b < c$ оларса, бу һалда $f(x)$ функсијасы икинчи хассәјә әсасән интегралланандыр. Һәгигәтән, шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, c]$-дә интегралланандыр. $[a, b] \subset [a, c]$ в $a < b < c$ олдуғундан

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Дикәр тәрәфдән, $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ алынар.

Гејд 1. Ахырынчы хассә нөгтәләринин сајы сонлу олдуғу һалда да доғрудур. Јә'ни $f(x)$ функсијасы $[a, c_1]$, $[c_1\ c_2]$, ..., $[c_n, b]$ парчасында да интеграллананандыр вә

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

бәрабәрлији доғрудур. ▶

Хассә 3. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интеграллананан вә κ истәнилән сабит әдәд оларса, $\kappa f(x)$ функсијасы да һәмин парчада интеграллананандыр вә

$$\int_a^b \kappa f(x)\,dx = \kappa \int_a^b f(x)\,dx$$

доғрудур. Башга сөзлә, сабити интеграл ишарәси алтындан кәнара чыхармаг олар.

◀ $[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_\kappa\}$ бөлкүсүнә вә ихтијари $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ нөгтәсинә ујғун интеграл чәмини

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \kappa f(\xi_\kappa)\,\Delta x_\kappa = \kappa \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\,\Delta x_\kappa \qquad (1)$$

шәклиндә јазмаг олар.

(1) бәрабәрлијиндә $\lambda \to 0$ олдугда лимитә кечсәк,

$$\int_a^b \kappa f(x)\,dx = \kappa \int_a^b f(x)\,dx$$

олар. ▶

Мисал 1. $J = \int_0^2 |1 - x|\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $[0, 2]$ парчасыны $[0, 1]$ вә $[1, 2]$ кими һиссәләрә бөләк.

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x < 1, \\ x - 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J = \int_0^2 |1 - x|\,dx = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx =$$

$$= -\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^2 = 1. \ ■$$

Мисал 2. $J = \int_a^b f(x)\,dx \ (a < b)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ интегралыны һесабламалы.

■ Бурада үч һала бахаг.

а) $0 \leqslant a < b$ оларса, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b 1\cdot dx = b - a$;

б) $a < b < 0$ оларса, $f(x) = -1$ вә $\int\limits_a^b f(x)dx = -b-(-a) = a - b$

с) $a < 0 < b$ олдугда исә $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралыны ики интеграла ајырмаг лазымдыр.

Бүтүн бу һаллары бирләшдирсәк, $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}\,dx = |b| - |a|$. ■

Мисал 3. $J = \int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ .

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx =$$

$$= \sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2. \ ■$$

Хассә 4. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $f_1(x) \pm f_2(x)$ чәми дә һәмин парчада интегралланандыр вә

$$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

◀ $[a, b]$ парчасыны истәнилән гајда илә

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

кичик парчалара бөлүб ујғун олараг һәр бир парчада $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ нөгтәси сечиб интеграл чәми дүзәлтсәк,

$$\sum_{k=1}^{n} [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)]\,(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \pm \sum_{k-1}^{n} f_2(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \qquad (2)$$

доғру олар. Шәртә көрә $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Демәли, сағ тәрәфдәки чәмләрин лимити вар. Бу ону көстәрир ки, сол тәрәфин дә лимити вар вә

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)\,dx, \qquad (3)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f_2(x)\,dx \qquad (4)$$

олдуғундан

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx \qquad (5)$$

олар. (2), (3), (4) вә (5)-дән

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$$

алынар.

Нәтичә 1. $f_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ функсијалары $[a, b]$-дә интегралланандырса, бу функсијанын хәтти комбинасијасы да интегралланандыр вә

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b C_i f_i(x)\,dx.$$

Нәтичә 2. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ һасили дә һәмин парчада интегралланандыр.

Доғрудан да, $4 f_1(x) f_2(x) = [f_1(x) + f_2(x)]^2 - [f_1(x) - f_2(x)]^2$ ејнилијиндә $f_1(x) \pm f_2(x)$ интегралланан олдуғундан бунларын квадратлары* да интегралланандыр.

Демəли, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ һасили интегралланан олар.

Теорем 1. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланан вə $f(x) \geqslant 0$ оларса, бу функсијанын һəмин парчада интегралы мəнфи ола билмəз.***

▶ $\{x_k\}$ бөлкүсү $[a, b]$ парчасынын истəнилəн бөлкүсү вə $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ ихтијари нөгтəдирсə, онда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \geqslant 0$$

олар. Көстəрəк ки, бу һал үчүн интеграл cəминин лимити мəнфи дејил. Əксини фəрз едəк. Тутаг ки, $\lim\limits_{\lambda \to 0} = A$ мəнфидир. $\varepsilon = |A|$ олмагла $\{x_k\}$ бөлкүсүнү елə сечəк ки, $|\sigma - A| < A$ олсун. Бу ахырынчы бəрабəрсизлик анчаг $\sigma < 0$ олан һал үчүн мүмкүндүр. Бу исə ола билмəз, чүнки $\sigma \geqslant 0$. Алынан зиддијјəт теоремин доғру олдуғуну көстəрир. Јə'ни

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \ ▶$$

Нəтичə 3. $f(x)$ вə $\varphi(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса вə $\forall x \in [a, b]$ үчүн $f(x) \leqslant \varphi(x)$ оларса,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Шəртə көрə $f(x)$ вə $\varphi(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланан олмагла $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$. Əввəлки теоремə əсасəн

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0 \text{ вə ја } \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Ахырынчыдан, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

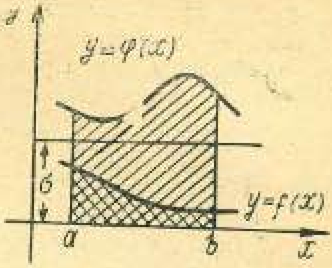
---

* $\varphi(u(x)) = u^2(x)$ вə $u(x) = t$ илə ишарə етсəк, $\varphi(t) = t^2$ олар. Шəртə көрə $u(x)$ функсијасы Риманa көрə интегралланандыр, онда $m \leqslant u(x) \leqslant M$ вə ја $|u(x)| < C_1$, $C_1 = \max\{|m|, |M|\}$. Дикəр тəрəфдəн, $[m, M]$ парчасында Липшиц шəртини өдəдији үчүн:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |t_1^2 - t_2^2| = |t_1 + t_2| |t_1 - t_2| \leqslant (|t_1| + |t_2|) |t_1 - t_2| = 2C_1 |t_1 - t_2|$$

олар. $2C_1 = C$ ишарə етсəк, $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant C |t_1 - t_2|$ олар. Теорем 4-ə əсасəн (I фəсил, § 5) $\varphi(t) = \varphi(ux) = u^2(x)$ функсијасы Риманa көрə интегралланан олар.

Үчүнчү нәтичәнин һәндәси мә'насы ашағыдакы кимидир. Садәлик үчүн $y=f(x)\geqslant 0$ вә $y=\varphi(x)\geqslant 0$ олдуғуну фәрз едәк (шәкил 12).



Шәкил 12

Шәкилдән көрүндүјү кими

$$S_1=\int_a^b f(x)\,dx,\quad S_2=\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

вә $S_2 > S_1$ олдуғундан

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорем 2. *$f(x)$ функсијасы $[a,b]$ -дә интегралланандырса, интегралын мүтләг гијмәти интегралалты функсијанын мүтләг гијмәтинин интегралындан бөјүк дејил.*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

◀ $\forall x\in[a,b]$ үчүн, $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$ доғрудур. Бу бәрабәрсизлији интеграллаcаг

$$\int_a^b (-|f(x)|)dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

вә ја

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Бурадан

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \ ▶$$

Гејд 2. $b < a$ оларса, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$ олар. Һәгигәтән,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Теорем 3. *$f(x)$ функсијасы $[a,b]$-дә кәсилмәз вә һәмин парчада мәнфи дејилсә, һеч олмаса бир $x_0\in[a,b]$ нөгтәсиндә $f(x_0) > 0$ оларса, онда*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

◀ $x_0 \in [a, b]$ олсун. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилмәз вә $f(x_0) > 0$ олдуғундан x_0-ын елә $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ әтрафы вардыр ки, $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ үчүн

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = \eta > 0$$

олар. Дикәр тәрәфдән,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{6}$$

олдуғундан вә

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \geqslant 0; \quad \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0; \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta dx = 2\delta\eta. \tag{7}$$

(7) ифадәләрини (6)-да нәзәрә алсаг, $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ олмасы ашкардыр. ▶

Гејд 3. $x_0 = a$ вә ја $x_0 = b$ оларса, бу һал үчүн $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ парчасы әвәзинә ујғун оларағ $[a, a + \delta]$, $[b - \delta, b]$ парчаларына бахмаг лазымдыр.

§ 8. ОРТА ГИЈМӘТ ТЕОРЕМЛӘРИ

Теорем 1. ***$f(x)$ функсијасы $[a,b]$ парчасында интегралланандырса вә***

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{1}$$

оларса, онда

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

олар. (бурада m, M—сабитләрдир).

◀ (1) бәрабәрсизлијини интегралласаг

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M dx$$

вә ја

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \quad ▶$$

Теорем 2. (Үмумиләшмиш орта гијмәт теореми). ***$f(x)$, $\varphi(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, $\varphi(x)$ һәмин парчада ишарәсини дәјишмәзсә, јә'ни $\varphi(x) \geqslant 0$ $(\varphi(x) \leqslant 0)$ вә $\inf\limits_{x \in [a, b]} f(x) = m$,***

$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$ ***оларса, елә*** $\mu \in [m, M]$ ***әдәди вар ки,***

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

◀ Мүәјјән олмаг үчүн $a < b$ вә $[a, b]$ парчасында $\varphi(x) \geqslant 0$ олсун. Дәгиг сәрһәдләрин тә'рифинә көрә

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{3}$$

олар. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ шәртә көрә $[a, b]$ парчасында интегралланан олдуғундан (3) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\varphi(x)$-ә вуруб a-дан b-јә кими интеграллаcаг

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{4}$$

вә $\varphi(x) \geqslant 0$ олдуғундан $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant 0$ олар.

1) $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ оларса, $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ вә бу һалда теорем исбат олунар. Бурада μ-нүн јеринә $[m, M]$-дән истәнилән әдәди көтүрмәк олар.

2) $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$ олдугда (4) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\int_a^b \varphi(x)\,dx$-ә бөлсәк,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leqslant M.$$

Бурада $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = \mu$ әдәди илә ишарә етсәк

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

алынар. ▶

Гејд 1. Икинчи теорем $\varphi(x) \geqslant 0$ олан һал үчүн исбат едилмишдир. $\varphi(x) < 0$ оларса, теорем аналожи олараг исбат едилир. Белә ки, исбат заманы бәрабәрсизликләрин ишарәси әксинә олараг дәјишилир.

Гејд 2. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз оларса, (2) дүстуру ашағыдакы кими

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ифадә олунар. Бурада $\xi \in [a, b]$.

Доғрудан да, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан һәмин парчада Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән өзүнүн ән бөјүк M вә ән кичик m гијмәтләрини алыр. Кошинин икинчи теореминә әсасән исә $f(x)$ функсијасы m вә M арасында истәнилән аралыг гијмәт алар, јә'ни елә $x = \xi \in [a, b]$ вар ки,

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = f(\xi)$$

вә бурадан $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$ олар.

Нәтичә. $f(x)$ кәсилмәз вә $\varphi(x) = 1$ оларса, елә $\xi \in [a, b]$ вар ки,

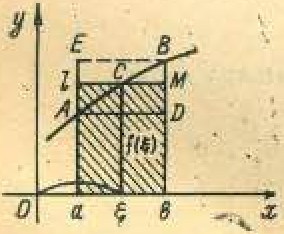
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(\xi) \tag{5}$$

олур.

(5) дүстуру сөзлә белә охунур: мүәјјән интеграл, интеграллама парчасынын узунлуғу илә интеграл алтындакы функсијанын $x = \xi \in [a, b]$ нөгтәсиндәки гијмәти һасилинә бәрабәрдир.

Нәтичәнин һәндәси мә'насы. $y = f(x)$ әјриси, $x = a$, $x = b$ ординатлары вә Ox охунун парчасы илә әһатә олунмуш саһәјә бахаг (шәкил 13).

Шәкилдән көрүндүјү кими $aABb$ әјрихәтли трапесинин саһәси, һәмин трапесин дахилинә чәкилмиш $aADb$ дүзбучаглысынын саһәсиндән бөјүк вә трапесин харичинә чәкилмиш $aEBb$ дүзбучаглысынын саһәсиндән кичикдир. Демәли, әјрихәтли трапесин саһәси бу ики дүзбучаглынын арасында һәр һансы бир $alMb$ дүзбучаглысынын саһәсинә бәрабәр олмалыдыр. Бу дүзбучаглы, отурачағы $b - a$ вә һүндүрлүјү $f(\xi)$ олан дүзбучаглыдыр.



Шәкил 13

Мисал 1. Бир периодда, ја'ни $t=0$-дан $t=T$ мүддәтиндә електрик һәрәкәт гүввәсинин E_m орта гијмәтини тә'јин един.

■ Физикадан мә'лум олдуғу кими електрик һәрәкәт гүввәси

$$E=E_0\sin\frac{2\pi t}{T}$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

Бурада E_0 сабит, T чәрәјан периоду (сабит), t—дәјишән замандыр. $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында орта гијмәти

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

дүстуру илә һесабланыр. Онда

$$E_m=\frac{E_0}{T}\int\limits_0^T\sin\frac{2\pi t}{T}\,dt=\frac{E_0}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi t}{T}\right]\Bigg|_0^T=$$

$$=-\frac{E_0}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi t}{T}-\cos 0\right)=-\frac{E_0}{2\pi}(1-1)=0$$

олар.

Демәли, електрик һәрәкәт гүввәсинин бир периоддакы орта гијмәти сыфра бәрабәрдир. ■

Мисал 2. 0-дан $\frac{\pi}{\omega}$ мүддәтиндә дәјишән чәрәјан шиддәтинин гијмәтини һесабламалы.

■ Електрик бәһсиндән мә'лумдур ки, дәјишән чәрәјан шиддәти $J=J_0\sin\omega t$ дүстуру илә тә'јин едилир. Бурада J_0 максимум чәрәјан шиддәтидир вә $\omega=\frac{2\pi}{T}$. Функсијанын орта гијмәт дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$J_m=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}J_0\sin\omega t\,dt=-\frac{\omega J_0}{\pi\omega}\left[\cos\omega t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=$$

$$=\frac{J_0}{\pi}\left(\cos\frac{\omega\pi}{\omega}-\cos 0\right)=\frac{2}{\pi}J_0,$$

вә ја

$$J_m=\frac{2}{\pi}J_0\approx 0{,}63\,J_0\ .$$ ■

Гејд. Бә'зи һалларда (мәсәлән, електротехникада) функсијанын квадратынын орта гијмәтини тапмаг тәләб олунур.

Јә'ни $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx$.

Бу орта гијмәтин квадрат көкүнә һәмин парчада орта квадратик гијмәт дејилир.

Орта квадратик кәркинлик V_t ашағыдакы

$$V_t^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T V^2\,dt$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

Дәјишән чәрәјан шиддәти орта квадратик

$$J_t^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T J^2\,dt$$

дүстуру васитәсилә ифадә едилир.

Бурада V_t кәркинлик вә J_t—чәрәјан шиддәтидир.

Теорем 3. (Бонне[1] теореми) *$\varphi(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында монотон, $f(x)$ исә һәмин парчада интегралланандырса елә $\xi \in [a, b]$ нөгтәси вар ки,*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$$

дүстуру доғрудур.

Бу теореми исбат етмәк үчүн әввәлчә Абел леммасыны исбат едәк.

Лемма. Тутаг ки, $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ вә $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ ики сонлу әдәди ардычыллыгдыр вә $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant 0$.

Әкәр $\sigma_p = v_0 + v_1 + \ldots + v_p\ (p = \overline{0, n})$ исә, онда

$$u_0(\min \sigma_p) \leqslant u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \leqslant u_0(\max \sigma_p).$$

▶ $S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$ ишарә етсәк вә $v_0 = \sigma_0$, $v_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}\ (i = \overline{1, n})$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S = u_0\sigma_0 + u_1(\sigma_1 - \sigma_0) + u_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots + u_n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) =$$
$$= \sigma_0(u_0 - u_1) + \sigma_1(u_1 - u_2) + \ldots + \sigma_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \sigma_n u_n$$

олар.

Ахырынчы бәрабәрликдә, $u_0 - u_1 \geqslant 0$, $u_1 - u_2 \geqslant 0, \ldots$, $u_{n-1} - u_n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$(\min_p \sigma_p)\left[(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) + u_n \leqslant S \leqslant\right.$$
$$\leqslant (\max_p \sigma_p)[(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) + u_n]$$

вә ја

---

[1] Оссиан Бонне (1819—1892) франсыз ријазијјатчысыдыр.

$$(\min_p \sigma_p)\, u_0 \leqslant S \leqslant (\max_p \sigma_p)\, u_0.$$

Инди исә Бонне теоремини исбат едәк.

$\varphi(x)$ вә $f(x)$ функсијалары $[a, b]$-дә интегралланан олдуғундан $f(x)\cdot\varphi(x)$ дә һәмин парчада интегралланандыр. Әввәлчә фәрз едәк ки, $\varphi(x) \geqslant 0$ вә $[a, b]$-дә монотон артмајандыр. $[a, b]$ парчасыны n бәрабәр һиссәјә бөләк:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad \lambda = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Абел леммасында

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\varphi(x_i)$$

көтүрсәк вә $\varphi(a) = u_0$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\varphi(a)\sum_{i=0}^{q} f(x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\varphi(x_i) \leqslant \varphi(a)\sum_{i=1}^{\kappa} f(x_i).$$

Бу бәрабәрсизлијин һәр ики тәрәфини $\lambda > 0$ әдәдинә вурсаг,

$$\varphi(a)\,\lambda\sum_{i=0}^{q} f(x_i) \leqslant \lambda\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\varphi(x_i) \leqslant \varphi(a)\,\lambda\sum_{i=0}^{\kappa} f(x_i). \qquad (6)$$

Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ истәнилән мүсбәт әдәддир. Онда интегралын тә'рифинә әсасән елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, $\lambda < \delta$ олдугда истәнилән p үчүн $(p = \overline{0, n})$

$$\left|\lambda\sum_{i=0}^{p} f(x_i) - \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

Бурадан,

$$\int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \lambda\sum_{i=0}^{p} f(x_i) \leqslant \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Лакин

$$\min_t \int_a^t f(x)\,dx \leqslant \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x)\,dx \leqslant \max_t \int_a^t f(x)\,dx$$

олдуғуну нәзәрә алсаг истәнилән p үчүн $\lambda < \delta$ олдугда

$$\min_t \int_a^t f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \lambda\sum_{i=0}^{p} f(x_i) \leqslant \max_t \int_a^t f(x)\,dx + \varepsilon$$

аларыг. Бу бәрабәрсизлији (6)-да $p = q$ вә $p = \kappa$ олан һалда јазсаг, $\lambda < \delta$ олдугда

$$\varphi(a)\left(\min_t \int_0^t f(x)\,dx-\varepsilon\right)\leqslant\lambda\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\varphi(x_i)\leqslant$$

$$\leqslant\varphi(a)\left(\max_t \int_0^t f(x)\,dx+\varepsilon\right)$$

олар. $\lambda\to 0$ јахынлашдыгда лимитә кечсәк

$$\varphi(a)\left(\min_t \int_a^t f(x)\,dx-\varepsilon\right)\leqslant\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\varphi(a)\left(\max_t \int_a^t f(x)\,dx+\varepsilon\right).$$

$\varepsilon>0$ ихтијари олдуғундан

$$\varphi(a)\min_t \int_a^t f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\leqslant\varphi(a)\max_t\int_a^t f(x)\,dx. \quad (7)$$

дикәр тәрәфдән

$$F(t)=\varphi(a)\int_a^t f(x)\,dx$$

кәсилмәздир. Доғрудан да

$$\Delta F=F(t+h)-F(t)=\varphi(a)\int_t^{t+h} f(x)\,dx=$$

$$=\varphi(a)\,h\sup_{x\in[a,\,b]}[f(x)]=\varphi(a)\,Mh$$

бәрабәрлијиндә $h\to 0$ олдугда $\Delta F\to 0$. Демәли, $F(t)$ $[a,\,b]$-дә кәсилмәздир. (7) бәрабәрсизлији көстәрир ки,

$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ әдәди бу функсија үчүн аралыг гијмәтдир, онда Кошинин аралыг гијмәт һаггындакы теоремә әсасән елә $\xi\in[a,\,b]$ вар ки,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx. \quad (8)$$

Инди фәрз едәк ки, $\varphi(x)$ монотон азалмајандыр. Онда $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(b)$ функсијасы монотон азалмајан вә $\psi(x)\geqslant 0$ олар. (8) дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx=\psi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x)-\varphi(b)]\,dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx].$$

Бурадан

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_a^b f(x)\,dx-$$

$$-\varphi(b)\int_a^\xi f(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\left(\int_a^b f(x)\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_a^\xi f(x)\,dx\right)=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \quad \blacktriangleright$$

Аралыг гијмәт теоремини тәтбиг етмәклә интегралы гијмәтләндирмәјә аид мисаллары нәзәрдән кечирәк.

Мисал 1.

$$f(x)=\begin{cases} x^x, & x\in(0,1), \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

Бу функсија [0, 1]-дә кәсилмәздир $(f'(x)=x^x(1+\ln x))$. Стасионар нөгтәни тапмаг үчүн $1+\ln x=0$; $x_0=\frac{1}{e}$ нөгтәсиндә функсијанын минимуму вар вә

$$f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}.$$

Бу гијмәт [0, 1] парчасында функсијанын ән кичик гијмәтидир. Беләликлә, $e^{-\frac{1}{e}}\leqslant\int_0^1 x^x\,dx\leqslant 1$ вә $e^{-\frac{1}{e}}\approx 0{,}692$ олар.

Гејд едәк ки, бу һал үчүн интегралын гијмәти елементар функсијаларын гијмәти васитәсилә ифадә олунмур. $f(x)$ функсијасы [0, 1] парчасында кәсилән олдугда орта гијмәт теореми доғру олмаја да биләр.

§ 9. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ ЈУХАРЫ СӘРҺӘДИН ФУНКСИЈАСЫ КИМИ

$$J=\int_a^b f(x)\,dx$$

интегралында x дәјишәнини t илә әвәз етсәк;

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$$

олар.

Теорем 1. *$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ функсијасы $\forall x\in[a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздир.*

◀ $\forall x\in[a, b]$ нөгтәси көтүрүб она h артымы верәк онда

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

вә ја

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right|\leqslant M|h|,$$

$$\forall t\in[a, b],\ |f(t)|\leqslant M,$$

$$|F(x+h)-F(x)|\leqslant M|h|.$$

ахырынчы бәрабәрсизликдә $h\to 0$ олмагла лимитә кечсәк $\lim\limits_{h\to 0}[F(x+h)-F(x)]=0.$

Демәли, $F(x)$ функсијасы $x\in[a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздир. ▶

Теорем 2. *$[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x$ функсијасы $x\in[a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздирсә һәми нөгтәдә $F(x)$ функсијасынын төрәмәси вар вә*

$$F'(x)=f(x).$$

◀ Шәртә көрә $x\in[a, b]$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијась кәсилмәздир, онда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(x)+[f(t)-f(x)]\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt=\frac{1}{h}f(x)h+$$

$$+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt=f(x)+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)\,dt \qquad (1$$

Инди исә

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt=0$$

олдуғуну исбат едәк.

$f(t)$ функсијасы x нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғундан истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн елә $\delta>0$ тапмаг олар ки, $|h|<\delta$ олдугда $\forall t\in[x, x+h]$, $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ олар. $|h|<\delta$ олдуғу үчүн

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\right|<\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\varepsilon dt\right|=\left|\frac{1}{h}\cdot\varepsilon h\right|=\varepsilon$$

алынар.

(1) бәрабәрлијиндә $h\to 0$ јахынлашдырыб лимитә кечсәк,

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x). \quad ▶$$

Гејд 1. Хүсуси һалда $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздирсә, онда $F(x)$ функсијасынын һәмин парчада төрәмәси вар вә $\forall x\in[a, b]$ үчүн $F'(x)=f(x)$.

Беләликлә, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз оларса, о һалда һәмин парчада онун ибтидаи функсијасы вар.

Нәтичә. $[a, b]$ парчасында кәсилмәз $f(x)$ функсијасынын гејри-мүәјјән интегралы $\int f(x)\,dx=\int_{a}^{x}f(t)\,dt+C$ олар. (бурада C—ихтијари сабитдир).

Мисал.

$$y=\varphi(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

бу функсија $x=0$ нөгтәсиндән башга $[-1, 1]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәздир.

$[-1, 1]$ парчасыны $[-1, 0]$ вә $[0, 1]$ парчаларына бөлсәк, бу парчаларын һәр бириндә $\varphi(x)$ интегралланандыр. $\varphi(x)$ функсијасы $[-1; 1]$ парчасында интегралланан олдуғуна көрә

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\operatorname{sign}t\,dt=-1+|x| \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2}$$

доғрудур. Һәгигәтән $[-1, 0]$ јарыминтервалында $\varphi(x)$ кәсилмәз олмагла, $\varphi(x)\equiv-1$-дир. Һәмин јарыминтервалда онун ибтидаи функсијасынын $-x$ олдуғуну нәзәрә алыб Нјутон–Лејбнис дүстуруну тәтбиг едәк:

$$\int_{-1}^{x}\operatorname{sign}t\,dt=\int_{-1}^{x}(-1)\,dt=-t\Big|_{-1}^{x}=1-x,\ (-1\leqslant x<0). \tag{3}$$

Биринчи теоремә көрә $F(x)$ функсијасы хүсуси һалда $x=0$ нөгтәсиндә кәсилмәздир. Демәли,

$$F(0)=\lim_{x\to 0}(-1-x)=-1. \tag{4}$$

$$x>0 \text{ үчүн } F(x)=\int_{-1}^{x}\operatorname{sign}t\,dt=\int_{-1}^{0}\operatorname{sign}t\,dt+\int_{0}^{x}1\cdot dt=$$

$$=-1+t\Big|_{0}^{x}=-1+x. \tag{5}$$

(3), (4) вә (5)-дән (2)-нин доғру олмасы чыхыр.

Гејд 2.

$$\int_{0}^{x}\operatorname{sign}t\,dt=|x|. \tag{6}$$

(6) интегралын алтындакы функсија $x=0$ нөгтәсиндә кәсилән мәһдуд функсија олдуғуна бахмајараг, онун ибтидаи функсијасы $F(x)=|x|$ кәсилмәздир. Лакин $F'(0)$ јохдур.

§ 10. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛДА ДӘЈИШӘНИН ӘВӘЗ ЕДИЛМӘСИ

Теорем. *$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәз, $x=\varphi(t)$ функсијасынын $[m, M]$* парчасында $\varphi'(t)$ кәсилмәз төрәмәси варса ($\min\limits_{t\in[m,M]}\varphi(t)=a$, $\max\limits_{t\in[m,M]}\varphi(t)=b$), белә ки $\varphi(m)=a$, $\varphi(M)=b$, онда*

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dt=\int_{m}^{M}f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

бәрабәрлији доғрудур.

◀ $f(x)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан онун $F(x)$ ибтидаи функсијасы вар. $F(x)$ вә $x=\varphi(t)$ функсијалары ујғун олараг $[a, b]$ вә $[m, M]$ парчаларында диференсиалланандыр.

Мүрәккәб функсијадан төрәмә алма гајдасына көрә

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \tag{2}$$

---

* $\varphi(x)$ функсијасынын $[m, M]$* парчасынын истәнилән дахили нөгтәсиндә кәсилмәз $\varphi'(t)$ төрәмәси варса вә $\lim\limits_{t\to m+0}\varphi'(t)$, $\lim\limits_{t\to m-0}\varphi'(t)$ варса вә сонлудурса, о һалда $\varphi(t)$ функсијасынын $[m, M]$ парчасында кәсилмәз төрәмәси вар дејирләр.

олар. Бәрабәрлијин сағ тәрәфиндә $F'[\varphi(t)] = f(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (2) бәрабәрлији

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

кими олар. $F[\varphi(t)]$ функсијасы $m \leqslant t \leqslant M$ парчасында $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олдуғундан

$$\int_m^M f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(M)] - F[\varphi(m)] = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

олур. (Шәртә көрә $\varphi(m) = a$, $\varphi(M) = b$.)

Дикәр тәрәфдән $F(x)$, $[a, b]$ парчасында $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы олдуғундан

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

олар. (3) вә (4) бәрабәрликләрини мүгајисә етсәк

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_m^M f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

(1) бәрабәрлијинә мүәјјән интегралда дәјишәни әвәзетмә дүстуру дејилир. ▶

Дәјишәнин әвәз едилмәсинә аид бир сыра мисаллара бахаг.

Мисал 1. $J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $x = a\sin t$ әвәзләмәси апарсаг, $x = 0$ олдугда $t = 0$ вә $x = a$ олдугда $t = \frac{\pi}{2}$ олар. Онда

$$J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \ ■$$

Мисал 2. $J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ интегралыны һесабламалы.

■

$$J=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int_{-1}^{1}\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha};$$

$x-\cos\alpha=t$ əвəз етсәк, $dx=dt$ вə $x=-1$ олдугда $t=-1-\cos\alpha$ вə $x=1$ оларса, $t=1-\cos\alpha$ олар.

$$J=\int_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha}\frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$ ■

Мисал 3. $J=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}$ интегралыны һесабламалы.

■

$$J=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx. \qquad (5)$$

Ахырынчы интегралда $J_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos x}dx$. $x=\pi-t$ əвəзләмәсини апарсаг, $dx=-dt$, бурада $x=\frac{\pi}{2}$ олдугда $t=\pi-\frac{\pi}{2}$ вə $x=\pi$ оларса, $t=\pi-\pi=0$ олар.

$$J_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2x}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2t}dt=$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2t}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2t}dt. \qquad (6)$$

(5) вə (6) бәрабәрликләриндән,

$$J=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos^2x}dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2t}=-\pi\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$ ■

Мисал 4. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $(ab\neq 0)$ интегралыны һесабламалы.

■

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}x\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}x\right)^2}\right]=\frac{1}{ab}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{1}{ab}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2ab}\operatorname{sign}(ab)=\frac{\pi}{2|ab|}.\ ■$$

Бурада $\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}y$ $(y\neq 0)$ дүстурундан истифадә едилмишдир.

Мисал 5. $J=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}$ интегралыны һесабламалы.

■ $\alpha\neq 1$ олдугда

$$\frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{1+2\cos x+\alpha^2}-\frac{\cos^2 x}{1+2\cos x+\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}-\frac{\cos x}{2\alpha}+\frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2}-\frac{(1+\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)}=$$

$$=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2}-\frac{(1+\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)}-\frac{\cos x}{2x};$$

$$J=\frac{1}{4\alpha^2}\left[(1+\alpha^2)\pi-(1+\alpha^2)^2J_1\right],$$

$$J_1=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{2}{1-\alpha^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2}\right]=\frac{2}{1-\alpha^2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{1-\alpha^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)=\right.$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha^2}, & |\alpha|<1\\ -\dfrac{\pi}{1-\alpha^2}, & |\alpha|>1.\end{cases}$$

Демәли,

$$J=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |\alpha|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & |\alpha|>1.\end{cases}\quad ■$$

Мисал 6. $J=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx\,dx}{\sin x}$, k—там әдәд оларса, $J=0$ олдуғуну көстәрин.

■ $\pi-t=x$ әвәз етсәк, $dx=-dt$ олар.

$$J=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\kappa x\,dx}{\sin x}=-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin 2\kappa(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}dt=$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\kappa t\,dt}{\sin t}=-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\kappa x}{\sin x}\,dx$$

$J=-J$ вә ја $2J=0$, $J=0$. ■

Мисал 7. $\int_0^{a}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}f(a-x)\,dx$ олдуғуну исбат един.

■ $x=a-t$ әвәзләмәси апарсаг, $dx=-dt$ олар.

$$\int_0^{a}f(x)\,dx=-\int_a^{0}f(a-t)\,dt=\int_0^{a}f(a-t)\,dt.\qquad \left|\begin{array}{c|c}x & t\\ \hline 0 & a\\ a & 0\end{array}\right|$$

Мүәјјән интеграл дәјишәнин ишарә едилмәсиндән асылы олмадығындан ахырынчы интегралда t әвәзинә x јазсаг,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx. \ \blacksquare$$

§ 11. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛДА ҺИССӘ-ҺИССӘ ИНТЕГРАЛЛАМА

Теорем. ***$u=f(x)$ вә $v=\varphi(x)$ функсијаларынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри варса,***

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx \qquad (1)$$

дүстуру доғрудур.

◀ $\frac{d}{dx}[f(x)\varphi(x)] = f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x)$

олдуғундан, $f(x)\cdot\varphi(x)$ функсијасы

$$f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)\cdot f'(x)$$

функсијасынын ибтидаи функсијасы олар. Онда

$$\int_a^b [f(x)\varphi'(x) + f'(x)]\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x)dx$$

олар. (1) дүстуруну

$$\int_a^b f d\varphi = f\varphi\Big|_a^b - \int_a^b \varphi df$$

вә ја

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

шәклиндә јазмаг даһа мәгсәдәујғундур. Һиссә-һиссә интеграллама̂ја аид бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1. $J = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx$ интегралыны һесабламалы.

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \sin bx & du = b\cos bx\,dx \\ dv = e^{ax}\,dx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right|$$

u вә v функсиjаларынын өзләри вә төрәмәләри $\left[0; \frac{\pi}{b}\right]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \,\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx\, dx = -\frac{b}{a} J_1$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx\, dx$$

үчүн јенидән һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк. Онда

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \cos bx & du = -b \sin bx\, dx \\ dv = e^{ax}\, dx & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array}\right|$$

$$J = -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \,\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx\, dx \right) =$$

$$= -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{a} e^{\frac{\pi a}{b}} - \frac{1}{a}\right) - \frac{b^2}{a^2} J];$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2} J = \frac{b}{a^2}\left(e^{\frac{\pi a}{b}} + 1\right); \quad J = \frac{b}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{\pi a}{b}} + 1\right).] \quad ■$$

Хүсуси һалда $a = b = 1$ оларса,

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + 1\right).$$

Мисал 2. $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Һиссә-һиссә интеграллама методундан истифадә едәк.

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \sin^{m-1} x & du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right|$$

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x\, dx =$$

$$= -\left(-\cos x \sin^{m-1} x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx.$$

$\left(-\cos x \sin^{m-1} x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ ифадәси, $x = \frac{\pi}{2}$ олдугда $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $x = 0$ олдугда исә $\sin 0 = 0$ олдуғундан нәтиҹә сыфыр олар.

Демәли,

$$J_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

вә ја

$$J_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \,(1 - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx.$$

Беләликлә,

$$J_m = (m-1)\, J_{m-2} - (m-1)\, I_m.$$

Бурадан

$$J_m = \frac{m-1}{m} \cdot J_{m-2} \qquad (2)$$

алынар. (2) дүстурунда m әвәзинә $m-2$ јазсаг,

$$J_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} \cdot J_{m-4}. \qquad (3)$$

Јенидән (2) дүстурунда m әвәзинә $m-4$ јазсаг

$$J_{m-4} = \frac{m-5}{m-4} \cdot J_{m-6} \qquad (4)$$

вә с. (3), (4)..., ифадәләрини ардычыл олараг јеринә јазмагла $m = 2к$ олдугда, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ олар. Беләликлә,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2к} x \, dx = \frac{(2к-1)(2к-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2к(2к-2)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

вә $m = 2к + 1$ оларса,

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

олдуғундан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}x\,dx=\frac{2k(2k-2)(2k-4)\dots6\cdot4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\dots5\cdot3\cdot1}. \tag{6}$$

Гејд.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\quad (m=0,1,2,\dots)$$

доғрудур.

Һәгигәтән,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)\,dx=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'dx.$$

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0

$\frac{\pi}{2}-x=t$ әвәз етсәк вә $dx=-dt$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,dt$$

олар. Беләликлә,

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m=2k\ \text{олдугда,}\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & (m=2k+1)\ \text{олдугда.}\end{cases}$$

§ 12. ВАЛЛИС* ДҮСТУРУ

$0<x<\frac{\pi}{2}$ олдугда

$$\sin^{2k+1}x<\sin^{2k}x<\sin^{2k-1}x \tag{1}$$

олдуғуну исбат едәк.

---

* Чон Валлис (1616—1703) инкилис ријазијјатчысыдыр.

(1) бәрабәрсизлијини $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ парчасында интеграллсаг

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx$$

вә ја $J_{2k+1} < J_{2k} < J_{2k-1}$ олар. Онда

$$1 < \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} < \frac{J_{2k-1}}{J_{2k+1}}. \qquad (2)$$

§ 11-дәки (2) дүстуруну нәзәрә алсаг

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot J_{2k-1}, \qquad \frac{J_{2k-1}}{J_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k}$$

олар. (2) бәрабәрсизлији исә

$$1 < \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} < \frac{2k+1}{2k}$$

шәклинә дүшәр. $k \to \infty$ олдугда лимитә кечсәк

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{J_{2k}}{J_{2k+1}}\right) = 1 \qquad (3)$$

олар. (§ 11-дәки) (5) вә (6) дүстурларыны тәтбиг етсәк

$$\frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} = \frac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]^2\,(2k+1)}{(2\cdot4\cdot6\cdots2k)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

олар вә ја

$$\frac{\pi}{2} = \left\{\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots2k)^2}{[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]^2}\cdot\frac{J_{2k}}{(2k+1)\,J_{2k+1}}\right\}.$$

(3) бәрабәрлијини нәзәрә алсаг,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots2k)^2}{[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]^2}\cdot\frac{1}{2k+1}\right\}. \qquad (4)$$

Бу Валлис дүстуру ады илә мәшһурдур.

(4) дүстуру π әдәдини сонсуз һасилин лимити шәклиндә ифадә едир.

Гејд. π әдәдини тәгриби һесабламаг үчүн бир чох методлар олса да Валлис дүстуру тарихи әһәмијјәтә маликдир.

§ 13. ЧҮТ ВӘ ТӘК ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Тә'риф. *Функсијанын варлыг областы координат башланғычына көрә симметрикдирсә вә x-ин бүтүн гијмәтләриндә $f(-x) = f(x)$ бәрабәрлији өдәнилирсә, $f(x)$-ә чүт* *функсија, $f(-x) = -f(x)$ оларса, $f(x)$-ә тәк функсија дејилир. $f(x) = \cos x$; $f(x) = x^2$ чүт, вә $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$ функсијалары исә тәк функсијалардыр. Доғрудан да*

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x);\quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x);$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Теорем. ***$f(x)$ функсијасы $[-a, a]$ парчасында кәсилмәздирсә, онда***

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(x), \text{ чүт оларса,} \\ 0, & f(x), \text{ тәк оларса.} \end{cases}$$

◀ $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (1)$$

олдуғу ашкардыр.

$J = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ интегралында $x = -t$ әвәз етсәк,

$$J = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx. \qquad (2)$$

x	t
$-a$	a
0	0

(2) вә (1)-дән,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]\,dx.$$

$f(x)$ чүт оларса, $f(-x) + f(x) = 2f(x)$. $f(x)$ тәк оларса, $f(-x) + f(x) = 0$ олдуғу үчүн

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(x) \text{ чүт оларса,} \\ 0, & f(x) \text{ тәк оларса.} \end{cases}$$

Чүт вә тәк функсијаларын интегралламасына аид мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \sin x}{x^6 + 2}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Интегралалты функсија тәк функсија олдуғу үчүн $J=0$ олар. ■

Мисал 2. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+x^2\sin x)\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $$J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=J_1+J_2;$$

$$J_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=$$

$$=\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2};$$

$$J_2=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=0;$$

$$J=J_1+J_2=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}.$$ ■

Мисал 3. $J=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}\,dx$

интегралыны һесабламалы.

■ $$J=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{2x^7-10x^5-7x^3+x}{x^2+2}\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{3x^2(x^4-4)+1}{x^2+2}\,dx=J_1+J_2.$$

J_1-дә интегралалты функсија тәк олдуғу үчүн $J_1=0$ олар

$$J_2=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{3x^2(x^4-4)+1}{x^2+2}\,dx=2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\left[3(x^4-2x^2)+\frac{1}{x^2+2}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{6}{5}x^5-4x^3+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$ ■

Мисал 4. $\int\limits_{-a}^{a} f(x^2)\cos x\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x^2)\cos x\,dx$ олдуғуну исбат етмәли.

■ Бу бәрабәрлијин доғру олдуғуну көстәрмәк үчүн интегралалты функсијанын чүт олмасыны көстәрмәк кифајәтдир.

$$f(-x) = f[(-x)^2]\cos(-x) = f(x^2)\cos x = f(x).$$ ■

Мисал 5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{dx}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}$ интегралыны һесабламалы.

■ Интегралалты $f(x) = \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{2+x^2}}$ функсијасы чүт функсија олдуғундан,

$$J = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}.$$

$x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$ әвәзләмәси апарсаг, $dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\,dt$ олар.

x	t
0	0
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$

Онда

$$J = 2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(2+2\mathrm{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t\,\sec^3 t} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt = \sin t\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ ■

Теорем. ***f(x)* функсијасы *[a, b]* парчасында кәсилмәз вә $x = \frac{a+b}{2}$ дүз хәттинә нәзәрән симметрикдирсә, онда**

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = 2\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \qquad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур.

◀ Әввәлчә,

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx \qquad (4)$$

бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрәк.

Бунун үчүн $J_1=\int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx$ интегралында $x=a+$ $+b-t$ əвəзлəмəсини апарсаг $(dx=-dt)$,

$$J_1=\int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx=-\int\limits_b^a f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_a^b f(t)\,dt=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

x	t
a	b
b	a

(4) бəрабəрлијинин һəндəси мə'насыны да вермəк олар. $[a, b]$ парчасында бахылан $f(x)$ функсијасынын графики, һəмин парчада $x=\frac{a+b}{2}$ дүз хəттинə нəзəрəн $f(a+b-x)$ функсијасы илə симметрикдир. Һəгигəтəн абсиси x олан A нөгтəси Ox оху үзəриндə јерлəширсə, верилəн дүз хəттə көрə симметрик A' нөгтəсинин абсиси $x'=a+b-x$ олар. Демəли, $f(a+b-x')=f(a+b-x)=f(x)$. Симметрик фигурларын саһəлəри бəрабəр олдуғундан (4) ифадəси ики симметрик əјрихəтли трапесин саһəлəринин бəрабəр олдуғуну көстəрир

Инди исə (3) бəрабəрлијинин доғру олдуғуну көстəрəк.

$$J=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx \tag{5}$$

$$J_1=\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^a f(x)\,dx;\ \forall x\in[a, b]\ \text{үчүн}\ f(x)=f(a+b-x)$$

олдуғуну нəзəрə алсаг,

$$J_1=\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx=\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)\,dx$$

олар. $a+b-x=t$ əвəз етсəк $(dx=-dt)$,

$$J_1=\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)\,dx=-\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^a f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt.$$

x	t
b	a
$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2}$

(5) вә (6) бәрабәрликләриндән

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$$

алынар. ▶

§ 14. ПЕРИОДИК ФУНКСИЈАНЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Тә'риф. *Сабит $T>0$ әдәди вә $\forall x\in X$, $x+T\in X$ үчүн $f(x+T)=f(x)$ шәртини өдәјән вә X чохлуғунда тә'јин олунмуш $y=f(x)$ функсијасына периодик функсија дејилир.*

Бурада T әдәдинә $f(x)$ функсијасынын периоду дејилир. T әдәди $f(x)$-ин периодудурса, nT әдәди дә n там әдәд олдугда $f(x)$ функсијасынын периодудур.

Јә'ни $f(x+nT)=f(x)$.

Периодик функсијаја мисал олараг,

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi_0)$$

функсијасыны көстәрмәк олар. Бурада A, ω вә φ_0—сабитләрдир.

Чох асанлыгла көстәрмәк олар ки, бу функсијанын периоду $T=\frac{2\pi}{\omega}$ -дир.

Һәгигәтән,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi_0\right]=$$

$$=A\sin[(\omega x+\varphi_0)+2\pi]=A\sin(\omega x+\varphi_0)=f(x).$$

Теорем. ***Периоду T олан кәсилмәз f(x) функсијасы үчүн***

$$J=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)\,dt \tag{1}$$

бәрабәрлији доғрудур.

$f(x)$ функсијасы периодик олдугда (1) дүстуру бу функсијанын парчада интегралынын гијмәтинин интеграллама парчасынын вәзијјәтиндән асылы олмадығыны көстәрир.

$$J(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,dt=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^T f(t)\,dt+\int_T^{x+T} f(t)\,dt. \tag{2}$$

(2) бәрабәрлијиндәки ахырынчы интегралда $t=s+T$ әвәзләмәси ($dt=ds$) апарсаг вә $f(s+T)=f(s)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

t	s
T	0
$x+T$	x

$$\int_{T}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(s+T)\,ds = \int_{0}^{x} f(s)\,ds$$

олар. Ахырынчы бәрабәрлији (2)-дә нәзәрә алсаг,

$$J(x) = \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(s)\,ds = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$$

олар.

Периодик функсијаларын интегралланмасына аид мисаллар.

Мисал 1. $J = \int\limits_{\pi}^{5\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ интегралыны һесабламалы.

■

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \quad f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4 (x+\pi) + \sin^4 (x+\pi)} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x)$$

олдуғу үчүн

$$J = \int\limits_{\pi}^{5\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{(1+\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x}.$$

$\operatorname{tg} x = t$ әвәз етсәк $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$,

$$J = \int\limits_{0}^{1} \frac{2t\,dt}{1+t^4} = \operatorname{arctg} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \ . \ ■$$

Мисал 2. $J = \int\limits_{0}^{4\pi} \sin^3 x\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■

$$J = \int\limits_{0}^{4\pi} \sin^3 x\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^3 x\,dx + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 x\,dx = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx = 0. \ ■$$

§ 15. ТЕЈЛОР* ДҮСТУРУНУН ГАЛЫГ ҺӘДДИНИН ИНТЕГРАЛ ФОРМАДА ВЕРИЛИШИ

$f(x)$ функсијасынын a нөгтәсинин истәнилән $\varepsilon > 0$ әтрафында $n+1$ тәртиб кәсилмәз төрәмәсинин олдуғуну фәрз едәк. Нјутон—Лејбнис дүстуруна әсасән,

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

вә ја

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \tag{1}$$

олар. (1) дүстурунда

$$\left|\begin{array}{l|l} u = f'(t) & du = f''(t)\,dt \\ dv = dt & v = t - x \end{array}\right|$$

ишарә едиб, һиссә-һиссә интегралласаг,

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x u(t)\,dv(t) = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x +$$

$$+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt. \tag{2}$$

(2)-дә

$$\left|\begin{array}{l|l} u = f''(t) & du = f'''(t)\,dt \\ dv = (x-t)\,dt & V = -\frac{1}{2}(x-t)^2 \end{array}\right|$$

ишарә едиб һиссә-һиссә интеграллаcаг,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} +$$

$$+\int_a^x f''(t)\,\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt$$

олар. Һиссә-һиссә интеграллама просесини давам етдирсәк,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k + r_n(x) \tag{3}$$

олдуғуну аларыг. Бурада

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{4}$$

---

* Тејлор Брук (1685—1731) инкилис ријазијјатчысыдыр.

(3)-ә *Тејлор дүстуру* дејилир.

(4) ифадәси Тејлор дүстурунун галыг һәддидир.

(4) дүстурунда *t*-јә нәзәрән орта гијмәт теоремини тәтбиг етсәк,

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a);\ \xi\in[a,x].$$

Бурада $\xi=a+\theta(x-a);\ 0<\theta<1.$

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)f^{(n+1)}[a+v(x-a)]$$

Коши формада галыг һәддидир.

§ 16. ИНТЕГРАЛДАН МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈА КИМИ ТӨРӘМӘ АЛМАГ

$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз, $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функсијалары исә $[c, d]$-дә тә'јин олунмуш вә бунларын гијмәтләр областы $[a, b]$-јә дахилдирсә, онда

$$J(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

ифадәси x-дән асылы һәр һансы функсија олар.

Мисал. $J(x)=\int\limits_{\sin x}^{\cos x} t\,dt$ интегралыны һесабламалы.

■

$$J(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_{\sin x}^{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2}=\frac{\cos 2x}{2}$$

олур. Верилмиш (1) интегралына x-ин функсијасы кими бахыб төрәмәсини алмаг мәсәләси илә мәшғул олаг. Әлавә фәрз едәк ки, $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ кәсилмәз төрәмәјә маликдир.

Бу мәсәләни үмуми шәкилдә һәлл етмәдән әввәл ики хүсуси һала бахаг:

1) $J_1(x)=\int\limits_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,dt,$

2) $J_2(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{x_0} f(t)\,dt.$ (3)

$J_1(x)$ функсијасы x-дән асылы мүрәккәб функсијадыр.

$\varphi(x)=u$ ишарә етсәк, $J_1(x)$ функсијасы u-дан асылы функсија олар. u исә x-дән асылы олдуғундан $J_1(x)$-ә мүрәккәб функсија кими бахыб төрәмә алсаг,

$$\frac{d}{dx}J_1(x)=\frac{dJ_1(x)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\int\limits_{x_0}^{u}f(t)\,dt\right)\frac{du}{dx}$$

вә сонра мүәјјән интегралда јухары сәрһәддә көрә төрәмәалма теоремини тәтбиг етсәк,

$$\frac{dJ_1(x)}{dx}=f(u)\,u'(x)=f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Аналожи олараг $v=\psi(x)$ ишарә етсәк,

$$J_2(x)=\int\limits_{v}^{x_0}f(t)\,dt=-\int\limits_{x_0}^{v}f(t)\,dt;$$

$$\frac{d}{dx}J_2(x)=\frac{dJ_2(x)}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=-\frac{d}{dv}\left(\int\limits_{x_0}^{v}f(t)\,dt\right)\frac{dv}{dx}=$$

$$=-f(v)\,v'(x)=-f[\psi(x)]\,\psi'(x). \qquad (5)$$

Инди исә үмуми һала бахаг:

$$J(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt=\int\limits_{\psi(x)}^{c}f(t)\,dt+\int\limits_{c}^{\varphi(x)}dt. \qquad (6)$$

(4) вә (5) бәрабәрликләрини нәзәрә алмагла (6)-дән x-ә көрә төрәмә алсаг,

$$\frac{dJ}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt\right)=f[\varphi(t)].\varphi'(t)-f[\psi(t)]\,\psi'(t) \qquad (7)$$

Бир нечә мисалын һәллини верәк.

Мисал 1. $J(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\ln t\,dt\ (x>0)$ функсијасынын төрәмәсини тапмалы.

■ (7) дүстурунда $f(t)=\ln t$, $\varphi(x)=x^3$, $\psi(x)=x^2$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J'(x)=\ln x^3,(x^3)'-\ln x^2(x^2)'=(9x^2-4x)\ln x. \ ■$$

Мисал 2. $\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2\,dt$ функсијасынын төрәмәсини тапмалы.

■ (7) дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$J'(x)=\cos x\left(\sqrt{x}\right)'-\cos\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x. \ ■$$

Мисал 3. $x=\int\limits_{1}^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z\,dz.$

$$y = \int\limits_{\sqrt{t}}^{3} e^{3} \ln z\, dz$$

параметрик шәкилдә верилдикдә y'_x-и тапын.

■ $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ олдуғундан x'_t вә y'_t-ни тапаг:

$$x'_t = \left(\int\limits_{1}^{t^3} \sqrt[3]{z} \ln z\, dz\right)'_{t^3} \cdot (t^3)'_t = t \ln t^3 \cdot 3t^2 = 9t^3 \ln t,$$

$$y'_t = \left(\int\limits_{\sqrt{t}}^{3} z^2 \ln z\, dz\right)'_{\sqrt{t}} \cdot (\sqrt{t})'_t = -t \ln\sqrt{t}\, \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{4} \ln t \cdot \sqrt{t}.$$

$$y'_x = -36\, \frac{t^3 \ln t}{\sqrt{t} \ln t} = -36t^3 \sqrt{t} \quad (t > 0). ■$$

Мисал 4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int\limits_{0}^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt$ лимитини һесабламалы.

■ $\frac{0}{0}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик олдуғундан Лопитал гајдасыны тәдбиг едәк:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int\limits_{0}^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int\limits_{0}^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt\right)^{1}_{x^2} \cdot (x^2)'_x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. ■$$

Мисал 5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(\int\limits_{0}^{x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_{0}^{x} e^{2t^2} dt}$ лимитини һесабламалы.

■ $\frac{\infty}{\infty}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик олдуғундан Лопитал гајдасыны тәтбиг етсәк,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\int\limits_{0}^{x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_{0}^{x} e^{2t^2} dt} = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^{x^2} \int\limits_{0}^{x} e^{t^2}\, dt \cdot}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{xe^{x^2}} = 0. \quad \blacksquare$$

Мисал 6. $\int\limits_0^y e^{-t^2} + \int\limits_0^{x^2} \sin^2 t\, dt = 0$. Гејри-ашкар функсијадан төрәмә алын.

■ $y = y(x)$ гәбул едиб, x-ә көрә төрәмә алсаг,

$$\left(\int\limits_0^y e^{-t^2} dt\right)'_y \frac{dy}{dx} + \left(\int\limits_0^{x^2} \sin^2 t\, dt\right)'_{x^2} (x^2)'_x = 0$$

вә ја

$$e^{-y^2} y' + \sin^2 x^2 \cdot 2x = 0; \quad y' = -2x e^{y^2} \sin^2 x^2. \quad \blacksquare$$

Мисал 7. $J(x) = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ функсијасынын екстремумуну вә дөнмә нөгтәсини тапын.

■ $J'(x) = (x-1)(x-2)^2$. Төрәмәни тапыб сыфра бәрабәр етсәк, $J'(x) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ бөһран нөгтәләри тапылар. Төрәмә $x_1 = 1$ нөгтәси әтрафында ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјишдији үчүн $x_1 = 1$ нөгтәсиндә минимум вар. $x_2 = 2$ әтрафында төрәмә ишарәсини дәјишмәдијиндән екстремуму јохдур. Икинчи тәртиб төрәмә

$$J''(x) = 3x^2 - 10x + 8.$$

$x_1 = \frac{4}{3}$ вә $x_2 = 2$ нөгтәләриндә сыфра бәрабәр олмагла бу нөгтәләрдән кечдикдә $J''(x)$ функсијасы ишарәсини дәјишдијиндән һәмин нөгтәләр дөнмә нөгтәләринин абсиси олур. ■

I. Нјутон—Лејбнис дүстурундан истифадә едәрәк ашағыдакы интеграллары һесаблајын.

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$,	$\frac{\pi}{2}$.
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$,	1.
3. $\int\limits_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.	9.

4. $\int\limits_{-5}^{-1}\frac{dx}{x}$,	$\ln\frac{1}{5}$
5. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$,	$\frac{1}{12}\ln\frac{1}{3}$,
6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\,dx}{x^2+1}$,	$\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$.
7. $\int\limits_{2}^{3}\frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx$,	$\frac{29}{3}$.
8. $\int\limits_{1}^{2}x\ln x\,dx$,	$2\ln 2-\frac{3}{4}$.
9. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx$,	2π.

II. Верилмиш әвәзләмәләрдән истифадә едәрәк ашағыдакы интеграллары һесаблајын.

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.	$(x=\operatorname{tg}\varphi)$ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.
2. $\int\limits_{1}^{5}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$,	$(x-1=z^2)$ $4-2\operatorname{arctg}2$.
3. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$,	$\left(t=\frac{1}{x}\right)$ $\ln\frac{3}{2}$,
4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{6-5\sin\theta+\sin^2\theta}$,	$(\sin\theta=t)$ $\ln\frac{4}{3}$.
5. $\int\limits_{0}^{a}\frac{x^3\,dx}{a^2+x^2}$,	$(a^2+x^2=z^2)\,\frac{a^2}{2}(1-\ln 2)$.

6. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $(\sqrt{x}=t)$ $4-\ln 9$.

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$, $(\cos x = t)$ $\frac{1}{3}$.

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{3+\sin 2x}\, dx$, $(\sin x - \cos x = t)$ $\frac{1}{4}\ln 3$.

9. $\int\limits_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}}$, $(t = 3\sin^2\varphi)$ π.

10. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^t\sqrt{e^t-1}}{e^t+3}\, dt$, $(e^t-1=x^2)$ $4-\pi$.

III. Һиссә-һиссә интеграллама методу илә ашағыдакы интеграллары һесаблајын.

Чалышмалар:	**Ҹаваблар:**
1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$,	1.
2. $\int\limits_0^{\pi} x \sin 3x\, dx$,	$\frac{\pi}{3}$.
3. $\int\limits_0^{5} \arccos x\, dx$,	1.
4. $\int\limits_0^{1} t^2 \sin t\, dt$,	$-2+(\cos 1+2\sin 1)$.
5. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$,	-4π.
6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$,	$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$.
7. $\int\limits_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$,	$\frac{\pi}{4}a^2$.

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx,$ $\qquad 0.$

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\,dx,$ $\qquad \frac{1}{m+1}.$

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x\,dx.$ $\qquad -\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}.$

11. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx,$ $\qquad 1-\frac{2}{e}.$

12. $\int\limits_0^3 \ln(3+x)\,dx,$ $\qquad 3(\ln 12-1).$

IV. Ашағыдакы бәрабәрликләрин доғру олдуғуну исбат един.

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx.$

2. $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^a f(-x)\,dx.$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$

4. $\int\limits_{-a}^a f(x^2)\cos x\,dx = 2\int\limits_0^a f(x^2)\cos x\,dx.$

5. $\int\limits_{-a}^a f(\cos x)\sin x\,dx = 0.$

6. $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \int\limits_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx,$

бурада $f(x)$ кәсилмәз функсијадыр.

II ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҮМУМИЛӘШМӘСИ

§ 1. БИРИНЧИ НӨВ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛ

Мүәјјән интегралын тә'рифини верәркән биз a вә b сәрһәдләринин сонлу олдуғуну вә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$-дә мәһдуд олдуғуну фәрз етмишдик. Инди исә Риман интегралынын тә'рифини, бу ики шәрт позулдуғу һаллар үчүн үмумиләшдирәк. Биринчи һалда интеграллама сәрһәдинин сонсуз олдуғуну фәрз едәк.

Ашағыдакы үч һала бахаг:

1) $a \leqslant x < +\infty$;
2) $-\infty < x \leqslant b$;
3) $-\infty < x < +\infty$.

Биринчи һала бахаг: $f(x)$ функсијасынын $a \leqslant x < +\infty$ областында тә'јин олдуғуну вә $A > a$ бәрабәрсизлијини өдәјән истәнилән A әдәди үчүн $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ Риман интегралынын варлығыны фәрз едәк вә

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$

кими ишарә едәк.

Тә'риф.

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

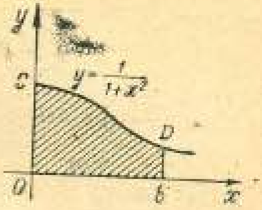
лимити варса вә сонлудурса, онда бу лимитә $f(x)$ функсијасынын $[a, +\infty[$ областында биринчи нөв гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

илә ишарә едилир. Лимит сонлудурса (1) гејри-мәхсуси интегралы јығылан, лимит олмазса вә ја сонлу дејилсә дағылан адланыр вә

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

кими јазылыр.



Шәкил 14

Мисал. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ әјриси, Ox мүсбәт јарымоху вә $x=0$ дүз хәтти илә әһатә олунмуш саһәни тапын (шәкил 14).

■ Ахтарылан саһәни һесабламаг үчүн ихтијари $b>0$ көтүрәк вә $S_b=\int\limits_0^b f(x)\,dx$ дүстурундан истифадә едәк. Бу һал үчүн

$$S_b=\int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} b$$

кв. ваһид олур. $x=b$ ординатыны сağа доғру һәрәкәт етдирмәклә b-ни $+\infty$-а јахынлашдыраг. Бу һал үчүн саһәнин бөјүмәси ашкардыр.

Лакин саһә нә гәдәр бөјүјүрсә-бөјүсүн јенә дә сонлу олараг галыр.

Доғрудан да,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}. \quad ■$$

Аналожи олараг,

$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ вә $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралларынын јығылмасы вә ја дағылмасына тә'рифләр верилир.

Јә'ни

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Бурада a вә b бири о бириндән асылы олмајараг $a\to-\infty$, $b\to+\infty$. Бу лимитләр варса вә сонлудурса, онда (2), (3) гејри-мәхсуси интеграллары јығылан, әкс һалда дағылан адланыр.

Верилән тә'рифдән чыхыр ки, $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интеграллары јығылырса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы да јығылыр вә

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

бәрабәрлији доғрудур (бурада a истәнилән һәгиги әдәддир).

Гејд. $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландырса вә $b>a$ истәнилән әдәддирсә, онда $\int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы да јығылан олар вә

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{a}^{b} f(x)\,dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Гејри-мәхсуси интегралын хассәләри

Гејри-мәхсуси интеграллар, ујғун олараг сонлу парчада мүәјјән интегралда лимитә кечмәклә алындығындан, мәхсуси интегралларда лимитә кечмә мүмкүн олан бүтүн хассәләр гејри-мәхсуси интеграллар үчүн дә доғрудур.

Хассә 1. $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы јығыландырса, онда $\int_{a}^{+\infty} \kappa f(x)\,dx$ интегралы да јығылан олар, вә $\int_{a}^{+\infty} \kappa f(x)\,dx=\kappa\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ бәрабәрлији доғрудур, бурада κ—сабит әдәддир.

Әкәр $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы дағыландырса, онда $\int_{a}^{+\infty} \kappa f(x)\,dx$ интегралы да дағыландыр.

Хассә 2. $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ вә $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интеграллары јығыландырса, онда $\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm\varphi(x)]\,dx$ јығыландыр вә

$$\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm\varphi(x)]\,dx=\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\pm\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

олар.

Хассә 3. $f(x)$ функсијасы $[a, +\infty[$ јарыминтервалында мәнфи дејилсә, онда $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\geqslant 0$ олар.

Көрүндүјү кими гејри-мәхсуси интегралда хәттилик хассәси сахланылыр. Бундан башга бир чох теоремләр, о чүмләдән, һиссә-һиссә интеграллама, әвәзетмә вә с. гејри-мәхсуси интеграл үчүн дә доғрудур.

Гејд. $f(x)$ функсијасынын $[a, +\infty[$ јарыминтервалында тә'јин олундуғуну вә бу интервалын һәр бир сонлу $[a, b]$ парчасында интеграллананолдуғуну фәрз едәк.

Бу функсијанын һәмин јарыминтервалда ибтидаи функсијасы варса, онда $\forall A \geqslant a$ үчүн

$$\int_a^A f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^A = F(A) - F(a).$$

Алынан дүстурдан ашкардыр ки, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралынын варлығы үчүн $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ сонлу олмалыдыр. Бу лимити шәрти олараг $F(+\infty)$ илә ишарә етсәк, алырыг:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \qquad (4)$$

Аналожи олараг

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty), \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) \qquad (6)$$

кими јазылыр.

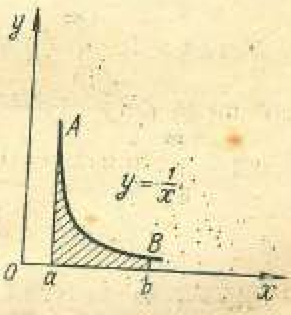
(4), (5) вә (6) дүстурлары интеграллама сәрһәдләри сонсуз олан һал үчүн Нјутон-Лејбнис дүстурунун үмумиләшмиш һалыдыр.

Јухарыда сөјләдикләримизә аид бир нечә мисалын һәллини верәк.

Мисал 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ әјриси, Ox мүсбәт јарымоху вә $x = a$, $x = b$ ординатлары илә әһатә олунмуш әјрихәтли трапесијанын саһәсини тапмалы (шәкил 15).

■ Истәнилән $b > 0$ көтүрәк. Әјрихәтли трапесијанын саһәси

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Шәкил 15

дүстуру илә тә'јин едилдијиндән

$$S=\int_a^b \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a$$

олар. Инди исә b-ни $+\infty$-а јахынлашдырсаг S саһәси артар вә

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty.$$

Демәли, $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ интегралы дағыландыр. ■

Мисал 2. $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ гејри-мәхсуси интегралынын α-нын һансы гијмәтиндә јығылан вә ја дағылан олдуғуну көстәрин (бурада $a>0$ вә α—һәгиги әдәдләрдир).

■ $\alpha=1$ олдугда интегралын дағылан олдуғуну көрдүк. $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ функсијасы истәнилән $A>0$ үчүн $[a, A]$ парчасында интегралланан олдуғундан

$$F(A)=\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^A=\frac{A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\quad(\alpha\neq1)$$

$\alpha>1$ олдугда, $\lim\limits_{A\to\infty}F(A)=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ олур.

$\alpha>1$ һалы үчүн лимит вар вә сонлудур, онда интеграл јығыландыр.

$\alpha\leqslant1$ олдугда лимит сонсузлугдур вә бу һал үчүн интеграл дағыландыр. ■

Мисал 3. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$ гејри-мәхсуси интегралынын јығылыб вә ја дағылмасыны арашдырын.

■ $$\int_0^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\sin x\,dx=-\lim_{A\to+\infty}(\cos A-\cos 0)=$$

$$=-\lim_{A\to+\infty}\cos A+1.$$

$A\to+\infty$ олдугда $\cos A$-нын лимити олмадығындан интеграл дағыландыр. ■

Мисал 4. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$ $(\alpha>0)$ интегралынын јығылан олуб-олмадығыны тәдгиг етмәли.

■

$$u=\sin\beta x \qquad du=\beta\cos\beta x\,dx$$
$$dv=e^{-\alpha x}dx \qquad v=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәдбиг етсәк,

$$F(x)=-\frac{\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha x}$$

ибтидаи функсијасы тапылыр вә $F(+\infty)=0$; $F(0)=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ олдуғундан

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=F(x)\Big|_0^{+\infty}=F(+\infty)-F(0)=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$ ■

Аналожи олараг,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

алынар. Демәли, һәр ики интеграл јығыландыр.

§ 2. ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫН ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТИ

Әввәлчә

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (1)$$

интегралына бахаг. Бу интегралын јығылан вә дағылан олмасыны јохламаг үчүн тәтбиг олунан әламәтләр $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ вә $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интеграллары үчүн дә тәдбиг едилә биләр. (1) интегралынын јығылан олмасы мәсәләси $F(b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ функсијасынын $b\to+\infty$ олдугда лимитинин варлығы илә әлагәдар олдуғундан дәјишән кәмијјәтин лимитинин варлығына аид әламәтә охшар олараг гејри-мәхсуси интегралын јығылмасы үчүн дә зәрури вә кафи әламәт сөјләмәк олар.

Теорем 1. ***(Коши әламәти)*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ***ғејри-мәхсуси интегралынын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, ихтијари*** $\varepsilon > 0$ ***үчүн елә*** $B > a$ ***әдәдинин олмасыдыр ки, истәнилән*** $b_1,\ b_2 > B$ ***әдәдләри үчүн***

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{2}$$

өдәнилсин.

◀

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) \tag{3}$$

($a<x<+\infty$) интегралынын јығылан олмасы $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ лимитинин варлығы илә бағлыдыр. Лимитин варлығы исә өз нөвбәсиндә Коши әламәтинин өдәнилмәси илә еквивалентдир, јә'ни ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $B > a$ вар ки, истәнилән $b_1,\ b_2 > B$ үчүн $|F(b_2)-F(b_1)| < \varepsilon$ өдәнилмәлидир.

(3) бәрабәрлијиндән, $F(b_2)-F(b_1)=\int\limits_{b_1}^{b_2} f(t)\,dt$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(t)\,dt\right| = |F(b_2)-F(b_1)|$$

вә

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

алынар. (2) исбат олунду. ▶

Теорем 2. $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ ***ғејри-мәхсуси интегралы јығыландырса,*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ***интегралы да јығылан олар.***

◀ $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ интегралы јығылан олдуғу үчүн ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елә $B > a$ олмалыдыр ки, $b_1,\ b_2 > B$ олдугда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon \tag{4}$$

олар.

Дикәр тәрәфдән мүәјјән интегралын хассәсинә көрә

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\ . \tag{5}$$

(4) вә (5)-дән

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији алыныр. Онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығылан олар.

***Тә'риф*. 1.** *$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландырса, онда (1) интегралына мүтләг јығылан гејри-мәхсуси интеграл дејилир.*

Теорем 3. ***(мүгајисә әламәти) $a \leqslant x < +\infty$ јарыминтервалында***

$$|f(x)| \leqslant g(x)$$

шәрти өдәнилирсә вә $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы да јығылар.

◀ Шәртә көрә $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландыр. Онда ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $B > a$ тапмаг мүмкүндүр ки, истәнилән $b_1 > B$ вә $b_2 > B$ әдәдләри үчүн

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

олар. Дикәр тәрәфдән

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx$$

олдуғу үчүн

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорем 4. *x-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $\lambda\,|f(x)|<c$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә (бурада λ— сабит әдәддир), онда $\lambda>1$ олдугда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы јығыландыр. Елә $c>0$ әдәди варса ки, $f(x)\geqslant\frac{c}{x^{\lambda}}$ $(0<a\leqslant x<+\infty)$ $\lambda\leqslant1$ олдугда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы дағылан олар.*

Бу теоремин исбаты бундан габагкы теоремдә $g(x)=\frac{c}{x^{\lambda}}$ көтүрмәклә алыныр. ▶

Теорем 5. *$\varphi(x)$ функсијасы $x\geqslant a>0$ истәнилән гијмәтиндә кәсилмәздирсә вә елә сабит $c>0$ варса ки, $x>a$ гијмәтиндә*

$$\left|\int_a^x \varphi(x)\,dx\right|<c \tag{6}$$

шәрти өдәнилирсә, онда $\lambda>0$ олдугда

$$\int_a^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}\,dx \tag{6,}$$

интегралы јығыландыр.

◀
$$\int_a^x \varphi(u)\,du=F(x)$$

илә ишарә етсәк, (6) шәртиндән $|F(x)|<c$ (7) $(a<x<+\infty)$ алынар.

(6)-дан һиссә-һиссә интеграл алсаг,

$$\int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^{\lambda}}\,du=\int_a^x\frac{F'(u)}{u^{\lambda}}\,du=\frac{F(u)}{u^{\lambda}}\Big|_a^x+\lambda\int_a^x\frac{F(u)}{u^{\lambda+1}}\,du \tag{8}$$

олар.

$$F(a)=0 \text{ вә } \left|\frac{F(x)}{x^{\lambda}}\right|<\frac{c}{x^{\lambda}}$$

олдуғундан, $x\to+\infty$ олдугда (8) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки биринчи һәдд сыфыр, икинчи һәддин лимити исә

$$\lambda\int_a^{+\infty}\frac{F(u)}{u^{\lambda+1}}\,du \tag{9}$$

олур. (9) интегралы (7) шәртинә көрә вә теорем 4-ү нәзәрә алсаг $\lambda > 0$ гиjмәтиндә (мүтләг) јығылан олур.

Беләликлә,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^\lambda}\,du = \int_a^{+\infty}\frac{\varphi(u)}{u^\lambda}\,du$$

лимитин варлығы исбат олур. Бу лимит гиjмәтчә мүтләг јығылан (9) интегралы илә үст-үстә дүшүр.

Теорем 5-ин көмәји илә практики әһәмијјәтә малик олан бир чох интегралларын јығылан олмасыны көстәрмәк олар.

Мисал.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \tag{10}$$

интегралынын јығылан вә ја дағылан олдуғуну көстәрин.

■ Теорем 5-и тәтбиг етсәк,

$$\left|\int_0^x \sin u\,du\right| < |1-\cos x| \leqslant 2\;(0 < x < +\infty)$$

(7) шәрти өдәнилир. Демәли, верилмиш интеграл јығыландыр. ■

Тә'риф 2.

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

дағылан,

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx \tag{11}$$

јығылан оларса, онда (11) интегралына шәрти јығылан интеграл дејилир.

Гејд. (10) интегралынын мүтләг јығылан олмадығыны (вә ја шәрти јығылан олдуғуну) көстәрәк. Башга сөзлә,

$$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{12}$$

дағылан ($a > 0$) олар. Һәгигәтән $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$ олдуғу үчүн

$$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_a^{+\infty}\frac{(-\cos 2x)}{2x}\,dx$$

олар. $2x = u$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{+\infty} \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_{2a}^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du. \quad \left|\begin{array}{c|c} x & u \\ \hline a & 2a \\ +\infty & +\infty \end{array}\right|$$

$\int_{2a}^{+\infty} u^{-1} \cos u\, du$ интегралы јығылан вә $\int_{2a}^{+\infty} u^{-1}\, du$ интегралы дағылан олдуғу үчүн (12) интегралы дағыландыр.

Теорем 6. *(Дирихле-Абел әламәти) $f(x)$ вә $g(x)$ функсијалары ашағыдакы үч шәрти өдәјирсә:*

1. $f(x)$ функсијасы $[a, +\infty[$ јарыминтервалында кәсилмәздирсә вә һәмин областда онун мәһдуд ибтидаи функсијасы варса;

2. $g(x)$ функсијасы $[a, +\infty[$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш монотон артмајан вә $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ оларса;

3. $g(x)$ функсијасынын $[a, +\infty[$ јарыминтервалында кәсилмәз $g'(x)$ төрәмәси варса, онда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

интегралы јығыландыр.

◀ Исбат етмәкдән өтрү гејри-мәхсуси интегралын јығылан олмасы үчүн Коши әламәтиндән истифадә едәк, јә'ни истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә B әдәди вар ки, истәнилән $A_1, A_2 > B$ үчүн

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

олдуғуну көстәрәк.

Шәртә көрә $f(x)$ функсијасынын мәһдуд ибтидаи функсијасы вар. Бу ибтидаи функсијаны $F(x)$ илә ишарә едәк.

Шәртә көрә $|F(x)| \leqslant M$.

Инди исә $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx$ интегралыны һиссә-һиссә интеграллајаг.

$$\left|\begin{array}{l|l} g(x) = u & g'(x)\, dx = du \\ f(x)\, dx = dv & v = \int_{a}^{x} f(x)\, dx = F(x) \end{array}\right|$$

$$\Big|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)\,g'(x)\,dx \qquad (13)$$

артан олмајыб $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ олдуғундан $g'(x)\leqslant 0$ вә $g(x)\geqslant 0$ олар. (13) бәрабәрлијини гијмәтләндирсәк,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant M\,[g(A_1)+g(A_2)] + M\int_{A_1}^{A_2}[-g(x)]\,dx.$$

Дикәр тәрәфдән,

$$M\int_{A_1}^{A_2}[-g'(x)]\,dx = Mg(A_1) - Mg(A_2)$$

олдуғундан,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant 2Mg(A_1). \qquad (14)$$

Шәртә көрә $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ олдуғундан ихтијари $\varepsilon>0$ көрә елә B сечмәк олар ки, $A_1\geqslant B$ олдугда $g(A_1)<\frac{\varepsilon}{2}\,M$ олар. (14) бәрабәрсизлијиндән истәнилән $A_1, A_2>B$ үчүн

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

олар. ▶

Гејд. Бу теоремин исбатында 3-чү шәртин өдәнилмәси артыгдыр. Бу шәрт анчаг һиссә-һиссә интеграллама методундан истифадә етмәк үчүн тәләб олунмушдур. Теоремин исбатында 3-чү шәртдән истифадә етмәмәк үчүн $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx$ интегралына орта гијмәт теоремини тәтбиг етмәк кифајәтдир.

Мисал 1.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\sin x\,dx \quad (\alpha>0) \qquad (15)$$

интегралынын јығылан олуб вә ја олмадығыны арашдырын.

■ $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ функсијалары теоремин бүтүн шәртләрини өдәдијиндән (15) интегралы јығыландыр.

Мисал 2.

$$\int_1^{+\infty}\sin^2 x\,dx = \int_1^{+\infty} x\sin^2 x\,\frac{1}{x}\,dx. \qquad (16)$$

■ $f(x)=x\sin^2 x$; $g(x)=\frac{1}{x}$ көтүрсәк теоремин бүтүн шәртләри өдәнилир. Демәли, (16) интегралы јығыландыр. ■

§ 3. ИКИНЧИ НӨВ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛ

Индијә кими интеграл анлајышыны верәркән интегралалты функсијанын һәмишә мүәјјән парчада мәһдуд олдуғуну фәрз етмишдик.

Инди исә бә'зи һалларда $f(x)$ функсијасы гејри-мәһдуд олдугда мүәјјән интеграл анлајышыны үмумиләшдирмәк мүмкүн олдуғуну көстәрәк. Бу мәгсәдлә әввәлчә бир мисала бахаг.

Мисал.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x<1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

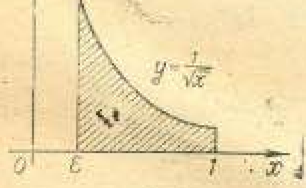
Бу функсија $[0, 1]$ парчасында $x\to 0$ олдугда сонсуз артыр. Беләликлә, функсија $x=0$-дан башга парчанын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәз олмагла анчаг $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир.

Демәли, $f(x)$ функсијасы $[0, 1]$ парчасында гејри-мәһдуд олмасына бахмајараг, истәнилән гәдәр кичик $0<\varepsilon$ көтүрмәклә $[0, 1]\supset[\varepsilon, 1]$ парчасында бу функсија кәсилмәз олдуғундан интеграллананды р:

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right). \qquad (1)$$

Бу гијмәт шәкилдә штрихләнмиш әјрихәтли трапесин саһәсини ифадә едир (шәкил 16).

Лакин $\varepsilon>0$ кичилдикчә $(\varepsilon\to 0)$, штрихләнмиш мүстәви һиссәсинин истәнилән гәдәр бөјүмәсинә бахмајараг (1) бәрабәрлијиндән көрүндүјү кими онун саһәси мәһдуд олараг галыр вә гијмәти 2-јә бәрабәр олур. Бу лимитин гијмәти тәбии олараг Ox оху вә $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ әјриси илә әһатә олунмуш саһәнин әдәди гијмәтинә бәрабәр олур. Беләликлә, һәндәси олараг демәк олар ки, фигур сонсуз олараг мүстәви һиссәсини әһатә етмәсинә бахмајараг онун саһәси мәһдуд галыр.



Шәкил 16

Мәсәләјә аналитик нөгтеји-нәзәрлә јахынлашыларса $[0, 1]$ парчасында интегралалты функсија гејри-мәһдуд олдуғундан ахтарылан саһә $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ интегралы илә тә'јин олуна билмир.

Лакин $[\varepsilon, 1]$ парчасында функсија интегралланан олдуғундан әввәлчә $\int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$ интегралы вә сонра $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$ лимити тапылыр.

Инди исә функсија парчада гејри-мәһдуд олдугда гејри-мәхсуси интеграла үмуми тә'риф верәк.

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд дејил. Бурада бир нечә һала бахаг.

I һал. $f(x)$ функсијасы b нөгтәси әтрафында гејри-мәһдуд олсун.

Тә'риф 1. *$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуд вә истәнилән, $[a, b-\delta]$ парчасында мәһдуд ($x = b$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында гејри-мәһдуд) олмагла һәмин парчада интегралланан вә сонлу $\lim\limits_{\delta\to0}\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx$ варса, бу лимитә $f(x)$-ин икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралы, $f(x)$-ә исә $[a, b]$ парчасында интегралланан функсија дејилир вә*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx$$

шәклиндә јазылыр. Бу һалда $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландыр дејилир.

Хүсуси һалда $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$-дә $F(x)$ кими ибтидаи функсијасы варса вә $F(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә кәсилмәздирсә, онда $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә интегралланандыр вә

$$\lim_{\delta\to0}\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0} F(b-\delta) - F(a) = F(b) - F(a).$$

олар.

II һал. $f(x)$ функсијасы $x = a$ нөгтәси әтрафында гејри-мәһдуд оларса, бу һал үчүн дә аналожи тә'риф верилир.

Тә'риф 2. *$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуддурса, истәнилән $[a+\delta, b]$ $(0 < \delta < b-a)$ парчасында интегралланан вә сонлу $\lim\limits_{\delta\to0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ варса, бу лимитә $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

шәклиндә јазылыр. Белә олдуғда гејри-мәхсуси интеграл јығыландыр дејилир.

Гејд 1. $f(x)$ функсијасы анчаг $x=a$, $x=b$ нөгтәнин әтрафында гејри-мәһдуд оларса вә

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{c} f(x)\,dx;\quad \lim_{\delta\to 0}\int_{c}^{b-\delta} f(x)\,dx \quad (c\in[a,b])$$

лимитләри варса, бунлар гејри-мәхсуси интеграллар адланыр вә $\int_a^b f(x)\,dx$ кими ишарә едилир.

III һал. $f(x)$ функсијасы $x=c\in[a,b]$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында гејри-мәһдуд вә истәнилән $[a,c-\delta_1]$ $[c+\delta_2,b]$ парчаларында $(0<\delta_1<c-a)$, $(0<\delta_2<b-c)$ интегралланандырса вә сонлу $\lim\limits_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx$, $\lim\limits_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx$ лимитләри варса, онда $f(x)$ функсијасынын $[a,b]$-дә икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx$$

јығыландыр дејилир.

Гејд 1. $\int^c f(x)\,dx$ вә $\int_c^b f(x)dx$ интегралларындан бири дағылан олдуғда $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы да дағылан олар.

Аналожи олараг $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ $(a<x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_{n-1}<b)$ нөгтәләри әтрафында $f(x)$ функсијасы гејри-мәһдуд олдуғда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \qquad (2)$$

јазмагла гејри-мәхсуси Риман интегралыны алмаг олар. Бурада (2) бәрабәрлијинин сағында иштирак едән гејри-мәхсуси интегралларын јығылан олдуғу нәзәрдә тутулур.

Гејд 2. Интегралалты функсија гејри-мәһдуд олдуғда бу интегралы садә әвәзләмә васитәсилә һәмишә сонсуз лимитли интеграла кәтирмәк мүмкүндүр. Һәгигәтән, тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a,b]$ парчасынын сол уч нөгтәсиндә гејри-мәһдуддур.

Онда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \tag{3}$$

олар. Бурада $x = a + \frac{1}{t}$ әвәзләмәсини апарсаг, $dx = -\frac{dt}{t}$;

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(t)\,dt.$$

x	t
$a+\varepsilon$	$\frac{1}{\varepsilon}$
b	$\frac{1}{b-a}$

Бурада $\varphi(t) = \frac{1}{t^2} f\left(a+\frac{1}{t}\right)$ вә беләликлә,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(t)\,dt = \int_{\frac{1}{c-a}}^{\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Гејд 3. Икинчи нөв гејри-мәхсуси интеграллар үчүн дә, биринчи нөв гејри-мәхсуси интегралларда олдуғу кими аналожи олараг Коши теоремини вә мүгајисә теоремләрини исбат етмәк олар.

§ 4. ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫН БАШ ГИЈМӘТИ

$x = c \in (a, b)$ нөгтәси әтрафында $f(x)$ функсијасы гејри-мәһдуд олдугда онун гејри-мәхсуси интегралынын

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c+\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right]. \tag{1}$$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$ дүстуру илә тә'јин олдуғуну көрдүк. Бурада ε_1 вә ε_2 бири дикәриндән асылы олмајараг сыфра јахынлашыр вә $\varepsilon_1 \in [0, c-a]$, $\varepsilon_2 \in [0, b-c]$ истәнилән әдәдләр, $f(x)$ функсијасы исә $[a, c-\varepsilon_1]$ вә $[c+\varepsilon_2, b]$ парчасында интегралланан олдуғу фәрз олунур.

Хүсуси һалда (1) ифадәсиндә $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to 0$ оларса вә

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right] \quad (\varepsilon > 0)$$

сонлу лимити варса, бу лимитә *Коши мә'нада интегралын* *баш гијмәти* дејилир вә $V\cdot P\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$ кими ишарә едилиб,

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]\quad(\varepsilon>0)$$

јазылыр. Бурада $V\cdot P$ һәрфләри (Valear principale—баш гијмәт) чох заман јазылмыр.

Баш гијмәтә көрә интеграл бә'зән сингулјар интеграл адланыр. Бир нечә мисалын һәллини верәк.

Мисал 1. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$, $c\in(a,\ b)$ гејри-мәхсуси интегралынын баш гијмәтини тапмалы.

■
$$\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon_2}^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cdot \qquad (2)$$

(2) бәрабәрлијиндән көрүнүр ки, $\varepsilon_1\to0$, $\varepsilon_2\to0$ олдугда бу чәмин лимити јохдур. Лакин $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ оларса, (1) ифадәсинин $\varepsilon\to0$ олдугда алынан лимити интегралын баш һиссәси олар вә

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx=V\cdot P\cdot\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$
■

Интеграллама сәрһәдләри сонсуз олдугда да интегралын баш гијмәти анлајышыны вермәк олар.

Һәр бир сонлу парчада интегралланан $\varphi(x)$ функсијасынын сонсуз лимитли гејри-мәхсуси интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\lim_{\substack{N_1\to+\infty\\ N_2\to+\infty}}\int_{-N}^{N}\varphi(x)\,dx$$

бәрабәрлији илә тә'јин едилир. Бурада N_1 вә N_2 бири дикәриндән асылы олмајараг сонсузлуға јахынлашыр. Бә'зән бу гајда илә тә'јин олунмуш гејри-мәхсуси интеграл олмаја да биләр.

Лакин бу интегралын баш гијмәти ола биләр. Јә'ни

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\varphi(x)\,dx$$

сонлудур.

Бу типли интеграллара *сингулјар интеграллар* дејилир

Гејри-мәхсуси интеграллара аид бир нечә мисала бахаг.

Мисал 2. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ интегралыны арашдырмалы.

■ $f(x)=\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуд олдугундан бу интеграл икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралдыр. $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы олмагла

$$F(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1+\alpha}, & \alpha\neq 1,\\ \ln|x-a|, & \alpha=1\end{cases}$$

олдугундан $\alpha<1$ олдугда $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ лимити вар. Она көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында ($\alpha<1$) интегралланандыр. $\alpha\geqslant 1$ олан һалда бу функсија интегралланан дејил. ■

Мисал 3. $V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx$ интегралыны тапмалы.

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}\sin x\,dx=$$

$$=\lim_{N\to\infty}[-\cos N+\cos(-N)]=0.$$ ■

Мисал 4. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ интегралынын јығылан олуб-олмадығыны арашдырын.

■ Интегралалты функсија гејри-мәһдуд олдуғундан

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon+1}^{e}(\ln x)^{-\frac{1}{3}}\,d(\ln x)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.$$ ■

Мисал 5. $\int\limits_1^\infty\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$ интегралынын јығылан вә ја дағылан олдуғуну көстәрин.

■ $f(x)=1-\cos\frac{2}{x}=2\sin^2\frac{1}{x}$ функсијасы $x\geqslant 1$ олдугда мүсбәт кәсилмәз функсијадыр вә $x\to+\infty$ үчүн $2\sin^2\frac{1}{x}\sim$ $\sim 2\left(\frac{1}{x}\right)^2$ өдәнилир. Мүгајисә әламәтинә көрә верилмиш интеграл јығыландыр. ■

Мисал 6. $\int\limits_1^{\infty} \ln \frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}\,dx$ ($n>0$ интегралынын јығылан вә ја дағылан олдуғуну јохлајын.

■ $$f(x)=\ln\frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}=\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n}\right).$$

$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n}$, $x\to+\infty$ олдугда сонсуз кичик олдуғундан,

$$f(x)\sim\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n}\sim\frac{1}{nx},$$

башга сөзлә

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{nx}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{n}.$$

Демәли, мүгајисә әламәтинә көрә верилмиш интеграл дағыландыр. ■

1. Ашағыдакы гејри-мәхсуси интеграллары һесаблајын.

Чалышмалар:	**Чаваблар:**
1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, $(\alpha>1)$,	$\frac{1}{\alpha-1}$
2. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+16}$,	$\frac{\pi}{8}$
3. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$,	$\frac{3\pi}{3\sqrt{3}}$
4. $\int\limits_0^{\infty}e^{-5x}\cos 4x\,dx$,	$\frac{5}{41}$
5. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$,	дағылыр.
6. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$,	$\frac{\pi}{2}$

Ашағыдакы интегралларын јығылыб вә ја дағылмасыны арашдырын.

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, дағылыр.

2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$, дағылыр.

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^3+x+1}$, дағылыр.

4. $\int\limits_0^{\infty} \cos x\,dx$, дағылыр.

5. $\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$, дағылыр

III ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘГРИБИ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Практики әһәмијјәти олан бир чох мәсәләләр мүәјјән интегралын һесабланмасына кәтирилир. Бу исә, үмумијјәтлә бу вә ја дикәр хәта илә тәгриби һесабланыр.

Мүәјјән интегралын тәгриби һесаблама методларындан бири интегралын тә'рифиндә верилир. Белә ки, мүәјјән интеграл, интеграл чәмләринин лимити кими верилдијиндән дүзәлмиш чәм, мүәјјән хәта илә интегралын тәгриби гијмәтидир. Бу методла һесаблама чох һалларда техники чәһәтдән мүрәккәб вә чәтин олдуғундан башга методлар ахтарылыр. Мә'лумдур ки, мүәјјән интегралын һесабланмасында әсас методлардан бири Нјутон-Лејбнис методудур. Күчлү метод олмагла о, мүәјјән интегралы ибтидаи функсија илә бағлајыр, јә'ни $\forall x \in [a, b]$ үчүн $f(x)$ кәсилмәздирсә,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Беләликлә, мүәјјән интегралын һесабланмасы $F(x)$ ибтидаи функсијасынын ики гијмәтинин фәрги илә ифадә олунур. Ибтидаи функсијанын варлығы һәлә Нјутон Лејбнис дүстурунун тәтбиг едилмәси үчүн кафи дејил, бу дүстуру тәтбиг етмәк үчүн ибтидаи функсијанын өзү мә'лум олмалыдыр. Ибтидаи функсија елементар функсијаларла ифадә едилдији һалларда онун гијмәтинин тәгриби һесабланмасы методлары чох јахшы өјрәнилмишдир. Лакин бә'зән ибтидаи функсијанын варлығына бахмајараг ону елементар функсија шәклиндә ифадә етмәк мүмкүн олмур. Белә интеграллара сонлу шәкилдә ачылмајан интеграллар дејилир. Буна көрә дә интегралын гијмәтинин тәгриби һесабланмасы методларынын өјрәнилмәси чох вачиб мәсәләдир.

Мүәјјән интегралын тәгриби һесабланмасында ашағыдакы методлар мөвчуддур.

§ 1. ДҮЗБУЧАГЛЫЛАР МЕТОДУ

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздир. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралыны тәгриби һесабламаг тәләб олунур.

◀ Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасыны $a = x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$, $x_n = b$ нөгтәләри илә n бәрабәр һиссәјә бөләк.

Бу парчаларын һәр биринин узунлуғу $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ олар.

Бурада $x_k = a + k\Delta x_k$ $(k = \overline{0, n})$ нөгтәләриндә интеграл алтындакы функсијанын гијмәтини $y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x)$ кими ишарә етмәклә

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x$$

вә

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x$$

интеграл чәмләрини аларыг.

Мүәјјән интегралын тә'рифинә әсасән,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x$$

вә

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x.$$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралынын әвәзинә тәгриби олараг ујғун интеграл чәмләрини көтүрмәк тәбиидир, јә'ни

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x.$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_1+y_2+\ldots+y_n) \qquad (2)$$

олур. (1) вә (2) тәгриби бәрабәрликләри, дүзбучаглылар методунун дүстурлары адланыр. ▶

Бу дүстурларын һәндәси мә'насыны ($f(x) \geqslant 0$ олан һал үчүн) верәк. $y=f(x)$ әјриси, абсис оху вә $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри илә әһатә олунмуш $aABb$ әјрихәтли трапесијасынын саһәси тәгриби олараг, отурачағы $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, һүндүрлүкләри исә y_0, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ вә ја $y_1, y_2, \ldots, y_n$ олан n сајда дүзбучаглыдан ибарәт олан пилләвари фигурун саһәси илә әвәз едилир (шәкил 17).

Инди исә $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы (1) вә (2) дүзбучаглы дүстурлары илә ифадә едилән заман бурахылан хәтанын мүтләг гијмәтини һесаблајаг. Ахтарылан хәтанын һесабланмасы үчүн $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын мәһдуд төрәмәјә малик олдуғуну фәрз едәк.

Јә'ни $|f'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$ олсун.

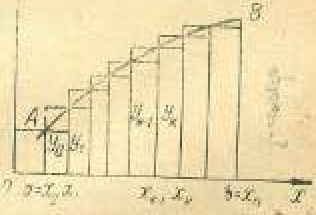
$$|R_n| = \left| \int_n^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,\Delta x \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,\Delta x \right| =$$

$$= \left| \sum_{k-1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k-1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} y_{k-1}dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})]\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})]\,dx \right|$$



Шәкил 17

вә ја

$$|R_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x)-f(x_{k-1})]\,dx.$$

Шәртә көрә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында сонлу төрәмәси вар, онда бу функсија үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$f(x)-f(x_{k-1}) = (x-x_{k-1})f'(\xi_k), \quad x_{k-1}<\xi_k<x$$

вә ја

$$|R_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(\xi_k)(x-x_{k-1})|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{(x-x_{k-1})^2}{2}\right|\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{M}{2}\sum_{k=1}^{n} (x_k-x_{k-1})^2 =$$

$$= \frac{M}{2}\, n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

алынар.

Беләликлә, $|R_n| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$ олмагла ($n\to\infty$ олдугда) сыфра јахынлашыр. Башга сөзлә, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралыны $\varepsilon>0$ хәта илә тәгриби һесабламаг үчүн $[a, b]$ парчасыны $n>\frac{(b-a)^2M}{2\varepsilon}$ һиссәјә бөлмәк кифајәтдир. Бурада $\varepsilon>0$ истәнилән верилмиш әдәддир.

Мисал. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$ интегралыны, $n=10$ олдугда дүзбучаглылар методу васитәсилә тәгриби һесабламалы.

■ $b-a=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ парчасыны 10 һиссәјә бөлсәк,

$$h=\Delta x = \frac{b-a}{10}=\frac{\pi}{20}=0,157.$$

Инди исә $y_0, y_1, \ldots, y_{10}$ ординатларынын гијмәтини

$$y_k = a+kh = 0+k\cdot\frac{\pi}{20} \quad (k=\overline{0,10})$$

дүстуру илә һесаблајаг. Логарифма хәткешиндән истифадә едәрәк ашағыдакы чәдвәли јазмаг олар:

x_0	0°	y_0	sin 0°	0.	y_1	0,159
x_1	9°	y_1	sin 9°	0,156	y_2	0,309
x_2	18°	y_2	sin 18°	0,309	y_3	0,454
x_3	27°	y_3	sin 27°	0,454	y_4	0,588
x_4	36°	y_4	sin 36°	0,588	y_5	0,707
x_5	45°	y_5	sin 45°	0,707	y_6	0,809
x_6	54°	y_6	sin 54°	0,809	y_7	0,891
x_7	63°	y_7	sin 63°	0,891	y_8	0,951
x_8	72°	y_8	sin 72°	0,951	y_9	0,988
x_9	81°	y_9	sin 81°	0,988	y_{10}	1.00
x_{10}	90°					
		$\sum\limits_{\kappa=0}^{9} y_\kappa$		5,853	$\sum\limits_{\kappa=1}^{10} y_\kappa$	6,853

Беләликлә, (1) вә (2) дүстурлары васитәсилә һесабласаг тәгриби олараг,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx 0{,}157 \times 5{,}853 \approx 0{,}919,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx 0{,}157 \times 6{,}853 \approx 1{,}076$$

алынар. Бу интегралын дәгиг гиjмәти исә

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

олар.

Демәли, дүзбучаглы методу илә интегралы һесаблаjан заман 8%-ә jахын хәта едилмишдир.

§ 2. ТРАПЕСИJАЛАР МЕТОДУ

$[a, b]$ парчасында кәсилмәjән $f(x)$ функсиjасы үчүн $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралынын трапесиjалар методу илә тәгриби һесабланмасы мәсәләси илә мәшғул олаг.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн $[a, b]$ парчасыны истәнилән $\{x_\kappa\}$ бөлкүсү илә n бәрабәр һиссәjә бөләк. Истәнилән $1 \leqslant \kappa \leqslant n$ үчүн $\frac{1}{2}\left[f(x_{\kappa-1}) + f(x_\kappa)\right]$ ифадәсинә бахаг.

Бу әдәд истәнилән κ үчүн $f(x_{\kappa-1})$ илә $f(x_\kappa)$ арасында jерләшир, чүнки шәртә көрә $f(x)$ функсиjасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздир, демәли $[x_{\kappa-1}, x_\kappa] \subset [a, b]$ парчасында да кәсилмәз олар. Онда Коши теореминә (икинчи) әсасән бүтүн аралыг гиjмәтини алар. Jә'ни, елә $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ нөгтәси вар ки,

$$\frac{1}{2}[f(x_{\kappa-1})+f(x_\kappa)]=f(\xi_\kappa)$$

вә ја

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{f(x_{\kappa-1})+f(x_\kappa)}{2}\Delta x_\kappa=\sum_{\kappa=1}^{n}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa.$$

Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфинә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интеграл чәми кими бахсаг,

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{\kappa-1}-y_\kappa),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n-1}y_\kappa\right)\qquad(1)$$

аларыг.

(1) дүстуру трапесијалар дүстуру адланыр. Бу дүстурун һәндәси мә'насыны изаһ едәк.

$f(x)\geqslant 0$ олан һал үчүн (1) дүстуру $aABb$ әјрихәтли трапесијасынын (шәкил 18) саһәсини тәгриби олараг һүндүрлүјү $\frac{-a}{n}=\Delta x$ олан n сајда дүзхәтли трапесијаларын саһәси илә ифадә едир.

Шәкилдән биринчи трапесијанын саһәси $\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right)$, n-чи трапесијанын саһәси $\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$ олар. Онда

$$S=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n}{2}\right)=$$

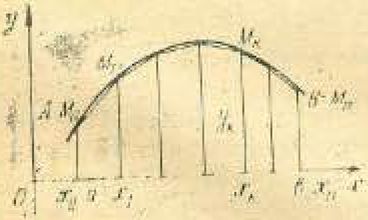
$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n-1}y_\kappa\right).$$

Инди исә (1) дүстурунун хәтасыны гијмәтләндирәк, $[a, b]$ $((b-a)>0)$ парчасында $y=f(x)$ әјрисини бу әјринин уч нөгтәләрини бирләшдирән $y=\varphi(t)$ дүз хәтти илә әвәз едәк. Белә олдугда

$$\varphi(a)=f(a)$$

$$\varphi(b)=f(b)$$

олар. Һәндәси олараг әјрихәтли



Шәкил 18

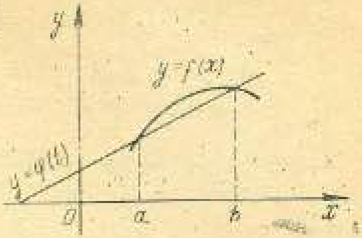
трапесијанын саһәси дүзхәтли трапесијанын саһәси илә әвәз едилир. Јә'ни,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

вә саһә кими,

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}(b-a) =$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$



Шәкил 19

олдуғундан

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

олар (шәкил 19).

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

фәргини гијмәтләндирәк.

Бу мәгсәдлә $\forall x \in [a, b]$ үчүн

$$f(x) = \varphi(x) + \kappa(x-a)(x-b) \tag{2}$$

әвәз етсәк,

$$\kappa = \frac{f(x)-\varphi(x)}{(x-a)(x-b)} \tag{3}$$

олар.

$[a, b]$ парчасында

$$\omega(z) = f(z) - \varphi(z) - \kappa(z-a)(z-b) \tag{4}$$

функсијасына бахаг. (4)-дән $\omega(a) = \omega(b) = 0$, (3) ифадәсини нәзәрә алсаг, $\omega(x) = 0$ алынар.

$\omega(z)$ функсијасы a, b вә x нөгтәләриндә сыфра бәрабәр олур (бурада $a < x < b$).

$[a, b]$ парчасында әлавә олараг $f(x)$ функсијасынын кәсилмәз икинчи тәртиб төрәмәсинин олдуғуну фәрз едәк. Онда $\omega(z)$ функсијасынын да һәмин хассәни өдәмәси ајдындыр. $\omega(z)$ функсијасына $[a, x]$ вә $[x, b]$ парчаларында Ролл теоремини тәтбиг етсәк, $\omega'(z)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын ики нөгтәсиндә сыфыр олдуғуну дејә биләрик. Белә олдугда јенә Ролл теореминә көрә бу ики нөгтә арасында елә $z = \xi$ нөгтәси вар ки, һәмин нөгтәдә $\omega''(z)$ функсијасы сыфра бәрабәр олар.

Бурада $\xi \in [a, b]$ вә x-дән асылыдыр. $\omega''(z) = f''(z) - 2$ олдуғундан,

$$\omega''(\xi) = f''(\xi) - 2\kappa = 0 \text{ вә } \kappa = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

олар.

ξ дәјишәни x-дән асылы олдуғундан $f''(\xi)$ функсијасы ξ дән асылы кәсилмәјән функсија олур. κ-нын гијмәтини (2)-д јазсаг

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)(x-b)$$

олдуғуну алараг, сонунчу бәрабәрлијин һәр тәрәфини интегралласаг

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\, dx \qquad (4'$$

олар.

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx - (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг $(4')$ бәрабәрлији

$$\int_a^b f(x)\, dx - (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\, dx \qquad (5)$$

шәклинә дүшәр. Бурада $(x-a)(x-b)$ һасили $[a, b]$ парчасында ишарәсини дәјишмәдијиндән вә $f''(\xi)$ функсијасы x-дән асылы кәсилмәјән функсија олдуғундан (5) бәрабәрлијинин сағ тәрәфинә орта гијмәт теоремини тәдбиг етмәк олар. Белә ки,

$$\frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\, dx = \frac{1}{2} f''(\xi^*) \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi^*).$$

Бурада ξ^* әдәди x-ин $[a, b]$ парчасында мүәјјән бир гијмәтидир $(a \leqslant \xi^* \leqslant b)$. Белә олдугда (5)-дән

$$\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi^*).$$

$[a,\ b]$ парчасыны $[x_{\kappa-1},\ x_\kappa]$ кими бәрабәр һиссәләрә бөлсәк

$$\int_{x_{\kappa-1}}^{x_\kappa} f(x)\,dx-(b-a)\,\frac{y_{\kappa-1}+y_\kappa}{n}=-\frac{(b+a)^3}{12n^3}f''(\xi_\kappa^*)$$

вә ахырынчыны κ-ја көрә чәмләсәк,

$$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n-1}y_\kappa\right)=$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum f''(\xi_\kappa). \qquad (6)$$

$f''(x)$ функсијасынын $[a,\ b]$ парчасында ән бөјүк вә ән кичик гијмәтләри M вә m олсун. Онда $(m\leqslant f''(\xi_\kappa{}^*)\leqslant M)$

$$n\cdot m\leqslant\sum_{\kappa=1}^{n} f''(\xi^*)\leqslant n\cdot M$$

вә ја

$$m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} f''(\xi_\kappa^*)\leqslant M$$

олдуғундан $[a,\ b]$ парчасында x-ин елә бир $x=\xi_0$ гијмәти вар ки,

$$f''(\xi_0)=\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} f'(\xi_\kappa^*)$$

вә ја

$$\sum_{\kappa-1}^{n} f''(\xi_\kappa^*)=nf''(\xi_0)$$

алынар. Алынан бу гијмәти (6)-да јазсаг

$$\int_a^b f(x)\,dx-S=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi_0) \qquad (7)$$

олур. Бурада

$$S=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n-1}y_\kappa\right)$$

n сајда трапесијаларын саһәләри чәмидир.

(7) дүстуру n артдыгча хətанын тəхминəн $\frac{1}{n^2}$ тəртибдə азалдығыны көстəрир.

Мисал. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ интегралыны $n=10$ үчүн трапесија дүстуру илə һесаблајын.

■ $0=1$, $b=2$ олдуғундан

$$\Delta x = \frac{1}{n}(b-a) = \frac{1}{10}(2-1) = 0{,}1; \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Һесаблама логарифм хəткеши васитəсилə апарылыр.

x_0	1,0	y_0	1,000
x_1	1,1	y_1	1/1,1 = 0,909
x_2	1,2	y_2	1/1,2 = 0,833
x_3	1,3	y_3	1/1,3 = 0,769
x_4	1,4	y_4	1/1,4 = 0,714
x_5	1,5	y_5	1/1,5 = 0,667
x_6	1,6	y_6	1/1,6 = 0,625
x_7	1,7	y_7	1/1,7 = 0,588
x_8	1,8	y_8	1/1,8 = 0,556
x_9	1,9	y_9	1/1,9 = 0,526
x_{10}	2,0	y_{10}	1/2 = 0,500

$$\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \sum_{k=1}^{9} y_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_9 = 6{,}187; \quad \frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) = 0{,}750,$$

$$S = \frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{9} y_k + \frac{y_0 + y_{10}}{2}\right) = 0{,}1\,(6{,}187 + 0{,}750) = 0{,}6937.$$

Демəли, $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}6937$ олар. Дикəр тəрəфдəн,

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = 0{,}6931$$

олур. Белəликлə, бурахылан хəта 2%-ə јахындыр. (7) дүстуруна көрə,

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - S = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi_0); \quad S = 0{,}6937; \quad b=2, \ a=1, \ n=10$$

вə $1 < \xi_0 < 2$ арасында олдуғундан бу арада истəнилəн $\xi_0 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ гијмəтини көтүрə билəрик.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,;\ f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

олдуғундан,

$$f''(\xi_0) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{16}{27},$$

$$\frac{(b-a)^2}{12n^2}\, f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1^2 \cdot 16}{12 \cdot 10^2\, 27} = 0{,}0005$$

вә

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}6937 - 0{,}0005 = 0{,}6032.$$

§ 3. СИМПСОН[1] ДҮСТУРУ (ПАРАБОЛА МЕТОДУ)

Бундан габаг трапесиjа дүстуруну чыхаран заман һәр бир кичик $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ һиссәсиндә $y = f(x)$ әjрисини дүз хәтлә әвәз етдик.

Симпсон методунда исә бу чүр кичик һиссәләрдә $y = f(x)$ әjриси парабола илә әвәз едилир.

Инди исә $y = ax^2 + bx + c$ параболасы, Oy оху вә араларындакы мәсафә $x = h$ олан хәтләрлә әһатә олунмуш саһәнин

$$S = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

олдуғуну исбат едәк (шәкил 20).

Бурада y_0 әдәди Oy оху истигамәтиндә јөнәлмиш уч ординатларындан бири, y_2 әдәди икинчи уч ординатдыр, y_1 исә учлардан ejни мәсафәдә јерләшән ординатдыр.

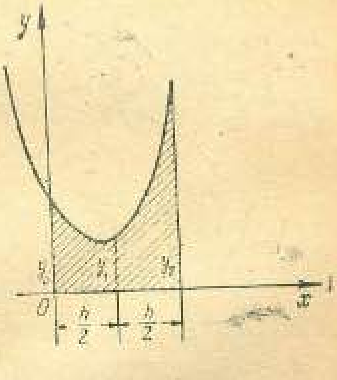
◄ $y_{x=0} = y_0 = (ax^2 + bx + c)_{x=0} = c,$

$$y_{x=\frac{h}{2}} = y_1 = (ax^2 + bx + c)_{x=\frac{h}{2}} = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh}{2} + c.$$

$$y_{x=h} = y_2 = (ax^2 + bx + c)_{x=h} = ah^2 + bh + c.$$

Бу ахырынчылардан

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = c + 4a\,\frac{h^2}{4} + \frac{4bh}{2} +$$



Шәкил 20

---

[1] Томас Симпсон (1710—1761) инҝилис риjазиjjатчысыдыр.

$$+4c+ah^2+bh+c=2ah^2+3bh+bc,$$

вә ја

$$\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+bc)=\frac{h}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

Дикәр тәрәфдән,

$$S=\int_0^h(ax^2+bx+c)\,dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right)\Big|_0^h=$$

$$=\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch=\frac{h}{6}(3ah^2+3bh+6c).\ \blacktriangleright$$

Мисал. $y=x^2-2x+2$ параболасы, Ox оху вә $x=0$, $x=3$ ординатлары илә әһатә олунмуш саһәни тапын.

■ $S=\frac{h}{6}(y_0+4y_1+y_2)$ дүстуруну јазыб бурада иштирак едән y_0, y_1, y_2 вә h-ы тә'јин едәк.

$$y_{x=0}=y_0=(x^2-2x+2)_{x=0}=2,$$

$$y_{x=1,5}=y_1=(x^2-2x+2)_{x=1,5}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}+2=\frac{5}{4},$$

$$y_{x=3}=y_2=(x^2-2x+2)_{x=3}=3^2-2\cdot3+2=5;$$

$$h=3.$$

Демәли, $S=\frac{3}{6}\left(2+4\cdot\frac{5}{4}+5\right)=6$ кв. ваһид. ■

◀ Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә кәсилмәздир вә $[a, b]$ парчасыны $2n$ сајда бәрабәр һиссәјә бөләк.

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{2к-2}<x_{2к}<\ldots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b,$$

$$h_к=\frac{b-a}{2n}\quad(1\leqslant к\leqslant 2n),$$

$$y_к=f(x_к)\quad(к=\overline{0,\ 2n})$$

ишарә едәк.

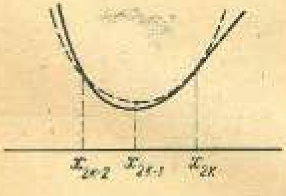
Һәр һансы $[x_{2к-2}, x_{2к}]$ парчасында орта нөгтәнин абсисин $x_{2к-1}$ илә ишарә едиб һәмин парчада $y=f(x)$ әјрисини

$$y=a_кx^2+b_кx+c_к,$$

$$M_{2к-2}(x_{2к-2}, y_{2к-2}),$$

$$M_{2к-1}(x_{2к-1}, y_{2к-1}),\quad M_{2к}(x_{2к}, y_{2к})$$

нөгтәләриндән кечән парабола илә әвәз едәк (шәкил 21).



Шәкил 21

Бурада

$$\varphi_к(x)=a_кx^2+b_кx+c_к \tag{1}$$

квадрат үчһәдлисини елә сечәк ки, $\varphi_k(x_{2k-2}) = y_{2k-2}$, $\varphi_k(x_{2k-1}) = y_{2k-1}$, $\varphi_k(x_{2k}) = y_{2k}$ олсун, a_k, b_k, c_k-ләр тә'јин едиләрсә, (1) үчһәдлиси мүәјјән олар.

Бу әмсаллар

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2}, \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1}, \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}$$

системиндән тә'јин едилир. Доғрудан да системин әмсалларындан дүзәлмиш детерминант Вандер Монд* детерминанты олдуғу үчүн сыфырдан фәрглидир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k-2}^2 & x_{2k-2} & 1 \\ x_{2k-1}^2 & x_{2k-1} & 1 \\ x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \end{vmatrix}$$

Демәли, (2) системиндән, a_k, b_k, c_k әмсаллары јеканә олараг тә'јин едилир. Бунунла да (1) үчһәдлисинин тамамилә мүәјјән олдуғу көстәрилир.

$\varphi_k(x)$ квадрат үчһәдлисинин варлығындан

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (a_k x^2 + b_k x + c_k)\,dx$$

олар. Сағ тәрәфдәки интегралы һесаблајаг:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x)\,dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (a_k x^2 + b_k x + c_k)\,dx = a_k \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{3} +$$

$$+ b_k \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2} + c_k (x_{2k} - x_{2k-2})$$

вә ја

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x)\,dx = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \left[2a_k (x_{2k-2}^2 + x_{2k-2} x_{2k} + x_{2k}^2) + \right.$$

$$\left. + 3b_k (x_{2k-2} + x_{2k}) + 6c_k \right] = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \left\{ (a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + \right.$$

$$+ c_k) + 4\left[a_k \left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right)^2 + b_k \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} + c_k\right] +$$

---

* Александр Теофилем Вандер Монд (1735—1796) франсыз ријазијјатчысыдыр.

$$+\left(a_\kappa x_{2\kappa}^2 + b_\kappa x_{2\kappa} + c_\kappa\right)\Big\} = \frac{x_{2\kappa}-x_{2\kappa-2}}{6}\times$$

$$\times\left[\varphi_\kappa(x_{2\kappa-2}) + 4\varphi_\kappa\left(\frac{x_{2\kappa-2}+x_{2\kappa}}{2}\right) + \varphi_\kappa(x_\kappa)\right].$$

Дикәр тәрәфдән,

$$x_{2\kappa}-x_{2\kappa-2}=\frac{b-a}{n} \text{ вә } \frac{x_{2\kappa-2}+x_{2\kappa}}{2}=x_{2\kappa-1}$$

$$\varphi_\kappa(x_{2\kappa-2})=y_{2\kappa-2};\ \varphi_\kappa(x_{2\kappa-1})=y_{2\kappa-1};\ \varphi_{2\kappa}(x_{2\kappa})=y_{2\kappa}$$

олдуғундан

$$\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} \varphi_\kappa(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_{2\kappa-2}+4y_{2\kappa-1}+y_{2\kappa}\right)$$

вә

$$\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}\left(y_{2\kappa-2}+4y_{2\kappa-1}+y_{2\kappa}\right)\quad (\kappa=\overline{1, n}).$$

Ахырынчылары чәмләсәк

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(y_{2\kappa-2}+4y_{2\kappa-1}+y_{2\kappa}\right)$$

вә ја

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(y_{2\kappa-2}+4y_{2\kappa-1}+y_{2\kappa}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{\kappa=1}^{n}y_{2\kappa-1}+2\sum_{\kappa=1}^{n-1}y_{2\kappa}\right).$$

Бу дүстур *Симпсон дүстуру* адланыр. Бурада хәтанын һесабланмасы тамамилә трапесијалар методунда олдуғу кимидир.

$f(x)$-ин $[a, b]$-дә дөрдүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәсинин олдуғуну фәрз етсәк,

$$R_n=\int_a^b f(x)\,dx-S=-\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}\cdot f^{(IV)}(\xi)\quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$ ▶

Мисал. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ интегралыны $n=2$ олдугда Симпсон дүстуру илә һесаблајын.

■ $n=2$ олдугда Симпсон дүстурундан аларыг ки,

x_0	0°	y_0	$\sin 0 = 0{,}0000$
x_1	$22^\circ30'$	y_1	$\sin 22^\circ30' = 0{,}3827$
x_2	45°	y_2	$\sin 45^\circ = 0{,}7071$
x_3	$67^\circ30'$	y_3	$\sin 67^\circ30' = 0{,}9239$
x_4	90°	y_4	$\sin 90^\circ = 1{,}0000$

$$y_0 + y_{2n} = y_0 + y_4 = 1{,}0000; \quad 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1} = 4(y_1 + y_3) = 5{,}2264,$$

$$\frac{b-a}{6n} = \frac{\pi}{2\cdot 6\cdot 2} = \frac{\pi}{24} = 0{,}1309; \quad 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} = 2y_2 = 1{,}4142.$$

Беләликлә, Симпсон дүстуруна әсасән

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k}\right) = 0{,}1309\,(1{,}0000 + 5{,}2264 + 1{,}4142) = 1{,}0002.$$

Бурада хәта трапесијалар методундан чох аз олур. ■

Чалышмалар

Ашағыдакы интеграллары тәгриби һесаблајын.

1. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ интегралыны дүзбучаглылар, трапесијалар вә параболик дүстурларын һәр бири илә 0,00001 дәгигликлә тәгриби һесаблајын.

Ҹаваб: $J = 0{,}69284$; $J = 0{,}69377$; $J = 0{,}69315$.

2. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ интегралыны Симпсон дүстуру илә 0,0001 дәгигликлә һесаблајын вә бурахылан хәтаны гијмәтләндирин.

Ҹаваб: $J = 0{,}7468$; $|R| < 0{,}0001$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ интегралыны $n=5$ үчүн Симпсон дүстуру илә 0,00001 дәгигликлә һесаблајын вә бурахылан хәтаны гијмәтләндирин.

Ҹаваб: $J = 0{,}91597$; $|R| < 0{,}00001$.

IV ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺӘНДӘСИ ТӘТБИГЛӘРИ

§ 1. МҮСТӘВИ ФИГУРУН САҺӘСИ

Мүстәви фигур дедикдә, мүстәви үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари мәһдуд чохлуг нәзәрдә тутулур.

Бу мәгсәдлә E фигуруна дахил олан ихтијари чохбучаглы фигуру P илә, E-ни тамамилә өз дахилинә алан чохбучаглы фигуру исә Q илә ишарә едәк. Белә олдугда P вә Q фигурларына ујғун олараг дахилә вә харичә чәкилмиш фигурлар дејилир. Дахилә чәкилмиш чохбучаглы фигурларын саһәләри чохлуғу $\{\mu(P)\}$ (әдәди чохлуг) јухарыдан мәһдуддур (мәсәлән, харичә чәкилмиш истәнилән чохбучаглынын саһәси илә). Аналожи олараг E фигурунун харичинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн чохбучаглы фигурларын саһәләри чохлуғу $\{\mu(Q)\}$ ашағыдан (мәсәлән, 0 илә) мәһдуддур. Демәли, E фигурунун дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохбучаглыларын саһәләринин μ^* дәгиг јухары сәрһәди вә харичә чәкилмиш чохбучаглыларын μ_* дәгиг ашағы сәрһәди вар.

Јә'ни

$$\mu_* = \mu_*(E) = \sup_{P \subset E} \mu(P), \tag{1}$$

$$\mu^* = \mu^*(E) = \operatorname{int}_{Q \supset E} \mu(Q). \tag{2}$$

μ_* вә μ^*-јә ујғун олараг E фигурунун ашағы вә јухары саһәләри дејилир. Дахилә чәкилмиш ихтијари фигурун саһәси харичә чәкилмиш фигурун саһәсиндән һәмишә бөјүк олмадығындан $\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)$ олар.

Гејд. E фигурунун дахилинә һеч бир чохбучаглы чәкмәк мүмкүн дејилсә, онда $\mu = 0$ гәбул едилир.

Тә'риф. *E мүстәви фигурун јухары саһәси һәмин фигурун ашағы саһәси илә үст-үстә дүшәрсә, јә'ни $\mu^* = \mu_*$ оларса, онда E фигуруна квадратланан (саһәси олан) фигур дејилир.*

Теорем 1. ***E фигурунун квадратланан олмасы үчүн зәрури нә кафи шәрт, ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә E фигурунун ујғун олараг харичинә вә дахилинә чәкилмиш елә Q вә P чохбучаглы фигурларынын олмасыдыр ки, онлар үчүн***

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon \tag{3}$$

өдәнилсин.

◀ Шәрт зәруридир. Јә'ни E фигурунун квадратланан олдуғуну фәрз едиб (3) шәртинин өдәнилдијини кәстәрәк. Шәртә көрә E фигуру квадратланандыр. Демәли, $\mu^*=\mu_*$ олар. (1) вә (2) дәгиг ашағы вә јухары сәрһәдләрин тә'рифинә көрә ихтијари $\varepsilon>0$ көрә дахилә вә харичә чәкилмиш елә P, Q чохбучаглы фигурларыны тапмаг олар ки,

$$\mu_*-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(P)\leqslant\mu_*;\quad \mu^*\leqslant\mu(Q)<\mu^*+\frac{\varepsilon}{2}$$

өдәнилсин. (4) вә $\mu^*=\mu_*$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ алынар. Беләликлә, шәртин зәрури олмасы исбат едилир.

Шәрт кафидир. Јә'ни (3) шәрти өдәнилирсә, E мүстәви фигурунун квадратланан олдуғуну көстәрмәк лазымдыр. Тутаг ки, $\forall\varepsilon>0$ үчүн елә Q вә P фигурлары тапмаг мүмкүндүр ки, (3) шәрти өдәнилир. Дикәр тәрәфдән,

$$\mu(P)\leqslant\mu_*\leqslant\mu^*<\mu(Q)$$

олдуғундан, (4) вә (5)-дән $0\leqslant\mu^*-\mu_*\leqslant\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ алынар. $\varepsilon>0$ ихтијари олдуғу үчүн $0\leqslant\mu^*-\mu_*<\varepsilon$ шәртиндән $\mu^*=\mu_*$ олар.

Демәли, E фигуру квадратланандыр. ▶

Теорем 2. ***E фигурунун квадратланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт ихтијари $\varepsilon>0$ көрә E фигурунун үјғун олараг харичинә вә дахилинә чәкилмиш елә Q вә P квадратланан мүстәви фигурларынын олмасыдыр ки, онлар үчүн***

$$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$$

шәрти өдәнилсин.

◀ Шәртин зәрурилији E фигуру квадратланандыр. Онда теорем 1-ә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә Q вә P чохбучаглылары тапмаг олар ки, $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ олар. Q вә P чохбучаглы олдуғуна көрә квадратланандыр. Демәли, шәртин зәрури олмасы исбат олунур.

Шәртин кафилији. Јә'ни истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн теоремин шәртини өдәјән елә квадратланан P вә Q фигурларыны тапмаг олар ки,

$$\mu(Q)-\mu(P)<\frac{\varepsilon}{4}\tag{6}$$

шәрти өдәнилир. Шәртә көрә Q вә P квадратланан мүстәви фигурларыдыр. Онда Q-нү өз дахилинә алан елә $\widetilde{Q}$ чохбучаглысы вә P-нин дахилиндә јерләшән елә $\widetilde{P}$ чохбучаглысы тапмаг олар ки,

$$\mu(\widetilde{Q})-\mu(Q)<\frac{\varepsilon}{4},\quad \mu(P)-\mu(\widetilde{P})<\frac{\varepsilon}{4}\tag{7}$$

олсун. (6) вә (7)-дән $\mu(\widetilde{Q})-\mu(\widetilde{P})<\varepsilon$ олдуғу алынар. Чохбучаглы $\tilde{Q}$ мүстәви фигуру E-ни дахилинә алдығындан вә чохбучаглы $\tilde{P}$ мүстәви фигуру E-јә дахил олдуғундан бундан габагкы теоремә әсасән E фигуру квадратланандыр.

1. Әјрихәтли трапесијанын саһәси

Јухарыдан $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмиш мәнфи олмајан кәсилмәз $y=f(x)$ әјриси илә, јанлардан Ox охуна перпендикулјар ики $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри илә, ашағыдан исә Ox оху үзәриндә јерләшмиш $[a; b]$ парчасы илә әһатә олунмуш фигура әјрихәтли трапесија дејилир (шәкил 22).

Теорем 3. ***Әјрихәтли трапесија квадратланан фигур олмагла саһәси,***

$$\mu(E)=\int_a^b f(x)\,dx$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

◀ Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәнфи олмајан кәсилмәз функсијадыр. Демәли, бу функсија һәмин парчада интегралланандыр. Онда, истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнү тапмаг олар ки,

$$S-s<\varepsilon$$

шәрти өдәнилә. Бурада S вә s көстәрилән бөлкүјә ујғун јухары вә ашағы Дарбу чәмләридир.

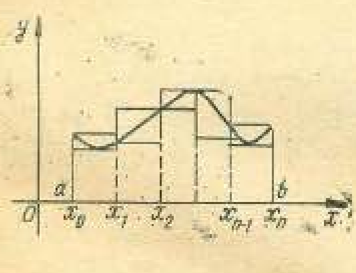
Шәкилдән көрүндүјү кими, $S=\mu(Q)$ вә $s=\mu(P)$ (бурада Q әјрихәтли трапесијаны дахилинә алан, P исә онун дахилиндә јерләшән чохбучаглыдыр). Демәли,

$$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$$

олур. Бу исә әјрихәтли трапесијанын квадратланан олмасы үчүн һәм зәрури вә һәм дә кафидир. Ашкардыр ки, $s\leqslant\mu(E)\leqslant S$ вә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$-дә интегралланан олдуғундан

$$\lim_{\lambda\to 0} S=s\lim_{\lambda\to 0}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Бурада $\lambda=\max\Delta x_k$.



Шәкил 22

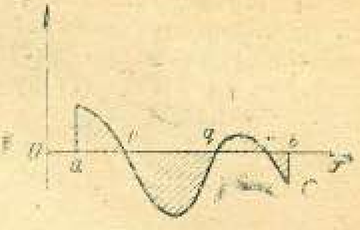
Гејд. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз вә мәнфи олдугда буна ујғун фигурун саһәси

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

олар.

Функсија парча дахилиндә өз ишарәсини дәјишәрсә (шәкил 23)

$$S=\left|\int_a^p f(x)\,dx\right|+\left|\int_p^q f(x)\,dx\right|+$$
$$+\left|\int_q^r f(x)\,dx\right|+\left|\int_r^q f(x)\,dx\right|$$



Шәкил 23

вә ја

$$S=\int_a^p f(x)\,dx-\int_p^q f(x)\,dx+\int_q^r f(x)\,dx-\int_r^b f(x)\,dx.$$

Мисал. $[0, 2\pi]$ парчасында $y=\sin x$ әјриси илә вә Ox оху илә әһатә олунмуш саһәни тапын (шәкил 24).

■ $[0, 2\pi]$ парчасыны $[0, \pi]$ вә $[\pi, 2\pi]$ кими ики парчаја бөләк. $[0, \pi]$ парчасында $\sin x \geqslant 0$ вә $[\pi, 2\pi]$ парчасында $\sin x < 0$ олдуғундан

$$S=\int_0^\pi \sin x dx-\int_\pi^{2\pi} \sin x dx=-\cos x\Big|_0^\pi-$$
$$-(-\cos x\Big|_\pi^{2\pi}=2+2=4 \text{ кв. ваһид.}$$ ■

Ашағыда көстәрилән садә һаллар үчүн саһәләрин һесабланмасы охучуја тапшырылыр.

а) Ики әјри арасында јерләшән саһәнин һесабланмасы. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш

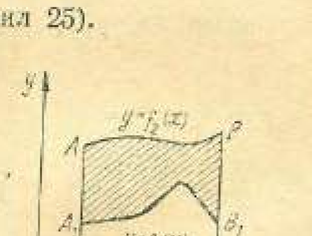
$$y=f_1(x);\ y=f_2(x);\ (f_1(x)\leqslant f_2(x))$$

кәсилмәз функсијалары вә $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри арасында галан фигурун саһәси

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx$$

дүстуру илә тә'јин едилир (шәкил 25).

Шәкил 24



Шәкил 25

б) Параметрик шәкилдә верилмиш әјри васитәсилә әһатә олунмуш мүстәви фигурун саһәси.

Әјри тәнлији $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ шәклиндә вериләрсә вә $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функсијаларынын кәсилмәз төрәмәләри варса бу һалда саһә,

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

вә ја

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(xy_t'-yx_t'\right)dt$$

дүстуру илә һесабланыр.

2. Әјри тәнлији полјар координат системиндә верилдикдә саһәнин тә'јини

Фәрз едәк ки, L әјрисинин тәнлији $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз вә һәм дә мәнфи олмајан $\rho=\rho(\theta)$ шәклиндә верилир.

Тә'риф. *L әјриси вә полјар ох илә α вә β буҹағы әмәлә кәтирән ики радиус векторла әһатә олунмуш мүстәви фигура әјрихәтли сектор дејилир.*

Теорем 2. ***Әјрихәтли сектор квадратланан фигурдур вә онун саһәси***

$$S=\mu(E)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)\,d\theta$$

дүстуру илә һесабланыр (шәкил 26).

◀ Бу мәгсәдлә $[\alpha, \beta]$ парчасыны ихтијари гајда илә

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{k-1}<\theta_k<\ldots<\theta_n=\beta$$

кими n һиссәјә бөләк вә һәр бир хүсуси $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ парчасы үчүн даирәви секторлар гураг.

$[\theta_{k-1}, \theta_k]$ парчасында верилмиш функсијанын ән кичик вә ән бөјүк гијмәтини ујғун олараг r_k вә R_k илә ишарә едиб даирәви секторлар чәкәк. Бу гајда илә квадратланан ики фигур алынар. Бу фигурлардан бири A әјрихәтли сектору дахилиндә јерләшән, дикәри исә бу сектору өз дахилинә алан B фигурудур. Бу фигурларын саһәләри ујғун олараг

Шәкил 26

$$s=\mu(A)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k^2\,\Delta\theta_k,$$

$$S = \mu(B) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{n} R_\kappa^2 \Delta\theta_\kappa$$

олар.

(Бурада $\Delta\theta_\kappa = \theta_\kappa - \theta_{\kappa-1}$-дир). Бу чәмләрин һәр бири $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функсијасы үчүн һәмин бөлкүјә ујғун Дарбу чәмләридир. $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функсијасы $[\alpha, \beta]$-да кәсилмәз олдуғундан интеграллананды. Белә олдугда истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\{\theta_\kappa\}$ бөлкүсү тапмаг олар ки, бунун үчүн

$$S - s = \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon.$$

Дикәр тәрәфдән A вә B квадратланан олдуғундан вә бунлардан бири әјрихәтли секторун дахилиндә јерләшдијиндән, дикәри исә бу сектору өз дахилиндә сахладығындан теорем 2-јә әсасән әјрихәтли сектор квадратланандыр.

$$s = \mu(A) \leqslant \mu(E) \leqslant \mu(B) \leqslant S$$

олдуғундан,

$$\lim_{\lambda\to 0} S = \lim_{\lambda\to 0} s = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta,$$

$$\mu(E) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta. \quad ▶$$

Саһә һесабланмасына аид бир нечә мисал.

Мисал 1. Еллипсин саһәсини тапын.

■ Еллипс координат охларына көрә симметрик олдуғундан әввәлчә онун координат бучагларынын бириндә јерләшән һиссәсинин саһәсини һесаблајыб сонра 4-ә вурмаг лазымдыр (шәкил 27). Еллипсин кононик тәнлији

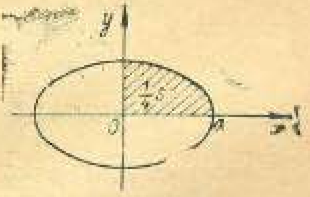
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

шәклиндә ифадә едилдијиндән,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx;$$

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^3}\,dx =$$

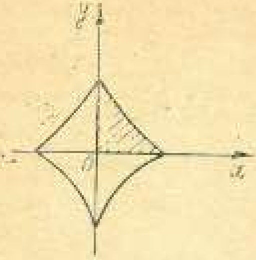


Шәкил 27

$$=\frac{4b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a=$$

$$=\frac{4a^2b}{2a}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab \text{ кв. ваһид. } ■$$

Хүсуси һалда $b=a=R$ оларса, $S=\pi R^2$ кв. ваһид даирәнин саһәсидир.



Шәкил 28

Мисал 2. $x=R\cos^3 t$; $y=R\sin^3 t$. Бу, астроидин параметрик тәнлијидир. Һәмин фигурун саһәсини тапмалы (шәкил 28).

Астроид координат охларына көрә симметрик олдуғундан онун биринчи квадратдакы саһәсини һесаблајыб 4-ә вурмаг лазымдыр. Ахтарылан саһәнин диференсиалы

$$dS=ydx \text{ вә } S=\int_0^R ydx;\quad y=R\sin^3 t$$

$$dx=-3R\sin t\cos^2 tdt$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S=-4\cdot 3R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 tdt=12R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\,dt=$$

$$=12R^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt\right).$$

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
R	0

Ахырынчы интегралы һесабламаг үчүн

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2к} tdt=\frac{(2к-1)(2к-3)\cdots 3\cdot 1}{2к(2к-2)\cdot b\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

интегралындан истифадә едәк.

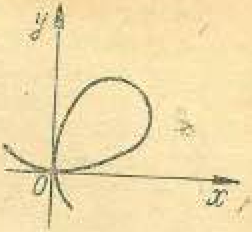
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16};\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32};$$

$$S=12R^2\left(\frac{3}{16}\cdot\pi-\frac{5}{32}\pi\right)=\frac{12\pi R^2}{3^2}=\frac{3}{8}\pi R^2.\ ■$$

Мисал 3. Тәнлији $x^3+y^3-3axy=0$ шәклиндә олан Декарт јарпағынын гапалы һиссәсинин саһәсини тапмалы.

■ Әјринин тәнлијини полјар координат системиндә јазаг (шәкил 29). Бу мәгсәдлә $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ әвәзләмәсини апараг. Онда $\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\sin^3\theta=3a\rho^2\sin\theta\cdot\cos\theta$ вә бурадан

$$\rho=\frac{3a\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}.$$



Шәкил 29

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\vartheta=\frac{9a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta.$$

Ахырынчы интегралы һесабламаг үчүн $\operatorname{tg}\theta=z$ әвәз етсәк,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{z^2dz}{(1+z^3)^2}=\frac{1}{3}.$$

Беләликлә, ахтарылан саһә $S=\frac{9a^2}{6}=1{,}5a^2$ кв. ваһид олур. ■

§ 2. ЧИСМИН ҺӘЧМИНИН ТӘ'ЈИНИ

Фәзада бүтүн нөгтәләр чохлуғуну көтүрәк вә бунлардан бирини A илә ишарә едәк.

Тә'риф 1. *Мәркәзи A нөгтәсиндә вә радиусу $\varepsilon>0$ олан күрәнин дахилиндә јерләшән фәза нөгтәләри чохлуғуна A нөгтәсинин ε әтрафы дејилир.*

Тә'риф 2. *A нөгтәсинин $\varepsilon>0$ (ε ихтијари мүсбәт кичик әдәддир) әтрафы тамамилә чохлуғун дахилиндә (харичиндә) јерләшәрсә, о һалда A нөгтәсинә һәмин чохлуғун дахили (харичи) нөгтәси дејилир.*

Тә'риф 3. *B нөгтәсинин истәнилән әтрафында һәм чохлуға дахил олан, һәм дә чохлуға дахил олмајан нөгтәләр оларса, онда B нөгтәсинә һәмин чохлуғун сәрһәд нөгтәси дејилир.*

Тә'риф 3'. *Сәрһәд нөгтәләри чохлуғуна бу чохлуғун сәрһәди дејилир.*

Тә'риф 4. *Фәзанын $\{M\}$ нөгтәләр чохлуғу тамамилә мүәјјән бир күрәнин дахилиндә јерләшәрсә, о һалда бу чохлуға мәһдуд чохлуг вә ја чисим дејилир.*

Үчөлчүлү фәзада гапалы област верилдијини фәрз едәк. Башга сөзлә, мәһдуд гапалы (бир вә ја бир нечә) сәтһлә һүдудланмыш ихтијари формалы V чисминә бахаг. V чисминин дахилиндә јерләшән вә һәмин чисми өз дахилинә алан ихтијари мүмкүн олан чохүзлүнү ујғун олараг A вә B илә ишарә едәк.

Саһәдә олдуғу кими дахилә чәкилмиш бүтүн мүмкүн чохүзлү чисимләрин һәчмләри чохлуғу $\{\mu(A)\}$ (әдәди чохлуг) јухарыдан (мәсәлән, харичә чәкилмиш истәнилән чохүзлүнүн һәчми илә) мәһдуддур. Аналожи олараг V чисминин харичинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохүзлүләрин һәчмләри чохлуғу $\{\mu(B)\}$ ашағыдан (мәсәлән, 0 илә) мәһдуддур. Демәли, V чисминин дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохүзлү чисимләрин һәчмләринин дәгиг ашағы сәрһәдди вар.

Тә'риф 5. *V чисминин дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохүзлү чисимләрин һәчмләринин дәгиг јухары сәрһәдинә V чисминин ашағы һәчми вә аналожи олараг чисмин харичинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохүзлү чисимләрин һәчмләринин дәгиг ашағы сәрһәдинә V чисминин јухары һәчми дејилир вә ујғун олараг, белә ишарә олунур:*

$$\mu_* = \mu_*(V) = \sup_{A \subset V} \mu(A)$$

$$\mu^* = \mu^*(V) = \inf_{B \supset V} \mu(B)$$

Бу тә'рифдән $\mu_* \leqslant \mu^*$ олмасы ашкардыр.

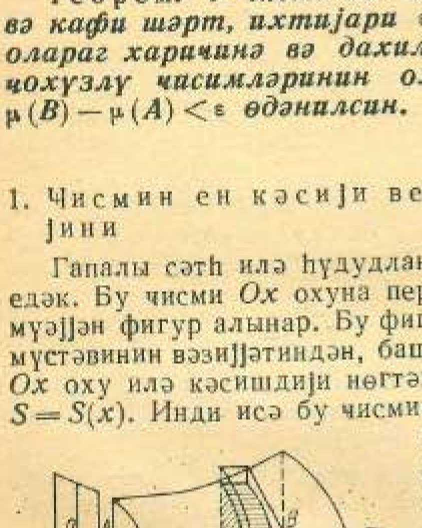
Тә'риф 6. $\mu_* = \mu^*$ *оларса, V-јә кубланан (вә ја һәчмә малик олан) чисим дејилир.*

§ 1-дә исбат едилән теорем 1-ә аналожи теореми бурада да сөјләмәк олар.

Теорем. ***V чисминин кубланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә V чисминин ујғун олараг харичинә вә дахилинә чәкилмиш елә B вә A чохүзлү чисимләринин олмасыдыр ки, онлар үчүн, $\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ өдәнилсин.***

1. Чисмин ен кәсији верилдикдә һәчминин тә'јини

Гапалы сәтһ илә һүдудланмыш чисмин верилдијини фәрз едәк. Бу чисми Ox охуна перпендикулјар мүстәви илә кәсәк, муәјјән фигур алынар. Бу фигурун S саһәси үмумијјәтлә, чари мүстәвинин вәзијјәтиндән, башга сөзлә десәк, чари мүстәвинин Ox оху илә кәсишдији нөгтәнин абсисиндән асылыдыр, јә'ни $S = S(x)$. Инди исә бу чисмин һәчминин тапылмасы илә мәшғул олаг. Бунун үчүн чисми $x = a$, $x = b$ мүстәвиләри илә Ox охуна перпендикулјар олараг кәсәк вә бу кәсикләр арасындакы чисмин һиссәсинин һәчмини тә'јин едәк (шәкил 30).



Шәкил 30

Бурада алынан фигурун анчаг бир гапалы әјри илә әһатә олундугу вә бунун $S(x)$ ен кәсији саһәсинин мә'лум олдугу нәзәрдә тутулур. Ахтарылан һәчми тә'јин етмәк үчүн $[a, b]$ парчасыны ихтијари гајда илә n һиссәјә бөләк:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$S(x)$ функсијасынын һәмин парчада кәсилмәз олдуғуну фәрз едәк. Һәр бир бөлкү нөгтәсиндән Ox охуна перпендикулјар мүстәвиләр кечирәк. Белә олдугда чисим бу паралел мүстәвиләр васитәсилә золаглара бөлүнүр. x_{k-1} вә x_k нөгтәләриндән кечән мүстәвиләрлә әһатә олунмуш елементар золағы ΔV_k илә ишарә едәк.

$S(x)$ функсијасы $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында кәсилмәз олдугундан Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән һәмин парчада өзүнүн ән бөјүк M_k вә ән кичик m_k гијмәтләрини алыр.

Бу парчада мүхтәлиф кәсикләр бир мүстәви үзәриндә јерләшәрсә, бунларын һамысы бизим фәрзијјәмизә көрә саһәси M_k олан ән бөјүк кәсијин дахилиндә јерләшир. Ашкардыр ки, бу кәсик һәм дә саһәси m_k олан ән кичик кәсији өз дахилиндә сахлајыр. Ән бөјүк вә ән кичик кәсикләрлә һүндүрлүјү $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ олан силиндрләр гураг. Бунлардан ән бөјүјү Δx_k золағыны өз дахилиндә сахлајыр, ән кичији исә бу золағын дахилиндә јерләшир.

Бу силиндрләрин һәчмләри ујғун олараг $M_k \Delta x_k$ вә $m_k \Delta x_k$ олар.

Беләликлә, һәчмләрин чәми ујғун олараг $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ олар вә $\Delta x_k \to 0$ олдугда бунларын лимити бәрабәр олмагла

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (1)$$

ахтарылан чисмин һәчми олур.

Нәтичә. Верилмиш чисми Ox охуна перпендикулјар мүстәвиләрлә кәсдикдә алынан ен кәсикләрин саһәси мә'лум олдугда бу чисмин һәчми (1) дүстуру илә ифадә олунур. Бурада S—ен кәсијин саһәси, x—дәјишән нөгтәнин абсиси, a вә b исә чисмин кәнар кәсикләринин абсисидир.

Мисал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ еллипсоидинин һәчмини тапын. Еллипсоидин мәркәзиндән x мәсафәсиндә олан нөгтәдән кечән вә Ox охуна перпендикулјар мүстәви илә кәсији еллипс олар.

Һәгигәтән, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ вә ја $1-\frac{x^2}{a^2}$ ифадәсинә бөлмәклә алынан,

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \tag{2}$$

тәнлији еллипсин тәнлијидир. Бу еллипсин јарымохлары ујғун олараг

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{вә} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

олар.

Јарымохлары a вә b олан еллипсин саһәсинин πab олдуғуну нәзәрә алсаг, онда (2) еллипсинин саһәси,

$$S(x)=\pi bc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Беләликлә, ахтарылан һәчм

$$V=\int_{-a}^{+a}S(x)\,dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2x+\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{4}{3}\pi abc\ (\text{ваһид})^3.$$

Хүсуси һалда, $a=b=c=R$ оларса, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ күрә һәчмидир. ■

2. Фырланмадан алынан чисмин һәчминин тә'јини.

Теорем. ***$y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздирсә, онда $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри, тәнлији $y=f(x)$ олан AB әјриси илә вә Ox оху илә әһатә олунмуш әјрихәтли трапесијанын Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисим кубланандыр вә онун һәчми***

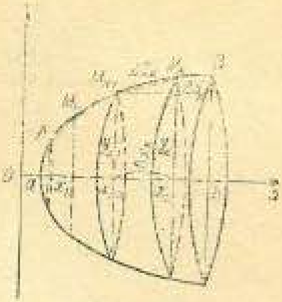
$$\mu(V)=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)\,dx \tag{3}$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

◀ Истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү илә $[a, b]$ парчасыны кичик һиссәләрә бөләк. Һәр бир хүсуси $[x_{k-1}, x_k]$ һиссәсиндә $f(x)$ кәсилмәз олдуғундан Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән һәмин парчада өзүнүн ән бөјүк M_k вә ән кичик m_k гијмәтини алыр.

Һәр бир кичик парчада һүндүрлүкләри ујғун олараг m_k вә M_k олан ики дүзбучаглы гураг (шәкил 31). Нәтичәдә ики пилләвари фигур алынар. Бунлардан бири әјрихәтли трапесијанын дахилиндә јерләшир, дикәри исә әјрихәтли трапесијаны өз дахилинә алыр.

Әјрихәтли трапесија вә бу пилләвари фигурларын фырланмасындан V чисми вә ики пилләвари чисим алынар. Бу чисимләрдән бири V чисмини өз дахилинә алар, дикәри исә V чисминин дахилиндә јерләшәр.



Шәкил 31

Ујғун B вә A чисимләринин һәчмләри

$$\mu(B)=\pi\sum_{\kappa=1}^{n}M_{\kappa}^{2}\Delta x_{\kappa};\qquad \mu(A)=\pi\sum_{\kappa=1}^{n}m_{\kappa}^{2}\Delta x_{\kappa} \tag{4}$$

олар. (4) чәмләри $\pi f^2(x)$ функсијасы үчүн јухары вә ашағы Дарбу чәмләридир. Бу функсија интегралланан олдуғундан $\mu(B)-\mu(A)=S-s<\varepsilon$ олар. Бу исә чисмин кубланан олдуғуну көстәрир. Дикәр тәрәфдән,

$$\lim_{\lambda\to 0}s=\lim_{\lambda\to 0}S=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)\,dx$$

олдуғуна көрә (3) дүстуру доғрудур.

Гејд 1. Әјрихәтли трапесија Oy оху әтрафында фырланан заман алынан чисмин һәчми

$$V=\pi\int_{c}^{d}x^2\,dy.$$

Гејд 2. (3) дүстуру (1) дүстурунун хүсуси һалыдыр. Бурада

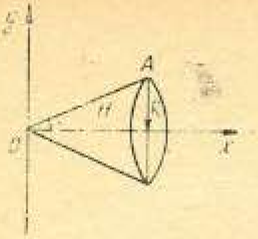
$$S(x)=\pi f^2(x)\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

Фырланмадан алынан чисмин һәчминин тапылмасына аид мисаллар

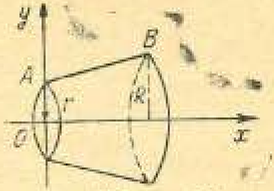
Мисал 1. Отурачаг радиусу R вә һүндүрлүјү H олан конусун һәчмини тапмалы.

■ Конусун шәкилдә көстәрилән вәзијјәтдә олдуғуну фәрз едәк. Онун һәчмини тапмаг үчүн әввәлчә OA дүз хәттинин тәнлијини тапмаг лазымдыр. OA дүз хәтти координат башланғычындан кечдијинә көрә онун тәнлији $y=\kappa x$ шәклиндә олар (шәкил 32).

Шәкилдән $\kappa=\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{H}$ вә нәтичәдә $y=\frac{R}{H}x$ олар. Онда



Шәкил 32



Шәкил 33

$$V = \pi \int_0^H y^2\,dx = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2 x^3}{H^2 \cdot 3}\Big|_0^H =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 H \text{ (ваһид)}^3. \ ■$$

Мисал 2. Мәркәзи координат башлангычында вә радиусу R олан күрәнин һәчмини тапмалы.

■ Күрә, јарымдаирәнин Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр. Бу һалда чеврә тәнлији $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ олар.

Демәли, $V = \pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx =$

$$= 2\pi\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \ ■$$

Мисал 3. Отурачаг радиуслары r, R вә һүндүрлүјү H олан кәсик конусун һәчмини тапын (шәкил 33).

■ AB дүз хәттинин тәнлијини јазаг. Бу дүз хәтт $A(0, r)$ вә $B(H, R)$ нөгтәләриндән кечдијинә көрә

$$\frac{y-r}{R-r} = \frac{x-0}{H-0}; \quad y = r + \frac{R-r}{H}x$$

олар.

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^H \left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^H \left[r^2 + \frac{2r(R-r)}{H}x + \frac{(R-r)^2}{H^2}x^2\right] dx =$$

$$= \frac{\pi H}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2). \ ■$$

§ 3. ӘЈРИ ГӨВСҮНҮН УЗУНЛУҒУ

1. Садә әјри анлајышы

Ики $\varphi(t)$ вә $\psi(t)$ функсијаларынын $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз олдуғуну фәрз едәк (t — параметрдир). x вә y әдәдләриндән дүзәлмиш (x, y) чүтләринин низами дүзүлүшүндән алынан мүстәви һиссәсинә бахаг. Һәр бир (x, y) чүтү, мүстәвинин нөгтәсини вә x, y әдәдләри бу нөгтәнин координатларыны ифадә едир. Адәтән, (x, y) нөгтәси $M(x, y)$ кими јазылыр.

$$x = \varphi(t);\ y = \varphi(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{1}$$

(1) тәнликләриндә t параметринә заман кими бахыларса, онда (1) тәнликләри мүстәвидә координатлары x вә y олан M нөгтәсинин һәрәкәт ганунуну ифадә едәр. Јә'ни $\forall t \in [\alpha, \beta]$ гијмәтинә ујғун көтүрүлмүш $\{M\}$ нөгтәләр чохлуғуна (1) гануну илә һәрәкәт едән нөгтәнин изи кими бахыла биләр.

Тә'риф 1. *Координатлары (1) тәнлији илә тә'јин олунан $\{M\}$ нөгтәләр чохлуғу вериләрсә вә $[\alpha, \beta]$ парчасындан көтүрүлмүш t-нин мухтәлиф гијмәтинә $\{M\}$ чохлуғунун мухтәлиф нөгтәси гаршы гојуларса, бу нөгтәләр чохлуғуна садә мүстәви әјриси дејилир.*

Садә мүстәви әјрисини тәшкил едән $\{M\}$ нөгтәләр чохлуғунун t параметринин α вә β сәрһәд гијмәтинә ујғун олан нөгтәләрә әјринин сәрһәд нөгтәси дејилир.

Тә'риф 2. *Сәрһәд нөгтәләри үст-үстә дүшән вә галан нөгтәләри мухтәлиф олан ики садә әјринин бирләшмәсиндән алынан әјријә гапалы садә әјри дејилир.*

2. $C_{[a,b]}$ вә $C^{k}_{[a,b]}$ функсионал фазалары һаггында анлајыш.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш бүтүн кәсилмәз функсијалар чохлуғуну $C_{[a,b]}$ вә $[a, b]$-дә k-чы тәртиб кәсилмәз төрәмәјә малик функсијалар чохлуғуну $C^{k}_{[a,b]}$ илә ишарә едәк.

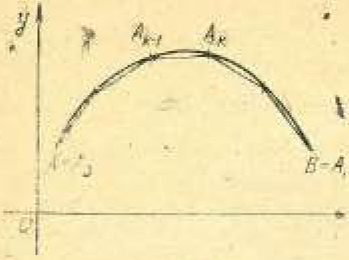
Тә'риф 3.

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta);\ \varphi(t),\ \psi(t) \in C'_{[\alpha,\beta]},$$

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$$

оларса, (1) тәнлијинин тә'јин етдији әјријә һамар әјри дејилир. Инди исә (1) тәнлији илә тә'јин олунан кәсилмәз AB әјрисинин гөвсүнүн узунлуғу анлајышыны верәк.

Бу мәгсәдлә $[\alpha, \beta]$ парчасыны истәнилән гајда илә $\alpha = t_0 < t_1, \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ кими n һиссәјә бөләк. (Әјринин мүсбәт истигамәти параметрин артма истигамәти илә тә'јин едилир.) Бу гајда илә бөлүнмүш һәр бир t_k нөгтәсинә гаршы әјри үзәриндә $A_k \in AB$ $(A_0 = A,\ A_n = B)$ нөгтәси ујғун гојулур. Әјри үзәриндә көтүрүлмүш A_k нөгтәләрини ардычыл олараг $\overline{A_{k-1}, A_k}$ дүз хәтт парчалары илә бирләшдирәк. Беләликлә, AB әјрисинин дахилинә чәкилмиш сыныг хәтт алынар.



Шәкил 34

Бу сыныг хәттин узунлугу $S_к = |A_{к-1}A_к|$ парчаларынын узунлуғу чәминә бәрабәрдир (шәкил 34).

Јә'ни

$$l_n = \sum_{к=1}^{n-1} S_к = \sum_{к=1}^{n-1} |A_{к-1}A_к|$$

олур.

Тә'риф 4. *l_n узунлуғунун сонлу лимитинә ($n \to \infty$) AB әјри гөвсүнүн узунлуғу дејилир вә*

$$\lim_{n \to \infty} l_n = l$$

кими ишарә едилир.

Бу һалда AB әјрисинә дүзләнә билән әјри дејилир.

Теорем. ***$\varphi(t), \psi(t) \in C'_{[\alpha, \beta]}$ оларса (1) әјриси $[\alpha, \beta]$ парчасында дүзләнән әјридир вә бу әјринин узунлуғу***

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \qquad (2)$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

◀ $A_к(x_к, y_к)$ $(к = \overline{1, n})$ нөгтәләринин координатларыны

$$x_к = \varphi(t_к), \quad y_к = \psi(t_к)$$

илә ишарә едәк. Онда

$$S_к = |A_{к-1}, A_к| = \sqrt{(x_к - x_{к-1})^2 + (y_к - y_{к-1})^2} =$$
$$= \sqrt{[\varphi(t_к) - \varphi(t_{к-1})]^2 + [\psi(t_к) - \psi(t_{к-1})]^2} \qquad (3)$$

олур. Шәртә көрә $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функсијаларынын өзләри вә биринчи тәртиб төрәмәләри $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир. Демәли, бу функсијалар үчүн Лагранж теоремини тәтбиг етсәк,

$$\varphi(t_к) - \varphi(t_{к-1}) = \varphi'(\tau_к)(t_к - t_{к-1}), \quad t_{к-1} < \tau_к < t_к, \qquad (4)$$
$$\psi(t_к) - \psi(t_{к-1}) = \psi'(\tau'_к)(t_к - t_{к-1}), \quad t_{к-1} < \tau'_к < t_к.$$

$t_к - t_{к-1} = \Delta t_к$ ишарә едиб алынан (4) гијмәтләрини (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$S_к = |A_{к-1}, A_к| = \sqrt{[\varphi'(\tau_к)]^2 + [\psi'(\tau'_к)]^2}\,\Delta t_к$$

вә

$$l_n = \sum_{к=1}^{n} S_к = \sum_{к=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\tau_к)]^2 + [\psi'(\tau'_к)]^2}\,\Delta t_к \qquad (5)$$

влынар. (5) бәрабәрлиіиндә биз τ'_κ-и τ_κ илә әвәз етсәк

$$\sigma = \sum_{\kappa=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\tau_\kappa)]^2 + [\psi'(\tau_\kappa)]^2}\Delta t_2$$

бәрабәрлијини аларыг. Бу ахырынчы ифадә исә (2) интегралы үчүн интеграл чәми олдуғундан,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\tau_\kappa)]^2 + [\psi'(\tau_\kappa)]^2}\, \Delta t_\kappa = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \quad (5_1)$$

олар. Инди көстәрәк ки, (5) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи дә кәһз бу лимитә јығылыр. Буну көстәрмәк үчүн $|l_n - \sigma|$ фәргини гијмәтләндирәк:

$$|l_n - \sigma| \leqslant \sum_{\kappa=1}^{n} \Big| \sqrt{\varphi'(\tau_\kappa)]^2 + [\psi'(\tau'_\kappa)]^2} -$$

$$- \sqrt{[\varphi'(\tau_\kappa)]^2 + [\psi'(\tau_\kappa)]^2}\, \Delta t_\kappa. \qquad (6)$$

(6) бәрабәрсизлијини гијмәтләндирмәк үчүн

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}\right| \leqslant |b - b_1| \qquad (6_1)$$

доғру олдуғуну көстәрәк. 1) $a = 0$ олдугда, бәрабәрсизлик билаваситә өдәнилир, 2) $a \neq 0$ олан һалда

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}\right| =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} =$$

$$= \frac{b^2 - b_1^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}}\,(b - b_1),$$

$\left| \dfrac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} \right| \leqslant 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\sqrt{a^2 + b_1^2} \leqslant |b - b_1|.$$

(6_1) бәрабәрсизлијини (6) бәрабәрсизлијинин һәр бир һәдди үчүн тәтбиг етсәк,

$$|l_n - \sigma| \leqslant \sum_{\kappa=1}^{n} |\psi(\tau'_\kappa) - \psi(\tau_\kappa)|\, \Delta t_\kappa \qquad (7)$$

олар. $\psi'(t)$, $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан Кантор теореминә әсасән һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәздир.

Јә'ни $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\forall \tau'_\kappa, \tau_\kappa \in [a, b]$ үчүн $|\tau'_\kappa - \tau_\kappa| < \delta$ олдугла $|\psi'(\tau'_\kappa) - \psi'(\tau_\kappa)| < \varepsilon$ олар. Бу ахырынчыны (7) бәрабәрсизлијиндә нәзәрә алсаг,

$$|l_n-\sigma| < \varepsilon \sum_{\kappa=1}^{n} \Delta t_\kappa \text{ вә ја } |l_n-\sigma| \leqslant \varepsilon(\beta-\alpha)$$

вә нәһајәт

$$\lim_{\lambda\to 0} |l_n-\sigma| = 0. \blacktriangleright$$

3. Әјри тәнлији дүзбучаглы координат системиндә верилдикдә гөвсүн узунлуғу

Теорем. *$y=f(x)\in C'[a,b]$ оларса, әјри гөвсүнүн узунлугу*

$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

◀ Дүзбучаглы координат системиндә верилмиш $y=f(x)$ әјри тәнлијинә

$$\left.\begin{aligned} x&=x,\\ y&=f(x),\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$(a\leqslant x\leqslant b)$ параметрик шәкилдә һәмин әјринин тәнлији кими бахмаг олар. (x—параметрдир). (8)-дән $\frac{dx}{dx}=1$; $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ олдуғуну (2) дүстурунда нәзәрә алсаг,

$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

олар. ▶

Гејд. Әјри тәнлији $x=g(y)\in C'_{[c,d]}$ $(c<y\leqslant d)$ кими вериләрсә һәмин әјри гөвсүнүн узунлуғу

$$l=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dx$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

4. Әјри тәнлији полјар координат системиндә $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ кими верилдикдә гөвсүн узунлуғу

Әјринин полјар координат системиндә тәнлији

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta\\ y&=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

олдуғундан (9) тәнлијинә әјринин параметрик тәнлији кими (θ—параметр гәбул едилир) бахмаг олар. (9)-дан

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta;$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \cos^2\theta\,(d\rho)^2 - 2\rho\cos\theta\sin\theta\, d\rho\, d\theta + \rho^2\sin^2\theta\,(d\theta)^2 + \\ + \sin^2\theta\,(d\rho)^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta + \rho^2\cos^2\theta\,(d\theta)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2;$$

Бу гијмәтләри нәзәрә алсаг,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

4. Гөвсүн диференсиалы

AB мүстәви әјрисинин тәнлији $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ шәклиндә вериләрсә вә $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C'_{[\alpha,\beta]}$ оларса, *M* нөгтәси әјри үзрә дәјишдикдә *AM* гөвсүнүн узунлуғу t параметриндән асылы $S = S(t)$ функсијасы олачагдыр. (2) дүстуруна әсасән

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\, du.$$

Јухары сәрһәдә көрә төрәмәалма теоремини тәтбиг етсәк, $\frac{dS}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ вә ја $dS = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

Мисал 1. Радиусу R олан $\left.\begin{matrix} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{matrix}\right\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ чеврәсинин узунлуғуну тапмалы.

■

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Мисал 2. $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ кардиоид әјрисинин узунлуғуну тапмалы.

■ $dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta; \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -a\sin\theta;$

$$dl = \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}\, d\theta =$$

$$= 2a\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}\, d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta,$$

$$l = \int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta - 2a\int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

Гејд. $[0, \pi]$ парчасында $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ вә $[\pi, 2\pi]$-дә $\cos\dfrac{\theta}{2} < 0$ олдуғундан $[0, 2\pi]$ парчасы ики $[0, \pi]$ вә $[\pi, 2\pi]$ кими һиссәјә бөлүнмүшдүр. Демәли,

$$l = 2a\cdot 2\left[\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right] = 8a. \ ■$$

§ 4. ФЫРЛАНМА СӘТҺИНИН САҺӘСИ

Дүзбучаглы координат системиндә, дүзләнә билән AB әјрисинин тәнлији $y = f(x) \in C'_{[a,b]}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ олсун.

Бу әјринин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәсини һесаблајаг. Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасында $\{x_k\}$ ихтијари бөлкүсүнү апараг. Јә'ни,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$

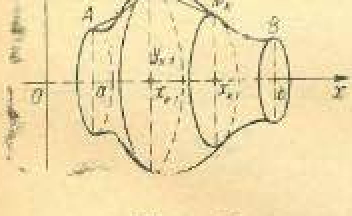
олсун. AB әјрисинин дахилинә чәкилмиш P_n сыныг хәттинин M_k тәпә нөгтәләринин координатларыны $(x_k, f(x_k))$ илә ишарә едәк. Бу сыныг хәттин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан (кәсик конусларын јан сәтһләринин саһәләри чәми) сәтһин саһәсини тә'јин едәк. k-чы кәсик конусун отурачаглары, радиуслары ујғун олараг $f(x_{k-1})$ вә $f(x_k)$ олан чеврәләр олдуғундан M_{k-1}, M_k сыныг хәттинин фырланмасындан алынан кәсик конусун сәтһинин саһәси

$$Q_k = 2\pi\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\, l_k$$

олар. Бүтүн сыныг хәтләрин фырланмасындан алынан сәтһин саһәси

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\, l_k$$

кими ифадә едилир. Бурада $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$ (шәкил 35). $\frac{1}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$ чәми, $f(x_{k-1})$ илә $f(x_k)$ гијмәтләри арасында кәсилмәз функсијанын гијмәти олдуғундан Кошинин икинчи теоремине әсасән елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси вар ки, $f(\xi_k) = \frac{1}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$ олар.



Шәкил 35

Дикәр тәрәфдән,

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

ифадәсини садәләшдирмәк мәгсәди илә, $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында

Лагранж теоремини тәтбиг етсәк,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(\eta_k), \quad x_{k-1} < \eta_k < x_k$$

олдуғуну аларыг. Онда

$$l_k = \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} \quad (x_k - x_{k-1})$$

олар. Нәтичәдә исә

$$Q_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} \, \Delta x_k \tag{1}$$

олар. ξ_k вә η_k нөгтәләри $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында үмумијјәтлә, мүхтәлиф олдуғундан (1) ифадәси $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функсијасы үчүн интеграл чәми дејил. Лакин (1) ифадәси илә

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \, \Delta x_k = \sigma \tag{2}$$

(2) интеграл чәми фәргинин лимитинин сыфыр олдуғуну көстәрмәк олар.

Бунун үчүн

$$\alpha_k = \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} - \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \tag{2_1}$$

ишарә етсәк,

$$Q_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \, \Delta x_k + 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \alpha_k \Delta x_k. \tag{3}$$

(3) бәрабәрлијини гијмәтләндирмәк үчүн

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leqslant | b - c | \tag{4}$$

бәрабәрсизлијиндән истифадә едәк. (4) бәрабәрсизлијини (2)-дә нәзәрә алсаг

$$| a_k | \leqslant | f'(\eta_k) - f'(\xi_k) |$$

алынар. Шәртә көрә $f'(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан, Кантор теореминә көрә һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәздир. Јә'ни ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ вар ки, $\forall \eta_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a, b] : | \eta_k - \xi_k | < \delta$ олдугда

$$| f'(\eta_k) - f'(\xi_k) | < \frac{\varepsilon}{2\pi M (b - a)}, \quad (k = \overline{1, n})$$

өдәнилир. Јә'ни $| \alpha_k | < \dfrac{\varepsilon}{2\pi M (b - a)}$ олар ($M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$). (3) бәрабәрлијинин икинчи һәддини гијмәтләндирәк.

$$\left|2\pi\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\,\alpha_\kappa\,\Delta x_\kappa\right| \leqslant 2\pi\sum_{\kappa=1}^{n}|f(\xi_\kappa)|\,|\Delta x_\kappa| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi M\varepsilon(b-a)}{2\pi M(b-a)}=\varepsilon$$

Демәли,

$$\lim_{\lambda\to 0} 2\pi\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\,\alpha_\kappa\,\Delta x_\kappa = 0$$

олур. Беләликлә,

$$Q=\lim_{\lambda\to 0} Q_n = 2\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\sqrt{1+[f'(\xi_\kappa)]^2}\,\Delta x_\kappa=$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

вә ја

$$Q=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Гејд. Әјринин тәнлији $x=g(y)\in C_{[c,d]}$ шәклиндә вериләрсә бу әјринин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәси

$$Q=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\,dy \quad \text{вә ја} \quad Q=2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$

Әјри тәнлији параметрик шәкилдә: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ вериләрсә вә $\varphi(t)$, $\psi(t)\in C'_{[\alpha,\beta]}$ оларса, онда

$$Q=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Мисал. Еллипсин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин (елементин) саһәсини тапын.

■ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ еллипс тәнлијиндән

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \ (|x|\leqslant a);\ y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$Q=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx\,.$$

$u = x\sqrt{a^2 - b^2}$ əvəз етсәк $dx = \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$$\begin{array}{c|c} x & u \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & a\sqrt{a^2-b^2} \end{array}$$

$$Q = \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\int_a^{a\sqrt{a^2-b^2}} a\sqrt{a^4 - u^2}\, du =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\left\{\frac{u}{2}\sqrt{a^4 - u^2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\frac{u}{a^2}\right\}\Bigg|_0^{a\sqrt{a^2-b^2}} =$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad ■$$

Гејд. $b \to a$ олдугда еллипс даирә олар вә фырланмадан алынан еллипсоид күрәјә чеврилəр. Нәтиҹәдә, $Q = 4\pi a^2$ күрә сәтһинин саһәси алынар.

I. Саһәләрин һесабланмасына аид мәсәләләр

1. Абсис оху, $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ әјриси вә $x = 3$ дүз хәтти илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = 6{,}75$ кв. в.

2. $y^2(x^2 + 4) = 100$ әјриси илә $y = 4$ дүз хәтти арасында галан саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = (20\ln 2 - 12)$ кв. в.

3. $y = 4ax$ вә $x^2 = 4ay$ параболалары арасында галан саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = \dfrac{16}{3}a^2$ кв. в.

4. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ вә $y = \dfrac{x^2}{2}$ әјриләри илә иһатә олунмуш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$ кв. в.

5. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ Лемнискат әјриси илә иһатә олунмуш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = a^2$ кв. в.

6. $y = 2x$, $x = 5$ вә $y = 0$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = 25$ кв. в.

7. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ әјриси илә вә $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = \dfrac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$ кв. в.

8. $y = \ln x$, $x = a$ вә $x = 2a\ (a > 0)$ хәтләри илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = a \ln \frac{4a}{e}$ кв. в.

9. Паскал илбизи адланан $\rho = 2a(2 + \cos\theta)$ әјриси илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

Ҹаваб: $S = 18\pi a^2$ кв. в.

II. Һәчмләрин вә јан сәтһләрин һесабланмасына аид мәсәләләр.

1. $y = \frac{b}{a} x$, $x = a$ вә $y = 0$ хәтләри илә һүдудланмыш саһәнин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан конусун һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини мүәјјән интеграл васитәсилә һесаблајын.

Ҹаваб: $V = \frac{1}{3}\pi ab^2$; $S = \pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

2. $x^2(y - b^2) = a^2$ чеврәси илә һүдудланмыш даирәнин өз оху әтрафында фырланмасындан алынан фигурун һәчминин саһәсини һесаблајын.

Ҹаваб: $V = 2\pi^2 a^2 b$; $S = 4\pi^2 ab$

3. Координат охлары вә $4x - 5y + 3 = 0$ дүз хәтти илә һүдудланмыш үчбучағын Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан конусун һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини һесабламалы.

Ҹаваб: $V = \frac{9}{100}\pi$, $S = \frac{9\sqrt{41}}{100}\pi$.

4. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ зәнчир хәттинин $x = 0$ вә $x = a$ абсис нөгтәләри арасында галан гөвсүнүн Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәсини һесаблајын.

Ҹаваб: $S = \frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ еллипсинин 1) Ox оху вә 2) Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһләрин саһәләрини һесаблајын.

Ҹаваб: 1) $S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^{b}}{2} \arcsin e$,

2) $S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1 + e}{1 - e}$.

6. $x = a(t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$ тсиклоидинин биринчи

гөвсүнүн 1) Ox оху әтрафында, 2) Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһләрин саһәсини һесаблајын.

Ҹаваб: 1) $S=\frac{64}{3}\pi a^2$,

2) $S=16\pi^2 a^2$.

III. Әјри узунлуғунун һесабланмасына аид мәсәләләр.

1. $ay^2=x^3$ јарымкубик параболасынын координат башланғычындан $x=5a$ абсисли нөгтәјә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

Ҹаваб: $l=\frac{335}{27}a$.

2. $y=1-\ln\cos x$ әјрисинин $x=0$ абсисли нөгтәсиндән $x=\frac{\pi}{4}$ абсисли нөгтәсинә гәдәр олан узунлуғуну тапын.

Ҹаваб: $l=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3. $y^2=x^3$ әјрисинин $(0;0)$ нөгтәсиндән $(4, 8)$ нөгтәсинә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

Ҹаваб: $l=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

4. Исбат един ки, $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ еллипсинин узунлуғу $y=\sin x$ синусоидинин бир далғасынын узунлуғуна бәрабәрдир.

5. $\rho=e^{a\theta}$ логарифмик спиралынын полјус нөгтәсиндән (ρ, θ) нөгтәсинә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

Ҹаваб: $l=\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2+1}$.

6. $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ әјрисинин бүтүн узунлуғуну тапын.

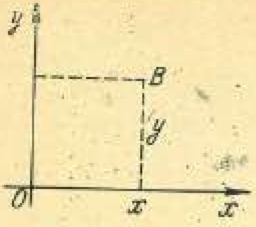
Ҹаваб: $l=\frac{3}{2}\pi a$.

V ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН МЕХАНИКАЈА ТӘТБИГЛӘРИ

§ 1. СТАТИК МОМЕНТ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИ

Физикада вә механикада бир сыра мәсәләләрин һәлләри, ујғун интеграл ҹәмләринин дүзәлмәси вә онларын лимитләринин һесабланмасына кәтирилир.



Шәкил 36

Фәрз едәк ки, xOy координат системиндә күтләси m олан B мадди нөгтәси верилмишдир.

Механикадан билирик ки, һәр һансы мадди нөгтәнин l охуна нәзәрән статик моменти онун күтләсинин һәмин нөгтәдән оха гәдәр олан мәсафәјә һасилинә бәрабәрдир:

$$M_l = md,$$

бурада M статик момент, d исә нөгтәдән оха гәдәр олан мәсафәдәдир.

Тә'рифдән ашкардыр ки, xOy системиндә көтүрүлмүш M мадди нөгтәсинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри (шәкил 36)

$$M_x = my, \quad M_y = mx$$

олар. Мүстәви үзәриндә күтләләри ујғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_n$ олан $B_1, B_2, \ldots, B_n$ мадди нөгтәләр системинин һәр һансы l охуна нәзәрән статик моменти

$$M_l - \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

дүстуру илә һесабланар. Бурада $d_i \overline{(1, n)}$ ујғун олараг $B_i \ (i - \overline{1, n})$ нөгтәләриндән l охуна гәдәр олан мәсафәләрдир. $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), \ldots, B_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләри xOy системиндә јерләшдирилмишдирсә, онда Ox вә Oy охуна нәзәрән бу системин статик моменти (шәкил 37)

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{1}$$

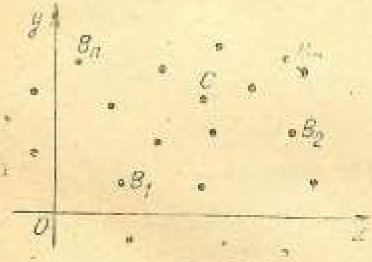
дүстурлары илә һесабланар.

Јенә дә механикадан мә'лумдур ки, күтләләри ујғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_n$ олан n сајда $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), \ldots, B_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләр системинин ағырлыг мәркәзинин x_c вә y_c координатлары

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y_c - \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \tag{2}$$

дүстурлары илә һесабланыр. (2)-ни ашағыдакы кими дә јаза биләрик:



Шәкил 37

$$x_c(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n,$$

$$y_c(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n.$$

вә ја

$$\left.\begin{aligned} x_c \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \\ y_c \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

(1)-и (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$\left.\begin{aligned} M_y &= x_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i, \\ M_x &= y_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Беләликлә, биз ашағыдакы теореми исбат етмиш олдуг.

Теорем. ***Мадди нөгтәләр системинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти, системин ағырлыг мәркәзинин һәмин оха нәзәрән статик моментинә бәрабәрдир.***

§ 2. МҮСТӘВИ ӘЈРИСИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИНИН ТАПЫЛМАСЫ

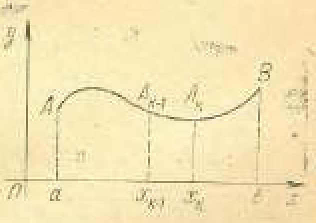
Мадди нөгтәләр мүстәви үзәриндә сәпәләнмиш һалда олмајыб мүәјјән хәтт үзрә дүзүлмүшдүрсә, онда статик моментин ифадәси интеграл шәклиндә көстәрилә биләр.

Әјринин ваһид узунлугда олан гөвсүнүн күтләсинә *хәтти сыхлыг* дејилир вә ρ илә ишарә едилир.

Верилмиш мадди әјри үчүн ρ сабит олдугда она *бирчинсли*, әкс һалда *бирчинсли олмајан әјри* дејиләр. Әјринин ағырлыг мәркәзи дедикдә сабит галынлыға малик истәнилән гәдәр назик бирчинсли мәфтилин ағырлыг мәркәзи баша дүшүлүр.

Фәрз едәк ки, бирчинсли AB мадди әјриси xOy системиндә (шәкил 38) өзүнүн

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant s \leqslant S) \qquad (1)$$



Шәкил 38

параметрик шәкилдә тәнлији (әјри өзү исә дүзләнән һесаб олунур) илә верилмишдир. AB әјрисинин узунлуғуну S илә ишарә едәк, $s \in [0, S]$. (1) функсијасы $[0, S]$ парчасында кәсилмәз олдугу фәрз олунур. Мадди әјри бирчинсли олдугу үчүн онун ејни узунлуға малик истәнилән ики парчасынын күтләси бәрабәр олар.

$[0, S]$ парчасыны истәнилән гајда илә ашағыдакы кими һиссәләрә бөләк:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{k-1} < s_k < \ldots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Бу бөлкүјә ујғун олараг *AB* әјриси $A_{k-1} A_k$ $(k = \overline{1, n})$ кими һиссәләрә бөлүнүр. Онда $A_k (x_k = x(s_k),\ y_k = y(s_k))$ $(k = \overline{1, n})$ олар. $A_{k-1} A_k$ гөвсүнүн узунлуғуну $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ илә ишарә етсәк, онда Δs_k гөвсүнүн күтләси $\Delta m_k = \rho \Delta s_k$ олар. Бу күтләнин A_k нөгтәсиндә јерләшдијини фәрз етсәк, онда Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләр ујғун олараг

$$M_x^{(k)} = y_k \Delta m_k = y_k \rho \Delta s_k$$
$$M_y^{(k)} = x_k \Delta m_k = x_k \rho \Delta s_k$$

олар. Онда бүтүнлүкдә *AB* әјрисинин охлара нәзәрән статик моменти тәгрибән

$$M_x = \rho \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta s_k, \qquad M_y \approx \rho \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta s_k \tag{2}$$

олар. (2) бәрабәрлијинин дәгиг гијмәтини тапмаг үчүн $\lambda = \max\{\Delta s_k\} \to 0$ јахынлашдырыб лимитә кечмәк лазымдыр. Онда

$$M_x = \rho \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta s_k, \quad M_y = \rho \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta s_k$$

вә ја

$$M_x = \rho \int_0^S y\,ds, \qquad M_y = \rho \int_0^S x\,ds. \tag{3}$$

Әкәр *AB* әјрисинин тәнлији $y = f(x)$ шәклиндә вериләрсә, онда билирик ки, $ds = \sqrt{1 + (y')^2}$ олар. *A* нөгтәсинин абсиси a вә *B* нөгтәсинин абсиси b олдуғуну нәзәрә алсаг, (3) бәрабәрлији ашағыдакы кими олар:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx, \\ M_y &= \rho \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Гејд 1. *AB* әјрисинин координат охларына нәзәрән әталәт моменти $J_x = \rho \int_a^b y^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ вә $J_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ дүстурлары илә һесабланыр.

AB әјрисинин тәнлији

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T$$

параметрик шәкилдә вериләрсә вә $[t_0, T]$ парчасында $\varphi(t)$ вә $\psi(t)$ функсијалары биргијмәтли вә төрәмәләри илә бирликдә кәсилмәз функсијалардырса, онда $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \rho \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \\ M_y &= \rho \int_{t_0}^{T} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

аларыг.

AB мадди әјрисинин статик моменти үчүн јухарыда верилмиш дүстурлардан истифадә едәрәк әјринин ағырлыг мәркәзинин координатлары үчүн дә дүстур чыхармаг олар. Бу дүстурлары чыхармаг үчүн механикадан мә'лум олан ашағыдакы принсипдән истифадә едилир: әјринин ағырлыг мәркәзинә тәтбиг олунмуш әјри күтләсинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти, әјринин бүтүнлүкдә һәмин оха нәзәрән статик моментинә бәрабәрдир.

Әјринин узунлуғу S, сыхлығы ρ, бүтүнлүкдә күтләси m вә ағырлыг мәркәзи $C(x_c, y_c)$ оларса, онда

$$S = \int_0^S ds, \quad m = \rho S = \rho \int_0^S ds$$

олар. Јухарыда сөјләнилән принсипи нәзәрә алсаг

$$M_y = m x_c = \rho \int_0^S x\,ds, \quad M_x = m y_c = \rho \int_0^S y\,ds \qquad (6)$$

олар. (6) бәрабәрлијиндән исә

$$x_c = \frac{\int_0^S x\,ds}{\int_0^S ds}, \qquad y_c = \frac{\int_0^S y\,ds}{\int_0^S ds}, \qquad (7)$$

олдуғуну аларыг.

AB әјрисинин тәнлији $y = f(x)$ шәклиндә верилмиш оларса, онда (7) бәрабәрликләри

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

шәклинә дүшәр.

Әјринин тәнлији $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметрик шәкилдә верилдәрсә, (5)-дән истифадә етсәк,

$$x_c = \frac{\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt}{\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt}; \quad y_c = \frac{\int_{t_0}^{T} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt}{\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt},$$

олар. (7) бәрабәрлијинин икинчи дүстуруну мәхрәчдән гуртарыб 2π-јә вурсаг

$$2\pi y_c \int_0^S ds = 2\pi \int_0^S ds \qquad (8)$$

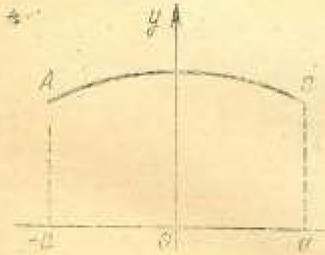
олар. (8)-дә $S=\int_0^S ds$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$2\pi y_c\cdot S = 2\pi)\int_0^S y\,ds$$

олар. Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олдуг.

Теорем. (***Күлдинин биринчи теореми***). ***Ох илә бир мүстәви үзәриндә јерләшән вә бу ох илә кәсишмәјән әјринин ох әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәси, әјринин узунлуғу илә ағырлыг мәркәзинин чыздығы чеврә узунлуғунун һасилинә бәрабәрдир.***

Гејд 2. AB әјриси һәр һансы дүз хәттә нәзәрән симметрик оларса, онда бу әјринин ағырлыг мәркәзи һәмин дүз хәтт үзәриндә јерләшәр.



Шәкил 39

Координат системини елә кәтүрәк ки, Oy оху һәмин дүз хәтлә үст-үстә дүшсүн (шәкил 39). Онда AB әјрисинә гаршы гојулан $f(x)$ функсијасы чүт функсија олар, (7)-дән ашкардыр ки,

$$x_c = \frac{1}{s}\int_{-a}^{+a} x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

---

* Күлдин Паул (1577 — 1643) Исвечрә ријазијјатчысыдыр.

Интегралалты функсија тәк функсија олдугу үчүн

$$\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 0$$

олар. Онда алырыг ки, $x_c = 0$-дыр. Демәли, AB әјрисинин ағырлыг мәркәзи, симметрија оху олан Oy оху үзәриндә олар.

Мисал 1. $x^2+y^2=R^2$ чеврәсинин јухары јарымһиссәсинин ағырлыг мәркәзини тапмалы.

■ Әјри Oy охуна нәзәрән симметрик олдуғу үчүн ағырлыг мәркәзи Oy оху үзәриндә олар вә $x_c = 0$. y_c-ни тапмаг үчүн

$$y_c = \frac{1}{s}\int_{-R}^{+R} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{9}$$

дүстурундан истифадә едәчәјик.

$x^2+y^2=R^2$ гејри-ашкар функсијасындан төрәмә алсаг,

$$2x+2yy'=0,\ y' = -\frac{x}{y},\ \ 1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2}$$

олар. Сонунчу бәрабәрликләри (9)-да нәзәрә алсаг,

$$y_c = \frac{1}{s}\int_{-R}^{+R} y\,\frac{R}{y}\,dx = \frac{2}{s}\,Rx\Big|_0^R = \frac{2R^2}{S}$$

бәрабәрлијини аларыг. $S=\pi R$ олдугу үчүн $y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$ олар. Беләликлә, алдыг ки, јарымчеврәнин ағырлыг мәркәзи $C\left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$ нөгтәсидир. ■

Гејд 3. Әјринин узунлуғу вә фырланмадан алынан сәтһин саһәси мә'лум оларса, Күлдин теореминдән истифадә едәрәк, ағырлыг мәркәзинин координатларыны тапа биләрик.

Јарымчеврәнин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин сәһәсинин $Q=4\pi R^2$ вә јарымчеврәнин узунлуғунун $S=\pi R$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$y_c = \frac{4\pi R^2}{2\pi s} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\cdot\pi k} = \frac{2R}{\pi},\quad x_c = 0$$

олдуғуну аларыг.

Мисал 2. $y=\sin x$ синусоидинин (башлангычдан сағ тәрәфә) биринчи јарымдалғасынын охуна нәзәрән статик моментини һесабламалы.

■ (4) дүстурунда $\rho=1$ гәбул етсәк вә

$$y' = \cos x,\ \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\cos^2 x}$$

олдуғуну (4)-дә нәзәрә алсаг,

$$M_x = \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = -\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, d(\cos x) =$$

$$= -\left[\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right). \blacksquare$$

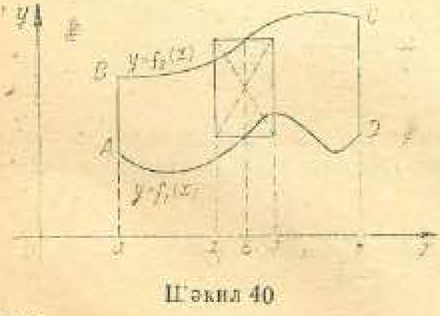
§ 3. МҮСТӘВИ ФИГУРУН СТАТИК МОМЕНТИНИН ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИНИН ТӘ'ЈИНИ

Мадди мүстәви һиссәси дедикдә, сабит галынлыглы назик лөвһә баша дүшәчәјик. Фәрз едәк ки, бу назик лөвһә бирчинслидир.

Мадди лөвһә мүстәвинин $ABCD$ һиссәсиндә јерләшмиш оларса вә $ABCD$ фигуру ашағыдан вә јухарыдан уј̈ғун олараг (шәкил 40) кәсилмәз $y = f_1(x)$ вә $y = f_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ әјриләри илә, јанлардан исә $x = a$ вә $x = b$ дүз хәтләри илә әһатә олмушдурса, бу мадди мүстәви фигурун охлара нәзәрән статик моментләрини һесаблајаг.

Бу мәгсәдлә $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ нөгтәләри васитәсилә $[a, b]$ парчасыны ихтијари гајда илә һиссәләрә бөләк вә $\lambda = \max\{\Delta x_i = x_{i+1} - x_i\}$ илә ишарә едәк. Беләликлә, $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсини n сајда золаглара бөлмүш олдуг.

$f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олдуғу үчүн $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{1, (n-1)})$ (парчаларында) бу функсијаларын гијмәтләри бири дикәриндән чидди фәргләнмәз. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функсијаларынын $[x_i, x_{i+1}]$ парчасындакы гијмәтләрини мүәјјән хәта илә $f_1(\xi_i)$ вә $f_2(\xi_i)$ әдәдләри илә әвәз етмәк олар. Башга сөзлә, бу о демәкдир ки, мадди $ABCD$ мүстәви һиссәсини пилләвари дүзбучаглыларла әвәз етмиш олуруг. Беләликлә, i-чы золағы отурачағы Δx_i, һүндүрлүјү $f_2(\xi_1) - f_1(\xi\ )$-јә бәрабәр олан дүзбучаглы илә әвәз етмиш олдуг.



Шәкил 40

i-чи дүзбучаглынын саһәси $[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i$, күтләси исә $m_i = \rho[f_2(\xi_i) - f_i(\xi_i)]\Delta x_i$ олар.

Механикадан мә'лумдур ки, дүзбучаглынын ағырлыг мәркәзи, онун диагоналларынын кәсишмә нөгтәсидир. i-чи дүзбучаглынын диагоналларынын кәсишмә нөгтәсинин координатлары ξ_i вә

$\frac{1}{2}[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]$ олар. Фәрз етсәк ки, i-чи дүзбучаглынын бүтүн күтләси һәмин дүзбучаглынын ағырлыг мәркәзинә тәтбиг олунуб, онда бу дүзбучаглынын Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри

$$\rho[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i\cdot\frac{1}{2}[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]=$$

$$=\frac{\rho}{2}[f_2^2(\xi_i)-f_1^2(\xi_i)]\Delta x_i;$$

$$\rho[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\xi_i\Delta x_i$$

олар. Бүтүн дүзбучаглылар үзрә тапылмыш статик моментләри чәмләсәк, $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри үчүн ашағыдакы тәгриби дүстурлары алмыш оларыг:

$$M_x\approx\frac{\rho}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f_2^2(\xi_i)-f_1^2(\xi_i)]\Delta x_i;$$

$$M_y\approx\rho\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]. \tag{1}$$

(1) тәгриби бәрабәрликләриндә $\lambda\to 0$ олмагла лимитә кечсәк M_x вә M_y үчүн дәгиг бәрабәрлик алмыш оларыг. Јә'ни

$$M_x=\frac{\rho}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f_2^2(\xi_i)-f_1^2(\xi_i)]\Delta x_i, \tag{2}$$

$$M_y=\rho\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x. \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[f_2^2(\xi_i)-f_1^2(\xi_i)]\Delta x_i \quad \text{вә} \quad \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i$$

чәмләри, $[a, b]$ парчасында кәсилмәз $[f_2^2(x)-f_1^2(x)]$ вә $x[f_2(x)-f_1(x)]$ функсијаларынын интеграл чәмләри олдуғу үчүн (2) вә (3) лимитләри вар вә бу лимитләр

$$\frac{\rho}{2}\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx, \qquad \rho\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\,dx$$

интегралларына бәрабәрдир. Онда

$$M_x=\frac{\rho}{2}\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\,dx \tag{4}$$

$$M_y = \rho \int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx \tag{5}$$

олар. Инди исә $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсинин ағырлыг мәркәзи олан $C(x_c, y_c)$ нөгтәсини тапаг. Ашкардыр ки, $ABCD$ фигурунун күтләси

$$m = \rho \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \rho P$$

олар. Бурада P—$ABCD$ фигурунун саһәсидир. Билирик ки, ағырлыг мәркәзинин координатлары, ујғун статик моментин күтләјә нисбәтинә бәрабәрдир. Онда

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{P}\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx, \tag{6}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2P}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx \tag{7}$$

олар.

Хүсуси һалда $f_1(x)$ әјриси $[a, b]$ парчасы үзәринә дүшәрсә, (6) вә (7) дүстурлары ашағыдакы кими олар:

$$x_c = \frac{1}{P}\int_a^b xy\,dx, \quad y_c = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2\,dx.$$

(7) бәрабәрлијини π әдәдинә вуруб мәхрәчдән гуртарсаг

$$2\pi y_c \cdot P = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx \tag{8}$$

олар.

(8) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи, ашағыдан вә јухарыдан ујғун олараг $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ әјриләри илә әһатә олмуш $ABCD$ әјрихәтли трапесијасынын Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмидир. Онда (8) бәрабәрлијини

$$V = P \cdot 2\pi y_c$$

кими јаза биләрик.

Гејд 1. $f_1(x)$ әјриси $[a, b]$ парчасы илә үст-үстә дүшәрсә, онда $ABCD$ әјрихәтли трапесијасынын координат охларына нәзәрән әталәт моменти

$$J_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)\,|f(x)|\,dx \text{ вә } J_y = \rho\int_a^b x^2\,|f(x)|\,dx$$

дүстурлары илә һесабланар.

Теорем. (Күлдинин икинчи теореми). ***Мүстәви фигурун, бу фигуру кәсмәјән Ох оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми мүстәви фигурун саһәси илә онун ағырлыг мәркәзинин чызмыш олдуғу чеврәнин узунлуғу һасилинә бәрабәрдир.***

Гејд 2. $ABCD$ әјрихәтли трапесијасы, $x_1=\varphi_1(y)$ вә $x_2=\varphi_2(y)$ әјриләри, $y=c$, $y=d$ дүз хәтләри илә әһатә едилмиш оларса, онда

$$y_c=\frac{\int\limits_c^d y\,(x_2-x_1)\,dy}{\int\limits_c^d (x_2-x_1)\,dy},$$

$$x_c=\frac{1}{2}\,\frac{\int\limits_c^d \left(x_2^2-x_1^2\right)dy}{\int\limits_c^d (x_2-x_1)\,dy}.$$

Мисал 1. $y=\sin x$ $(x>0)$ әјриси вә $y=\frac{2}{\pi}x$ дүз хәтти илә әһатә олунмуш бирчинсли лөвһәнин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тапмалы (шәкил 41).

■ Синусоид илә дүз хәттин координат башланғычында вә $x=\frac{\pi}{2}$ нөгтәсиндә кәсишдији ашкардыр.

x_c вә y_c-ни тапмаг үчүн (6) вә (7) дүстурларындан истифадә едәчәјик. Әввәлчә P-ни һесаблајаг:

$$P=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=-\left(\cos x+\frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4-\pi}{4}.$$

Онда

$$x_c=\frac{1}{P}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{P}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=$$

Шәкил 41

$$=\frac{1}{P}\left\{[-x\cos x+\sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{12}\right\}=\frac{1}{P}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)=$$

$$=\frac{12-\pi^2}{12P}=\frac{12-\pi^2}{12-3\pi},$$

$$y_c=\frac{1}{2P}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx=\frac{1}{2P}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2P}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{24P}=\frac{\pi}{24-6\pi}.$$

Беләликлә, тапдыг ки, $C\left(\frac{12-\pi^2}{12-3\pi},\ \frac{\pi}{24-6\pi}\right)$ нөгтәси фигурун ағырлыг мәркәзидир. ■

Мисал 2.

$$\left.\begin{aligned}x&=a(t-\sin t),\\ y&=a(1-\cos t)\end{aligned}\right\}\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

тсиклоидинин бир гөвсү вә Ox оху илә һүдудланмыш саһәнин ағырлыг мәркәзини вә охлара нәзәрән статик моментләри тапмалы (шәкил 42).

■ t параметринин артан (0-дан 2π-јә гәдәр) гијмәтләринә x-ин артан гијмәтләри ујғун кәлдији үчүн тсиклоидин бир гөвсү вә Ox оху илә һүдудланмыш саһә

$$P=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

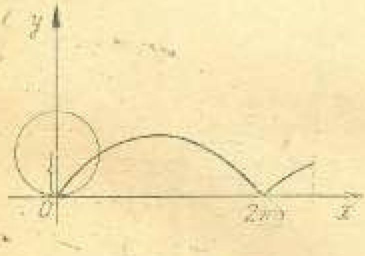
$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2$$

олар.

Инди исә охлара нәзәрән статик моментләри тапаг:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2 dx=$$



Шәкил 42

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=8a^3\int_0^{\pi}\sin^6 z\,dz=$$

$$=16a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z\,dz=16a^3\,\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi a^3}{2};$$

$$M_y=\int_0^{2\pi a}xy\,dx=a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\,(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^3\left[\int_a^{2\pi}(1-\cos t)^2\,d\cos t+\int_0^{2\pi}t\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}dt\right)\right]=3\pi^2a^3.$$

Онда

$$x=\frac{M_y}{P}=\pi a,\quad y_c=\frac{M_x}{P}=\frac{5}{6}a.$$

Чалышмалар: **Чаваблар:**

1. $y=\cos x$ косинусоидинин $x_1=-\frac{\pi}{2}$ нөгтәсиндән $x_2=\frac{\pi}{2}$ нөгтәсинә гәдәр узунлуғунун Ox охуна нәзәрән статик моментини тапын.

Чаваб: $M_x=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

2. $y=\sin x$ синусоидинин $x_1=\pi$ нөгтәсиндән $x_2=2\pi$ нөгтәсинә гәдәр узунлуғунун Ox охуна нәзәрән статик моментини тапын.

Чаваб: $M_x=\ln(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}$.

3. $x^2+y^2=R^2$ чеврәсинин биринчи рүбдә јерләшән гөвсүнүн Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләрини һесаблајын.

Чаваб: $M_x=M_y=R^2$.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ еллипсинин биринчи рүбдә јерләшән һиссәсинин ағырлыг мәркәзини тапын.

Чаваб: $C\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$.

5. $y=\sin x$ функсијасынын бир будағы вә Ox оху илә әһатә олмуш саһәнин ағырлыг мәркәзини тапын.

Чаваб: $C\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$.

6. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ координатасынын јухары һиссәси илә һүдудланмыш саһәнин ағырлыг мәркәзини тапмалы.

Чаваб: $C\left(\frac{5}{6}a, \frac{16a}{9\pi}\right)$.

7. $y^2 = 4px$, $y = 0$ вә $x = a$ хәтләри илә һүдудланмыш мүстәви фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин ағырлыг мәркәзини тапын.

Чаваб: $C\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$.

VI ФӘСИЛ

ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. БӘ'ЗИ АНЛАЈЫШЛАР

$f(x, \alpha)$ функсијасынын $R: [a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \alpha \leqslant d]$ дүзбучаглысында тә'јин олмуш кәсилмәз функсија олдуғуну фәрз едәк, α-ны гејд етсәк, онда $f(x, \alpha)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында x-дән асылы кәсилмәз функсија олдуғу үчүн интегралланан олар вә бу интегралын нәтичәси α дәјишәнинин (параметринин) функсијасыдыр.

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{1}$$

Тә'риф 1. *(1) интегралына параметрдән асылы интеграл дејилир.*

Бу фәсилдә биз, $f(x, \alpha)$ функсијасынын верилмиш хассәләриндән асылы олараг $F(\alpha)$ функсијасынын бир сыра хассәләрини, о чүмләдән лимитини, кәсилмәзлијини, параметрә көрә төрәмәсини интегралыны вә с. өјрәнәчәјик.

Гејд едәк ки, (1) интегралы n сајда параметрдән асылы ола биләр:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \int_a^b f(x_1 \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)\, dx. \tag{2}$$

Бу һалда јухарыда сөјләдијимиз хассәләри асанлыгла (2) функсијасы үчүн дә исбат етмәк олар.

§ 2. ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ ИНТЕГРАЛЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Параметрдән асылы интегралын кәсилмәзлији дедикдә биз $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ функсијасынын кәсилмәзлијини баша дүшәчәјик.

Теорем 1. *$f(x, \alpha)$ функсиjасы дүзбучаглы $R: |a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant \alpha \leqslant d|$ областында һәр ики дәjишәнә көрә кәсилмәздирсә, онда (1) бәрабәрлиjи илә тә'jин олунан $F(\alpha)$ функсиjасы $|c, d|$ парчасында кәсилмәздир.*

◀ $f(x, \alpha)$ функсиjасы гапалы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғу үчүн Кантор теореминә көрә һәмин областда мүнтәзәм кәсилмәз олар. Jә'ни $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, R-э дахил олан истәнилән ики (x_1, α_1) вә (x_2, α_2) нөгтәләри үчүн $|x_2 - x_1| < \delta$, $|\alpha_2 - \alpha_1| < \delta$ олдугда

$$|f(x_2, \alpha_2) - f(x_1, \alpha_1)| < \varepsilon. \tag{3}$$

(1)-дән

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) = \int_a^b f(x_1 \alpha + h) - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx =$$

$$= \int_a^b |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)|\, dx. \tag{4}$$

(3)-дә $x_1 = x_2 = x : \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \alpha + h$ ишарә етсәк, $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, $[c, d]$ парчасына дахил олан ихтиjари α вә $\alpha + h$ нөгтәләри үчүн $|h| < \delta$ олдугда

$$|f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

олар.

(4) бәрабәрлиjинин мүтләг гиjмәтини тапсаг,

$$|F(\alpha + h) - F(\alpha)| = \left| \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)|\, dx < \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b dx = \varepsilon.$$

Алдыг ки, $[c, d]$ парчасынын һәр бир нөгтәсиндә (демәли $[c, d]$ парчасынын өзүндә) $F(\alpha)$ функсиjасы кәсилмәздир. ▶

Теорем 2. *(Интеграл ишарәси алтында лимитә кечмә). $f(x, \alpha)$ функсиjасы $R: [a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant \alpha \leqslant d]$ дүзбучаглы областында, һәр ики дәjишәнә нәзәрән кәсилмәздирсә, α исә $|c, d|$ парчасынын ихтиjари гејд олунмуш нөгтәси оларса, онда*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha)\, dx. \tag{5}$$

◀ Теорем 1-ә көрә $f(x, \alpha)$ функсиjасы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғу үчүн

$$F(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

функсиjасы $[c,d]$ парчасында кәсилмәз олар. Кәсилмәз функсиjанын тә'рифинә көрә

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}F(\alpha)=F\left(\lim_{\alpha\to\alpha_0}\alpha\right)=F(\alpha_0)=\int\limits_a^b f(x,\alpha_0)\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

Беләликлә, исбат етдик ки, (5) бәрабәрлиjи доғрудур.

Теорем 3. ***1)*** $f(x,\alpha)$ ***функсиjасы дүзбучаглы*** $R:[a\leqslant c\leqslant b;\ \ c\leqslant\alpha\leqslant d]$ ***областында кәсилмәздирсә,*** ***2)*** $\varphi(\alpha)$ ***вә*** $\psi(\alpha)$ ***функсиjалары*** $[c,d]$***-дә кәсилмәз олуб,*** $a\leqslant\varphi(\alpha)\leqslant b,\ a\leqslant\psi(\alpha)\leqslant b$ ***мүнасибәтләрини өдәjирсә, онда***

$$\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

функсиjасы $[c,d]$ ***парчасында кәсилмәз олар.***

◀ Әкәр $\alpha,\ \alpha+h\in[c,d]$ оларса, онда

$$\Phi(\alpha+h)-\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha+h)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)\,dx-\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx, \tag{6}$$

Дикәр тәрәфдән,

$$\int\limits_{\varphi(\alpha+h)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)\,dx=\int\limits_{\varphi(\alpha+h)}^{\varphi(\alpha)} f(x,\alpha+h)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha+h)\,dx+\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)\,dx. \tag{7}$$

(7)-ни (6)-да нәзәрә алсаг

$$\Phi(\alpha+h)-\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha+h)}^{\varphi(\alpha)} f(x,\alpha+h)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)\,dx+\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}[f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)]\,dx. \tag{8}$$

(8) бәрабәрлиjинин сағ тәрәфиндән биринчи вә икинчи интегралларын мүтләг гиjмәтләри

$$M\,|\,\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)\,|\,, \tag{9}$$

$$M\,|\,\psi(\alpha+h)-\psi(\alpha)\,| \tag{10}$$

әдәдләрини ашмаз, үчүнчү интеграл исә $h\to 0$ олдугда (теорем 2-јә әсасән) сыфра јахынлашар.

$\varphi(\alpha)$ вә $\psi(\alpha)$ функсијалары $[c, d]$-дә кәсилмәз олдуглары үчүн $h\to 0$ олдугда (9) вә (10) ифадәләри сыфра јахынлашар.

Беләликлә, алдыг ки,

$$\lim_{h\to 0}\Phi(\alpha+h)=\Phi(\alpha).$$

Демәли, $\Phi(\alpha)$ функсијасы $[c, d]$-дә кәсилмәздир.

§ 3. ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ ИНТЕГРАЛЫН ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Теорем 1. *$f(x,\alpha)$ функсијасы вә онун α-ја нәзәрән $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ хүсуси төрәмәси дүзбучаглы $R:[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant\alpha\leqslant b]$ областында кәсилмәздирсә, онда*

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx \tag{1}$$

функсијасы $[c, d]$ парчасында диференсиалланандыр вә

$$F'(\alpha)=\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{2}$$

◀ h-ы елә сечәк ки, $\alpha, \alpha+h\in[c, d]$ олсун. Онда

$$F(\alpha+h)=\int_a^b f(x,\alpha+h)\,dx \tag{3}$$

олар. (3) вә (1) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\int_a^b [f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)]\,dx \tag{4}$$

бәрабәрлијини аларыг.

$f(x,\alpha)$ функсијасы α-ја нәзәрән төрәмәләнән олдуғу үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг едә биләрик:

$$f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)=hf'_\alpha(\alpha+\theta h),\ (0<\theta<1). \tag{5}$$

(5)-и (4)-дә нәзәрә алсаг,

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=h\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)\,dx \quad (0<\theta<1)$$

вә ја

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)\,dx \qquad (6)$$

олар. (6) бәрабәрлијинин һәр тәрәфинә $-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ интегралыны әлавә етсәк,

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_a^b\left[f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)-f'_\alpha(x,\alpha)\right]dx$$

вә ја

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\left|f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)-f'_\alpha(x,\alpha)\right|dx \qquad (7)$$

бәрабәрсизлијини аларыг.

Шәртә көрә $f'_\alpha(x,\alpha)$ функсијасы гапалы R областында кәсилмәздир, онда һәмин функсија R-дә мүнтәзәм кәсилмәз олар. Мүнтәзәм кәсилмәзлијин тә'рифинә көрә $\forall\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $\delta>0$ әдәди тапмаг олар ки, $|h|<\delta$ олдугда

$$\left|f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)-f'_\alpha(x,\alpha)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (8)$$

(8)-и (7)-дә нәзәрә алсаг

$$\int_a^b\left|f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)-f'_\alpha(x,\alpha)\right|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon. \qquad (9)$$

Нәһајәт (7) вә (9) бәрабәрсизликләриндән

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon$$

мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр.

Беләликлә, алырыг ки,

$$\lim_{n\to0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=F'(\alpha)=\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\,\Big|<\varepsilon$$

(2) бәрабәрлиjи исбат олунду.

Теорем 2. *1) $f(x,\alpha)$ функсиjасы вә онун $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ хүсуси төрәмәси $R:[a\le x\le b;\ c\le\alpha\le d]$ дүзбучаглы областында кәсилмәздирсә; 2) $\varphi(\alpha)$ вә $\psi(\alpha)$ функсиjалары $[c,d]$ парчасында кәсилмәз олуб, $a\le\varphi(\alpha)\le b$, $a\le\psi(\alpha)\le b$ мүнасибәтләрини өдәjирсә, онда*

$$F(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \tag{9}$$

функсиjасы $[c,d]$ парчасында диференсиалланан олуб

$$F'(x)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f[\psi(\alpha),\alpha]\,\psi'(\alpha)-f[\varphi(\alpha),\alpha]\,\varphi'(\alpha) \tag{10}$$

олар.

Хүсуси һалда $\varphi(\alpha)$ вә $\psi(\alpha)$ функсиjалары $[c,d]$ парчасында сабитдирсә, онда $\varphi'(\alpha)=\psi'(\alpha)=0$ олар. Бу һалда (10) дүстуру (2) шәклинә дүшәр.

◀ $\varphi(\alpha)=v$, $\psi(\alpha)=u$ илә ишарә етсәк, онда

$$F(\alpha)=\Phi(\alpha,u,v)=\int\limits_{v}^{u} f(x,\alpha)\,dx \tag{11}$$

бәрабәрлиjини аларыг.

$\Phi(\alpha,u,v)$ функсиjасынын бүтүн аргументләрә нәзәрән кәсилмәз төрәмәси олдуғуна көрә ашағыдакыны jаза биләрик:

$$F'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha}. \tag{12}$$

(11) бәрабәрлиjиндән нөвбә илә α, u вә v-jә нәзәрән төрәмә алсаг

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial u}=f[\psi(\alpha),\alpha];\quad \frac{\partial u}{\partial\alpha}=\psi'(\alpha)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=-f[\varphi(\alpha),\alpha],\qquad \frac{\partial v}{\partial\alpha}=\varphi'(\alpha)$$

олар. Сонунчу бәрабәрликләри (12)-дә нәзәрә алсаг, (10) бәрабәрлиjини исбат етмиш оларыг. ▶

Мисал 1. $F(t)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{0}^{t} f(x)\sin(t-x)\,dx$ функсиjасынын $y''(t)+\omega^2y(t)=f(t)$ тәнлиjинин һәлли олдуғуну көстәрин (бурада $f(x)$ функсиjасы мүәjjән аралыгда кәсилмәздир).

■ Әввәлчә $F'(t)$ вә $F''(t)$ төрәмәләрини тапаг:

$$F'(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\,\omega\cdot\cos\omega(t-x)\,dx+\frac{1}{\omega}f(t)\sin\omega(t-t)=$$

$$=\int_0^t f(x)\cos\omega(t-x)\,dx,$$

$$F''(t)=-\int_0^t f(x)\,\omega\sin(t-x)\,dx+f(t)\cos\omega(t-t)=$$

$$=-\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)\,dx+f(t).$$

$F'(t)$ вә $F''(t)$-нин бу гијмәтләрини тәнликдә нәзәрә алсаг, $f(t)\equiv f(t)$ олар. ■

Мисал 2. $F(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$ функсијасынын төрәмәсини тапмалы.

■ (10) дустурундан истифадә етсәк $(\psi(\alpha)=\alpha,\ \varphi(\alpha)=0)$,

$$F'(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1+\alpha x}\,dx+\frac{\ln(1+\alpha\cdot\alpha)}{1+\alpha^2}\cdot 1=$$

$$=\int_0^\alpha\frac{dx}{(1+x^2)(1+\alpha x)}+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.\ ■$$

4. ПАРАМЕТРӘ НӘЗӘРӘН ИНТЕГРАЛЛАМА

$f(x,\alpha)$ функсијасы $R:[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant\alpha\leqslant d]$ дүзбучаглы областында кәсилмәздирсә, онда

$$\Phi(x)=\int_c^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha \tag{1}$$

(1) функсијасы $[a,b]$-дә кәсилмәздир (§ 2, теорем 1). Ејни сәбәбә көрә дејә биләрик ки,

$$\Psi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx. \tag{2}$$

(2) функсијасы $[c,d]$ парчасында кәсилмәздир.

$\Phi(x)$ вә $\Psi(\alpha)$ функсијалары ујгун олараг $[a,b]$ вә $[c,d]$ парчаларында кәсилмәз олдугу үчүн һәмин парчаларда интегралланан олар. Онда

$$A = \int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha\right) dx,$$

$$B = \int_c^d \Psi(\alpha)\,d\alpha = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right) d\alpha.$$

Теорем. ***f(x, α) функсијасы дүзбучаглы R : [$a \leqslant x \leqslant b$ $c \leqslant \alpha \leqslant d$] областында кәсилмәздирсә, онда***

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\alpha)\,d\ \right) dx \qquad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур.

◀

$$L_1(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right) d\alpha \qquad (4)$$

$$L_2(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,\alpha)\,d\alpha\right) dx \qquad (5)$$

функсијаларына бахаг.

Ашкардыр ки, $t = c$ оларса, $L_1(c) = L_2(c) = 0$ олар. Көстәрәк ки, $\forall t \in [c, d]$ үчүн $L_1(t) = L_2(t)$ бәрабәрлији доғрудур.

(4) бәрабәрлијиндән параметрә нәзәрән төрәмә алсаг,

$$L_1(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx. \qquad (6)$$

(5)-дән төрәмә алсаг исә

$$L_2(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_a^b \left(\int_c^t f(x,\alpha)\,d\alpha\right) dx\right] =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\int_c^t f(x,\alpha)\,d\alpha\right) dx = \int_a^b f(x,t)\,dx. \qquad (7)$$

(6) вә (7) бәрабәрликләринин сағ тәрәфләри бәрабәр олдуғу үчүн сол тәрәфләри дә бәрабәр олар. Јә'ни $L_1'(t) = L_2'(t)$ вә ја $L_1(t) = L_2(t) + C$ олар.

$L_1(c) = L_2(c) = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $C = 0$ олмасы ашкардыр. Онда $L_1(t) = L_2(t)$ бәрабәрлији t-нин бүтүн гијмәтләриндә, о чүмләдән $t = \alpha$ гијмәтиндә дә доғрудур. Беләликлә, исбат етдик ки, (3) бәрабәрлији доғрудур. ▶

Мисал. $f(x, \alpha) = x^\alpha$ функсијасынын $[0, 1; a, b]$ дүзбучаглысында

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^\alpha \, dx \right) d\alpha = \int_0^1 \left(\int_a^b x^\alpha \, d\alpha \right) dx \tag{8}$$

бәрабәрлијини өдәдијини јохламалы.

■ $f(x) = x^\alpha$ функсијасы $[0, 1; a, b]$ дүзбучаглы областында теоремин шәртләрини өдәдији үчүн (8) бәрабәрлији һәмишә доғрудур. (8) бәрабәрлији иштирак едән интеграллары ајрыча һесабладыгда да һәмин нәтичәјә кәлмәк олар.

Интегралалты функсија кәсилән олдугда теорем доғру олмајачагдыр. Доғрудан да, $f(x, \alpha) = \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ функсијасы үчүн $[0, 1; 0, 1]$ дүзбучаглы областында теоремин шәрти өдәнмәдији ($(0, 0)$ нөгтәсиндә функсија кәсиләндир) үчүн

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} \, dx \right) d\alpha \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} \, dx \right) dx.$$

Билаваситә һесабласаг көрәрик ки, бу интегралларын гијмәтләри $\frac{\pi}{4}$ вә $-\frac{\pi}{4}$ әдәдләринә бәрабәрдир.

§ 5. ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛ

Биз дөрдүнчү параграфда јухары сәрһәди сонлу әдәд олан параметрдән асылы интегралларын бә'зи хассәләри илә таныш олдуг.

Бу параграфда исә јухары (ашағы сәрһәдди вә ја сәрһәдләринин һәр икиси) сәрһәди сонсузлуг олан параметрдән асылы ашағыдакы интегралларын

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x, \alpha)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

бә'зи хассәләрини өјрәнәчәјик. Бу интеграллардан бири үчүн олан хассәләр галанлары үчүн дә доғру олдуғундан, бунларын бири һаггында данышмаг кифајәтдир.

Параметрдән асылы гејри-мәхсуси интеграллар тәбиәтчә функсионал сыралара бәнзәјир.

Фәрз едәк ки, $f(x, \alpha)$ функсијасы $G: (\alpha_0 < \alpha \leqslant \alpha_1, \ a \leqslant x < +\infty)$ областында тә'јин олунмушдур. $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасындан көтүрүлмүш ихтијари α^* нөгтәсиндә

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \tag{1}$$

гејри-мәхсуси интегралы јығыландырса, бу интегралын гијмәти параметрдән асылы олар.

Тә'риф 1. $\alpha^* \in [\alpha_0, \alpha_1]$ *нөгтәсиндә*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha^*)\,dx$$

интегралы јығыландырса (вә ја $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x, \alpha^*)\,dx$ *лимити сонлудурса), онда (1) интегралы* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *парчасында јығыландыр дејилир.*

Параметрдән асылы сонсуз сәрһәдли (1) интегралы үчүн дә ҹәмин кәсилмәзлији, параметрә нәзәрән төрәмәалма, параметрә нәзәрән интеграллама вә с. хассәләри исбат етмәк олар.

Тә'риф 2. *(1) интегралы* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *парчасында јығыландырса,* $\forall\,\varepsilon>0$ *әдәдинә гаршы* ($[\alpha_0, \alpha_1]$ *парчасына дахил олан бүтүн* α*-лар үчүн) елә* N_ε *нөмрәси варса ки,* $b>N_\varepsilon$ *олдугда*

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

оларса, (1) интегралына $[\alpha_0, \alpha_1]$ *парчасында мүнтәзәм јығылан интеграл дејилир.*

Тә'рифдән билаваситә ашкардыр ки, N-нин сечилмәси һәм ε-дан вә һәм дә α-дан асылы оларса (1) интегралынын $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында јығылмасы гејри-мүнтәзәм олар.

Теорем 1. ***$f(x,\alpha)$ функсијасы $G: \leqslant(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1;\ a \leqslant x < +\infty)$ областында кәсилмәздирсә, (1) интегралы $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында мүнтәзәм јығылырса, онда***

$$F(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$$

функсијасы $[\alpha_0, \alpha_1]$ ***парчасында кәсилмәз олар.***

◀ Шәртә көрә (1) мүнтәзәм јығылыр, мүнтәзәм јығылманын тә'рифинә көрә исә $\forall\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $N=N(\varepsilon)>a$ әдәди вар ки, $\forall\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ үчүн

$$\left|\int\limits_N^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Дикәр тәрәфдән,

$$F(\alpha) = \int\limits_a^N f(x, \alpha)\,dx + \int\limits_N^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx \qquad (3)$$

$$F(\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^N f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx+\int_N^{+\infty} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \tag{4}$$

олдуғу ашкардыр.

(4) бәрабәрлијиндән (3) бәрабәрлијини чыхсаг

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^N [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx+$$

$$+\int_N^{+\infty} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_N^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

вә ја

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|\leqslant\int_a^N |f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|\,dx+$$

$$+\left|\int_N^{+\infty} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx\right|+\left|\int_N^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right|. \tag{5}$$

$f(x,\alpha)$ функсијасы гапалы $R:[a\leqslant x\leqslant N;\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$ дүзбучаглысында мүнтәзәм кәсилмәз олдуғу үчүн $\forall\varepsilon>0$ гаршы елә $\delta>0$ әдәди вар ки, $\forall x\in[a,N]$ вә $\forall\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$; $|\Delta\alpha|<\delta$ олдугда

$$|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3(N-a)} \tag{6}$$

олар, (6) вә (2) бәрабәрсизликләрини (5)-дә нәзәрә алсаг,

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3(N-a)}(N-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

олар. Демәли, $F(\alpha)$ функсијасы $[\alpha_0,\alpha_1]$ парчасында кәсилмәздир.

Теорем 2. *$f(x,\alpha)$ функсијасы $G(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1\ a\leqslant x<+\infty)$ областында тә'јин едилмиш кәсилмәз функсијадырса вә $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ интегралы $[\alpha_0,\alpha_1]$ парчасында мүнтәзәм јығыландырса, онда*

$$\lim_{\alpha\to\alpha^*}\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{\alpha\to\alpha^*} f(x,\alpha)\,dx,\quad \alpha^*\in[\alpha_0,\alpha_1].$$

◀ Бу теоремин шәртләри бундан әввәлки теоремин шәртләри (теорем 1) илә үст-үстә дүшдүјү үчүн $F(\alpha)=\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ функсијасы $[\alpha_0,\alpha_1]$ парчасында кәсилмәз олар. Онда

$$\lim_{\alpha\to\alpha^*} F(\alpha) = F(\lim_{\alpha\to\alpha^*} \alpha) = F(\alpha^*)$$

олмасындан

$$\lim_{\alpha\to\alpha^*} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha\to\alpha^*} f(x, \alpha)\,dx$$

бəрабəрлиjинин доғрулуғу алыныр. ▶

Теорем 3. *$f(x, \alpha)$ функсиjасы $G: (a \leqslant x < +\infty;\ \alpha_0 \leqslant \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$ областында x-ə нəзəрəн кəсилмəз, $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ хүсуси төрəмəси G областында кəсилмəздирсə, $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,dx$ интегралы $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында мүнтəзəм jығылырса, онда*

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$$

функсиjасы $[\alpha_0, \alpha_1]$ ə α-jа нəзəрəн төрəмəлəнəн олуб, төрəмəси

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

бəрабəрдир.

◀

$$\Phi(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

функсиjасына бахаг. $F'(\alpha) = \Phi(\alpha)$ олдуғуну исбат етсəк, теорем исбат олунмуш олар. Бу мəгсəдлə

$$\{L_n(\alpha)\} = \int_0^n f(x, \alpha)\,dx$$

ардычыллығыны дүзəлдəк. Ашкардыр ки,

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} L_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = F(\alpha).$$

Теоремин шəртлəринə əсасланыб деjə билəрик ки, $L_n(\alpha)$ функсиjалары төрəмəлəнəндир вə

$$L_n'(\alpha) = \int_a^n \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Онда

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx = \Phi(\alpha).$$

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx$ интегралы $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында мүнтәзәм јығылдығы үчүн, онда $\{L_n'(x)\}$ ардычыллығы $\Phi(\alpha)$ функсијасына мүнтәзәм јығылар.

Ардычыллығын диференсиаллашмасына аид теоремә* әсасән ашағыдакыны јаза биләрик:

$$F'(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{dL_n(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int_a^n \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx = \Phi(\alpha).$$

Аларыг ки,

$$F'(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\, dx. \quad \blacktriangleright$$

Теорем 4. ***Биринчи теоремин шәртләри өдәниләрсә, онда***

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha,$$

башга сөзлә, јухарыда гејд олунан шәртләр дахилиндә x-ә вә α-ја көрә интеграллама нөвбәсини дәјишмәк олар:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int_a^{+\infty} \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx.$$

◀ $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ интегралы $[\alpha_0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдуғу үчүн, кифајәт гәдәр бөјүк N әдәди үчүн $N > a$ олдугда

$$\left| \int_N^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon \tag{7}$$

---

* $\{u_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы $[a, b]$ парчасынын һеч олмаса бир нөгтәсиндә јығылырса вә төрәмәләрдән дүзәлмиш $\{u_n'(x)\}$ ардычыллығы $[a, b]$-дә мүнтәзәм јығылырса, онда $\{u_n(x)\}$ ардычыллығы да $[a, b]$-дә мүнтәзәм јығыландыр, онун лимити олан $u(x)$ функсијасы бу парчада төрәмәләнәндир:

$$u'(x) = \lim_{n\to\infty} u_n'(x).$$

олар. Мүәјјән интегралын хассәсинә әсасән

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_{a}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_{a}^{N} f(x, \alpha)dx\right)d\alpha +$$

$$+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_{N}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha \qquad (8)$$

бәрабәрлијини јаза биләрик. §4-дә исбат олунмуш теоремә әсасән

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_{a}^{N} f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha = \int_{a}^{N}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha\right)dx \qquad (9)$$

олар. (7), (8) вә (9)-дан

$$\left|\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha)\,d\alpha\right| = \left|\int_{a}^{N}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)d\alpha\right)dx +\right.$$

$$\left. + \left|\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_{N}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha\right|\right.$$

вә ја

$$\left|\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\alpha)\,d\alpha - \int_{a}^{N}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha\right)dx\right| < \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_0)$$

јаза биләрик. Ахырынчы бәрабәрсизлик көстәрир ки, $\int_{a}^{+\infty}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha\right)dx$ интегралы јығыландыр вә $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha)\,d\alpha$ интегралына бәрабәрдир.

Гејд. Бу теореми исбат едәркән интеграллардан биринин сәрһәдләринин сонлу олдуғуну гејд етмишдик, лакин һәр ики интегралын сәрһәдләри сонсуз олдугда да аналожи теореми исбат етмәк олар.

$$\int_{a}^{+\infty}\left(\int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\,d\alpha\right)dx = \int_{\alpha_0}^{+\infty}\left(\int_{a}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha$$

бәрабәрлији доғрудур.

Теорем 5. (Вејерштрас әламәти) $\tilde{x} < x$, $\forall\alpha\in[\alpha_0, \alpha_1]$ *үчүн*

$$|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси вә $\int_{\tilde{x}}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ *интегралынын јығылан олмасы*

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$$

интегралынын $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олмасы үчүн кафи шәртдир.

◀ $\tilde{x} < x$ шәртини өдәјән x-ләр үчүн бәрабәрсизлик өдәнилир. $\int_{\tilde{x}}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ интегралы јығылан олдуғундан, $\forall \varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә кифајәт гәдәр бөјүк $N > \tilde{x}$ әдәди тапмаг олар ки, $\delta > N$ олдугда $\int_{\delta}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$ олар. Онда

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} |f(x, \alpha)|\,dx \leqslant \int_b^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$$

олар. Сонунчу бәрабәрсизлик исә $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ интегралынын $[\alpha_0, \alpha_1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдуғуну көстәрир. ▶

Мисал 1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ интегралынын мүнтәзәм јығылан олдугуну көстәрин.

■ Ихтијари $[\alpha_0, \alpha_1] \ni \alpha$ үчүн $\frac{1}{\alpha^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ олмасындан вә $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралынын мүтләг јығылан олмасындан алырыг ки, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$ интегралы $\forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ үчүн мүнтәзәм јығылыр.

Мисал 2. Пуассон* $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $x = \alpha t$ ($\alpha > 0$ параметрдир) әвәзләмәсини апарсаг

$$J = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

---

* Симеон Дени Пуассон (1781 — 1840) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр. Онун алдығы елми нәтичәләр мүхтәлиф елм саһәләринә, о чүмләдән ријазијјата, физикаја, механикаја вә с. аиддир. О, ријази физиканын әсасыны гојмуш, Фурје сырасына, гејри-мүәјјән интеграла, варијасија һесабына, еһтимал нәзәријјәсинә вә с. аид фундаментал нәтичәләр алмышдыр.

олар. Сонунчу бәрабәрлиjин һәр ики тәрәфини $e^{-\alpha^2}d\alpha$-ја вуруб α-ја нәзәрән интеграллясаг (0-дан ∞-а гәдәр)

$$\int_0^\infty Je^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha^2}d\alpha \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

олар. Бәрабәрлиjин сол тәрәфи

$$\int_0^\infty Je^{-\alpha^2}\,d\alpha = J\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = J^2$$

олур. Сағ тәрәфдә исә интеграллама нөвбәсини дәјишсәк

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2}\,d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\,dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)\alpha^2}\,\alpha d\alpha =$$

$$= \int_0^\infty \left(\left[\frac{e^{-(1+t^2)\alpha^2}}{-2(1+t^2)}\right]_0^\infty\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\operatorname{arctg} t]_0^\infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

олдуғуну аларыг. Беләликлә, алырыг: $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ■

Чалышмалар: **Чаваблар:**

1. Ашағыдакы лимитләри һесабламалы:

а) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{+1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$, б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$. г) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_1^2\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx$.

Чаваб: а) 1, б) $\frac{\pi}{4}$, в) $\ln\frac{2e}{1+e}$, г) $\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \int_0^1\lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\,e^{-\frac{x^2}{y^2}}$

Интеграл алтында лимитә кечмә әмәли ганунудурму?

Чаваб: Јох

3. Параметрә нәзәрән диференсиаллама әмәлини тәтбиг едәрәк интегралы һесаблајын:

$$J(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b\cos^2 x)\,dx.$$

Чаваб: $\pi\ln\frac{|a|}{2}$.

4. Исбат един ки, $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ функсијасы кәсилмәздир.

5. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$, $(\alpha>0,\ \beta>0)$ интегралыны һесабламалы.

Чаваб: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

6. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2+\beta^2}$ интегралыны һесабламалы.

Чаваб: $J=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$.

VII ФӘСИЛ

ЕЈЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРЫ

§ 1. БИРИНЧИ НӨВ ЕЈЛЕР ИНТЕГРАЛЫ

Тә'риф 1. *Биринчи нөв Ејлер интегралы вә ја* B *(„бета") функсија*

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\ (\alpha>0,\ \beta>0) \qquad (1)$$

бәрабәрлији илә тә'јин едилән функсијаја дејилир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\alpha>0$, $\beta>0$ олдугда (1) интегралы јығылан, бу параметрләрдән һеч олмаса бири сыфыр вә ја сыфырдан кичик оларса, бу интеграл дағылан олар.

$B(\alpha,\beta)$ функсијасынын хассәләри

Хассә 1. $B(\alpha,\beta)$ функсијасы өз аргументләринин симметрик функсијасыдыр, јә'ни

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha). \qquad (2)$$

◀ $x=1-t$ әвәзләмәси апарсаг, (1) бәрабәрлији

$$B(\alpha, \beta) = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\, dt =$$

$$\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-1} dx = B(\beta, \alpha)$$

x	t
0	1
1	0

олар. (2) бәрабәрлији исбат олунду. ▶

Хассә 2. $\beta > 1$ олдугда Бета-функсијасы

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} \cdot B(\alpha, \beta-1) \tag{3}$$

мүнасибәтини өдәјир.

(3)-ү исбат етмәк үчүн әввәлчә (1) интегралыны һиссә-һиссә интеграллајаг. Онда

$u=(1-x)^{\beta-1},$	$du = -(\beta-1)(1-x)^{\beta-2} dx$
$dv = x^{\alpha-1} dx$	$v = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$

$$B(\alpha, \beta) = \left[\frac{1}{\alpha}(1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\beta-1}{\alpha} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-2} dx =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-2} dx. \tag{4}$$

(4) бәрабәрлијиндә x^{α} әвәзинә

$$x^{\alpha} \equiv x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x) \tag{5}$$

ејнилијини јазсаг

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2} dx -$$

$$- \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \tag{6}$$

олар. Бета функсијасынын тә'рифинә әсасән (6)-дан

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2} dx = B(\alpha, \beta-1). \tag{7}$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha, \beta). \tag{8}$$

олдуғуну аларыг.

(6), (7) вә (8) бәрабәрликләриндән

$$B(\alpha, \beta)=\frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1)-\frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha. \beta)$$

вә ја

$$\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right) B(\alpha, \beta)=\frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1),$$

$$\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta)=\frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1)$$

вә нәһајәт

$$B(\alpha, \beta)=\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta-1).$$

Бета функсијасы α вә β параметрләринә нәзәрән симметрик олдуғундан

$$B(\alpha, \beta)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta). \tag{9}$$

(3) вә (9) бәрабәрликләринин сол тәрәфләри бәрабәр олдуғундан саг тәрәфләр дә бәрабәр олар, јә'ни

$$\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta-1)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta).$$

$\alpha+\beta-1$-ә ихтисар етсәк,

$$(\beta-1) B(\alpha, \beta-1)=(\alpha-1) B(\alpha-1, \beta). \tag{10}$$

(10)-да $\alpha-1=p$ вә $\beta-1=q$ илә ишарә етсәк

$$B(p, q-1)=\frac{p}{q} B(p+1, q)$$

олар. (3) бәрабәрлијиндә $\beta=n$ (n—тамдыр) оларса вә (3) бәрабәрлијини ардычыл тәтбиг етсәк

$$B(\alpha, n)=\frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdots \frac{1}{\alpha+1} B(\alpha, 1)$$

олар.

$$B(\alpha, 1)=\int_0^1 x^{\alpha-1} d x=\left.\frac{x^\alpha}{\alpha}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$B(\alpha, n)=B(n, \alpha)=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots(n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2 \ldots(\alpha+n-1)}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \ldots(\alpha+n-1)}.$$

Сонунчуда $\alpha=m$ (m—там әдәддир) әвәз едиб (9) дүстуруну ардычыл тәтбиг етсәк

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)} B(m, 1) \qquad (11)$$

олар.

$$B(m, 1) = \frac{(m-1)}{m} \cdot \frac{m-2}{m-1} \dots \frac{1}{2} B(1, 1) \quad (B(1, 1) = 1)$$

олдуғуну (11)-дә нәзәрә алсаг

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)}.$$

Хүсуси һалда $n = m$ оларса, $B(n, n) = \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$ олар.

(1) бәрабәрлијиндә $\beta = \alpha$ оларса,

$$B(\alpha, \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)\right]^{\alpha-1} dx$$

олар. $y = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ функсијасынын графики $x = \frac{1}{2}$ дүз хәттинә нәзәрән симметрик олдуғу үчүн

$$B(\alpha, \alpha) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{\alpha-1} dx$$

олар. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t}$ әвәзләмәси апарсаг $\left(dx = -\frac{dt}{4\sqrt{t}}\right)$,

$$B(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} - \int_1^0 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

x	t
0	1
$\frac{1}{2}$	0

Бета функсијасынын тә'рифинә әсасән

$$B(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right).$$

(1) интегралыны башга шәкилдә дә јаза биләрик. Бу мәгсәдлә $x = \frac{y}{1+y}$ әвәзләмәсини апарсаг вә $dx = \frac{dy}{1+y}$, $1 - x = \frac{1}{1+y}$ олдуғуну нәзәрә алсаг ашағыдакыны јаза биләрик:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy \qquad (12)$$

x	y
0	∞
1	∞

§ 2. ИКИНЧИ НӨВ ЕЈЛЕР ИНТЕГРАЛЫ

Тә'риф. *Икинчи нөв Ејлер интегралы вә ја Г (гамма) функсијасы*

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ (\alpha>0) \tag{1}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунан функсијаја дејилир.

(1) интегралы $\alpha>0$ олдугда јығылан, $\alpha\leq 0$ олдугда исә дағыландыр.

Бета вә Гамма функсијалары арасында әлагә јаратмаг үчүн (1) бәрабәрлијиндә $x=ty$ әвәзләмәси апарсаг

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-ty}\,t\,dy=t^\alpha\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-ty}dy$$

x	y
0	0
∞	∞

вә ја

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha}=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-ty}dy \tag{2}$$

олар. (2) бәрабәрлијиндә α-ны, $\alpha+\beta$ илә, t-ни исә $1+t$ илә әвәз етсәк

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}}=\int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)y}dy \tag{3}$$

бәрабәрлијини аларыг. (3) бәрабәрлијинин һәр тәрәфини $t^{\alpha-1}$-ә вуруб t-ә нәзәрән интегралласаг

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)y}dy\right)t^{\alpha-1}dt \tag{4}$$

олар. (12) бәрабәрлијини (§ 1) (4)-дә нәзәрә алсаг

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-ty}dt\right)y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}dy$$

вә ја

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty(ty)^{\alpha-1}e^{-ty}d(ty)\right)y^{\beta-1}e^{-y}dy=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)y^{\beta-1}e^{-y}dy=\int_0^\infty\Gamma(\alpha)y^{\beta-1}e^{-y}dy=$$

$$=\Gamma(\alpha)\cdot\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta). \tag{5}$$

олар. (5) бәрабәрлијиндән исә

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{6}$$

олдуғуну алырыг. (6) дүстуру Бета вә Гамма функсијаларыны әлагәләндирән дүстурдур.

Гамма функсијасынын хассәләри

Хассә.

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{7}$$

бәрабәрлији доғрудур.

◀ (1) бәрабәрлијиндә α әвәзинә $\alpha+1$ јазсаг

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx \tag{8}$$

алынар. (8) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етсәк

$$\left|\begin{array}{c|c} u = x^\alpha & du = \alpha x^{\alpha-1}\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx & v = -e^{-x} \end{array}\right|$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \left[-x^\alpha e^{-x}\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha). \quad ▶$$

(1) бәрабәрлијиндә $\alpha = 1$ јазсаг

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

олдуғуну вә $\alpha = n$ олмагла (7) бәрабәрлијини ардычыл тәтбиг етсәк,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) =$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1) = n!$$

олдуғуну аларыг. Беләликлә, алырыг ки, $\alpha = n$ олдугда

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ејлер—Гаус дүстуру

(1) бәрабәрлијиндә $e^{-x} = z$ әвәзләмәси апарсаг

x	z
0	1
∞	0

$$dx = -\frac{dz}{z}, \quad x = \ln\frac{1}{z}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} dz \tag{9}$$

олар. (9) бәрабәрлијини башга шәкилдә көстәрмәк үчүн ашағыдакы лимити һесаблајаг (Лопитал гајдасындан истифадә едилир):

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(1-z)^{\frac{1}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{\frac{1}{n}}\ln z\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=$$

$$=-\ln z=\ln\frac{1}{z} \tag{10}$$

10)-у (9)-да нәзәрә алсаг,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\alpha-1}dz=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\int_0^1\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1}dz. \tag{11}$$

(11) бәрабәрлијиндә јениндән $z=y^n\left(dz=ny^{n-1}dy\right)$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{n-1}dy. \tag{12}$$

$$B(n,\alpha)=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

олдуғуну (12)-дә нәзәрә алсаг,

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha B(n,\alpha) \tag{13}$$

бәрабәрлијини аларыг.

$$B(n,\alpha)=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}$$

олдуғуну (13)-дә јеринә јазсаг

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}$$

бәрабәрлијини аларыг ки, бу бәрабәрлијә дә Ејлер — Гаус дүстуру дејилир.

Чалышмалар: **Чаваблар:**

1. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ Ејлер интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $x=a\sqrt{t},\ t>0$).

Чаваб: $\frac{\pi a^4}{16}$.

2. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ Ејлер интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $x^3=t$).

Чаваб: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^6 x\,dx$ интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $\sin x=\sqrt{t}, t>a$).

Чаваб: $\frac{3\pi}{512}$.

4. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $x=t^{\frac{1}{n}}$, $t>0$).

Чаваб: $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

5. $\int\limits_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$ интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $x=\sqrt{t},\ t>0;\ n$ — тамдыр).

Чаваб: $\frac{(n-1)!!}{2^{n+1}}\pi$.

6. $\int\limits_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x-c)^{m+n-2}}$ интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $\frac{x-a}{x-c}=\frac{b-a}{b+c}t,\ 0<a<b,\ c>0$).

Чаваб: $\frac{(b-a)^{m+n+1}\ B(m+1,\ n+1)}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}$.

7. $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$ интегралыны һесабламалы (əвəзлəмəси $\ln\frac{1}{x}=t$).

Чаваб: $\Gamma(p+1)\ (p>-1)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-x^n}\,dx=1$ олдуғуну исбат един $\left(\text{әвәзләмәси } t=t^{\frac{1}{n}}\right)$.

Бәрабәрликләри исбат един:

1. $\int\limits_0^\infty e^{-x^4}\,dx\int\limits_0^\infty x^2e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

2. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx=\frac{1}{a^p}\,\Gamma(p)\cos\frac{\pi a}{2}\ (0<p<1)$.

4. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx=\frac{1}{a^p}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}\ (-1<p<1)$.

VIII ФӘСИЛ

ЧӘМ ВӘ ИНТЕГРАЛ ҮЧҮН БӘ'ЗИ БӘРАБӘРСИЗЛИКЛӘР

§ 1. БӘ'ЗИ ТӘ'РИФЛӘР ВӘ АНЛАЈЫШЛАР

Тә'риф 1.

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

әдәдинә $a_i\,(i=\overline{1,n})$ әдәдләринин әдәди орта гијмәти дејилир.

Тә'риф 2.

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$$

әдәдинә, $a_i>0$ $(i=\overline{1,n})$ әдәдләринин һәндәси орта гијмәти дејилир.

Тә'риф 3. $m>0$,

$$S_m=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

әдәдинә $a_i(i=\overline{1,n})$ әдәдләринин m тәртиб орта дәрәҹәли гијмәти дејилир.

Хүсуси һалда,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^1$$

ифадәси биртәртибли бирдәрәҹәли орта гијмәт олмагла, һәмин әдәдләрин һесаби орта гијмәти илә үст-үстә дүшүр.

Тә'риф 4.

$$H=\left(\frac{\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

әдәдинә, $a_i(i=\overline{1,n})$ әдәдләринин һармоник орта гијмәти дејилир.

Тә'риф 5.

$$Q=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

әдәдинә $a_i(i=\overline{1,n})$ әдәдләринин квадратик орта гијмәти дејилир.

§ 2. КОШИ БӘРАБӘРСИЗЛИКЛӘРИ

Әдәди орта илә һәндәси ортаны әлагәләндирән ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 1. ***Мәнфи олмајан ($a_i > 0,\ 0=\overline{1,n}$) истәнилән n әдәдин әдәди орта гијмәти бу әдәдләрин һәндәси орта гијмәтиндән кичик дејил.***

Јә'ни

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Әввәлҹә ашағыдакы лемманы исбат едәк.

Лемма. $\forall a_i>0\ (i=\overline{1,n})$ әдәдләринин һасили ваһидә бәрабәр оларса, онда бу әдәдләрин ҹәми n-дән кичик дејилдир. Башга сөзлә

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=1 \text{ оларса, } \sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant n.$$

Гејд. Һасилдә иштирак едән a_i $(i=\overline{1, n})$ әдәдләринин һамысы бир-биринә бәрабәр олмазса, онда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant 0.$$

Әкс һалда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n.$

■ Исбат үчүн там ријази индуксија методундан истифадә едәк, јә'ни $n=2$ һалы үчүн лемманын доғру олдуғуну көстәрәк. Башга сөзлә $a_1 \cdot a_2 = 1$ олдугда $a_1 + a_2 \geqslant 2$ олдуғуну исбат едәк.

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{a_1} + a_1 - 2 + 2 = \frac{(a_1-1)^2}{a_1} + 2 \geqslant 2$$

олдуғундан $n=2$ һалы үчүн лемма исбат олунду. Ашкардыр ки, $a_1 = a_2 = 1$ оларса, бәрабәрлик һалы алыныр.

Инди исә $n = \kappa \geqslant 2$ һалы үчүн лемманын доғрулуғуну гәбул едиб $n = \kappa + 1$ үчүн доғрулуғуну исбат едәк. Башга сөзлә $\prod\limits_{i=1}^{\kappa} a_i = 1$ верилдикдә $\sum\limits_{i=1}^{\kappa} a_i \geqslant \kappa$ олдуғуну фәрз едиб, $\prod\limits_{i=1}^{\kappa+1} a_i = 1$ оларса $\sum\limits_{i=1}^{\kappa+1} a_i \geqslant \kappa + 1$ олдуғуну көстәрәк.

$\prod\limits_{i=1}^{\kappa+1} a_i = 1$ шәрти өдәниләрсә, онда ашағыдакы ики һал мүмкүндүр:

1) вуругларын һамысы $(a_i,\ i = \overline{1, \kappa+1})$ бир-биринә бәрабәрдир.
2) вуругларын ичәрисиндә бир-биринә бәрабәр олмајанлар вар.

Биринчи һалда һәр бир вуруг ваһид олмалыдыр вә нәтичәдә бунларын чәми $\sum\limits_{i=1}^{\kappa+1} a_i = \kappa + 1$ олар.

Икинчи һалда вуругларын ичәрисиндә һәм ваһиддән бөјүк вә һәм дә ваһиддән кичик әдәдләр иштирак едәчәкдир. Доғрудан да әкәр бүтүн вуруглар ваһиддән кичик оларса, онда бунларын һасили ваһиддән кичик, бүтүн вуруглар ваһиддән бөјүк оларса, һасил ваһиддән бөјүк олар. Она көрә һасилдә иштирак едән вуруглардан һәм ваһиддән бөјүк вә һәм дә ваһиддән кичик оланы олмалыдыр. Мүәјјәнлик үчүн $a_1 < 1$ вә $a_{\kappa+1} > 1$ олдуғуну фәрз едәк.

Шәртә көрә $a_1 a_2 \ldots a_\kappa a_{\kappa+1} = 1$. Ахырынчы бәрабәрлији $(a_1 a_{\kappa+1}) a_2 \cdot a_3 \ldots a_\kappa = 1$ шәклиндә дә јазмаг олар $a_1 a_{\kappa+1} = b$ илә ишарә етсәк

$$b a_2 a_3 \ldots a_\kappa = 1 \qquad (1)$$

олдуғуну аларыг. (1) бәрабәрлијинин сол тәрәфи κ сајда вуругдан ибарәт олдуғуну вә лемманын $\kappa = n$ һалы үчүн доғру олдуғуну гәбул етдијимиздән

$$b + a_2 + a_3 + \ldots + a_\kappa \geqslant \kappa \qquad (2)$$

олдуғуну аларыг. Дикәр тәрәфдән

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\kappa + a_{\kappa+1} = (b + a_2 + a_3 + \ldots + a_\kappa) + a_1 + a_{\kappa+1} - b$$

бәрабәрлијиндә (2)-ни нәзәрә алсаг,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\kappa + a_{\kappa+1} \geqslant \kappa + a_{\kappa+1} - b + a_1 =$$

$$= (\kappa + 1) + a_{\kappa+1} - b + a_1 - 1 = (\kappa + 1) + a_{\kappa+1} - a_1 a_{\kappa+1} + a_1 - 1 =$$

$$= \kappa + 1 + (a_{\kappa+1} - 1)(1 - a_1). \qquad (3)$$

$a_1 < 1$, $a_{\kappa+1} > 1$ олмасындан $(a_{\kappa+1} - 1)(1 - a_1) > 0$ олдуғуну аларыг. (3) бәрабәрсизлијиндә $(a_{\kappa+1} - 1)(1 - a_1)$ һасилини атсаг, бәрабәрсизлик даһа да күчләнәр, јә'ни

$$\sum_{i=1}^{\kappa+1} a_i > \kappa + 1$$

олар. ■

◀ Инди исә леммадан истифадә едәрәк теоремин доғру олдуғуну исбат едәк.

Билирик ки, $a_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ әдәдләринин һәндәси ортасы

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \qquad (4)$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур. (4) бәрабәрлијинин һәр тәрәфини G әдәдинә бөлсәк,

$$1 = \sqrt[n]{\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdots \frac{a_n}{G}}$$

вә ја

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdots \frac{a_n}{G}$$

олдуғуну аларыг. Онда леммаја әсасән

$$\frac{1}{G} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant G$$

вә ја

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad (5)$$

олар. ▶

(5) бәрабәрсизлијинә Коши бәрабәрсизлији дејилир.

Теорем 2. ***$a_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ әдәдләринин әдәди орта гијмәти A, һәндәси орта гијмәти G, һармоник орта гијмәти H вә квадратик орта гијмәти Q арасында***

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

◀ Теорем 1-дә исбат един ки, $A \geqslant G$.

$H \leqslant G$ олдуғуну исбат едәк. Коши бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \tag{6}$$

олар. (6)-дан ашағыдакыны јаза биләрик:

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{H}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=H.$$

Инди исә $A \leqslant Q$ олдуғуну исбат едәк.

Башга сөзлә

$$\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2)} \geqslant \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \tag{7}$$

бәрабәрсизлијинин доғру олдуғуну исбат едәк. (7) бәрабәрсизлијинин доғру олдуғуну көстәрмәк үчүн әввәлчә

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \tag{8}$$

бәрабәрсизлијинин доғру олдуғуну көстәрәк.

Бу мәгсәдлә $a_1+a_2+\ldots+a_n=b$ ишарә едәк. Бу бәрабәрликдән

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{b}{n}+m_1 \\ a_2=\frac{b}{n}+m_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n=\frac{b}{n}+m_n \end{array}\right\} \tag{9}$$

алырыг. (9) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b+m_1+m_2+\ldots+m_n \tag{10}$$

олар. $a_1+a_2+\ldots+a_n=b$ вә (10) бәрабәрликләриндән алырыг ки,

$$m_1+m_2+\ldots+m_n=0. \tag{11}$$

(9) бәрабәрликләрини квадрата јүксәлтсәк,

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2\cdot\frac{b}{n}\,m_1 + m_1^2, \\ a_2^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2\cdot\frac{b}{n}\,m_2 + m_2^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2\cdot\frac{b}{n}\,m_n + m_n^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

олдуғуну аларыг.

(12) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{b^2}{n} + \frac{2b}{n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + \\ + \left(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2\right). \tag{13}$$

(11) бәрабәрлијини (13)-дә нәзәрә алсаг

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{b^2}{n} + m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 \tag{14}$$

олар. $\sum_{i=1}^{n} m_i^2 > 0$ олдуғу үчүн

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{b^2}{n}$$

вә ја

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

(8) бәрабәрсизлији исбат олунду. (8) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини n-ә бөлүб көк алсаг

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

вә ја $A \leqslant Q$.

Беләликлә, исбат етдик ки, $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$. ▶

Теорем 3. *∀ a_i вә b_i ($i = \overline{1, n}$) һәгиги әдәдләри үчүн*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{15}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

◀ Ашағыдакы функсијаја бахаг:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{16}$$

Ашкардыр ки,

$$F(x) \geqslant 0. \tag{17}$$

(17)-дән алырыг ки, (16) чохһәдлиси ја бәрабәр һәгиги көкә вә ја ғошма комплекс көкә маликдир. Бу исә о демәкдир ки, онун дискриминанты мүсбәт дејилдир:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0. \tag{18}$$

(18) бәрабәрсизлијиндә икинчи топлананы сағ тәрәфә кечириб көк алсаг, теорем исбат олунар. ▶

Бу теоремдән ашағыдакы нәтичә чыхыр.

Нәтичә.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{19}$$

(19) бәрабәрсизлијини исбат етмәк үчүн, (15) бәрабәрсизлијини тәтбиг етмәклә $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$ чәмини гијмәтләндирәк

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Сонунчу бәрабәрсизликдән квадрат көк алсаг, (19) бәрабәрсизлијини аларыг.

Гејд едәк ки, a_i вә b_i әдәдләри мүтәнасиб $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}\right)$ оларса, (15) бәрабәрсизлији бәрабәрлијә чеврилир.

§ 3. ЈУНГ* БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

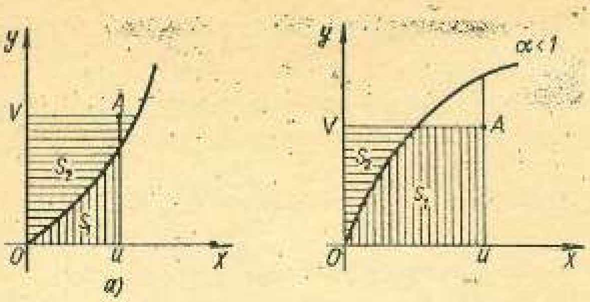
Лемма. $u > 0$, $v > 0$ әдәдләри вә ваһиддән бөјүк олан $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ бәрабәрлијини өдәјән p вә q әдәдләри үчүн

$$uv \leqslant \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \tag{1}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

---

* Вилјам Јунг (1882—1946) инкилис ријазијјатчысыдыр.



Шәкил 43

(1) бәрабәрсизлијинә Јунг бәрабәрсизлији дејилир.

▶ $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ функсијасына бахаг. Бу функсија монотон артан олдуғу үчүн, $x=y^{\frac{1}{\alpha}}$ кими тәрс функсијасы вардыр. Дүзбучаглы декарт координат системиндә Ox вә Oy охлары үзәриндә ујгун олараг $x=u$ вә $y=v$ көтүрүб ашағыда көстәрилән s_1 вә s_2 саһәләринә бахаг (шәкил 43).

Шәкилдән көрүндүјү кими s_1+s_2, саһәси $u\cdot v$ олан $AuOv$ дүзбучаглысынын саһәсиндән кичик дејил.

$$s_1=\int_0^u x^{\alpha}dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1};$$

$$s_2=\int_0^v y^{\frac{1}{\alpha}}dy=\frac{v^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Беләликлә,

$$uv\leqslant\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{v^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}$$

олар. $\alpha+1=p>1$ вә $\frac{1}{\alpha}+1=q>1$ көтүрсәк,

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+1}=1\right).$$

(1)-ин доғрулуғуну алырыг.

Гејд. $v=u^{p-1}$ оларса, бәрабәрлик ишарәси алынар.

§ 4. ИНТЕГРАЛ ҮЧҮН КОШИ—БУНЈАКОВСКИ[*]—ШВАРС[**] БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Теорем. *$f(x)$ вә $g(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында квадраты илә интегралланандырса, јә'ни*

$$A=\int_a^b f^2(x)\,dx,\ C=\int_a^b g(x)\,dx \text{ вә } B=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

интеграллары сонлудурса, онда

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1')$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

◀ Ихтијари λ үчүн

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2dx\geqslant 0$$

олдуғундан

$$\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\lambda^2\int_a^b g(x)\,dx\geqslant 0. \qquad (2)$$

(1) вә (2)-дән истәнилән λ үчүн

$$A+2B\lambda+C\lambda^2\geqslant 0 \qquad (3)$$

олар. Онда

$$y=C\lambda^2+2B\lambda+A \qquad (4)$$

үчһәдлисинин дискриминанты $B^2-AC\leqslant 0$ олар. Сонунчудан

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\,.$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

олар. ▶

---

[*] Виктор Јаковлевич Бунјаковски (1804—1889) көркәмли рус ријазијјатчысыдыр.

[**] Керман Амандус Шварс (1843—1921) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

§ 5. ИНТЕГРАЛ ВӘ ЧӘМ ҮЧҮН ҺӨЛДЕР* БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Теорем 1. *Фәрз едәк ки, $x(t)$, $y(t)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмишдир вә бу функсијалар үчүн*

$$\int_a^b |x(t)|^p dt, \quad \int_a^b |y(t)|^q dt$$

интеграллары вар вә сыфырдан фәрглидир. Бундан башга p вә q әдәдләри үчүн $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ шәрти өдәнилир. Онда $|x(t)\,y(t)|$ функсијасы да $[a, b]$ парчасында интеграллананды вә

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

олар.

▶

$$u=\frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad v=\frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{2}$$

ишарә едәк.

(2) функсијалары үчүн Јунг бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк

$$u\cdot v=\frac{|x(t)\,y(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^q |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x(t)|^p}{p\int_a^b |x(t)|^p dt}+\frac{|y(t)|^q}{q\int_a^b |y(t)|^q dt}. \tag{3}$$

Шәртә көрә сағ тәрәф $[a, b]$ парчасында интеграллананды. Онда сол тәрәф дә $[a, b]$-дә интеграллананы олар.

(3) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини dt-јә вуруб интеграллаcаг,

---

* Отто Лјудвиг Һөлдер (1859—1937) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

$$\frac{\int\limits_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt}{p\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt} + \frac{\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt}{q\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt}.$$

Сағ тәрәфдәки кәсрләрдә ихтисар апарсаг,

$$\frac{\int\limits_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad (4)$$

(4) бәрабәрсизлијиндән (1)-ин доғрулуғу асанлыгла алыныр. ▶

Гејд. Хүсуси һалда $p = q = 2$ оларса, Коши—Бунјаковски бәрабәрсизлији алынар.

Теорем 2. ***Фәрз едәк ки, $\{u_k\}$ вә $\{v_k\}$ ардычыллыгларынын***

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p$$

сыралары јығылыр. p вә q әдәдләри үчүн $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ бәрабәрлији доғрудур. Онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|$$

сырасы да јығыландыр вә чәм үчүн ашағыдакы Һөлдер бәрабәрсизлији доғрудур:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5)$$

◀

$$u=\frac{|u_\kappa|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\quad v=\frac{|v_\kappa|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

ишарә едиб Јунг бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк,

$$uv=\frac{|u_\kappa\ v_\kappa|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|u_\kappa|^p}{p\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^p}+\frac{|v_\kappa|^q}{q\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^q}. \tag{6}$$

(6) бәрабәрсизлијини κ-ја ($\kappa=\overline{1,\infty}$) нәзәрән чәмләсәк

$$\frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty}|u_\kappa\ v_\kappa|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty}|u_\kappa|^q}{q\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^q}+\frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty}|v_\kappa|^q}{q\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^q}, \tag{7}$$

(7) бәрабәрсизлијинин сағ тәрәфиндә иштирак едән сыралар јығылан олдуғу үчүн $\sum_{\kappa=1}^{\infty}|u_\kappa v_\kappa|$ сырасы да јығылан олар. (7)-дә сағ тәрәфдә ν-нү κ илә әвәз етсәк,

$$\frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty}|u_\kappa v_\kappa|}{\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty}|u_\kappa|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty}|v_\kappa|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Сонунчу бәрабәрсизликдән (5)-ин доғру олмасы асанлыгла алыныр. ▶

Гејд. Хүсуси һалда $p = q = 2$ оларса, (5)-дән

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} |u_\kappa v_\kappa| \leqslant \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} |u_\kappa|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} |v_\kappa|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Коши бәрабәрсизлији алынар.

§ 6. ИНТЕГРАЛ ВӘ ҸӘМ ҮЧҮН МИНКОВСКИ* БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Теорем 1. *$[a, b]$ парчасында $x(t)$, $y(t)$ функсијаларынын тә'јин олундуғуну вә*

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty, \quad \int_a^b |y(t)|^p dt < \infty, \quad p \geqslant 1$$

интегралларынын варлығыны вә сонлу олдуғуну фәрз едәк. Онда $|x(t) + y(t)|^p$ функсијасы да интегралланан олмагла ашағыдакы Минковски

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Әввәлҹә ашағыдакы Лемманы исбат едәк.

Лемма. a вә b әдәдләринин истәнилән гијмәтиндә вә $p \geqslant 1$ олдугда,

$$|a + b|^p \leqslant 2^p (|a|^p + |b|^p) \tag{1}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

◀ Үмумилији позмадан $|a| \leqslant |b|$ гәбул едә биләрик. Онда $|a + b| \leqslant 2|b|$ вә нәтиҹә

$$|a + b|^p \leqslant 2^p |b|^p \leqslant 2^p (|a|^p + |b^p)$$

олар. ▶

◀ Теореми исбат етмәк үчүн (1) бәрабәрсизлијиндән истифадә едәҹәјик. Онда

$$|x(t) + y(t)|^p \leqslant 2^p (|x(t)|^p + |y(t)|^p). \tag{2}$$

(2) бәрабәрсизлијинә вә теоремин шәртинә әсасән дејә биләрик ки,

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt < \infty. \tag{3}$$

---

[*] Керман Минковски (1864—1909) алман ријазијјатчысы вә физикидир.

Инди исә (3) интегралыны гијмәтләндирәк:

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt = \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)+y(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)| dt + \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} y(t) dt. \quad (4)$$

$q=\frac{p}{p-1}$ ишарә едиб ашағыдакы гијмәтләндирмәни апараг. Белә ки,

$$\int_a^b (|x(t)+y(t)|)^{(p-1)q} dt = \int_a^b (|x(t)+y(t)|)^{\frac{p-1}{p-1}p} dt =$$

$$= \int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt < \infty \quad (5)$$

бәрабәрлијини нәзәрә алаг.

(4)-үн саг тәрәфинә Һөлдер бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк:

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left\{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\}. \quad (6)$$

(6) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$-јә бөлүб, $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k+v_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}. \qquad (9)$$

(9) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k+v_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ -јә бөлсәк вә $1-\frac{1}{q}=\frac{I}{p}$ олдугуну да нәзәрә алсаг,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k+v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

олдуғуну аларыг. ▶

Јухарыда исбат едилән бәрабәрсизликләрин тәтбиги васитәсилә дәгиг елмләр саһәсиндә чох бөјүк нәтичәләр алынмышдыр.

Истифадə олунмуш əдəбијјат

1. Грауерт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., изд. „Мир“, 1971.
2. Əзимов М. Ə., Сəлимов Ф. Һ. Гејри-мүəјјəн интеграл. Бакы, В. И. Ленин адына АПИ-нин нəшријјаты, 1983.
3. Əзимов М. Ə., Сəлимов Ф. Һ. Мүəјјəн интеграл. Бакы, В. И. Ленин адына АПИ-нин нəшријјаты, 1984.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. т. I, МГУ, 1985.
5. Ильин В. А., Пазняк Э. Г. Основы математического анализа. М. Изд. „Наука“, 1965.
6. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. I ч., М.—Л., Технико-теоретическое издательство, 1933.
7. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. М., Изд. технико-теоретической литературы, 1953.
8. Шарл Эрмит. Курс анализа, М.—Л., ОНТИ, 1936.

МҮНДӘРИЧАТ

Азимов Муса Али оглы,
Салимов Фазил Гази оглы
(кандидаты физико-математических наук, доценты)
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
учебное пособие для педвузов
(на азербайджанском языке)

Редаксија мүдири *К. М. Меһрәлијев*
Нәшријјат редактору *Е. К. Дадашова*
Ҹилдинин рәссамы *Е. А. Ҹәлилов*
Бәдии редактору *Ј. Ф. Катакалидис*
Техники редактору *М. Ә. Әләскәрова*
Корректорлары *С. И. Һадыјева, Е. И. Тејмурова*

ИБ—2989

Јығылмаға верилмиш 17. 01. 86. Чапа имзаланмыш 25. 04. 86. Кағыз форматы 60Х90$^1/_{16}$ Мәтбәә кағызы № 2. Латын гарнитуру. Јүксәк чап. Физики вә шәрти ч. в. 18,5. Шәрти рәнк-оттиск 18,63. Учот нәшр. вәрәги 15,7. Тиражы 3200. Сифариш 125. Ҹилдлә гијмәти 80 гәп.

Азәрбајҹан ССР Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин „Маариф" нәшријјаты, Бакы 370111, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.
Азәрбајҹан ССР Дөвләт Нәшријјаты, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин 3 №-ли Бакы Китаб Мәтбәәси, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азербайджанское государственное издательство учебно-педагогической литературы „Маариф" г. Баку, ул. А. Тагизаде, № 4.
Бакинская книжная типография № 3. г. Баку, ул. А. Тагизаде № 4.

80 гəп.

Маариф